



REDUÇÃO DE ORDEM DE MODELOS NÃO LINEARES

Gabriela Sporleder Straatmann¹, Jorge Otávio Trierweiler¹

¹ GIMSCOP – Grupo de Intensificação, Modelagem, Simulação, Controle e otimização de Processos
Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)
R. Eng. Luis Englert, s/n. Campus Central. CEP: 90040-040 - Porto Alegre - RS - BRASIL,
E-MAIL: {legaby, jorge}@enq.ufrgs.br

Resumo: Neste trabalho, foi realizada uma revisão bibliográfica dos métodos disponíveis na literatura para redução de ordem de modelo (MOR) para sistemas não-lineares. Para tanto, foi necessário, primeiramente, um estudo de MOR aplicada a sistemas lineares para melhor entendimento dos conceitos e definições utilizados nesta área. Desta forma, foi possível perceber que MOR aplicada a sistemas lineares é um assunto recorrente na literatura mas, MOR para sistemas não-lineares ainda é um campo a ser explorado e, principalmente, um campo carente de pesquisa e exploração por engenheiros químicos.

Palavras-chave: MOR, sistemas não-lineares, redução de modelos

1 Introdução

Hoje em dia, cada vez mais tem-se utilizado modelos não-lineares em projetos de controladores de processos da indústria química. Modelos de controle preditivo não-linear (NMPC) tornaram-se muito populares nos últimos anos. Isto se deve ao fato de que modelos não-lineares podem prover maior fidelidade à descrição do processo dinâmico, que resulta em um melhor desempenho no controlador. Entretanto, controladores não-lineares têm uma desvantagem quando comparados aos controladores lineares devido ao aumento da complexidade matemática introduzida pela não-linearidade do modelo. Sendo assim, faz-se necessário encontrar uma forma de amenizar este aumento da complexidade, mas sem perder totalmente a maior vantagem da utilização de modelos não-lineares: a representação da dinâmica do sistema. Um caminho adequado para tal propósito é a Redução da Ordem do Modelo (MOR).

Um modelo de um processo é dado através de variáveis características do processo e da relação entre elas (equações). Normalmente, as equações dos modelos que descrevem os processos químicos são equações diferenciais parciais. Aquelas variáveis que descrevem o “estado” de um sistema dinâmico e, portanto, determina o comportamento futuro deste sistema, são chamadas variáveis de estado. A quantidade de variáveis de estado e o tipo de equações determinam a complexidade do modelo. A redução de ordem de um modelo baseia-se na idéia da diminuição da quantidade de variáveis de estado de forma a preservar as informações contidas no modelo original. Dependendo da importância de cada variável de estado no modelo original e de quanta informação deseja-se que seja preservada, a quantidade de variáveis de estado do modelo

reduzido será determinada. A Figura 1.1 mostra a idéia básica de MOR. Quanto menos “traços” para descrever a imagem do coelho, menos detalhes ficam perceptíveis, mas mesmo na terceira imagem, a informação de que é um coelho continua preservada.

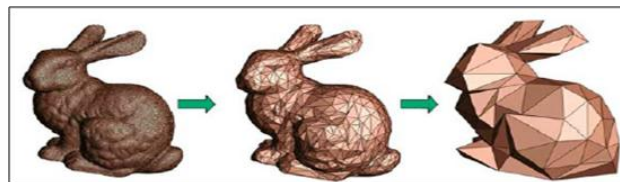


Figura 1. Idéia básica da redução de modelos: dependendo do número de traços que é utilizado, mais ou menos informações sobre a forma do coelho são preservadas.

A aplicação de MOR para sistemas lineares já está bem sedimentada em uma enorme variedade de artigos publicados. Mas tornou-se um grande desafio de muitos pesquisadores a aplicação de MOR em modelos não-lineares. E, ainda, não foi encontrada uma metodologia genérica para reduzir a ordem de modelos não-lineares. O que existe são métodos de aproximação para alguns casos particulares de modelos não-lineares. Alguns destes métodos serão apresentados nas seções seguintes deste documento.

