

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

A Sincronização de Osciladores de Rössler Acoplados¹

Ismael André Heisler

Dissertação elaborada sob a orientação do Dr. Thomas Braun e do Dr. Ricardo Rego Bordalo Correia, em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre, Abril de 2002.

¹ Trabalho parcialmente financiado pelo CNPq.

*Eu dedico esta dissertação
aos meus pais, Willibaldo e
Alice, e à minha querida
Daniela*

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Thomas Braun pelo inestimável apoio e dedicação, tanto na iniciação científica quanto no mestrado;

À todos os professores do Laboratório Laser pelo suporte que recebi na elaboração deste trabalho. Agradeço em especial ao professor Jorge Lisboa pela fundamental ajuda com a parte dos circuitos eletrônicos. Também agradeço aos demais professores do Instituto de Física pela sua dedicação em passar o seu conhecimento à nós alunos;

À professora Maria Cristina Varriale pela ajuda com a parte matemática;

Aos meus colegas de Laboratório pelas intermináveis discussões e questionamentos que muito me ajudaram a entender e prosseguir na elaboração desta dissertação. Em especial, agradeço ao Roberto Paaz e Emmanuel Gräve de Oliveira que foram os meus colegas “caóticos” e também ao Júlio Ricardo Schöffel pela inestimável ajuda na elaboração deste texto em Latex;

Aos meus pais e irmãos pelo constante apoio das mais diversas formas;

À Zuleika Berto pela ajuda com as referências;

Um agradecimento especial a minha companheira Daniela, pela sua grande compreensão, amizade e amor dedicados durante este tempo tão difícil.

Dias inteiros de calma, noites de ardência, dedos no leme e olhos no horizonte, descobri a alegria de transformar distâncias em tempo. Um tempo em que aprendi a entender as coisas do mar, a conversar com as grandes ondas e não discutir com o mau tempo. A transformar o medo em respeito, o respeito em confiança. Descobri como é bom chegar quando se tem paciência. E para se chegar, onde quer que seja, aprendi que não é preciso dominar a força, mas a razão. É preciso, antes de mais nada, querer.

Amyr Klink

SUMÁRIO

Resumo	vii
Abstract	ix
1. Introdução	1
2. O Circuito de Rössler	5
2.1 Montagem Experimental	5
2.1.1 A Equação que Modela \dot{x}	8
2.1.2 A Equação que Modela \dot{y}	9
2.1.3 A Equação que Modela \dot{z}	11
2.2 Caracterização do Sistema de Rössler	14
3. Fundamentos de Dinâmica Não-linear	23
3.1 Sistemas Dinâmicos	24
3.1.1 Atratores Estranhos	25
3.1.2 Variedades Invariantes	27
3.2 Análise de Estabilidade	28
3.2.1 Pontos Fixos	29
3.2.2 Ciclos Limites	31
3.2.3 Expoentes de Lyapunov	34
3.2.3.1 Definição de Expoentes de Lyapunov	37
3.2.3.2 Cálculo Numérico do Máximo Expoente de Lyapunov	38

4. Sincronização de Sistemas Não-lineares	39
4.1 Controle de Caos	39
4.2 Sincronização de Osciladores Caóticos Idênticos	43
4.2.1 Definição de Sincronização Idêntica	44
4.2.2 Estabilidade: a Variedade Transversal	47
4.2.3 Formas de Acoplamento	49
4.3 Sincronização de Fase	51
4.3.1 A Definição de Fase em Sistemas Caóticos	52
4.3.2 Obtenção da Fase Experimentalmente	54
5. A Sincronização de Osciladores de Rössler	57
5.1 O Circuito Oscilador	58
5.2 O Acoplamento entre os Osciladores	59
5.3 Sincronização Global	63
5.3.1 Análise Linear	65
5.3.2 Diagonalização da Matriz Variacional	69
5.3.3 Expoentes de Lyapunov	73
5.3.4 Cálculo do Máximo Expoente de Lyapunov Transversal	75
5.4 Sincronização Parcial	79
5.4.1 Padrões de Sincronização	79
5.5 Resultados Experimentais	80
5.6 Análise Comparativa	95
6. Conclusão	103
Referências Bibliográficas	104

RESUMO

Neste trabalho utiliza-se como sistema dinâmico o circuito eletrônico que integra o sistema de equações acopladas de Rössler modificado. Este sistema possui uma não-linearidade dada por uma função linear por partes e apresenta comportamento caótico para certos valores dos seus parâmetros. Isto é evidenciado pela rota de dobramento de período obtida variando-se um dos parâmetros do sistema. A caracterização experimental da dinâmica do sistema Rössler modificado é realizada através do diagrama de bifurcações.

Apresenta-se uma fundamentação teórica de sistemas dinâmicos introduzindo conceitos importantes tais como atratores estranhos, variedades invariantes e também uma análise da estabilidade de comportamentos assintóticos como pontos fixos e ciclos limites. Para uma caracterização métrica do caos, apresenta-se a definição dos expoentes de Lyapunov. São introduzidos também os expoentes de Lyapunov condicionais e transversais, que estão relacionados com a teoria de sincronização de sistemas caóticos. A partir de uma montagem mestre-escravo, onde dois osciladores de Rössler estão acoplados unidirecionalmente, introduz-se a definição de sincronização idêntica, sincronização de fase e variedade de sincronização.

Demonstra-se a possibilidade de sincronização em uma rede de osciladores caóticos de Rössler, acoplados simetricamente via acoplamento de primeiros vizinhos. A rede composta por seis osciladores mostrou ser adequada pelo fato de apresentar uma rica estrutura espacial e, ao mesmo tempo, ser experimentalmente implementável. Além da sincronização global (osciladores identicamente sincronizados), obtém-se a sincronização parcial, onde parte dos osciladores sincronizam entre si e a outra parte não o

faz. Esse tipo de sincronização abre a possibilidade da formação de padrões de sincronização e, portanto, exhibe uma rica estrutura de comportamentos dinâmicos. A sincronização parcial é investigada em detalhes e apresentam-se vários resultados. A principal ferramenta utilizada na análise experimental e numérica é a inspeção visual do gráfico $y_i \times y_j$, fazendo todas as combinações entre elementos diferentes (i e j) da rede. Na análise numérica obtém-se como resultado complementar o máximo expoente de Lyapunov transversal, que descreve a estabilidade da variedade de sincronização global.

ABSTRACT

In this work it is used as a dynamical system the electronic circuit that integrates the modified system of Rössler coupled equations. This system has a nonlinearity given by a piecewise linear function and shows chaotic behavior for certain values of the system parameters. That is evidenced through a period doubling route obtained varying one of the system parameters. The experimental characterization of the modified Rössler system dynamics is realized through a bifurcation diagram.

It is presented a theoretical fundamentation of dynamical systems introducing important concepts like strange attractors, invariant manifolds and also a stability analysis of asymptotic behaviors like fixed points and limit cycles. For a metric characterization of chaos, the definition of the Lyapunov exponents is presented. Also introduced are the conditional and transversal Lyapunov exponents, that are related with the synchronization theory of chaotic systems. From a master-slave assembly, where two Rössler oscillators are unidirectionally coupled, the definition of identical synchronization, phase synchronization and synchronization manifold is introduced.

The possibility of synchronization in a net of chaotic Rössler oscillators symmetrically coupled through nearest-neighbour coupling is demonstrated. The net composed by six oscillators is suitable because it has a rich spatial structure and at the same time it is experimentally implementable. Besides global synchronization (identically synchronized oscillators), partial synchronization, where some of the oscillators synchronize with each other and others do not, is obtained. This type of synchronization opens the possibility for the formation of synchronization patterns, therefore exhibits a rich structure of dynamical behaviors. The partial synchronization is investigated

in details and the results are shown. The main tool used in the experimental and numerical analysis is the visual inspection of the graphic $y_i \times y_j$, making all the combinations between the different elements (i e j) of the net. In the numerical analysis it is obtained as a complementar result the maximum transversal Lyapunov exponent, which describes the stability of the global synchronization manifold.

1. INTRODUÇÃO

Até o início dos anos 1960, acreditava-se que sistemas os quais demonstravam comportamentos não periódicos, aleatórios, ou seja, caóticos, eram sistemas intratáveis, pois eles são imprevisíveis. Assim, esses sistemas eram evitados. Porém, a partir dos anos 1960 e 70, começou-se a olhar mais de perto tais sistemas caóticos e verificou-se que eles possuem uma rica estrutura e, contrariando certas idéias, descobriu-se que existe uma certa ordem subjacente ao caos [1–4]. E, melhor do que isso, demonstrou-se que o caos é manejável ! Já se usa caos para aumentar a potência de lasers [5,6], sincronizar a saída de circuitos eletrônicos [7–10], controlar oscilações em reações químicas [11], estabilizar os batimentos do coração de animais doentes e codificar mensagens eletrônicas em circuitos de comunicação [12].

Existem duas razões principais pelo qual o caos se torna tão útil. Primeira: apesar de serem imprevisíveis, os sistemas caóticos são determinísticos. Um sistema dinâmico é chamado determinístico quando a sua evolução é descrita por uma regra bem definida. No estudo da evolução temporal de um sistema dinâmico determinístico consideramos dois tipos de variáveis quando expressamos matematicamente a regra dinâmica em termos de uma ou mais equações. As variáveis dinâmicas são aquelas que podem modificar-se a cada instante e os seus respectivos valores são determinados solucionando as equações. Por sua vez, as variáveis estáticas, usualmente denominadas de parâmetros, são ajustadas quando se determinam as equações do sistema. As variáveis estáticas, que são passíveis de alteração, determinam os chamados parâmetros de controle do sistema e a mudança nos seus valores pode induzir o sistema a um comportamento dinâmico diferente. Segunda: o comportamento de um sistema caótico é a coleção de muitos comportamentos ordenados, sendo que em condições “normais”,

nenhum deles é dominante (estável). Recentemente mostrou-se que perturbando um sistema caótico de maneira adequada, pode-se “encorajar” o sistema a seguir um dos vários comportamentos regulares emaranhados no espaço de fase do sistema [13]. Os sistemas caóticos são imensamente flexíveis porque eles podem mudar de comportamento rapidamente. Isso se deve ao fato de o caos possuir grande sensibilidade às condições iniciais. Portanto, uma pequena mudança no parâmetro de controle produz drásticas mudanças no comportamento do sistema.

A partir dos anos 1990, surgiu a idéia da sincronização de sistemas caóticos [7, 9, 14–16]. Apesar de um sistema caótico possuir um atrator no espaço de fase, determinar precisamente aonde ele se encontra no atrator num tempo futuro, é algo que se torna exponencialmente difícil. Uma maneira de se demonstrar isso é observar a evolução de um sistema caótico que parte de condições iniciais muito próximas. Essas duas evoluções divergem a tal ponto que não se tenha nenhuma correlação entre elas depois de um tempo curto. Apesar disso, mostrou-se que, acoplando de forma adequada dois ou mais sistemas caóticos, existe a possibilidade de sincronizá-los de forma que seus comportamentos sejam semelhantes.

Uma das possíveis aplicações da sincronização de sistemas caóticos e do controle de caos é a comunicação segura. A idéia é aplicar a sincronização de sistemas caóticos para transmitir informações de um modo seguro, isto é, difícil de ser decifrado por um interceptor. O método consiste em embutir uma mensagem no sinal caótico que sincroniza os dois sistemas. Assim, o sinal transmitido de um sistema para outro terá um espectro Fourier de banda larga, parecendo ruído para alguém que intercepte a mensagem. Esse sinal só pode sincronizar um sistema idêntico ao que gerou o sinal; isto quer dizer que devemos ter sistemas com um conjunto idêntico de equações e com os mesmos parâmetros. Dessa forma, é altamente improvável, devido a grande gama de possíveis sistemas caóticos e respectivos parâmetros, que um interceptor tenha exatamente o mesmo sistema que o receptor credenciado e, portanto, possa decodificar a mensagem sem a devida autorização. A implementação dessa técnica já foi efetuada em alguns sistemas, tanto numéricos quanto experimentais [12], mas uma questão aberta é

estabelecer a sua eficácia. Como mostrado por Cerdeira e Pérez [17], esse método não é totalmente seguro, sendo possível interceptar a mensagem escondida em um sinal caótico.

Além da sincronização idêntica, na qual ocorre a completa igualdade entre os comportamentos dos sistemas sincronizados, atualmente conhecemos outras formas de sincronização, como por exemplo, a sincronização de fase [18, 19], na qual a fase dos sistemas está sincronizada mas a amplitude varia aleatoriamente, e também a sincronização generalizada [20, 21] que ocorre entre sistemas não idênticos. Recentemente Ying *et al.* [22] demonstraram numericamente que, para uma rede de osciladores de Rössler, além da sincronização idêntica entre todos os componentes da rede, pode surgir outro estado dinâmico chamado de sincronização parcial. Quando o estado de sincronização idêntica deixa de ser estável não ocorre uma dessincronização completa entre todos os osciladores da rede, isto é, pode surgir um estado intermediário na qual parte dos osciladores mantém um estado sincronizado independentemente dos outros osciladores. Neste trabalho experimental estamos interessados em obter tais padrões de sincronização para uma rede de seis osciladores de Rössler, na qual utilizamos um acoplamento simétrico entre primeiros vizinhos, sendo esse acoplamento feito em uma ou em várias das variáveis de cada sistema. Optamos por fazer o acoplamento na variável, ao contrário da grande maioria dos trabalhos (inclusive o trabalho de Ying supracitado) que utiliza o acoplamento nas equações do sistema estudado, por acharmos que em certos casos esta é a forma mais conveniente de se realizar um acoplamento entre sistemas físicos. Além disso, sempre existe um interesse de se utilizar a menor quantidade possível de sinais entre os sistemas para gerar a sincronização. O acoplamento na variável satisfaz essa condição pois, por exemplo, no sistema de Rössler, acoplando na variável x , surge um termo de acoplamento nas três equações do sistema nas quais aparece essa variável.

Estruturamos este trabalho da seguinte forma: no capítulo 2 descrevemos a montagem experimental utilizada ao longo do trabalho, tanto como, de forma muito breve, as principais características e propriedades dinâmicas do sistema de equações de

Rössler. No capítulo 3 são introduzidos conceitos fundamentais relacionados à teoria dinâmica linear e não-linear. No capítulo 4 é colocada a idéia da sincronização de sistemas caóticos e faz-se a aplicação a uma montagem de dois osciladores de Rössler acoplados. No capítulo 5 analisa-se, tanto teórica quanto experimentalmente, a sincronização idêntica e também o fenômeno dos padrões de sincronização numa rede de seis osciladores de Rössler acoplados. Finalmente, no capítulo 6, são apresentadas as conclusões e perspectivas de trabalho futuro.

2. O CIRCUITO DE RÖSSLER

Neste capítulo descrevemos a montagem experimental com a qual trabalhamos ao longo do desenvolvimento desse trabalho. O aparato experimental consiste basicamente de circuitos eletrônicos. Optamos por tal tipo de equipamento devido à flexibilidade, fácil montagem e reproducibilidade de vários sistemas idênticos. Existe toda uma variedade de montagens que nos possibilitam praticamente todas as operações matemáticas necessárias para a modelagem de sistemas físicos. Na primeira seção obteremos o sistema de Rössler a partir da montagem experimental. Na segunda seção apresentaremos algumas características e propriedades dinâmicas desse sistema.

2.1 Montagem Experimental

O sistema de equações, obtido originalmente por O. E. Rössler [23, 24], é dado por:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -(y + z) \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c) .\end{aligned}\tag{2.1}$$

Essas equações foram propostas por Rössler em meados de 1976 a partir das equações de Lorenz na tentativa de criar um modelo mais simples, mas que também apresenta caos. O circuito que estamos utilizando modela um conjunto de equações levemente modificado do sistema (2.1), onde a não-linearidade quadrática zx é substituída por uma função linear por partes, e a equação x possui um termo de amortecimento adici-

onal [16]. A versão modificada é a seguinte:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\alpha(\Gamma x + \beta y + \lambda z) \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha(x + \gamma y) \\ \frac{dz}{dt} &= \delta\alpha(g(x) - z),\end{aligned}\tag{2.2}$$

onde α , Γ , β , λ , γ , δ são constantes que serão determinadas a partir do circuito eletrônico e $g(x)$ é a função não-linear (linear por partes),

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 2.56 \\ \mu(x - 2.56), & \text{se } x \geq 2.56. \end{cases}\tag{2.3}$$

A figura 2.1 mostra a função $g(x)$ para dois valores de R_{11} que serão considerados na

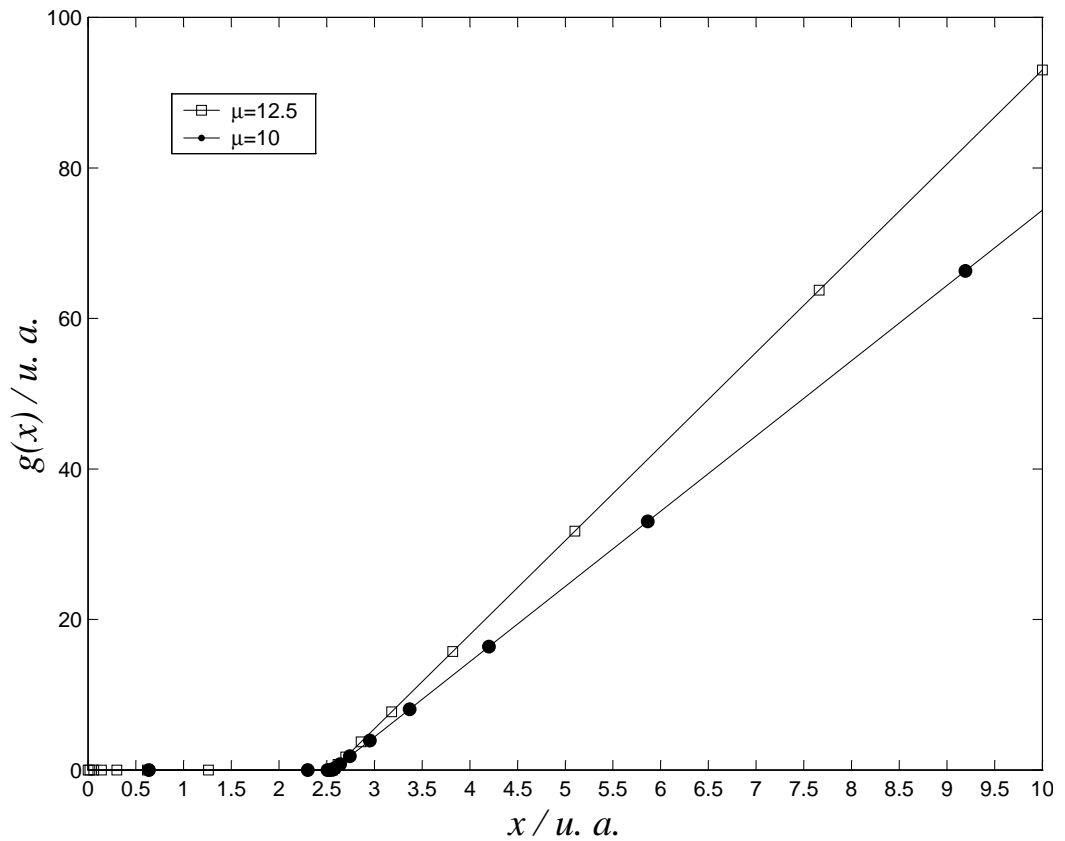


Fig. 2.1: Função linear por partes graficada para dois valores do parâmetro μ .

análise numérica no capítulo 5. A curva com quadrados corresponde a $R_{11} = 120 \text{ k}\Omega$ e a curva com círculos corresponde a $R_{11} = 150 \text{ k}\Omega$.

Optamos pelo sistema de Rössler modificado (2.2) devido ao alto custo de um multiplicador eletrônico de sinais de tensão, necessário para implementar o sistema original de Rössler (2.1), e também porque não ocorre nenhuma mudança qualitativa relevante na dinâmica dos 2 sistemas, como veremos na seção 2.2. O esquema do circuito que modela o sistema de equações de Rössler modificado é dado pela figura 2.2. Para uma descrição completa do sistema (2.2), precisamos obter os valores dos

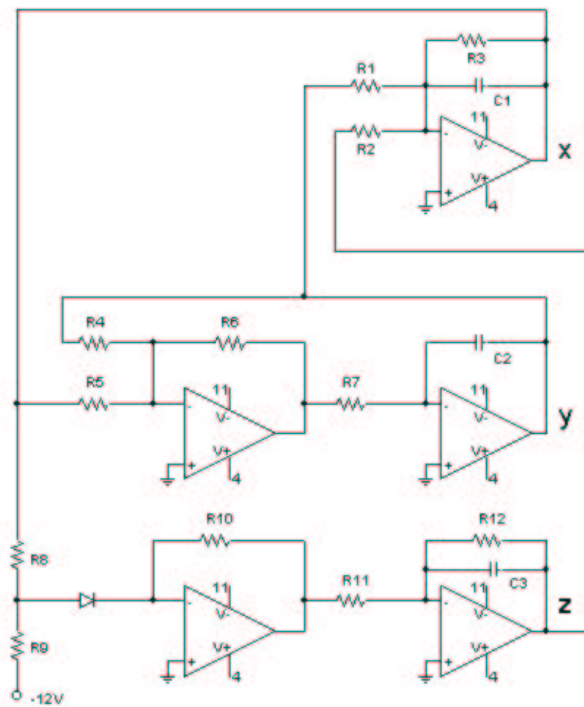


Fig. 2.2: Esquema do circuito de Rössler

parâmetros α , Γ , β , λ , γ , δ , em função das resistências e capacitores do circuito. Para isso, vamos partir das “regras de ouro” [25] dos amplificadores operacionais, que são:

1. as entradas positiva e negativa estão sempre no mesmo potencial;
2. as entradas positiva e negativa possuem impedância infinita, ou seja, não entra corrente nesses bornes do amplificador operacional.

Uma consequência direta das “regras de ouro” dos amplificadores operacionais, é a equação que relaciona a tensão de saída com a tensão de entrada num amplificador operacional. Para a montagem 2.3, a relação é a seguinte:

$$V_o = -\frac{R_2}{R_1} V_i . \quad (2.4)$$

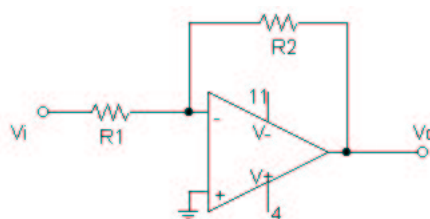


Fig. 2.3: Amplificador operacional.

2.1.1 A Equação que Modela \dot{x}

Pode-se tomar separadamente cada parte do esquema do circuito que corresponde à modelagem das equações \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} . A parte do circuito que corresponde à modelagem da equação \dot{x} está representada na figura 2.4. Pela regra 2. temos

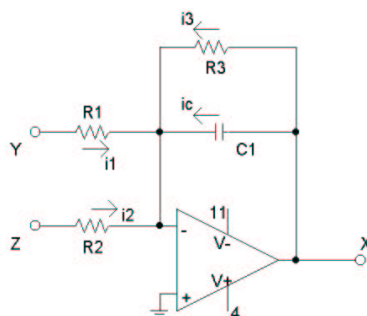


Fig. 2.4: Parte do circuito que modela a equação \dot{x} .

$$i_2 + i_1 = i_3 + i_C .$$

Portanto

$$\frac{y}{R_1} + \frac{z}{R_2} = -\frac{x}{R_3} - C \frac{dx}{dt}, \quad (2.5)$$

ou seja,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{C} \left[\frac{x}{R_3} + \frac{y}{R_1} + \frac{z}{R_2} \right]. \quad (2.6)$$

Definimos uma constante com dimensão de $1/\text{tempo}$ com o objetivo de possibilitar uma mudança na escala do tempo de forma fácil. Essa constante é definida como:

$$\alpha \equiv \frac{R_6}{R_5 R_7 C}.$$

Dividimos e multiplicamos a equação (2.6) por α ,

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha \left[\frac{x}{\alpha C R_3} + \frac{y}{\alpha C R_1} + \frac{z}{\alpha C R_2} \right], \quad (2.7)$$

e definindo as constantes

$$\begin{aligned} \Gamma &\equiv \frac{1}{\alpha C R_3}, \\ \beta &\equiv \frac{1}{\alpha C R_1}, \\ \lambda &\equiv \frac{1}{\alpha C R_2}, \end{aligned}$$

obtemos a equação desejada

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha [\Gamma x + \beta y + \lambda z]. \quad (2.8)$$

A equação (2.8) corresponde exatamente à primeira equação do sistema (2.2).

2.1.2 A Equação que Modela \dot{y}

A parte do circuito que corresponde à modelagem da equação \dot{y} está representada pela figura 2.5. Novamente, partindo da regra 2. temos que,

$$i_6 = i_4 + i_5,$$

$$i_7 = i_2.$$

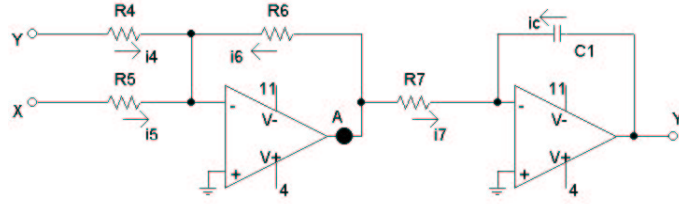


Fig. 2.5: Parte do circuito que modela a equação \dot{y} .

Pela regra estabelecida em (2.4), a tensão no ponto A vale,

$$A = -\frac{R_6}{R_4}y - \frac{R_6}{R_5}x. \quad (2.9)$$

Como a tensão no borne positivo dos operacionais é nula, pela regra 1, a tensão no borne negativo também deve ser nula. Portanto,

$$\begin{aligned} A &= R_7 i_7 \\ &= -C R_7 \frac{dy}{dt}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

De (2.9) e (2.10) temos que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{R_6}{R_7 R_4 C} y + \frac{R_6}{R_7 R_5 C} x \\ &= \frac{R_6}{R_7 R_5 C} \left(x + \frac{R_5}{R_4} y \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Definindo a constante

$$\gamma \equiv \frac{R_5}{R_4},$$

e, lembrando da definição de α , podemos reescrever (2.11) como

$$\frac{dy}{dt} = \alpha(x + \gamma y), \quad (2.12)$$

que corresponde à segunda equação do sistema (2.2).

2.1.3 A Equação que Modela \dot{z}

Por último, vamos derivar a equação para \dot{z} . O diagrama do circuito que corresponde a modelagem dessa equação é dado pela figura 2.6. Pelos mesmos argumentos que já utilizamos até aqui, a tensão no ponto B é a seguinte:

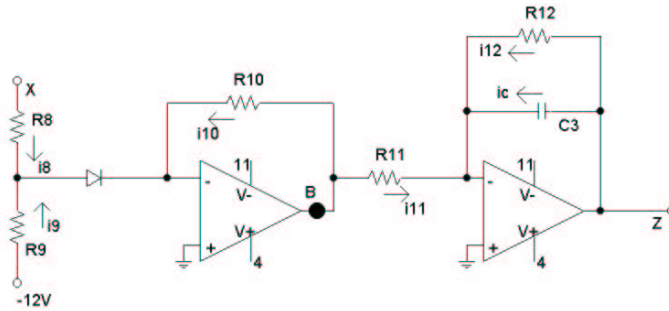


Fig. 2.6: Parte do circuito que modela a equação \dot{z} .

$$\frac{B}{R_{11}} = -\frac{z}{R_{12}} - C \frac{dz}{dt}. \quad (2.13)$$

Para calcularmos essa tensão, temos que levar em conta a característica não-linear do diodo, que é apresentada pela figura 2.7. Esta curva foi obtida experimentalmente,

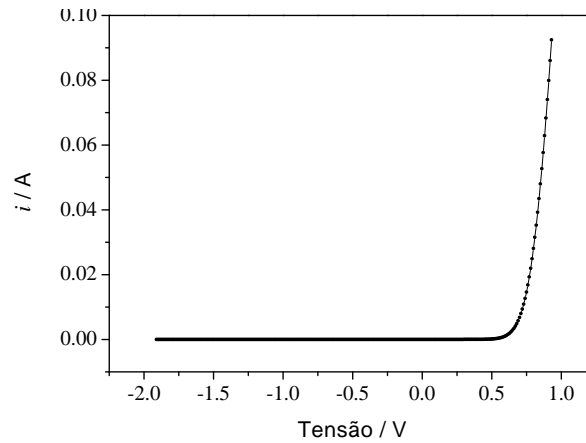


Fig. 2.7: Curva característica do diodo BA316. O eixo vertical é a corrente conduzida pelo diodo e o eixo horizontal é a tensão aplicada sobre ele.

digitalizando a corrente conduzida pelo diodo em função da tensão aplicada sobre ele. A tensão sobre o diodo é dada pelo divisor de tensão especificado pela figura 2.8. O diodo BA316, que é um diodo de silício, começa a conduzir aproximadamente ao redor da tensão $VD = 0.69V$, como podemos ver pela figura 2.7. Escrevendo a equação

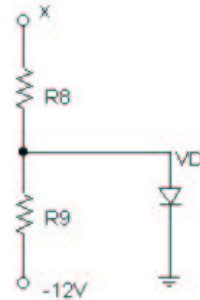
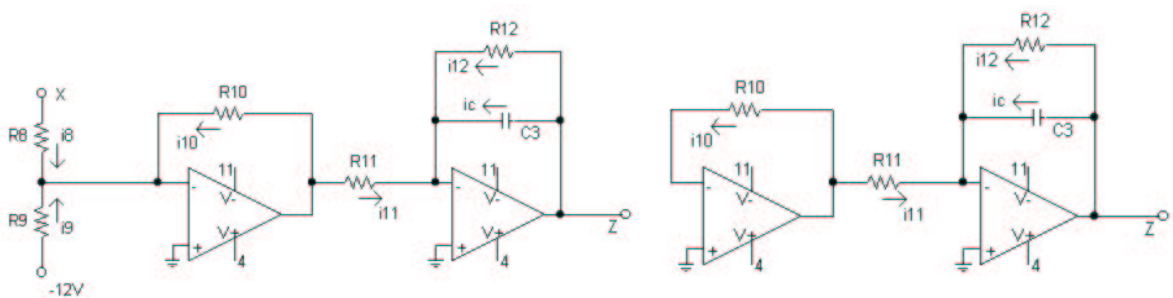


Fig. 2.8: Divisor de tensão.

para a malha da figura 2.8, obtemos um valor para x que satisfaça a condição de que $VD = 0.69V$:

$$0.69 = -12 + \frac{(x + 12)R_9}{R_8 + R_9}. \quad (2.14)$$

O valor de x obtido é $x = 2.56V$. Considerando que para $x \geq 2.56$ o diodo pode ser considerado como um curto circuito (figura 2.9(a)), podemos escrever a expressão



(a) O diodo foi substituído por um fio condutor.

(b) O diodo foi substituído por um circuito aberto.

Fig. 2.9: Montagem do diodo em curto circuito e circuito aberto.

$$\frac{X}{R_8} - \frac{12}{R_9} = -\frac{B}{R_{10}}, \quad (2.15)$$

onde $X = x - 2.56$. De (2.13) e (2.15) temos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{R_{10}}{R_{11}R_8C}X - \frac{1}{R_{12}C}z, \quad (2.16)$$

onde desprezamos o termo de nível de DC. Podemos reescrever (2.16) como

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{R_{12}C} \left(\frac{R_{10}R_{12}}{R_{11}R_8}X - z \right). \quad (2.17)$$

Definindo as constantes

$$\begin{aligned} \mu &\equiv \frac{R_{10}R_{12}}{R_8R_{11}}, \\ \delta &\equiv \frac{R_5}{R_6}, \end{aligned}$$

e fazendo a identificação

$$\frac{1}{R_{12}C} = \frac{R_5R_7\alpha}{R_6R_{12}},$$

podemos reescrever (2.17) como

$$\frac{dz}{dt} = \delta\alpha(\mu X - z). \quad (2.18)$$

Lembrando que essa equação é válida para $x \geq 2.56$, e que $X = x - 2.56$, temos que

$$\frac{dz}{dt} = \delta\alpha(\mu(x - 2.56) - z). \quad (2.19)$$

Por outro lado, para um valor de tensão $x < 2.56$ o diodo não conduz e portanto o circuito pode ser considerado como aberto (figura 2.9(b)). Assim,

$$\frac{dz}{dt} = -\delta\alpha z. \quad (2.20)$$

Podemos escrever de forma compacta as equações (2.19) e (2.20) se definirmos a função $g(x)$ da seguinte forma:

$$g(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{se } x < 2.56 \\ \mu(x - 2.56), & \text{se } x \geq 2.56. \end{cases} \quad (2.21)$$

$\alpha = \frac{R_6}{R_5 R_7 C}$	$\Gamma = \frac{1}{\alpha C R_3}$
$\beta = \frac{1}{\alpha C R_1}$	$\lambda = \frac{1}{\alpha C R_2}$
$\gamma = \frac{R_5}{R_4}$	$\mu = \frac{R_{10} R_{12}}{R_8 R_{11}}$
$\delta = \frac{R_5}{R_6}$	

Tab. 2.1: Constantes em função dos componentes do circuito.

$R_1 = 100 \text{ k}\Omega$	$R_2 = 200 \text{ k}\Omega$
$R_3 = 2 \text{ M}\Omega$	$R_4 = 75 \text{ k}\Omega$
$R_5 = 15 \text{ k}\Omega$	$R_6 = 10 \text{ k}\Omega$
$R_7 = 100 \text{ k}\Omega$	$R_8 = 10 \text{ k}\Omega$
$R_9 = 68 \text{ k}\Omega$	$R_{10} = 150 \text{ k}\Omega$
$C = 220 \text{ pF}$	$R_{12} = 100 \text{ k}\Omega$

Tab. 2.2: Valores dos componentes utilizados na montagem experimental.

Essa equação corresponde à última das equações do sistema (2.2). A tabela 2.1 resume as constantes obtidas. Os valores dos componentes que serão utilizados são dados pela tabela 2.2. Não colocamos o valor de R_{11} nesta tabela, pois o seu valor é variável tal que tenhamos um parâmetro ajustável no circuito (o parâmetro correspondente é $\mu \propto 1/R_{11}$). O diodo é do tipo BA316 e os amplificadores operacionais são do tipo TL072.

