

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais -  
PPGEM

**Solução da Equação de Condução de Calor Bidimensional, em Meios  
Multicompostos, pelos Métodos Nodal, com Parâmetros Concentrados, e a  
Técnica da Transformada de Laplace**

por

Ivanilda Basso Aseka

Tese para obtenção do Título de  
Doutor em Engenharia

Porto Alegre

2003

**Solução da Equação de Condução de Calor Bidimensional, em Meios Multicompostos, pelos Métodos Nodal, com Parâmetros Concentrados, e a Técnica da Transformada de Laplace**

por

Ivanilda Basso Aseka

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais, PPGEM, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Metalurgia Extrativa

Orientador: Prof. Dr. Marco Túllio Menna Barreto de Vilhena

Aprovada por:

Prof. Dr. Paulo Otto Beyer

Prof. PhD. Ricardo Carvalho de Barros

Prof. Dr. Sérgio Wortmann

Prof. Dr. Carlos Arthur Ferreira  
Coordenador do PPGEM

Porto Alegre, 09 de junho de 2003

A Edson Hikaro, Sofia Satie e Clara Akemi  
com muito amor

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Marco Túllio Vilhena, pelo estímulo e orientação.

Meu sincero agradecimento aos professores Paulo Otto Beyer e Liliane Basso Barichello, pelo tempo despendido em discussões sobre o tema deste trabalho.

Agradeço a Universidade Federal de Santa Maria, pela possibilidade de realizar este trabalho.

Ao colega Gilberto Orengo de Oliveira, meu agradecimento pelo auxílio prestado com esclarecimentos dos comandos do Latex.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro que permitiu a realização deste trabalho.

A Edson Hikaro, que sempre acreditou em mim, agradeço pelo bom humor e a presteza com que divide comigo todos os momentos, e às tranqüilas Sofia Satie e Clara Akemi, pela segurança e serenidade que me trouxeram.

Aos meus pais, Guilhermina e Felisbino, muito obrigada, pela atenção e amor dedicados.

Às minhas queridas irmãs Janir, Marisa, Marli e Mirian, que sempre me incentivam muito, agradeço pelo carinho e amizade. Aos meus irmãos Paulo, Roberto e Gilberto pela confiança.

Agradeço a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, ajudaram a realização deste trabalho.

Agradeço à Deus, por tudo.

## RESUMO

Neste trabalho, desenvolvemos uma metodologia semi-analítica para solução de problemas de condução de calor bidimensional, não-estacionária em meios multicompostos. Esta metodologia combina os métodos nodal, com parâmetros concentrados, e a técnica da transformada de Laplace.

Inicialmente, aplicamos o método nodal. Nele, a equação diferencial parcial que descreve o problema é integrada, transversalmente, em relação a uma das variáveis espaciais. Em seguida, é utilizado o método de parâmetros concentrados, onde a distribuição de temperatura nos contornos superior e inferior é substituída pelo seu valor médio. Os problemas diferenciais unidimensionais resultantes são então resolvidos com o uso da técnica da transformada de Laplace, cuja inversão é avaliada numericamente.

O método proposto é usado na solução do problema de condução de calor, em paredes de edificações. A implementação computacional é feita, utilizando-se a linguagem FORTRAN e os resultados numéricos obtidos são comparados com os disponíveis na literatura.

## ABSTRACT

In this work a semi-analytical methodology is developed for solving time-dependent two-dimensional heat conduction problems in heterogeneous media. This methodology combines the nodal method with lumped analysis and the Laplace transform technique.

The nodal method is initially applied: the partial differential equation is transverse-integrated in one of the space variables. The next step is the lumped analysis: the temperatures at the inferior and superior boundaries are approximated by their averaged values. This procedure furnishes a set of one-dimensional differential equations. The solution is obtained by using Laplace transform which is inverted by numerical integration.

The proposed method is applied in heat conduction problems appearing in buildings walls. A FORTRAN code was written in order to obtain numerical results which are compared with data available in the literature.

## ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>SISTEMAS INTEGRADOS</b>	<b>4</b>
2.1	Equação da Condução de Calor . . . . .	4
2.2	Método Nodal . . . . .	5
2.3	Parâmetros Concentrados . . . . .	6
<b>3</b>	<b>CONDUÇÃO DE CALOR NÃO-ESTACIONÁRIA BIDIMENSIONAL, EM MEIO COM VÁRIAS CAMADAS</b>	<b>10</b>
3.1	Formulação Matemática do Problema de Condução de Calor Não-Estacio- nária Bidimensional, em Meio Multicomposto . . . . .	10
3.2	Aproximação Clássica . . . . .	13
3.3	Aproximação Melhorada . . . . .	13
3.3.1	Aproximação $H_{0,0}/H_{0,0}$ . . . . .	13
3.3.2	Aproximação $H_{1,1}/H_{0,0}$ . . . . .	15
<b>4</b>	<b>CONDUÇÃO DE CALOR NÃO-ESTACIONÁRIA BIDIMENSIONAL, EM UM MEIO COM QUATRO CAMADAS</b>	<b>18</b>
4.1	Formulação Matemática do Problema . . . . .	18
4.2	Método Nodal e Método de Parâmetros Concentrados . . . . .	20
4.2.1	Aproximações Clássica e Melhoradas . . . . .	21
<b>5</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>28</b>
5.1	O Meio Multicamadas Estudado . . . . .	28
5.1.1	Temperaturas Externa e Interna . . . . .	30
5.1.2	Temperatura Inicial . . . . .	36

5.2 Resultados . . . . .	37
<b>6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>47</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>49</b>
<b>A APROXIMAÇÃO <math>H_{\alpha,\beta}</math></b>	<b>49</b>
<b>B TEMPERATURA SOL-AR</b>	<b>54</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>57</b>

## LISTA DE SÍMBOLOS

### *Letras Romanas*

$\mathcal{L}$	operador transformada de Laplace
$A_i, B_i$	constantes
$C_{p_i}$	calor específico $i$ -ésima camada
$f$	temperatura inicial
$F_i$	temperatura inicial, no $i$ -ésimo meio
$g$	fonte de calor
$G_{0i}$	temperatura média inicial, no $i$ -ésimo meio
$g_{av}$	fonte média de calor
$h_1, h_{n+1}$	coeficientes de convecção laterais
$H_{\alpha,\beta}$	aproximação de Hermite
$h_a, h_b, h_c, h_d$	coeficientes de convecção
$h_{inf}, h_{sup}$	coeficientes de convecção, contornos inferior e superior
$k$	condutividade térmica
$k_i$	condutividade térmica da $i$ -ésima camada
$q$	fluxo de calor
$R$	região limitada pela superfície S
$S$	superfície de contorno
$s$	parâmetro da transformada de Laplace
$T$	temperatura
$t$	tempo
$T_i$	temperatura na $i$ -ésima camada
$T_{av}$	temperatura média
$T_a, T_d$	temperaturas externas variáveis com o tempo
$T_b, T_c$	temperaturas constantes

$\mathbf{n}$  vetor normal unitário

$\mathbf{r}$  vetor posição

*Letras Gregas*

$\alpha, \beta$  coeficientes das condições de contorno

$\alpha_i$  difusividade térmica da  $i$ -ésima camada

$\bar{\tau}_i$  temperatura média transformada no  $i$ -ésimo meio

$\rho$  densidade

$\rho_i$  densidade da  $i$ -ésima camada

$\tau_i$  temperatura média no  $i$ -ésimo meio

## ÍNDICE DE FIGURAS

3.1	Meio constituído de $n$ camadas . . . . .	11
4.1	Meio constituído por quatro camadas . . . . .	19
5.1	Representação esquemática da parede usada, na obtenção dos resultados numéricos	30
5.2	Temperatura Sol-Ar para superfície vertical e horizontal. . . . .	33
5.3	Ajuste para Temperatura Sol-Ar - superfície vertical. . . . .	35
5.4	Ajuste para Temperatura Sol-Ar - superfície horizontal. . . . .	36
5.5	Distribuição de temperatura média na parede. . . . .	39
5.6	Fluxos médios de calor ( $W$ ), no quarto dia, obtidos, pelos métodos: dos Vo- lumes Finitos (MVF), Laplace/Gaussiana (L/G) e pelo método proposto, com aproximação $H_{1,1}/H_{0,0}$ . . . . .	41
5.7	Fluxos médios de calor ( $W$ ), no quarto dia, obtidos pelos métodos: dos Vo- lumes Finitos (MVF), Laplace/Gaussiana (L/G) e pelo método proposto, com aproximação $H_{0,0}/H_{0,0}$ . . . . .	42
5.8	Fluxos médios de calor ( $W$ ), no quarto dia, obtidos pelos métodos: dos Volumes Finitos (MVF), Laplace/Gaussiana (L/G) e pela formulação aproximada clássica.	43
5.9	Fluxo médio de calor no dia 4, obtidos pelas três aproximações: clássica, $H_{0,0}/H_{0,0}$ e $H_{1,1}/H_{0,0}$ . . . . .	45
B.1	Superfície Externa . . . . .	54

## ÍNDICE DE TABELAS

5.1	Temperatura Sol-Ar para Superfície Vertical . . . . .	31
5.2	Temperatura Sol-Ar para Superfície Horizontal . . . . .	32
5.3	Períodos . . . . .	34
5.4	Fluxo médio de calor ( $W$ ), no primeiro, segundo, terceiro e quarto dia, obtido pela formulação $H_{1,1}/H_{0,0}$ . . . . .	38
5.5	Fluxo médio de calor ( $W$ ), no quarto dia, obtido pelos métodos: dos Volumes Finitos (MVF), Laplace/Gaussiana (L/G) e Nodal, com Parâmetros Concentrados, com a formulação $H_{1,1}/H_{0,0}$ . . . . .	40
5.6	Comparação entre as três formulações aproximadas: clássica, $H_{0,0}/H_{0,0}$ e $H_{1,1}/H_{0,0}$ . . . . .	44
5.7	Variação do erro percentual com o número de pontos de quadratura de Gauss	46
A.1	Lista dos coeficientes de Hermite $C_\nu(\alpha, \beta)$ , para $\alpha, \beta \leq 4$ . . . . .	52

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, a técnica da transformada de Laplace vem sendo aplicada na solução, em forma analítica, da aproximação de ordenadas discretas ( $S_N$ ), da equação de transporte de partículas neutras unidimensional, em uma placa plana [Segatto et al., 1999a], [Segatto et al., 1999b], [Vilhena e Pazos, 1999], [Gonçalves et al., 2000]. Paralelamente, problemas de transporte de partículas neutras multidimensionais, em geometria cartesiana, têm sido resolvidos pela combinação do método Nodal e da técnica da transformada de Laplace [Vilhena et al., 1999], [Pazos et al., 2002], [Hauser, 2002]. A idéia básica é a integração transversal da equação do transporte e obtenção da solução do sistema de equações "unidimensionais" resultantes, através da técnica da transformada de Laplace.

Existe, também, uma vasta literatura sobre a solução de problemas de difusão pela aplicação da técnica da transformada de Laplace, entre os quais [Arpaci, 1966], [Carslaw e Jaeger, 1959], [Lockwood e Mulholland, 1973], [Domingos e Voelker, 1976], [Chester et al., 1984], [Chen e Lin, 1991], [Zedan e Mujahid, 1993], [Xin e Tao, 1994], [Matysiak et al., 1998], [Özisik, 1993] e [Beyer e Vilhena, 1998]. Entretanto, em uma ampla pesquisa realizada não consta, até o momento, método de solução de problemas de difusão pela combinação dos métodos nodal, com parâmetros concentrados e a técnica da transformada de Laplace.

A aplicação do método nodal e da transformada de Laplace, na solução de problemas bidimensionais de difusão, em meios multicompostos, teve início com o trabalho de Beyer [Beyer, 1998]. A metodologia desenvolvida consiste na solução dos problemas unidimensionais, obtidos com a aplicação do método nodal, através da transformada de Laplace. Para este procedimento são utilizados polinômios quadráticos para aproximar

os termos (desconhecidos) que representam o fluxo de calor nas fronteiras.

Neste trabalho, é proposta uma metodologia semi-analítica, na solução de problemas de condução de calor bidimensionais transientes, em meios multicompostos. São combinados os métodos nodal, com parâmetros concentrados, e a técnica da transformada de Laplace. Primeiramente, aplica-se o método nodal, integrando-se transversalmente a equação do calor bidimensional em relação à variável espacial  $y$ . Este procedimento gera problemas "unidimensionais" em  $x$ , escritos para temperaturas médias. Estes problemas resultantes são então resolvidos com a aplicação da transformada de Laplace na variável temporal, com inversa avaliada numericamente.

O avanço deste trabalho consiste em substituir a necessidade de interpolação quadrática feita em Beyer [Beyer, 1998], por expressões que relacionam as temperaturas no contorno do meio com as temperaturas médias. Para isto, três aproximações são impostas no texto. A primeira, simplesmente, aproxima as temperaturas na fronteira por seus valores médios. Para as outras aproximações, são utilizadas as fórmulas de integração numérica de Hermite.

