

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

Waldson Takeo Watanabe

**VERIFICAÇÃO DA ESTABILIDADE DE PILARES
ESBELTOS DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS À
FLEXO-COMPRESSÃO OBLÍQUA PELO MÉTODO EXATO:
PROPOSTA DE PROGRAMA COMPUTACIONAL**

Porto Alegre

junho 2011

WALDSON TAKEO WATANABE

**VERIFICAÇÃO DA ESTABILIDADE DE PILARES
ESBELTOS DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS À
FLEXO-COMPRESSÃO OBLÍQUA PELO MÉTODO EXATO:
PROPOSTA DE PROGRAMA COMPUTACIONAL**

Trabalho de Diplomação apresentado ao Departamento de
Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal
do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do
título de Engenheiro Civil

Orientador: Américo Campos Filho

Porto Alegre
junho 2011

WALDSON TAKEO WATANABE

**VERIFICAÇÃO DA ESTABILIDADE DE PILARES
ESBELTOS DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS À
FLEXO-COMPRESSÃO OBLÍQUA PELO MÉTODO EXATO:
PROPOSTA DE PROGRAMA COMPUTACIONAL**

Este Trabalho de Diplomação foi julgado adequado como pré-requisito para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL e aprovado em sua forma final pelo Professor Orientador e pela Coordenadora da disciplina Trabalho de Diplomação Engenharia Civil II (ENG01040) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, junho de 2011

Prof. Américo Campos Filho
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Orientador

Profa. Carin Maria Schmitt
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA

Prof. Roberto Domingo Rios (UFRGS)
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Alexandre Rodrigues Pacheco (UFRGS)
Ph.D. pela Pennsylvania State University

Prof. Américo Campos Filho (UFRGS)
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Dedico este trabalho aos meus pais, Sueji e Rosa,
e a todos que me apoiaram durante o período
do meu Curso de Graduação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, ao Prof. Américo Campos Filho, orientador deste trabalho, pela disposição e ajuda sempre que solicitado e por todo o conhecimento transmitido durante o período de Graduação.

Agradeço, também, à Profa. Carin Maria Schmitt, pelo auxílio, críticas construtivas e constante acompanhamento nestes dois semestres de elaboração do trabalho.

Agradeço aos meus pais, Sueji Watanabe e Rosa Sato Watanabe, ao Aloir, Rosana e Eduardo, que me acolheram como “filho e irmão”, e a todos os meus familiares que contribuíram de alguma forma, pelo apoio, pelo incentivo e por todas as oportunidades que me foram oferecidas.

Agradeço à minha namorada, Daniela, pelo carinho, compreensão, paciência e pelo constante incentivo.

Agradeço à Vantec Estruturas, em especial aos engenheiros Carlos Roberto Moura de Moraes e Edemir Caetano Simonato, pela oportunidade de crescimento profissional e pessoal oferecida.

Agradeço a todos que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Se nos sentarmos agora,
podemos ser atropelados mais tarde.

Franklin D. Roosevelt

RESUMO

WATANABE, W. T. **Verificação da estabilidade de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexo-compressão oblíqua pelo método exato:** proposta de programa computacional. 2011. 70 f. Trabalho de Diplomação (Graduação em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Este trabalho versa sobre a elaboração de um programa computacional para verificação da estabilidade de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexo-compressão oblíqua por um método exato. A partir da pesquisa bibliográfica, o método exato de verificação escolhido foi o método do equilíbrio, o qual consiste na verificação da segurança do pilar, em relação ao estado limite de instabilidade, sem a necessidade da determinação da carga crítica do mesmo. O método é bastante geral e pode ser utilizado para pilares com índice de esbeltez λ até 200, seção transversal qualquer e variável ao longo de sua altura, e sem a necessidade da armadura ser simétrica. O programa foi desenvolvido utilizando-se a linguagem de programação *Microsoft Visual Basic*, a qual permitiu criar uma interface bastante amigável ao usuário. Foi empregado o Teorema de Green para transformar as integrais de superfície sobre a zona de concreto comprimido em integrais de linha ao longo do contorno da poligonal da seção. O sistema de três equações não lineares com três incógnitas é resolvido pelo Método de Newton Raphson. O programa calcula, para cada uma das seções discretizadas, a inclinação da linha neutra, a curvatura, o deslocamento e os esforços, verificando se nenhum estado limite foi excedido ou se houve ruptura da seção. Também será apresentado o procedimento para análise de estabilidade de pilares de concreto armado submetidos à flexo-compressão oblíqua pelo método do equilíbrio, bem como a identificação dos parâmetros necessários.

Palavras-chave: método do equilíbrio; pilares esbeltos; flexo-compressão oblíqua.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: representação esquemática do delineamento da pesquisa	20
Figura 2: instabilidade na compressão axial	22
Figura 3: comprimentos de flambagem	22
Figura 4: flambagem além do limite F_0 de proporcionalidade	23
Figura 5: flexão composta de barras esbeltas no regime elástico	24
Figura 6: estabilidade das formas de equilíbrio	24
Figura 7: definição da seção de concreto	25
Figura 8: influência da fluência sobre o diagrama de tensão-deformação do concreto ...	32
Figura 9: modos de aplicação do processo	33
Figura 10: etapas do processo de verificação do deslocamento de referência	34
Figura 11: distribuição de deformações em uma seção de concreto armado	36
Figura 12: regiões para integração das tensões do concreto	41
Figura 13: sistema equivalente de Mohr para uma barra bi-rotulada	52
Figura 14: barra reta submetida à flexo-compressão oblíqua	55
Figura 15: curvaturas em uma seção submetida à flexo-compressão oblíqua	56
Figura 16: dados de entrada do programa	61
Figura 17: preenchimento dos dados das seções transversais	62
Figura 18: aviso de conclusão de entrada de dados	63
Figura 19: aviso de ruptura	63
Figura 20: aviso de pilar estável	64
Figura 21: resultados da iteração	64
Figura 22: relatório de dados de entrada	65
Figura 23: exemplo de aplicação: pilar bi-rotulado	67
Figura 24: resultados da verificação para um pilar bi-rotulado na direção x	68
Figura 25: resultados da verificação para um pilar bi-rotulado na direção y	68

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: verificação da segurança dos pilares	30
--	----

LISTA DE SÍMBOLOS

a = deslocamento transversal da barra;

F_{crit} = carga crítica ou carga de flambagem;

EI = rigidez à flexão;

G_{00} = polinômio de integração;

G_{01} = polinômio de integração;

G_{02} = polinômio de integração;

G_{03} = polinômio de integração;

G_{10} = polinômio de integração;

G_{11} = polinômio de integração;

G_{12} = polinômio de integração;

G_{20} = polinômio de integração;

S_x = momento estático em relação ao eixo x ;

S_y = momento estático em relação ao eixo y ;

I_x = momento de inércia em relação ao eixo x ;

I_y = momento de inércia em relação ao eixo y ;

I_{xy} = momento de inércia em relação aos eixos x e y ;

(X, Y) = coordenadas do sistema de eixos global;

(x, y) = coordenadas do sistema de eixos local;

(X_G, Y_G) = coordenadas do centro de gravidade da seção de concreto;

ℓ_e = comprimento de flambagem;

λ = índice de esbeltez;

i = raio de giração da seção de concreto;

I_c = momento principal central de inércia mínimo da seção transversal do pilar;

A_c = área da seção transversal;

σ_c = tensão de compressão no concreto;

E_c = módulo de elasticidade longitudinal do concreto;

ε_c = deformação específica imediata do concreto;

ε_{cc} = deformação específica por fluência do concreto;

$\varepsilon_{c,total}$ = deformação específica total do concreto;

ϕ = coeficiente de fluência;

α_k = fração do esforço normal que produz a fluência;

β = fração do momento fletor de primeira ordem que produz fluência;

$\phi_{(t_{\infty}, t_0)}$ = coeficiente de fluência real do problema;

Δx = comprimento das n partes divididas da barra;

ℓ = comprimento da barra;

n = número de partes divididas da barra de comprimento Δx ;

MR_x , MR_y e NR são os esforços resistentes, funções dos parâmetros a , b , c ;

MA_x , MA_y e NA são os esforços atuantes;

a = inclinação da linha neutra;

b = curvatura;

c = deformação do centróide da seção;

$[K(\{u\}_i)]$ = matriz que contém as derivadas parciais dos esforços resistentes em relação aos parâmetros de ajuste;

$\{u\}_i$ = vetor com os parâmetros α , b e c a serem ajustados;

$\{\Delta u\}_i$ = vetor incremental de $\{u\}_i$;

$\{\Delta p\}_i$ = vetor de diferenças entre os esforços atuantes e os esforços resistentes, correspondentes aos valores de α , b e c da i -ésima iteração;

$\frac{\partial MR_x}{\partial \alpha}$ = derivada parcial do momento fletor resistente na direção x em relação à linha neutra;

$\frac{\partial MR_x}{\partial b}$ = derivada parcial do momento fletor resistente na direção x em relação à curvatura;

$\frac{\partial MR_x}{\partial c}$ = derivada parcial do momento fletor resistente na direção x em relação à deformação do centróide da seção;

$\frac{\partial MR_y}{\partial \alpha}$ = derivada parcial do momento fletor resistente na direção y em relação à linha neutra;

$\frac{\partial MR_y}{\partial b}$ = derivada parcial do momento fletor resistente na direção y em relação à curvatura;

$\frac{\partial MR_y}{\partial c}$ = derivada parcial do momento fletor resistente na direção y em relação à deformação do centróide da seção;

$\frac{\partial NR}{\partial \alpha}$ = derivada parcial do esforço normal resistente em relação à linha neutra;

$\frac{\partial NR}{\partial b}$ = derivada parcial do esforço normal resistente em relação à curvatura;

$\frac{\partial NR}{\partial c}$ = derivada parcial do esforço normal resistente em relação à deformação do centróide da seção;

$\Delta \alpha$ = incremento da linha neutra;

Δb = incremento da curvatura;

Δc = incremento da deformação do centróide da seção;

$\{\Delta p\}_i$ = vetor de desequilíbrio entre esforços atuantes e esforços resistentes;

(ξ, η) = coordenadas do sistema de eixos auxiliar;

MR_ξ = momento resistente na direção ξ do sistema de eixos (ξ, η) ;

MR_η = momento resistente na direção η do sistema de eixos (ξ, η) ;

D_0, D_1 e D_2 = parâmetros auxiliares no cálculo dos esforços resistentes;

k_1 e k_2 = rigidez adimensional;

ρ_i = porcentagem relativa à i -ésima barra de armadura;

A_s = área de aço;

E_T = módulo de elasticidade longitudinal tangente do aço;

ε_i = deformação específica do aço relativa à i -ésima etapa;

η_i = coeficiente de conformação superficial relativa à i -ésima etapa;

h_a = maior dimensão da seção medida perpendicularmente à própria linha neutra;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ e ε_4 = deformações específicas dos vértices;

$1/r_x, 1/r_y$ = curvaturas nas direções x e y ;

$1/r_a$ = curvatura no plano perpendicular à linha neutra;

h_x e h_y = seção transversal da barra.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
2 MÉTODO DE PESQUISA	17
2.1 QUESTÃO DE PESQUISA	17
2.2 OBJETIVOS DO TRABALHO	17
2.2.1 Objetivo Principal	17
2.2.2 Objetivos Secundários	18
2.3 PRESSUPOSTO	18
2.4 DELIMITAÇÃO	18
2.5 LIMITAÇÕES	18
2.6 DELINEAMENTO	19
3 ESTADO LIMITE ÚLTIMO DE INSTABILIDADE	21
3.1 INSTABILIDADE NA COMPRESSÃO AXIAL QUANTO À FLAMBAGEM	21
3.2 INSTABILIDADE NA FLEXÃO COMPOSTA	23
4 MÉTODO EXATO	25
4.1 PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO TRANSVERSAL	25
4.2 RECOMENDAÇÕES DA NBR 6118/2003 SOBRE PILARES	29
4.3 CONSIDERAÇÃO DOS EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM	30
4.4 CONSIDERAÇÃO DA FLUÊNCIA	31
4.5 MÉTODO DO EQUILÍBRIO	33
4.5.1 Determinação das curvaturas	35
4.5.1.1 Cálculo dos esforços resistentes	40
4.5.1.2 Determinação das coordenadas das extremidades dos segmentos definidos pelas regiões 0, I e II	44
4.5.1.3 Determinação dos elementos da matriz de derivadas parciais	46
4.5.2 Determinação dos deslocamentos	50
4.6 INSTABILIDADE NA FLEXO-COMPRESSÃO OBLÍQUA	54
4.6.1 Deformação do eixo da barra	55
4.6.2 Curvaturas para seção transversal qualquer	56
4.6.3 Verificação do estado limite de instabilidade de um pilar pelo método do equilíbrio	59
5 O SOFTWARE	60
5.1 DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA	60
5.2 ENTRADA DE DADOS	61

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	66
REFERÊNCIAS	70

1 INTRODUÇÃO

Os projetos estruturais têm como objetivo atender à sua função primária sem entrar em colapso e, também, sem deformar ou vibrar excessivamente, atendendo às normas técnicas vigentes. O custo da estrutura representa uma das parcelas mais importantes, senão a mais importante de uma obra. Logo, o engenheiro estrutural precisa de uma boa base de conhecimento e experiência para projetar estruturas seguras e economicamente viáveis.

Na época em que as construções civis utilizavam aço CA-25 e concreto de 15 MPa, a preocupação dos projetistas em relação à instabilidade de pilares, a qual, para concreto armado, é um estado limite último, praticamente não existia, já que as seções transversais eram bastante robustas. Entretanto, com o desenvolvimento da tecnologia do concreto com resistências superiores a 30 MPa e do aço com maior resistência (CA-50), tornou-se possível projetar estruturas mais leves e, ao mesmo tempo, conseguindo atender os requisitos de segurança. Como consequência dessa evolução, para uma mesma solicitação, necessita-se de uma menor seção transversal do pilar, tornando o estudo de sua estabilidade fundamental para certas situações.

As solicitações que as seções transversais dos pilares de concreto armado estão normalmente submetidas são duas: esforço normal de compressão e momento fletor. De acordo como elas são aplicadas, podem ser compressão centrada, flexo-compressão normal e flexo-compressão oblíqua. A flexo-compressão oblíqua ocorre quando o plano de ação do momento fletor não contém um eixo de simetria da seção transversal da peça ou quando ela não possui eixo de simetria. Nesta situação, a linha neutra não é conhecida *a priori*, sendo necessário efetuar processos iterativos para determinação da sua inclinação e profundidade.

O objetivo deste trabalho é desenvolver um programa computacional para verificação da estabilidade de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexo-compressão oblíqua por um método exato (método do equilíbrio). A ferramenta a ser utilizada para atingir tal objetivo será o *Microsoft Visual Basic*.

No capítulo 2 apresenta-se o método de pesquisa, incluindo a questão de pesquisa, objetivos principal e secundários, pressuposto, delimitação, limitações e delineamento que orientaram a realização deste trabalho. O capítulo 3 descreve o estado limite último de instabilidade de pilares de concreto armado. No capítulo 4, é mostrada a revisão bibliográfica sobre a verificação da estabilidade de pilares esbeltos de concreto armado pelo método do equilíbrio. O capítulo 5 apresenta o software (sua funcionalidade, entrada e saída de dados). Por fim, no capítulo 6 são apresentadas as considerações finais.

