Sessão 29
MATEMÁTICA PURA

207

INTEIROS QUE SÃO SOMAS DE DOIS QUADRADOS. *Felipe Lopes Castro, Alveri Alves Sant Ana (orient.)* (UFRGS).

Esta apresentação visa caracterizar os inteiros que podem ser escritos como soma de dois quadrados. É fácil ver que $2=1^2+1^2$, $5=1^2+2^2$, $13=2^2+3^2$, $17=1^2+4^2$, e é fácil verificar também que 3, 7, 11 não são soma de dois quadrados. Os primos 5, 13, 17 são números do tipo 4k+1, enquanto 3, 7, 11 são primos da forma 4k+3. Então é natural pensarmos que um primo p é soma de dois quadrados se e só se, p = 2 ou p = 4k+1.Fermat formulou e provou este resultado, transportando este problema para um conjunto maior, o anel $Z[i] = \{a+bi; a, b \in Z\}$ (Anel dos Inteiros de Gauss). Para tanto, Ele utilizou-se da função Norma $N: Z[i] = Z+Zi \rightarrow Z$, definida por $N(a+bi) = (a+bi)(a-bi) = (a^2+b^2)$. É fácil ver que: $N(x.y) = N(x).N(y)$, para todos $x, y \in Z[i]$.Observemos agora que se p é um primo tal que $p = a^2+b^2 = (a+bi)(a-bi)$, como $a^2+b^2>1$, então p se fatora como produto de dois elementos de Z[i]. Reciprocamente, se p é produto de dois elementos de Z[i] de normas >1, teremos $p^2 = N(p) = N(a+bi)N(c+di) = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$, e como $(a^2+b^2)>1$, $(c^2+d)^2>1$ e p é primo, podemos concluir que $p = a^2+b^2$. Com esse raciocínio Fermat conclui que um primo p é soma de dois quadrados em Z se, e somente se, p se fatora num produto de dois elementos de Z[i] de normas >1. Então o novo problema que se deve analisar é o problema da fatoração em Z[i], em particular, o problema da fatoração única. Esta será a abordagem dada nesta exposição (Fapergs).