2.2 Caracterização do Sistema de Rössler

Uma das principais formas de caracterizar a dinâmica de um sistema caótico é o diagrama de bifurcações. Ele é obtido alterando-se um parâmetro do sistema e tomando os valores de máximo de uma das variáveis. Realizamos tal diagrama experimentalmente para o sistema de Rössler variando a resistência R_{11} . Isto é equivalente a variarmos o parâmetro μ . A figura 2.10 mostra este diagrama de bifurcação. A

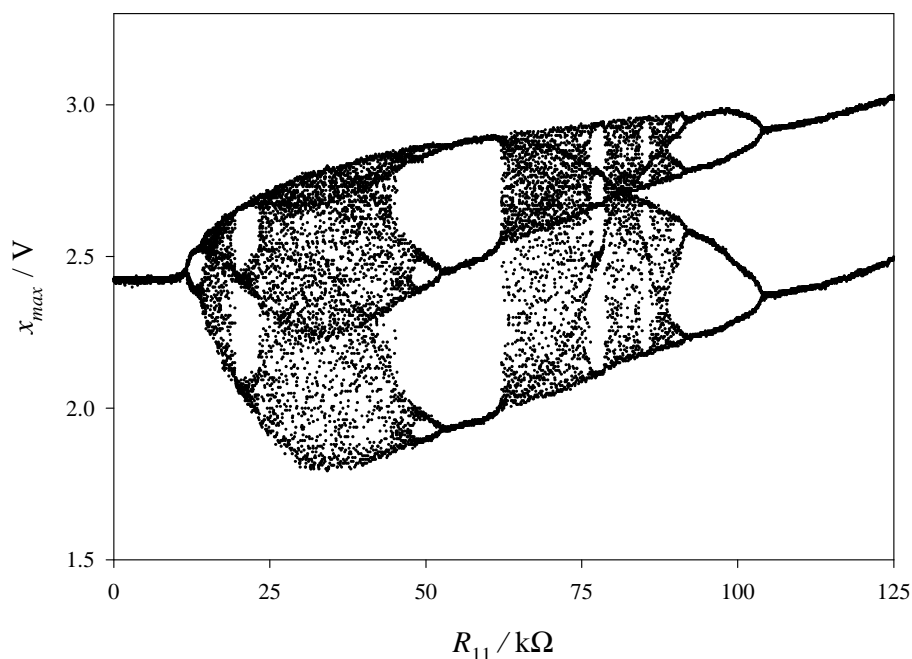
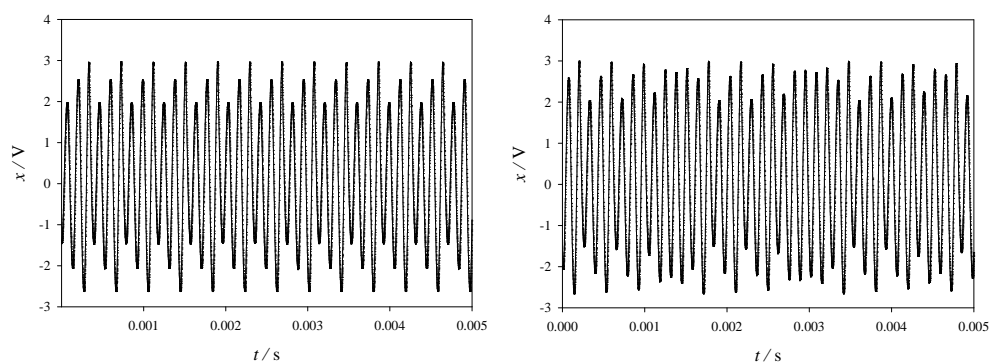


Fig. 2.10: Diagrama de bifurcação do sistema de Rössler; $R_5 = 13.3 k\Omega$, $R_6 = 12.35 k\Omega$ e $R_7 = 95 k\Omega$. Os valores dos demais componentes são os da tabela 2.2.



(a) Regime periódico de período 3.

(b) Regime caótico. $R_{11} = 72 k\Omega$.

$R_{11} = 59 k\Omega$.

Fig. 2.11: Séries temporais da variável x .

figura 2.11(a) mostra uma série temporal da variável x correspondente a janela de período 3, que é bem pronunciada no diagrama de bifurcação. Por outro lado, a figura 2.11(b) mostra uma série temporal da variável x quando o sistema está numa das janelas caóticas. Nota-se que o sistema de Rössler apresenta uma rota para o caos do tipo dobramento de período. Podemos observar isso na figura 2.12 onde temos uma sequência de projeções no plano xy do espaço de fase obtido experimentalmente. À medida que variamos o parâmetro μ , através de R_{11} , o período da oscilação, que inicialmente era período 1, dobra para período 2 e assim sucessivamente até o sistema entrar no regime caótico. Usamos a notação período 1, 2, ..., de forma esquemática; a órbita de período 1 possui um certo período T (não necessariamente $T=1$), e a órbita de período 2 vai possuir um período que é aproximadamente o dobro do período da órbita de período 1, e assim por diante. A figura 2.12(i) apresenta a oscilação de período 3 que surge de uma bifurcação tangente, isto é, o sistema passa do regime caótico para período 3 abruptamente. Isso pode ser observado no diagrama de bifurcação para $R_{11} \approx 63 k\Omega$. Prosseguimos fazendo uma análise da dinâmica das equações de Rössler. O sistema (2.1) com os parâmetros $a = 0.1$, $b = 0.1$ e $c = 14$ apresenta o atrator mostrado na figura 2.13. Originalmente, Rössler utilizou os valores $a = 0.2$, $b = 0.2$ e $c = 14$ o qual não gera diferenças qualitativas. Os expoentes de Lyapunov para este atrator foram calculados numericamente e são: 0.072, 0 e -13.79. A dimensão de Lyapunov é 2.005 [2]. Podemos obter um bom entendimento do comportamento das equações de Rössler uma vez que duas das equações são lineares. Começamos verificando somente a dinâmica no plano xy . Colocando $z = 0$ temos

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay .\end{aligned}\tag{2.22}$$

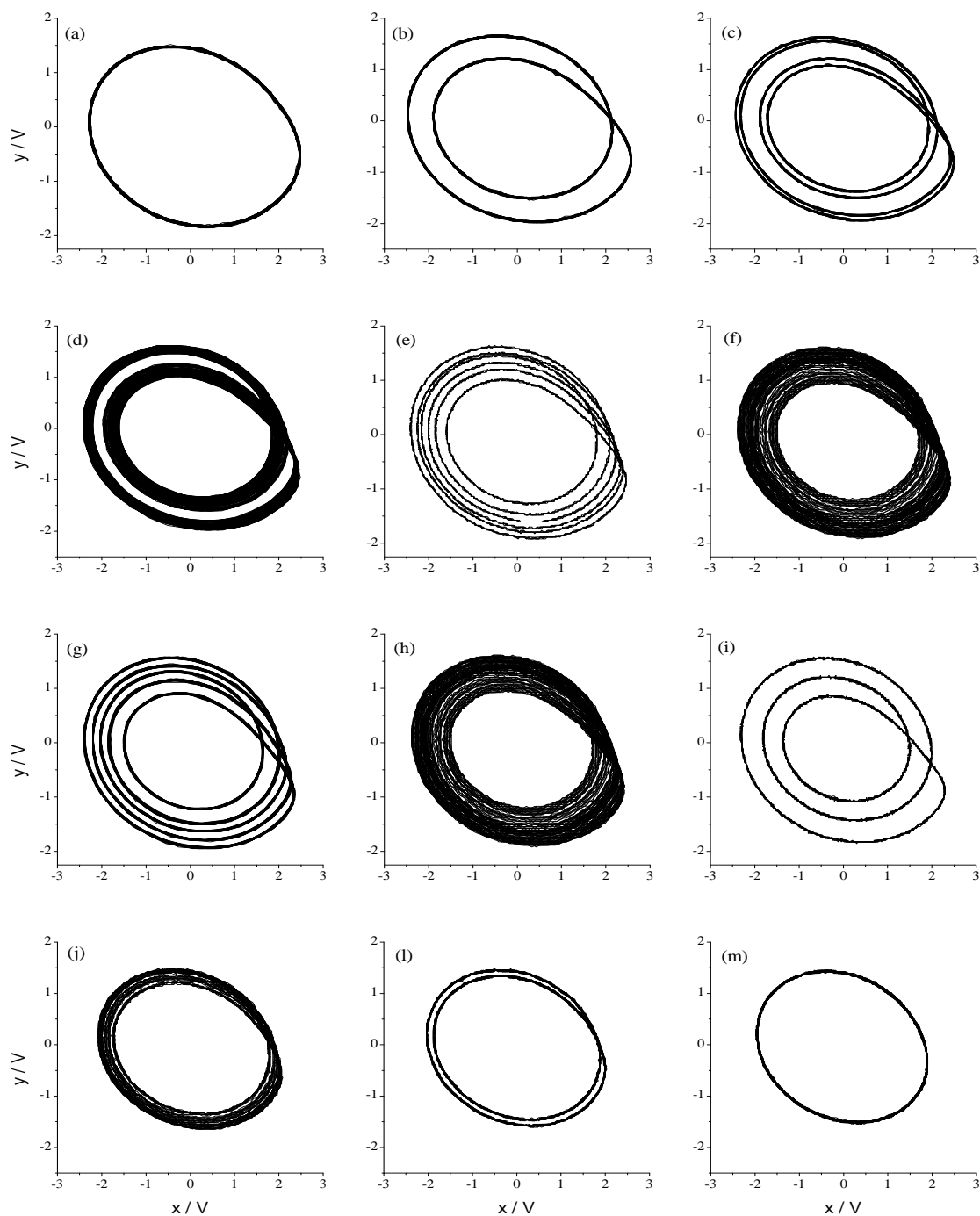


Fig. 2.12: Os valores das resistências são os da tabela 2.2 e de R_{11} são: (a) $152.2 \text{ k}\Omega$, (b) $112.8 \text{ k}\Omega$, (c) $75.5 \text{ k}\Omega$, (d) $64.3 \text{ k}\Omega$, (e) $57.4 \text{ k}\Omega$, (f) $44.7 \text{ k}\Omega$, (g) $36 \text{ k}\Omega$, (h) $20 \text{ k}\Omega$, (i) $17.7 \text{ k}\Omega$, (j) $4.72 \text{ k}\Omega$, (l) $3.66 \text{ k}\Omega$, (m) $2.7 \text{ k}\Omega$.

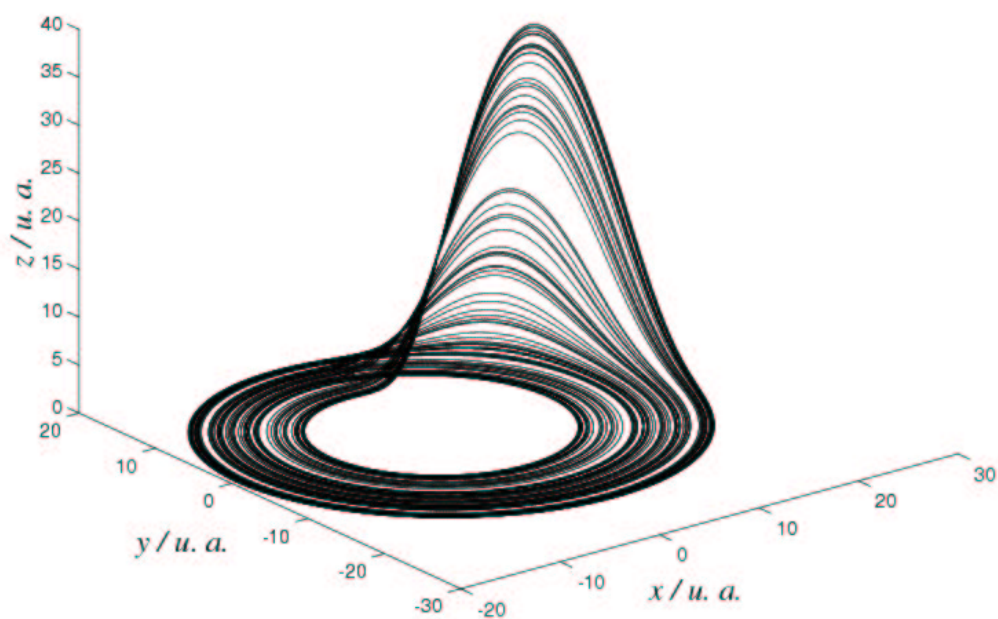


Fig. 2.13: Espaço de fase do sistema de Rössler original, para $a = 0.1$, $b = 0.1$ e $c = 14$.

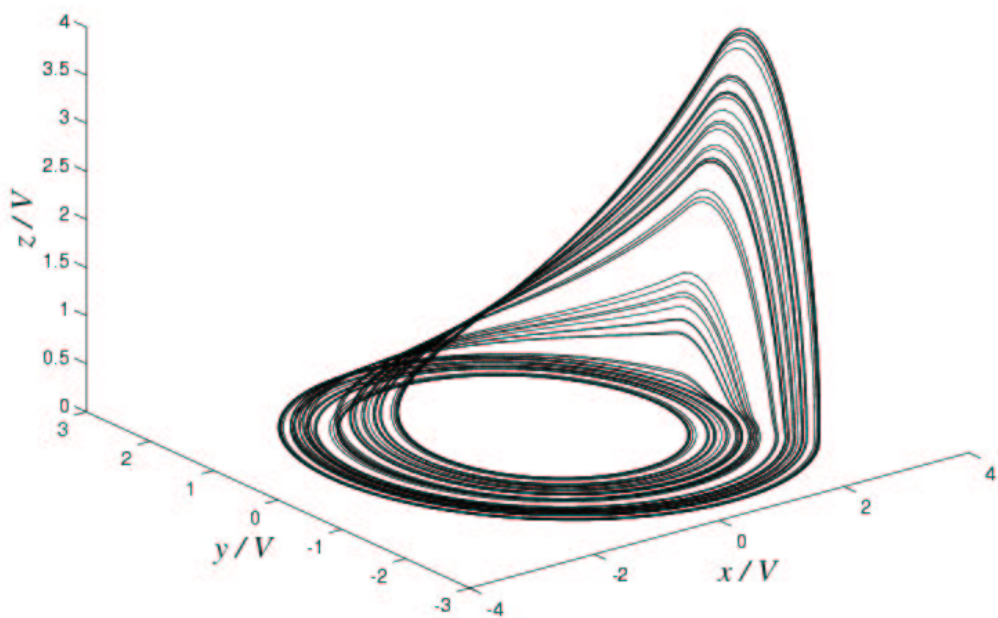


Fig. 2.14: Espaço de fase do sistema de Rössler modificado, para $R_5 = 15k\Omega$ e $R_{11} = 70k\Omega$. Os valores dos demais componentes são os da tabela 2.2.

A origem é um ponto de equilíbrio. Para encontrarmos a estabilidade desse ponto, vamos calcular os autovalores da matriz Jacobiana em $\mathbf{v} = (0, 0)$ ¹,

$$D\mathbf{f}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Os autovalores são $(a \pm \sqrt{a^2 - 4})$. Para $a > 0$, existe pelo menos um autovalor com parte real positiva, portanto, a origem é instável para a dinâmica no plano xy . Para $0 < a < 2$, os autovalores são complexos, ou seja, a trajetória se afasta da origem espiralando ao longo do plano xy . Agora, supomos que $0 < a < 2$ e $b, c > 0$, e retomamos a variável z , assumindo por um momento que $z \approx 0$, tal que o sistema permaneça próximo ao plano xy . A órbita vai espiralar para longe da origem e vai ficar próxima do plano xy desde que x seja menor do que c , pois a terceira equação de (2.1) possui um coeficiente negativo para z . Quando x tenta passar c , a variável z é subitamente lançada para grandes valores positivos. Isto tem o efeito de impedir o crescimento de x devido ao termo negativo z na primeira equação de (2.1). O efeito de amortecimento entre as variáveis x e z faz com que a órbita se mantenha limitada no atrator.

Não existe diferença qualitativa entre os atratores do sistema original e modificado, como pode ser visto nas figuras 2.13 e 2.14, respectivamente. Porém, quantitativamente, ocorre uma mudança na variável z . O laço de reinjeção no sistema original é mais simétrico e suave que no sistema modificado. Isto é o reflexo da substituição do termo quadrático zx por uma função linear por partes, $g(x)$, com a derivada descontínua em $x = 2.56$. Resta comparar o resultado obtido integrando-se o sistema modificado, (2.2), numérica e experimentalmente. A melhor forma de fazer essa comparação é através dos diagramas de bifurcação obtidos experimentalmente, figura 2.10, e numericamente, figura 2.15. Contrapondo as figuras, podemos observar que para valores grandes de R_{11} , os dois diagramas apresentam uma boa semelhança qualitativa, mas não quantitativa. Porém, à medida que o valor de R_{11} decresce, surgem diferenças

¹ Os conceitos de estabilidade e matriz Jacobiana serão discutidos no próximo capítulo.

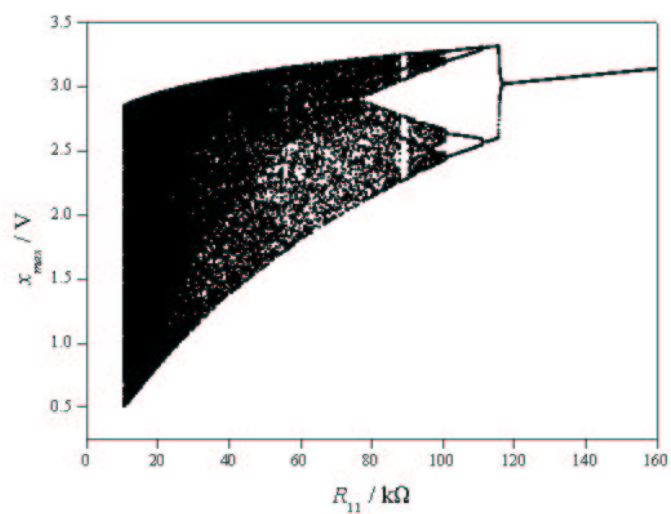


Fig. 2.15: Diagrama de bifurcação obtido por integração numérica. O diodo é modelado por uma chave perfeita; $R_5 = 13.3 k\Omega$, $R_6 = 12.35 k\Omega$ e $R_7 = 95 k\Omega$.

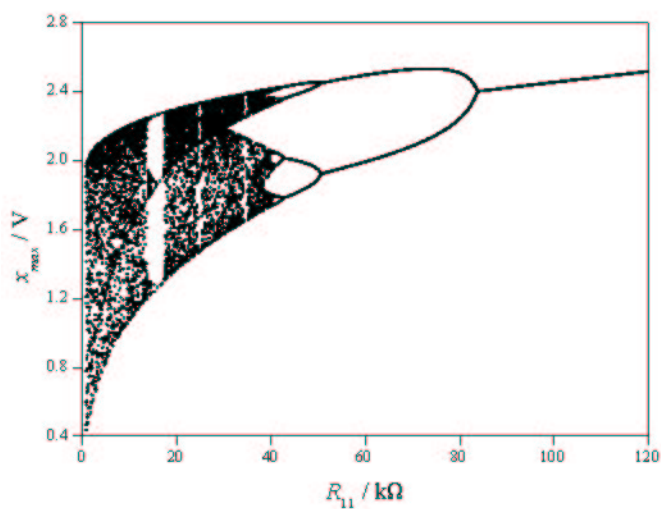


Fig. 2.16: Diagrama de bifurcação obtido por integração numérica. O diodo é modelado por sua curva característica; $R_5 = 13.3 k\Omega$, $R_6 = 12.35 k\Omega$ e $R_7 = 95 k\Omega$.

qualitativas, evidenciando-se a falta de uma janela de período 3 no diagrama de bifurcação obtido numericamente. Para tentar explicar estas discrepâncias apresentamos três fatores principais que devem estar influenciando nesse sentido. O primeiro fator a ser levado em conta é o ruído, que sempre está presente numa montagem experimental. Numericamente não estamos supondo nenhum tipo de ruído. O segundo fator está relacionado à qualidade dos componentes utilizados na montagem experimental. Para nós, qualidade significa que os valores reais dos componentes passivos (resistências e capacitores) sejam muito próximos dos seus valores nominais. Isso implica que a tolerância na especificação dos valores nominais desses componentes seja a menor possível: 1% para os resistores e 5% para os capacitores. Numericamente, não temos este tipo de preocupação, pois adota-se uma total certeza no valor dos componentes utilizados no modelo. Por outro lado, para os componentes ativos (amplificadores operacionais) devemos requerer que o seu regime de operação seja compatível com as suas especificações, tal que as regras de ouro (e as equações desenvolvidas a partir delas) sejam válidas. O terceiro e mais importante fator está relacionado com a terceira equação do sistema (2.2). No modelo integrado numericamente assumimos uma $g(x)$ dada por (2.3), isto é, estamos assumindo uma função que passa abruptamente do valor zero para um valor $\mu(x - 2.56)$ quando x passa de $2.56V$. Implícito a isso está a suposição de que o diodo, o qual na experiência simula a função linear por partes, é uma chave perfeita, ou seja, não conduz corrente até uma tensão de $0.69V$, sendo que para uma tensão superior a essa ele passa a conduzir uma corrente infinita. Porém, o diodo possui uma curva característica dada pela figura 2.7 e a função que descreve esse tipo de curva possui a seguinte forma [26]:

$$i = a(e^{bV} - 1), \quad (2.24)$$

onde a e b são constantes que dependem do material do qual é feito o diodo; i é a corrente que o diodo conduz quando aplica-se a tensão V . Portanto, para gerar uma melhor concordância entre os diagramas de bifurcação obtidos numérica e experimentalmente precisamos melhorar a descrição do diodo no modelo numérico. O preço a ser pago é um aumento na complexidade da integração numérica. Realizamos uma tenta-

tiva nesse sentido, assumindo uma função do tipo (2.24) onde obtemos os valores de a e b fazendo um ajuste para a curva 2.7. Como podemos ver da figura 2.16, já existe uma melhora expressiva (aparece a janela de período 3), porém, a concordância entre os diagramas ainda não é a ideal, indicando que devem haver outros fatores experimentais, ainda não previstos, responsáveis pela discrepância entre os resultados.

Em resumo, pelo fato de um multiplicador de tensão ter um custo relativamente alto, preferimos usar um diodo que gera um sistema de Rössler modificado, mas que é qualitativamente idêntico ao sistema original considerando valores elevados para R_{11} . Para a implementação numérica do sistema modificado, temos duas opções em relação ao comportamento do diodo no circuito. A opção mais realista leva em conta a curva característica do diodo para descrever a corrente que ele conduz. Com isso o procedimento numérico fica mais elaborado e o resultado obtido ainda não reproduz exatamente o experimental. Assim, em função de não conseguirmos uma concordância quantitativa, optamos pela situação ideal na qual o diodo é considerado uma chave perfeita. Com isso, o resultado obtido, comparativamente ao experimental, é um pouco pior do que no caso anterior, mas o procedimento numérico é muito mais simples e a concordância qualitativa entre os resultados experimental e numérico é bastante satisfatória, principalmente se considerarmos a região em que o valor de R_{11} é alto, onde ocorre a cascata de dobramentos de período. No capítulo 5 restringimo-nos a valores de R_{11} que se encontram na região de boa concordância qualitativa entre resultados numérico e experimental.

3. FUNDAMENTOS DE DINÂMICA NÃO-LINEAR

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos importantes que fazem parte dos fundamentos da teoria de sistemas dinâmicos, os quais iremos utilizar mais adiante. Embora, atualmente, a dinâmica seja um assunto interdisciplinar, originalmente ela era somente um ramo da física. Esse tema teve muitos dos seus fundamentos lançados por Newton, com suas leis de movimento e a gravitação universal, combinando todas para explicar as leis de Kepler para o movimento dos planetas. Especificamente, Newton resolveu o problema de dois corpos, isto é, o problema de calcular o movimento da Terra em torno do Sol, descobrindo a lei da atração gravitacional que é proporcional ao inverso do quadrado da distância entre os dois. Gerações posteriores de físicos e matemáticos tentaram estender os métodos analíticos para o problema de três corpos, mas curiosamente esse problema mostrou-se muito mais difícil de ser resolvido. Após décadas de esforço, chegou-se à conclusão de que o problema de três corpos era essencialmente impossível de ser resolvido, no sentido de obter fórmulas explícitas para os movimentos dos três corpos. Um grande avanço surgiu em torno de 1900 com o trabalho de Poincaré. Ele introduziu um novo ponto de vista que enfatizava questões qualitativas em vez de quantitativas. Por exemplo, ao invés de perguntar pelas posições exatas dos planetas em todos os instantes de tempo, ele perguntava: “O sistema solar é estável para sempre, ou será que alguns planetas eventualmente vão sair das suas órbitas e irão para o espaço infinito? Poincaré desenvolveu um método geométrico poderoso para analisar tais questões dando início ao moderno ramo da dinâmica, com aplicações indo muito além da mecânica celeste.

3.1 Sistemas Dinâmicos

Um sistema dinâmico é chamado determinístico quando a sua evolução é descrita por uma regra bem definida. Ele será, então, caracterizado pela especificação:

- do estado do sistema, que contém toda informação essencial acerca dele;
- da sua dinâmica, que fornece a regra segundo a qual um estado evolui com o passar do tempo.

Uma classe de regras muito importante para a descrição de fenômenos naturais são as equações diferenciais. Mais especificamente, utiliza-se como regra um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, da seguinte forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mu) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n ; \mu \in \mathbb{R} . \quad (3.1)$$

O campo vetorial $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) = [f_1(\mathbf{x}, \mu), f_2(\mathbf{x}, \mu), \dots, f_n(\mathbf{x}, \mu)]^T$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, constitui um conjunto de funções diferenciáveis, o qual descreve a evolução temporal do sistema (3.1)¹. Em geral, e obrigatoriamente para sistemas caóticos, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu)$ é não linear. O vetor n -dimensional $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ é chamado de estado do sistema num certo tempo t e μ é um parâmetro.

Como o tempo não aparece explicitamente em (3.1), esse sistema é chamado de autônomo. Isto não é uma restrição, pois um sistema não autônomo pode sempre ser transformado em autônomo introduzindo-se variáveis adicionais [3]. Também não é restrição o fato de (3.1) ser um sistema de equações de primeira ordem, pois uma equação diferencial de ordem superior pode ser colocada nessa forma. A solução do sistema (3.1), com a condição inicial $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$, é chamada trajetória ou órbita do sistema e é denotada por $\phi_t(\mathbf{x}_0)$, onde $\phi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. O conjunto de todas as trajetórias que o sistema pode assumir é chamado de fluxo. Quando o parâmetro, μ , é variado, podem ocorrer mudanças na estrutura qualitativa das soluções para certos valores desses parâmetros (por exemplo, o sistema que apresentava um ponto fixo passa

¹ T é matriz transposta.

a apresentar um ciclo limite). Estas mudanças são chamadas bifurcações e os valores dos parâmetros nos quais ocorrem as bifurcações são chamados de pontos de bifurcação. Para cada condição inicial, \mathbf{x}_0 , existe uma trajetória no espaço que é originado pelo conjunto de variáveis $\mathbf{x}(t)$ e que é chamado de **espaço de estados** ou **espaço de fase** do sistema (3.1). Como veremos na próxima seção, o espaço de fase de um sistema caótico apresenta propriedades muito interessantes.

3.1.1 Atratores Estranhos

Na mecânica clássica os sistemas dinâmicos são separados em duas grandes classes: sistemas conservativos e sistemas não conservativos. Os sistemas conservativos são aqueles para o qual o teorema de Liouville é aplicável,

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} = 0. \quad (3.2)$$

O que a equação (3.2) nos informa é que o volume do espaço de fase não se contrai e nem se expande, ou ainda, a energia do sistema se conserva. Por outro lado, sistemas não conservativos são aqueles que apresentam atritos internos que dissipam a energia de forma a não conservá-la. Portanto, a esses sistemas o teorema de Liouville não é aplicável. Neste trabalho daremos ênfase a sistemas não conservativos, já que o sistema Rössler é desse tipo.

Nos sistemas dissipativos uma certa região $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ irá se contrair sob a ação do fluxo, pois $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0$. O comportamento assintótico para um sistema n -dimensional tem que recair sobre uma superfície de dimensão menor do que n . Esta superfície é chamada de **atrator**. Um atrator é um subconjunto \mathcal{A} do espaço de fase, atraindo pontos vizinhos de $\mathbf{x}(t)$. Isto significa que $\phi_t(\mathbf{x})$ tende para \mathcal{A} quando $t \rightarrow \infty$. Sistemas não-lineares típicos podem ter mais de um atrator, cada um com diferentes bacias de atração. A bacia de atração de \mathcal{A} é o conjunto dos estados no espaço de fase que se aproximam de \mathcal{A} quando $t \rightarrow \infty$. As condições iniciais determinam em qual atrator o sistema se acomoda. Exemplos simples de atratores são pontos fixos e órbitas periódicas assintoticamente estáveis.

Não há uma definição final e única para caos determinístico. A diferença entre as várias definições encontradas na literatura reside no enfoque que se dá ao problema. Para os nossos propósitos é suficiente considerar que caos determinístico é um movimento irregular, aperiódico, proveniente de equações determinísticas. Na evolução de um sistema dinâmico caótico, o seu movimento é caracterizado pelas seguintes propriedades: é limitado (no sentido que as variáveis dinâmicas não podem assumir valor infinito); é completamente aperiódico e é sensível a pequenas variações nas variáveis dinâmicas. O comportamento caótico é essencialmente devido a essa sensibilidade a pequenas variações que, quando existe, resulta da não-linearidade do sistema dinâmico. Na prática, isto significa que a distância entre as órbitas que se originam de duas condições iniciais infinitesimalmente próximas diverge exponencialmente no tempo. Por outro lado, como o atrator deve permanecer num domínio limitado do espaço de fase, duas trajetórias não podem divergir para sempre. Estas duas condições, aparentemente antagônicas, dão origem ao **atrator estranho**. A divergência de duas trajetórias arbitrárias se dá apenas por pequenas distâncias no espaço de fase e é seguida de um dobramento do atrator. Novas divergências e dobramentos aparecem devido a ação do fluxo, de tal forma que o aspecto final do atrator estranho é o de uma camada dobrada nela mesma muitas vezes e com dimensão fractal (dimensão fracionária) menor que a dimensão do espaço de fase do sistema.

Sistemas do tipo (3.1) com $n \leq 2$ não podem ser caóticos. Para $n = 1$, como as trajetórias não podem se cruzar, o movimento fica restrito a uma linha no espaço de fase que se aproxima ou se afasta de um ponto fixo quando $t \rightarrow \infty$. Para $n = 2$, o teorema de Poincaré-Bendixson [3, 27] diz que uma trajetória limitada pode se aproximar somente de um ponto fixo ou então de um ciclo limite. Pontos fixos e ciclos limites representam movimento regular. Portanto, sistemas do tipo (3.1) podem apresentar comportamento caótico somente para $n \geq 3$. Além disso, o comportamento caótico não ocorre para todos os conjuntos de parâmetros das equações que modelam o sistema dinâmico. Para algum conjunto de parâmetros a solução é regular e para outros é caótica. Existe uma grande classe de sistemas não-lineares que exibem transições para o comportamento

caótico as quais são universais e quantitativamente mensuráveis [28]. Existem várias rotas pelas quais um sistema muda do comportamento regular para o comportamento caótico; cada rota tem propriedades universais. A rota para o caos mais conhecida é o dobramento de período, que é apresentada pelo sistema de Rössler, no qual o período T da solução bifurca-se para certos valores do parâmetro de controle (para período $2T$, para período $4T, \dots$), até que, para um valor crítico do parâmetro correspondendo a infinitos dobramentos, a solução torna-se caótica. A razão da diferença entre valores de parâmetros nos quais as bifurcações ocorrem aproxima-se de um valor universal, $\delta \cong 4,6692$, chamado constante de Feigenbaum [3].

3.1.2 Variedades Invariantes

Uma formulação geométrica da teoria de equações diferenciais conceitua a equação diferencial como um campo vetorial sobre uma variedade. Intuitivamente, uma **variedade** (*manifold*)² l -dimensional em \mathbb{R}^n ($l < n$) pode ser visualizada como uma superfície suave formando um subconjunto de \mathbb{R}^n . Podemos citar como exemplos de variedade unidimensional uma linha reta infinita ou uma circunferência definidas em \mathbb{R}^n , com $n \geq 2$. Exemplos de variedades bi-dimensionais são as superfícies de um cilindro infinito, de uma esfera, de um toro e de um plano real infinito em \mathbb{R}^n , com $n \geq 3$. Já a superfície de um cubo não é uma variedade, pois os vértices do cubo não satisfazem a condição de suavidade. Variedades tri-dimensionais em \mathbb{R}^n , com $n \geq 4$, são mais difíceis de serem visualizadas. O exemplo mais simples é o espaço tri-dimensional, \mathbb{R}^3 , infinito. Uma **variedade invariante** é uma variedade com a condição adicional de que órbitas iniciando sobre ela permaneçam na variedade através do curso de sua evolução dinâmica. Adicionalmente, o conjunto das órbitas as quais se aproximam ou se afastam de uma variedade invariante, \mathcal{M} , assintoticamente no tempo, são também variedades invariantes, as quais são chamadas de variedades estáveis e instáveis, respectivamente, de \mathcal{M} . O conhecimento das variedades invariantes de um sistema dinâmico,

² Para uma descrição completa e cuidadosa, ver referência [29].

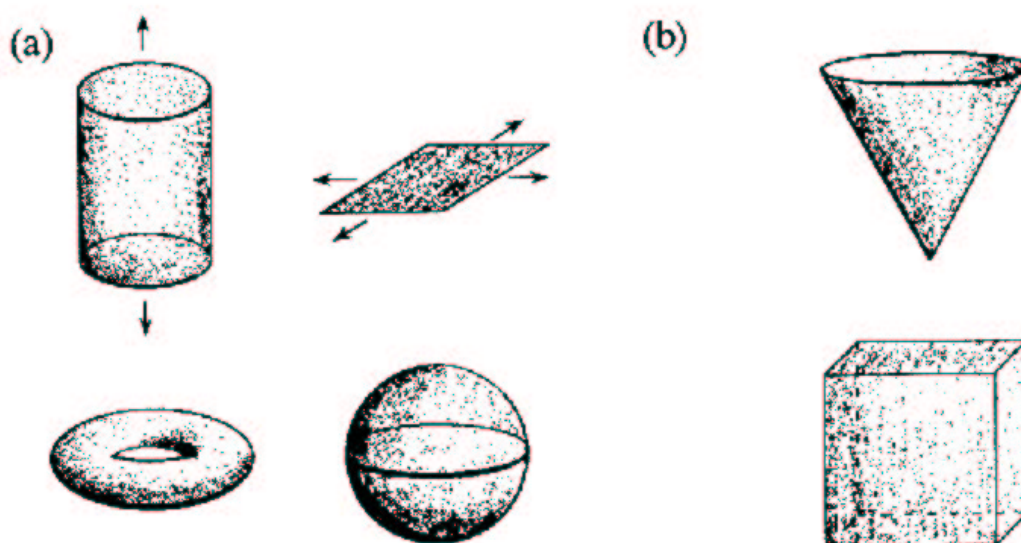


Fig. 3.1: a) possíveis variedades, b) não são variedades.

tanto quanto as interações de suas respectivas variedades estáveis e instáveis é absolutamente vital a fim de obtermos um completo entendimento da dinâmica global. Variedades invariantes também possuem a propriedade de persistirem sob pequenas perturbações [28]. Como veremos mais à frente, estaremos interessados principalmente na variedade de sincronização de um sistema acoplado, que é uma variedade invariante. O conhecimento da estabilidade dessa variedade é de crucial importância na teoria de sincronização.