2 MÉTODO DE PESQUISA

Neste capítulo, apresenta-se o método de pesquisa do trabalho. Para tanto, foi dividido nas seguintes partes: questão de pesquisa, objetivos principal e secundários, pressuposto, delimitação, limitações e delineamento.

2.1 QUESTÃO DE PESQUISA

A questão de pesquisa deste trabalho é: qual seria um algoritmo adequado para verificação da estabilidade de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexo-compressão oblíqua pelo método exato, visando a elaboração de um programa computacional?

2.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

Os objetivos do trabalho estão classificados em principal e secundários e são apresentados nos próximos itens.

2.2.1 Objetivo principal

O objetivo principal deste trabalho é a elaboração de um software que, para a solicitação de flexo-compressão oblíqua, verifique a segurança de pilares esbeltos de concreto armado em relação ao estado limite de instabilidade, segundo o método exato, utilizando a linguagem de programação *Microsoft Visual Basic*.

2.2.2 Objetivos secundários

Os objetivos secundários deste trabalho são:

- a) apresentação do método do equilíbrio;
- b) identificação dos parâmetros para realizar a verificação da estabilidade de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexo-compressão oblíqua pelo método do equilíbrio.

2.3 PRESSUPOSTO

Como pressuposto básico da pesquisa, foi considerado válido como um método exato, o método do equilíbrio.

2.4 DELIMITAÇÃO

A pesquisa ficou delimitada ao estudo e desenvolvimento de um programa computacional, para verificação da estabilidade de pilares esbeltos de concreto armado, com seção transversal qualquer e variável ao longo da sua altura, submetidos à flexo-compressão oblíqua, utilizando o método do equilíbrio.

2.5 LIMITAÇÕES

As limitações do trabalho são abaixo apresentadas:

- a) uso de uma única linguagem de programação;
- b) não foi programado para todas as condições de vínculos;
- c) o software não converge em alguns casos;
- d) os resultados obtidos da verificação, pelo método do equilíbrio, garantem a segurança, mas não fornecem, necessariamente, a solução mais otimizada.

2.6 DELINEAMENTO

O trabalho foi realizado através das etapas apresentadas a seguir:

- a) pesquisa bibliográfica;
- b) compreensão e análise do problema de pesquisa;
- c) sistematização do modelo de cálculo;
- d) desenvolvimento do software;
- e) validação do software;
- f) considerações finais.

Primeiramente, foi realizada a **pesquisa bibliográfica**, a qual teve por finalidade o aprofundamento da questão de pesquisa, visando o entendimento da aplicação dos parâmetros para elaboração do software. Além disso, por ser uma etapa de obtenção de conhecimento, ela teve uma duração maior que as outras etapas, estendendo-se do início ao fim do trabalho. Na segunda etapa, denominada **compreensão e análise do problema de pesquisa**, foi feita a pré-identificação e compreensão do problema e dos fatores envolvidos para a sua resolução.

A **sistematização do método de cálculo** foi estudada com o intuito de elaborar um processo automático que possibilite a verificação de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexo-compressão oblíqua pelo método exato numa rotina computacional. A etapa seguinte referiu-se ao **desenvolvimento do software** com o emprego do *Microsoft Visual Basic*. Também foi criada uma interface que permite a interação entre o programa e o usuário. No final desta etapa, obteve-se o programa computacional para verificação de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexo-compressão oblíqua pelo método exato.

A seguir, a fase de **validação do software** teve como objetivo demonstrar a coerência do resultado da verificação através de exemplos e programas existentes. Na etapa final, as **considerações finais** serviram para concluir o trabalho. A figura 1 apresenta, em forma de diagrama, as etapas citadas anteriormente.

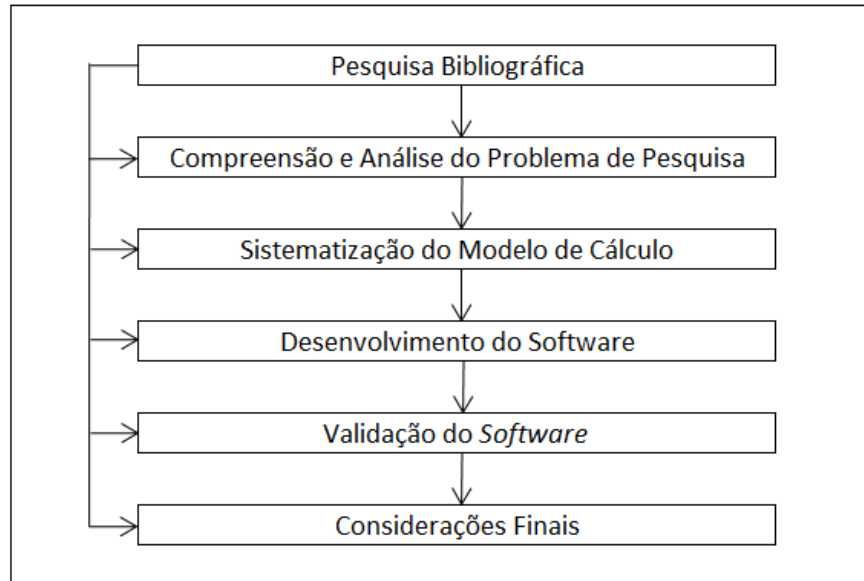


Figura 1: representação esquemática do delineamento da pesquisa

3 ESTADO LIMITE ÚLTIMO DE INSTABILIDADE

Em pilares de concreto armado, a instabilidade é um estado limite último que ocorre nas peças submetidas à flexo-compressão como consequência de um carregamento que cessa sua capacidade portante antes que a estrutura atinja a ruína por ruptura convencional do concreto ou por deformação plástica excessiva da armadura. Em outros materiais como, por exemplo, o celulósido e o acrílico, a barra pode resistir a cargas superiores à carga de flambagem, devido ao fato de que o estado limite de flambagem não é um estado limite último (FUSCO, 1981, p. 155).

3.1 INSTABILIDADE NA COMPRESSÃO AXIAL QUANTO À FLAMBAGEM

Quando agem carregamentos crescentes em barras retas comprimidas axialmente, pode ser atingido um estado limite a partir do qual a forma reta de equilíbrio deixa de ser estável. A carga crítica F_{crit} , ou carga de flambagem, é a carga correspondente a esse estado limite. O mesmo autor explica que no diagrama que relaciona a carga F aplicada com o máximo **deslocamento transversal** a da barra, pode existir um ponto de bifurcação do equilíbrio o qual caracteriza o fenômeno de instabilidade das barras comprimidas axialmente, como mostra a figura 2.

A carga crítica de flambagem, para diferentes condições de contorno, pode ser determinada pela fórmula 1 (FUSCO, 1981, p. 156):

$$F_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{l_e^2} \quad (\text{fórmula 1})$$

Onde:

F_{crit} = carga crítica de Euler ou carga de flambagem;

EI = rigidez à flexão;

l_e = comprimento equivalente de flambagem.

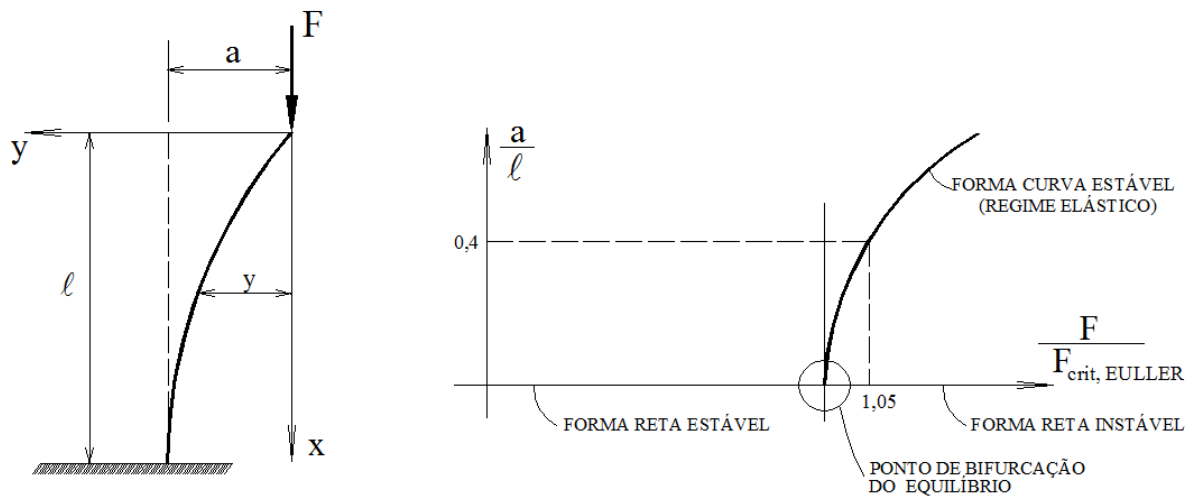


Figura 2: instabilidade na compressão axial (FUSCO, 1981, p. 155)

O comprimento de flambagem é dado pela figura 3 para os casos mais usuais.

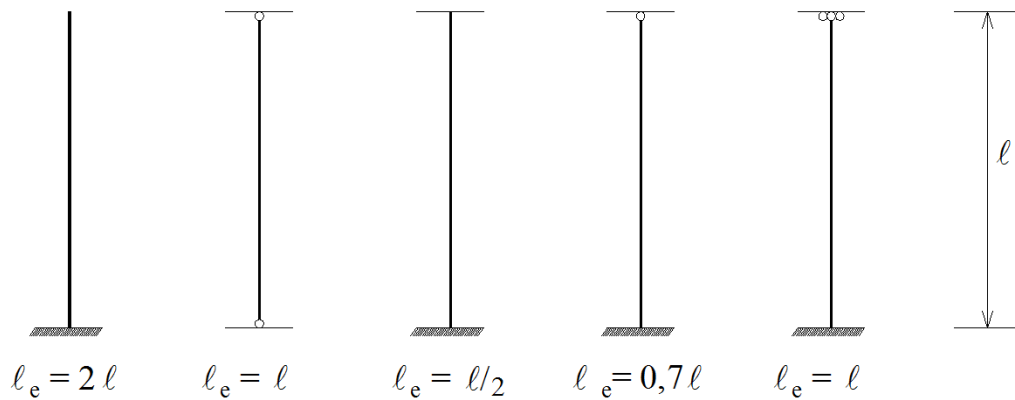


Figura 3: comprimentos de flambagem
(adaptado de FUSCO, 1981, p. 156)

Fusco (1981, p. 157) comenta sobre a flambagem além do limite de proporcionalidade, e é ilustrado na figura 4:

[...] o fenômeno de instabilidade das barras retas comprimidas axialmente pode ocorrer tanto com tensões menores quanto com tensões maiores do que o limite de proporcionalidade, sem que se altere a natureza do fenômeno, que é o da mudança da forma de equilíbrio. Todavia, quando não mais existe a elasticidade linear do material, é possível provar-se que a mudança da forma de equilíbrio pode corresponder a um comportamento simétrico instável. Neste caso, para $F > F_{crit}$ a forma da reta de equilíbrio é instável e a forma fletida é impossível.

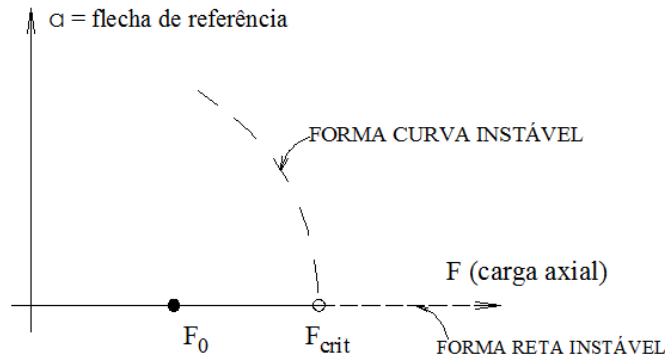


Figura 4: flambagem além do limite F_0 de proporcionalidade (adaptado de FUSCO, 1981, p. 157)

3.2 INSTABILIDADE NA FLEXÃO COMPOSTA

De acordo com Fusco (1981, p. 161-162), determinando a flecha de uma barra esbelta em regime elástico submetida à flexão composta, chega-se aos resultados mostrados na figura 5. Portanto, sempre haverá uma configuração de equilíbrio estável enquanto o material permanecer no regime elástico, não existindo problema de instabilidade na flexão composta. No caso em que o material tem um comportamento não-linear, as formas de equilíbrio vão ser dadas pela figura 6.

Fusco (1981, p. 166) explica que:

[...] no caso de flexo-compressão o equilíbrio é impossível para $F > F_{crit}$. O ponto B não corresponde a uma mudança da configuração de equilíbrio estável, mas sim a uma reversão do andamento das deformações. Antes de se atingir o ponto B, isto é, para $F < F_{crit}$, a um aumento de F corresponde um aumento da **flecha a**. Pelo contrário, após ser atingido o ponto B, não somente é impossível aumentar a carga, como a própria manutenção do equilíbrio somente será possível com um sistema de deformação controlada, pois o aumento das flechas corresponde a uma diminuição das cargas.