Esta metodologia é usada na obtenção de uma solução do problema bidimensional, não-estacionário de condução de calor, em paredes de edificações. Com esta aplicação, temos como principal objetivo o cálculo do fluxo de calor que entra no ambiente condicionado, pois as envoltórias das edificações estão normalmente em processo transiente de transferência de calor, seja em resfriamento ou aquecimento. Portanto, o desempenho térmico dessas paredes, tem participação importante no comportamento térmico dos seus ambientes internos, influenciando aspectos como conforto térmico, dimensionamento dos sistemas de climatização e consumo de energia.

Para atingir o objetivo proposto, o trabalho está organizado da maneira que segue:

No capítulo 2, fazemos uma breve descrição dos métodos nodal e de parâmetros concentrados.

No capítulo 3, é tratado o problema de condução de calor bidimensional, em meios constituídos de várias camadas em contato, através do método nodal conjugado com o método de parâmetros concentrados. Os problemas unidimensionais que resultam da

aplicação do método nodal é feito no capítulo 4, como aplicação da metodologia proposta.

No capítulo 4, é obtida a solução do problema de condução de calor bidimensional transiente em paredes de edificações, composta de quatro meios, sujeitas às condições de contorno convectiva em todos. Este problema foi estudado por Beyer [Beyer, 1998].

No capítulo 5, apresentamos a composição da parede utilizada neste trabalho, as propriedades físicas dos materiais que a compõem, bem como são enunciados os resultados numéricos e as comparações com resultados disponíveis na literatura.

E, finalmente, no capítulo 6, são apresentadas as conclusões.

## CAPÍTULO 2

### SISTEMAS INTEGRADOS

A idéia básica dos sistemas ditos integrados é reduzir modelos diferenciais complexos a modelos mais simples, através da redução do número de variáveis independentes, pela integração da equação diferencial parcial, em relação a uma ou mais variáveis espaciais, gerando uma grandeza média. Dentre os métodos que utilizam a integração, como ferramenta na obtenção da solução, está presente o método nodal. A seguir, após um comentário da equação do calor, fazemos uma breve descrição do método referido e também do método dos parâmetros concentrados, ambos utilizados neste trabalho.

#### 2.1 Equação da Condução de Calor

A equação diferencial que descreve a condução de calor, em um sólido isotrópico e homogêneo, com geração de calor  $g(\mathbf{r}, t)$ , é representada por [Carslaw e Jaeger, 1959] - [Arpaci, 1966]:

$$\nabla[k\nabla T(\mathbf{r}, t)] + g(\mathbf{r}, t) = \rho C_p \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{r} \in R, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

onde  $R$  é uma região limitada pela superfície  $S$ ,  $k$  é a condutividade térmica,  $C_p$  o calor específico e  $\rho$ , a densidade.

Uma vez obtida a solução da equação acima, obtém-se a distribuição de temperatura  $T(\mathbf{r}, t)$  e, conseqüentemente, pode ser calculado o fluxo de calor, em qualquer posição, através da Lei de Fourier:

$$q(\mathbf{r}, t) = -k\nabla T(\mathbf{r}, t). \quad (2.2)$$

A equação (2.1) requer condições de contorno sobre  $S$ , descritas por [Özisik, 1993], [Arpaci, 1966]:

$$\beta(\mathbf{r})k \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(\mathbf{r})T(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in S, \quad t > 0, \quad (2.3)$$

onde os coeficientes  $\alpha(\mathbf{r})$  e  $\beta(\mathbf{r})$  são funções prescritas em  $S$ ,  $\partial T/\partial \mathbf{n}$  representa a derivada ao longo do vetor normal externo em  $S$  e  $f(\mathbf{r}, t)$  é específico, de acordo com um dos três tipos de condições de contorno descritas em Özisik [Özisik, 1993].

Quando dois materiais de diferentes condutividades térmicas, digamos  $k_1$  e  $k_2$ , estão em contato, temos um contorno comum chamado de *interface*. A condição na interface é representada por:

$$\left( \begin{array}{c} \text{condução do calor} \\ \text{no meio 1} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{condução do calor nas} \\ \text{lacunas entre os dois meios} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{condução do calor} \\ \text{no meio 2} \end{array} \right) \quad (2.4)$$

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_i = h_c (T_1 - T_2)_i = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_i, \quad (2.5)$$

onde  $i$  denota a interface e  $h_c$  o coeficiente de condutividade na interface.

Para o caso especial de *contato térmico perfeito* entre as superfícies, temos  $h_c \rightarrow \infty$ , então a equação (2.5) passa a ter a seguinte forma

$$T_1 = T_2 \quad (2.6)$$

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}, \quad (2.7)$$

onde as equações (2.6) e (2.7) representam, respectivamente, a continuidade da temperatura e a continuidade do fluxo de calor na interface.

A condição inicial, para a equação (2.1), é dada por

$$T(\mathbf{r}, 0) = f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in R. \quad (2.8)$$

## 2.2 Método Nodal

Formulações simplificadas para sistemas térmicos complexos podem ser obtidas removendo-se variáveis espaciais, ou seja, reescrevendo-se a equação (2.1), em termos da temperatura média. Esta idéia é descrita nesta seção.

Para isto, vamos definir a temperatura média como

$$T_{av}(t) = \frac{1}{V} \int_R T(\mathbf{r}, t) dR, \quad (2.9)$$

onde  $V$  é o volume. Multiplicando ambos os lados da equação (2.1) por  $1/V$  e integrando, na região  $R$ , obtém-se:

$$\frac{1}{V} \int_R \nabla \cdot k \nabla T(\mathbf{r}, t) dR + g_{av}(t) = \rho C_p \frac{dT_{av}(t)}{dt}, \quad (2.10)$$

onde

$$g_{av}(t) = \frac{1}{V} \int_R g(\mathbf{r}, t) dR. \quad (2.11)$$

O teorema da divergência, aplicado à integral de volume da equação (2.10), fornece

$$\int_R \nabla \cdot k \nabla T dR = \int_{\tilde{s}} k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} d\tilde{s}. \quad (2.12)$$

Reescrevendo a condição de contorno (2.3), como

$$k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{\beta(\mathbf{r})} [f(\mathbf{r}, t) - \alpha(\mathbf{r})T(\mathbf{r}, t)], \quad \mathbf{r} \in S, \quad (2.13)$$

e utilizando (2.12), a equação (2.10) aparece como

$$\frac{1}{V} \int_s \frac{1}{\beta(\mathbf{r})} [f(\mathbf{r}, t) - \alpha(\mathbf{r})T(\mathbf{r}, t)] d\tilde{s} + g_{av}(t) = \rho C_p \frac{dT_{av}(t)}{dt}, \quad (2.14)$$

ou, ainda,

$$\frac{1}{V} \int_s \frac{f(\mathbf{r}, t)}{\beta(\mathbf{r})} d\tilde{s} - \frac{1}{V} \int_s \frac{\alpha(\mathbf{r})}{\beta(\mathbf{r})} T(\mathbf{r}, t) d\tilde{s} + g_{av}(t) = \rho C_p \frac{dT_{av}(t)}{dt}. \quad (2.15)$$

Vale observar que a equação (2.15) contém termos que envolvem a temperatura média e o valor da temperatura no contorno. Essa nova equação é um modelo simplificado, obtido a partir da equação (2.1).

### 2.3 Parâmetros Concentrados

A presença dos termos que envolvem a temperatura média e o valor da temperatura no contorno, na equação (2.15), é novamente notada. Nesse ponto, assumimos que

a temperatura no contorno pode ser razoavelmente bem aproximada por uma função da temperatura média [Cotta e Mikhailov, 1997], ou seja,

$$T(\mathbf{r}, t) \cong f[T_{av}(t)], \quad \mathbf{r} \in S. \quad (2.16)$$

Esta aproximação é a característica básica do método dos parâmetros concentrados (dentro da análise de sistemas integrados). Como será visto posteriormente, esta aproximação revela uma marcante simplificação do problema original, em relação ao tratamento analítico.

Diferentes níveis de aproximação podem ser utilizados, desde a *Aproximação Clássica*, que usa

$$T(\mathbf{r}, t) \cong T_{av}(t), \quad \mathbf{r} \in S, \quad (2.17)$$

(ou seja, a distribuição de temperatura no contorno é aproximada pela temperatura média) até *Aproximação Melhorada*, que, na determinação de  $f[T_{av}(t)]$ , utiliza aproximação de Hermite [Menning et al., 1983] para as integrais envolvidas nos cálculos.

A simplificação analítica pode ser constatada, a seguir, com o uso da aproximação clássica. Assim, utilizando a equação (2.17), a formulação diferencial integrada clássica, para o sistema (2.15), é

$$P(t) - Q_s S T_{av}(t) = \rho C_p V \frac{dT_{av}(t)}{dt}, \quad t > 0, \quad (2.18)$$

onde

$$Q_s = \frac{1}{S} \int_s \frac{\alpha(\mathbf{r})}{\beta(\mathbf{r})} ds \quad (2.19)$$

e

$$P(t) = g_{av}(t)V + \int_s \frac{f(\mathbf{r}, t)}{\beta(\mathbf{r})} ds. \quad (2.20)$$

A condição inicial do sistema descrito pela equação (2.18) é a média da condição inicial (2.8), isto é,

$$T_{av}(0) = f_{av} \equiv \frac{1}{V} \int_R f(\mathbf{r}) dR. \quad (2.21)$$

A solução do sistema dado pelas equações (2.18)-(2.21) é determinada de forma única e pode ser escrita como

$$T_{av}(t) = f_{av} \exp\left[-\left(\frac{Q_s S}{\rho C_p V}\right)t\right] + \int_0^t P(\xi) \exp\left[-\left(\frac{Q_s S}{\rho C_p V}\right)(t - \xi)\right] d\xi. \quad (2.22)$$

A aproximação melhorada tem por objetivo melhorar a relação entre a temperatura no contorno e a temperatura média, mantendo o mesmo nível de simplificação matemática quando esta for comparada com a aproximação clássica. Nesta abordagem, as integrais são aproximadas pela aproximação de Hermite. Hermite desenvolveu um meio de aproximar integrais baseado nos valores do integrando e suas derivadas, nos limites de integração, gerando a chamada *Aproximação*  $H_{\alpha,\beta}$  [Menning et al., 1983], escrita como (anexo [A])

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \sum_{\nu=0}^{\alpha} C_{\nu}(\alpha, \beta) h_i^{\nu+1} f_{i-1}^{(\nu)} + \sum_{\nu=0}^{\beta} C_{\nu}(\beta, \alpha) (-1)^{\nu} h_i^{\nu+1} f_i^{(\nu)} + O(h_i^{\alpha+\beta+3}), \quad (2.23)$$

onde

$$h_i = x_i - x_{i-1} \quad (2.24)$$

e

$$C_{\nu}(\alpha, \beta) = \frac{(\alpha + 1)! (\alpha + \beta + 1 - \nu)!}{(\nu + 1)! (\alpha - \nu)! (\alpha + \beta + 2)!}. \quad (2.25)$$

Quando  $\alpha = \beta$  a equação (2.23) toma a forma

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \sum_{\nu=0}^{\alpha} C_{\nu}(\alpha, \alpha) h_i^{\nu+1} (f_{i-1}^{(\nu)} + (-1)^{\nu} f_i^{(\nu)}). \quad (2.26)$$

Neste trabalho, usamos as aproximações  $H_{0,0}$  e  $H_{1,1}$  dadas, respectivamente, por:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \cong \frac{h_i}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \quad (2.27)$$

e

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \cong \frac{h_i}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_i)) + \frac{h_i^2}{12} (f'(x_{i-1}) - f'(x_i)), \quad (2.28)$$

que correspondem, respectivamente, a regra de integração do trapézio e a do trapézio corrigida.

É importante observar que, no uso das aproximações  $H_{0,0}$  e  $H_{1,1}$ , pode-se avaliar o erro envolvido [Corrêa e Cotta, 1997]. As expressões para os erros são, respectivamente,

$$E_{0,0} = -\frac{h^3}{12} f''(\eta), \quad \eta \in (0, h), \quad (2.29)$$

e

$$E_{1,1} = +\frac{h^5}{720} f^{iv}(\xi), \quad \xi \in (0, h). \quad (2.30)$$

No próximo capítulo, aplicamos o método nodal com parâmetros concentrados na equação diferencial parcial, que descreve o problema de condução de calor bidimensional, não-estacionária, em meios constituídos de várias camadas.

## CAPÍTULO 3

### CONDUÇÃO DE CALOR NÃO-ESTACIONÁRIA BIDIMENSIONAL, EM MEIO COM VÁRIAS CAMADAS

Neste capítulo, apresentamos uma metodologia de solução para o problema de condução de calor bidimensional, não-estacionário em um meio, com várias camadas. Primeiramente, o sistema diferencial é integrado, transversalmente, em relação a variável  $y$ , obtendo-se um novo problema escrito em termos da temperatura média. Em seguida, é aplicado o método de parâmetros concentrados no sistema integrado, para obtermos um sistema diferencial "unidimensional". Nele, os termos que contêm as temperaturas em  $y = y_1$  e  $y = y_2$  são aproximados por três diferentes formulações.