3.2 Análise de Estabilidade

Nesta seção introduziremos conceitos importantes relacionados à estabilidade de pontos fixos e ciclos limites. Para caracterizarmos estruturas mais complexas, tais como atratores estranhos, introduziremos os expoentes de Lyapunov. No capítulo 5 veremos que a sincronização de um conjunto de sistemas acoplados pode ser analisada estudando-se a estabilidade de um ponto fixo na origem da variedade transversal à variedade de sincronização.

3.2.1 Pontos Fixos

Um ponto fixo³ \mathbf{x}^* do sistema (3.1) é uma solução constante tal que,

$$\left. \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}^*} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0 . \quad (3.3)$$

Estamos interessados na estabilidade do ponto fixo \mathbf{x}^* . Para isso, linearizaremos o sistema (3.1) em torno de \mathbf{x}^* , assumindo um deslocamento infinitesimal em relação a esse ponto, $\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*$. A pergunta que se faz é se o deslocamento irá crescer ou convergir para zero. Para isso, substituímos no sistema (3.1) $\mathbf{x}(t)$ por $\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\eta}(t)$, obtendo:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\eta}) . \quad (3.4)$$

Podemos fazer uma expansão em série de Taylor de $\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\eta})$ em torno de \mathbf{x}^* , como segue:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \boldsymbol{\eta} + O(|\boldsymbol{\eta}^2|) , \quad (3.5)$$

onde $D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ é uma matriz quadrada de ordem n , que é chamada matriz **Jacobiana**. Ela possui os seguintes elementos:

$$[D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)]_{ij} \equiv \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}^*} , \quad i, j = 1, 2, \dots, n . \quad (3.6)$$

Fazendo a análise próxima ao ponto fixo temos $|\boldsymbol{\eta}| \ll 1$, donde podemos manter em (3.5) apenas os termos lineares em $\boldsymbol{\eta}$. Lembrando, ainda, que $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$, obtemos a seguinte aproximação linear para o sistema (3.4):

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \boldsymbol{\eta} . \quad (3.7)$$

A estabilidade é determinada pelos autovalores da matriz Jacobiana, sendo que é conveniente diagonalizar essa matriz. Nesse caso, a solução do sistema (3.7) pode ser escrita em termos dos autovalores λ_i da matriz Jacobiana e dos autovetores correspondentes \mathbf{e}_i , da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{i=1}^n \eta_i(t) \mathbf{e}_i , \quad (3.8)$$

³ Também chamados pontos de equilíbrio, pontos estacionários ou pontos singulares.

onde,

$$\eta_i(t) = \eta_i(0)e^{\lambda_i t} . \quad (3.9)$$

Quando $Df(\mathbf{x}^*)$ não tem autovalores com parte real igual a zero, \mathbf{x}^* é chamado de ponto fixo **hiperbólico** ou **não-degenerado**. Se a parte real de todos os autovalores é maior do que zero, o ponto fixo é instável e, $\eta_i(t)$ cresce exponencialmente para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Por outro lado, se a parte real de todos os autovalores é menor do que zero, o ponto fixo é estável e $|\boldsymbol{\eta}(t)|$ irá convergir para zero. Outra possibilidade é que alguns dos autovalores possuam parte real positiva e outros possuam parte real negativa; então o ponto fixo é chamado de ponto de sela, pois esse ponto possui associado a ele direções de atração ($\lambda_i < 0$) e direções de repulsão ($\lambda_j > 0$). Se algum dos autovalores tem parte real igual a zero, então a estabilidade não pode ser determinada pela linearização e o ponto fixo é chamado de **não-hiperbólico** [27].

Diagonalizar a matriz Jacobiana significa escrever esta na base formada por seus autovetores, que são ortogonais entre si, e cada autovetor vai corresponder a um subespaço do espaço de fase do sistema em questão. Isto significa que uma condição inicial com componentes apenas na direção do autovetor correspondente ao autovalor λ_i permanecerá sempre naquela direção e terá sua evolução determinada por este (para λ_i complexo a direção é generalizada por uma rotação ao redor do ponto fixo com raio determinado pela parte real de λ_i e frequência pela parte imaginária; a dimensão do subespaço correspondente é dois, visto que os λ_i complexos sempre aparecem em pares conjugados) [27, 28]. Devido a esta permanência das órbitas nos subespaços, para todo tempo t , esses são chamados de subespaços invariantes. O conjunto de subespaços invariantes com n_u autovalores satisfazendo $Re(\lambda_u) > 0$ define o subespaço instável $\{E^u\}$ ⁴; o conjunto de autovalores n_s com $Re(\lambda_s) < 0$ define o subespaço estável $\{E^s\}$ ⁵ e finalmente, o conjunto n_c de autovalores com $Re(\lambda_c) = 0$ define o subespaço central, $\{E^c\}$. À medida em que nos afastamos do ponto fixo, a aproximação linear vai perdendo sua validade e termos de ordem superior precisam ser incluídos na expansão (3.4). Com

⁴ u vem do inglês *unstable*

⁵ s vem do inglês *stable*

a introdução de termos não-lineares em (3.4), os subespaços invariantes começam a deformar-se continuamente. A questão é saber se o comportamento do sistema não-linear (3.1) pode ser aproximado pela parte linear próximo ao ponto fixo \mathbf{x}^* . A resposta é dada pelo teorema da variedade estável para pontos fixos [28], o qual diz que se \mathbf{x}^* é um ponto fixo hiperbólico, então existe uma superfície diferenciável, $W_{loc}^u(\mathbf{x}^*)$, tão diferenciável quanto o campo vetorial \mathbf{f} , e de dimensão n_u , tangente a $\{E^u\}$ em \mathbf{x}^* , e uma superfície diferenciável, $W_{loc}^s(\mathbf{x}^*)$, de dimensão n_s , tangente a $\{E^s\}$ em \mathbf{x}^* , com a propriedade que órbitas de pontos em $W_{loc}^u(\mathbf{x}^*)$ aproximam-se assintoticamente de \mathbf{x}^* quando $t \rightarrow -\infty$ e órbitas de pontos em $W_{loc}^s(\mathbf{x}^*)$ aproximam-se assintoticamente de \mathbf{x}^* quando $t \rightarrow \infty$. $W_{loc}^u(\mathbf{x}^*)$ e $W_{loc}^s(\mathbf{x}^*)$ são conhecidas como variedades locais instável e estável, respectivamente, de \mathbf{x}^* (ver figura 3.2). As variedades invariantes $W_{loc}^u(\mathbf{x}^*)$ e $W_{loc}^s(\mathbf{x}^*)$ possuem análogos globais, obtidos usando pontos das variedades locais como condição inicial,

$$W^u(\mathbf{x}^*) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(W_{loc}^u(\mathbf{x}^*)) , \quad (3.10)$$

$$W^s(\mathbf{x}^*) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(W_{loc}^s(\mathbf{x}^*)) . \quad (3.11)$$

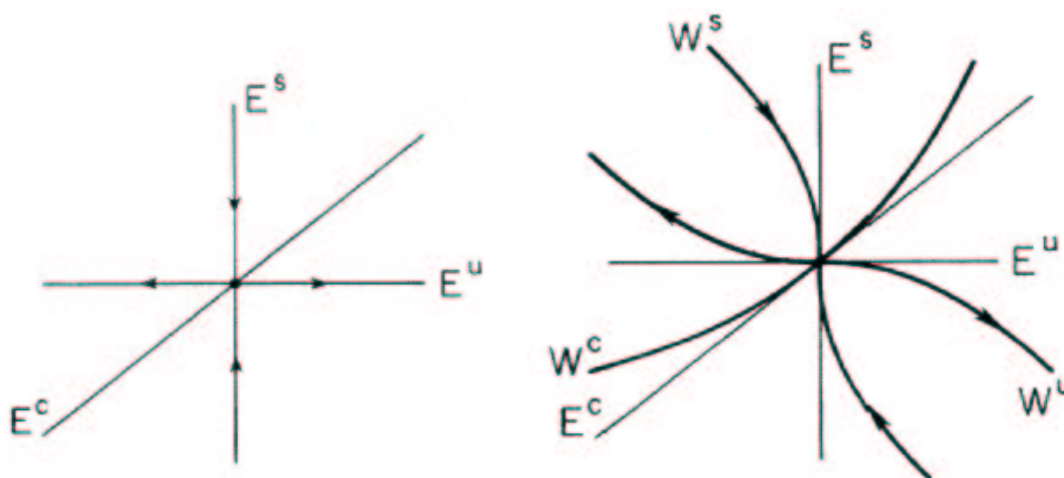
$W^u(\mathbf{x}^*)$ e $W^s(\mathbf{x}^*)$ são as variedades instável e estável, respectivamente, de \mathbf{x}^* .

3.2.2 Ciclos Limites

O ciclo limite é uma oscilação auto-sustentada e isolada, isto é, trajetórias vizinhas não são fechadas; essas trajetórias se aproximam ou se afastam do ciclo limite. Ciclos limites são fenômenos inerentemente não-lineares. Podemos descrever um ciclo limite do sistema (3.1) da seguinte forma:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + T) , \quad (3.12)$$

para todo t e algum período mínimo $T > 0$. Em outras palavras, a trajetória no espaço de fase retorna ao ponto de partida depois de um tempo T . O conjunto atrator



(a) Subespaços invariantes na aproximação linear.

(b) Variedades invariantes nas proximidades de um ponto fixo.

Fig. 3.2:

correspondendo ao ciclo limite é a curva traçada por $\phi_t(\mathbf{x})$ num período. O espectro de Fourier de uma solução periódica consiste de picos discretos na frequência fundamental $\nu = 1/T$ e seus harmônicos $2\nu, 3\nu, \dots$. A amplitude de algum destes componentes pode ser zero. Ciclos limites estáveis são muito importantes fisicamente; eles modelam sistemas que apresentam, como já foi dito, oscilações auto-sustentadas, ou em outras palavras, estes sistemas oscilam sem a necessidade de uma força externa periódica. Alguns exemplos são: a batida do coração; ritmos diários da temperatura do corpo humano e secreção hormonal.

Consideremos, agora, uma órbita periódica do sistema (3.1). Se \mathbf{x}_0 é um ponto da órbita periódica, então é possível construir uma superfície com dimensão $(n - 1)$ que intercepta transversalmente a órbita, denominada seção de Poincaré. Uma vez escolhida a seção, observam-se os pontos de consecutivas intersecções da trajetória com esta, sendo que a seqüência discreta de pontos resultantes origina um mapa, chamado de mapa de Poincaré. Portanto, a seção de Poincaré associa ao fluxo de um sistema dinâmico contínuo no tempo um mapa. Dado um ponto sobre a seção de Poincaré,

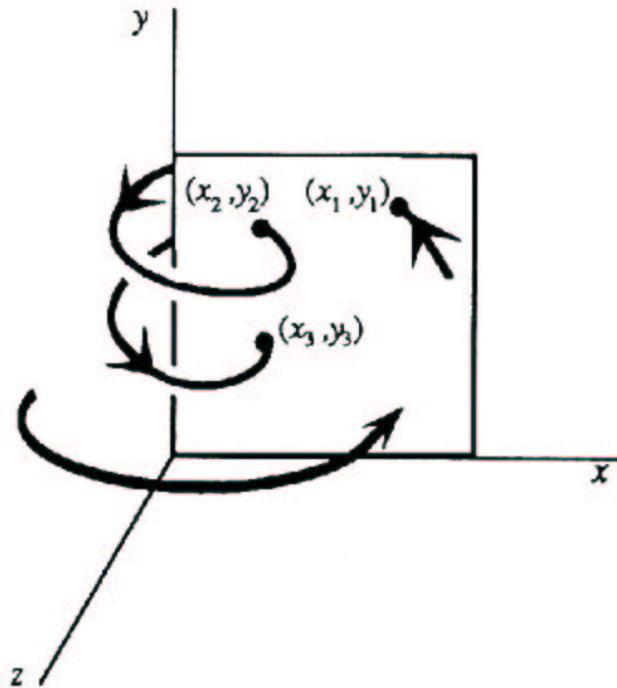


Fig. 3.3: Seção de Poincaré.

podemos nos perguntar qual será o próximo ponto sobre a mesma que a trajetória irá originar a cada vez que ela intercepta a seção no mesmo sentido. Dessa forma estaremos reduzindo a análise da estabilidade de uma órbita periódica à análise da estabilidade de um ponto fixo do mapa gerado por essa órbita. Uma seção de Poincaré para o sistema (3.1) origina o seguinte mapa:

$$\mathbf{x}_{k+1} = P(\mathbf{x}_k), \quad (3.13)$$

onde \mathbf{x}_k representa a k -ésima interseção da trajetória com a seção de Poincaré. Observamos que um órbita periódica corresponde a um ponto fixo no mapa de Poincaré. Então, a análise da estabilidade linear de um ciclo limite corresponde àquela de um ponto fixo do mapa de Poincaré. Seja \mathbf{x}^* um ponto fixo do mapa P , isto é, $P(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$. Então, uma trajetória que parte de \mathbf{x}^* retorna a \mathbf{x}^* após um certo tempo T . Usando procedimento análogo ao da seção 3.2.1, podemos definir um deslocamento infinitesi-

mal, ξ_k , em relação a \mathbf{x}^* , e escrever a seguinte relação (segundo a regra (3.13)):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* + \xi_{k+1} &= P(\mathbf{x}^* + \xi_k) \\ &= P(\mathbf{x}^*) + DP(\mathbf{x}^*) \xi_k + O(|\xi_k^2|), \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde realizamos uma expansão em série de Taylor da função $P(\mathbf{x}^* + \xi_k)$ em torno do ponto fixo \mathbf{x}^* . Assumindo que termos $O(|\xi_k^2|)$ são desprezíveis e lembrando que $\mathbf{x}^* = P(\mathbf{x}^*)$ podemos escrever o mapa linearizado como

$$\xi_{k+1} = DP(\mathbf{x}^*) \xi_k. \quad (3.15)$$

A estabilidade vai ser determinada pelos autovalores λ_j da matriz $DP(\mathbf{x}^*)$: a órbita periódica vai ser estável se e somente se $|\lambda_j| < 1$ para todos os j , onde $j = 1, \dots, n-1$. Os autovalores λ_j são chamados de **multiplicadores de Floquet** da órbita periódica. Em geral, os multiplicadores de Floquet só podem ser obtidos numericamente [28].

3.2.3 Expoentes de Lyapunov

Os dois atratores citados até aqui (ponto fixo e ciclo limite) são exemplos de estruturas muito regulares e suas dimensões tomam valores inteiros. Esses dois tipos de atratores possuem a propriedade de que pontos próximos no espaço de fase permanecem próximos na evolução temporal, isto é, pequenos desvios nas condições iniciais permanecem pequenos quando $t \rightarrow \infty$. Por outro lado, quando a evolução de duas trajetórias, para um determinado conjunto de parâmetros do sistema, inicialmente muito próximas, divergem exponencialmente para $t \rightarrow \infty$, o atrator é chamado estranho ou caótico, isto é, o sistema é caótico. Tais sistemas possuem sensível dependência às condições iniciais. Para quantificar tais sistemas, temos a necessidade de introduzir um método que seja capaz de caracterizá-los. Isto é possível através dos expoentes de Lyapunov.

Expoentes de Lyapunov, tanto de sistemas dissipativos quanto de sistemas conservativos, caracterizam o comportamento global, isto é, o comportamento assintótico

de trajetórias. Eles medem a razão da divergência ou convergência de órbitas inicialmente próximas no espaço de fase. Suponha que um certo tempo transiente tenha passado tal que a trajetória esteja sobre o atrator e $\mathbf{x}(t)$ é um ponto qualquer desse atrator num tempo t . Considere um deslocamento infinitesimal $\delta(0)$. Para sistemas caóticos vale a seguinte propriedade:

$$|\delta(t)| \approx |\delta_0|e^{\lambda t}, \quad (3.16)$$

que pode ser observada qualitativamente na figura (3.4). Consideremos a evolução de

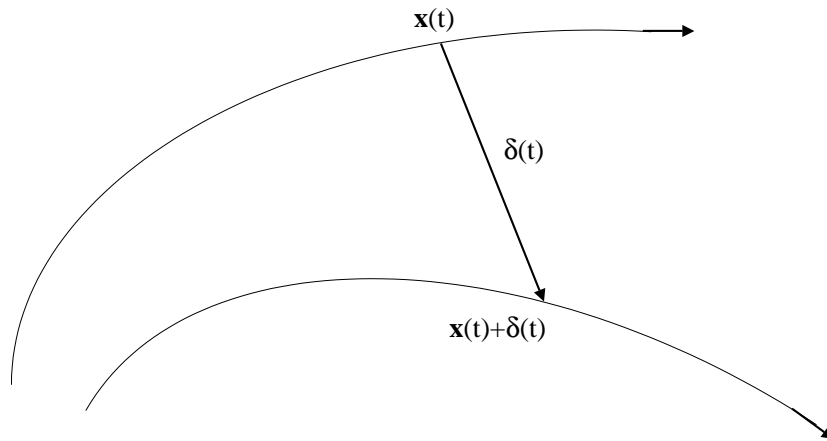


Fig. 3.4: Divergência de órbitas próximas.

uma esfera infinitesimal de condições iniciais definida no espaço de fase do sistema (3.1). Sob a ação do fluxo, essa esfera vai ficar distorcida na forma de um elipsóide. Seja δ_k , $k = 1, \dots, n$, o comprimento do k -ésimo eixo principal do elipsóide. Então, após um tempo t , $\delta_k(t) \approx \delta_k(0)e^{\lambda_k t}$, onde λ_k são os expoentes de Lyapunov (um sistema n -dimensional possui n expoentes de Lyapunov). Para t grande, o diâmetro do elipsóide vai ser controlado pelo λ_k mais positivo, como pode ser visto qualitativamente na figura (3.5). Os expoentes de Lyapunov são números reais e podem ser ordenados em ordem decrescente: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Os expoentes positivos representam as direções de estiramento no espaço de fase; os negativos as direções de contração e os expoentes nulos representam a direção marginal. Se a trajetória não termina em um

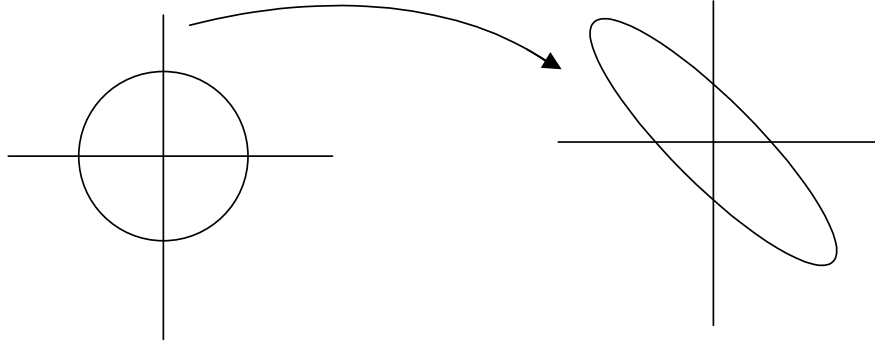


Fig. 3.5: Evolução da esfera de condições iniciais.

ponto fixo, então pelo menos um expoente de Lyapunov é nulo. A razão para isto é que a trajetória evolui com o tempo sem ir para um final, não havendo contração nem divergência ao longo desta. A soma dos n expoentes do espectro de Lyapunov mede a razão da contração do espaço de fase. Mas pela equação (3.2) a razão da contração do espaço de fase também é dada pelo divergente do campo vetorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) . \quad (3.17)$$

Conseqüentemente, para sistemas dissipativos a soma é negativa, refletindo a contração do espaço de fase; para sistemas conservativos a soma é zero.

Um dos algoritmos mais utilizados para o cálculo numérico do espectro de Lyapunov de sistemas de equações diferenciais é o de Wolf *et al.* [30], baseado nas técnicas desenvolvidas independentemente por Shimada e Nagashima [31] e Benettin *et al.* [32]. Ambas basearam-se na técnica desenvolvida por Benettin *et al.* [33] para o cálculo do máximo expoente de Lyapunov. Uma técnica diferente é dada por Eckmann e Ruelle [34].

3.2.3.1 Definição de Expoentes de Lyapunov

A diferença infinitesimal $\boldsymbol{\xi}(t)$ de duas trajetórias vizinhas evolui no tempo de acordo com a equação variacional

$$\dot{\xi}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \xi_k, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.18)$$

onde $\partial f_i / \partial x_k$ são os elementos da matriz Jacobiana do campo vetorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, e que em geral é dependente do tempo. O sistema variacional (3.18) é o termo linear de uma expansão em série de Taylor. Quando a solução é estacionária, isto é, $\dot{\mathbf{x}} = 0$ em (3.1), a matriz Jacobiana correspondente é independente do tempo e seus autovalores podem ser calculados analiticamente. Os expoentes de Lyapunov de um ponto estacionário são iguais a parte real de seus autovalores. No caso geral não existe solução estacionária, e a equação variacional tem que ser resolvida numericamente. A linearização transfere a dinâmica do espaço de fase para o espaço tangente. Seguindo a evolução do vetor tangente, $\boldsymbol{\xi}(t)$, ao longo da trajetória, constata-se que seu comprimento pode crescer ou diminuir a uma razão exponencial. Esta razão determina o expoente de Lyapunov,

$$\lambda \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\boldsymbol{\xi}(t)|, \quad (3.19)$$

onde $|\cdot|$ significa a norma euclidiana,

$$|\boldsymbol{\xi}| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}. \quad (3.20)$$

Qual dos n possíveis expoentes será obtido em (3.19) depende da orientação inicial dos vetores tangentes, $\boldsymbol{\xi}(t=0)$. Contudo, devido ao efeito do estiramento, todos os vetores tangentes irão alinhar-se na direção de maior crescimento e levar ao maior expoente de Lyapunov. Os valores de λ_i poderiam depender do ponto inicial $\mathbf{x}(t=0)$, mas isso foi excluído pelo teorema de Oseledec [35], que justifica o uso de uma direção arbitrária no espaço de fase se existir uma medida ergódica do sistema. Pode-se esperar (com probabilidade 1) que duas condições iniciais escolhidas aleatoriamente, irão divergir exponencialmente a uma razão dada pelo maior expoente de Lyapunov.

3.2.3.2 Cálculo Numérico do Máximo Expoente de Lyapunov

O algoritmo dado por Wolf *et al.* [30] para o cálculo do máximo expoente de Lyapunov consiste em integrar o sistema de equações (3.1) simultaneamente ao seu sistema variacional (3.18). As condições iniciais do sistema variacional, $(\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0)$, onde o índice superior refere-se ao tempo inicial $t = 0$, são escolhidas aleatoriamente. Para obter as condições iniciais do sistema variacional usa-se uma rotina que gera números aleatórios entre 0 e 1. O valor de λ_{max} está associado à direção de maior divergência de duas órbitas inicialmente próximas no espaço de fase. Isto implica que os vetores tangentes podem tornar-se muito grandes, ocasionando problemas na representação dos números pelo computador (*overflow*). Contorna-se este problema renormalizando os vetores ξ_i a cada passo de integração⁶, usando o método de Gram-Schmidt [30]:

$$\xi'_i = \frac{\xi_i}{|\xi|}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.21)$$

O máximo expoente de Lyapunov é dado por:

$$\lambda_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\xi'|, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.22)$$

O valor de t_∞ em (3.22) é tal que o sistema convergiu para um atrator e isso acontece quando λ_{max} converge para um valor constante. Da definição de expoentes de Lyapunov poderia parecer que uma determinada trajetória deveria ser seguida, mas na realidade estes expoentes são obtidos a partir de uma média sobre o tempo e, pelo princípio da ergodicidade, a definição pode também ser formulada como uma média sobre todos os pontos no atrator. Então, à medida que se avalia a expansão entre trajetórias próximas, as mudanças de trajetória causadas pelos erros locais não afetam o algoritmo de cálculo do máximo expoente de Lyapunov.

⁶ A frequência de renormalização não é crítica [30], podendo ser iniciada depois de vários passos de integração ou a cada k passos de integração.

4. SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

Um sistema caótico possui comportamento não previsível para longos tempos. Apesar de um sistema caótico possuir um padrão no espaço de fase (um atrator), determinar exatamente onde esse sistema se encontra sobre o atrator num tempo futuro distante, dado sua posição no passado, é uma questão que se torna exponencialmente difícil à medida que o tempo passa. Uma questão interessante que se coloca é a seguinte: será possível forçarmos dois ou mais sistemas caóticos a seguirem a mesma trajetória no atrator? Isto é, será possível sincronizar a dinâmica de dois ou mais sistemas caóticos? A resposta a essa pergunta é sim, como veremos a seguir, porém, antes falarmos sobre controle de caos que, de certa forma, lançou as bases para o fenômeno da sincronização de sistemas caóticos.

4.1 Controle de Caos

Em 1990 Ott, Grebogi e Yorke reportaram que caos podia ser controlado [13]. A idéia central de controlar o caos é, aproveitando a extrema sensibilidade dos sistemas caóticos a pequenas variações, desenvolver um método perturbativo que, alterando ligeiramente o sistema, possa provocar uma grande mudança no seu comportamento. Inicialmente executava-se a perturbação num parâmetro do sistema, depois mostrou-se que também uma perturbação em uma das variáveis do sistema era capaz de controlar o sistema. A equivalência na forma de controlar o sistema por um dos parâmetros ou através de uma das variáveis foi por nós demonstrada num trabalho anterior [36],

e foi ilustrado por um dos orientadores desta dissertação num outro trabalho [37] na qual se atesta o controle de caos numa descarga elétrica luminosa e, de forma pioneira, como a alteração da amplitude da perturbação pode induzir a supressão ou excitação do comportamento caótico, obtendo-se verdadeiros diagramas de bifurcação.

Para exemplificar o método de controle de caos através de uma das variáveis do sistema, descreveremos uma montagem usando o circuito de Rössler, onde introduzimos uma perturbação na variável z . A montagem experimental está esquematizada na figura 4.1. A perturbação consiste de um pulso que possui uma forma retangular,

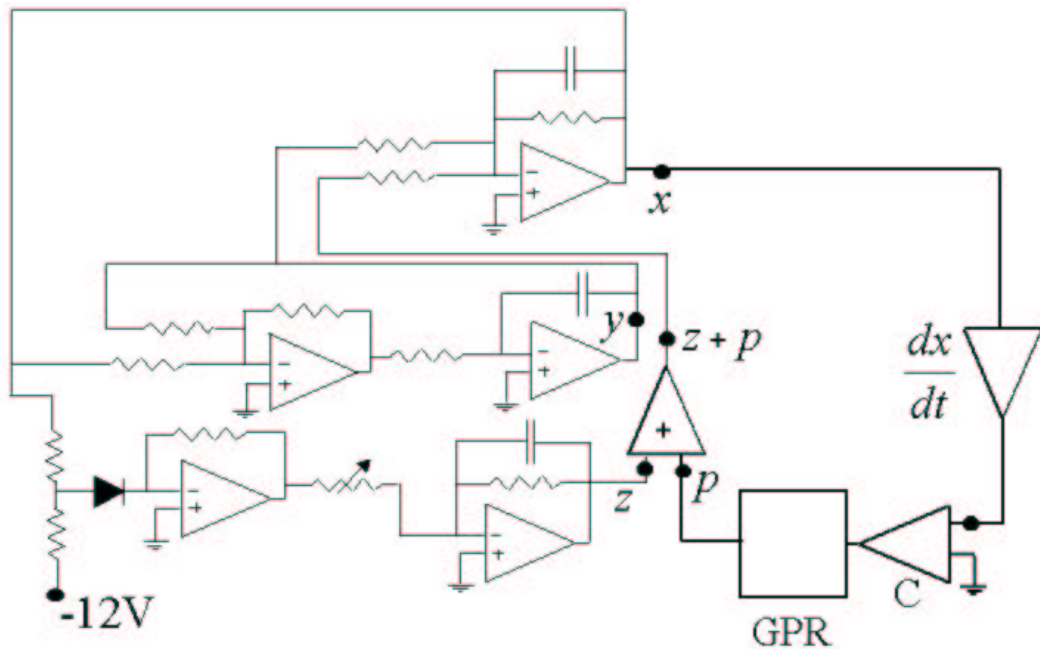


Fig. 4.1: Circuito de Rössler com o circuito que gera o sinal de controle. GPR = Gerador de Pulsos Retangulares; C = Comparador; dx/dt = Diferenciador.

de curta duração e que é somado à variável z sempre que a variável x passa por um máximo. Para detectar o máximo em x , toma-se a derivada desse sinal, a qual é, então, comparada com o valor zero. A fim de evitar os mínimos, o comparador leva em conta quando a derivada passa do valor zero para um valor positivo. Assim, nessas condições x está num máximo, e o comparador (C) aciona o gerador de pulsos (GPR),

que irá gerar o pulso retangular que, por sua vez, é adicionado ao sinal z através de um somador. A figura 4.2 mostra parte do diagrama de bifurcação do sistema de Rössler, obtido a partir da variável x . A seta indica a região de operação do circuito (comportamento caótico) no momento da aplicação do controle. Na figura 4.3 observa-

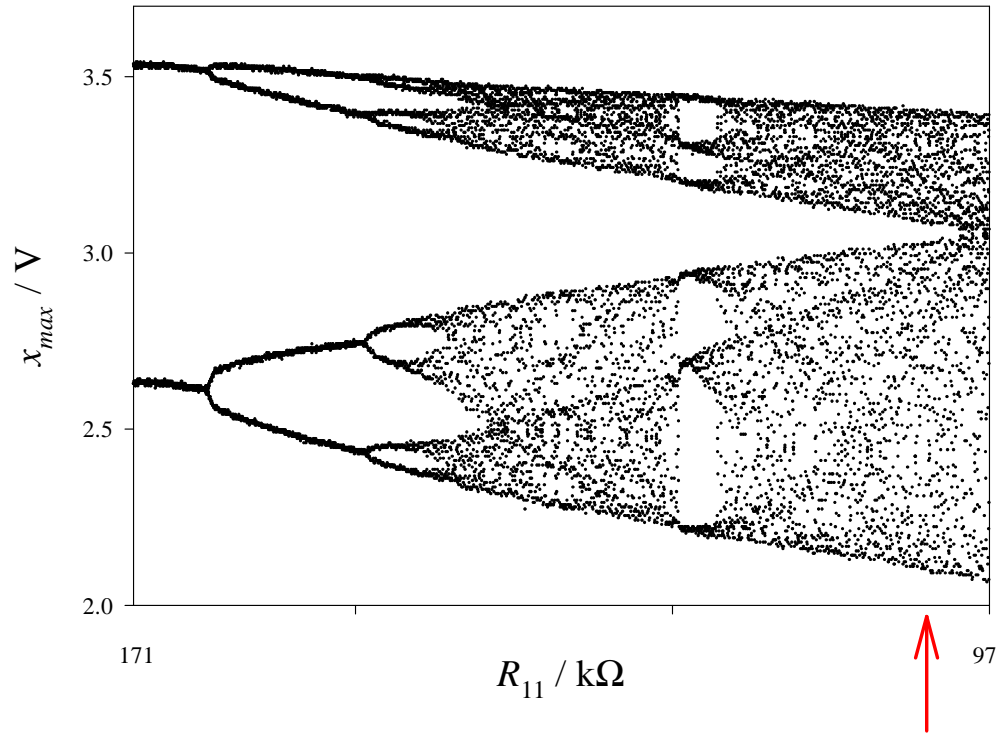


Fig. 4.2: Diagrama de bifurcação indicando a região de operação do circuito. No eixo vertical estão os valores de máximo do sinal x e no eixo horizontal estão os valores da resistência R_{11} . Os valores das resistências usadas são: $R_5 = 13.3 \text{ k}\Omega$, $R_6 = 12.35 \text{ k}\Omega$ e $R_7 = 95 \text{ k}\Omega$; os outros valores são dados pela tabela 2.2.

se o diagrama de bifurcação induzido pelo controle. À medida que a amplitude do pulso de controle aumenta, o comportamento do sistema passa do regime totalmente caótico para um regime de completa periodicidade. No momento em que a amplitude da onda retangular é zerada, o circuito imediatamente retorna ao ponto de operação inicial. Pode-se acompanhar o efeito do controle no espaço de fase do sistema, observando a

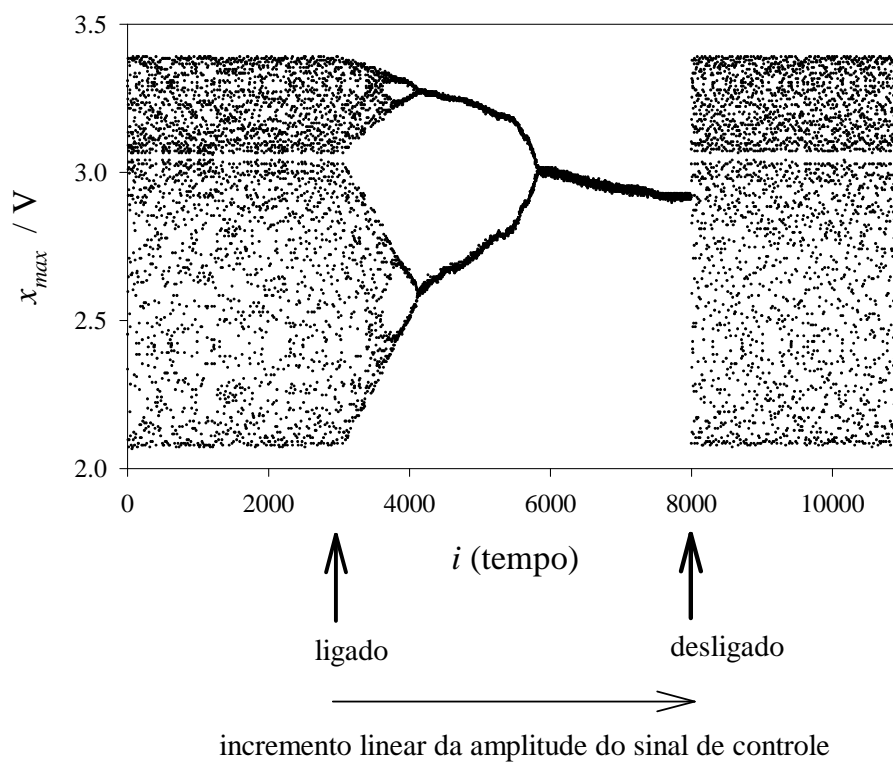


Fig. 4.3: Diagrama de bifurcação induzido pelo controle.