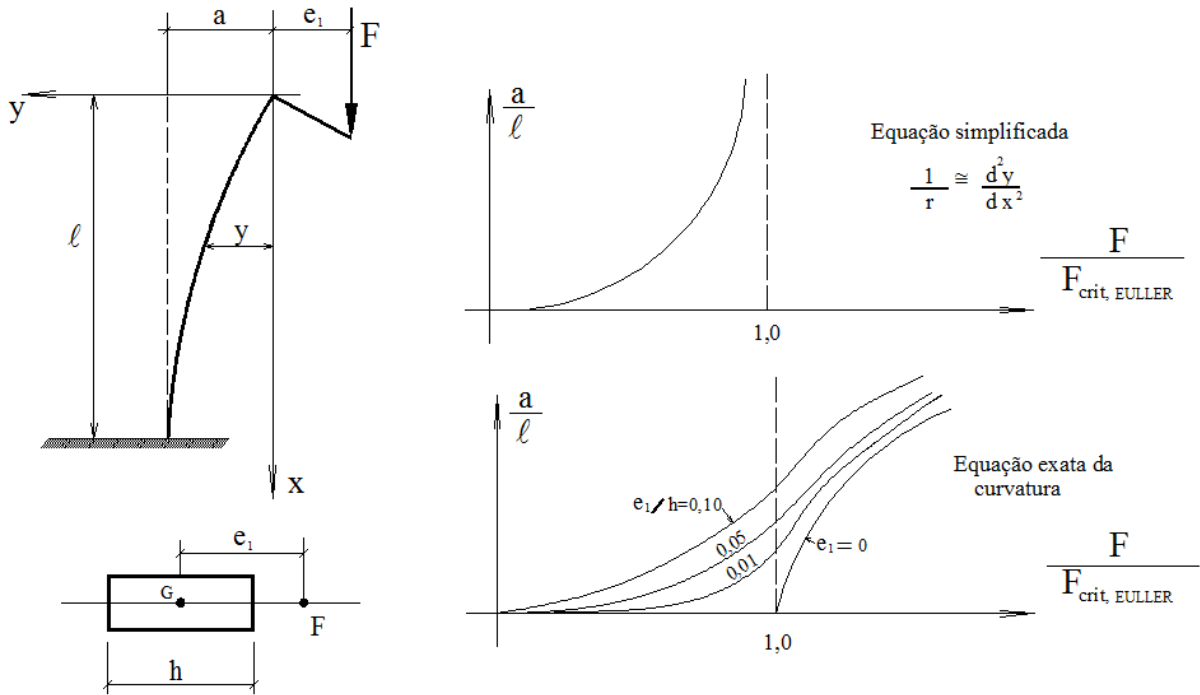


Figura 5: flexão composta de barras esbeltas no regime elástico (FUSCO, 1981, p. 162)

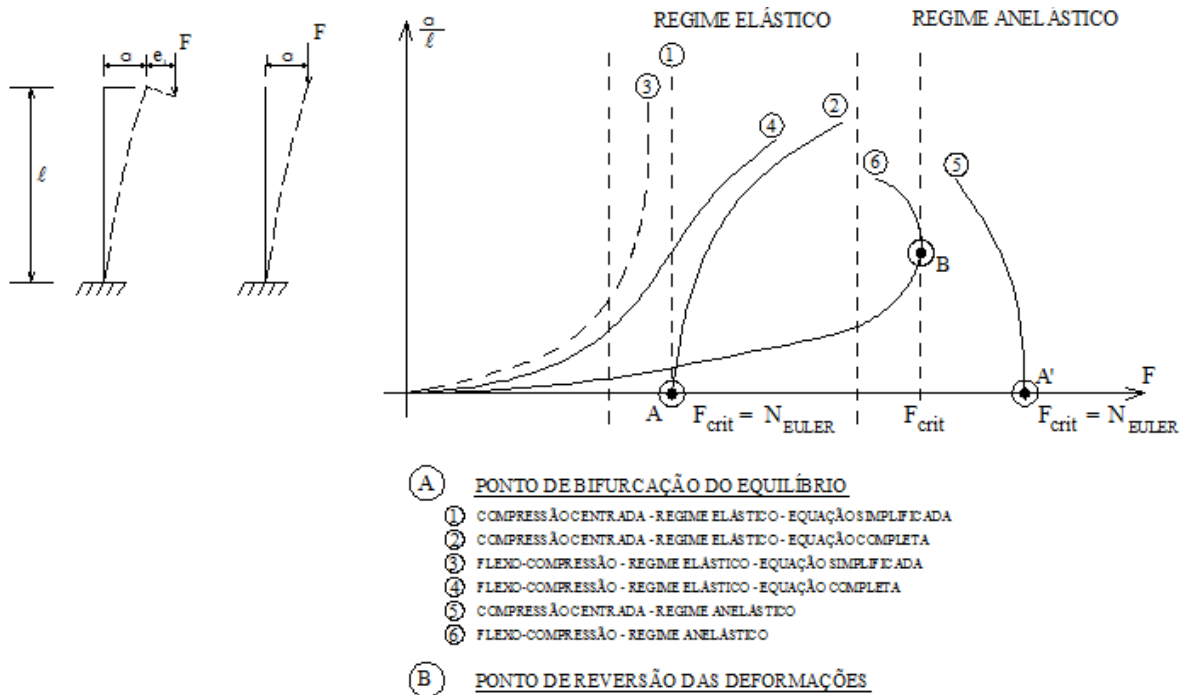


Figura 6: estabilidade das formas de equilíbrio (adaptado de FUSCO, 1981, p. 165)

4 MÉTODO EXATO

A verificação da segurança da estabilidade de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexo-compressão oblíqua pode ser feita pelos mesmos procedimentos da flexo-compressão normal com as devidas adaptações para a consideração tanto da existência de dois momentos fletores, quando da variação da posição da linha neutra.

4.1 PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DA SEÇÃO TRANSVERSAL

A seção de concreto é definida por uma poligonal fechada. As coordenadas dos vértices são definidas em função de um sistema global (X, Y) e numeradas no sentido anti-horário. No caso de existirem aberturas no interior da seção, os vértices são numerados no sentido horário como apresentado na figura 7 (CAMPOS FILHO, 2000, p. 3).

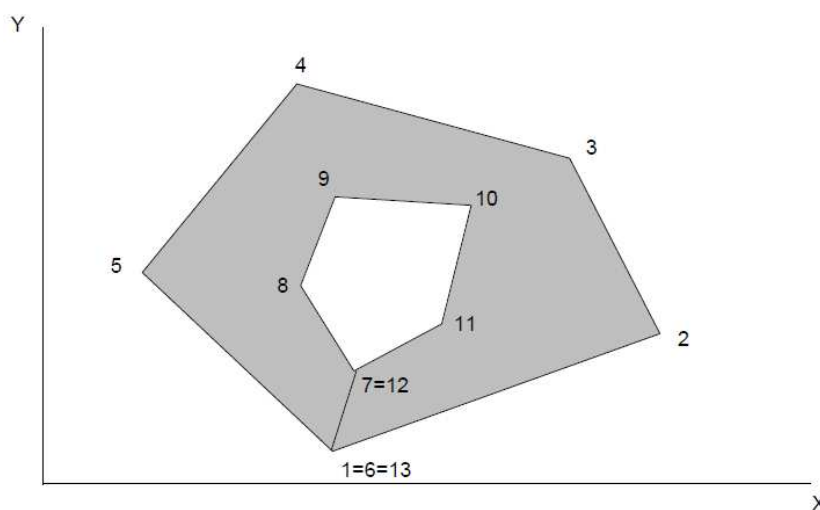


Figura 7: definição da seção de concreto (CAMPOS FILHO, 2000, p. 3)

Um segundo sistema de eixos (x, y) , dito local, torna-se necessário devido aos esforços atuantes serem definidos no baricentro na seção de concreto, por conveniência. Portanto,

deve-se fazer uma translação do sistema de eixos global para o sistema de eixos local conforme apresentado a seguir (CAMPOS FILHO, 2000, p. 4-5).

A área da seção transversal é calculada pela fórmula 2:

$$A = \int_A dA = \sum_{i=1}^n G_{00} \quad (\text{fórmula 2})$$

Os momentos estáticos em relação ao eixo X e Y, são obtidos pelas fórmulas 3 e 4:

$$S_X = \int_A Y dA = \sum_{i=1}^n G_{01} \quad (\text{fórmula 3})$$

$$S_Y = \int_A X dA = \sum_{i=1}^n G_{10} \quad (\text{fórmula 4})$$

Os momentos de inércia em relação aos eixos X e Y, são calculados pelas fórmulas 5 e 6:

$$I_X = \int_A Y^2 dA = \sum_{i=1}^n G_{02} \quad (\text{fórmula 5})$$

$$I_Y = \int_A YX^2 dA = \sum_{i=1}^n G_{20} \quad (\text{fórmula 6})$$

Já o produto de inércia em relação aos eixos X e Y, é obtido pela fórmula 7:

$$I_{XY} = \int_A XYdA = \sum_{i=1}^n G_{11} \quad (\text{fórmula 7})$$

No qual, n é o número de segmentos da poligonal fechada que descreve a seção e G_{00} , G_{01} , G_{10} , G_{02} , G_{20} e G_{11} são os polinômios de integração derivados da aplicação do Teorema de Green no plano, onde essas integrações são efetuadas transformando-se as integrais de superfície que definem as tensões do concreto, em integrais de linha ao longo de um contorno que delimita a região. A seguir, nas fórmulas 8 a 13, são apresentados os polinômios necessários para os cálculos (CAMPOS FILHO, 2000, p. 37):

$$G_{00} = \left(\xi_i + \frac{\Delta\xi}{2} \right) \Delta\eta \quad (\text{fórmula 8})$$

$$G_{01} = \left[\xi_i \left(\eta_i + \frac{\Delta\eta}{2} \right) + \Delta\xi \left(\frac{\eta_i}{2} + \frac{\Delta\eta}{3} \right) \right] \Delta\eta \quad (\text{fórmula 9})$$

$$G_{10} = \left[\xi_i (\xi_i + \Delta\xi) + \frac{\Delta\xi^2}{3} \right] \frac{\Delta\eta}{2} \quad (\text{fórmula 10})$$

$$G_{02} = \left\{ \xi_i \left[\eta_i (\eta_i + \Delta\eta) + \frac{\Delta\eta^2}{3} \right] + \Delta\xi \left[\eta_i \left(\frac{\eta_i}{2} + \frac{2\Delta\eta}{3} \right) + \frac{\Delta\eta^2}{4} \right] \right\} \Delta\eta \quad (\text{fórmula 11})$$

$$G_{20} = \left\{ \frac{\Delta\xi^3}{4} + \xi_i \left[\Delta\xi^2 + \xi_i \left(\frac{3\Delta\xi}{2} + \xi_i \right) \right] \right\} \frac{\Delta\eta}{3} \quad (\text{fórmula 12})$$

$$G_{11} = \left\{ \xi_i \left[\xi_i \left(\eta_i + \frac{\Delta\eta}{2} \right) + \Delta\xi \left(\eta_i + \frac{2\Delta\eta}{3} \right) \right] + \Delta\xi^2 \left(\frac{\eta_i}{3} + \frac{\Delta\eta}{4} \right) \right\} \frac{\Delta\eta}{2} \quad (\text{fórmula 13})$$

As coordenadas (X_G, Y_G) do centro de gravidade da seção de concreto, referidas ao sistema de eixos global (X, Y) , são dadas pelas fórmulas 14 e 15:

$$X_G = \frac{S_Y}{A} \quad (\text{fórmula 14})$$

$$Y_G = \frac{S_X}{A} \quad (\text{fórmula 15})$$

É feita, então, a translação das coordenadas do sistema de eixos global para o sistema de eixos local através das fórmulas 16 e 17:

$$x = X - X_G \quad (\text{fórmula 16})$$

$$y = Y - Y_G \quad (\text{fórmula 17})$$

As propriedades geométricas da seção homogênea de concreto, em relação ao sistema de eixos local (x, y) , são determinadas a seguir.

Os momentos de inércia em relação aos eixos x e y são obtidos pelas fórmulas 18 e 19:

$$I_x = IX - A.Y_G^2 \quad (\text{fórmula 18})$$

$$I_y = IY - A.X_G^2 \quad (\text{fórmula 19})$$

E o produto de inércia em relação aos eixos x e y pela fórmula 20:

$$I_{xy} = IXY - A.X_G Y_G \quad (\text{fórmula 20})$$

4.2 RECOMENDAÇÕES DA NBR 6118 SOBRE PILARES

O tipo de verificação a ser feita em pilares depende do índice de esbeltez, sendo ele calculado pelas fórmulas 21 e 22 indicadas na NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2003, p. 95):

$$\lambda = \frac{l_e}{i} \quad (\text{fórmula 21})$$

$$i = \sqrt{\frac{I_c}{A_c}} \quad (\text{fórmula 22})$$

Onde:

l_e = comprimento de flambagem;

λ = índice de esbeltez;

i = raio de giração da seção de concreto;

I_c = momento principal central de inércia mínimo da seção transversal do pilar;

A_c = área.

As exigências da NBR 6118 para a verificação da segurança de pilares esbeltos podem ser resumidas no quadro 1 (FUSCO, 1981, p. 252). De acordo com elas, o processo de cálculo utilizando o método exato é obrigatório para índice de esbeltez $\lambda \geq 140$, podendo ser usado,

Verificação da estabilidade de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexo-compressão oblíqua pelo método exato: proposta de programa computacional.

entretanto, para qualquer pilar com $\lambda \leq 200$. Este método, também, é o único permitido para fazer a verificação quando a armadura ou a seção transversal não são simétricas ou quando a seção é variável ao longo do pilar. A consideração da fluência e das deformações também é obrigatória sendo descritas nos itens 4.3 e 4.4 a seguir.

λ	Consideração das deformações	PROCESSO DE CÁLCULO			Consideração da fluência
		Exato	Aproximado (diagramas M, N, 1/r)	Aproximado	
$\leq \lambda_1$	dispensável	-	-	-	-
≤ 90	obrigatória	dispensável	permitido	permitido	dispensável
≤ 140				não permitido	obrigatória
≤ 200		obrigatório	não permitido		
NÃO É PERMITIDO EMPREGAR $\lambda > 200$					

Quadro 1: verificação da segurança dos pilares (adaptado de FUSCO, 1981, p. 252)

4.3 CONSIDERAÇÃO DOS EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM

Conforme Fusco (1981, p. 251), para fazer a verificação da estabilidade de pilares esbeltos é muito importante levar em consideração, além dos esforços iniciais devidos às cargas aplicadas à estrutura e dos esforços devidos às excentricidades acidentais, os efeitos de segunda ordem que aparecem com as deformações da própria estrutura. A não consideração da posição deformada pode causar diferenças consideráveis nos cálculos.

Segundo a NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2003, p. 89) os efeitos de segunda ordem “[...] são aqueles que se somam aos obtidos numa análise de

primeira ordem (em que o equilíbrio da estrutura é estudado na configuração geométrica inicial), quando a análise do equilíbrio passa a ser efetuada considerando a configuração deformada.”.

4.4 CONSIDERAÇÃO DA FLUÊNCIA

A consideração da fluência deve obrigatoriamente ser realizada em pilares com índice de esbeltez $\lambda \geq 90$ conforme o quadro 1 citado anteriormente (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2003, p. 98). Por consequência disso, tem-se que a deformação total do concreto é dada pela fórmula 25 a qual é deduzida combinando as fórmulas 23 e 24 (FUSCO, 1981, p. 328):

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c} \quad (\text{fórmula 23})$$

$$\varepsilon_{cc} = \phi \varepsilon_c \quad (\text{fórmula 24})$$

$$\varepsilon_{c,total} = \varepsilon_c + \varepsilon_{cc} = (1 + \phi)\varepsilon_c = (1 + \phi)\frac{\sigma_c}{E_c} \quad (\text{fórmula 25})$$

Onde:

σ_c = tensão de compressão no concreto;

E_c = módulo de elasticidade longitudinal do concreto;

ε_c = deformação específica imediata do concreto;

ε_{cc} = deformação específica por fluência do concreto;

$\varepsilon_{c,total}$ = deformação específica total do concreto;

ϕ = coeficiente de fluência.

Segundo Fusco (1981, p. 328), adotando-se a hipótese de ϕ ser independente de σ_c , por efeito da fluência, o diagrama tensão-deformação do concreto sofre uma transformação, como pode ser visto na figura 8.