#### 3.1 Formulação Matemática do Problema de Condução de Calor Não-Estacionária Bidimensional, em Meio Multicomposto

Consideramos um meio composto, constituído de  $n$  camadas paralelas em contato, como ilustrado na Figura 3.1. Assumimos que não há resistência ao contato (ou seja, tem-se contato térmico perfeito) nas interfaces  $x = x_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ . Cada camada é homogênea, isotrópica e tem propriedades térmicas (isto é  $\rho_i$ ,  $c_{p_i}$  e  $k_i$ ) constantes. Inicialmente, cada camada está à temperatura  $T_i(x, y, 0) = F_i(x, y)$  em  $x_i < x < x_{i+1}$  e  $y_1 < y < y_2$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  e  $t = 0$ . Para um dado tempo  $t > 0$ , o calor é transferido por convecção, nos quatro contornos. Os coeficientes de transferência de calor nas fronteiras  $x = x_1$ ,  $x = x_{n+1}$ ,  $y = y_1$  e  $y = y_2$  são, respectivamente,  $h_1$ ,  $h_{n+1}$ ,  $h_{inf}$  e  $h_{sup}$ . Não há geração de calor no meio. A formulação matemática deste problema de condução de calor é dada a seguir e a equação diferencial para cada uma das  $n$  camadas é

$$\frac{\partial^2 T_i(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i(x, y, t)}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial T_i(x, y, t)}{\partial t}, \quad \text{em } x_1 < x < x_{n+1}, \quad y_1 < y < y_2, \quad (3.1)$$

$$t > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

onde  $\alpha_i = \frac{k_i}{\rho_i C_{p_i}}$  é a difusividade térmica,  $\rho_i$  é a densidade,  $C_{p_i}$ , o calor específico e  $k_i$ , a condutividade térmica.

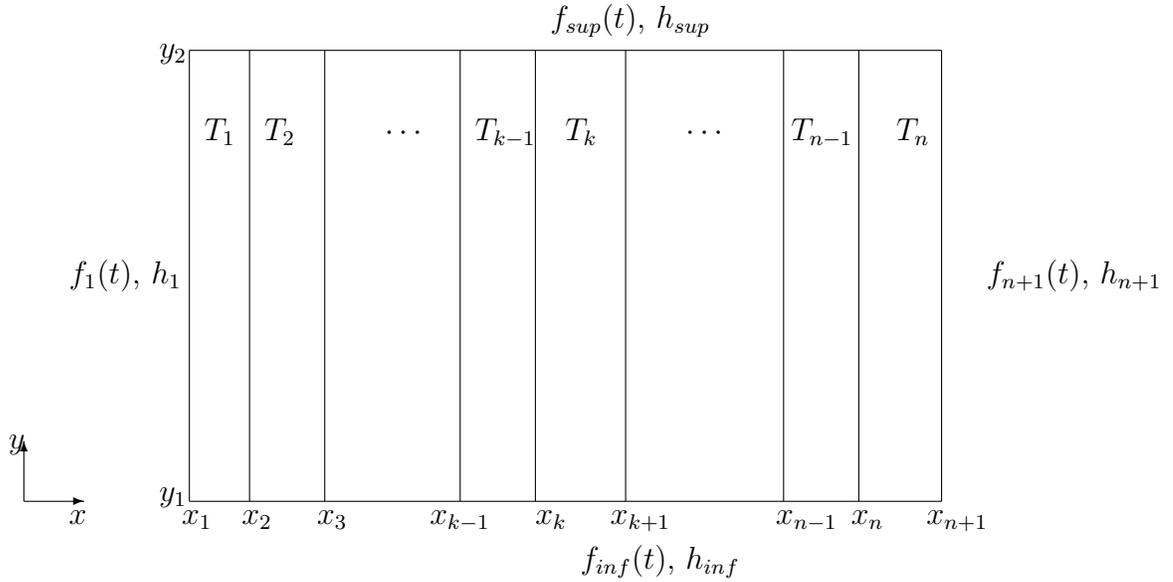


Figura 3.1 – Meio constituído de  $n$  camadas

A equação (3.1) está sujeita às seguintes condições de contorno, de interface e inicial.

- Condições de contorno em  $x$ :

$$-k_1 \frac{\partial T_1(x, y, t)}{\partial x} = h_1 [f_1(t) - T_1(x, y, t)], \quad x = x_1, \quad y_1 < y < y_2, \quad t > 0; \quad (3.1a)$$

$$k_n \frac{\partial T_n(x, y, t)}{\partial x} = h_{n+1} [f_{n+1}(t) - T_n(x, y, t)], \quad x = x_{n+1}, \quad y_1 < y < y_2, \quad t > 0; \quad (3.1b)$$

- condições de contorno em  $y$ :

$$-k_i \frac{\partial T_i(x, y, t)}{\partial y} = h_{inf} [f_{inf}(t) - T_i(x, y, t)], \quad y = y_1, \quad x_1 < x < x_{n+1}, \quad t > 0; \quad (3.1c)$$

$$k_i \frac{\partial T_i(x, y, t)}{\partial y} = h_{sup}[f_{sup}(t) - T_i(x, y, t)], \quad y = y_2, \quad x_1 < x < x_{n+1}, \quad t > 0; \quad (3.1d)$$

- condições de interface,  $i = 1, 2, \dots, (n - 1)$ ,

$$T_i(x, y, t) = T_{i+1}(x, y, t), \quad x = x_{i+1}, \quad y_1 < y < y_2, \quad t > 0; \quad (3.1e)$$

$$k_i \frac{\partial T_i(x, y, t)}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}(x, y, t)}{\partial x}, \quad x = x_{i+1}, \quad y_1 < y < y_2, \quad t > 0; \quad (3.1f)$$

- condições iniciais para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$T_i(x, y, t) = F_i(x, y), \quad t = 0, \quad y_1 < y < y_2, \quad x_i < x < x_{i+1}. \quad (3.1g)$$

Integrando a equação (3.1) em  $y$ , entre os limites  $y_1$  e  $y_2$ , e, multiplicando por  $1/\Delta y$ , obtemos a seguinte equação diferencial parcial em  $x$  e  $t$

$$\frac{\partial^2 \tau_i(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{\Delta y} \left[ \frac{\partial T_i}{\partial y} \Big|_{y=y_2} - \frac{\partial T_i}{\partial y} \Big|_{y=y_1} \right] = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \tau_i(x, t)}{\partial t}, \quad (3.2)$$

onde a temperatura média é definida como

$$\tau_i(x, t) = \frac{1}{\Delta y} \int_{y_1}^{y_2} T_i(x, y, t) dy, \quad (3.3)$$

$\Delta y = y_2 - y_1$  e  $i = 1, \dots, n$ .

Usando as condições de contorno (3.1c) e (3.1d), obtemos o novo sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_i(x, t)}{\partial x^2} - \frac{h_{sup}}{\Delta y k_i} T_i(x, y_2, t) - \frac{h_{inf}}{\Delta y k_i} T_i(x, y_1, t) = \\ \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \tau_i(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{\Delta y k_i} [h_{sup} f_{sup}(t) + h_{inf} f_{inf}(t)], \quad x_1 < x < x_{n+1}, \quad (3.4) \\ t > 0. \end{aligned}$$

Notamos que a equação diferencial (3.4) contém termos que representam a temperatura na superfície de contorno em  $y = y_1$  e  $y = y_2$ .

### 3.2 Aproximação Clássica

A equação (3.4) é uma representação diferencial da equação (3.1). A seguir, utilizamos a aproximação clássica, descrita no capítulo anterior, para aproximar a distribuição de temperatura nas fronteiras  $y = y_1$  e  $y = y_2$  pela temperatura média, isto é,

$$T_i(x, y_1, t) \approx \tau_i(x, t) \quad (3.5)$$

e

$$T_i(x, y_2, t) \approx \tau_i(x, t), \quad (3.6)$$

onde  $i = 1, \dots, n$ .

Assim, substituindo as equações (3.5) e (3.6) em (3.4), obtemos a formulação clássica para a temperatura média  $\tau_i$

$$\frac{\partial^2 \tau_i(x, t)}{\partial x^2} - \frac{(h_{inf} + h_{sup})}{\Delta y k_i} \tau_i(x, t) = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \tau_i(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{\Delta y k_i} (h_{sup} f_{sup}(t) + h_{inf} f_{inf}(t)). \quad (3.7)$$

### 3.3 Aproximação Melhorada

Para a aproximação melhorada, utilizamos as relações  $T(x, y_1, t) \approx f[\tau_i(x, t)]$  e  $T(x, y_2, t) \approx f[\tau_i(x, t)]$ . A determinação de  $f[\tau_i(x, t)]$  é feita a partir da aproximação de Hermite para integrais.

#### 3.3.1 Aproximação $H_{0,0}/H_{0,0}$

Considerando as integrais que definem as temperaturas e os fluxos médios de calor

$$\frac{1}{\Delta y} \int_{y_1}^{y_2} T_i(x, y, t) dy = \tau_i(x, t), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.8)$$

e

$$\frac{1}{\Delta y} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial T_i(x, y, t)}{\partial y} dy = \frac{1}{\Delta y} (T_i(x, y_2, t) - T_i(x, y_1, t)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.9)$$

e aproximando-as pela regra do trapézio  $H_{0,0}$ , dada pela equação (2.27), obtemos as expressões

$$\tau_i(x, t) \cong \frac{1}{2}[T_i(x, y_1, t) + T_i(x, y_2, t)], \quad i = 1, \dots, n \quad (3.10)$$

e

$$\frac{1}{\Delta y}(T_i(x, y_2, t) - T_i(x, y_1, t)) \cong \frac{1}{2} \left[ \left. \frac{\partial T_i}{\partial y} \right|_{y=y_1} + \left. \frac{\partial T_i}{\partial y} \right|_{y=y_2} \right], \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.11)$$

Empregando, agora, as condições de contorno (3.1c) e (3.1d), a equação (3.11) é reescrita como

$$T_i(x, y_2, t) = \left[ \frac{2k_i + h_{inf}}{2k_i + h_{sup}} \right] T_i(x, y_1, t) - \left[ \frac{h_{inf}f_{inf}(t) - h_{sup}f_{sup}(t)}{2k_i + h_{sup}} \right], \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.12)$$

e também

$$T_i(x, y_1, t) = \left[ \frac{2k_i + h_{sup}}{2k_i + h_{inf}} \right] T_i(x, y_2, t) + \left[ \frac{h_{inf}f_{inf}(t) - h_{sup}f_{sup}(t)}{2k_i + h_{inf}} \right], \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

A seguir, a equação (3.12) é substituída em (3.10), resultando

$$T_i(x, y_1, t) = 2 \left[ \frac{2k_i + h_{sup}}{4k_i + h_{sup} + h_{inf}} \right] \tau_i(x, t) + \left[ \frac{h_{inf}f_{inf}(t) - h_{sup}f_{sup}(t)}{4k_i + h_{inf} + h_{sup}} \right], \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.14)$$

Substituimos a equação (3.13) em (3.10), obteremos

$$T_i(x, y_2, t) = 2 \left[ \frac{2k_i + h_{inf}}{4k_i + h_{inf} + h_{sup}} \right] \tau_i(x, t) - \left[ \frac{h_{inf}f_{inf}(t) - h_{sup}f_{sup}(t)}{4k_i + h_{inf} + h_{sup}} \right], \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.15)$$

Portanto, as relações ditas *melhoradas* entre as temperaturas, nos contornos  $y = y_1$  e  $y = y_2$  e as suas médias, são dadas, respectivamente, pelas equações (3.14) e (3.15).