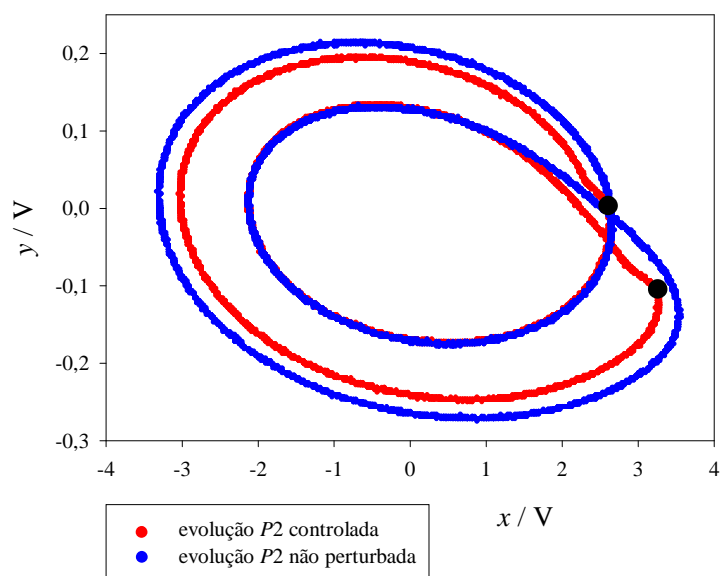


Fig. 4.4: Projeção bidimensional do espaço de fase do sistema de Rössler.

figura 4.4, que mostra uma projeção bidimensional do espaço de fase do sistema de Rössler. A trajetória exterior (azul) é uma órbita de período 2 (a notação usada é P2) que o sistema apresenta para $R_{11} = 171 k\Omega$ (quando o controle não é aplicado). A trajetória interior (vermelho) é uma órbita de período 2 gerada pela aplicação do controle. Nas posições assinaladas pelos pontos escuros, está atuando o controle. Ele age sobre a dinâmica do sistema de tal forma a forçá-la a seguir uma das órbitas periódicas instáveis imersas no atrator caótico. Toda vez que a trajetória se aproxima de um máximo da variável x , aplica-se o sinal de controle, e este a realimenta, forçando-a, por exemplo, a seguir a órbita de período 2.

4.2 Sincronização de Osciladores Caóticos Idênticos

Para introduzirmos os conceitos de sincronização idêntica, variedade de sincronização e variedade transversal, descreveremos a seguir uma montagem de dois sistemas de Rössler acoplados, que executamos na fase inicial deste trabalho. O sistema acoplado é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -\alpha(\Gamma x_1 + \beta y_1 + \lambda z_1) \\ \frac{dy_1}{dt} &= \alpha(x_1 + \gamma y_1) \\ \frac{dz_1}{dt} &= \delta\alpha(g(x_1) - z_1),\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_2}{dt} &= -\alpha(\Gamma(x_2 - c(x_1 - x_2)) + \beta y_2 + \lambda z_2) \\ \frac{dy_2}{dt} &= \alpha(x_2 + \gamma y_2) \\ \frac{dz_2}{dt} &= \delta\alpha(g(x_2) - z_2).\end{aligned}\tag{4.2}$$

A variável x_2 da primeira equação do sistema (4.2) é alterada da seguinte forma:

$$x_2 \rightarrow x_2 - c(x_1 - x_2),$$

onde c é o parâmetro de acoplamento e seu valor está entre 0 e 1. As constantes são dadas em termos dos componentes dos circuitos, como foi visto no capítulo 2 (ver tabela 2.2).

4.2.1 Definição de Sincronização Idêntica

O sistema composto (4.1)-(4.2) pode ser classificado como um sistema do tipo mestre-escravo [14, 38], onde o sistema 1 é o mestre, que dirige o sistema 2 que é chamado de escravo. O acoplamento é unidirecional, já que somente o sistema 2 recebe influência do sistema 1, sendo que o inverso não ocorre. Partindo de condições iniciais arbitrárias, existe um intervalo para o parâmetro de acoplamento tal que o comportamento do sistema 2 converge para aquele do sistema 1. Podemos ver isso plotando x_1 (x_{mestre}) contra x_2 ($x_{escravo}$), para dois valores diferentes do parâmetro de acoplamento c . Para $c = 0.1$, os dois sistemas não estão sincronizados e o espaço de fase do

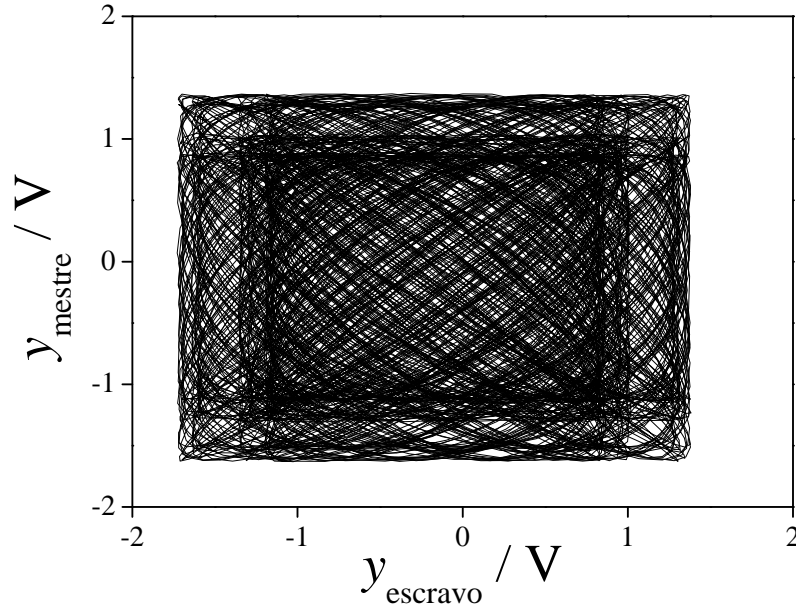


Fig. 4.5: Dessincronizados: $c = 0.1$.

sistema composto possui 6 dimensões; a figura 4.5 mostra uma projeção bidimensional deste. A sincronização surge para $c = 1.5$, ocorrendo uma redução do espaço de fase

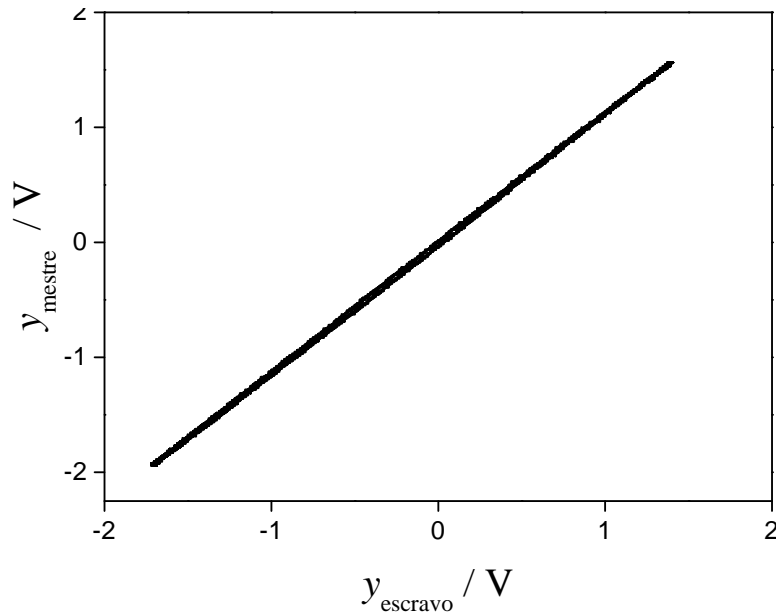


Fig. 4.6: Sincronizados: $c = 1.5$.

do sistema composto para 3 dimensões. Podemos ver isto na figura 4.6 que apresenta novamente uma projeção bidimensional. Nota-se que a evolução dinâmica do estado sincronizado se dá sobre uma linha nesta projeção. Podemos definir **sincronização idêntica** da seguinte forma. Seja

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) , \quad (4.3)$$

o campo vetorial que descreve o sistema (4.1) e

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) , \quad (4.4)$$

o campo vetorial que descreve o sistema (4.2). Se existir um conjunto de condições iniciais dado por uma região \mathcal{B} no espaço de fase do sistema composto, isto é, para $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ tal que para $\forall(\mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}_{20}) \in \mathcal{B}$ tenhamos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)| = 0 , \quad (4.5)$$

então, os sistemas acoplados (4.3) e (4.4) estarão sincronizados identicamente. A sincronização idêntica surge quando a órbita do sistema mestre e a órbita do sistema

escravo se aproximam assintoticamente e se fundem numa única órbita, que irá descrever a evolução do sistema composto sincronizado. Na prática, devido ao ruído e a pequenas diferenças inerentes na montagem experimental, o critério para sincronização idêntica é dado por $|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)| \leq \zeta$, para um valor pequeno de ζ . O espaço de fase do sistema composto possui 6 dimensões e é formado pelas coordenadas x_1, y_1, z_1, x_2, y_2 e z_2 . Porém, quando os sistemas estão sincronizados, a evolução se dá sobre uma superfície (variedade) de dimensão menor, definida pelas igualdades: $x_2 = x_1, y_2 = y_1$ e $z_2 = z_1$. Essa superfície recebe o nome de **variedade de sincronização** [38]. Podemos observar uma projeção da variedade de sincronização em três dimensões na figura (4.7).

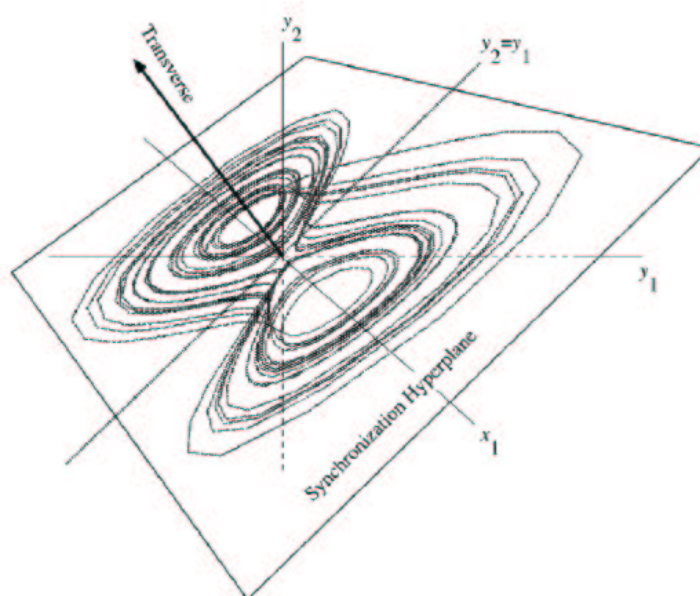


Fig. 4.7: Projeção do espaço de 6 dimensões nas 3 dimensões, $\{x_1, y_1, y_2\}$. A variedade de sincronização é a superfície definida pela igualdade $y_1 = y_2$. Adaptado de Pecora *et. al.* [38].

4.2.2 Estabilidade: a Variedade Transversal

Continuando a análise do nosso exemplo, chegamos à questão da estabilidade da variedade de sincronização. A propriedade de um sistema acoplado possuir uma variedade de sincronização é independente do fato de o sistema convergir ou divergir para essa variedade durante a sua evolução [38]. Para fazermos a análise da estabilidade introduziremos a seguinte transformação de coordenadas: $x_{\perp} = x_1 - x_2$; $x_{\parallel} = x_1 + x_2$; $y_{\perp} = y_1 - y_2$; $y_{\parallel} = y_1 + y_2$; $z_{\perp} = z_1 - z_2$; $z_{\parallel} = z_1 + z_2$. O que fizemos foi passar para um sistema de coordenadas onde três coordenadas estão na variedade de sincronização, $\{x_{\parallel}, y_{\parallel}, z_{\parallel}\}$, e três delas são coordenadas transversais à variedade de sincronização, $\{x_{\perp}, y_{\perp}, z_{\perp}\}$ (essas coordenadas somente são bem definidas próximo à variedade de sincronização). O último conjunto de coordenadas define a **variedade transversal**. Podemos observar essa decomposição esquematicamente na figura (4.8). A estabilidade

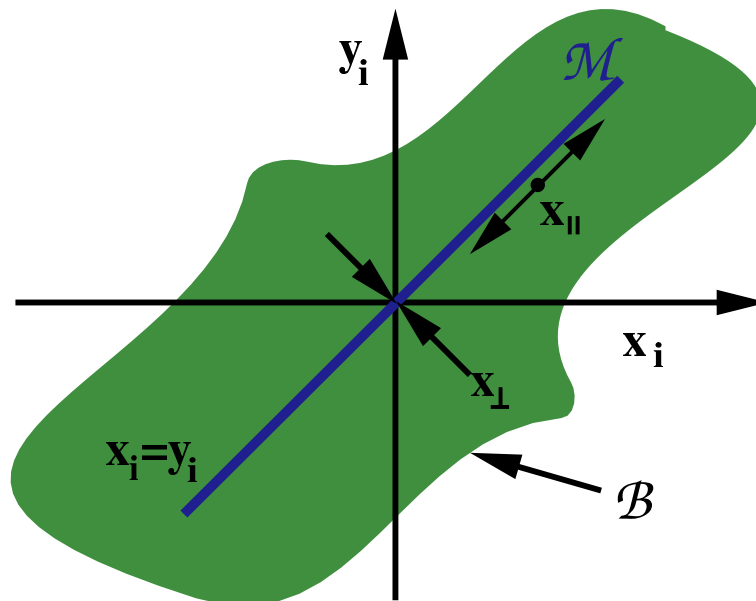


Fig. 4.8: Diagrama esquemático das variedades de sincronização e transversal. Adaptado de L. Junge [39].

é garantida quando x_{\perp} , y_{\perp} e z_{\perp} tendem a zero para $t \rightarrow \infty$. O ponto $\{0, 0, 0\}$, na

variedade transversal, deve ser um ponto fixo assintoticamente estável. Aplicando a transformação de coordenadas proposta, temos que:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_\perp \\ \dot{y}_\perp \\ \dot{z}_\perp \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1). \quad (4.6)$$

Tomando o lado direito dos sistemas (4.1) e (4.2), obtemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_\perp \\ \dot{y}_\perp \\ \dot{z}_\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha\Gamma(1+c) & -\alpha\beta & -\alpha\lambda \\ \alpha & \alpha\gamma & 0 \\ \delta\alpha\phi & 0 & -\delta\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\perp \\ y_\perp \\ z_\perp \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

onde,

$$\phi = \begin{cases} 0 & \text{se } x_2 < 2.56 \\ \mu & \text{se } x_2 \geq 2.56. \end{cases} \quad (4.8)$$

Portanto, para que a sincronização ocorra, o máximo expoente de Lyapunov, obtido da forma usual¹ a partir do sistema (4.7), deve ser negativo. Por outro lado, tomando as equações variacionais do sistema 2 (escravo), obtém-se um conjunto de equações idêntico ao sistema (4.7), implicando por sua vez, que o sistema escravo apresente o máximo expoente de Lyapunov negativo. Isto se torna evidente quando atenta-se para o fato de que o sistema 1 (mestre) está dirigindo a dinâmica do sistema 2 (escravo), e para que a sincronização ocorra entre os dois sistemas, o comportamento dinâmico do sistema escravo deve convergir para o comportamento dinâmico do sistema mestre. Mas isto só é possível se o máximo expoente de Lyapunov do sistema escravo for negativo. Estes expoentes certamente dependerão de x_1 e, portanto, são chamados de **expoentes de Lyapunov condicionais** [14]. Porém, a condição de que o máximo expoente de Lyapunov condicional seja negativo não é suficiente para garantir sincronização de alta qualidade. Novos critérios tem sido propostos para garantir tal sincronização [40, 41]. Mesmo o máximo expoente de Lyapunov condicional sendo negativo, podem ocorrer eventos de completa dessincronização. Esses eventos

¹ ver seção 3.2.3.2.

são chamados de “estouros” (*bursts*). O comportamento associado a esses estouros é chamado de intermitência *on-off* e foi descrito pela primeira vez por N. Platt, E. A. Spiegel e C. Tresser [42]. A caracterização do fenômeno de intermitência *on-off* mostrou uma rica estrutura de leis de potência que são bastante gerais e independentes do tipo de sistema [43–45]. A explicação que se dá para o aparecimento dos eventos de dessincronização é que podem existir conjuntos invariantes no atrator caótico (por exemplo: pontos fixos ou órbitas periódicas) que possuem um expoente de Lyapunov transverso positivo, mesmo que o máximo expoente de Lyapunov seja negativo. À medida que as trajetórias se aproximam de algum desses conjuntos invariantes, elas são fortemente repelidas da variedade de sincronização, originando o evento de dessincronização. Evidências experimentais são dadas nas referências [46–48].

4.2.3 Formas de Acoplamento

Na seção anterior apresentamos um exemplo de acoplamento unidirecional. Obviamente essa não é única forma de acoplamento, muito pelo contrário, existem inúmeras formas de realizarmos o acoplamento entre uma ou mais equações que definem a dinâmica de determinado sistema composto. Porém, muitas delas não possuem interesse prático. Basicamente podemos subdividir as formas de acoplamento em duas grandes classes: acoplamento unidirecional e acoplamento bidirecional. No acopla-

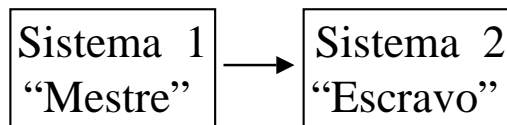


Fig. 4.9: Acoplamento unidirecional.

mento unidirecional, somente um dos sistemas recebe a influência do outro. A dinâmica do sistema escravo é alterada pela influência do sistema mestre, porém, o inverso não ocorre, isto é, o sistema mestre evolui de forma isolada. Já no acoplamento bidirecional ocorre um intercâmbio de informações entre os vários sistemas acoplados. Quanto à

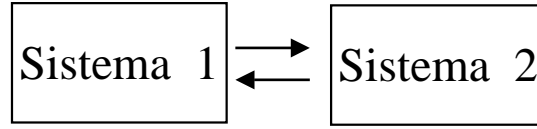


Fig. 4.10: Acoplamento bidirecional.

forma como é realizado o acoplamento nas equações que descrevem o sistema dinâmico, também podemos distinguir dois casos principais: acoplamento na variável e acoplamento na equação. Lembramos que um sistema dinâmico pode ser genericamente representado pela equação vetorial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) , \quad (4.9)$$

onde \mathbf{f} expressa a regra dinâmica; \mathbf{x} , as variáveis dinâmicas e μ , as variáveis estáticas, incluindo o parâmetro de controle. Seja $\mathbf{h}(\mathbf{z})$ a função que irá realizar o acoplamento. Então, o acoplamento na equação é definido por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) + \mathbf{h}(\mathbf{z}) . \quad (4.10)$$

O acoplamento nas variáveis define-se como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{z}), \mu) . \quad (4.11)$$

Na literatura especializada os estudos relacionados à sincronização de caos empregam em sua grande maioria o acoplamento na equação. Pouca ou nenhuma ênfase é dada ao acoplamento na variável. Por considerarmos que há muitas situações em que, do ponto de vista prático, esse último acoplamento é mais interessante do que o anterior, queremos abordar primordialmente o acoplamento na variável neste trabalho. Sem acoplamento, isto é, quando $\mathbf{h}(\mathbf{z}) = 0$, a evolução dinâmica de cada oscilador ocorre de forma independente no seu espaço de fase, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, onde n é a dimensão do sistema. Por último, vamos definir sistemas idênticos. Sejam dois sistemas dinâmicos, um deles descrito por (4.9) e o outro por:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}, \gamma) , \quad (4.12)$$

com $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Estes sistemas são idênticos se forem descritos por campos vetoriais idênticos, isto é, $\mathbf{f} \equiv \mathbf{g}$. Experimentalmente, essa definição não pode ser seguida à risca, pois sempre existem pequenas diferenças na implementação física do modelo. Por exemplo, na montagem dos circuitos que modelam o sistema de Rössler descrito no capítulo 2, as melhores resistências que conseguimos possuem um erro de 1% no seu valor nominal. Realizando o acoplamento entre esses dois sistemas, obteremos um novo sistema composto que terá sua dinâmica descrita no espaço de fase, $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+n}$. Portanto, o acoplamento de vários sistemas acarreta um aumento significativo da dimensão do espaço de fase no qual irá evoluir a dinâmica do sistema composto, tornando difícil a análise, por exemplo, da estabilidade dos seus estados de equilíbrio. Para isso, como veremos no próximo capítulo, introduziremos técnicas de transformação de coordenadas que permitem reduzir a dimensão do espaço de fase a ser analisado.

Nesta seção, apresentamos um exemplo onde utilizamos o acoplamento na variável, do tipo unidirecional. Porém, nosso tema principal está focado numa montagem bidirecional do tipo primeiros vizinhos. Nesse caso, cada circuito está conectado a seus dois primeiros vizinhos numa cadeia fechada.

4.3 Sincronização de Fase

A sincronização de sinais periódicos é um fenômeno bem conhecido na física, engenharia e outras disciplinas da área científica. Mesmo sistemas caóticos podem ser conectados de uma forma tal que suas oscilações caóticas sejam sincronizadas. A maior parte dos estudos tratam da sincronização de dois sistemas idênticos, mas tipos mais sofisticados de sincronização generalizada têm sido investigados, os quais, no limite de $t \rightarrow \infty$ levam a uma relação funcional entre os estados dos sistemas acoplados [20, 21]. Uma generalização importante é a sincronização de fase. Inicialmente a sincronização era considerada como a completa coincidência dos estados individuais dos sistemas. Isto significa que dois osciladores estão sincronizados quando eles oscilam em fase e suas

amplitudes são as mesmas, o que recebe o nome de sincronização idêntica ou ainda de amplitude. Mas de forma geral, pode-se considerar um sistema sincronizado com outro quando existe uma relação entre as suas fases, tal que $n\phi_1 - m\phi_2 = \text{const}$, (m, n são números inteiros e const é uma constante arbitrária), sendo que as amplitudes podem ser bem diferentes. Neste caso temos a sincronização de fase [18, 19, 49–51]. Para investigar essa forma de sincronização, uma variável de fase, bem definida, deve ser identificada em ambos os sistemas acoplados. Isso pode ser feito heurísticamente para atratores estranhos que espiralam em torno de algum ponto em particular (ou buraco) numa projeção bidimensional, como no caso do atrator de Rössler. Mas de modo geral, é difícil obtermos uma variável de fase bem definida para sistemas caóticos.

4.3.1 A Definição de Fase em Sistemas Caóticos

A fase é a variável que corresponde ao movimento ao longo do ciclo limite (órbita periódica), isto é, ao longo da direção na qual não ocorre contração e nem expansão do espaço de fase [50]. Portanto, queremos definir a fase como sendo a variável que corresponde ao expoente de Lyapunov nulo para um fluxo dinâmico contínuo com comportamento caótico. A seguir apresentamos três possíveis definições para a fase de um sistema caótico.

1. Seja um sinal representado pela variável $s(t)$. Temos que determinar a amplitude e a fase de tal sinal. Podemos seguir o método introduzido por Gabor [52], que usa o conceito de sinal analítico e é baseado na transformada de Hilbert. O sinal analítico $\psi(t)$ é uma função complexa do tempo definida por

$$\psi(t) = s(t) + i\tilde{s}(t) = A(t)e^{i\phi_H(t)}, \quad (4.13)$$

onde a função $\tilde{s}(t)$ é a transformada de Hilbert de $s(t)$,

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (4.14)$$

V.P. significa Valor Principal de Cauchy. A fase instantânea, $\phi_H(t)$, e a amplitude, $A(t)$, são definidas univocamente por (4.13).

2. Muitas vezes é possível encontrar uma projeção do atrator em algum plano que lembra um ciclo limite, isto é, a trajetória gira em torno da origem (ou outro ponto que pode ser tomado como sendo a origem). Isto significa que é possível tomarmos de uma forma adequada uma certa seção de Poincaré. Com o mapa gerado pela seção de Poincaré, podemos definir a fase (atribuindo a cada volta completa um aumento de 2π) da seguinte forma:

$$\phi_M = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad (4.15)$$

com $t_n \leq t < t_{n+1}$ e t_n é o tempo da n -ésima interseção com a superfície secante. Note que para oscilações periódicas, esta definição recai na forma usual da definição de fase. Definida da forma acima, a fase corresponde a uma função do tempo linear por partes. Fica claro que deslocamentos na fase não divergem nem convergem no tempo, portanto, isto corresponde à direção à qual está associada o expoente de Lyapunov nulo. Porém, existe uma ambigüidade na escolha da seção de Poincaré a ser utilizada, e conseqüentemente, essa ambigüidade se reflete na definição da fase. Apesar disso, essa definição é particularmente interessante quando trabalhamos com o sistema de Rössler. O atrator desse sistema possui uma projeção no plano (x, y) que é algo próximo de um círculo no qual o raio oscila aleatoriamente em torno de um certo valor.

3. Se a projeção, que foi mencionada acima, for encontrada, podemos introduzir a fase como sendo o ângulo entre uma certa direção de referência fixa (na projeção) e o vetor traçado desde a origem até o ponto para o qual queremos determinar a fase, isto é,

$$\phi_P = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (4.16)$$

Segundo Pikovsky *et. al.* [50], para o sistema de Rössler as três definições de fase anteriormente apresentadas dão resultados equivalentes. Por ser mais conveniente, para o nosso trabalho adotamos a definição 2.

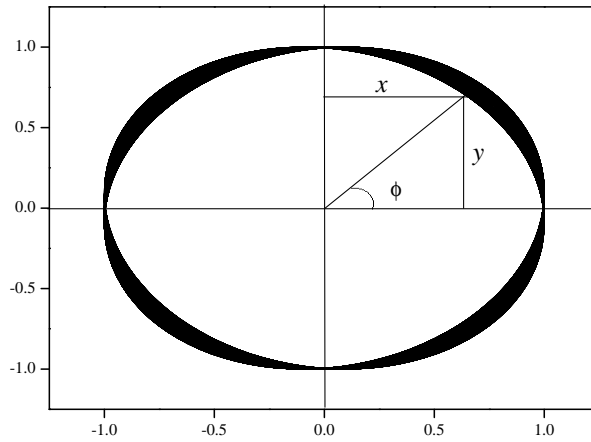
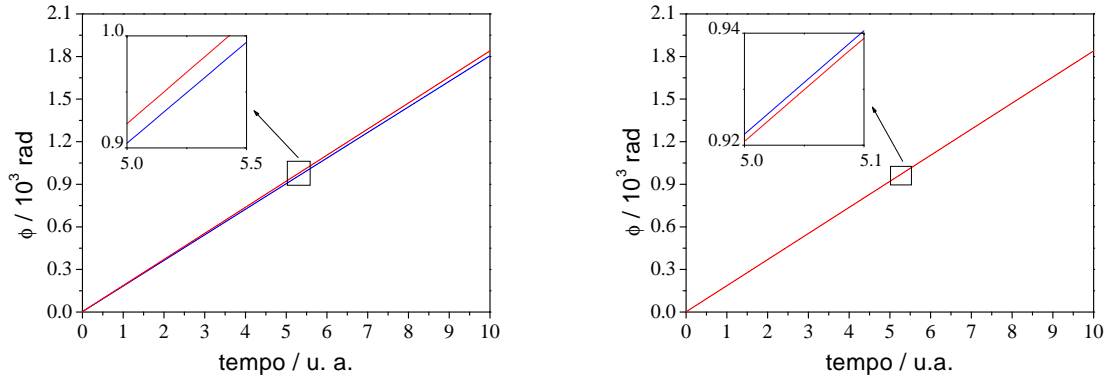


Fig. 4.11: Exemplo de um atrator hipotético que possui uma projeção bidimensional na qual pode-se obter a fase pela relação $\phi = \arctan(y/x)$.

4.3.2 Obtenção da Fase Experimentalmente

Exemplificaremos a sincronização de fase para a montagem mestre-escravo, que foi descrita na seção 4.2. A partir da série temporal de uma das variáveis do sistema, por exemplo y , digitalizamos o sinal usando um osciloscópio Lecroy 9310L, e identificamos os máximos usando um computador. A partir desses dados, podemos obter a fase através da equação (4.15). Para $c = 0.08$, os circuitos estão dessincronizados, e portanto, não se espera nenhuma correlação nas fases dos dois circuitos. A figura 4.12(a) mostra a fase do circuito escravo (vermelho) e do circuito mestre (azul). O quadrado menor na figura 4.12(a) evidencia o fato de que as duas retas não são paralelas. Na figura 4.13(a), plotamos a diferença entre as duas fases, que cresce à medida que o tempo passa, significando que as fases estão descorrelacionadas. Porém, ajustando o parâmetro de acoplamento para um valor em torno de $c = 0.375$, obtemos a figura 4.12(b). As retas que representam a evolução temporal das fases dos dois circuitos, agora, são paralelas e muito próximas. Podemos observar que elas não estão superpostas na ampliação (caixa menor da figura 4.12(b)). A diferença entre as fases está plotada na figura 4.13(b) e notamos que ela é constante ao longo do tempo. A oscilação em torno do valor fixo $\Delta\phi \approx 5.45$ rad é devida ao ruído experimental. Nas

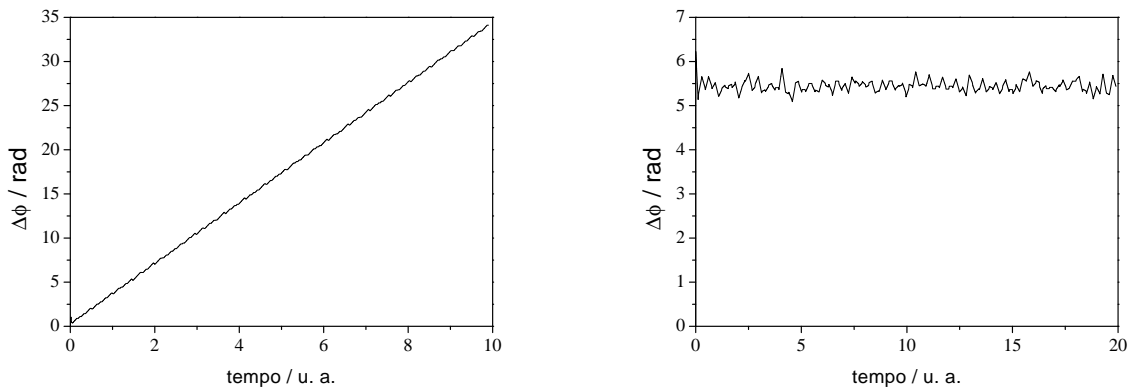


(a) O traço vermelho corresponde ao circuito escravo e o azul ao circuito mestre. Parâmetro de acoplamento $c = 0.08$.

(b) Idem (a) com parâmetro de acoplamento $c = 0.375$.

Fig. 4.12: Fase obtida experimentalmente para dois circuitos de Rössler acoplados.

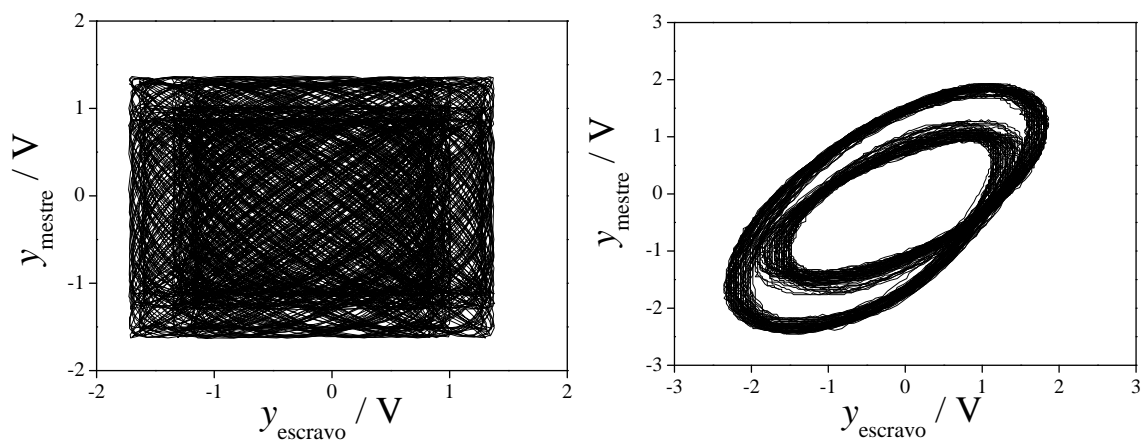
figuras 4.14(a) e (b), plotamos a amplitude de um circuito versus a amplitude do outro. Quando os circuitos estão dessincronizados a dinâmica varre todo espaço de fase. Já em 4.14(b) é estabelecido um eixo preferencial no espaço de fase em torno do qual o sistema acoplado oscila, demonstrando uma relação bem definida entre as fases destes.



(a) parâmetro de acoplamento $c = 0.08$.

(b) parâmetro de acoplamento $c = 0.375$.

Fig. 4.13: Diferença entre as fases dos circuitos.



(a) parâmetro de acoplamento $c = 0.08$.

(b) parâmetro de acoplamento $c = 0.375$.

Fig. 4.14: Comportamento das amplitudes dos circuitos.

5. A SINCRONIZAÇÃO DE OSCILADORES DE RÖSSLER

A questão básica que se coloca quando analisamos um conjunto de elementos acoplados entre si é se esses elementos sincronizam uns com os outros e, quando a resposta a essa pergunta for positiva, interessa-nos saber sob quais condições o comportamento síncrono é possível, ou melhor, se esse comportamento é estável ou instável. Um dos primeiros trabalhos nesse sentido foi realizado já no início da década de 1980 por Fujisaka e Yamada [53], mas esse não suscitou o devido interesse e ficou em segundo plano até o início da década de 1990 quando a sincronização de sistemas caóticos tomou novo ímpeto com o trabalho de Pecora e Carroll [9]. Neste capítulo analisaremos o comportamento dinâmico de uma rede de N osciladores de Rössler acoplados através de uma variável. Os osciladores formam uma cadeia fechada tal que a rede apresente condições de contorno periódicas. Estaremos interessados na possibilidade da ocorrência de padrões de sincronização neste sistema. Por padrão entende-se que n osciladores da rede sincronizem entre si, mas não sincronizem com os restantes $N - n$ osciladores. O acoplamento é do tipo primeiros vizinhos, com a condição de que a rede apresente simetria de invariância de deslocamento (*shift-invariant symmetry*). A montagem experimental consiste de seis osciladores ($N = 6$), que serão identificados por um índice superior i ($i = 0, 1, \dots, 5$). Tal número de osciladores é suficiente para dar origem a um sistema que demonstre uma rica estrutura espacial e ao mesmo tempo é pequeno o suficiente para possibilitar sua montagem experimental.

Começamos descrevendo a notação utilizada nesse capítulo e também relembremos as equações que controlam a dinâmica do sistema de Rössler.