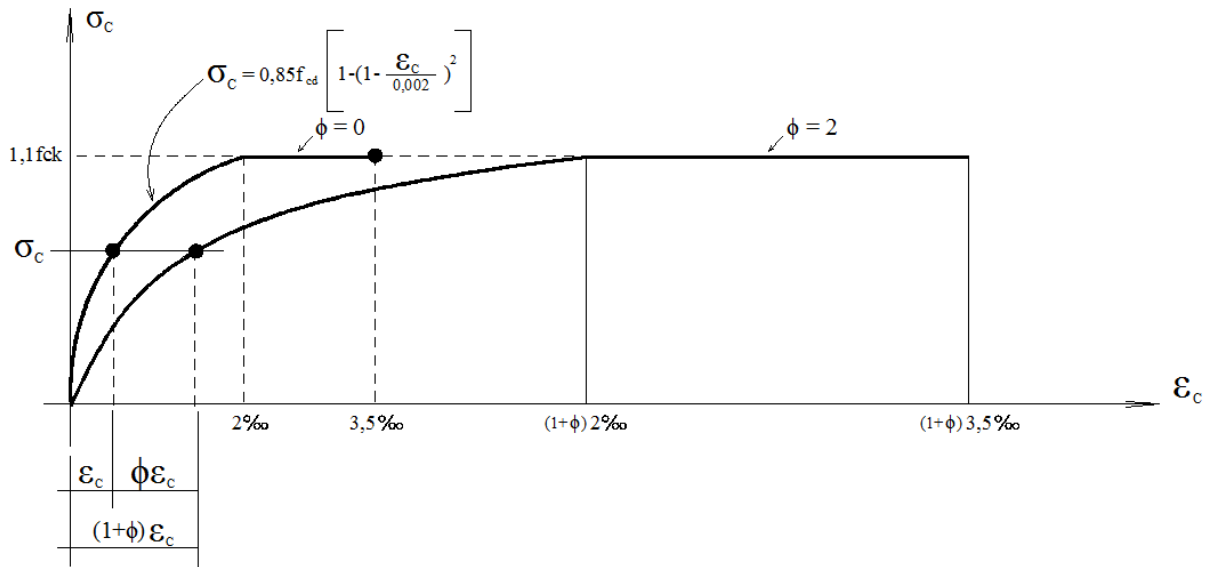


Figura 8: influência da fluência sobre o diagrama de tensão-deformação do concreto (adaptado de FUSCO, 1981, p. 329)

No entanto, quando coexistirem cargas de curta e longa duração, recomenda-se a utilização do método da função equivalente de fluência, na qual consiste em realizar o cálculo como se toda carga fosse de longa duração, adotando-se para o valor da fluência o valor efetivo dado pela fórmula 26 (FUSCO, 1981, p. 330):

$$\phi_{ef} = \alpha^* \beta^* \phi(t_{\infty}, t_0) \quad (\text{fórmula 26})$$

Onde:

α^* = fração do esforço normal que produz a fluência;

β^* = fração do momento fletor de primeira ordem que produz fluência;

$\phi(t_{\infty}, t_0)$ = é o coeficiente de fluência real do problema.

4.5 MÉTODO DO EQUILÍBRIO

A nomenclatura utilizada neste trabalho como **método exato** refere-se ao **método do equilíbrio**. Ele é um processo de verificação de pilares contra o estado limite último de instabilidade, o qual respeita as exigências da NBR 6118/2003, referente ao método geral.

O método geral “Consiste na análise não-linear de segunda ordem efetuada com discretização adequada da barra, consideração da relação momento-curvatura real em cada seção, e consideração da não-linearidade geométrica de maneira não aproximada.” (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2003, p. 96). Nesta única frase citada, resumem-se os vários processos necessários para verificação da estabilidade de pilares esbeltos de concreto armado pelo método do exato.

O método do equilíbrio verifica a segurança de um pilar de seção transversal qualquer e variável ao longo de sua altura, frente ao estado limite de instabilidade, não precisando calcular a carga crítica do mesmo. Em outras palavras, o método do equilíbrio consiste em verificar-se que, sob a ação do carregamento de cálculo F_d , a flecha $y_{ref,d}$ da seção de referência corresponde a uma configuração estável de equilíbrio (FUSCO, 1981, p. 190). Devido a essas condições, é necessário calcular apenas um ponto do diagrama esforço-deslocamento, conforme mostra a figura 9. As etapas indicadas na figura 10 mostram o processo para verificação da estabilidade da configuração de equilíbrio (FUSCO, 1981, p. 191).

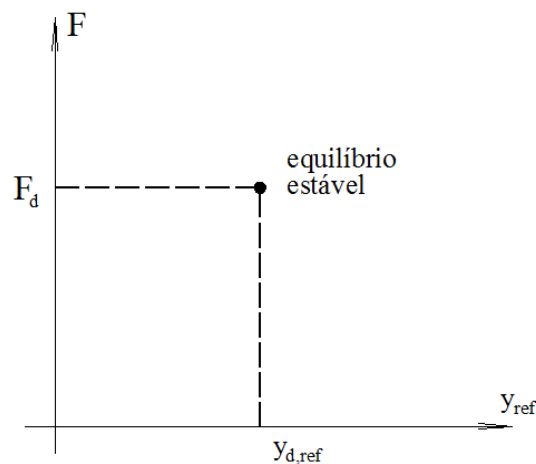


Figura 9: modos de aplicação do processo (FUSCO, 1981, p. 191)

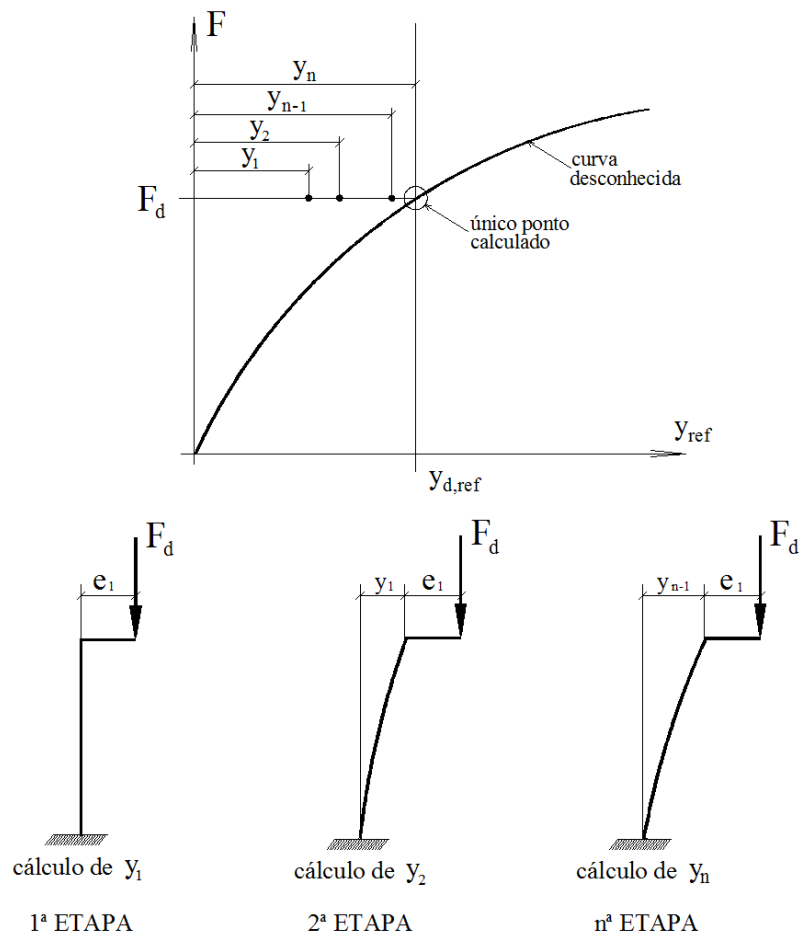


Figura 10: etapas do processo de verificação do deslocamento de referência (FUSCO, 1981, p. 191)

O processo é descrito da seguinte maneira (FUSCO, 1981, p. 192):

Na primeira etapa calcula-se o deslocamento y_1 considerando apenas os efeitos de primeira ordem. Qualquer que seja o tipo de carregamento ou de variação de seção transversal, dispondo-se dos diagramas ($M, N, 1/r$) podem ser calculadas as flechas y_1 .

Na segunda etapa já se considera a configuração da barra com as deformações calculadas na etapa anterior e assim sucessivamente.

As flechas calculadas $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ constituem-se numa sequência que, quando convergente, comprova a estabilidade da configuração de equilíbrio.

Observa-se que pelo fato de a sequência ser construída a partir da flecha y , decorrente apenas dos efeitos de primeira ordem, quando ela for convergente o equilíbrio será estável, pois ele corresponderá necessariamente ao ramo ascendente da curva (F, y_{ref}).

A convergência da sequência pode ser constatada numericamente. Quando ela ocorre, sabe-se que o ponto F_d está abaixo do ponto F_{crit} . Nesse caso fica provado que a estrutura tem segurança superabundante, embora não se saiba quanto de exagero está sendo cometido.

Portanto, para a aplicação do método do equilíbrio, precisa-se, em cada uma das etapas (CAMPOS FILHO, 2005, p. 6):

- a) calcular as solicitações ao longo do eixo do pilar, a partir de uma configuração deformada;
- b) conhecidas as solicitações de uma seção, calcular as curvaturas correspondentes;
- c) integrar as curvaturas das diferentes seções, ao longo do eixo do pilar, para obter os deslocamentos.

A seguir, nos itens 4.5.1 e 4.5.2, são descritos os procedimentos para determinação das curvaturas e dos deslocamentos.

4.5.1 Determinação das curvaturas

Para determinação das curvaturas utiliza-se, além do sistema de eixos cartesianos (x, y) com origem no baricentro da seção transversal, um sistema de eixos auxiliar (ξ, η) , também com origem no centro de gravidade da seção, no qual o eixo ξ é paralelo a linha neutra, formando um ângulo α com o eixo x , e η é perpendicular a este e aponta no sentido da fibra mais comprimida da seção, como mostra a figura 11.

A determinação das curvaturas das seções é obtida a partir do momento fletor e do esforço normal atuante. Campos Filho (2005, p. 9) afirma que é necessário obter, na análise da estabilidade de estruturas de concreto, a configuração deformada de uma seção, para uma determinada combinação de esforços que a solicitam abaixo do seu limite de resistência. O mesmo autor apresenta um procedimento geral para a determinação desta configuração deformada para uma seção de concreto armado, definida por uma poligonal fechada, como também mostra a figura 11.

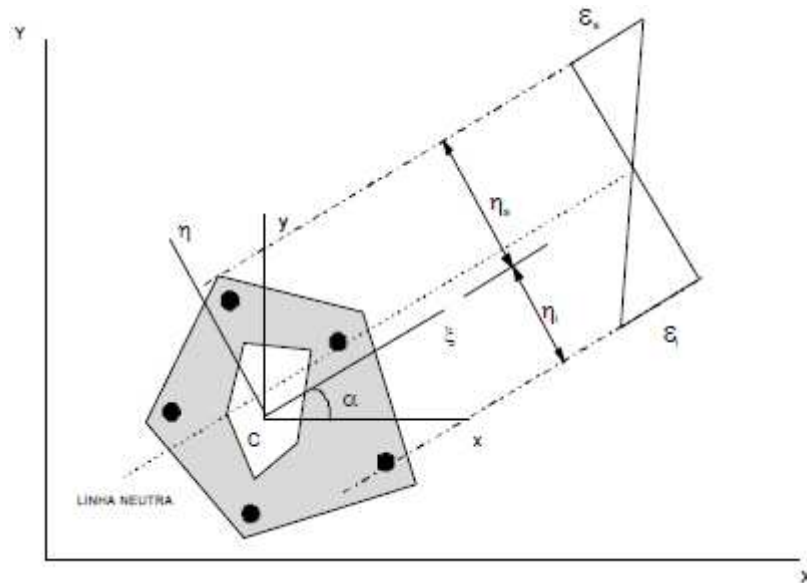


Figura 11: distribuição de deformações em uma seção de concreto armado (CAMPOS FILHO, 2005, p. 10)

O procedimento proposto para determinação das curvaturas é definido da seguinte forma (CAMPOS FILHO, 2005, p. 8):

a) são conhecidos:

- coordenadas dos vértices da poligonal fechada, coordenadas das barras e suas respectivas percentagens em relação à área total de armadura;
- as características dos materiais (aço e concreto);
- a área total de armadura A_s ;

b) deseja-se determinar a **inclinação da linha neutra α** , a **curvatura b** e a **deformação do centróide c** , que corresponda a esforços resistentes em equilíbrio com os esforços atuantes fornecidos, contanto que as deformações extremas, superior e inferior, ϵ_s e ϵ_i , da seção do concreto armado não ultrapassem os valores estabelecidos pela NBR 6118/2003, sendo eles: -3,5‰ na fibra mais comprimida da seção e 10‰ na fibra mais tracionada.

No caso da flexo-compressão oblíqua, que faz parte deste trabalho, deve-se resolver um sistema de três equações não-lineares com três incógnitas, como mostra a fórmula 27 (CAMPOS FILHO, 2005, p. 11):

$$\begin{cases} f(\alpha, b, c) = MR_x(\alpha, b, c) - MA_x = 0 \\ g(\alpha, b, c) = MR_y(\alpha, b, c) - MA_y = 0 \\ h(\alpha, b, c) = NR(\alpha, b, c) - NA = 0 \end{cases} \quad (\text{fórmula 27})$$

Onde:

MR_x, MR_y, NR = são os esforços resistentes, funções dos parâmetros α , b e c ;

MA_x, MA_y, NA = são os esforços atuantes;

α = inclinação da linha neutra;

b = curvatura da seção;

c = deformação do centróide da seção.

Já para o caso da flexo-compressão normal, bastaria resolver um sistema de duas equações não-lineares com duas incógnitas, sendo a **inclinação da linha neutra α** conhecida conforme fórmula 28 (CAMPOS FILHO, 2005, p. 11):

$$\begin{cases} f(b, c) = MR_x(b, c) - MA_x = 0 \\ g(b, c) = NR(b, c) - NA = 0 \end{cases} \quad (\text{fórmula 28})$$

A fórmula 27 pode ser solucionada pelo Método de Newton-Raphson, também conhecido como Método das Tangentes, resolvendo uma série de sistemas de três equações lineares com três incógnitas, do tipo apresentado pela fórmula 29 (CAMPOS FILHO, 2005, p. 11):

$$[K(\{u\}_i)] \{\Delta u\}_i = \{\Delta p\}_i \quad (\text{fórmula 29})$$

Onde:

$[K(\{u\}_i)]$ = matriz que contém as derivadas parciais dos esforços resistentes em relação aos parâmetros de ajuste;

$\{u\}_i$ = vetor com os parâmetros α , b e c a serem ajustados;

$\{\Delta u\}_i$ = vetor incremental de $\{u\}_i$;

$\{\Delta p\}_i$ = vetor de diferenças entre os esforços atuantes e os esforços resistentes, correspondentes aos valores de α , b e c da i -ésima iteração.

Sendo assim, a fórmula 29, pode ser escrita por extenso como mostra a fórmula 30 (CAMPOS FILHO, 2005, p. 11):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial MR_x}{\partial \alpha} & \frac{\partial MR_x}{\partial b} & \frac{\partial MR_x}{\partial c} \\ \frac{\partial MR_y}{\partial \alpha} & \frac{\partial MR_y}{\partial b} & \frac{\partial MR_y}{\partial c} \\ \frac{\partial NR}{\partial \alpha} & \frac{\partial NR}{\partial b} & \frac{\partial NR}{\partial c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta b \\ \Delta c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} MA_x - MR_x \\ MA_y - MR_y \\ NA - NR \end{Bmatrix} \quad (\text{fórmula 30})$$

Onde:

$\frac{\partial MR_x}{\partial \alpha}$ = derivada parcial do momento fletor resistente na direção x em relação à linha neutra;

$\frac{\partial MR_x}{\partial b}$ = derivada parcial do momento fletor resistente na direção x em relação à curvatura;

$\frac{\partial MR_x}{\partial c}$ = derivada parcial do momento fletor resistente na direção x em relação à deformação do centróide da seção;

$\frac{\partial MR_y}{\partial \alpha}$ = derivada parcial do momento fletor resistente na direção y em relação à linha neutra;

$\frac{\partial MR_y}{\partial b}$ = derivada parcial do momento fletor resistente na direção y em relação à curvatura;

$\frac{\partial MR_y}{\partial c}$ = derivada parcial do momento fletor resistente na direção y em relação à deformação do centróide da seção;

$\frac{\partial NR}{\partial \alpha}$ = derivada parcial do esforço normal resistente em relação à linha neutra;

$\frac{\partial NR}{\partial b}$ = derivada parcial do esforço normal resistente em relação à curvatura;

$\frac{\partial NR}{\partial c}$ = derivada parcial do esforço normal resistente em relação à deformação do centróide da seção;

$\Delta \alpha$ = incremento da linha neutra;

Δb = incremento da curvatura;

Δc = incremento da deformação do centróide da seção.