Deste modo, substituindo essas relações, no sistema integrado (3.4), teremos a formulação  $H_{0,0}/H_{0,0}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_i(x, t)}{\partial x^2} - \frac{4(k_i \Delta y (h_{sup} + h_{inf}) + h_{sup} h_{inf})}{k_i (4k_i + h_{inf} + h_{sup})} \tau_i(x, t) &= \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \tau_i(x, t)}{\partial t} \\ - \frac{1}{k_i \Delta y} \left[ (h_{sup} f_{sup}(t) + h_{inf} f_{inf}(t)) - \frac{h_{sup} - h_{inf}}{4k_i + h_{sup} + h_{inf}} (h_{inf} f_{inf}(t) - h_{sup} f_{sup}(t)) \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

### 3.3.2 Aproximação $H_{1,1}/H_{0,0}$

Aqui a regra trapezoidal  $H_{1,1}$ , dada pela equação (2.28), é usada para aproximar a integral da temperatura média. Para o fluxo médio de calor, equação (3.11), mantemos a regra  $H_{0,0}$ . Sendo assim, a relação entre as temperaturas média e do contorno (usando (2.28)) apresenta a seguinte forma

$$\tau_i(x, t) \cong \frac{1}{2}[T_i(x, y_1, t) + T_i(x, y_2, t)] + \frac{\Delta y}{12} \left[ \frac{\partial T_i}{\partial y} \Big|_{y=y_1} - \frac{\partial T_i}{\partial y} \Big|_{y=y_2} \right], \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.17)$$

Aplicando as condições de contorno (3.1c) e (3.1d), a equação acima descrita ficará

$$\begin{aligned} \tau_i(x, t) = & \left[ \frac{6k_i + \Delta y h_{inf}}{12k_i} \right] T_i(x, y_1, t) + \left[ \frac{6k_i + \Delta y h_{sup}}{12k_i} \right] T_i(x, y_2, t) \\ & - \frac{\Delta y}{12k_i} (h_{inf} f_{inf}(t) + h_{sup} f_{sup}(t)), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Com a utilização da aproximação  $H_{0,0}$  para o fluxo, obtivemos as equações (3.12) e (3.13). Estas aproximações são novamente consideradas aqui, ou seja,

$$T_i(x, y_2, t) = \left[ \frac{2k_i + h_{inf}}{2k_i + h_{sup}} \right] T_i(x, y_1, t) - \left[ \frac{h_{inf} f_{inf}(t) - h_{sup} f_{sup}(t)}{2k_i + h_{sup}} \right], \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.19)$$

e

$$T_i(x, y_1, t) = \left[ \frac{2k_i + h_{sup}}{2k_i + h_{inf}} \right] T_i(x, y_2, t) + \left[ \frac{h_{inf} f_{inf}(t) - h_{sup} f_{sup}(t)}{2k_i + h_{inf}} \right], \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.20)$$

Então, substituindo a equação (3.19) em (3.18), resulta

$$T_i(x, y_1, t) = \frac{U_{sup}}{V} \tau_i(x, t) - \frac{W(t)}{V}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.21)$$

onde

$$U_{sup} = 6k_i(2k_i + h_{sup}), \quad (3.22)$$

$$V = 12k_i^2 + k_i(3 + \Delta y)(h_{inf} + h_{sup}) + \Delta y h_{sup} h_{inf} \quad (3.23)$$

e

$$\begin{aligned} W(t) = & 3k_i(h_{inf} f_{inf}(t) - h_{sup} f_{sup}(t)) + \Delta y h_{inf} h_{sup} f_{inf}(t) \\ & + k_i \Delta y (h_{inf} f_{inf}(t) + h_{sup} f_{sup}(t)). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Por outro lado, substituindo (3.20) em (3.18) temos

$$T_i(x, y_2, t) = \frac{U_{inf}}{V} \tau_i(x, t) - \frac{Z(t)}{V}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.25)$$

onde

$$U_{inf} = 6k_i(2k_i + h_{inf}), \quad (3.26)$$

e

$$\begin{aligned} Z(t) = & 3k_i(h_{inf}f_{inf}(t) - h_{sup}f_{sup}(t)) - \Delta y h_{inf}h_{sup}f_{inf}(t) \\ & - k_i\Delta y(h_{inf}f_{inf}(t) + h_{sup}f_{sup}(t)). \end{aligned} \quad (3.27)$$

As equações (3.21) e (3.25) mostram as relações procuradas entre a temperatura média e as temperaturas na superfície para a aproximação  $H_{1,1}/H_{0,0}$ . Logo, substituindo estas relações no sistema (3.4), temos a formulação  $H_{1,1}/H_{0,0}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_i(x, t)}{\partial x^2} - \frac{(h_{sup}U_{inf} + h_{inf}U_{sup})}{k_i\Delta yV} \tau_i(x, t) = & \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \tau_i(x, t)}{\partial t} \\ - \frac{1}{\Delta yk_i}(h_{sup}f_{sup}(t) + h_{inf}f_{inf}(t)) + & \frac{(h_{sup}Z(t) - h_{inf}W(t))}{k_i\Delta yV}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Com isso, obtemos novos sistemas diferenciais a serem resolvidos, dados por (3.7), (3.16) e (3.28), e sujeitos às seguintes condições de contorno

$$-k_1 \frac{\partial \tau_1(x, t)}{\partial x} = h_1[f_1(t) - \tau_1(x, t)], \quad x = x_1, \quad t > 0; \quad (3.29)$$

$$k_n \frac{\partial \tau_n(x, t)}{\partial x} = h_{n+1}[f_{n+1}(t) - \tau_n(x, t)], \quad x = x_{n+1}, \quad t > 0; \quad (3.30)$$

condições de interface, para  $i = 1, 2, \dots, (n-1)$ ,

$$\tau_i(x, t) = \tau_{i+1}(x, t), \quad x = x_{i+1}, \quad t > 0; \quad (3.31)$$

$$k_i \frac{\partial \tau_i(x, t)}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial \tau_{i+1}(x, t)}{\partial x}, \quad x = x_{i+1}, \quad t > 0; \quad (3.32)$$

e com condições iniciais, para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ,

$$\tau_i(x, t) = G_{0i}(x), \quad t = 0, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad (3.33)$$

onde

$$G_{0i}(x) = \frac{1}{\Delta y} \int_{y_1}^{y_2} F_i(x, y) dy. \quad (3.34)$$

Os sistemas diferenciais obtidos não são resolvidos neste momento, pois no próximo capítulo, a título de ilustração e sem perda de generalidade, aplicamos a metodologia descrita neste capítulo, na solução do problema de condução de calor, em um meio constituído de quatro camadas e, então, resolveremos as equações unidimensionais, através da técnica da transformada de Laplace.

## CAPÍTULO 4

### CONDUÇÃO DE CALOR NÃO-ESTACIONÁRIA BIDIMENSIONAL, EM UM MEIO COM QUATRO CAMADAS

Neste capítulo, aplicamos o procedimento descrito anteriormente na solução do problema de condução de calor, bidimensional, transiente, em um meio composto por quatro camadas, representando paredes de edificações. A grande maioria das superfícies envoltórias de edificações é composta por quatro meios ou menos, devido a isto, este estudo pretende resolver o problema de uma superfície composta por quatro camadas: estuque, concreto pesado, isolante e reboco [Aseka et al., 2000]. Devido as dimensões adotadas para este meio, espessura de cada camada muito pequena quando comparada com a altura, podemos supor um gradiente de temperatura, suave na direção vertical. Neste meio, tomamos uma média da temperatura para remover uma das variáveis espaciais e utilizamos as aproximações clássica,  $H_{0,0}/H_{0,0}$  e  $H_{1,1}/H_{0,0}$ . Em seguida, a técnica da transformada de Laplace é aplicada, na variável temporal, para encontrar a solução da equação diferencial obtida.

#### 4.1 Formulação Matemática do Problema

Consideramos, um meio constituído de 4 camadas paralelas em contato, como é ilustrado na Figura 4.1. Assumimos que não há resistência térmica nas interfaces  $x = x_i$ ,  $i = 2, 3, 4$ . Cada camada é homogênea, isotrópica e tem propriedades térmicas (isto é  $\rho_i$ ,  $C_{p_i}$  e  $k_i$ ) constantes. Inicialmente, cada camada está à temperatura  $T_i(x, y, 0) = F_i(x, y)$  em  $x_i < x < x_{i+1}$  e  $y_1 < y < y_2$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  e  $t = 0$ . Para um tempo  $t > 0$ , o calor é transferido por convecção nos contornos, que estão sujeitos às temperaturas:  $T_a(t)$  à esquerda;  $T_b(t)$  à direita;  $T_c(t)$  em  $y = y_1$  e  $T_d(t)$  em  $y = y_2$ . As temperaturas  $T_a(t)$

e  $T_d(t)$  são variáveis com o tempo (serão posteriormente analisadas),  $T_b(t)$  e  $T_c(t)$  são consideradas constantes. Os coeficientes de transferência de calor nas fronteiras  $x = x_1$ ,  $x = x_5$ ,  $y = y_1$  e  $y = y_2$  são, respectivamente,  $h_a$ ,  $h_b$ ,  $h_c$  e  $h_d$ . Não há geração de calor no meio. A formulação matemática desse problema de condução de calor, governado pela distribuição de temperatura  $T_i(x, y, t)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , para  $t > 0$ , [Aseka et al., ] é dada por

$$\frac{\partial^2 T_i(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i(x, y, t)}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial T_i(x, y, t)}{\partial t}, \quad \text{em} \quad x_1 < x < x_5, \quad y_1 < y < y_2, \quad (4.1)$$

$$t > 0, \quad i = 1, \dots, 4$$

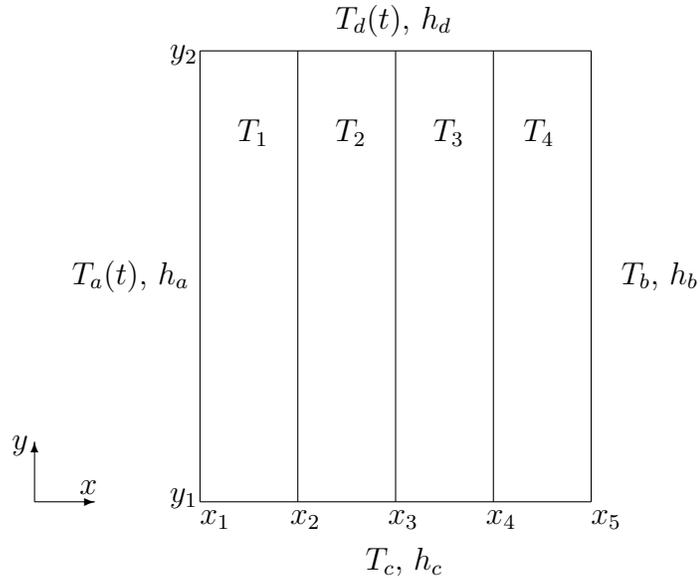


Figura 4.1 – Meio constituído por quatro camadas

Ao problema acima, equação (4.1), são incorporadas as seguintes condições de contorno, de interface e condições iniciais:

- condições de contorno em  $x$ :

$$-k_1 \frac{\partial T_1(x, y, t)}{\partial x} = h_a [T_a(t) - T_1(x, y, t)], \quad x = x_1, \quad y_1 < y < y_2, \quad t > 0; \quad (4.1a)$$

$$k_4 \frac{\partial T_4(x, y, t)}{\partial x} = h_b [T_b - T_4(x, y, t)], \quad x = x_5, \quad y_1 < y < y_2, \quad t > 0; \quad (4.1b)$$

- condições de contorno em  $y$ :

$$-k_i \frac{\partial T_i(x, y, t)}{\partial y} = h_c [T_c - T_i(x, y, t)], \quad y = y_1, \quad x_1 < x < x_5, \quad t > 0; \quad (4.1c)$$

$$k_i \frac{\partial T_i(x, y, t)}{\partial y} = h_d [T_d(t) - T_i(x, y, t)], \quad y = y_2, \quad x_1 < x < x_5, \quad t > 0; \quad (4.1d)$$

- condições de interface, para  $i = 1, 2, 3$ ,

$$T_i(x, y, t) = T_{i+1}(x, y, t), \quad x = x_{i+1}, \quad y_1 < y < y_2, \quad t > 0; \quad (4.1e)$$

$$k_i \frac{\partial T_i(x, y, t)}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}(x, y, t)}{\partial x}, \quad x = x_{i+1}, \quad y_1 < y < y_2, \quad t > 0; \quad (4.1f)$$

- condições iniciais, para  $i = 1, \dots, 4$ ,

$$T_i(x, y, t) = F_i(x, y), \quad t = 0, \quad y_1 < y < y_2, \quad x_i < x < x_{i+1}. \quad (4.1g)$$

## 4.2 Método Nodal e Método de Parâmetros Concentrados

Como foi explicitado no capítulo anterior, consideramos que

$$\tau_i(x, t) = \frac{1}{\Delta y} \int_{y_1}^{y_2} T_i(x, y, t) dy. \quad (4.2)$$

Multiplicando a equação (4.1) por  $1/\Delta y$ , em seguida, integrando-a com relação a variável  $y$  de  $y_1$  até  $y_2$  e utilizando as condições de contorno (4.1c) e (4.1d), obtemos a expressão

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_i(x, t)}{\partial x^2} - \frac{h_d}{\Delta y k_i} T_i(x, y_2, t) - \frac{h_c}{\Delta y k_i} T_i(x, y_1, t) = \\ \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \tau_i(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{\Delta y k_i} [h_d T_d(t) + h_c T_c], \quad x_1 < x < x_5, \quad (4.3) \\ t > 0. \end{aligned}$$

#### 4.2.1 Aproximações Clássica e Melhoradas

Neste momento, aproximamos a distribuição de temperatura na superfície de contorno pela temperatura média, conforme equações (3.5) e (3.6), para  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Seguindo os passos descritos no capítulo anterior, chegamos à formulação clássica

$$\frac{\partial^2 \tau_i(x, t)}{\partial x^2} - \frac{(h_c + h_d)}{\Delta y k_i} \tau_i(x, t) = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \tau_i(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{\Delta y k_i} (h_d T_d(t) + h_c T_c). \quad (4.4)$$

Usando a aproximação de Hermite para as integrais, segue a formulação  $H_{0,0}/H_{0,0}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_i(x, t)}{\partial x^2} - \frac{4(k_i \Delta y (h_c + h_d) + h_c h_d)}{k_i (4k_i + h_d + h_c)} \tau_i(x, t) &= \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \tau_i}{\partial t} \\ - \frac{1}{\Delta y k_i} \left[ (h_d T_d(t) + h_c T_c) - \frac{h_d - h_c}{4k_i + h_d + h_c} (h_c T_c - h_d T_d(t)) \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