5.1 O Circuito Oscilador

O circuito oscilador adotado (veja figura 2.2) possui certas propriedades desejáveis que nos levaram a optar por tal montagem. Uma propriedade essencial é a de que o circuito apresente comportamento caótico sobre uma grande faixa de valores de seus parâmetros, tal que, quando acoplado a outros circuitos, o comportamento caótico não seja imediatamente destruído. Outra propriedade desejável é que o sistema apresente um único atrator caótico na região dos parâmetros em que estamos trabalhando. E por último, a montagem deve ser simples o suficiente para podermos reproduzir vários circuitos idênticos. Como foi mostrado no capítulo 2, o circuito de Rössler é descrito pelas seguintes equações acopladas:

$$\begin{aligned}\frac{dx^i}{dt} &= -\alpha(\Gamma x^i + \beta y^i + \lambda z^i) \\ \frac{dy^i}{dt} &= \alpha(x^i + \gamma y^i) \\ \frac{dz^i}{dt} &= \delta\alpha(g(x^i) - z^i),\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde α , Γ , β , λ , γ , δ são constantes determinadas pelos componentes do circuito e estão na tabela 2.1. A função $g(x^i)$ é não-linear, dada por:

$$g(x^i) = \begin{cases} 0, & \text{se } x^i < 2.56 \\ \mu(x^i - 2.56), & \text{se } x^i \geq 2.56. \end{cases}\tag{5.2}$$

Ela está representada na figura 2.1 para dois valores de μ .

Adotamos uma notação que tem por objetivo apresentar os cálculos que seguem sob forma mais compacta. Definindo um vetor

$$\mathbf{x}^i = \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{pmatrix},\tag{5.3}$$

e uma função vetorial,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^i) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},\tag{5.4}$$

onde $x_1^i \equiv x^i$; $x_2^i \equiv y^i$; $x_3^i \equiv z^i$ e

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}^i) &= -\alpha(\Gamma x_1^i + \beta x_2^i + \lambda x_3^i) \\ f_2(\mathbf{x}^i) &= \alpha(x_1^i + \gamma x_2^i) \\ f_3(\mathbf{x}^i) &= \delta\alpha(g(x_1^i) - x_3^i), \end{aligned} \quad (5.5)$$

o sistema (5.1) pode ser escrito sob forma vetorial,

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{f}(\mathbf{x}^i). \quad (5.6)$$

Essa notação é compacta e geral, facilitando o desenvolvimento da teoria como veremos a seguir.

5.2 O Acoplamento entre os Osciladores

O acoplamento considerado implica, na modelagem que estamos construindo, em fazer a seguinte substituição no lado direito da equação (5.6):

$$\mathbf{x}^i \Rightarrow \mathbf{x}^i - \epsilon \mathbf{E} \mathbf{a}^i, \quad (5.7)$$

onde \mathbf{E} é uma matriz 3×3 que determina quais variáveis serão acopladas, ϵ é a amplitude de acoplamento e \mathbf{a}^i é a seguinte função vetorial de acoplamento:

$$\mathbf{a}^i(\mathbf{x}^{i+1}, \mathbf{x}^{i-1}, \mathbf{x}^i) = \mathbf{x}^{i+1} + \mathbf{x}^{i-1} - 2\mathbf{x}^i, \quad (5.8)$$

ou mais explicitamente,

$$\mathbf{a}^i = \begin{pmatrix} a_1^i \\ a_2^i \\ a_3^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{i+1} + x_1^{i-1} - 2x_1^i \\ x_2^{i+1} + x_2^{i-1} - 2x_2^i \\ x_3^{i+1} + x_3^{i-1} - 2x_3^i \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Devido à condição de contorno periódica, a seguinte relação de periodicidade é verificada:

$$\mathbf{x}^{N+l} = \mathbf{x}^l, \quad (5.10)$$

com $l = 0, 1, \dots, 5$ e $N = 6$. É oportuno realçar que a equação (5.9) representa um acoplamento entre osciladores que impõe ao sistema uma simetria translacional, uma vez que o acoplamento de um oscilador com os seus dois primeiros vizinhos é o mesmo para qualquer sítio na rede de osciladores. O acoplamento considerado também é chamado difusivo devido a sua relação direta com o operador Laplaciano ∇^2 ; \mathbf{a}^i é a representação discreta de $\nabla^2 x(\mathbf{r})$, onde \mathbf{r} é uma coordenada espacial [54]. O esquema da realização experimental do acoplamento é dado pela figura 5.1. O circuito da caixa 5.1(a) é um

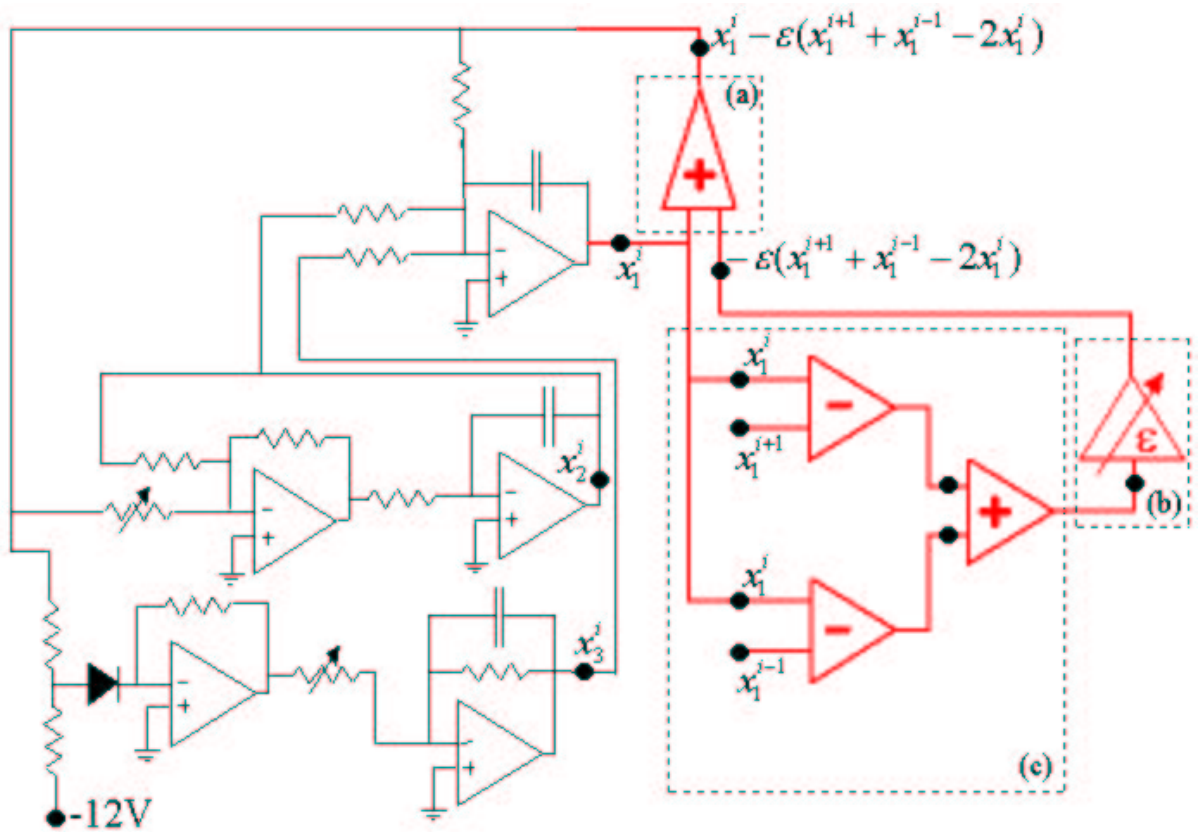


Fig. 5.1: Esquema de montagem do i -ésimo circuito. (a) circuito somador, (b) circuito que gera a amplitude de acoplamento, (c) circuito acoplador.

somador que tem por função somar a tensão x_1^i do i -ésimo circuito com a tensão gerada pelo acoplador. Na caixa 5.1(c) está esquematizado o circuito acoplador, sendo que a figura 5.2 demonstra com mais detalhes a estrutura deste. Ele possui uma resistência

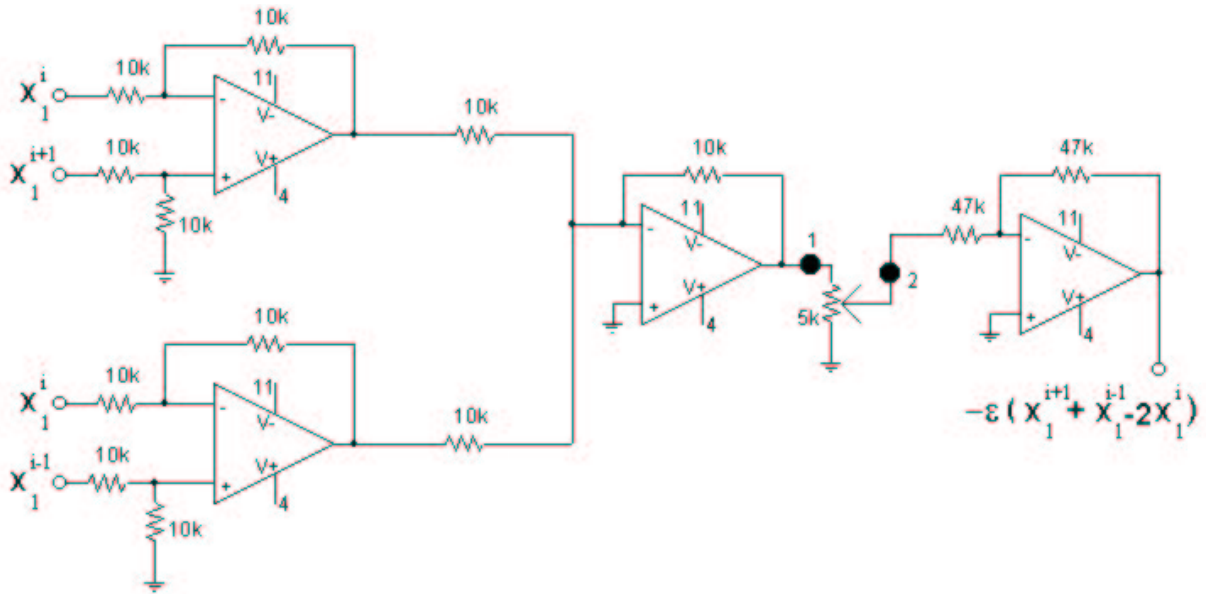


Fig. 5.2: Circuito acoplador.

variável, a qual determina a fração de sinal que será injetado no somador, para ser adicionado ao sinal do i -ésimo circuito. Mudar instantaneamente o valor de uma resistência é experimentalmente difícil. Além disso, a precisão e o controle da mudança efetuada não são boas. Para obtermos uma melhor precisão e também um controle mais conveniente da amplitude de acoplamento, montamos o circuito esquematizado na caixa 5.1(b) e que está representado com mais detalhes na figura 5.3. Quando a resistência, entre os pontos 1 e 2, possui o seu valor alterado, o valor do ganho do amplificador operacional à direita do ponto 2 muda, conforme equação (2.4). Porém, pode-se provocar o mesmo efeito alterando a tensão sobre a resistência de $47k$ que está à direita do ponto 2. Portanto, substitui-se a resistência variável, desconectando-a dos pontos 1 e 2, por um circuito que provoque uma mudança de tensão na sua saída como resposta ao controle que é feito via uma tensão externa. Ajustando a forma do sinal de tensão de controle, podemos executar a variação da amplitude de acoplamento conforme uma certa função. Por exemplo, deseja-se variar a resistência, e por conseguinte, a amplitude de acoplamento, linearmente entre dois valores. Para isso, usa-se

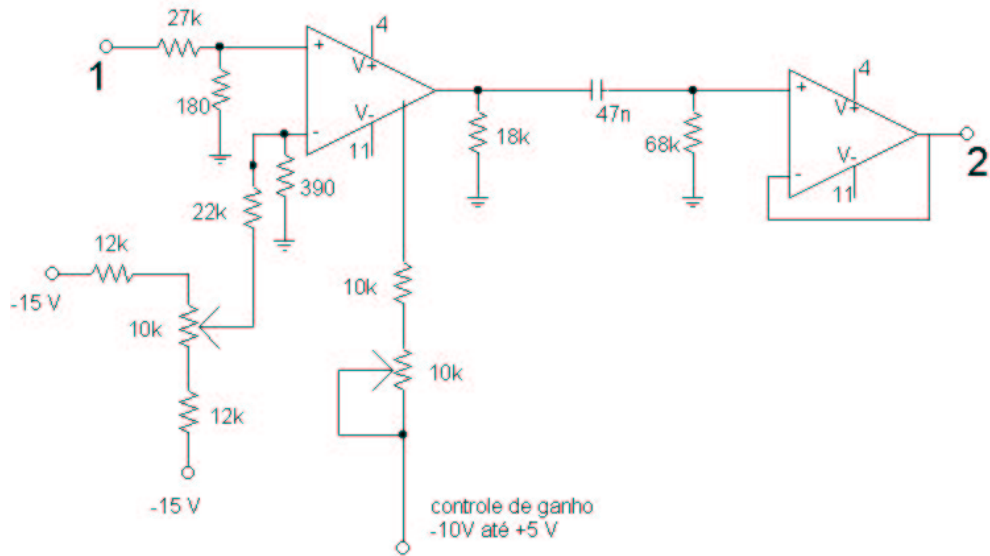


Fig. 5.3: Circuito que gera a amplitude de acoplamento. O amplificador à esquerda é um CA3080 e à direita um $\mu A741$.

um gerador de funções que apresente uma função tipo “rampa”, na qual a tensão varia linearmente entre dois valores.

Podemos escrever a equação diferencial do sistema com o acoplamento estabelecido nas equações (5.7) e (5.8) como

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{f}(\mathbf{x}^i - \epsilon \mathbf{E} \mathbf{a}^i). \quad (5.11)$$

A montagem que estamos realizando é,

$$x_1^i \Rightarrow x_1^i - \epsilon a_1^i, \quad (5.12)$$

sendo que as variáveis x_2^i e x_3^i não sofrem nenhuma alteração. Para obtermos esse acoplamento, os elementos da matriz \mathbf{E} devem ser definidos como

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

de modo que,

$$\mathbf{x}^i - \epsilon \mathbf{E} \mathbf{a}^i = \begin{pmatrix} x_1^i - \epsilon a_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

As componentes da função vetorial $\mathbf{f}(\mathbf{x}^i - \epsilon \mathbf{E} \mathbf{a}^i)$ são reescritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f_1(x_1^i - \epsilon a_1^i, x_2^i, x_3^i) &= -\alpha(\Gamma(x_1^i - \epsilon a_1^i) + \beta x_2^i + \lambda x_3^i) \\ f_2(x_1^i - \epsilon a_1^i, x_2^i) &= \alpha((x_1^i - \epsilon a_1^i) + \gamma x_2^i) \\ f_3(x_1^i - \epsilon a_1^i, x_3^i) &= \delta \alpha(g(x_1^i - \epsilon a_1^i) - x_3^i), \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde, de acordo com a equação (5.2),

$$g(x_1^i - \epsilon a_1^i) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x_1^i - \epsilon a_1^i) < 2.56 \\ \mu(x_1^i - \epsilon a_1^i - 2.56), & \text{se } (x_1^i - \epsilon a_1^i) \geq 2.56. \end{cases} \quad (5.16)$$

Finalmente, a equação que descreve a dinâmica de cada oscilador da rede levando em conta o acoplamento entre os osciladores, é dada por:

$$\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{f}(\mathbf{x}^i - \epsilon \mathbf{E} \mathbf{a}^i(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{i+1}, \mathbf{x}^{i-1})), \quad (5.17)$$

onde \mathbf{x}^i é o estado do i -ésimo oscilador com o acoplamento \mathbf{a}^i . A partir desse ponto vamos passar analisar as propriedades da rede de osciladores, onde cada elemento da rede é descrito pela equação (5.17).

5.3 Sincronização Global

Para um valor da amplitude de acoplamento diferente de zero, os osciladores da rede irão interagir e, produzirão um comportamento dinâmico com certas propriedades que estaremos interessados em analisar. Os osciladores perdem sua identidade individual e a rede deve ser analisada como um sistema único. Numa primeira abordagem, espera-se que todos os osciladores sincronizem entre si, formando um único estado sincronizado que podemos definir como:

$$\mathbf{s}(t) \equiv \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^3 = \mathbf{x}^4 = \mathbf{x}^5. \quad (5.18)$$

Este comportamento é denominado sincronização global. A pergunta que se coloca imediatamente é se o estado sincronizado é estável para um dado valor da amplitude de acoplamento?

Experimentalmente, verificamos que à medida que a intensidade do acoplamento é aumentada, aparecem valores em que há a sincronização global, intercalados com regiões onde não ocorre essa sincronização. Nessas regiões onde a sincronização global é quebrada, notamos que para certos valores de ϵ , alguns circuitos continuam a apresentar um comportamento síncrono. Identificando-se os circuitos da rede de osciladores que sincronizam entre si e os que não o fazem, estabelecemos uma estrutura espacial bem definida - ela será denominada como sendo um padrão de sincronização parcial, como veremos em mais detalhes na seção 5.4.

Assim, para identificarmos as regiões onde podem existir padrões de sincronização parcial, devemos saber identificar onde a sincronização global é instável. Para tanto, analisamos a geometria do espaço de fase da rede acoplada. O estado sincronizado, $\mathbf{s}(t)$, irá evoluir sobre a variedade de sincronização, \mathcal{M} . O espaço de fase de cada oscilador possui três dimensões, $n = 3$. O número de osciladores é $N = 6$ e, dessa forma, o sistema total possui um espaço de fase com 18 dimensões. A condição de sincronização coloca $n(N - 1)$ condições de vínculo e, portanto, a dimensão da variedade de sincronização será dada por $nN - n(N - 1) = n$. Para que esta variedade seja estável, deslocamentos transversos a ela devem convergir para zero. O primeiro passo consiste na linearização do sistema (5.17) em torno de $\mathbf{s}(t)$ (como veremos na próxima seção) e, em seguida, aplica-se uma transformação de coordenadas que desacople os deslocamentos ao longo da variedade de sincronização dos deslocamentos transversais à ela. Analisando a evolução dos deslocamentos transversais à variedade de sincronização global, poderemos saber para quais valores da intensidade do acoplamento ϵ a sincronização é instável.

5.3.1 Análise Linear

Nesta seção faremos a análise linear próximo ao estado de sincronização para determinarmos a estabilidade deste estado. Definindo um vetor deslocamento infinitesimal,

$$\boldsymbol{\xi}^i \equiv \mathbf{x}^i - \mathbf{s} , \quad (5.19)$$

podemos escrever a equação (5.17) sob a forma:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}^i + \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{f}(\mathbf{s} + \boldsymbol{\xi}^i, \mathbf{a}^i(\mathbf{s} + \boldsymbol{\xi}^i, \mathbf{s} + \boldsymbol{\xi}^{i+1}, \mathbf{s} + \boldsymbol{\xi}^{i-1})) . \quad (5.20)$$

Fazendo uma expansão em série de Taylor da função \mathbf{f} em torno do estado sincronizado $\mathbf{s}(t)$, e retendo termos até primeira ordem, obtemos:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}^i + \dot{\mathbf{s}} \cong \mathbf{f}(\mathbf{s}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^i} \right|_{\mathbf{x}^i=\mathbf{s}} \boldsymbol{\xi}^i + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}^i} \frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial \mathbf{x}^i} \right|_{\mathbf{x}^i=\mathbf{s}} \boldsymbol{\xi}^i + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}^i} \frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial \mathbf{x}^{i+1}} \right|_{\mathbf{x}^i=\mathbf{s}} \boldsymbol{\xi}^{i+1} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}^i} \frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial \mathbf{x}^{i-1}} \right|_{\mathbf{x}^i=\mathbf{s}} \boldsymbol{\xi}^{i-1} . \quad (5.21)$$

Vamos convencionar a seguinte notação:

$$D\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^i} \right|_{\mathbf{x}^i=\mathbf{s}} , \quad (5.22)$$

$$D_{\mathbf{a}^i}\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}^i} \right|_{\mathbf{x}^i=\mathbf{s}} , \quad (5.23)$$

$$D_j \mathbf{a}^i(\mathbf{s}) = \left. \frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial \mathbf{x}^j} \right|_{\mathbf{x}^j=\mathbf{s}} , \quad (5.24)$$

sendo que (5.22) é a matriz Jacobiana do sistema. Lembrando, ainda, que $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{f}(\mathbf{s})$, podemos reescrever a equação variacional de forma compacta,

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}^i \cong D\mathbf{f}(\mathbf{s})\boldsymbol{\xi}^i + D_{\mathbf{a}^i}\mathbf{f}(\mathbf{s}) \sum_{j=i-1}^{i+1} D_j \mathbf{a}^i(\mathbf{s})\boldsymbol{\xi}^j . \quad (5.25)$$

De forma explícita, as matrizes envolvidas na equação (5.25), são dadas por:

$$D\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1^i} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2^i} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3^i} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1^i} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2^i} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3^i} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1^i} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2^i} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3^i} \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

$$D_{\mathbf{a}^i}\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1^i} & \frac{\partial f_1}{\partial a_2^i} & \frac{\partial f_1}{\partial a_3^i} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_1^i} & \frac{\partial f_2}{\partial a_2^i} & \frac{\partial f_2}{\partial a_3^i} \\ \frac{\partial f_3}{\partial a_1^i} & \frac{\partial f_3}{\partial a_2^i} & \frac{\partial f_3}{\partial a_3^i} \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

$$D_i\mathbf{a}^i(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1^i}{\partial x_1^i} & \frac{\partial a_1^i}{\partial x_2^i} & \frac{\partial a_1^i}{\partial x_3^i} \\ \frac{\partial a_2^i}{\partial x_1^i} & \frac{\partial a_2^i}{\partial x_2^i} & \frac{\partial a_2^i}{\partial x_3^i} \\ \frac{\partial a_3^i}{\partial x_1^i} & \frac{\partial a_3^i}{\partial x_2^i} & \frac{\partial a_3^i}{\partial x_3^i} \end{pmatrix}, \quad (5.28)$$

$$D_{i\pm 1}\mathbf{a}^i(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1^i}{\partial x_1^{i\pm 1}} & \frac{\partial a_1^i}{\partial x_2^{i\pm 1}} & \frac{\partial a_1^i}{\partial x_3^{i\pm 1}} \\ \frac{\partial a_2^i}{\partial x_1^{i\pm 1}} & \frac{\partial a_2^i}{\partial x_2^{i\pm 1}} & \frac{\partial a_2^i}{\partial x_3^{i\pm 1}} \\ \frac{\partial a_3^i}{\partial x_1^{i\pm 1}} & \frac{\partial a_3^i}{\partial x_2^{i\pm 1}} & \frac{\partial a_3^i}{\partial x_3^{i\pm 1}} \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

Tomando as derivadas, obtemos os seguintes valores:

$$D\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} -\alpha\Gamma & -\alpha\beta & -\alpha\lambda \\ \alpha & \alpha\gamma & 0 \\ \delta\alpha\phi & 0 & -\delta\alpha \end{pmatrix}, \quad (5.30)$$

$$D_{\mathbf{a}^i}\mathbf{f}(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} \epsilon\alpha\Gamma & 0 & 0 \\ -\epsilon\alpha & 0 & 0 \\ -\epsilon\delta\alpha\phi & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

$$D_i\mathbf{a}^i(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (5.32)$$

$$D_{i\pm 1}\mathbf{a}^i(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.33)$$

onde,

$$\phi = \begin{cases} 0 & \text{se } s_1 < 2.56 \\ \mu & \text{se } s_1 \geq 2.56. \end{cases} \quad (5.34)$$

Na expressão (5.34), s_1 é a primeira componente do vetor de sincronização, $\mathbf{s}(t)$, definido pela expressão (5.18). Finalmente, podemos escrever, sob forma matricial, a

seguinte aproximação linear para o sistema (5.17):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1^i \\ \dot{\xi}_2^i \\ \dot{\xi}_3^i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\alpha\Gamma & -\alpha\beta & -\alpha\lambda \\ \alpha & \alpha\gamma & 0 \\ \delta\alpha\phi & 0 & -\alpha\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^i \\ \xi_2^i \\ \xi_3^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\epsilon\alpha\Gamma & 0 & 0 \\ 2\epsilon\alpha & 0 & 0 \\ 2\epsilon\delta\alpha\phi & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^i \\ \xi_2^i \\ \xi_3^i \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \epsilon\alpha\Gamma & 0 & 0 \\ -\epsilon\alpha & 0 & 0 \\ -\epsilon\delta\alpha\phi & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{i+1} \\ \xi_2^{i+1} \\ \xi_3^{i+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon\alpha\Gamma & 0 & 0 \\ -\epsilon\alpha & 0 & 0 \\ -\epsilon\delta\alpha\phi & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{i-1} \\ \xi_2^{i-1} \\ \xi_3^{i-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

O i -ésimo oscilador possui o sistema de equações variacionais dado por (5.35). Podemos definir a matriz variacional para a rede constituída por 6 osciladores, e que satisfaz a condição de periodicidade (5.10), da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \epsilon\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \epsilon\mathbf{C} \\ \epsilon\mathbf{C} & \mathbf{A} & \epsilon\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \epsilon\mathbf{C} & \mathbf{A} & \epsilon\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \epsilon\mathbf{C} & \mathbf{A} & \epsilon\mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \epsilon\mathbf{C} & \mathbf{A} & \epsilon\mathbf{C} \\ \epsilon\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \epsilon\mathbf{C} & \mathbf{A} \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

Esta matriz possui 36 elementos, onde cada elemento é uma matriz 3×3 . O sistema variacional para a rede é dado por:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}^0 \\ \dot{\xi}^1 \\ \dot{\xi}^2 \\ \dot{\xi}^3 \\ \dot{\xi}^4 \\ \dot{\xi}^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \epsilon\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \epsilon\mathbf{C} \\ \epsilon\mathbf{C} & \mathbf{A} & \epsilon\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \epsilon\mathbf{C} & \mathbf{A} & \epsilon\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \epsilon\mathbf{C} & \mathbf{A} & \epsilon\mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \epsilon\mathbf{C} & \mathbf{A} & \epsilon\mathbf{C} \\ \epsilon\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \epsilon\mathbf{C} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \\ \xi^4 \\ \xi^5 \end{pmatrix}, \quad (5.37)$$

onde,

$$\mathbf{A} = D\mathbf{f} - 2\epsilon\mathbf{C}, \quad (5.38)$$

$$Df = \begin{pmatrix} -\alpha\Gamma & -\alpha\beta & -\alpha\lambda \\ \alpha & \alpha\gamma & 0 \\ \delta\alpha\phi & 0 & -\delta\alpha \end{pmatrix}, \quad (5.39)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \alpha\Gamma & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ -\delta\alpha\phi & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.40)$$

O sistema variacional (5.37) descreve a evolução dos deslocamentos infinitesimais dos osciladores da rede em relação à órbita sincronizada, isto é, a órbita que todos os osciladores seguiriam no momento de sua sincronização. Como os osciladores que formam a rede estão acoplados, as equações que descrevem os deslocamentos destes também estão acopladas. Portanto, a integração numérica se torna complexa devido ao grande número de equações que deve ser integrado simultaneamente (18 equações variacionais mais 3 equações do sistema não-linear que descreve a evolução do estado (órbita) de sincronização, $\mathbf{s}(t)$). Para evitar este tipo de problema, podemos aplicar uma transformação de coordenadas sobre o conjunto de vetores $\boldsymbol{\xi}^i$ que gere um novo conjunto $\boldsymbol{\eta}^k$, tal que as equações variacionais desacoplem totalmente, reduzindo o número de equações a serem integradas. De fato, o número de equações é reduzido ao do sistema de um único oscilador da rede. Esta transformação de coordenadas diagonaliza a matriz variacional (5.36) e, portanto, passamos a discutir esta na próxima seção.

5.3.2 Diagonalização da Matriz Variacional

Temos interesse em fazer uma transformação de coordenadas tal que ocorra a diagonalização da matriz variacional (5.36). Para sistemas com simetria de invariância translacional, as equações variacionais sempre podem ser transformadas para uma nova representação onde os deslocamentos transversais e não transversais à variedade de sincronização se decompõem naturalmente [7]. Uma transformação de coordenadas conveniente é a transformada de Fourier espacial discreta¹. Faremos, agora, a análise

¹ Para uma descrição detalhada sobre Transformada de Fourier Discreta, ver referência [55].

para um caso geral, depois particularizaremos para o nosso problema. Neste momento, suponhamos que a função \mathbf{f} seja dependente dos estados de todos os osciladores da rede. Portanto,

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^i - \epsilon \mathbf{E} \mathbf{b}^i(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^{N-1})) . \quad (5.41)$$

A condição que se impõe à função \mathbf{b}^i é que ela satisfaça a simetria de invariância translacional². Por exemplo, \mathbf{b}^i poderia representar um acoplamento global da forma:

$$\mathbf{b}^i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^i) . \quad (5.42)$$

Seguindo o mesmo procedimento anteriormente descrito, a equação linearizada vai ser dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}^i = D\mathbf{f}(\mathbf{s})\boldsymbol{\xi}^i + D_{\mathbf{b}^i}\mathbf{f}(\mathbf{s}) \sum_{j=0}^{N-1} D_j \mathbf{b}^i(\mathbf{s}) \boldsymbol{\xi}^j , \quad (5.43)$$

onde as matrizes de terceira ordem $D\mathbf{f}(\mathbf{s})$, $D_{\mathbf{b}^i}\mathbf{f}(\mathbf{s})$ e $D_j \mathbf{b}^i(\mathbf{s})$ são semelhantes às matrizes (5.22), (5.23) e (5.24), respectivamente. Visto que o sistema possui simetria de invariância translacional e condições de contorno periódicas, a equação (5.43) pode ser reescrita como

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}^i = D\mathbf{f}(\mathbf{s})\boldsymbol{\xi}^i + D_{\mathbf{b}^i}\mathbf{f}(\mathbf{s}) \sum_{j=0}^{N-1} D_{j-i} \mathbf{b}^0(\mathbf{s}) \boldsymbol{\xi}^j . \quad (5.44)$$

A equação variacional pode ser reescrita de forma simples definindo-se a seguinte matriz:

$$\mathbf{H}^{i-j} = D\mathbf{f}(\mathbf{s})\delta_{ij} + D_{\mathbf{b}^i}\mathbf{f}(\mathbf{s})D_{j-i} \mathbf{b}^0 , \quad (5.45)$$

onde $j = 0, \dots, N-1$ e δ_{ij} é a delta de Kronecker definida como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j . \end{cases} \quad (5.46)$$

Usando a matriz definida em (5.45), pode-se reescrever (5.43),

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}^i}{dt} = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{H}^{i-j} \boldsymbol{\xi}^j . \quad (5.47)$$

² A função \mathbf{b}^i é uma generalização da função \mathbf{a}^i descrita pela equação (5.8).

A transformada de Fourier discreta é definida por:

$$\mathbf{D}^k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{d}^j e^{\frac{i2\pi jk}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (5.48)$$

e a transformada de Fourier discreta inversa é dada por:

$$\mathbf{d}^j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{D}^k e^{-\frac{i2\pi jk}{N}}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.49)$$

Vamos aplicar a transformada de Fourier discreta ao conjunto de vetores $\boldsymbol{\xi}^j$ e também à matriz \mathbf{H}^j ,

$$\mathbf{W}^k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{H}^j e^{\frac{i2\pi jk}{N}}, \quad (5.50)$$

$$\boldsymbol{\eta}^k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \boldsymbol{\xi}^j e^{\frac{i2\pi jk}{N}}. \quad (5.51)$$

A equação variacional obtida é a seguinte :

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}^k}{dt} = \sqrt{N} \mathbf{W}^k \boldsymbol{\eta}^k, \quad (5.52)$$

com $k = 0, \dots, N-1$.

O conjunto de vetores $\boldsymbol{\eta}^k$ gera uma decomposição conveniente em deslocamentos sobre a variedade de sincronização e deslocamentos transversais a essa variedade, ou seja, ocorre um desacoplamento. O vetor $\boldsymbol{\eta}^0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{\xi}^i$ está sobre a variedade de sincronização e, como o conjunto de vetores $\boldsymbol{\eta}^k$ é ortogonal, os vetores $\boldsymbol{\eta}^k$, para $k = 1, 2, \dots, N-1$ são transversais ao vetor $\boldsymbol{\eta}^0$. O novo conjunto de vetores gerado pela aplicação da transformada de Fourier discreta descreve o comportamento do deslocamento da rede em relação a variedade de sincronização, ao contrário do conjunto $\boldsymbol{\xi}^i$, que descreve o deslocamento de cada oscilador em relação à variedade de sincronização. Na análise individual, todos os deslocamentos são acoplados e, portanto, a integração numérica deve levar em conta um grande número de equações. Por outro lado, o conjunto de vetores $\boldsymbol{\eta}^k$ é totalmente desacoplado, necessitando-se integrar somente um conjunto de equações reduzido ao tamanho de um único oscilador.

Particularizando para a nossa montagem, onde \mathbf{f} é função somente de \mathbf{x}^i , \mathbf{x}^{i+1} e \mathbf{x}^{i-1} , temos:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^i - \epsilon \mathbf{E} \mathbf{a}^i(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{i+1}, \mathbf{x}^{i-1})). \quad (5.53)$$

Podemos, então, reescrever a equação variacional (5.52) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\eta}^k}{dt} = & \left[D\mathbf{f}(\mathbf{s}) + D_{\mathbf{a}^0}\mathbf{f}(\mathbf{s})D_0\mathbf{a}^0(\mathbf{s}) + \right. \\ & \left. + D_{\mathbf{a}^1}\mathbf{f}(\mathbf{s})D_1\mathbf{a}^0(\mathbf{s})e^{\frac{i2\pi k}{N}} + D_{\mathbf{a}^{N-1}}\mathbf{f}(\mathbf{s})D_{N-1}\mathbf{a}^0(\mathbf{s})e^{\frac{i2\pi(N-1)k}{N}} \right] \boldsymbol{\eta}^k, \end{aligned} \quad (5.54)$$

sendo que $D_0\mathbf{a}^0 = -2D_1\mathbf{a}^0 = -2D_{N-1}\mathbf{a}^0$ e $D_{\mathbf{a}^0}\mathbf{f}(\mathbf{s}) = D_{\mathbf{a}^1}\mathbf{f}(\mathbf{s}) = D_{\mathbf{a}^{N-1}}\mathbf{f}(\mathbf{s})$. Deixando explícita a dependência em ϵ , podemos remanejar os termos da equação (5.54) da seguinte maneira:

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}^k}{dt} = \left[D\mathbf{f}(\mathbf{s}) + \epsilon D_{\mathbf{a}^0}\mathbf{f}(\mathbf{s})D_1\mathbf{a}^0(\mathbf{s}) \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \left(e^{\frac{i2\pi k}{N}} + e^{\frac{-i2\pi k}{N}} - 2 \right) \right] \boldsymbol{\eta}^k, \quad (5.55)$$

ou ainda,

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}^k}{dt} = \left[D\mathbf{f}(\mathbf{s}) - 4\epsilon D_{\mathbf{a}^i}\mathbf{f}(\mathbf{s})D_1\mathbf{a}^0(\mathbf{s}) \sin^2 \left(\frac{\pi k}{N} \right) \right] \boldsymbol{\eta}^k. \quad (5.56)$$

Para $N = 6$, a matriz variacional da rede é dada por:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_5 \end{pmatrix}, \quad (5.57)$$

a qual está diagonalizada, em contraste com a matriz variacional (5.36). O sistema variacional, que descreve o comportamento de deslocamentos da rede em relação à variedade de sincronização, é a seguinte:

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}^0 \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}^1 \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}^2 \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}^3 \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}^4 \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}^0 \\ \boldsymbol{\eta}^1 \\ \boldsymbol{\eta}^2 \\ \boldsymbol{\eta}^3 \\ \boldsymbol{\eta}^4 \\ \boldsymbol{\eta}^5 \end{pmatrix}, \quad (5.58)$$

onde,

$$\mathbf{G}_k = D\mathbf{f} - 4\epsilon\mathbf{C} \sin^2\left(\frac{k\pi}{6}\right). \quad (5.59)$$

A diagonalização da matriz variacional (5.36), além de reduzir o número de equações a serem integradas, também traz uma informação mais clara e direta a respeito da estabilidade da variedade de sincronização, pois os deslocamentos transversais à variedade estão desacoplados dos deslocamentos ao longo da variedade. O nosso interesse é o de saber se a sincronização global na rede é estável para uma dada amplitude de acoplamento, o que implica analisarmos como os deslocamentos transversais à variedade de sincronização evoluem no tempo. Esta informação é revelada calculando-se os expoentes de Lyapunov associados com tais deslocamentos, que por sua vez, são caracterizados pela matriz diagonalizada (5.57). Na próxima seção introduziremos os expoentes de Lyapunov formalmente e na seção seguinte obteremos o máximo expoente de Lyapunov transversal numericamente.