Dessa forma, depois de estabelecidas a geometria da seção de concreto armado (coordenadas dos vértices da poligonal fechada, coordenadas das barras e suas respectivas percentagens em relação à área total de armadura), as resistências características do aço e do concreto (f_{yk} e f_{ck}) e a área total de armadura A_s , deve-se proceder ao seguinte algoritmo de cálculo para determinação da deformada de uma seção (CAMPOS FILHO, 2005, p. 11-12):

- a) arbitram-se, inicialmente, valores para a **linha neutra α** , a **curvatura \mathbf{b}** e a **deformação do centróide \mathbf{c}** a serem ajustados;
- b) por integração das tensões, obtêm-se os esforços resistentes e os elementos da matriz de derivadas parciais, correspondentes aos valores de α , \mathbf{b} e \mathbf{c} , da i -ésima iteração;
- c) calcula-se o vetor de desequilíbrio $\{\Delta p\}_i$ pela diferença entre esforços atuantes conhecidos e os esforços resistentes obtidos no item anterior, conforme a fórmula 31;
- d) verifica-se a convergência pela fórmula 32;
- e) caso a fórmula 32 seja satisfeita, segue-se para o item (i), caso contrário segue-se para (f);
- f) resolve-se o sistema de equações lineares dado pela fórmula 33;
- g) logo, α , \mathbf{b} e \mathbf{c} são determinados através da fórmula 34;
- h) retorna-se ao item (b);
- i) encerra-se o processo iterativo e é obtida a deformada da seção.

Conforme mencionado anteriormente, seguem as fórmulas 31 a 34:

$$\{\Delta p\}_i = \begin{Bmatrix} \Delta M_x \\ \Delta M_y \\ \Delta N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} MA_x - MR_x \\ MA_y - MR_y \\ NA - NR \end{Bmatrix} \quad (\text{fórmula 31})$$

$$\left[\frac{\Delta Mx^2 + \Delta My^2 + \Delta N^2}{MAx^2 + MAy^2 + NA^2} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \text{tolerância} \quad (\text{fórmula 32})$$

$$\{\Delta u\}_i = [K]^{-1} \{\Delta p\}_i \quad (\text{fórmula 33})$$

$$\{u\}_{i+1} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ b \\ c \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ b \\ c \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta b \\ \Delta c \end{Bmatrix} \quad (\text{fórmula 34})$$

Com esse algoritmo de cálculo a **inclinação da linha neutra α** , a **curvatura da seção b** e a **deformação c do centróide** da seção de concreto, correspondentes à área total de armadura A_s preestabelecida, são determinadas de tal forma que as deformações extremas, superior e inferior da seção, ε_s e ε_i , não ultrapassem os limites descritos na NBR 6118/2003, como mencionado anteriormente (CAMPOS FILHO, 2005, p. 12).

4.5.1.1 Cálculo dos esforços resistentes

A determinação dos esforços resistentes MR_x , MR_y e NR é feita pela integração das tensões sobre a seção para uma dada condição de deformação e área de armadura. São obtidos, inicialmente, com o auxílio do sistema de eixos (ξ, η) e, após, para o sistema (x, y) conforme as fórmulas 35 e 36. O esforço normal resistente, NR , é o mesmo para qualquer um dos sistemas de coordenadas. O procedimento para determinação é proposto a seguir (CAMPOS FILHO, 2000, p. 12-13):

$$MR_x = MR_\xi \cdot \cos \alpha - MR_\eta \cdot \sin \alpha \quad (\text{fórmula 35})$$

$$MR_y = MR_\xi \cdot \text{sen } \alpha + MR_\eta \cdot \text{cos } \alpha \quad (\text{fórmula 36})$$

Onde:

MR_ξ = momento resistente na direção ξ do sistema de eixos (ξ, η) ;

MR_η = momento resistente na direção η do sistema de eixos (ξ, η) ;

α = inclinação da linha neutra.

Os esforços resistentes do concreto são calculados separadamente para a região I, onde a área de concreto A_{C1} está submetida a tensões variando parabolicamente, e para a região II, onde a área de concreto A_{C2} está submetida a tensões uniformes, conforme a figura 12 (CAMPOS FILHO, 2000, p. 13).

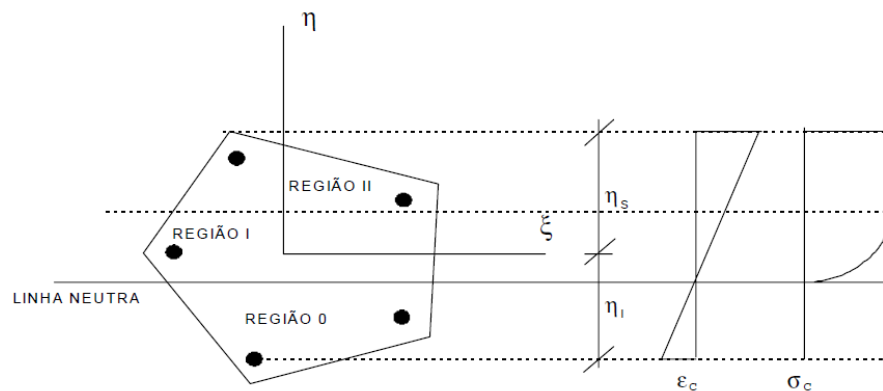


Figura 12: regiões para integração do concreto (CAMPOS FILHO, 2000, p. 13)

Para a região I, os esforços resistentes são calculados utilizando-se as fórmulas 37 a 39 (CAMPOS FILHO, 2000, p. 14):

$$MR_{\xi 1} = 0,85 f_{cd} \sum_{i=1}^{n_1} (D_0 G_{01} + D_1 G_{02} + D_2 G_{03}) \quad (\text{fórmula 37})$$

$$MR_{\eta_1} = -0,85 f_{cd} \sum_{i=1}^{n_1} (D_0 G_{10} + D_1 G_{11} + D_2 G_{12}) \quad (\text{fórmula 38})$$

$$NR_1 = 0,85 f_{cd} \sum_{i=1}^{n_1} (D_0 G_{00} + D_1 G_{01} + D_2 G_{02}) \quad (\text{fórmula 39})$$

Para a região II, os esforços resistentes são calculados utilizando-se as fórmulas 40 a 42 (CAMPOS FILHO, 2000, p. 14):

$$MR_{\xi_2} = -0,85 f_{cd} \sum_{i=1}^{n_2} G_{01} \quad (\text{fórmula 40})$$

$$MR_{\eta_2} = 0,85 f_{cd} \sum_{i=1}^{n_2} G_{10} \quad (\text{fórmula 41})$$

$$NR_2 = -0,85 f_{cd} \sum_{i=1}^{n_1} G_{00} \quad (\text{fórmula 42})$$

Na qual, f_{cd} é a resistência de cálculo do concreto, n_1 e n_2 são os números de segmentos de reta que compõem a poligonal fechada que descreve as regiões I e II. D_0 , D_1 e D_2 são os parâmetros auxiliares para cálculo dos esforços resistentes que dependem da curvatura e deformação do centróide. G_{00} , G_{01} , G_{02} , G_{03} , G_{10} , G_{11} e G_{12} são os polinômios de integração já citados anteriormente. A seguir são apresentadas as fórmulas.

D_0 , D_1 e D_2 são conforme fórmulas 43 a 45 (CAMPOS FILHO, 2000, p. 10):

$$D_0 = 1.000c + 250.000c^2 \quad (\text{fórmula 43})$$

$$D_1 = 1.000b + 500.000bc \quad (\text{fórmula 44})$$

$$D_2 = 250.000b^2 \quad (\text{fórmula 45})$$

Já os polinômios de integração são apresentados nas fórmulas 8 a 13 e 46 e 47 (CAMPOS FILHO, 2000, p. 37):

$$G_{03} = \left\{ \xi_i \left[\eta_i \left(\Delta\eta^2 + \eta_i \left(\frac{3\Delta\eta}{2} + \eta_i \right) \right) + \frac{\Delta\eta^3}{4} \right] + \Delta\xi \left[\eta_i \left(\frac{3\Delta\eta^2}{4} + \eta_i \left(\frac{\eta_i}{2} + \Delta\eta \right) \right) + \frac{\Delta\eta^3}{5} \right] \right\} \Delta\eta \quad (\text{fórmula 46})$$

$$G_{12} = \left\{ \xi_i \left[\xi_i \left(\eta_i (\eta_i + \Delta\eta) + \frac{\Delta\eta^2}{3} \right) + \Delta\xi \left(\eta_i \left(\eta_i + \frac{4\Delta\eta}{3} \right) + \frac{\Delta\eta^2}{2} \right) \right] + \Delta\xi^2 \left[\eta_i \left(\frac{\eta_i}{3} + \frac{\Delta\eta}{2} \right) + \frac{\Delta\eta^2}{5} \right] \right\} \frac{\Delta\eta}{2} \quad (\text{fórmula 47})$$

Sendo $\Delta\xi$ e $\Delta\eta$ dados pelas fórmulas 48 e 49 (CAMPOS FILHO, 2000, p. 37):

$$\Delta\xi = \xi_{i+1} - \xi_i \quad (\text{fórmula 48})$$

$$\Delta\eta = \eta_{i+1} - \eta_i \quad (\text{fórmula 49})$$

E, para o aço, os esforços resistentes são calculados utilizando-se as fórmulas 50 a 52 (CAMPOS FILHO, 2000, p. 13):

$$MR_\xi = \sum_{j=1}^m \rho_j \cdot A_s \cdot \sigma(\varepsilon_j) \cdot \eta_j \quad (\text{fórmula 50})$$

$$MR_{\eta} = -\sum_{j=1}^m \rho_j \cdot A_s \cdot \sigma(\varepsilon_j) \cdot \xi_j \quad (\text{fórmula 51})$$

$$NR = \sum_{j=1}^m \rho_j \cdot A_s \cdot \sigma(\varepsilon_j) \quad (\text{fórmula 52})$$

Portanto, somando-se os esforços resistentes contribuintes da região I e II do concreto e da parte contribuinte do aço e fazendo a rotação dois eixos através das fórmulas 35 e 36, obtêm-se os esforços resistentes MR_x , MR_y e NR .

4.5.1.2 Determinação das coordenadas das extremidades dos segmentos definidos pelas regiões 0, I e II

Para o cálculo das coordenadas das extremidades dos segmentos definidos pelas regiões 0, I e II deve-se proceder da maneira descrita a seguir, conforme apresentado por Campos Filho (2000, p. 14-15).

As coordenadas dos vértices da seção poligonal, fornecidos no sistema de eixos (x, y) , são transformados para o sistema de coordenadas (ξ, η) através das fórmulas 53 e 54 (CAMPOS FILHO, 2000, p. 14):

$$\xi = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \operatorname{sen} \alpha \quad (\text{fórmula 53})$$

$$\eta = -x \cdot \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha \quad (\text{fórmula 54})$$

Existem duas situações possíveis para um segmento da poligonal fechada, que define uma seção. Ele pode estar inteiramente dentro de uma das regiões 0, I ou II ou atravessar mais de uma delas. É necessário, para este último caso, subdividir o segmento para efetuar as integrações necessárias. Isto pode ser feito automaticamente através do procedimento descrito a seguir (CAMPOS FILHO, 2000, p. 14-15).

Primeiramente, devem-se calcular os valores das deformações ε_i e ε_{i+1} nos vértices de coordenadas (ξ_i, η_i) e (ξ_{i+1}, η_{i+1}) de um determinado segmento da poligonal, através da fórmula 55 (CAMPOS FILHO, 2000, p. 9):

$$\varepsilon(\xi, \eta) = b\eta + c \quad (\text{fórmula 55})$$

Se dois vértices apresentarem a mesma deformação, não há contribuição para o cálculo dos esforços resistentes. No entanto, se dois vértices apresentarem deformações diferentes, ou seja, ordenadas de valores distintos, pode haver ou não transição entre as regiões (CAMPOS FILHO, 2000, p. 15).

Logo, para saber se há transições entre as regiões 0, I e II, deve-se calcular as ordenadas correspondentes a essas transições pelas fórmulas 56 e 57 (CAMPOS FILHO, 2000, p. 15):

$$\eta_{01} = -\frac{c}{b} \quad (\text{fórmula 56})$$

$$\eta_{12} = \frac{-0,002 - c}{b} \quad (\text{fórmula 57})$$

Se η_{01} e/ou η_{12} estiverem entre η_i e η_{i+1} ocorrem as transições correspondentes. Neste caso, calculam-se as abscissas ξ_i e ξ_{i+1} pelas fórmulas 58 e 59 (CAMPOS FILHO, 2000, p. 15):

$$\xi_{01} = \xi_i + (\eta_{01} - \eta_i) \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\eta_{i+1} - \eta_i} \quad (\text{fórmula 58})$$

$$\xi_{12} = \xi_i + (\eta_{12} - \eta_i) \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\eta_{i+1} - \eta_i} \quad (\text{fórmula 59})$$

Dessa forma, as coordenadas das extremidades dos segmentos são definidas pelas coordenadas dos vértices i e $i+1$ da poligonal da seção e pelas coordenadas dos pontos de transição entre as regiões 0 e I e/ou as regiões I e II. Não havendo transição, o segmento da poligonal está inteiramente contido em uma das regiões e as coordenadas para integração são as coordenadas dos vértices i e $i+1$ (CAMPOS FILHO, 2000, p. 15).