E, em seguida, obtemos, também, a formulação  $H_{1,1}/H_{0,0}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tau_i(x, t)}{\partial x^2} - \frac{(h_d U_{inf} + h_c U_{sup})}{k_i \Delta y V} \tau_i(x, t) &= \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \tau_i(x, t)}{\partial t} \\ - \frac{1}{\Delta y k_i} (h_d T_d(t) + h_c T_c) + \frac{(h_d Z(t) - h_c W(t))}{k_i \Delta y V}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde

$$U_{sup} = 6k_i(2k_i + h_d), \quad (4.7)$$

$$U_{inf} = 6k_i(2k_i + h_c), \quad (4.8)$$

$$V = 12k_i^2 + k_i(3 + \Delta y)(h_c + h_d) + \Delta y h_d h_c, \quad (4.9)$$

$$Z(t) = 3k_i(h_c T_c - h_d T_d(t)) - \Delta y h_c h_d T_c - k_i \Delta y (h_c T_c + h_d T_d(t)) \quad (4.10)$$

e

$$W(t) = 3k_i(h_c T_c - h_d T_d(t)) + \Delta y h_c h_d T_c + k_i \Delta y (h_c T_c + h_d T_d(t)). \quad (4.11)$$

Observamos que os novos problemas dados pelas equações (4.4), (4.5) e (4.6) estão sujeitos às seguintes condições de contorno

$$-k_1 \frac{\partial \tau_1(x, t)}{\partial x} + h_a \tau_1(x, t) = h_a T_a(t), \quad x = x_1, \quad t > 0; \quad (4.12)$$

$$k_4 \frac{\partial \tau_4(x, t)}{\partial x} + h_b \tau_4(x, t) = h_b T_b, \quad x = x_5, \quad t > 0; \quad (4.13)$$

condições de interface, para  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\tau_i(x, t) = \tau_{i+1}(x, t), \quad x = x_{i+1}, \quad t > 0; \quad (4.14)$$

$$k_i \frac{\partial \tau_i(x, t)}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial \tau_{i+1}(x, t)}{\partial x}, \quad x = x_{i+1}, \quad t > 0; \quad (4.15)$$

e com condições iniciais, para  $i = 1, 2, 3, 4$ ,

$$\tau_i(x, t) = G_{0i}(x), \quad t = 0, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad (4.16)$$

onde

$$G_{0i}(x) = \frac{1}{\Delta y} \int_{y_1}^{y_2} F_i(x, y) dy. \quad (4.17)$$

Os sistemas diferenciais antes descritos, podem ser convenientemente resolvidos pela técnica da transformada de Laplace. Com efeito,

$$\tau_i(x, t) \leq \tau_1(x_1, t); \quad (4.18)$$

portanto,  $\tau_i(x, t)$  deve possuir uma transformada de Laplace. É razoável supor que suas derivadas, em relação ao tempo, também, possuem uma transformada de Laplace (exceto quando  $t = 0$ ); deste modo, se

$$\bar{\tau}_i(x, s) = \mathcal{L}\{\tau_i(x, t)\} \quad (4.19)$$

então, a transformada de Laplace, aplicada nas equações diferenciais dadas pelas equações (4.4), (4.5) e (4.6), resulta

$$\frac{d^2 \bar{\tau}_i(x, s)}{dx^2} - \left( \beta_i + \frac{s}{\alpha_i} \right) \bar{\tau}_i(x, s) = -\frac{1}{\alpha_i} G_{0i}(x) - \left( \frac{1}{\Delta y k_i} \right) \gamma_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.20)$$

onde

$$\beta_i = \begin{cases} \frac{h_c + h_d}{\Delta y k_i} & \text{para aproximação clássica} \\ \frac{4[k_i \Delta y (h_c + h_d) + h_c h_d]}{k_i (4k_i + h_d + h_c)} & \text{para aproximação melhorada } H_{0,0}/H_{0,0} \\ \frac{h_d U_{inf} + h_c U_{sup}}{k_i \Delta y V} & \text{para aproximação melhorada } H_{1,1}/H_{0,0} \end{cases} \quad (4.21)$$

e

$$\gamma_i(s) = \begin{cases} h_d \bar{T}_d(s) + h_c \frac{T_c}{s} & \text{para aproximação clássica} \\ \left[ (h_d \bar{T}_d(s) + h_c \frac{T_c}{s}) - \frac{h_d - h_c}{4k_i + h_d + h_c} \right. \\ \quad \left. \times (h_c \frac{T_c}{s} - h_d \bar{T}_d(s)) \right] & \text{para aproximação melhorada } H_{0,0}/H_{0,0} \\ (h_d \bar{T}_d(s) + h_c \frac{T_c}{s}) + \frac{(h_d \bar{Z}(s) - h_c \bar{W}(s))}{k_i \Delta y V} & \text{para aproxim. melhorada } H_{1,1}/H_{0,0} \end{cases} \quad (4.22)$$

Uma solução  $\bar{\tau}_i(x, s)$  da equação (4.20), que deve satisfazer as condições de contorno

$$-k_1 \frac{d\bar{\tau}_1(x, s)}{dx} + h_a \bar{\tau}_1(x, s) = h_a \bar{T}_a(s), \quad x = x_1 \quad (4.20a)$$

$$k_4 \frac{d\bar{\tau}_4(x, s)}{dx} + h_b \bar{\tau}_4(x, s) = h_b \frac{T_b}{s}, \quad x = x_5 \quad (4.20b)$$

e condições de interface, para  $i = 1, 2, 3$

$$\bar{\tau}_i(x, s) = \bar{\tau}_{i+1}(x, s), \quad x = x_{i+1} \quad (4.20c)$$

$$k_i \frac{d\bar{\tau}_i(x, s)}{dx} = k_{i+1} \frac{d\bar{\tau}_{i+1}(x, s)}{dx}, \quad x = x_{i+1}, \quad (4.20d)$$

pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_i(x, s) = & A_i e^{-R_i x} + B_i e^{R_i x} \\ & - \frac{e^{-R_i x}}{2R_i} \int_{x_i}^x e^{R_i \xi} \left[ -\frac{G_{0i}(\xi)}{\alpha_i} - \left( \frac{1}{\Delta y k_i} \right) \gamma_i(s) \right] d\xi \\ & + \frac{e^{R_i x}}{2R_i} \int_{x_i}^x e^{-R_i \xi} \left[ -\frac{G_{0i}(\xi)}{\alpha_i} - \left( \frac{1}{\Delta y k_i} \right) \gamma_i(s) \right] d\xi, \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde  $e^{-R_i x}$  e  $e^{R_i x}$  são funções linearmente independentes e  $R_i = \sqrt{\beta_i + \frac{s}{\alpha_i}}$ .

Ou ainda,

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_i(x, s) = & A_i e^{-R_i x} + B_i e^{R_i x} + I(x) \\ & + \frac{1}{2R_i^2 k_i \Delta y} \gamma_i(s) [2 - e^{-R_i(x-x_i)} - e^{-R_i(x_i-x)}], \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde

$$I_i(x) = \frac{1}{2R_i\alpha_i} \left[ e^{-R_i x} \int_{x_i}^x e^{R_i \xi} G_{0i}(\xi) d\xi - e^{R_i x} \int_{x_i}^x e^{-R_i \xi} G_{0i}(\xi) d\xi \right]. \quad (4.25)$$

É importante observar que os coeficientes  $A_i$  e  $B_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , presentes na solução, são determinados utilizando as condições de contorno e de interface, equações (4.20a)-(4.20d). As equações obtidas com a aplicação dessas condições formam um sistema linear 8x8, representado na forma matricial como segue:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{87} & a_{88} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ A_3 \\ B_3 \\ A_4 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Para a formulação  $H_{1,1}/H_{0,0}$ , os elementos da matriz 8x8, descrita acima, são dados por

$$\begin{aligned} a_{11} &= (k_1 R_1 + h_a) e^{-R_1 x_1} & a_{53} &= -k_2 R_2 e^{-R_2 x_3} \\ a_{12} &= (-k_1 R_1 + h_a) e^{R_1 x_1} & a_{54} &= k_2 R_2 e^{R_2 x_3} \\ a_{21} &= e^{-R_1 x_2} & a_{55} &= k_3 R_3 e^{-R_3 x_3} \\ a_{22} &= e^{R_1 x_2} & a_{56} &= -k_3 R_3 e^{R_3 x_3} \\ a_{23} &= -e^{-R_2 x_2} & a_{65} &= e^{-R_3 x_4} \\ a_{24} &= -e^{R_2 x_2} & a_{66} &= e^{R_3 x_4} \\ a_{31} &= -k_1 R_1 e^{-R_1 x_2} & a_{67} &= -e^{-R_4 x_4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{32} &= k_1 R_1 e^{R_1 x_2} & a_{68} &= -e^{R_4 x_4} \\
a_{33} &= k_2 R_2 e^{-R_2 x_2} & a_{75} &= -k_3 R_3 e^{-R_3 x_4} \\
a_{34} &= -k_2 R_2 e^{R_2 x_2} & a_{76} &= k_3 R_3 e^{R_3 x_4} \\
a_{43} &= e^{-R_2 x_3} & a_{77} &= k_4 R_4 e^{-R_4 x_4} \\
a_{44} &= e^{R_2 x_3} & a_{78} &= -k_4 R_4 e^{R_4 x_4} \\
a_{45} &= -e^{-R_3 x_3} & a_{87} &= (-k_4 R_4 + h_b) e^{-R_4 x_5} \\
a_{46} &= -e^{-R_3 x_3} & a_{88} &= (k_4 R_4 + h_b) e^{R_4 x_5}
\end{aligned}$$

os termos independentes são

$$c_1 = h_a T_a \quad (4.27)$$

$$c_{2i} = -I_i(x_{i+1}) - \frac{1}{2R_i^2 k_i \Delta y} \gamma_i [2 - e^{-R_i(x_{i+1}-x_i)} - e^{-R_i(x_i-x_{i+1})}], \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.28)$$

$$c_{2i+1} = -k_i I'_i(x_{i+1}) - \frac{1}{2R_i \Delta y} \gamma_i [e^{-R_i(x_{i+1}-x_i)} - e^{-R_i(x_i-x_{i+1})}], \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned}
c_8 &= -k_4 I'_4(x_5) - h_b I_4(x_5) - \frac{1}{2R_4 \Delta y} \gamma_4 [e^{-R_4(x_5-x_4)} - e^{-R_4(x_4-x_5)}] \\
&\quad - \frac{h_b}{2R_i^2 k_i \Delta y} \gamma_4 [2 - e^{-R_4(x_5-x_4)} - e^{-R_4(x_4-x_5)}] + h_b \frac{T_b}{s}, \quad i = 1, 2, 3,
\end{aligned} \quad (4.30)$$

onde  $I'_i$  denota a derivada da função  $I_i(x)$ .

Os sistemas, gerados pelas três formulações, são resolvidos por eliminação de Gauss, com substituição recuada e pivotamento pelo máximo da coluna.

O retorno da solução  $\bar{\tau}_i(x, s)$ , para o domínio tempo, é feito pelo cálculo da integral de inversão

$$\tau_i(x, t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s=\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} e^{st} \bar{\tau}_i(x, s) ds. \quad (4.31)$$

Fazendo a mudança de variável  $s = p/t$ , temos

$$\tau_i(x, t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma'-j\infty}^{\gamma'+j\infty} e^p \frac{\bar{\tau}_i(x, p/t)}{t} dp, \quad (4.32)$$

onde  $\gamma' = c/t$ .

Seguindo Heydarian [Heydarian et al., 1981], a fórmula de Quadratura Gaussiana adequada é

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} e^p \frac{F(p)}{p} dp = \sum_{k=1}^N A_k F(p_k), \quad (4.33)$$

onde  $p_k$  são as raízes do polinômio

$$(-1)^n \sum_{r=0}^n a(n, r) p^{n-r} = 0, \quad (4.34)$$

sendo

$$a(n, r) = \frac{(-1)^{n-r} n\{(n+r-1)!\}}{r! (n-r)!} \sum_{r=0}^n a(n, r) p^{n-r}. \quad (4.35)$$

Os  $A_i$  da equação (4.33) são as soluções de

$$\sum_{k=1}^N A_k p_k^{-r} = \frac{1}{r!}, \quad 0 \leq r \leq (n-1) \quad (4.36)$$

e a função  $F(p)$  está relacionada com a função a ser invertida,  $\bar{\tau}_i(x, p/t)$ , por

$$F(p) = \frac{p}{t} \bar{\tau}_i(x, p/t). \quad (4.37)$$

Substituindo, então, a equação (4.37) em (4.33), obtemos

$$\tau_i(x, t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} e^p \frac{\bar{\tau}_i(x, p/t)}{t} dp \quad (4.38)$$

$$= \sum_{k=1}^N A_k \frac{p_k}{t} \bar{\tau}_i(x, p_k/t). \quad (4.39)$$

Portanto, podemos substituir  $s$  por  $p_k/t$ , nas equações, para a obtenção de  $\tau_i(x, t)$ . A substituição de  $s$  por  $p_k/t$  para encontrar as constantes de integração  $A_i$  e  $B_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , utilizada juntamente com os valores de  $A_k$ , encontrados em [Stroud e Secrest, 1966], para obter  $\tau_i(x, t)$ , torna necessária a inversão da matriz  $k$  vezes para qualquer  $x, y$  ou  $t$  procurado.