5.3.3 Expoentes de Lyapunov

A partir do sistema variacional (5.58) pode-se obter os expoentes de Lyapunov da rede de osciladores. Para $k = 0$, o deslocamento é ao longo da variedade de sincronização e, portanto, o expoente de Lyapunov associado com este deslocamento vai dar uma informação à respeito do comportamento do estado de sincronização, $\mathbf{s}(t)$. Se o estado de sincronização for um ponto fixo o máximo expoente de Lyapunov vai ser negativo; se for uma órbita periódica o máximo expoente de Lyapunov vai ser nulo e se for uma órbita caótica o máximo expoente de Lyapunov será positivo. De (5.58), para $k = 0$, o deslocamento $\boldsymbol{\eta}^0$ obedece a seguinte equação variacional:

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}^0}{dt} = D\mathbf{f}(\mathbf{s})\boldsymbol{\eta}^0. \quad (5.60)$$

Os expoentes de Lyapunov são obtidos a partir do operador evolução temporal, $\boldsymbol{\Lambda}^0(t)$, que é aplicado sobre o deslocamento $\boldsymbol{\eta}^0$ e é definido por:

$$\boldsymbol{\eta}^0(t) = \boldsymbol{\Lambda}^0(t)\boldsymbol{\eta}^0(0), \quad (5.61)$$

com a condição inicial,

$$\mathbf{\Lambda}^0(0) = \mathbf{I}. \quad (5.62)$$

O operador $\mathbf{\Lambda}^0(t)$ satisfaz a equação (5.60) e possui uma solução da forma

$$\mathbf{\Lambda}^0(t) = \mathbf{T} \exp \left(\int_0^t \mathbf{J}(t') dt' \right), \quad (5.63)$$

onde $\mathbf{J}(t) = D\mathbf{f}(\mathbf{s}(t))$ é a matriz Jacobiana do sistema de Rössler e \mathbf{T} é o operador de ordenamento temporal. Sejam $\mu_i^0(t)$, $i = 1, \dots, n$ os autovalores de $\mathbf{\Lambda}^0(t)$. Os expoentes de Lyapunov são definidos por:

$$\lambda_i^0 = \text{Re} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mu_i^0(t). \quad (5.64)$$

Como já foi mencionado no início desta seção, os expoentes de Lyapunov, λ_i^0 , associados ao deslocamento $\boldsymbol{\eta}^0$ caracterizam o comportamento do estado sincronizado. Os deslocamentos restantes, $\boldsymbol{\eta}^k$, para $k = 1, \dots, N - 1$, são transversais a variedade de sincronização e, portanto, os expoentes de Lyapunov relacionados com tais deslocamentos são chamados de **expoentes de Lyapunov transversais** [7, 38]. Estes expoentes caracterizam a estabilidade da variedade de sincronização. Se o maior expoente de Lyapunov transversal for negativo, a variedade de sincronização será estável, pois os deslocamentos transversais irão convergir para zero. De (5.58), temos que

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}^k}{dt} = \left[D\mathbf{f}(\mathbf{s}) - 4\epsilon\mathbf{C} \sin^2 \left(\frac{\pi k}{N} \right) \right] \boldsymbol{\eta}^k, \quad (5.65)$$

Analogamente ao caso anterior, definimos um operador evolução temporal, $\mathbf{\Lambda}^k(t)$, para o k -ésimo deslocamento transversal, $\boldsymbol{\eta}^k$, sendo que cada operador vai possuir um conjunto de autovalores, $\mu_i^k(t)$, $i = 1, \dots, n$. Os expoentes de Lyapunov transversais são definidos por:

$$\lambda_i^k = \text{Re} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \mu_i^k(t), \quad (5.66)$$

com $i = 1, \dots, n$ e $k = 1, \dots, N - 1$. O operador evolução temporal satisfaz a equação (5.65), ou seja,

$$\frac{d\mathbf{\Lambda}^k(t)}{dt} = \left[D\mathbf{f}(\mathbf{s}) - 4\epsilon\mathbf{C} \sin^2 \left(\frac{\pi k}{N} \right) \right] \mathbf{\Lambda}^k(t), \quad (5.67)$$

onde a matriz \mathbf{C} é definida por (5.40). Integrando (5.67) obtemos

$$\mathbf{\Lambda}^k(t) = \mathbf{T} \exp \left(\int_0^t \mathbf{J}(t') dt' \right) \exp \left(-4\epsilon \mathbf{C} \sin^2 \left(\frac{\pi k}{N} \right) t \right). \quad (5.68)$$

Mas o primeiro termo no lado direito da equação (5.68) corresponde ao operador evolução temporal para o modo $k = 0$, portanto,

$$\mathbf{\Lambda}^k(t) = \mathbf{\Lambda}^0(t) \exp \left(-4\epsilon \mathbf{C} \sin^2 \left(\frac{\pi k}{N} \right) t \right), \quad (5.69)$$

e dessa forma, a partir dos autovalores de $\mathbf{\Lambda}^k(t)$, obtemos os expoentes de Lyapunov transversais pela equação (5.66). Como a matriz Jacobiana é dependente do tempo, temos que calcular os expoentes de Lyapunov transversais numericamente, como passamos a discutir na próxima seção.

5.3.4 Cálculo do Máximo Expoente de Lyapunov Transversal

Na seção anterior, apresentamos a teoria formal dos expoentes de Lyapunov, introduzindo os expoentes de Lyapunov transversais. Na prática, porém, temos que calcular esses expoentes numericamente, pelo fato de a matriz Jacobiana ser dependente do tempo. Portanto, vamos utilizar o método descrito na seção 3.2.3.2, para o cálculo do máximo expoente de Lyapunov. Antes de prosseguirmos, notamos que existe uma relação de escala entre os expoentes de Lyapunov associados às diferentes direções. Dada a equação variacional para o vetor deslocamento $\boldsymbol{\eta}^1$ ($k = 1$), podemos reescrevê-la em termos da equação variacional do vetor deslocamento $\boldsymbol{\eta}^2$ ($k = 2$), como:

$$D\mathbf{f} - 4\epsilon \mathbf{C} \sin^2 \left(\frac{\pi}{6} \right) = D\mathbf{f} - 4\epsilon \mathbf{C} \left(\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{6} \right)}{\sin^2 \left(\frac{2\pi}{6} \right)} \right) \sin^2 \left(\frac{2\pi}{6} \right). \quad (5.70)$$

O efeito é o de reescalar a amplitude de acoplamento da seguinte forma:

$$\epsilon \rightarrow \epsilon \left(\frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{6} \right)}{\sin^2 \left(\frac{2\pi}{6} \right)} \right). \quad (5.71)$$

Determinando o expoente de Lyapunov transversal em função da amplitude de acoplamento do deslocamento $\boldsymbol{\eta}^1$, pode-se obter essa função para os outros deslocamentos

$\boldsymbol{\eta}^k$, para $k = 2, \dots, 5$, simplesmente reescalando a amplitude de acoplamento. Como o fator de mudança de escala é menor do que 1, o valor do maior expoente de Lyapunov transversal máximo vai estar associado ao vetor deslocamento $\boldsymbol{\eta}^1$ e, portanto, este é o último deslocamento transversal a ficar estável (para ϵ crescendo). Por isso, basta calcular esse expoente para obtermos uma boa informação à respeito da estabilidade do estado sincronizado. Como descrito na seção 3.2.3.2, integra-se o sistema de equações do circuito simultaneamente às equações variacionais. As equações do circuito que descrevem o estado sincronizado, $\mathbf{s}(t)$, são:

$$\begin{aligned}\frac{ds_1}{dt} &= -\alpha(\Gamma s_1 + \beta s_2 + \lambda s_3) \\ \frac{ds_2}{dt} &= \alpha(s_1 + \gamma s_2) \\ \frac{ds_3}{dt} &= \delta\alpha(g(s_1) - s_3),\end{aligned}\tag{5.72}$$

De (5.58), para $k = 1$, o sistema de equações variacionais é o seguinte :

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}^1 = \mathbf{G}_1 \boldsymbol{\eta}^1,\tag{5.73}$$

onde, $\mathbf{G}_1 = D\mathbf{f}(\mathbf{s}(t)) - 4\epsilon\mathbf{C} \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Substituindo os valores das matrizes $D\mathbf{f}(\mathbf{s}(t))$ e \mathbf{C} , podemos escrever o sistema acima como:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1^1 &= -\alpha(\Gamma\eta_1^1 + \beta\eta_2^1 + \lambda\eta_3^1) - 4\epsilon\alpha\Gamma \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\eta_1^1 \\ \dot{\eta}_2^1 &= \alpha(\eta_1^1 + \gamma\eta_2^1) + 4\epsilon\alpha \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\eta_1^1 \\ \dot{\eta}_3^1 &= \delta\alpha(\phi\eta_1^1 - \eta_3^1) + 4\epsilon\alpha\delta\phi \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\eta_1^1,\end{aligned}\tag{5.74}$$

onde o valor de ϕ , que é obtido de $g(s_1)$ em (5.72), é dado por:

$$\phi = \begin{cases} 0 & \text{se } s_1 < 2.56 \\ \mu & \text{se } s_1 \geq 2.56. \end{cases}\tag{5.75}$$

Para simplificar a notação, a partir de agora iremos abandonar o índice superior, isto é, $\boldsymbol{\eta}^1 = \boldsymbol{\eta}$. Portanto, η_1^2 representa a primeira componente do vetor $\boldsymbol{\eta}$ elevada ao quadrado. O módulo do vetor $\boldsymbol{\eta}$, é dado por:

$$|\boldsymbol{\eta}| = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}.\tag{5.76}$$

Como já foi discutido na seção 3.2.3.2, a medida que se realiza a integração é necessário renormalizar o vetor $\boldsymbol{\eta}$, a fim de evitar *overflow* computacional. Portanto:

$$\eta'_i = \frac{\eta_i}{|\boldsymbol{\eta}|}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.77)$$

O máximo expoente de Lyapunov transversal é dado por:

$$\lambda_{\perp}^{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\boldsymbol{\eta}'|. \quad (5.78)$$

Alguns testes preliminares indicaram que um tempo suficiente para a convergência do valor de λ_{\perp}^{max} é atingido com um passo de integração de 10^{-7} e 10^6 iterações. Para cada valor de ϵ parte-se de condições iniciais aleatórias (obtidas a partir de um gerador de números randômicos). O valor de ϵ varia entre 0 e 2 com um passo de 0.01. Nas figuras 5.4 e 5.5 apresentamos o gráfico de λ_{\perp}^{max} em função de ϵ para

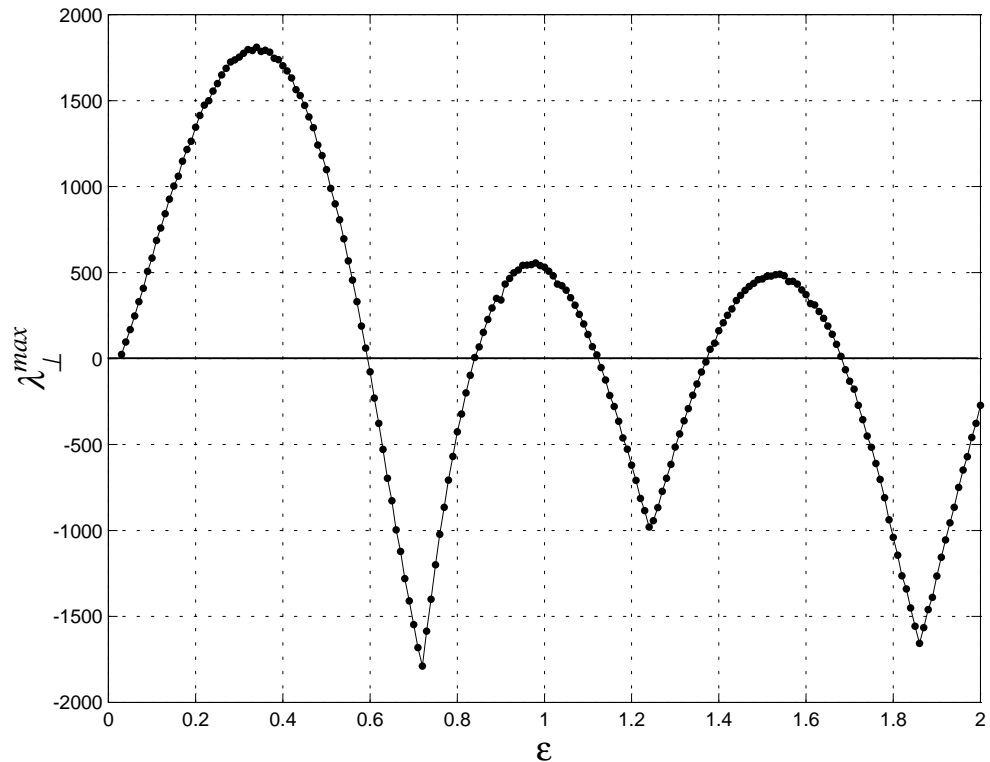


Fig. 5.4: Curva do máximo expoente de Lyapunov transversal para $R_{11} = 150 \text{ k}\Omega$.

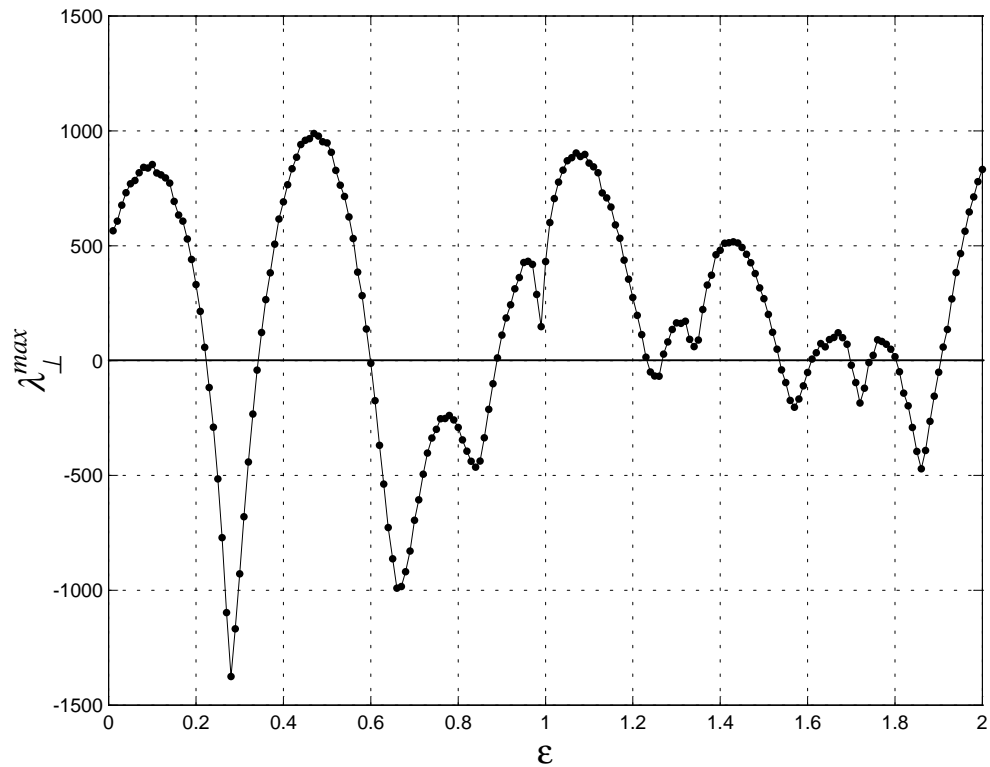


Fig. 5.5: Curva do máximo expoente de Lyapunov transversal para $R_{11} = 120 k\Omega$.

$\mu = 10$ e $\mu = 12.5$, respectivamente. Uma variação em μ é obtida experimentalmente mediante uma variação de R_{11} no circuito. Para os dois valores de μ calculados, existem regiões onde λ_{\perp}^{max} é negativo, correspondendo a regiões de estabilidade do estado de sincronização global, e também existem regiões onde λ_{\perp}^{max} é positivo, correspondendo a regiões de instabilidade do estado sincronizado. Portanto, estamos comprovando pela teoria um fato experimental que já conhecíamos de antemão, isto é, já havíamos observado experimentalmente que as regiões de ϵ para o qual o estado de sincronização global ocorre estavelmente são intercaladas por regiões de completa dessincronização e, ainda, por regiões de um comportamento que chamamos de sincronização parcial, assunto que passamos a discutir na próxima seção.

5.4 Sincronização Parcial

Quando a condição de sincronização global é quebrada, pode surgir outro comportamento dinâmico interessante que é a sincronização parcial, onde apenas alguns osciladores continuam sincronizados entre si. Sincronização parcial originada pela quebra de simetria espontânea e com estruturas espaciais diferentes em sistemas caóticos acoplados localmente e simetricamente foi recentemente investigada por Ying *et al.* [22]. Ao nosso conhecimento, os resultados mostrados a seguir constituem a primeira evidência experimental de tal tipo de sincronização.

5.4.1 Padrões de Sincronização

Um padrão de sincronização é definido como sendo a estrutura espaço-temporal formada quando alguns circuitos sincronizam entre si e outros não o fazem. Por exemplo, para um caso particular, n_1 circuitos sincronizam entre si, com um certo comportamento que pode-se chamar genericamente de a , mas não sincronizam com os outros n_2 circuitos, que oscilam com um comportamento b . Sendo N o número total de circuitos, temos que $n_1 + n_2 = N$. De modo geral, podemos escrever essa condição como $\sum_{i=1}^m n_i = N$, onde m é o número possível de comportamentos que o sistema acoplado suporta. Para denotar um certo padrão, escreve-se entre colchetes seis letras que indicarão qual tipo de comportamento cada um dos seis circuitos está executando na rede. No exemplo acima, onde a rede possui dois tipos de comportamentos, o padrão seria dado por $[ababab]$. Devido à estrutura do modelo implementado, a rede de osciladores irá satisfazer as seguintes simetrias [10, 22]:

- a rede é invariante frente ao sentido horário e anti-horário devido ao acoplamento simétrico;
- os osciladores da rede satisfazem a simetria de permutação espacial, isto é, eles são invariantes frente a uma troca da forma $\mathbf{x}^i \Leftrightarrow \mathbf{x}^j$.

A partir dessas condições de simetria, pode-se fazer considerações sobre os padrões que surgem na rede. Temos uma rede em forma de anel com seis circuitos na ordem $i = 0, 1, \dots, 5$, com 6 sendo igual a 0, e assim sucessivamente. Cada circuito possui um certo comportamento oscilatório ($m \leq 6$ possibilidades), e diferentes circuitos podem ter o mesmo comportamento. A questão que surge é, quais são os arranjos dos seis osciladores que são aceitáveis, isto é, quais os padrões espaço-temporais que podem ser observados tal que as condições de simetria sejam satisfeitas? O caso $m = 1$ é o caso trivial onde todos os circuitos estão sincronizados entre si, [aaaaaa]. Para $m = 2$, a rede é dividida em dois grupos. Um deles irá executar um comportamento dinâmico a e o outro um comportamento dinâmico b . Existem somente dois padrões distintos possíveis: [ababab] e [abaab]. O padrão [aaabbb] não pode ocorrer pois este padrão não satisfaz a simetria de permutação. Para $m = 3$, também existem somente dois possíveis padrões: [abbacc] e [abcabc], pelas mesmas razões do caso anterior. Para $m = 4$ existe somente um padrão possível: [abcbad]. Para $m = 5$ não existe padrão e $m = 6$ representa o estado de completa dessincronização, [abcdef]. Portanto, a partir de considerações sobre as simetrias satisfeitas pela rede de osciladores chegamos a conclusão que os possíveis padrões que poderão ser observados são: [ababab], [abaab], [abbacc], [abcabc] e [abcbad]. Na próxima seção, apresentamos os resultados experimentais.

5.5 Resultados Experimentais

Nesta seção apresentaremos os resultados experimentais que foram obtidos com a rede de osciladores de Rössler acoplados, conforme descrito ao longo deste capítulo. Tomamos medidas referentes a dois valores de R_{11} : i) $R_{11} = 113 k\Omega$ e ii) $R_{11} = 72 k\Omega$ (os outros valores dos componentes estão na tabela 2.2). Os circuitos desacoplados apresentam os espaços de fase dados pelas figuras 5.6 e 5.7, para os dois valores das resistências respectivamente. Usando um osciloscópio Lecroy 9310L, digitalizamos o sinal x_2^i ($i = 0, 1, \dots, 5$) de cada oscilador, com uma amostragem de 10^4 pontos. Como o osciloscópio possui somente duas entradas, a tomada de dados dos 6 osciladores que for-

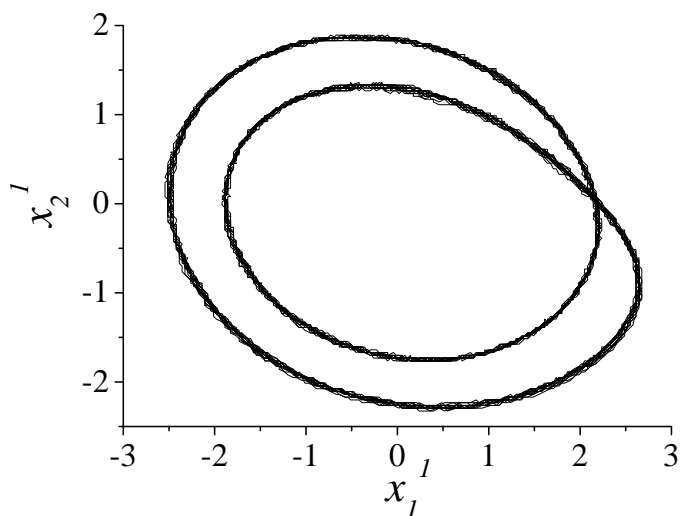


Fig. 5.6: Projção no plano xy do espaço de fase quando os osciladores estão desacoplados; $R_{11} = 113 k\Omega$. A evolução corresponde a uma órbita de período 2.

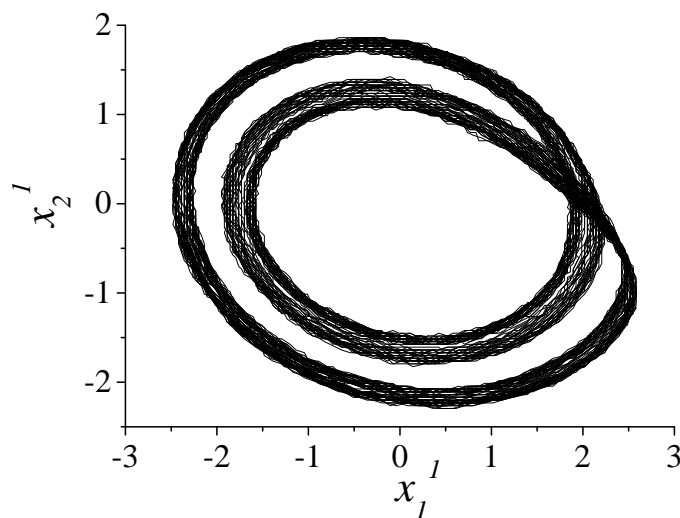


Fig. 5.7: Projção no plano xy do espaço de fase quando os osciladores estão desacoplados; $R_{11} = 72 k\Omega$. A evolução corresponde a uma órbita caótica próxima do ponto de acumulação da cascata de dobramento de período na região de valores elevados de R_{11} .

mam a rede não pode ser feita simultaneamente. Portanto, digitalizamos os sinais aos pares, sequencialmente, totalizando 30 medidas para um dado estado da rede. A partir dos arquivos de dados gerados pela digitalização, plotamos gráficos da forma $x_2^i \times x_2^j$, realizando todas as combinações, que são 15 no total. Para um dado valor da amplitude de acoplamento, verifica-se quais as combinações de osciladores na rede que estão sincronizados, e montamos os padrões de sincronização correspondentes. Quando dois circuitos estão sincronizados, deve aparecer uma reta na diagonal do gráfico. Como os resultados são experimentais, devido ao ruído, os traços são levemente borrados, principalmente quando a oscilação é caótica. Portanto, o traço aparece com uma pequena estrutura. Outro fator de erro experimental que enfrentamos é o de garantir que os circuitos da rede sejam idênticos. Usamos componentes com uma boa precisão (resistências com tolerância de 1%, capacitores com tolerância de 5% e amplificadores operacionais TL072) e todos os circuitos que utilizamos foram desenhados no computador, otimizando ao máximo a sua estabilidade operacional, e depois transformados em circuitos de chapa impressa a fim de garantir a máxima similitude entre estes. Apesar disso, não conseguimos garantir completa semelhança entre os circuitos. Uma inspeção visual do espaço de fase dos osciladores da rede mostra pequenas diferenças, sendo que à medida que R_{11} diminui (μ cresce) essas discrepâncias aumentam significativamente. Para garantirmos a igualdade entre os circuitos, realizamos um ajuste visual do espaço de fase de cada oscilador, alterando levemente os valores de R_{11} . Portanto, como já mencionamos na seção 4.2.1, o critério que utilizamos para sincronização idêntica é $|x_2^i(t) - x_2^j(t)| \leq \zeta$, onde ζ é um valor pequeno. O procedimento que usamos para encontrar os padrões é bastante empírico. Varia-se a amplitude de acoplamento, ϵ , desde zero até um valor pré-definido, que fixamos em $\epsilon = 2$. Relembramos que, experimentalmente, variar a amplitude de acoplamento significa alterar a tensão de controle do circuito 5.3, cuja montagem mencionamos na seção 5.2. Esta alteração é feita manualmente ajustando-se a amplitude de uma tensão DC. Quando, para um dado valor de ϵ , encontramos um certo padrão, tomamos a medida correspondente. No procedimento experimental o padrão formado na rede deve ser estável, isto é, o padrão deve

persistir na rede por um tempo longo o suficiente para que a medida seja feita. Em média uma medida completa do estado da rede leva cerca de 20 minutos. Dessa forma, os padrões instáveis não são contemplados neste procedimento de medida e, apesar disso, para $R_{11} = 113 k\Omega$, obtemos os 5 padrões possíveis. Para $R_{11} = 72 k\Omega$ devido ao comportamento inicial ($\epsilon = 0$) dos circuitos já ser caótico, o reconhecimento dos padrões se torna muito mais difícil e encontramos somente um padrão, $[ababab]$, além do estado de sincronização global. A seguir, apresentamos os resultados experimentais para $R_{11} = 113 k\Omega$, na ordem de ϵ crescente. Nota-se que alguns dos padrões se repetem para valores diferentes da constante de acoplamento, porém, seus comportamentos dinâmicos não são os mesmos. Um exemplo é o padrão $[ababab]$ que aparece primeiro com uma oscilação caótica próxima a uma órbita de período 1. Para um ϵ maior, esse padrão ocorre novamente com um comportamento periódico de período 2. Após os padrões para $R_{11} = 113 k\Omega$ está o estado de sincronização global para $R_{11} = 72 k\Omega$ e também o padrão $[ababab]$ para este valor da resistência.

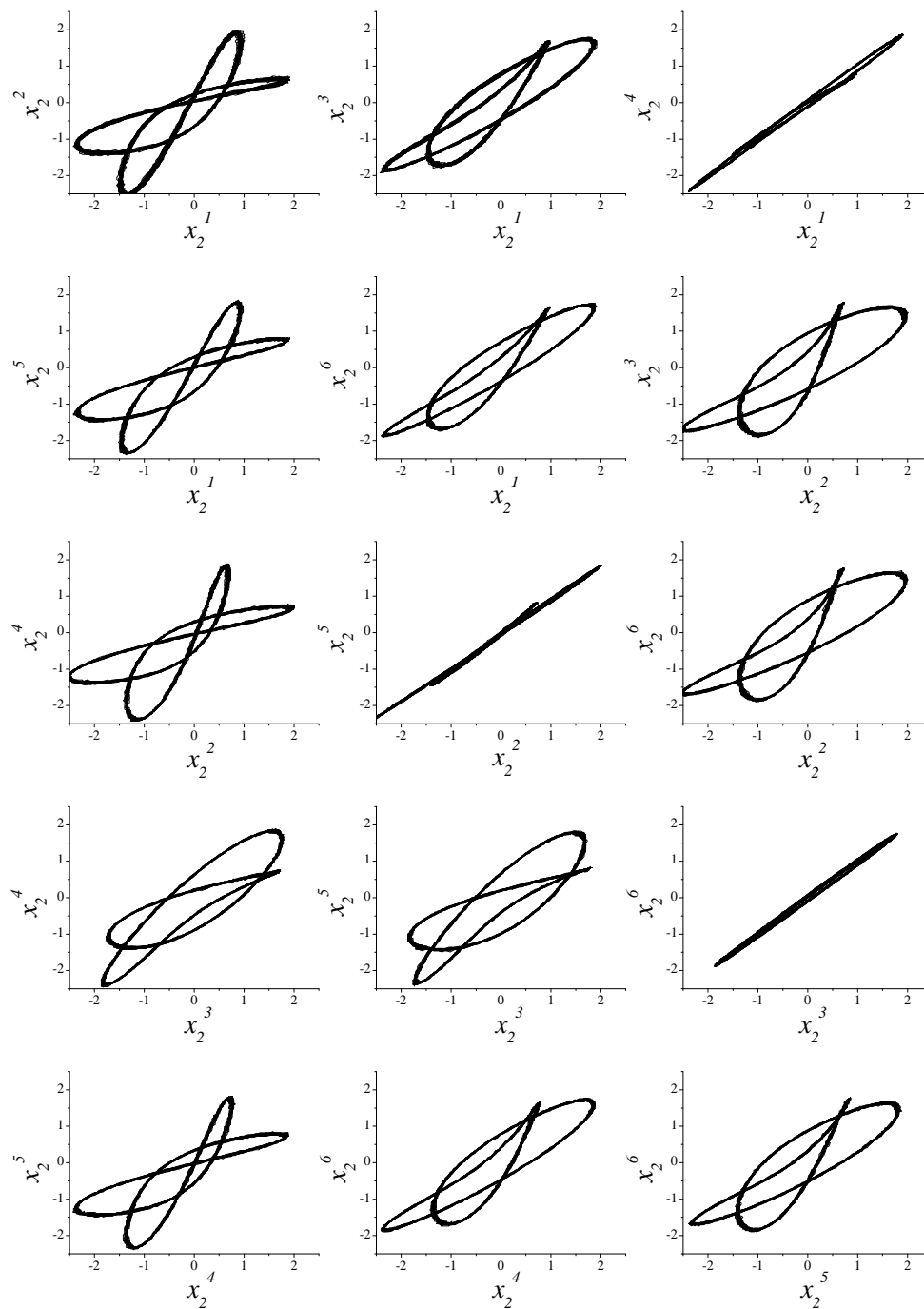


Fig. 5.8: Padrão experimental $[abcabc]$. $\epsilon = 0.249$, $R_{11} = 113 \text{ k}\Omega$.

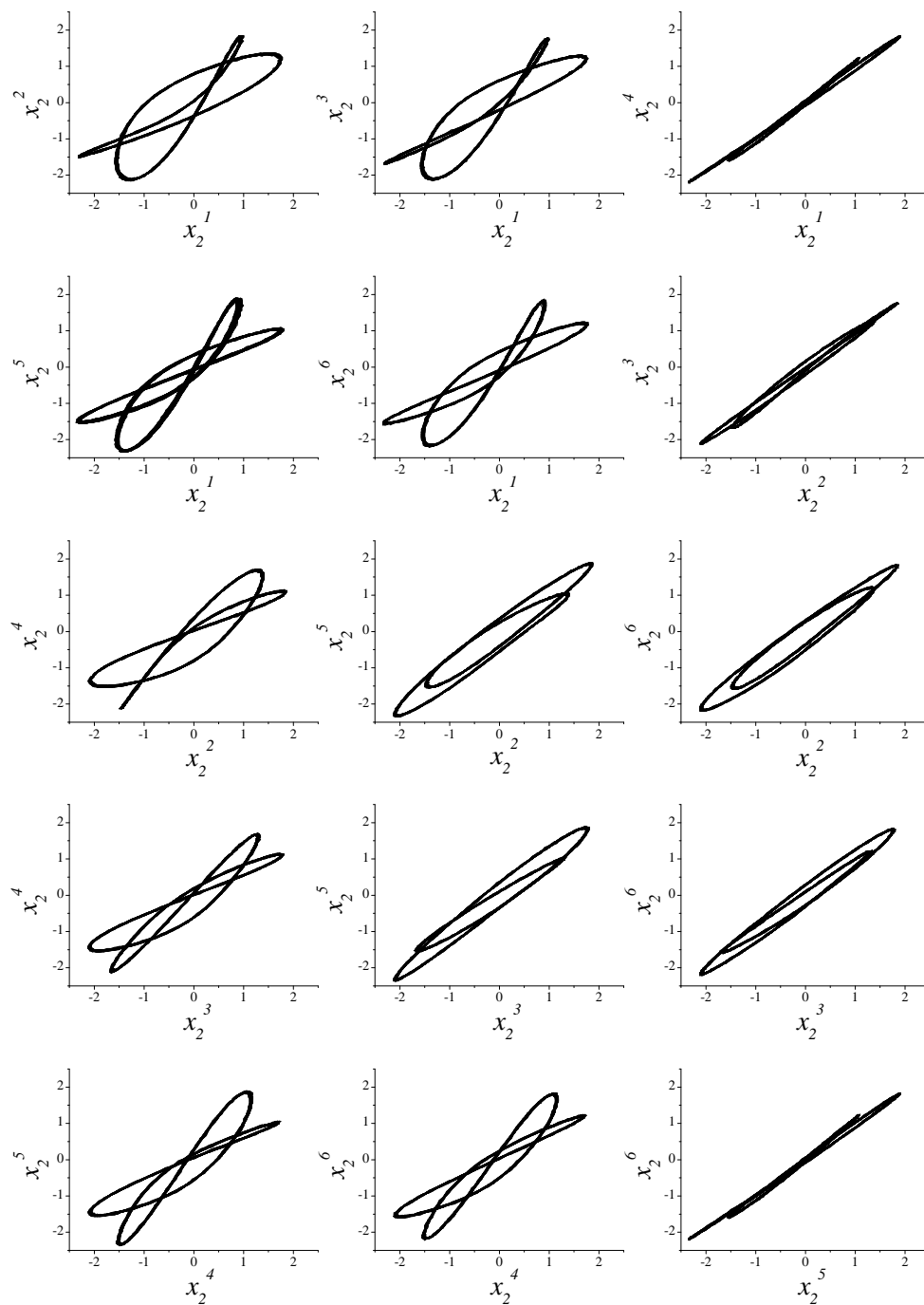


Fig. 5.9: Padrão experimental [abbacc]. $\epsilon = 0.261$, $R_{11} = 113 k\Omega$.