4.5.1.3 Determinação dos elementos da matriz de derivadas parciais

As derivadas parciais dos esforços resistentes, em relação à **inclinação da linha neutra α** , da **curvatura da seção b** e da **deformação do centróide c** , são obtidas também, inicialmente, com o auxílio do sistema de eixos (ξ, η) e, após, para o sistema (x, y) . O procedimento para determinação é proposto a seguir (CAMPOS FILHO, 2000 p. 26-29):

As derivadas parciais dos esforços resistentes em relação à **inclinação da linha neutra α** são calculadas pelas fórmulas 60 a 62 (CAMPOS FILHO, 2000 p. 29):

$$\frac{\partial MR_x}{\partial \alpha} = -MR_y \quad (\text{fórmula 60})$$

$$\frac{\partial MR_y}{\partial \alpha} = MR_x \quad (\text{fórmula 61})$$

$$\frac{\partial NR}{\partial \alpha} = 0 \quad (\text{fórmula 62})$$

As derivadas parciais dos esforços resistentes em relação à **curvatura da seção b** são calculadas com as fórmulas 63 a 65 (CAMPOS FILHO, 2000 p. 26):

$$\frac{\partial MR\xi}{\partial b} = 0,85 f_{cd} \sum_{i=1}^n (k1G_{02} + k2G_{03}) \quad (\text{fórmula 63})$$

$$\frac{\partial MR\eta}{\partial b} = -0,85 f_{cd} \sum_{i=1}^n (k1G_{11} + k2G_{12}) \quad (\text{fórmula 64})$$

$$\frac{\partial NR}{\partial b} = 0,85 f_{cd} \sum_{i=1}^n (k1G_{01} + k2G_{02}) \quad (\text{fórmula 65})$$

As rigidezes adimensionais $k1$ e $k2$ são definidas pelas fórmulas 66 e 67 (CAMPOS FILHO, 2000 p. 26):

$$k1 = 1000 + 500000c \quad (\text{fórmula 66})$$

$$k2 = 500000b \quad (\text{fórmula 67})$$

Já para a **seção de aço**, as derivadas parciais dos esforços resistentes em relação à **curvatura da seção b** são calculadas pelas fórmulas 68 a 70 (CAMPOS FILHO, 2000 p. 27):

$$\frac{\partial MR\xi}{\partial b} = \sum_{i=1}^m \rho_i \cdot A_s \cdot E_T(\varepsilon_i) \cdot \eta_i^2 \quad (\text{fórmula 68})$$

$$\frac{\partial MR\eta}{\partial b} = -\sum_{i=1}^m \rho_i \cdot A_s \cdot E_T(\varepsilon_i) \cdot \xi_i \eta_i \quad (\text{fórmula 69})$$

$$\frac{\partial NR}{\partial b} = \sum_{i=1}^m \rho_i \cdot A_s \cdot E_T(\varepsilon_i) \cdot \eta_i \quad (\text{fórmula 70})$$

Onde:

ρ_i = porcentagem relativa à i-ésima barra de armadura;

A_s = área de aço;

ε_i = deformação do aço relativa à i-ésima etapa;

η_i = coeficiente de conformação relativa à i-ésima etapa.

O módulo de elasticidade longitudinal tangente do aço (E_T) é dado pela fórmula 71 (CAMPOS FILHO, 2000, p. 28):

$$E_T(\varepsilon_s) = \begin{cases} E_s & \text{para } |\varepsilon_s| < \varepsilon_{yd} \\ 0 & \text{para } |\varepsilon_s| \geq \varepsilon_{yd} \end{cases} \quad (\text{fórmula 71})$$

Onde, ε_{yd} é a deformação específica de escoamento de cálculo do aço, dada pela fórmula 72 (CAMPOS FILHO, 2000, p. 11):

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (\text{fórmula 72})$$

Ainda, o módulo de elasticidade do aço, E_s , pode ser definido como sendo 210 GPa (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2003, p. 26) e f_{yd} é a resistência de cálculo do aço dado pela fórmula 73, onde γ_s é o coeficiente de minoração da resistência (CAMPOS FILHO, 2000, p. 11):

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (\text{fórmula 73})$$

Portanto, somando-se as partes contribuintes do concreto e do aço, as derivadas parciais dos esforços resistentes em relação à **curvatura da seção b** no sistema de eixos (x, y) são obtidas pelas fórmulas 74 e 75 (CAMPOS FILHO, 2005 p. 13):

$$\frac{\partial MR_x}{\partial b} = \frac{\partial MR_\xi}{\partial b} \cos \alpha - \frac{\partial MR_\eta}{\partial b} \operatorname{sen} \alpha \quad (\text{fórmula 74})$$

$$\frac{\partial MR_y}{\partial b} = \frac{\partial MR_\xi}{\partial b} \operatorname{sen} \alpha + \frac{\partial MR_\eta}{\partial b} \cos \alpha \quad (\text{fórmula 75})$$

Já as derivadas parciais dos esforços resistentes em relação à **deformação no centróide da seção c** são calculadas para a **seção de concreto** com as fórmulas 76 a 78 (CAMPOS FILHO, 2000 p. 26):

$$\frac{\partial MR_\xi}{\partial c} = 0,85 f_{cd} \sum_{i=1}^n (k_1 G_{01} + k_2 G_{02}) \quad (\text{fórmula 76})$$

$$\frac{\partial MR_\eta}{\partial c} = -0,85 f_{cd} \sum_{i=1}^n (k_1 G_{10} + k_2 G_{11}) \quad (\text{fórmula 77})$$

$$\frac{\partial NR}{\partial c} = 0,85 f_{cd} \sum_{i=1}^n (k_1 G_{00} + k_2 G_{01}) \quad (\text{fórmula 78})$$

E para a **seção de aço** com as fórmulas 79 a 81 (CAMPOS FILHO, 2000 p. 27):

$$\frac{\partial MR\xi}{\partial c} = \sum_{i=1}^m \rho_i \cdot As \cdot E_T(\varepsilon_i) \cdot \eta_i \quad (\text{fórmula 79})$$

$$\frac{\partial MR\eta}{\partial c} = - \sum_{i=1}^m \rho_i \cdot As \cdot E_T(\varepsilon_i) \cdot \xi_i \quad (\text{fórmula 80})$$

$$\frac{\partial NR}{\partial c} = \sum_{i=1}^m \rho_i \cdot As \cdot E_T(\varepsilon_i) \quad (\text{fórmula 81})$$

Análogo a determinação dos esforços resistentes em relação à curvatura, as derivadas parciais dos esforços resistentes em relação à **deformação no centróide da seção c** no sistema de eixos (x, y) são obtidas, somando-se as partes contribuintes do concreto e do aço, e são dados pelas fórmulas 82 e 83 (CAMPOS FILHO, 2005 p. 14):

$$\frac{\partial MR_x}{\partial c} = \frac{\partial MR\xi}{\partial c} \cos \alpha - \frac{\partial MR\eta}{\partial c} \operatorname{sen} \alpha \quad (\text{fórmula 82})$$

$$\frac{\partial MR_y}{\partial c} = \frac{\partial MR\xi}{\partial c} \operatorname{sen} \alpha + \frac{\partial MR\eta}{\partial c} \cos \alpha \quad (\text{fórmula 83})$$

4.5.2 Determinação dos deslocamentos

Os deslocamentos podem ser determinados com qualquer método de integração conhecido. Aqui neste trabalho utilizou-se a Analogia de Mohr (HOFFMANN¹, 1980 apud CAMPOS

¹ HOFFMANN, J. R. **Pilares esbeltos de concreto armados**: método exato. Porto Alegre: Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, 1980. Caderno Técnico n.18.

FILHO, 2005, p. 7-9). Para sua determinação, é necessário integrar as curvaturas das diversas seções ao longo do eixo do pilar.

Tem-se por referência as fórmulas 84 a 87:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{r} \quad (\text{fórmula 84})$$

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \quad (\text{fórmula 85})$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -p \quad (\text{fórmula 86})$$

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (\text{fórmula 87})$$

Partindo-se da semelhança existente entre as fórmulas 84 e 85 e entre as fórmulas 86 e 87, pode-se imaginar a determinação da deformada $y(x)$, calculando-se os momentos fletores $M(x)$, devido a um carregamento imaginário $p(x) = 1/r(x)$. O sistema equivalente de Mohr é o sistema sobre o qual se aplica o carregamento $p(x)$, com as condições de apoio escolhidas de acordo com as condições de deformação da barra, conforme Campos Filho (2005, p. 7). A figura 13 mostra um caso para uma barra bi-rotulada.

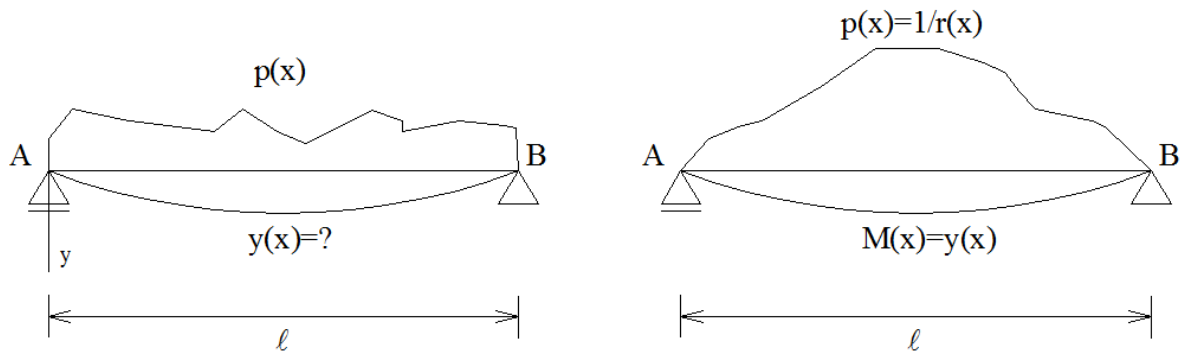


Figura 13: sistema equivalente de Mohr para uma barra bi-rotulada
(adaptado de CAMPOS FILHO, 2005, p. 7)

Logo, para essas condições de apoio tem-se que para uma barra real $y_A = y_B = 0$, $\theta_A \neq 0$ e $\theta_B \neq 0$ e para o sistema equivalente de Mohr $M_A = M_B = 0$, $V_A \neq 0$ e $V_B \neq 0$.

Dessa forma, pelo processo deve-se dividir a barra em **n partes** iguais, com um comprimento Δx , conforme a fórmula 88 (CAMPOS FILHOS, 2005, p. 8):

$$\Delta x = \frac{l}{n} \quad (\text{fórmula 88})$$

Onde:

Δx = comprimento das **n partes** divididas da barra;

l = comprimento da barra;

n = número de partes divididas da barra de comprimento Δx .

Os pesos w_k são determinados supondo-se que as curvaturas tenham uma variação parabólica ao longo do seu comprimento. Eles são forças fictícias, aplicadas nos pontos k , equivalentes ao carregamento $p(x)$ das curvaturas, sendo calculados pela fórmula 89 (CAMPOS FILHOS, 2005, p. 8):

$$w_k = \int_{(k-1)\Delta x}^{k\Delta x} \left(\frac{1}{r} \right) dx \quad (\text{fórmula 89})$$

Considerando esta distribuição, o peso w no extremo superior, num ponto intermediário k , e no extremo inferior do pilar, são obtidos conforme as fórmulas 90 a 92 (CAMPOS FILHOS, 2005, p. 8-9):

$$w_0 = \frac{\Delta x}{12} \left[3,5 \left(\frac{1}{r} \right)_0 + 3,0 \left(\frac{1}{r} \right)_1 - 0,5 \left(\frac{1}{r} \right)_2 \right] \quad (\text{fórmula 90})$$

$$w_k = \frac{\Delta x}{12} \left[\left(\frac{1}{r} \right)_{k-1} + 10,0 \left(\frac{1}{r} \right)_k + \left(\frac{1}{r} \right)_{k+1} \right] \quad (\text{fórmula 91})$$

$$w_n = \frac{\Delta x}{12} \left[3,5 \left(\frac{1}{r} \right)_n + 3,0 \left(\frac{1}{r} \right)_{n-1} - 0,5 \left(\frac{1}{r} \right)_{n-2} \right] \quad (\text{fórmula 92})$$

Um resumo do roteiro do método do equilíbrio, usando a Analogia de Mohr, pode ser feito da seguinte maneira (CAMPOS FILHOS, 2005, p. 9):

- a) dividir o comprimento da barra em **n partes iguais**;
- b) calcular os esforços solicitantes de primeira ordem em cada um dos (n+1) pontos;
- c) escolher o sistema equivalente de Mohr;
- d) calcular as curvaturas $(1/r)_k$, $(k = 0, n)$, verificando se nenhum estado limite foi excedido;
- e) determinar os pesos w_k ;

- f) considerar o sistema equivalente carregado pelas cargas concentradas w_k , nos pontos k , e determinar os valores de M_k , que devido à Analogia de Mohr são os y_k ;
- g) verificar a convergência pela fórmula 93;
- h) caso a condição anterior seja verdadeira, seguir para o passo (j), senão ir para o passo (i);
- i) determinar os momentos fletores M_k no sistema deformado e voltar para (d);
- j) fim do processo.

Conforme indicado anteriormente a verificação da convergência é dado pela fórmula 93:

$$\left[\frac{\sum_{i=0}^n \Delta y k^2}{\sum_{i=0}^n y k^2} \right]^2 \leq \text{tolerância} \quad (\text{fórmula 93})$$

Finalmente, depois de diversos processos de iteração para cálculo das diferentes inclinações das linhas neutras, das curvaturas e das deformações do centróide das diversas seções analisadas, verificando se nenhum estado limite foi excedido, o processo de iteração chega ao fim. No caso de convergência, a configuração deformada do pilar obtida é de equilíbrio estável.

4.6 INSTABILIDADE NA FLEXO-COMPRESSÃO OBLÍQUA

Como foi mencionado anteriormente, a verificação da segurança da estabilidade de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexo-compressão oblíqua pode ser feita pelos mesmos procedimentos da flexo-compressão normal com as devidas adaptações para a consideração tanto da existência de dois momentos fletores, quando da variação da posição da linha neutra.

O esforço normal e o momento fletor são solicitações que agem nas seções transversais dos pilares de concreto armado. Segundo Araújo (2003, p. 51), a flexo-compressão oblíqua ocorre quando uma solicitação composta por um esforço normal age fora dos eixos de simetria da seção transversal da peça, ou quando o arranjo das armaduras não é simétrico em relação a estes eixos, ou, ainda, quando a própria seção transversal não possui partes simétricas.

4.6.1 Deformações do eixo da barra

A figura 14 mostra uma barra submetida a um carregamento que produz flexão composta oblíqua em suas seções transversais. Em consequência do carregamento aplicado, a barra sofre deformações. Para pilares esbeltos, os deslocamentos transversais criam excentricidades e_2 de segunda ordem obrigatórias para o estudo da peça (FUSCO, 1981, p. 200).

Como o plano de flexão é variável de seção para seção, o eixo deformado do pilar é definido por uma curva reversa devido à própria deformação da barra. O eixo deformado da barra seria uma curva plana somente se a linha neutra de todas as seções tivesse sempre a mesma direção, o que não é possível quando o plano de flexão varia de seção para seção (CAMPOS FILHO, 2005, p. 15).