No próximo capítulo, são descritas as características do meio utilizado nos cálculos, bem como as suas propriedades térmicas. São, também, apresentados os resultados

numéricos obtidos utilizando-se as formulações descritas, e estes são comparados com outros resultados disponíveis na literatura.

## CAPÍTULO 5

### RESULTADOS NUMÉRICOS

As características e dimensões do meio multicamadas, usado no problema resolvido, extraídas de [Beyer, 1998], são descritas neste capítulo. Também, são apresentados os resultados numéricos obtidos com a solução do problema e esses, comparados com outros presentes na literatura.

#### 5.1 O Meio Multicamadas Estudado

Para esta pesquisa foi selecionada uma parede multicomposta, com espessura de  $17cm$  e altura  $100cm$ , de cor clara, constituída pelas camadas: estuque, concreto pesado, isolante e reboco. Os cálculos baseiam-se nos seguintes valores

estuque :  $25mm$

concreto pesado :  $100mm$

isolante :  $25mm$

reboco :  $20mm$

e

$$\text{estuque : } \begin{cases} k = 0.692 \text{ W/m}^0\text{C} \\ \alpha = 4.434 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\text{concreto pesado : } \begin{cases} k = 1.731 \text{ W/m}^0\text{C} \\ \alpha = 9.187 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\text{isolante : } \begin{cases} k = 0.043 \text{ W/m}^0\text{C} \\ \alpha = 1.6 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\text{reboco : } \begin{cases} k = 0.727 \text{ W/m}^0\text{C} \\ \alpha = 5.4 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \end{cases} \quad (5.4)$$

Feitas estas considerações, chegamos a uma parede "esbelta" conforme mostra figura 5.1 (em escala), a seguir.

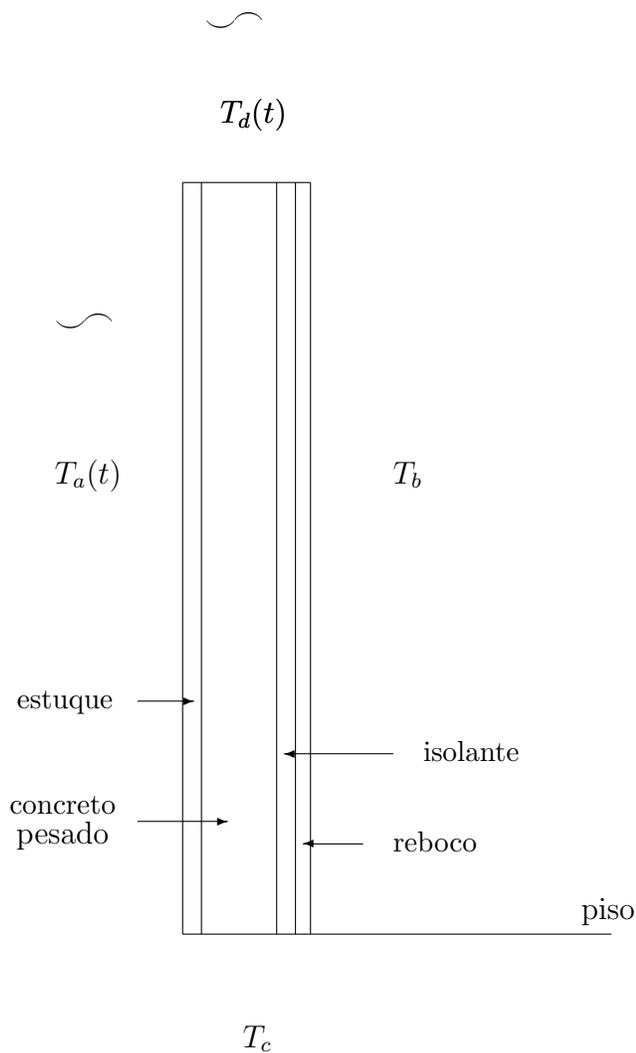


Figura 5.1 – Representação esquemática da parede usada, na obtenção dos resultados numéricos

Os coeficientes de convecção externo e interno, são respectivamente, os seguintes,  $h_a = h_d = 16.95 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$  e  $h_b = h_c = 8.26 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

### 5.1.1 Temperaturas Externa e Interna

Supomos que a temperatura interna mantém-se constante, igual a  $24^\circ\text{C}$ . A temperatura externa evolui como função horária, com ciclo de um dia, segundo *Temperatura Sol-Ar* (anexo [B]), para  $40^\circ$  Latitude Norte, 21 de julho,  $\alpha/h_0 = 0.026$ , cujos valores

aparecem nas tabelas 5.1 e 5.2 abaixo. Consideramos que estes valores tabelados se repetem consecutivamente por, no mínimo, quatro dias, tempo necessário para o sistema entrar em regime periódico, supomos ainda, que não ocorre nebulosidade atmosférica.

Tabela 5.1 – Temperatura Sol-Ar para Superfície Vertical

tempo [h]	temperatura [ $^{\circ}C$ ]	tempo [h]	temperatura [ $^{\circ}C$ ]
1	25.430	13	40.446
2	24.880	14	46.682
3	24.440	15	50.860
4	24.110	16	52.350
5	24.000	17	50.618
6	25.104	18	43.948
7	26.382	19	31.416
8	27.918	20	29.830
9	29.764	21	28.620
10	31.700	22	27.520
11	33.752	23	26.640
12	35.850	24	25.980

Tabela 5.2 – Temperatura Sol-Ar para Superfície Horizontal

tempo [h]	temperatura [ $^{\circ}C$ ]	tempo [h]	temperatura [ $^{\circ}C$ ]
1	25.430	13	54.642
2	24.880	14	53.624
3	24.440	15	50.886
4	24.110	16	46.604
5	24.000	17	41.128
6	25.104	18	35.290
7	26.382	19	31.286
8	27.918	20	29.830
9	29.764	21	28.620
10	31.700	22	27.520
11	33.752	23	26.640
12	53.946	24	25.980

Para a superfície horizontal, foi considerada insolação direta, a partir das 12 horas; antes dessa hora, é suposta a mesma insolação da superfície vertical. Os valores da Temperatura Sol-Ar podem ser vistos plotados, na figura 5.2, abaixo.

Figura 5.2 – Temperatura Sol-Ar para superfície vertical e horizontal.

Para solucionar o problema necessitamos de uma função contínua sobre as 24 horas do dia, que represente a Temperatura Sol-Ar. Esta função deve desviar-se o mínimo possível dos valores originais da Temperatura Sol-Ar, pois a precisão da resposta é diretamente dependente da precisão da função excitação. Para fazer o ajuste "perfeito" desses valores, eliminando oscilações dos polinômios de graus elevados, o dia foi dividido em períodos menores, e os valores foram ajustados em cada um desses períodos, definidos na tabela 5.3, a seguir.

Tabela 5.3 – Períodos

período	começo [h]	fim [h]
primeiro	00:00	05:00
segundo	05:00	12:00
terceiro	12:00	16:00
quarto	16:00	19:00
quinto	19:00	24:00

Esta divisão do dia em períodos menores favorece e, consegue-se um bom ajuste dos polinômios aos valores originais, o que podemos ver nas figuras 5.3 e 5.4.

Esse ajuste é feito pelo método dos mínimos quadrados [Hornbeck, 1975]. Segundo Beyer [Beyer, 1998], se resolvidos os problemas que utilizam a Temperatura Sol-Ar como excitação, então, a grande maioria dos problemas com outras excitações também o serão. Isto se deve ao fato de a Temperatura Sol-Ar ser relativamente mal comportada.

Figura 5.3 – Ajuste para Temperatura Sol-Ar - superficie vertical.

Figura 5.4 – Ajuste para Temperatura Sol-Ar - superfície horizontal.

### 5.1.2 Temperatura Inicial

A distribuição inicial de temperatura  $G_{0i}(x)$  é representada por polinômios quadráticos, isso é feito com o objetivo de melhor ajustar  $G_{0i}(x)$  ao campo inicial real de temperaturas.

Com a divisão do dia em períodos, o problema (cinco problemas) é resolvido sequencialmente para cada período, onde a temperatura dentro da parede obtida é usada como condição inicial do problema para o período seguinte. Os ajustes do campo de temperaturas são feitos por polinômios quadráticos, pois o processo transiente de fluxo de calor na parede apresenta distribuição não-linear de temperatura.

## 5.2 Resultados

Nesta seção são apresentados os fluxos médios de calor obtidos com o cálculo dos quatro primeiros dias em seqüência, pois, após este dia, o sistema torna-se estável, conforme demonstra a tabela 5.4. Por apresentar melhores resultados (mais adiante este fato será analisado), os fluxos médios de calor, listados nesta tabela, foram obtidos pela formulação  $H_{1,1}/H_{0,0}$ . Os resultados apresentados foram obtidos com  $N = 08$  pontos de quadratura de Gauss.

Tabela 5.4 – Fluxo médio de calor ( $W$ ), no primeiro, segundo, terceiro e quarto dia, obtido pela formulação  $H_{1,1}/H_{0,0}$

<b>Fluxo de calor médio (<math>W</math>)</b>				
Hora	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4
1	0.1269	10.4372	10.5311	10.5319
2	0.3013	8.9478	9.0250	9.0256
3	0.4548	7.6100	7.6733	7.6738
4	0.5204	6.4112	6.4632	6.4637
5	0.5074	5.3486	5.3913	5.3917
6	0.4897	4.4660	4.5011	4.5014
7	0.5472	3.8123	3.8411	3.8414
8	0.7888	3.4698	3.4934	3.4936
9	1.2567	3.4580	3.4774	3.4775
10	1.9635	3.7709	3.7868	3.7870
11	2.9075	4.3915	4.4046	4.4047
12	4.6784	5.8969	5.9076	5.9077
13	6.5352	7.5356	7.5444	7.5445
14	8.3510	9.1724	9.1796	9.1797
15	10.5553	11.2298	11.2357	11.2358
16	13.1129	13.6667	13.6715	13.6716
17	15.6895	16.1442	16.1482	16.1482
18	17.8605	18.2338	18.2371	18.2372
19	19.1369	19.4434	19.4461	19.4461
20	19.0072	19.2589	19.2611	19.2611
21	17.5949	17.8016	17.8034	17.8034
22	15.7441	15.9138	15.9153	15.9153
23	13.8571	13.9964	13.9977	13.9977
24	12.0699	12.1842	12.1853	12.1853

O método aqui utilizado permite calcular as temperaturas dentro da parede, ao longo dos dias. A figura 5.5 apresenta a distribuição de temperatura, no quarto dia (pela formulação  $H_{1,1}/H_{0,0}$ ).

Figura 5.5 – Distribuição de temperatura média na parede.

O problema bidimensional com as características descritas, neste capítulo, foi anteriormente resolvido por dois métodos, a saber, método dos Volumes Finitos (MVF) e pelo método Laplace/Gaussiana (L/G). O método dos Volumes Finitos, conforme descrito por Patankar [Patankar, 1980], pode ser encontrado detalhado em [Beyer, 1998]; o método Laplace/Gaussiana é desenvolvido em [Beyer, 1998], [Beyer e Vilhena, 1998]. Para efeito de comparação, os fluxos médios de calor, no quarto dia, obtidos por cada um desses métodos estão listados na tabela 5.5, juntamente, com o resultado obtido pelo método descrito neste trabalho.

Tabela 5.5 – Fluxo médio de calor ( $W$ ), no quarto dia, obtido pelos métodos: dos Volumes Finitos (MVF), Laplace/Gaussiana (L/G) e Nodal, com Parâmetros Concentrados, com a formulação  $H_{1,1}/H_{0,0}$

Hora	MVF	L/G	$H_{1,1}/H_{0,0}$
1	10.188	12.652	10.496
2	8.686	11.223	8.994
3	7.339	9.887	7.644
4	6.140	8.643	6.435
5	5.093	7.492	5.364
6	4.295	6.422	4.465
7	3.802	5.497	3.810
8	3.644	4.813	3.464
9	3.833	4.417	3.449
10	4.357	4.318	3.759
11	5.195	4.513	4.378
12	8.200	4.394	5.872
13	10.602	4.593	7.514
14	12.323	5.490	9.151
15	14.255	7.166	11.208
16	16.194	9.889	13.635
17	18.010	13.038	16.117
18	19.318	16.193	18.208
19	19.818	18.581	19.418
20	19.250	19.339	19.224
21	17.629	18.587	17.771
22	15.655	17.214	15.885
23	13.689	15.672	13.969
24	11.854	14.132	12.157

A figura 5.6 mostra graficamente os fluxos médios de calor, no quarto dia, apresentados na tabela acima, obtidos pelos métodos dos Volumes Finitos, Laplace/Gaussiana e pelo método aqui proposto, com a aproximação  $H_{1,1}/H_{0,0}$ .