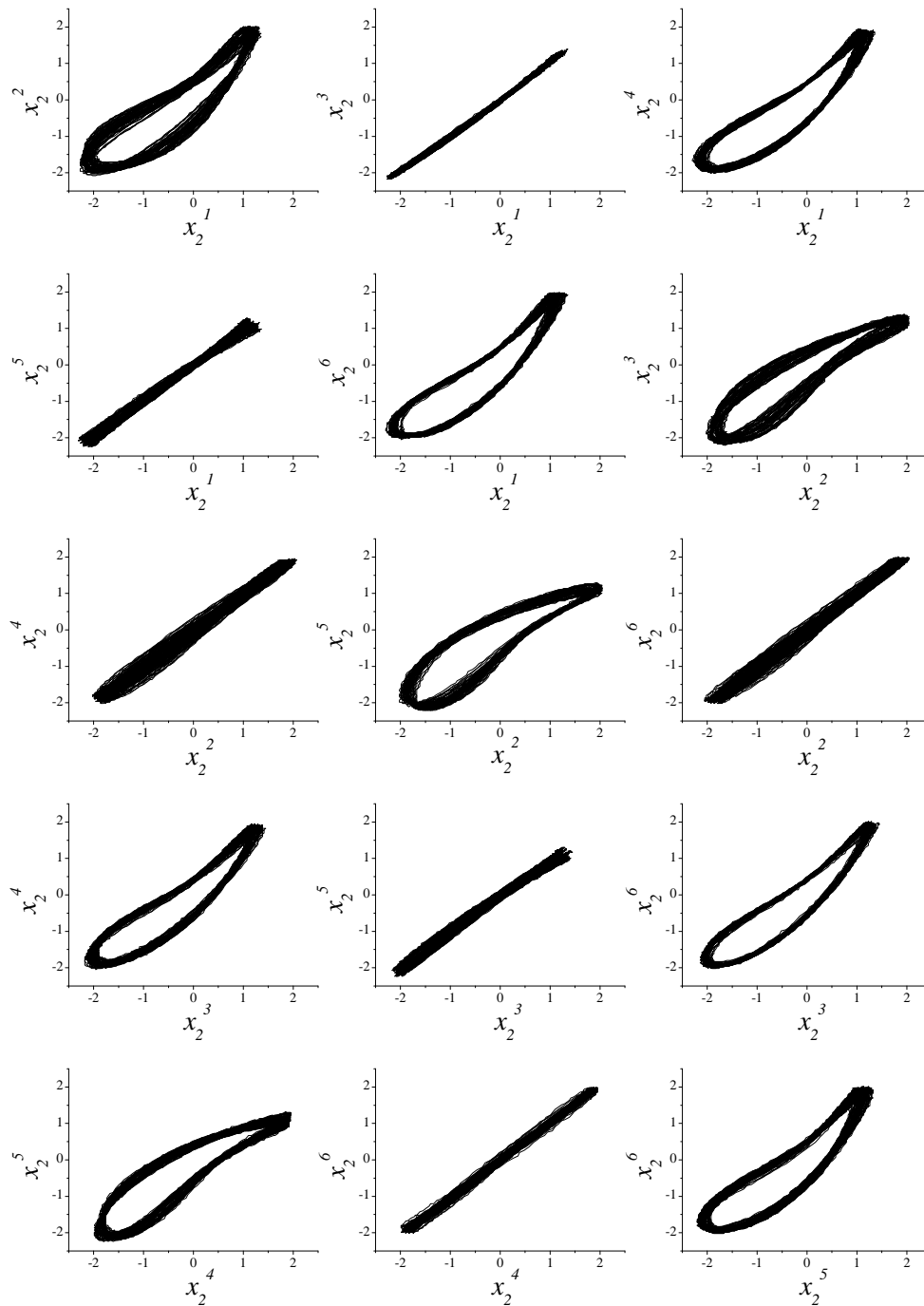


Fig. 5.10: Padrão experimental [ababab]. $\epsilon = 0.357$, $R_{11} = 113 k\Omega$.

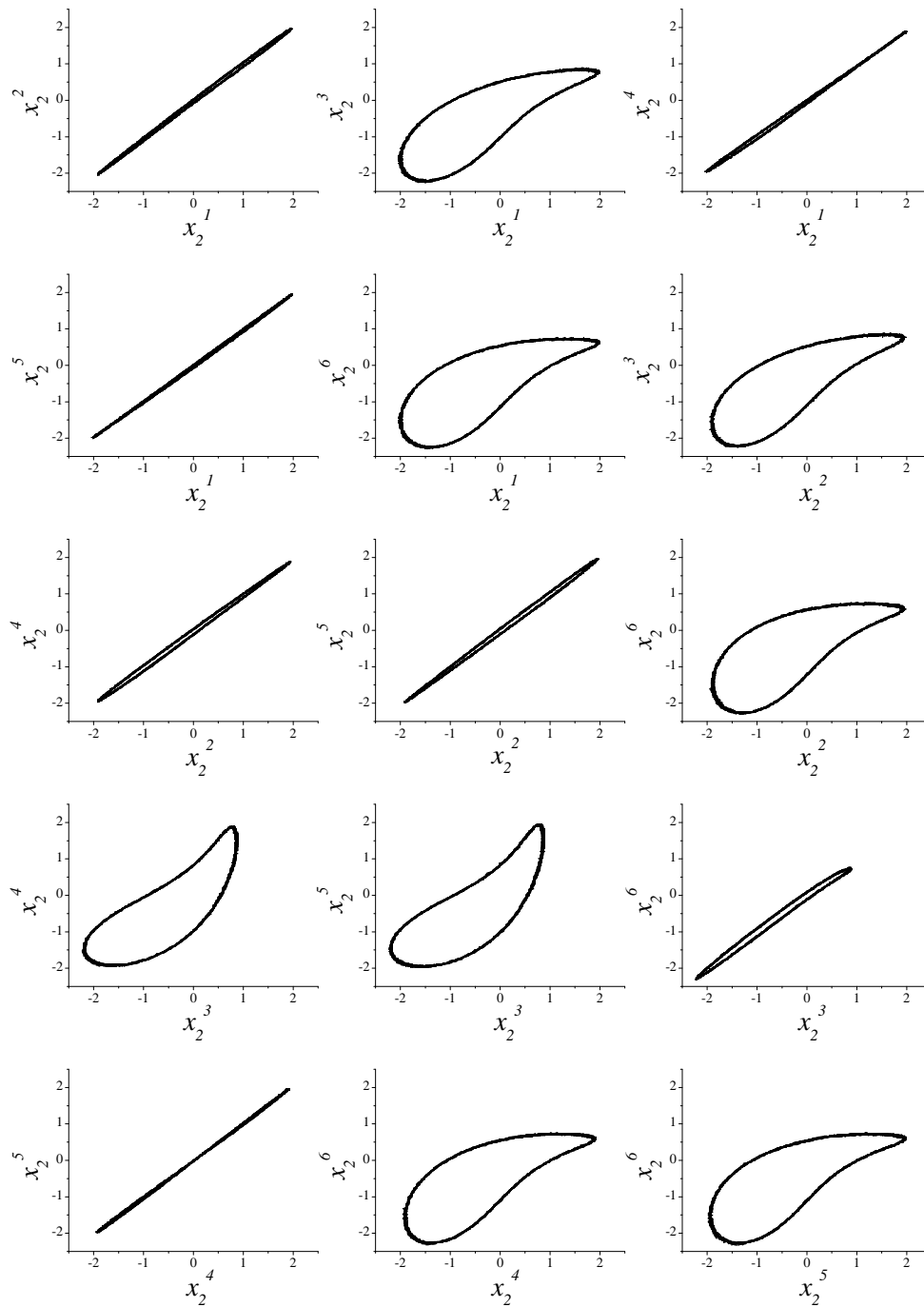


Fig. 5.11: Padrão experimental [aabaab]. $\epsilon = 0.435$, $R_{11} = 113 \text{ k}\Omega$.

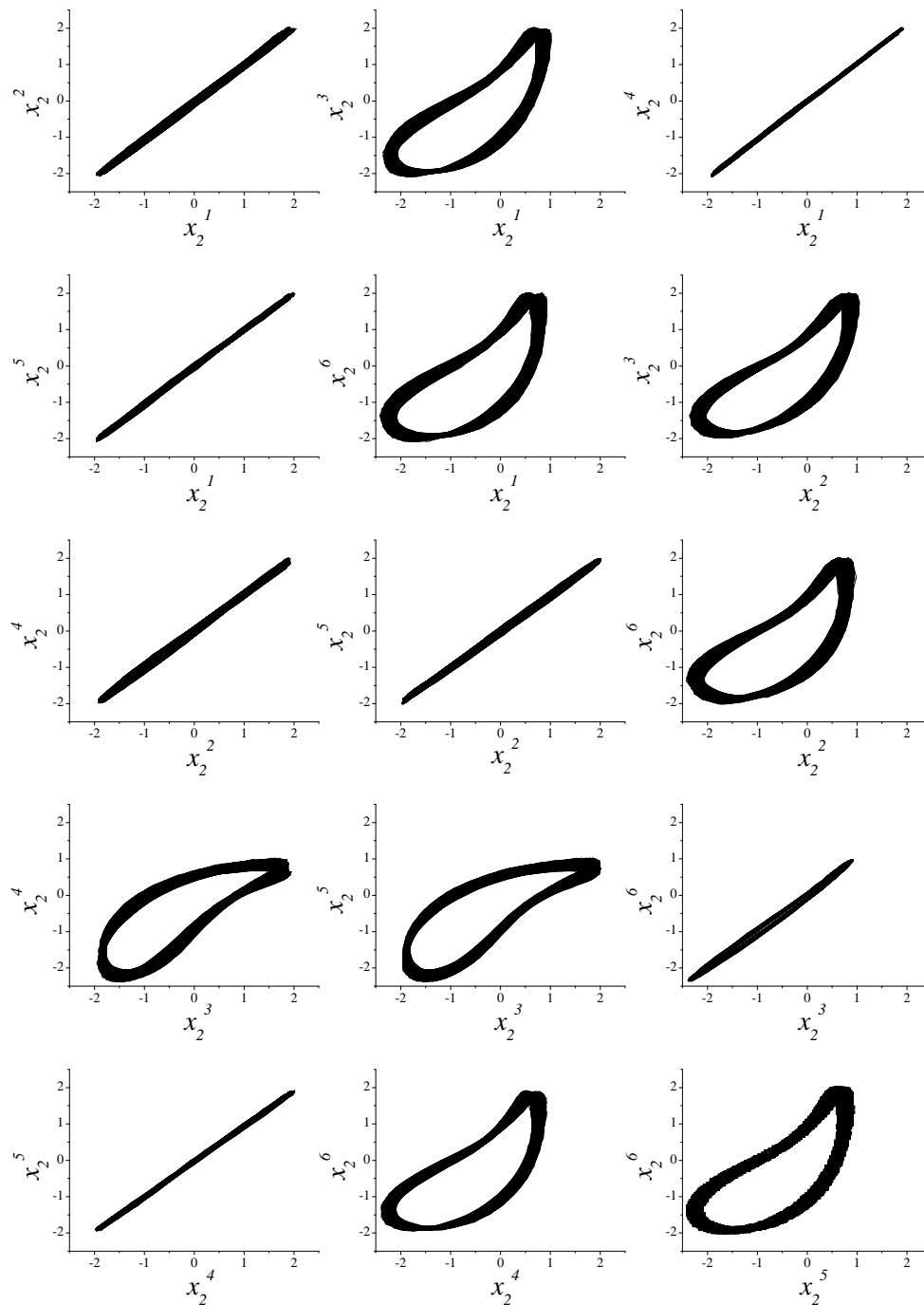


Fig. 5.12: Padrão experimental [aabaab]. $\epsilon = 0.463$, $R_{11} = 113 \text{ k}\Omega$.

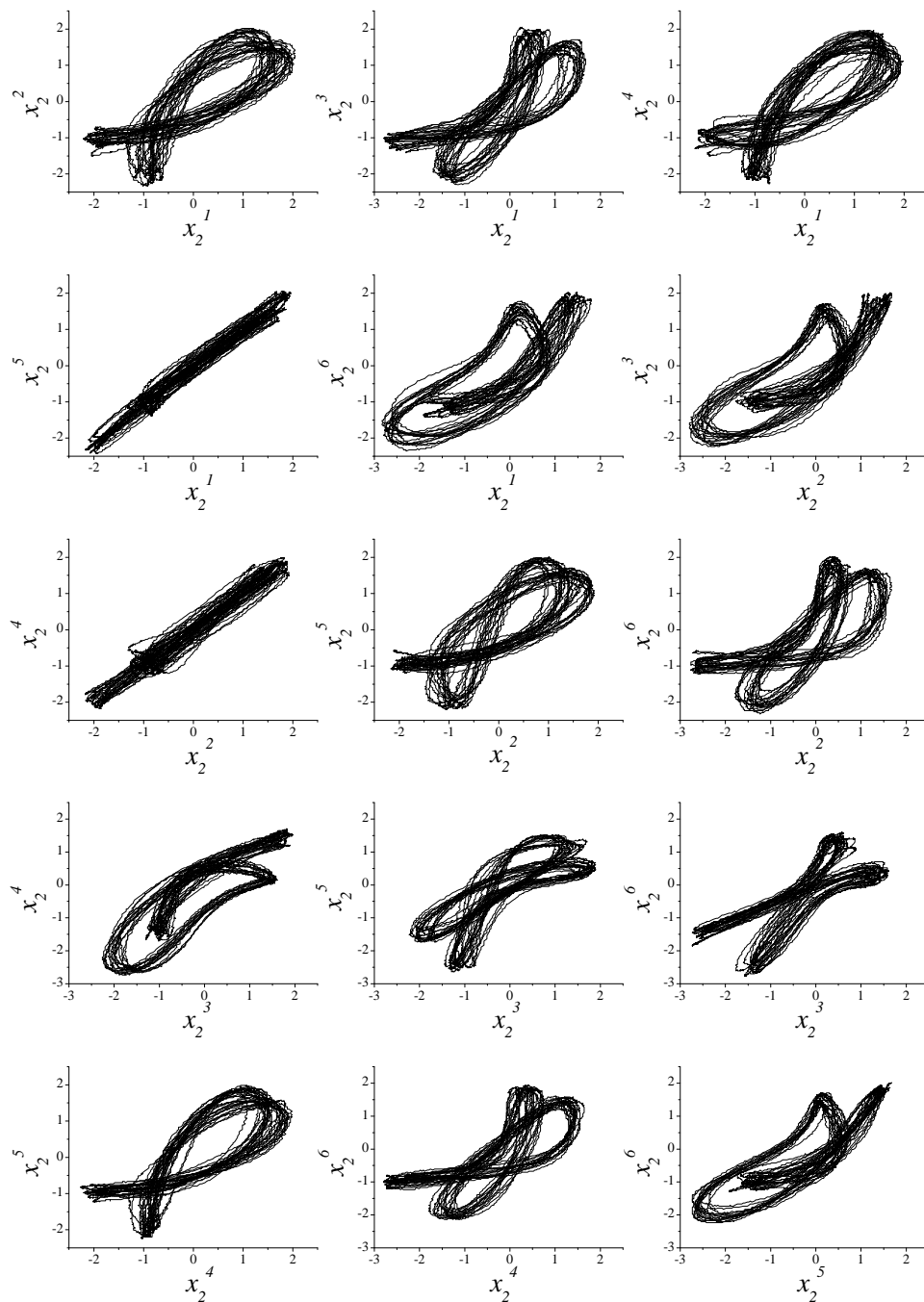


Fig. 5.13: Padrão experimental $[abcba]$. $\epsilon = 0.578$, $R_{11} = 113 \text{ k}\Omega$.

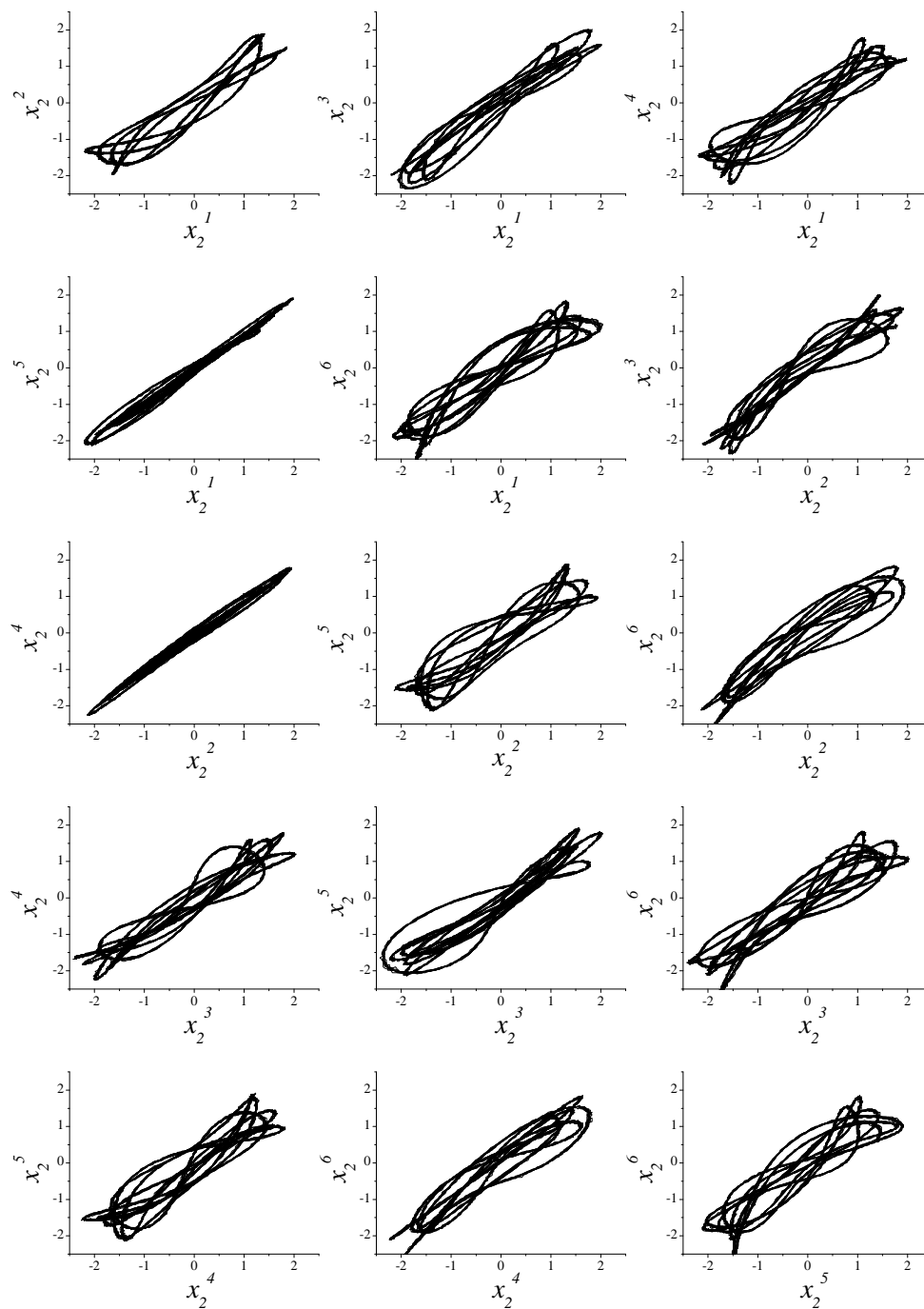


Fig. 5.14: Padrão experimental [abcba]. $\epsilon = 0.673$, $R_{11} = 113 k\Omega$.

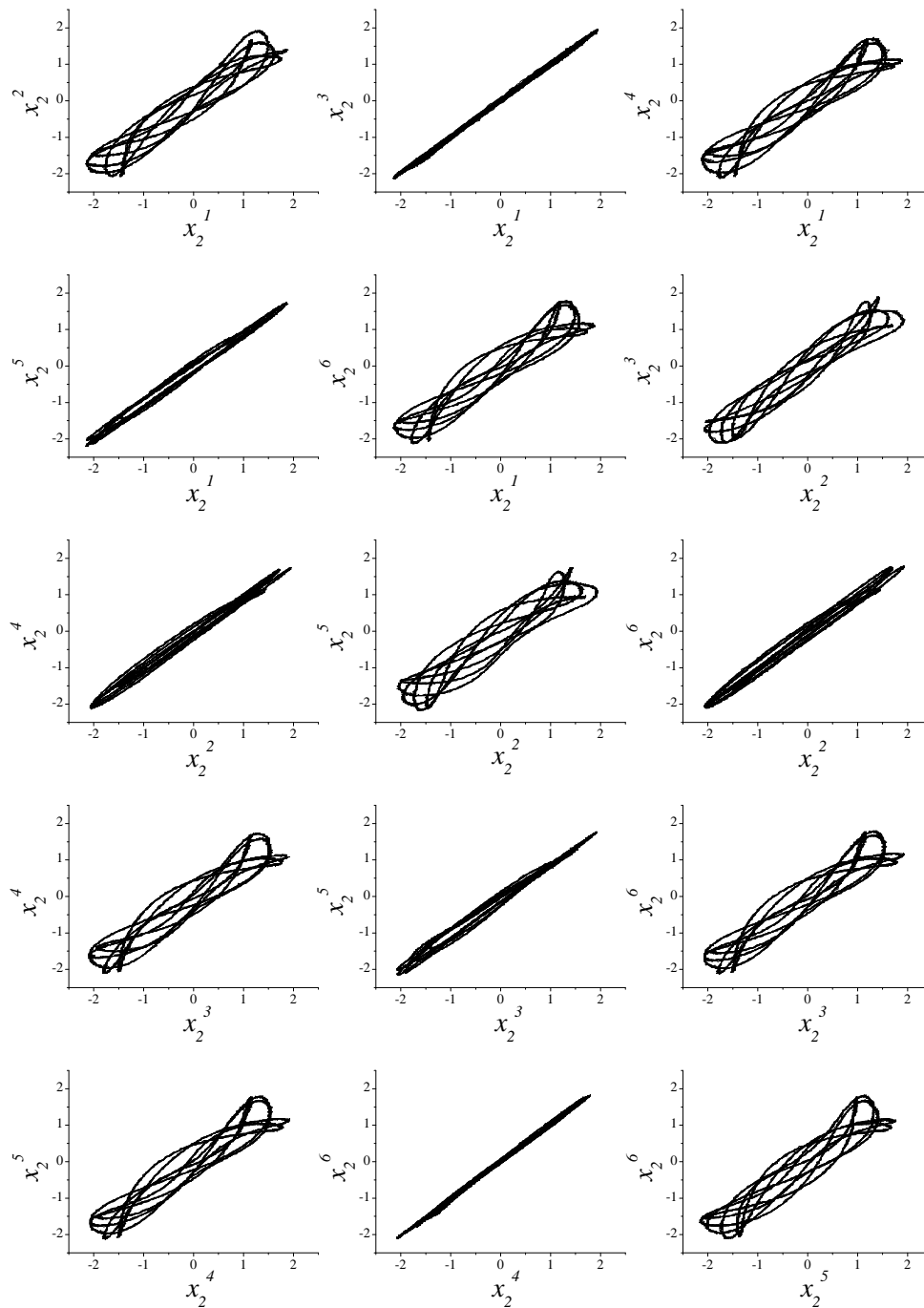


Fig. 5.15: Padrão experimental [ababab]. $\epsilon = 0.93$, $R_{11} = 113 k\Omega$.

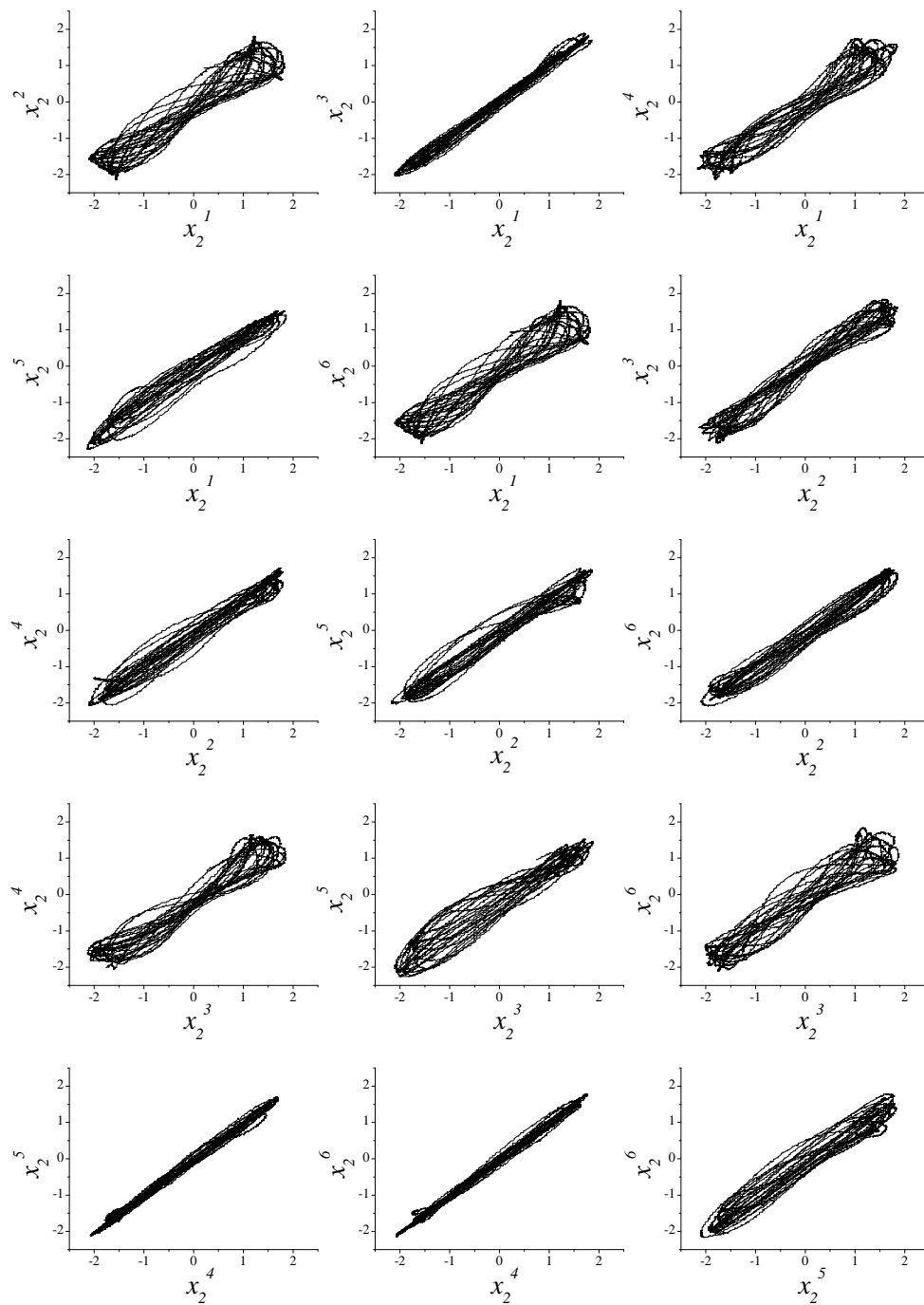


Fig. 5.16: Padrão experimental [aaaaaa]. $\epsilon = 1.258$, $R_{11} = 113 \text{ k}\Omega$.

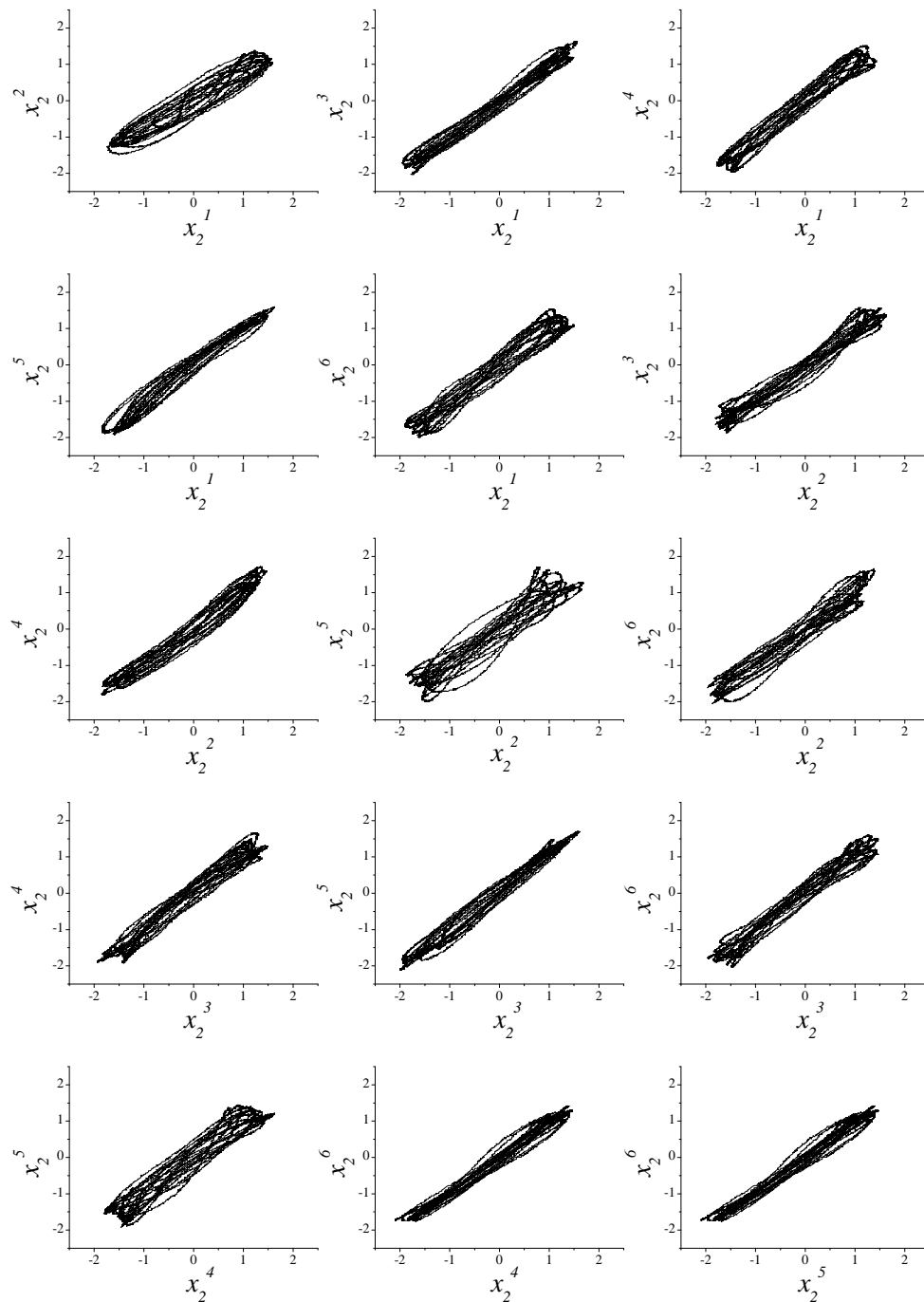


Fig. 5.17: Padrão experimental [aaaaaa]. $\epsilon = 0.55$, $R_{11} = 72 k\Omega$.

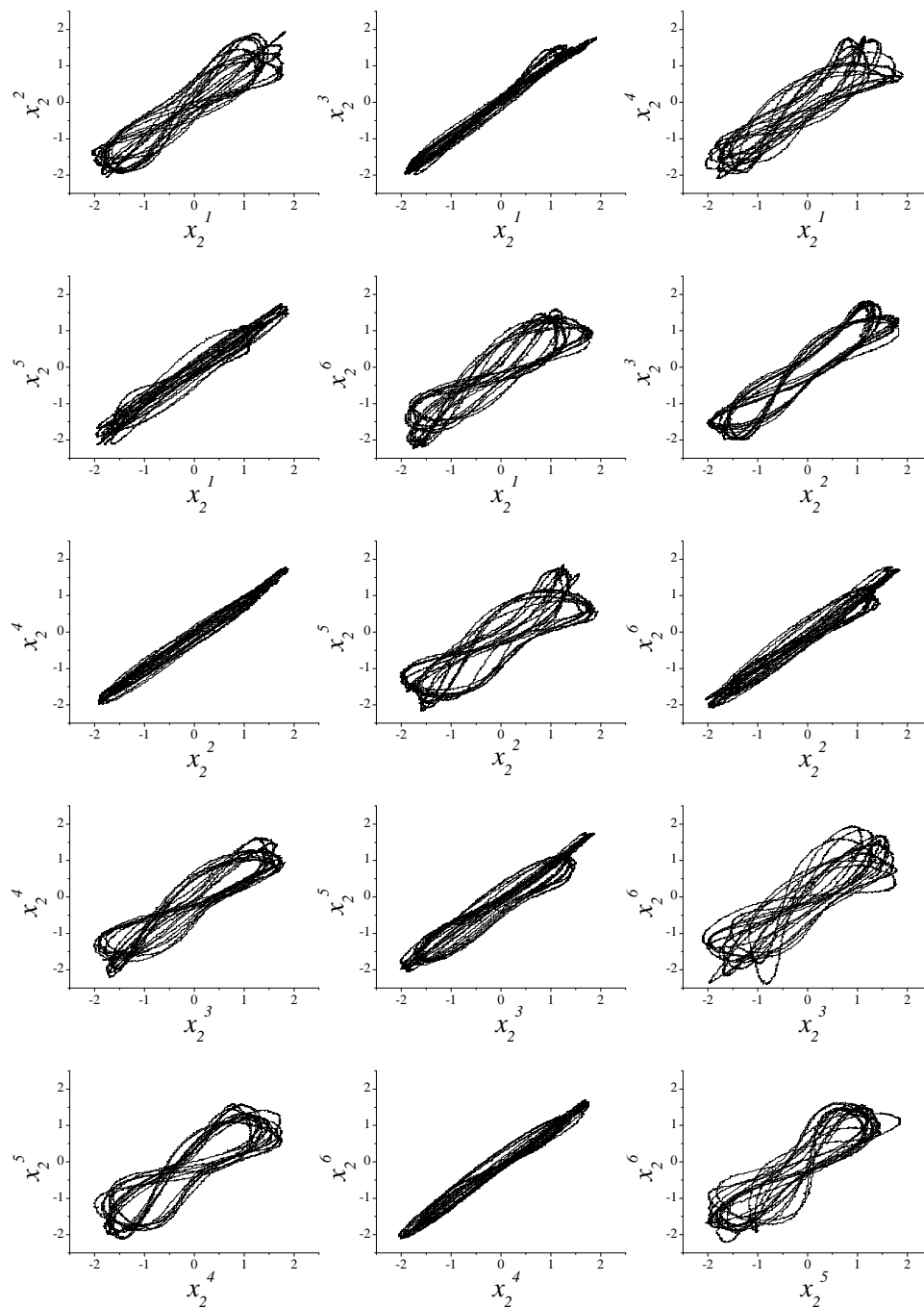


Fig. 5.18: Padrão experimental [ababab]. $\epsilon = 0.804$, $R_{11} = 72 k\Omega$.