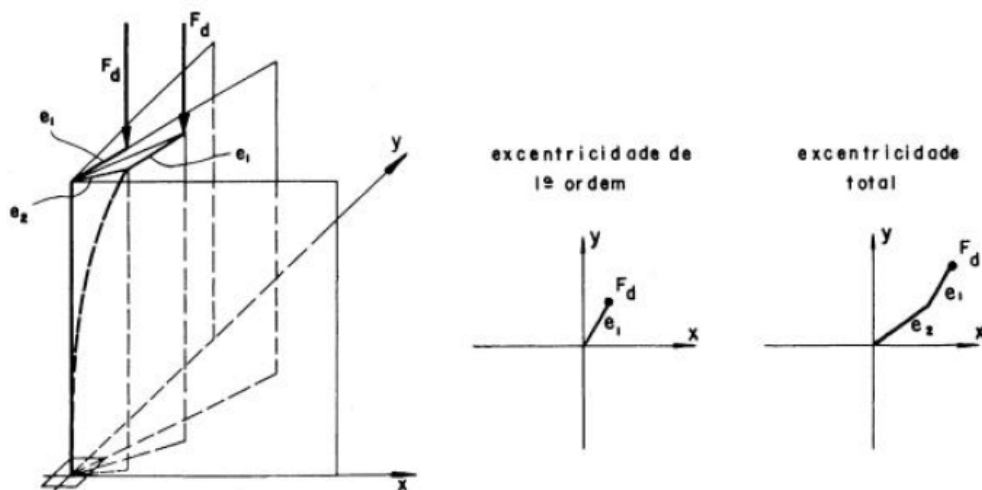


Figura 14: barra reta submetida à flexo-compressão oblíqua (FUSCO, 1981, p. 200)

4.6.2 Curvaturas para seção transversal qualquer

A figura 15 mostra uma seção retangular submetida à flexo-compressão oblíqua. As conclusões retiradas da análise desta figura são válidas para seções transversais de forma qualquer. A curvatura no plano perpendicular à linha neutra é calculada pela fórmula 94 (FUSCO, 1981, p. 202):

$$\frac{1}{r_\alpha} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_4}{h_\alpha} \quad (\text{fórmula 94})$$

Onde:

h_α = é a maior dimensão da seção medida perpendicularmente à própria linha neutra;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ e ε_4 = deformações específicas dos vértices.

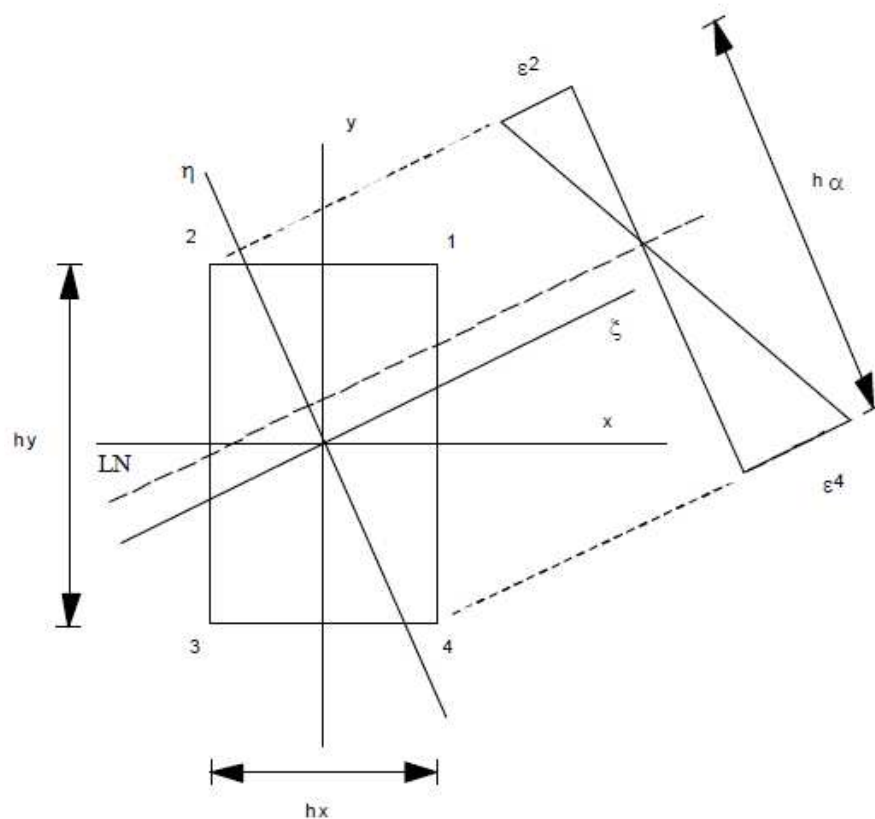


Figura 15: curvaturas em uma seção submetida à flexo-compressão oblíqua (CAMPOS FILHO, 2005, p. 16)

Admitindo-se a hipótese de manutenção de forma plana de seção transversal, têm-se as fórmulas 95 a 97, (FUSCO, 1981, p. 202):

$$\frac{1}{r_x} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{h_x} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_4}{h_x} \quad (\text{fórmula 95})$$

$$\frac{1}{r_y} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{h_y} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_4}{h_y} \quad (\text{fórmula 96})$$

$$\frac{1}{r_\alpha} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_4}{h_\alpha} \quad (\text{fórmula 97})$$

Onde:

$1/r_x$ = curvatura na direção x;

$1/r_y$ = curvatura na direção y;

h_x e h_y = seção transversal da barra.

$1/r_\alpha$ = curvatura no plano perpendicular à linha neutra;

Sendo:

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + (\varepsilon_3 - \varepsilon_4) = \varepsilon_2 - \varepsilon_4 \quad (\text{fórmula 98})$$

Logo, combinando as fórmulas 95 a 97 obtém-se a fórmula 99 (FUSCO, 1981, p. 202):

$$\frac{h_y}{r_y} + \frac{h_x}{r_x} = \frac{h_\alpha}{r_\alpha} \quad (\text{fórmula 99})$$

Por outro lado, h_α pode ser escrito pela fórmula 100 (FUSCO, 1981, p. 202):

$$h_\alpha = h_x \operatorname{sen} \alpha + h_y \cos \alpha \quad (\text{fórmula 100})$$

Dessa forma, adequando as fórmulas 99 e 100, chega-se na fórmula 101 (FUSCO, 1981, p. 202):

$$\frac{h_y}{r_y} + \frac{h_x}{r_x} = \frac{h_x \operatorname{sen} \alpha + h_y \cos \alpha}{r_\alpha} \quad (\text{fórmula 101})$$

ou, fazendo manipulação algébrica, na fórmula 102:

$$h_x \left(\frac{1}{r_x} - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{r_\alpha} \right) + h_y \left(\frac{1}{r_y} - \frac{\cos \alpha}{r_\alpha} \right) = 0 \quad (\text{fórmula 102})$$

Para que a fórmula 99 seja satisfeita, para quaisquer valores de h_x e h_y , as fórmulas 103 e 104 devem ser verificadas (FUSCO, 1981, p. 204):

$$\frac{1}{r_x} = \frac{1}{r_\alpha} \operatorname{sen} \alpha \quad (\text{fórmula 103})$$

$$\frac{1}{r_y} = \frac{1}{r_\alpha} \cos \alpha \quad (\text{fórmula 104})$$

4.6.3 Verificação do estado limite de instabilidade de um pilar pelo método do equilíbrio

O procedimento para realizar a verificação da estabilidade de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexo-compressão oblíqua tem os seguintes passos (CAMPOS FILHO, 2005, p. 17):

- a) determinam-se os momentos fletores considerando apenas os efeitos de primeira ordem;
- b) determinam-se a distribuição de curvaturas $1/r_\alpha$ e as diferentes **inclinações das linhas neutras α** ao longo do eixo do pilar;
- c) calculam-se as curvaturas $1/r_x$ e $1/r_y$ a partir dos valores de $1/r_\alpha$ e a **inclinação da linha neutra α** para cada seção;
- d) integram-se as curvaturas ao longo do eixo do pilar separadamente para as direções x e y e determinam-se os deslocamentos;
- e) com a configuração deformada, calculam-se os novos momentos fletores;
- f) reinicia-se o ciclo iterativo com o cálculo de novas curvaturas $1/r_x$ e $1/r_y$ e direções das linhas neutras para as diversas seções;
- g) o processo iterativo se encerra quando a série de deslocamento converge para um ponto (pilar estável) ou quando se chega à ruptura de uma das seções.

5 O SOFTWARE

Este capítulo tem como objetivo apresentar a sistematização do modelo de cálculo e informações referentes à utilização do programa de verificação de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexo-compressão oblíqua pelo método exato, desenvolvido neste trabalho de conclusão de curso. Será descrito a janela inicial de entrada de dados. A seguir, a sequência de preenchimento das coordenadas da seção poligonal, coordenadas das barras de aço e os carregamentos. Por fim, será comentada a janela de saída de dados, analisando os resultados obtidos com exemplos resolvidos. Vale ressaltar que, devido ao tempo exíguo para desenvolvimento do trabalho, o foco inicial de programação foi para verificação de pilares com seções poligonais, sendo as seções circular maciça e circular vazada, desenvolvidas posteriormente.

5.1 DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA

O desenvolvimento do software foi baseado na listagem de um programa, na linguagem *QuickBASIC*, para verificação da estabilidade de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexo-compressão normal (CAMPOS FILHO, 2005, p. 19-27) e uma outra listagem para dimensionamento e verificação de seções de concreto armado submetidas à solicitações normais, na linguagem de programação *FORTRAN* (CAMPOS FILHO, 2000, p. 39-49). Para tanto, foi necessário adaptá-los para a linguagem de programação *Microsoft Visual Basic* (versão 2010), levando-se em consideração a existência de dois momentos fletores e a variação da posição da linha neutra devido à consideração da flexo-compressão oblíqua.

O sistema de três equações não-lineares é solucionado pelo Método de Newton Raphson, resolvendo-se uma série de sistemas de três equações lineares com três incógnitas. O Teorema de Green foi utilizado para transformar as integrais de superfície sobre a zona de concreto comprimida em integrais de linha, ao longo do contorno da poligonal da seção. Os esforços resistentes são obtidos pela integração das tensões sobre a seção de concreto armado. As derivadas parciais dos esforços resistentes em relação à curvatura e deformação do centróide

da seção são calculadas separadamente para regiões, I e II, de concreto e para a armadura. A integração das curvaturas ao longo do eixo do pilar é feita separadamente para as direções x e y, através da Analogia de Mohr, obtendo-se no final os deslocamentos.

5.2 ENTRADA DE DADOS

Na janela inicial do programa, o usuário deve informar a resistência característica do concreto, f_{ck} , o coeficiente de fluência e, também, a resistência característica do aço, f_{yk} , e o módulo de elasticidade longitudinal do aço E_s . Também deverá preencher os coeficientes de minoração das resistências do concreto e do aço, γ_c e γ_s , respectivamente. Logo em seguida, deve ser escolhido o tipo de seção transversal da peça a ser analisada, como mostra a figura 16.

A imagem mostra a interface de usuário do programa. O título da janela é "Verificação da Estabilidade de Pilares Esbeltos de Concreto Armado". O menu contém "Arquivo", "Ajuda" e "Sobre...". A aba selecionada é "Dados de entrada".

Existem duas seções principais de entrada:

- Concreto:**
 - fck (kN/cm²) = [campo de texto]
 - γc = [campo de texto]
 - Coef. de fluência = [campo de texto]
- Aço:**
 - fyk (kN/cm²) = [campo de texto]
 - Es (kN/cm²) = [campo de texto]
 - γs = [campo de texto]

Abaixo, há a seção "Tipo de seção" com cinco opções de rádio:

- Retangular maciça
- Poligonal
- Retangular vazada
- Circular maciça
- Circular vazada

Um botão "Dados da seção" está localizado na parte inferior direita da área de seleção.

Figura 16: dados de entrada do programa

Após serem preenchidos todos os dados dos materiais e escolhido o tipo de seção transversal, ao clicar em <Dados da seção>, o programa abre uma nova janela de interface com o usuário para entrada de dados mais específicos do pilar a ser verificado, como mostra a figura 17. Inicialmente, deve-se escolher entre seção transversal constante ou variável ao longo da altura

do elemento a ser verificado. O número de discretizações define o número de seções que serão analisadas, e, por consequência, o número de seções a serem preenchidas ao lado. A altura do pilar deve ser inserida em centímetros e deve ser escolhido o tipo de condição de contorno entre engastado-livre ou bi-rotulado.

Após, inicia-se o processo de preenchimento de dados das diversas seções que serão discretizadas. Para cada seção, deve-se indicar, primeiramente, o número de vértices da poligonal fechada e o número de barras de armadura. Posteriormente, as coordenadas (x, y) dos vértices da poligonal devem ser inseridas no sentido anti-horário, bem como as coordenadas (x, y) das barras de armadura e suas respectivas áreas de aço. Os esforços atuantes na seção NA , MAx , MAy , Hx , Hy , qx e qy também devem ser preenchidos, sendo que o esforço normal será positivo quando for de tração e os momentos fletores serão positivos quando tiverem o mesmo sentido dos eixos (x, y) . As unidades referentes a esses esforços devem ser em kN como unidade de força e centímetros como unidade de comprimento. Depois de inseridos os dados de entrada da seção N° 1 deve-se preencher os dados da seção N° 2 e assim sucessivamente até a última seção.

Figura 17: preenchimento das seções transversais

Finalmente, depois de todos os campos serem preenchidos, aparecerá a mensagem da figura 18.

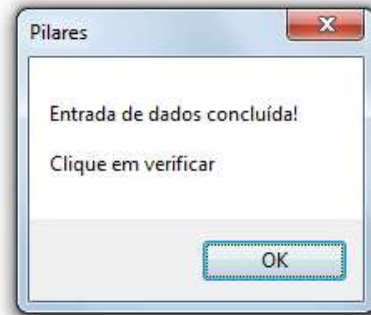


Figura 18: aviso de conclusão de entrada de dados.

Deve-se, portanto, clicar em <Verificar> para iniciar todo o processo iterativo de verificação da estabilidade de pilares de concreto armado submetidos à flexo-compressão oblíqua. Caso houver ruptura de alguma seção aparecerá a mensagem da figura 19:



Figura 19: aviso de ruptura.

Não havendo ruptura, significa que o processo iterativo chegou ao fim, ou seja, a série de deslocamentos convergiu para uma situação de equilíbrio – pilar estável. Em seguida aparecerá a mensagem da figura 20 e poderá ser visualizado os resultados da verificação.

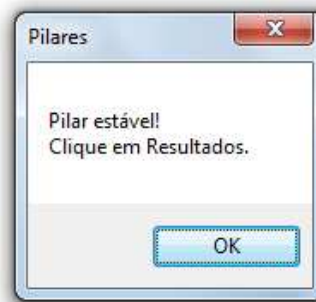


Figura 20: resultados da iteração.

Então, clicando em <Resultados>, a janela da figura 21 será aberta. Nela são apresentados os dados de saída da verificação da estabilidade de pilares de concreto armado utilizando o método do equilíbrio. Os resultados são mostrados separadamente para a direção x e y . O número de iterações realizadas para obter os valores apresentados é exibido logo no início. A primeira coluna representa o número de discretizações realizadas no pilar. Nas colunas seguintes, z representa a altura relativa à discretização, $u(z)$ é o deslocamento lateral na direção x , $N(z)$ é o esforço normal, $V_x(z)$ é o cortante, $M_x(z)$ o momento fletor, $\alpha(z)$ a inclinação da linha neutra e $b_x(z)$ a curvatura.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

VERIFICAÇÃO DA ESTABILIDADE DE PILARES ESBELTOS DE CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS À FLEXO-COMPRESSÃO OBLÍQUA

MÉTODO DO EQUILÍBRIO

Resultados da iteração 10

RESULTADOS DA VERIFICAÇÃO NA DIREÇÃO X:

	z	$u(z)$	$N(z)$	$V_x(z)$	$M_x(z)$	$\alpha(z)$	$b_x(z)$
1	0,00	0,000	-400,00	70,00	800,00	45,00	0,00001185477893
2	50,00	0,482	-400,00	62,23	4.300,93	45,00	0,00003103775293
3	100,00	0,890	-400,00	53,93	7.370,23	45,00	0,00003638512818
4	150,00	1,210	-400,00	45,09	9.976,02	45,00	0,00002506860038
5	200,00	1,465	-400,00	35,72	12.100,76	45,00	0,00002221893413
6	250,00	1,665	-400,00	25,81	13.721,10	45,00	0,00001889584182
7	300,00	1,817	-400,00	15,36	14.813,13	45,00	0,00002067890161
8	350,00	1,918	-400,00	4,38	15.348,80	45,00	0,00002155665055
9	400,00	1,964	-400,00	-7,14	15.300,49	45,00	0,00002147741816
10	450,00	1,957	-400,00	-19,20	14.641,54	45,00	0,00002039815282
11	500,00	1,898	-400,00	-31,78	13.345,73	45,00	0,00002488253489
12	550,00	1,777	-400,00	-44,91	11.382,26	45,00	0,00002913175672
13	600,00	1,581	-400,00	-58,57	8.719,04	45,00	0,00004438268883
14	650,00	1,278	-400,00	-72,77	5.316,58	45,00	0,00003981975071
15	700,00	0,000	-400,00	-87,50	801,00	45,00	0,00001186960007

Relatório de dados de entrada

Figura 21: resultados da iteração.