Figura 5.6 – Fluxos médios de calor ( $W$ ), no quarto dia, obtidos, pelos métodos: dos Volumes Finitos (MVF), Laplace/Gaussiana (L/G) e pelo método proposto, com aproximação  $H_{1,1}/H_{0,0}$ .

Por este gráfico podemos notar uma boa coincidência dos resultados obtidos pela metodologia proposta, com aproximação  $H_{1,1}/H_{0,0}$ , quando comparados com os valores numéricos obtidos pelo método dos Volumes Finitos (MVF). Observamos que no intervalo onde ocorre um aumento brusco da temperatura Sol-Ar, entre 10:00 e 17:00 horas, ocorre, também, uma diferença maior entre os valores dos fluxos de calor médios obtidos pelos três métodos.

Na figura 5.7, são comparados os fluxos de calor obtidos com a aproximação  $H_{0,0}/H_{0,0}$  com os fluxos obtidos pelos métodos do MVF e L/G. Notamos que ocorre um

pequeno distanciamento dos valores obtidos pelo MVF e, mais ainda, quando comparado com o método L/G.

Figura 5.7 – Fluxos médios de calor ( $W$ ), no quarto dia, obtidos pelos métodos: dos Volumes Finitos (MVF), Laplace/Gaussiana (L/G) e pelo método proposto, com aproximação  $H_{0,0}/H_{0,0}$ .

Na figura 5.8, podemos observar que os fluxos médios obtidos, com a aproximação clássica se desvia dos outros resultados por uma margem considerável.

Figura 5.8 – Fluxos médios de calor ( $W$ ), no quarto dia, obtidos pelos métodos: dos Volumes Finitos (MVF), Laplace/Gaussiana (L/G) e pela formulação aproximada clássica.

A tabela 5.6, a seguir, apresenta resultados dos fluxos de calor médios para as três aproximações, nas 24 horas do quarto dia.

Tabela 5.6 – Comparação entre as três formulações aproximadas: clássica,  $H_{0,0}/H_{0,0}$  e  $H_{1,1}/H_{0,0}$

Hora	clássica	$H_{0,0}/H_{0,0}$	$H_{1,1}/H_{0,0}$
1	9.156	8.869	10.496
2	7.568	7.387	8.994
3	6.170	6.081	7.644
4	4.960	4.943	6.435
5	3.948	3.977	5.364
6	3.347	3.333	4.465
7	3.214	3.062	3.810
8	3.521	3.174	3.464
9	4.242	3.655	3.449
10	5.342	4.479	3.759
11	6.783	5.616	4.378
12	12.808	9.962	5.872
13	17.708	13.627	7.514
14	20.167	15.722	9.151
15	22.153	17.647	11.208
16	23.287	19.143	13.635
17	23.733	20.203	16.117
18	23.264	20.540	18.208
19	21.975	20.059	19.418
20	20.200	18.809	19.224
21	17.799	16.757	17.771
22	15.313	14.533	15.885
23	13.006	12.431	13.969
24	10.947	10.534	12.157

A figura 5.9 mostra as soluções da formulação bidimensional, para as três aproximações, a saber; clássica,  $H_{0,0}/H_{0,0}$  e  $H_{1,1}/H_{0,0}$ .

Figura 5.9 – Fluxo médio de calor no dia 4, obtidos pelas três aproximações: clássica,  $H_{0,0}/H_{0,0}$  e  $H_{1,1}/H_{0,0}$ .

Para a implementação computacional foi escrito um programa utilizando a linguagem FORTRAN. O programa foi executado em um computador *PENTIUM II* 550 MHz, com 128 Mb de memória RAM.

Os resultados numéricos foram obtidos com um tempo computacional aproximado de: 2 (dois minutos) para a aproximação clássica; 3(três) minutos para a aproximação melhorada  $H_{0,0}/H_{0,0}$  e 5 (cinco) minutos para a aproximação  $H_{1,1}/H_{0,0}$ .

O programa foi executado variando o número,  $N$ , de pontos de quadratura de Gauss. Na tabela 5.7, abaixo, calculamos a variação do erro percentual existente com esta variação.

Tabela 5.7 – Variação do erro percentual com o número de pontos de quadratura de Gauss

variação no número de pontos de quadratura (N)	erro (%)
04 para 06	0.02
06 para 08	0.007
08 para 10	0.01
10 para 12	0.4

Observamos que para  $N = 8$  obtém-se o menor erro percentual. Este fato pode ser explicado da seguinte forma. Quando  $N$  cresce, a parte real das raízes da quadratura de Gauss também aumenta consideravelmente, em valor absoluto, o que demandaria uma aritmética estendida, isto é, fazer operações algébricas com um número maior de dígitos, evitando assim, o problema de "underflow" e "overflow" [Stroud e Secrest, 1966]. Por este motivo, escolheu-se  $N = 8$ .

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O fenômeno da condução de calor não-estacionária, bidimensional, em meio com quatro camadas, foi analisado. O meio multicamadas aqui estudado foi uma parede de edificação constituída por: estuque, concreto pesado, isolante e reboco. Conforme as dimensões dos meios consideradas neste trabalho, a largura de cada uma das camadas, quando comparada com a altura da parede, é "muito menor", por isto, podemos supor um gradiente de temperatura suave, em cada meio, na direção vertical. A parede em estudo está sujeita a condições de contorno convectivas em todos os lados, sendo que, nas faces externa e superior, a temperatura foi considerada variável com o tempo. Esta é representada pela temperatura fictícia, denominada de temperatura Sol-Ar, que leva em consideração o efeito da radiação solar.

Sobre a metodologia utilizada na solução do problema descrito, podemos afirmar que a aplicação do método nodal, seguido da formulação de parâmetros concentrados e com aplicação da técnica da transformada de Laplace, resultou em modelos que permitem encontrar uma solução para o problema em questão, em forma semi-analítica, de maneira simplificada. Este método apresenta flexibilidade em relação à possibilidade de calcular-se qualquer tipo de parede. Pode ser aplicado às paredes brasileiras, permitindo analisar os efeitos de distintos materiais e espessuras.

Conforme um dos objetivos desta pesquisa, a metodologia proposta, quando comparada com outras técnicas de solução do problema de transferência de calor em meios multicompostos, apresenta a vantagem da semi-analiticidade de solução, eliminando a necessidade de discretização do domínio e possibilitando o controle do erro, à exceção do erro de arredondamento, pela ordem da quadratura.

Quanto à comparação de resultados numéricos, podemos observar que os resultados obtidos apresentam uma boa coincidência com os disponíveis na literatura, especialmente quando comparados com os obtidos pelo método dos Volumes Finitos e pelo método Laplace/Gaussiana, descrito em [Beyer, 1998].

Concluimos, em última análise, que, com o método utilizado obtêm-se os resultados numéricos num tempo computacional pequeno, visto que, para a aproximação clássica, o tempo na obtenção dos resultados foi de aproximadamente 2 (dois minutos); para a aproximação melhorada,  $H_{0,0}/H_{0,0}$ , o tempo computacional foi de aproximadamente 3(três) minutos, enquanto que o tempo para a aproximação  $H_{1,1}/H_{0,0}$ , foi de 5 (cinco) minutos.

O método apresenta recursos a serem explorados, como a tentativa de outras aproximações para as integrais que representam a temperatura e o fluxo médios de calor.

O procedimento proposto é bastante geral, e pode ser estendido a problemas em três dimensões ou ainda em outras geometrias curvilíneas ortogonais, em que o interesse básico seja o conhecimento dos fluxos médios de calor.

## ANEXO A

### APROXIMAÇÃO $H_{\alpha,\beta}$

A idéia de Hermite [Menning et al., 1983] consiste em gerar uma fórmula aproximada para a integral  $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$ , como uma combinação linear de  $f(x_{i-1})$ ,  $f(x_i)$  e suas derivadas, ou seja, escrever

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{\nu=0}^{\alpha} C_{\nu} f^{(\nu)}(x_{i-1}) + \sum_{\nu=0}^{\beta} D_{\nu} f^{(\nu)}(x_i), \quad (\text{A.1})$$

onde  $C_{\nu}$  e  $D_{\nu}$  serão explicitados no decorrer da dedução desta relação.

Para obter a relação acima, considera-se,  $f(x)$  e suas derivadas  $f^{(\nu)}(x)$  definidas para todo  $x \in (x_{i-1}, x_i)$ . E além disso, assumimos que os valores numéricos de  $f^{(\nu)}(x_{i-1})$ ,  $\nu = 0, 1, \dots, \alpha$  e  $f^{(\nu)}(x_i)$ ,  $\nu = 0, 1, \dots, \beta$  existem nos extremos do intervalo. Então, denotando

$$\begin{aligned} f^{(\nu)}(x_{i-1}) &= f_{i-1}^{(\nu)} \\ f^{(\nu)}(x_i) &= f_i^{(\nu)} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

a equação (A.1) pode ser reescrita como

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{\nu=0}^{\alpha} C_{\nu} f_{i-1}^{(\nu)} + \sum_{\nu=0}^{\beta} D_{\nu} f_i^{(\nu)}. \quad (\text{A.3})$$

Considerando a integral

$$I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^{\beta+1} (x - x_i)^{\alpha+1} f^{(\alpha+\beta+2)}(x)dx. \quad (\text{A.4})$$

e integrando (A.4)  $(\alpha + \beta + 2)$  vezes temos

$$I_i = \sum_{\nu=0}^{\alpha+\beta+1} (-1)^{\nu} [x]^{(\nu)} f^{(\alpha+\beta+1-\nu)}(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - (-1)^{\alpha+\beta+1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [x]^{(\alpha+\beta+2)} f(x)dx, \quad (\text{A.5})$$

onde

$$[x] = (x - x_{i-1})^{\beta+1}(x - x_i)^{\alpha+1}. \quad (\text{A.6})$$

Pelo binômio de Newton encontramos

$$[x]^{(\nu)} = \sum_{\nu'=0}^{\nu} \binom{\nu}{\nu'} \binom{\beta+1}{\nu-\nu'} (\nu-\nu')! (x - x_{i-1})^{\beta+1-(\nu-\nu')} \binom{\alpha+1}{\nu'} \nu'! (x - x_i)^{\alpha+1-\nu'} \quad (\text{A.7})$$

Usamos a igualdade  $[x]^{(\alpha+\beta+2)} = (\alpha+\beta+2)!$ , substituindo os limites de integração e resolvendo a equação (A.5) para o termo integral da direita resulta

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \frac{(-1)^{\alpha+\beta+1}}{(\alpha+\beta+2)!} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\alpha+\beta+1} (-1)^{\nu} [x_i]^{(\nu)} f_i^{(\alpha+\beta+1-\nu)} \right. \quad (\text{A.8})$$

$$\left. - \sum_{\nu=0}^{\alpha+\beta+1} (-1)^{\nu} [x_{i-1}]^{(\nu)} f_{i-1}^{(\alpha+\beta+1-\nu)} \right\} + \frac{(-1)^{\alpha+\beta+2}}{(\alpha+\beta+2)!} I_i. \quad (\text{A.9})$$

Observe que, na equação (A.7), todos os termos com  $\nu' < \alpha + 1$  desaparecem quando  $x = x_i$ , pois  $(x - x_i)^{\alpha+1-\nu'} = 0$  e, similarmente quando  $x = x_{i-1}$  os termos com  $\nu - \nu' < \beta + 1$  desaparecem. Ainda note que para  $\nu' > \alpha + 1$  então,  $\binom{\alpha+1}{\nu'} = 0$ . Assim, escrevendo  $h = x_i - x_{i-1}$ , temos

$$[x_i]^{(\nu)} = \binom{\nu}{\alpha+1} \binom{\beta+1}{\nu-\alpha-1} (\nu-\alpha-1)! \binom{\alpha+1}{\alpha+1} (\alpha+1)! h_i^{\alpha+\beta+2-\nu} \quad (\text{A.10})$$

e

$$[x_{i-1}]^{(\nu)} = \binom{\nu}{\nu-\beta-1} \binom{\beta+1}{\beta+1} (\beta+1)! \binom{\alpha+1}{\nu-\beta-1} (\nu-\beta-1)! (-h_i)^{\alpha+1-\nu+(\beta+1)}. \quad (\text{A.11})$$

Substituindo as equações (A.10) e (A.11) em (A.9) segue que

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx &= \frac{(-1)^{\alpha+\beta+1}}{(\alpha+\beta+2)!} \times \\ &\left\{ \sum_{\nu=\beta+1}^{\alpha+\beta+1} \binom{\nu}{\beta+1} (\beta+1)! \binom{\alpha+1}{\nu-\beta-1} \frac{(\nu-\beta-1)!}{(\alpha+\beta+2)!} h_i^{\alpha+\beta+2-\nu} f_{i-1}^{(\alpha+\beta+1-\nu)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\nu=\alpha+1}^{\alpha+\beta+1} \binom{\nu}{\alpha+1} \binom{\beta+1}{\nu-\alpha-1} \frac{(\nu-\beta-1)!}{(\alpha+\beta+2)!} (-h_i)^{\alpha+\beta+2-\nu} f_i^{(\alpha+\beta+1-\nu)} \right\} \\ &+ \frac{(-1)^{\alpha+\beta+2}}{(\alpha+\beta+2)!} I_i, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

onde os limites do somatório são devido a  $\binom{\nu}{\nu'} = 0$ , para  $\nu < \nu'$ .