5.6 Análise Comparativa

Nesta última seção realizaremos uma análise comparativa entre os resultados experimentais que foram expostos na seção anterior e alguns resultados numéricos que obtivemos usando o modelo de equações de Rössler modificadas (5.1). Na integração numérica do sistema (5.1) utilizamos $R_{11} = 150 k\Omega$ correspondendo à situação experimental da figura 5.6, isto é, quando $\epsilon = 0$ os circuitos evoluem numa órbita de período 2. Por sua vez, para a situação experimental da figura 5.7 (órbita caótica quando $\epsilon = 0$) empregamos $R_{11} = 120 k\Omega$ na análise numérica. A razão para usarmos tais valores para R_{11} na integração numérica será discutida posteriormente. Nas figuras 5.4 e 5.5 apresentamos as curvas do máximo expoente de Lyapunov transversal em função da amplitude de acoplamento, observando que existem regiões de ϵ onde o estado de sincronização global é instável. É nessas regiões, como mostramos nas figuras a seguir, que encontramos os padrões de sincronização, como já havíamos suposto. Ao lado de cada padrão obtido numericamente colocamos o padrão experimental correspondente, e podemos observar uma semelhança qualitativa muito boa entre eles.

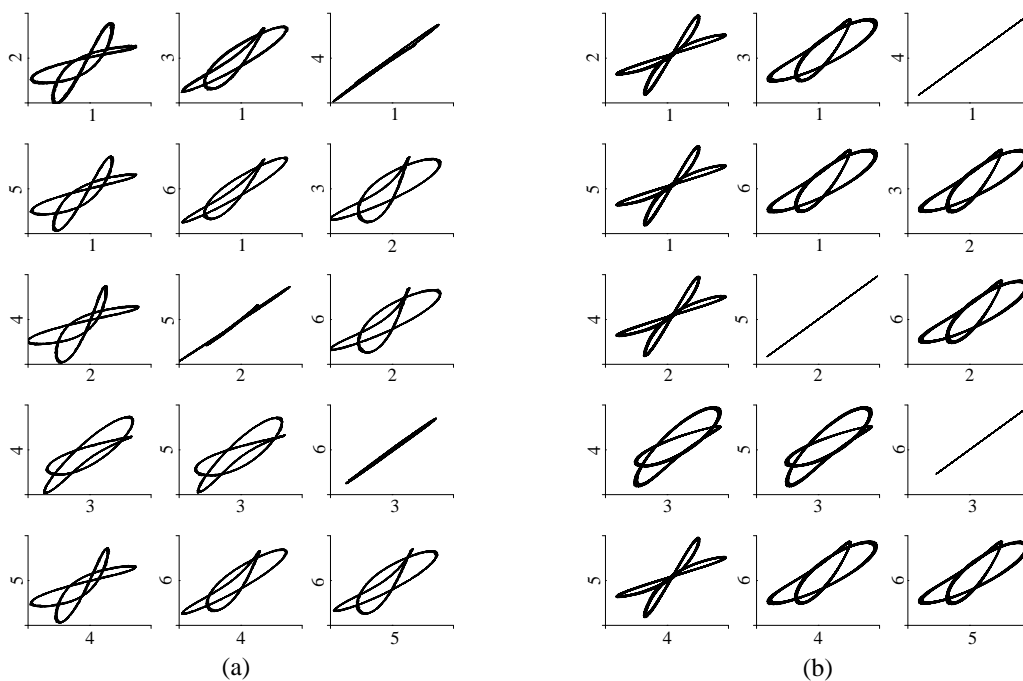


Fig. 5.19: (a) Padrão experimental ($R_{11} = 113 \text{ k}\Omega$): $[abcabc]$, $\epsilon = 0.249$ e (b) Padrão numérico ($R_{11} = 150 \text{ k}\Omega$): $[abcabc]$, $\epsilon = 0.17$.

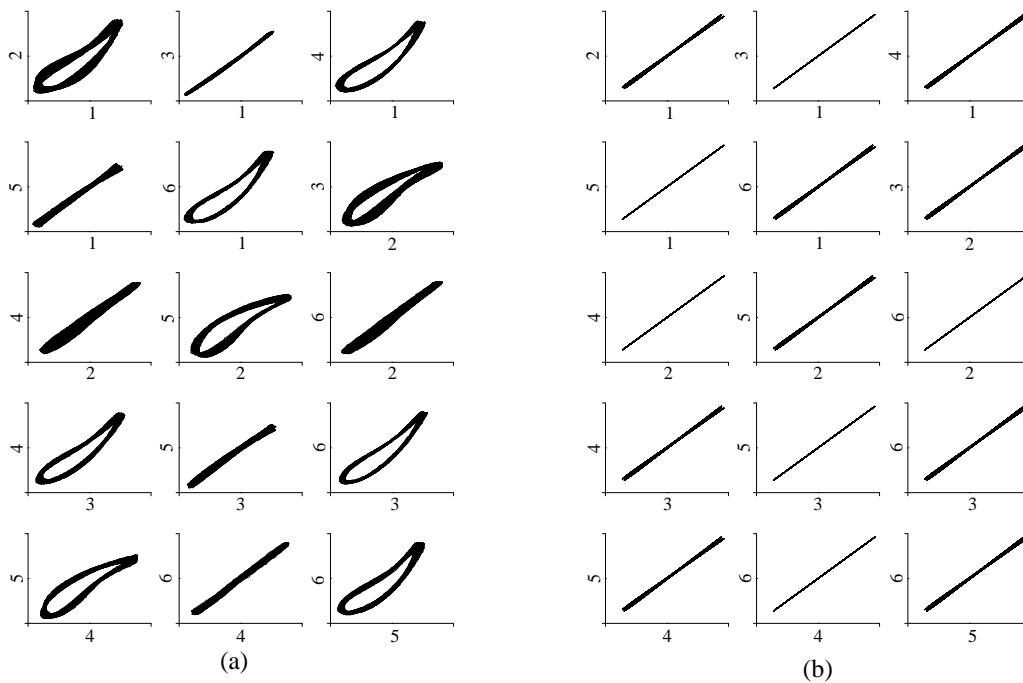


Fig. 5.20: (a) Padrão experimental ($R_{11} = 113 \text{ k}\Omega$): $[ababab]$, $\epsilon = 0.357$ e (b) Padrão numérico ($R_{11} = 150 \text{ k}\Omega$): $[ababab]$, $\epsilon = 0.25$.

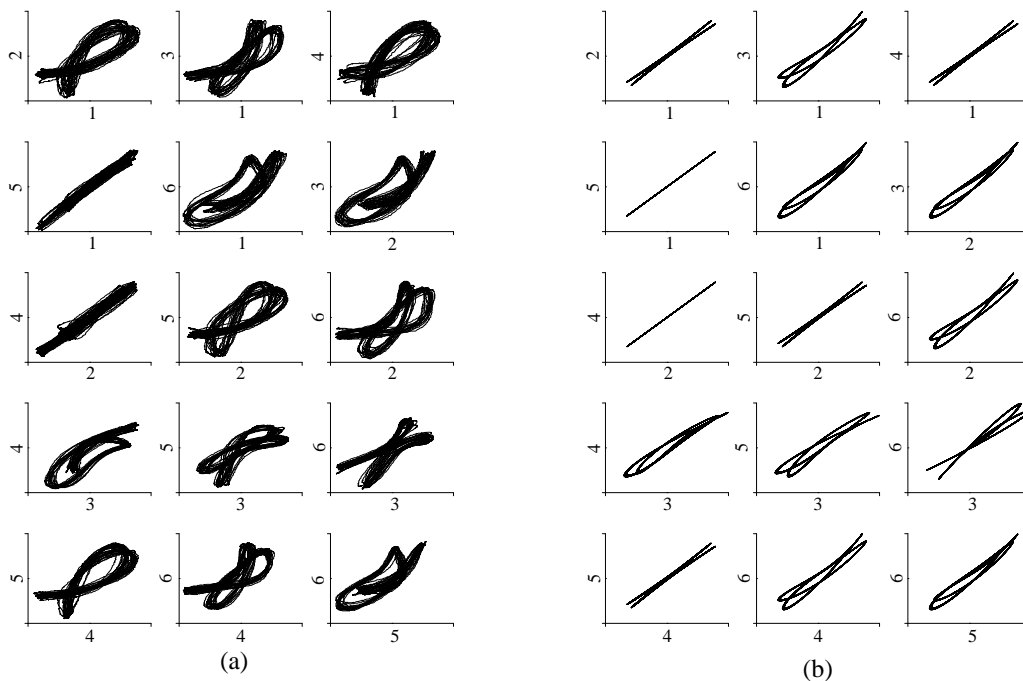


Fig. 5.21: (a) Padrão experimental ($R_{11} = 113 \text{ k}\Omega$): $[abcbad]$, $\epsilon = 0.578$ e (b) Padrão numérico ($R_{11} = 150 \text{ k}\Omega$): $[abcbad]$, $\epsilon = 0.59$.

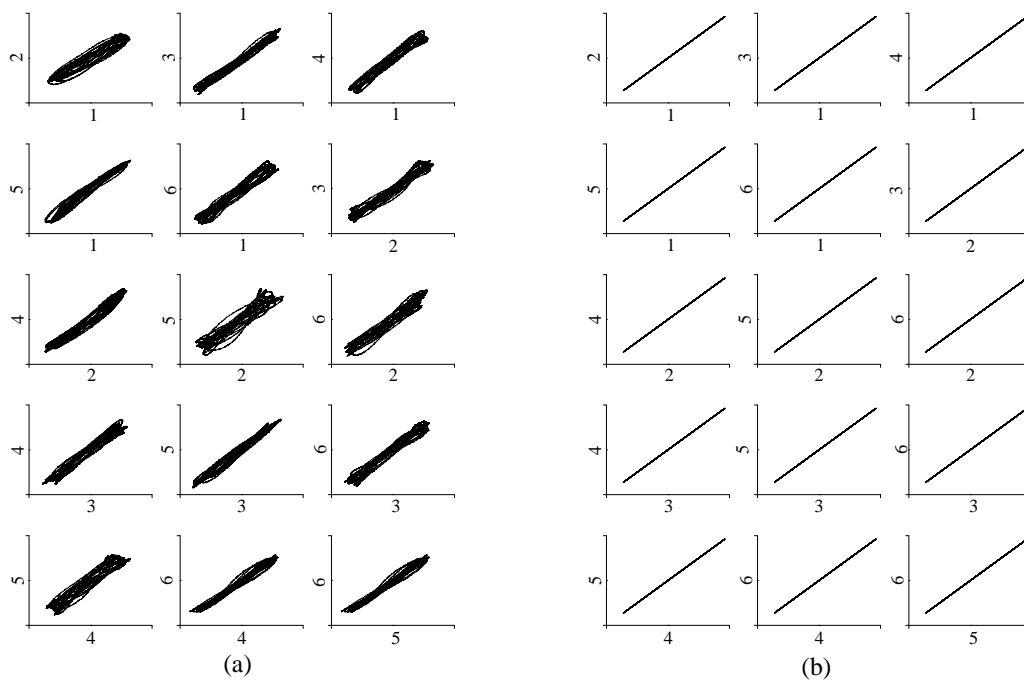


Fig. 5.22: (a) Padrão experimental ($R_{11} = 72 k\Omega$): $[aaaaaa]$, $\epsilon = 0.55$ e (b) Padrão numérico ($R_{11} = 120 k\Omega$): $[aaaaaa]$, $\epsilon = 0.31$.

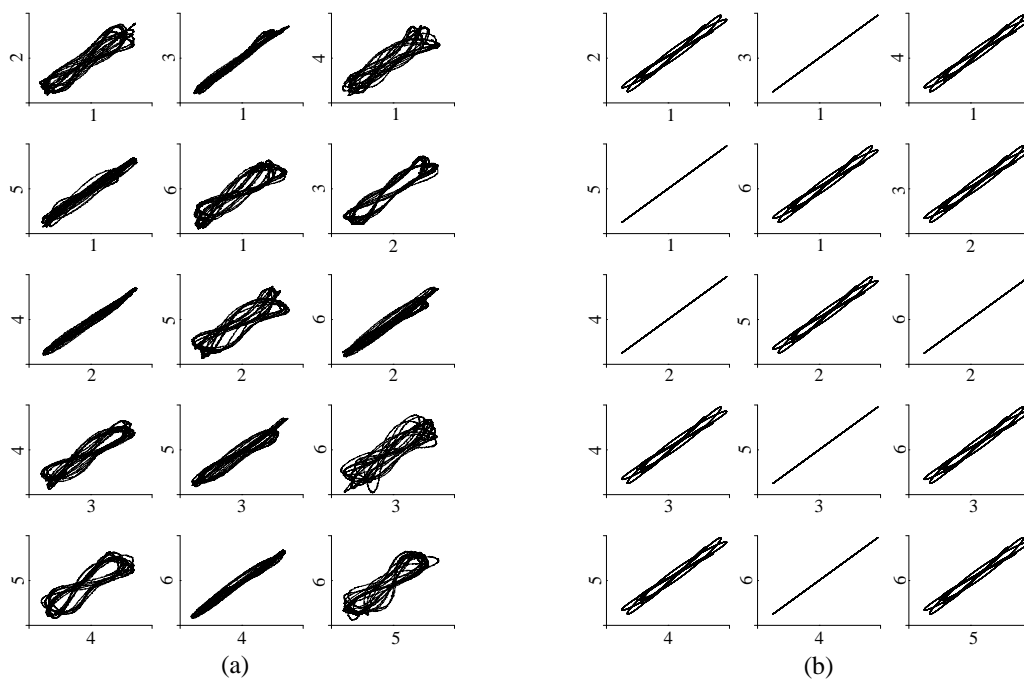


Fig. 5.23: (a) Padrão experimental ($R_{11} = 72 \text{ k}\Omega$): $[ababab]$, $\epsilon = 0.804$ e (b) Padrão numérico ($R_{11} = 120 \text{ k}\Omega$): $[ababab]$, $\epsilon = 0.57$.

Conforme discutimos na seção 2.2, a semelhança quantitativa entre o sistema integrado numericamente e o sistema integrado experimentalmente não é boa. As figuras 5.19-5.23 refletem essa falta de semelhança quantitativa, mas por outro lado, apresentam uma boa semelhança qualitativa. Por exemplo, na figura 5.19, comparando par a par as figuras geradas pelos sistemas osciladores quando integrados numericamente e experimentalmente, vemos que a forma do traçado gerado é muito parecido. Isto é nítido, também, para as figuras 5.21 e 5.23. A figura 5.20 mostra o padrão $[ababab]$ na qual os comportamentos a e b diferem somente de um certo valor constante de fase. Como pode-se ver, este valor é quantitativamente diferente para o padrão experimental. Porém, a confiança que temos de que se trata do mesmo padrão está no fato de o padrão numérico não apresentar uma estrutura, como por exemplo, a figura 5.23(b) que também é um padrão $[ababab]$. As figuras 5.22 e 5.23 correspondem ao estado inicial caótico e, portanto, a tendência natural dos traçados tende a ser parecido com um sistema ruidoso. Apesar disso, nota-se uma boa semelhança nas estruturas dos traçados das figuras 5.20(a) e (b). Quanto ao valor de ϵ na qual os padrões ocorrem, nota-se uma discrepância quantitativa entre o experimental e o numérico. Porém, mantém-se a ordem dos valores, isto é, a seqüência de padrões numéricos é a mesma que a seqüência de padrões experimentais e, os valores das amplitudes de acoplamento na qual se verificam os padrões numéricos estão em acordo com as curvas de estabilidade do estado sincronizado, 5.4 e 5.5. Por exemplo, na figura 5.19 o padrão $[abcabc]$ ocorre para um valor de $\epsilon = 0.17$ e, observando a curva 5.4, vemos que este valor corresponde a λ_{max}^{\perp} positivo, ou seja, este valor está na região de instabilidade do estado de sincronização global. Outro exemplo é a figura 5.22 onde todos os osciladores estão sincronizados e que ocorre para $\epsilon = 0.31$. Como podemos observar pela curva 5.5, este valor de ϵ corresponde a λ_{max}^{\perp} negativo, isto é, este valor está numa região de estabilidade do estado sincronizado. Portanto, nossa hipótese inicial de que as regiões de λ_{max}^{\perp} negativo, isto é, as regiões de instabilidade do estado de sincronização global, corresponderiam à regiões onde poderiam surgir padrões de sincronização é verificada.

Cabe ainda justificar os valores de R_{11} usados na integração numérica. Estes

valores são $R_{11} = 150\text{ k}\Omega$ e $R_{11} = 120\text{ k}\Omega$, contrastando com o valores experimentais de $R_{11} = 113\text{ k}\Omega$ e $R_{11} = 72\text{ k}\Omega$, respectivamente. A figura 5.6 mostra os gráficos gerados pela superposição dos espaços de fase obtidos experimental e numericamente para os dois valores de R_{11} . Nota-se uma expressiva semelhança qualitativa entre estes. O

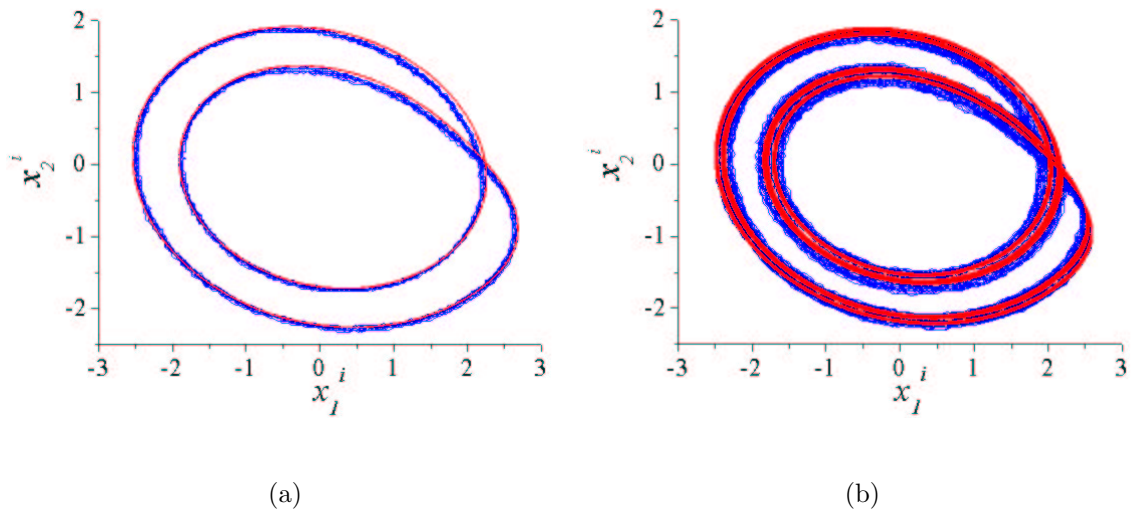


Fig. 5.24: O traço azul corresponde ao espaço de fase experimental (a) $R_{11} = 113\text{ k}\Omega$ e (b) $R_{11} = 72\text{ k}\Omega$. O traço vermelho é o espaço de fase obtido numericamente (a) $R_{11} = 150\text{ k}\Omega$ e (b) $R_{11} = 120\text{ k}\Omega$ sendo que este foi multiplicado por um fator 0.85.

critério que utilizamos foi o de inspeção visual, onde esperamos uma boa similitude qualitativa já que a similitude quantitativa não se verifica como já mencionamos anteriormente. Na figura 5.6 as variáveis x , y e z do sistema integrado numericamente foram multiplicadas por um fator constante de 0.85. Vemos, dessa forma, que os resultados obtidos numericamente, apesar de não estarem em pleno acordo quantitativo, sugerem uma ótima informação qualitativa que pudemos perceber nas figuras comparativas anteriormente apresentadas.

6. CONCLUSÃO

Neste trabalho demonstramos experimentalmente a sincronização parcial numa rede formada por seis osciladores, onde cada oscilador integra o sistema de equações de Rössler modificado. Utilizamos um acoplamento simétrico entre primeiros vizinhos no qual cada oscilador da rede está acoplado a seu vizinho anterior e posterior através de sua variável x . O termo de acoplamento é multiplicado por uma constante que chamamos de amplitude de acoplamento, a qual determina a fração de sinal que é somado ou subtraído às variáveis x de cada oscilador. Toda implementação experimental se realizou através de circuitos eletrônicos, desde os osciladores, circuito acoplador e circuito que gera a amplitude de acoplamento. Optamos por este tipo de equipamento pela sua fácil reproduzibilidade e pela enorme gama de possibilidades de montagens que geram praticamente todas as operações matemáticas.

A primeira abordagem que realizamos foi experimental e tínhamos interesse em observar a sincronização idêntica entre todos os osciladores da rede. Porém, observamos que, para certos valores da amplitude de acoplamento, alguns osciladores da rede sincronizam identicamente entre si mas não o fazem com os outros. Notamos que, além da sincronização idêntica entre todos os osciladores o número de padrões gerados é bem reduzido. Após esta observação, partimos para um estudo analítico-numérico da dinâmica da rede de osciladores. A nossa proposta foi a de analisar a estabilidade do estado da rede na qual todos os osciladores estão sincronizados identicamente e que chamamos de estado de sincronização global. Conhecendo-se a estabilidade deste estado em função da amplitude de acoplamento vemos que, para certas regiões de valores da amplitude este estado deve ser instável, possibilitando a formação de estados de sincronização parcial. O resultado que esta análise nos proporcionou foi positivo,

corroborando a observação experimental.

O número reduzido de padrões possíveis é explicado pelo fato de a rede satisfazer duas condições de simetria: i) a rede é invariante frente aos sentidos horário e anti-horário devido ao acoplamento simétrico e ii) a rede é invariante frente às permutações dos osciladores pelo fato destes serem idênticos. Para uma rede de seis osciladores, somente cinco padrões de sincronização satisfazem estas duas condições de simetria, sendo que observamos todos os cinco padrões experimentalmente. Ao nosso conhecimento, esses resultados constituem a primeira evidência experimental de sincronização parcial. O problema que enfrentamos na análise comparativa entre os resultados experimentais e numéricos foi a falta de similitude quantitativa. Por outro lado, qualitativamente os resultados numéricos confirmam os resultados experimentais.

O ajuste numérico quantitativo é a primeira perspectiva de trabalho futuro. No capítulo 2 apresentamos uma idéia nesse sentido quando falamos da questão da modelagem numérica do diodo. Como experimentalmente ele é responsável pela não linearidade do sistema, certamente só será possível obter-se um bom resultado numérico se a sua modelagem estiver numa forma adequada. Outra perspectiva de trabalho está relacionada com a determinação da estabilidade de cada padrão em função da amplitude de acoplamento. No presente trabalho só determinamos numericamente os intervalos de ϵ nos quais podem ocorrer os padrões (regiões de instabilidade do estado de sincronização global), assim não podemos afirmar de antemão qual seria o padrão para um dado valor da amplitude de acoplamento. Para isso temos que estender a análise apresentada na seção 5.3.1. Também temos como perspectiva de trabalho futuro um estudo do comportamento dinâmico da rede quando um certo padrão é estabelecido, isto é, queremos determinar que tipo de comportamento dinâmico representam as letras a , b , c e d nos padrões (oscilação periódica, quasiperiódica ou caótica). Como pudemos observar, mudando a amplitude de acoplamento, além de ocorrerem diferentes padrões, o comportamento dinâmico da rede também pode mudar, inclusive alguns padrões se repetem com comportamentos dinâmicos diferentes, ou seja, a rede apresenta uma complexidade espaço-temporal.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. *Chaos: an introduction to dynamical systems*. New York: Springer-Verlag, 1996.
- [2] STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering*. Reading: Perseus Books Publishing, 1994.
- [3] HILBORN, R. C. *Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers*. Oxford: Oxford University Press, 1994.
- [4] SCHUSTER, H. G. *Deterministic chaos: an introduction*. Weinheim: VCH Verlagsgesellschaft, 1988.
- [5] WINFUL, H. G.; RAHMAN, L. Synchronized chaos and spatiotemporal chaos in arrays of coupled lasers. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 65, n. 13, p. 1575–1578, Sept. 1990.
- [6] OTSUKA, K.; CHERN, J.-L. Dynamical spatial-pattern memory in globally coupled lasers. *Phys. Rev. A*, Woodbury, v. 45, n. 11, p. 8288–8291, June 1992.
- [7] HEAGY, J. F.; CARROLL, T. L.; PECORA, L. M. Synchronous chaos in coupled oscillator systems. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 50, n. 3, p. 1874–1885, Sept. 1994.
- [8] HEAGY, J. F.; CARROLL, T. L.; PECORA, L. M. Transforming signals with chaotic synchronization. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 54, n. 5, p. 4676–4680, Nov. 1996.

- [9] PECORA, L. M.; CARROLL, T. L. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 64, n. 8, p. 821–824, Feb. 1990.
- [10] HU, G.; ZHANG, Y.; CERDEIRA, H. A.; CHEN, S. From low-dimensional synchronous chaos to high-dimensional desynchronous spatiotemporal chaos in coupled systems. *Phys. Rev. Lett.*, Melville, v. 85, n. 16, p. 3377–3380, Oct. 2000.
- [11] YOSHIMOTO, M.; YOSHIKAWA, K.; MORI, Y. Coupling among three chemical oscillators: synchronization, phase death, and frustration. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 47, n. 2, p. 864–874, Feb. 1993.
- [12] CUOMO, K. M.; OPPENHEIM, A. V. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 71, n. 1, p. 65–68, July 1993.
- [13] OTT, E.; GREBOGI, C.; YORKE, J. A. Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 64, n. 11, p. 1196–1199, Mar. 1990.
- [14] CARROLL, T. L.; PECORA, L. M. Driving systems with chaotic signals. *Phys. Rev. A*, Woodbury, v. 44, n. 4, p. 2374–2383, Aug. 1991.
- [15] BROWN, R.; RULKOV, N. F. Designing a coupling that guarantees synchronization between chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 78, n. 22, p. 4189–4192, June 1997.
- [16] CARROLL, T. L. A simple circuit for demonstrating regular and synchronized chaos. *Am. J. Phys.*, Woodbury, v. 63, n. 4, p. 377–379, Apr. 1995.
- [17] PÉREZ, G.; CERDEIRA, H. A. Extracting messages masked by chaos. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 74, n. 11, p. 1970–1973, Mar. 1995.
- [18] ROSENBLUM, M. G.; PIKOVSKY, A. S.; KURTHS, J. Phase synchronization of chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 76, n. 11, p. 1804–1807, Mar. 1996.

- [19] ROSENBLUM, M. G.; PIKOVSKY, A. S.; KURTHS, J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 78, n. 22, p. 4193–4196, June 1997.
- [20] RULKOV, N. F.; SUSCHIK, K. M.; TSIMRING, L. S.; ABARBANEL, H. D. I. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 51, n. 2, p. 980–994, Feb. 1995.
- [21] KOCAREV, L.; PARLITZ, U. Generalized synchronization, predictability and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 76, n. 11, p. 1816–1819, Mar. 1996.
- [22] ZHANG, Y.; HU, G.; CERDEIRA, H. A.; CHEN, S.; BRAUN, T.; YAO, Y. Partial synchronization and spontaneous spatial ordering in coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*, Melville, v. 63, n. 2, 0262111 9p., Feb. 2001.
- [23] RÖSSLER, O. E. An equation for continuous chaos. *Phys. Lett.*, Amsterdam, v. 57, n. 5, p. 397–398, July 1976.
- [24] RÖSSLER, O. E. The chaotic hierarchy. *Z. Naturforsch. A*, Tübingen, v. 38, n. 7, p. 788–801, Dez. 1982.
- [25] HOROWITZ, P. *The art of electronics*. New York: Cambridge University Press, 1989.
- [26] SEDRA, A. S.; SMITH, K. C. *Microelectronic circuits*. New York: Oxford University Press, 1998.
- [27] GLENDINNING, P. *Stability, instability and chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations*. New York: Cambridge University Press, 1994.
- [28] CRAWFORD, J. D. Introduction to bifurcation theory. *Rev. Mod. Phys.*, Woodbury, v. 63, n. 4, p. 991–1037, Oct. 1991.

- [29] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [30] WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. Determining lyapunov exponents from a time-series. *Physica D*, Amsterdam, v. 16, n. 3, p. 285–317, July 1985.
- [31] SHIMADA, I.; NAGASHIMA, T. Numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems. *Prog. Theor. Phys.*, Kyoto, v. 61, n. 6, p. 1605–1616, June 1979.
- [32] BENETTIN, G.; GALGANI, L.; GIORGILLI, A.; STRELCYN, J. M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems: a method for computing all of them. *Meccanica*, Bologna, v. 15, n. 17, p. 9–20, Mar. 1980. pt.1.
- [33] BENETTIN, G.; GALGANI, L.; STRELCYN, J. M. Kolmogorov entropy and numerical experiments. *Phys. Rev. A*, New York, v. 14, n. 6, p. 2338–2345, Dec. 1976.
- [34] ECKMANN, J. P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. Mod. Phys.*, Woodbury, v. 57, n. 3, p. 617–656, July 1985.
- [35] OSELEDEC, V. I. A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers from dynamical systems. *Trans. Mosc. Math. Soc.*, Providence, v. 19, p. 197–231, 1968.
- [36] BRAUN, T.; HEISLER, I. A. A comparative investigation of controlling chaos in a rössler system. *Physica A*, Amsterdam, v. 283, n. 1/2, p. 136–139, Aug. 2000.
- [37] BRAUN, T. Suppression and excitation of chaos: the example of the glow discharge. *Int. J. Bifurcation Chaos*, Singapore, v. 8, n. 8, p. 1739–1742, Aug. 1998.

- [38] PECORA, L. M.; CARROLL, T. L.; JOHNSON, G. A.; MAR, D. J.; HEAGY, J. F. Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. *Chaos*, Woodbury, v. 7, n. 4, p. 520–543, Dec. 1997.
- [39] JUNGE, L. *Synchronisation nichtlinearer dynamischer systeme*. 1997. 84 seite. Diplomarbeit - Dritten Physikalischen Institut, Georg-August-Universität, Göttingen, 1997.
- [40] HEAGY, J. F.; CARROLL, T. L.; PECORA, L. M. Desynchronization by periodic orbits. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 52, n. 2, p. 1253–1256, Aug. 1990.
- [41] GAUTHIER, D. J.; BIENFANG, J. C. Intermittent loss of synchronization in coupled chaotic oscillators: toward a new criterion for high-quality synchronization. *Phys. Rev. Lett*, Woodbury, v. 77, n. 9, p. 1751–1754, Aug. 1996.
- [42] PLATT, N.; SPIEGEL, E. A.; TRESSER, C. On-off intermittency: a mechanism for bursting. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 70, n. 3, p. 279–282, Jan. 1993.
- [43] OTT, E.; SOMMERER, J. C. Blowout bifurcations: the occurrence of riddled basins and on-off intermittency. *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v. 188, n. 1, p. 39–47, May 1994.
- [44] HEAGY, J. F.; PLATT, N.; HAMMEL, S. M. Characterization of on-off intermittency. *Phys. Rev. E*, Woodbury, v. 49, n. 2, p. 1140–1150, Feb. 1994.
- [45] PLATT, N.; HAMMEL, S. M.; HEAGY, J. F. Effects of additive noise on on-off intermittency. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 72, n. 22, p. 3498–3501, May 1994.
- [46] HAMMER, P. W.; PLATT, N.; HAMMEL, S. M.; HEAGY, J. F.; LEE, B. D. Experimental observation of on-off intermittency. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 73, n. 8, p. 1095–1098, Aug. 1994.
- [47] ČENYS, A.; NAMAJŪNAS, A.; TAMAŠEVIČIUS, A.; SCHNEIDER, T. On-off

- intermittency in chaotic synchronization experiment. *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v. 213, n. 5/6, p. 259–264, Apr. 1996.
- [48] YU, Y. H.; KWAK, K.; LIM, T. K. On-off intermittency in an experimental synchronization process. *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v. 198, n. 1, p. 34–38, Feb. 1995.
- [49] STONE, E. F. Frequency entrainment of a phase coherent attractor. *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v. 163, n. 5/6, p. 367–374, Mar. 1992.
- [50] PIKOVSKY, A. S.; ROSENBLUM, M. G.; OSIPOV, G. V.; KURTHS, J. Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving. *Physica D*, Amsterdam, v. 104, n. 3/4, p. 219–238, June 1997.
- [51] PIKOVSKY, A. S.; ROSENBLUM, M. G.; KURTHS, J. Synchronization in a population of globally coupled chaotic oscillators. *Europhys. Lett.*, Les Ulis, v. 34, n. 3, p. 165–170, Apr. 1996.
- [52] GABOR, D. Theory of communication. *J. IEE*, London, v. 93, n. 3, p. 429–457, 1946.
- [53] FUJISAKA, H.; YAMADA, T. Stability of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Prog. Theor. Phys.*, Kyoto, v. 69, n. 1, p. 32–46, Jan. 1983.
- [54] PRESS, W. H.; FLANNERY, B. P.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T. *Numerical recipes: the art of scientific computing*. New York: Cambridge University Press, 1986.
- [55] ČÍŽEK, V. *Discrete fourier transforms and their applications*. Bristol: Adam Hilger, 1986.