Foi criado, também, uma função auxiliar para visualização de todos os dados de entrada como mostra a figura 22:

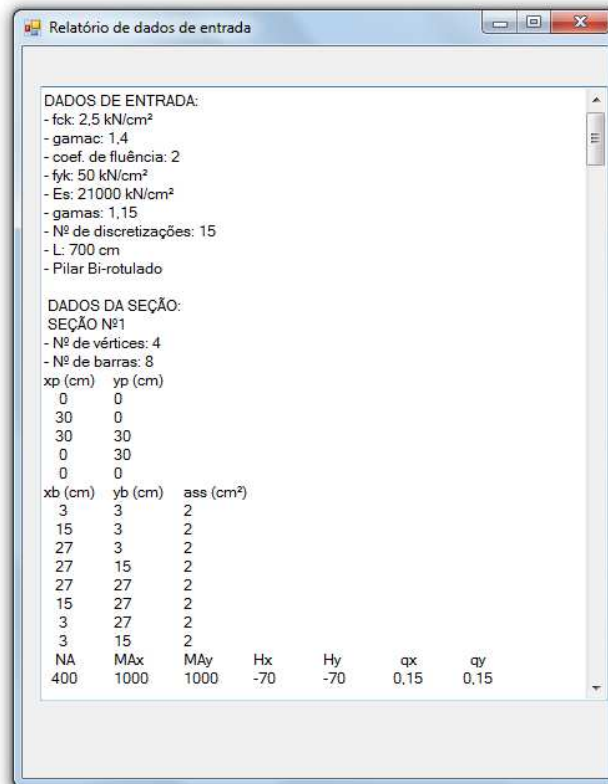


Figura 22: relatório de dados de entrada.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo apresenta uma análise final da ferramenta computacional desenvolvida, e do trabalho de diplomação como um todo, levando em consideração a finalidade ao qual ele foi desenvolvido.

No capítulo 4, apresentou-se toda a teoria para verificação da estabilidade de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexo-compressão oblíqua, utilizando o método do equilíbrio. Concluiu-se, a partir disso, que não é uma tarefa simples fazer a verificação da estabilidade de pilares utilizando um método exato. A complexidade do processo iterativo é bastante alta exigindo profundo conhecimento não só da teoria, mas também da programação.

O objetivo principal - a elaboração de um programa computacional para verificação da estabilidade de pilares esbeltos de concreto armado submetidos à flexo-compressão oblíqua - foi alcançado. O software desenvolvido analisa todas as seções discretizadas, calculando, para cada uma, a inclinação da linha neutra, a curvatura e a deformação do centróide, para então, através da Analogia de Mohr, integrar as curvaturas com as diferentes inclinações das linhas neutras (separadamente para as direções x e y) das diversas seções para obter os deslocamentos.

Através da interface gráfica o programa proporciona simplicidade para verificação de pilares de concreto armado. O relatório de entrada de dados é de grande importância para conferência e os resultados da verificação são apresentados de forma bastante clara.

Foi constatado que em alguns casos o processo iterativo não converge. Isso ocorre porque os valores arbitrados inicialmente para a inclinação da linha neutra, curvatura e deformação do centróide não está próximo da solução real. Quando os esforços resistentes e/ou as derivadas parciais em relação aos parâmetros α , b e c , são nulos, a matriz contendo as derivadas parciais torna-se não-inversível, ou seja, o processo de cálculo é interrompido.

Resolvendo um exemplo utilizando o programa desenvolvido neste trabalho para um pilar bi-rotulado com classe de resistência do concreto C25, categoria do aço CA-50, e geometria e carregamentos apresentados na figura 23, obtêm-se os resultados das figuras 24 e 25.

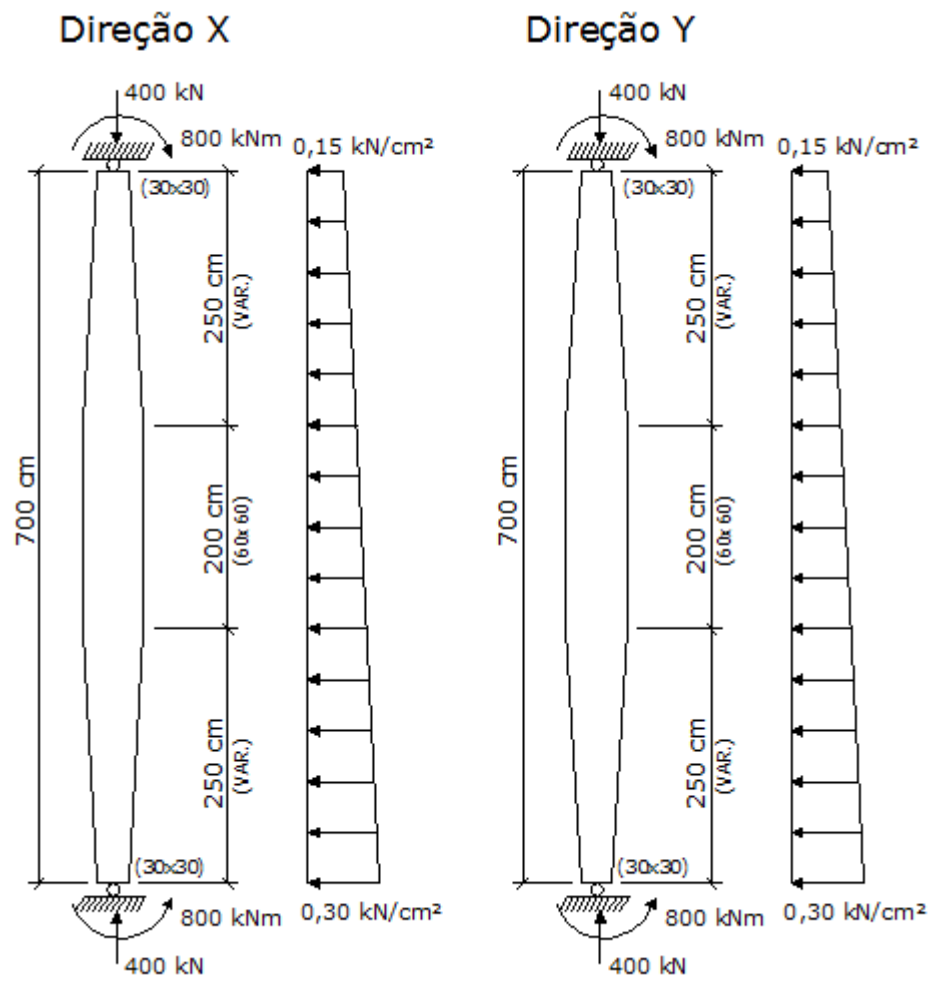


Figura 23: exemplo de aplicação: pilar bi-rotulado.

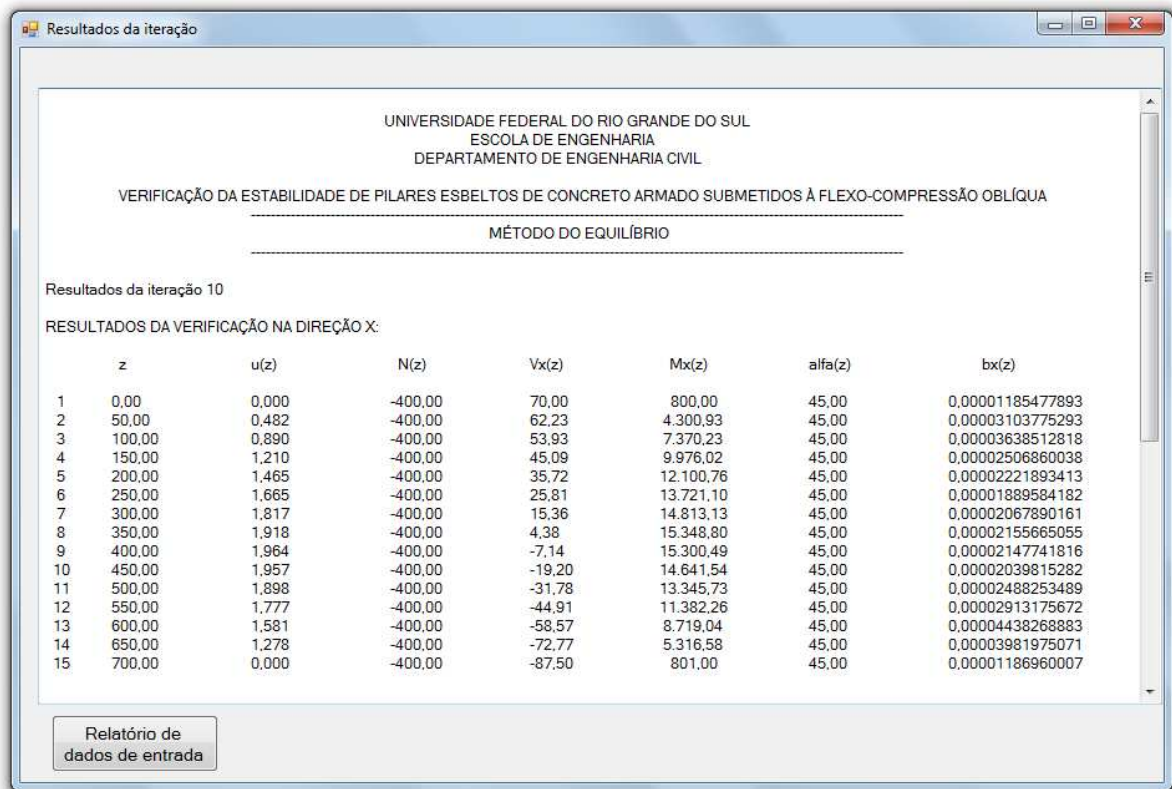


Figura 24: resultados da verificação para um pilar bi-rotulado na direção x.

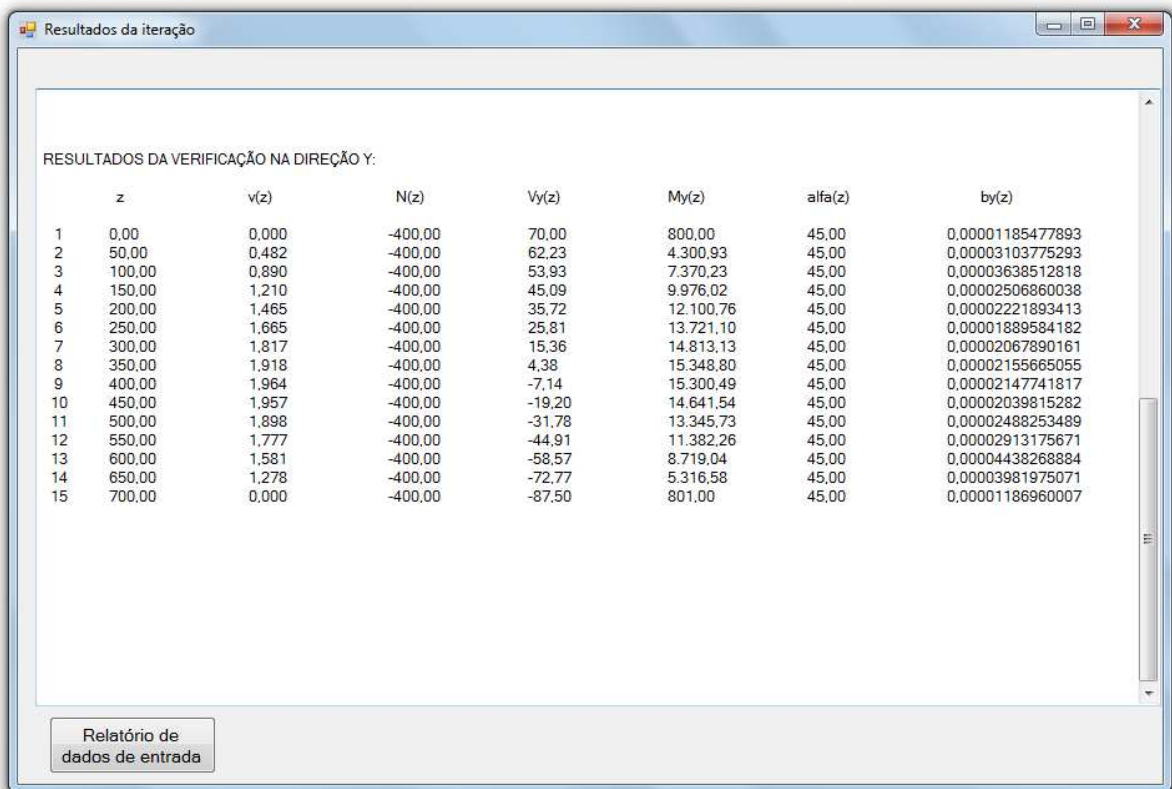


Figura 25: resultados da verificação para um pilar bi-rotulado na direção y.

Os resultados através dessa verificação estão de acordo com o esperado. A inclinação da linha neutra é igual a 45 graus em todas as seções, a qual é esperada devido ao carregamento ser simétrico, e o deslocamento nas extremidades do pilar serem nulos.

Portanto, de uma maneira geral, a partir dos resultados obtidos pelo programa, conclui-se que sua utilização para fins acadêmicos é válida, pois ele faz todos os processos iterativos descritos ao longo deste trabalho de diplomação. Ressalta-se que o software ainda pode ser mais sofisticado, abrangendo pilares com seções circulares e fazendo ajustes finos para fornecer maior precisão nos resultados.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J. M. **Curso de concreto armado**. 2. ed. Rio Grande: Dunas, 2003. v. 3.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: projeto de estruturas de concreto: procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

CAMPOS FILHO, A. **Dimensionamento e verificação de seções poligonais de concreto armado submetidos à flexão composta oblíqua**. Porto Alegre: PPGEC/UFRGS, 2000. Caderno de Engenharia.

_____. **Verificação da estabilidade de pilares esbeltos de concreto armado**. Porto Alegre: PPGEC/UFRGS, 2005. Caderno de Engenharia.

FUSCO, P. B. **Estruturas de concreto**: solicitações normais. Rio de Janeiro: LTC 1981.