A seguir, realizando a troca  $\alpha + \beta + 1 - \nu = \nu'$ , e rearranjando a equação (A.12) obtemos

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \sum_{\nu=0}^{\alpha} C_{\nu}(\alpha, \beta) h_i^{\nu+1} f_{i-1}^{(\nu)} + \sum_{\nu=0}^{\beta} C_{\nu}(\beta, \alpha) (-1)^{\nu} h_i^{\nu+1} f_i^{(\nu)} + \frac{(-1)^{\alpha+\beta+2}}{(\alpha + \beta + 2)!} I_i, \quad (\text{A.13})$$

onde

$$C_{\nu}(\alpha, \beta) = \frac{\binom{\alpha+1}{\nu+1}}{\binom{\alpha+\beta+2}{\nu+1} (\nu+1)!} \quad (\text{A.14})$$

$$= \frac{(\alpha+1)! (\alpha + \beta + 1 - \nu)!}{(\nu+1)! (\alpha - \nu)! (\alpha + \beta + 2)!}. \quad (\text{A.15})$$

Observe que, no segundo somatório da equação (A.13)  $\alpha$  e  $\beta$  são invertidos. Aqui estão explicitados  $C_{\nu}$  e  $D_{\nu}$ , dados na equação (A.1). Abaixo, na tabela A.1, estão listados alguns valores de  $C_{\nu}$ .

Tabela A.1 – Lista dos coeficientes de Hermite  $C_\nu(\alpha, \beta)$ ,  
para  $\alpha, \beta \leq 4$

$\alpha$	$\beta$	$C_0(\alpha, \beta)$	$C_1(\alpha, \beta)$	$C_2(\alpha, \beta)$
0	0	1/2		
0	1	1/3		
0	2	1/4		
0	3	1/5		
0	4	1/6		
1	0	2/3	1/6	
1	1	2/4	1/12	
1	2	2/5	1/20	
1	3	2/6	1/30	
1	4	2/7	1/42	
2	0	3/4	3/12	1/24
2	1	3/5	3/20	1/60
2	2	3/6	3/30	1/120
2	3	3/7	3/42	1/210
2	4	3/8	3/56	1/336

Utilizando o Teorema do Valor Médio e tomando  $\xi = x_{i-1} + \theta h_i$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  
obtem-se

$$I_i = f^{(\alpha+\beta+2)}(\xi) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})^{\beta+1} (x - x_i)^{\alpha+1} dx. \quad (\text{A.16})$$

Resolvendo a integral acima, obtém-se o último termo da equação (A.13),

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{(-1)^\alpha + \beta + 2}{(\alpha + \beta + 2)!} I_i \\ &= \frac{(\alpha + 1)! (\beta + 1)!}{(\alpha + \beta + 2)! (\alpha + \beta + 3)!} (-1)^{\alpha+1} h_i^{\alpha+\beta+3} f^{(\alpha+\beta+3)}(\xi). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Portanto, temos a forma *integral diferencial da aproximação*  $H_{\alpha,\beta}$ :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \sum_{\nu=0}^{\alpha} C_\nu(\alpha, \beta) h_i^{\nu+1} f_{i-1}^{(\nu)} + \sum_{\nu=0}^{\beta} D_\nu(\beta, \alpha) (-1)^\nu h_i^{\nu+1} f_i^{(\nu)} + O(h_i^{\alpha+\beta+3}). \quad (\text{A.18})$$

Quando  $\alpha = \beta$  a equação (A.18) ficará

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{\nu=0}^{\alpha} C_{\nu}(\alpha, \alpha) h_i^{\nu+1} (f_{i-1}^{(\nu)} + (-1)^{\nu} f_i^{(\nu)}). \quad (\text{A.19})$$

## ANEXO B

### TEMPERATURA SOL-AR

A condição de contorno externa é de terceira espécie, com troca de calor por convecção. Nesta troca, no caso de paredes externas de edificações, deve estar incluído o efeito da radiação solar; isto é feito com a introdução de uma temperatura fictícia chamada *Temperatura Sol-Ar* [ASHRAE, 1993].

Consideramos uma superfície externa sujeita à convecção com o ar exterior e à incidência de radiação solar, conforme figura B.1.

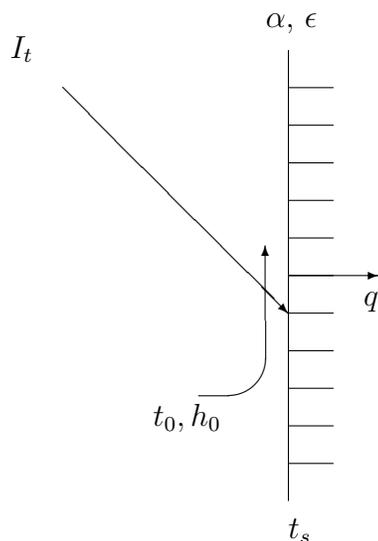


Figura B.1 – Superfície Externa

$$\frac{q}{A} = \alpha I_t + h_0(t_0 - t_s) - \epsilon \rho R \quad (\text{B.1})$$

onde

$q/A$  é o fluxo de calor [ $W/m^2$ ];

$\alpha$  é a absorptância da superfície para a radiação solar;

$I_t$  é a radiação solar total incidente na superfície [ $W/m^2$ ];

$h_0$  é o coeficiente de transferência de calor por convecção e radiação de onda longa na superfície externa [ $W/m^2 \cdot ^\circ C$ ];

$t_0$  é a temperatura do ar externo [ $^\circ C$ ];

$t_s$  é a temperatura superficial [ $^\circ C$ ];

$\epsilon$  é a emitância hemisférica da superfície em onda longa;

$\delta R$  é a diferença entre a radiação de onda longa incidente na superfície do céu e entorno e a radiação emitida por um corpo negro na temperatura do ar externo [ $W/m^2$ ].

Assumindo que o fluxo de calor pode ser expresso em termos da Temperatura Sol-Ar,  $t_{sa}$ , temos que

$$\frac{q}{A} = h_0(t_{sa} - t_s). \quad (\text{B.2})$$

Igualando (B.1) e (B.2), resulta em

$$t_{sa} = t_0 + \frac{(\alpha I_t - \epsilon \delta R)}{h_0}. \quad (\text{B.3})$$

Segundo Bliss [Bliss, 1961], o termo  $\delta R$  vale  $63 W/m^2$ , para superfícies horizontais, e,  $0.0 W/m^2$ , para superfícies verticais. Para superfícies comuns,  $\epsilon = 1$ . Normalmente  $h_0$  é tomado constante igual à  $16.95 W/m^2 \cdot ^\circ C$  e, ainda, para superfícies claras,  $\alpha = 0.44$  e  $\alpha = 0.88$ , para superfícies escuras.

Os valores de  $I_t$  e  $t_0$  podem ser calculados, respectivamente, por

$$I_t = I_b + I_d + I_r \quad (\text{B.4})$$

e

$$t_0 = t_{max} - (PVD \cdot VD), \quad (\text{B.5})$$

onde

$I_b$  é a radiação direta;

$I_d$  é radiação difusa;

$I_r$  é radiação refletida pelo entorno;

$t_{max}$  é a máxima temperatura externa ao longo de um dia;

PVD é o percentual horário de variação da temperatura externa (de 0 a 100%);

VD é a variação diária da temperatura externa.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arpaci, V., 1966. "**Conduction Heat Transfer**". Addison-Wesley, New York.

Aseka, I., Vilhena, M., Beyer, P., and Bianchi, M., 2000. "Solution of Transient Heat Conduction Equation in Multicomponent Plates", **8th Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences**, vol. CD Rom ISBN 85-85769-04-01.

Aseka, I., Vilhena, M., and Velho, H. "Solution of the Heat Conduction Equation in a Bidimensional Multilayered Cartesian Geometry by the Nodal and Laplace Transform Techniques", vol. submetido para publicação.

ASHRAE, 1993. "**Handbook of Fundamentals**". ASHRAE, pp.26.17-26.28.

Aviles-Ramos, C., Haji-Sheikh, A., and Beck, J., 1998. "Exact Solution of Heat Conduction in Composite Materials and Application to Inverse Problems", **J. Heat Trans.**, vol. 120, pp. 592–599.

Beyer, P., 1998. "**Condução de Calor Não-Estacionária em Paredes Externas Multi-Compostas**". Tese de Doutorado, PROMEC - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Beyer, P. and Vilhena, M., 1998. "Fluxo de Calor Bi-direcional Não Estacionário em Meios Multi-Compostos", **VII ENCIT**, vol. .

Bliss, R., 1961. "Atmospheric Radiation Near the Surface of the Ground", **Solar Energy**, vol. 5, pp. 103–110.

Carslaw, H. and Jaeger, J., 1959. "**Conduction Heat Transfer**". Clarendon Press, London.

- Chen, H. and Lin, J.-Y., 1991. "Application of the Hybrid Method to Transient Heat Conduction in One-Dimensional Composite Layers", **Computers & Structures**, vol. 39, pp. 451–458.
- Chester, W., Bobone, R., and Brocher, E., 1984. "Transient Conduction Through a Two-Layer Medium", **Int. J. Heat Mass Trans.**, vol. 27, pp. 2167–2170.
- Corrêa, E. and Cotta, R., 1997. "Enhanced Lumped-Differential Formulations of Diffusion Problems", **Appl. Math. Model.**, vol. 22, pp. 137–152.
- Cotta, R. and Mikhailov, M., 1997. "**Heat Conduction - Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation**". John Wiley & Sons, England.
- Domingos, H. and Voelker, D., 1976. "Transient Temperature rise in Layered Media", **J. Heat Trans.**, vol. 98, pp. 329–330.
- Gonçalves, G., Segatto, C., and Vilhena, M., 2000. "The LTSN Particular Solution in a Slab for an Arbitrary Source and Large Order of Quadrature", **J. Quant. Spec. Radiat. Trans.**, vol. .
- Hauser, E., 2002. "**Estudo e Solução da Equação de Transporte de Nêutrons Bidimensional pelo Método LTSN para Elevadas Ordens de Quadraturas Angulares**". Tese de Doutorado, PROMEC - UFRGS.
- Heydarian, M., Mullineux, N., and Reed, J., 1981. "Solution of Parabolic Partial Differential Equations", **Appl. Math. Modelling**, vol. 5, pp. 448–449.
- Hornbeck, R., 1975. "**Numerical Methods**". Quantum, New York.
- Hou, S. and Cogley, A., 1993. "A Discrete Element Method for Composite Media: one-dimensional heat conduction", **Int. J. Heat Mass Trans.**, vol. 36, pp. 3009–3016.
- Lockwood, J. and Mulholland, G., 1973. "Diffusion Through Laminated Composite Cylinders Subjected to a Circumferentially Varying External Heat Flux", **J. Heat Trans.**, vol. 95, pp. 487–491.

Matysiak, S., Pauk, V., and Yevtushenko, A., 1998. "On Applications of the Microlocal Parameter Method in Modelling of Temperature Distributions in Composite Cylinders", **Appl. Mech.**, vol. 68, pp. 297–307.

Menning, J., Auerbach, T., and Hälg, W., 1983. "Two Point Hermite Approximation for the Solution of Linear Value and Boundary Value Problems", **Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.**, vol. 39, pp. 199–224.

Özisik, M., 1993. "**Heat Conduction**". John Wiley & Sons, New York.

Patankar, S., 1980. "**Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**". McGraw Hill, New York.

Pazos, R., Vilhena, M., and Hauser, E., 2002. "Solution and Study of the Two-Dimensional Nodal Neutron Transport Equation", **International Conference On Nuclear Energy**, vol. 22, pp. 275–291.

Segatto, C., Vilhena, M., and Brancher, J., 1999a. "The One-Dimension LTSN Formulation for High Degree of Anisotropy", **J. Quant. Spec. Radiat. Trans.**, vol. 61, pp. 39–43.

Segatto, C., Vilhena, M., and Gomes, M., 1999b. "The One-Dimension LTSN Solution in a Slab with High Degree of Quadrature", **Annals Nucl. Energy**, vol. 26, pp. 925–934.

Stroud, A. and Secrest, D., 1966. "**Gaussian Quadrature Formulas**". Prentice Hall, New Jersey.

Vilhena, M., Barichello, L., Zabadal, J., Segatto, C., Cardona, A., and Pazos, R., 1999. "Solution to the Multidimensional Linear Transport Equation by the Spectral Method", **Progr. Nucl. Energy**, vol. 35, pp. 275–291.

Vilhena, M. and Pazos, R., 1999. "Convergence in Transport Theory", **Appl. Numer. Math.**, vol. 30, pp. 79–92.

Xin, R. and Tao, W., 1994. "Analytical Solution for Transient Heat Conduction in Two Semi-infinite Bodies in Contact", **Trans. ASME**, vol. 116, pp. 224–228.

Zedan, M. and Mujahid, A., 1993. "Laplace Transform Solution for Heat Transfer in Composite Walls With Periodic Boundary Conditions", **J. Heat Trans.**, vol. 115, pp. 263–265.