2. Redução de Ordem, Gramians e Hankel para Sistemas Lineares

Para melhor entendimento da aplicação de métodos de redução de ordem para sistemas não-lineares, faz-se necessário a introdução de alguns conceitos e definições relacionados a sistemas lineares, que serão vistos nesta

seção.

2.1 Gramian Controlabilidade, Gramian

Observabilidade e Valores Singulares de Hankel

Considerando o sistema linear:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

que é estável em malha aberta, suas controlabilidade e observabilidade gramians são definidas e calculadas por:
Controlabilidade Gramian Linear: mede a “energia” que deve ser adicionada ao sistema para mover o estado correspondente e é calculada por:

$$W_c = \int_0^{\infty} e^{A \cdot t} \cdot B \cdot B^T \cdot e^{A^T \cdot t} \cdot dt \quad (2.2)$$

Observabilidade Gramian Linear: mede a “energia gerada” pelo estado correspondente e é calculada por:

$$W_o = \int_0^{\infty} e^{A^T \cdot t} \cdot C^T \cdot C \cdot e^{A \cdot t} \cdot dt \quad (2.3)$$

Sendo que W_c e W_o são as soluções (matrizes positivas definidas) das equações de Lyapunov, respectivamente:

$$A \cdot W_c + W_c \cdot A^T = -B \cdot B^T \quad (2.4)$$

$$A^T \cdot W_o + W_o \cdot A = -C^T \cdot C \quad (2.5)$$

Um sistema em que as gramians controlabilidade e observabilidade são iguais e são dadas por:

$$\bar{W}_c = \bar{W}_o = \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

com $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$

é chamado sistema balanceado e $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ são chamados valores singulares de Hankel.

As gramians transformadas, \bar{W}_c e \bar{W}_o , são dadas por:

$$\bar{W}_c = T \cdot W_c \cdot T^T \quad (2.7)$$

$$\bar{W}_o = (T^{-1})^T \cdot W_o \cdot T^{-1} \quad (2.8)$$

onde T é chamada matriz transformação.

Pode ser mostrado, então, que existe um espaço de estado transformado, dado por:

$$\bar{x} = T \cdot x \quad (2.9)$$

tal que o sistema linear transformado é dado por:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = T \cdot A \cdot T^{-1} \cdot \bar{x} + T \cdot B \cdot u = \bar{A} \cdot \bar{x} + \bar{B} \cdot u \\ y = C \cdot T^{-1} \cdot \bar{x} = \bar{C} \cdot \bar{x} \end{cases} \quad (2.10)$$

2.2 Redução de Ordem

Se o sistema encontra-se na forma balanceada, os valores singulares de Hankel medem a importância ou influência do estado correspondente no comportamento entrada/saída do sistema. Dessa forma, estados que apresentam valores de Hankel muito baixos em relação aos demais, podem ser descartados sem maiores prejuízos na representação geral do sistema, como pode ser observado na Figura 2.1.

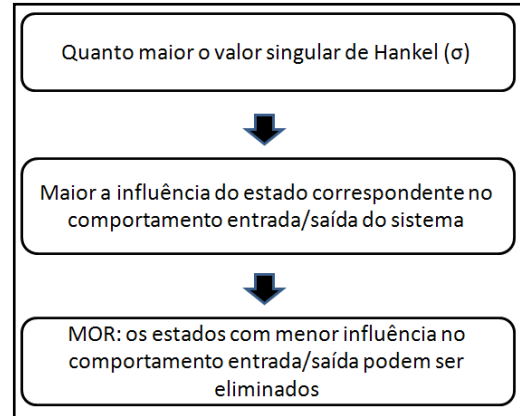


Figura 2.1: Esquema da base teórica para aplicação de métodos de redução de ordem.

Uma vez na forma balanceada, o vetor estado x , pode ser desmembrado em dois vetores: x^-_1 , contendo os estados mais importantes, e x^-_2 , contendo os estados menos importantes., como mostrado na Equação 2.11 :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix} \cdot u \\ y = (\bar{C}_1 \quad \bar{C}_2) \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.11)$$

2.2.1 Redução de Ordem por Truncamento

Um método para redução de ordem de modelos é simplesmente cortar os estados correspondentes aos menores valores singulares de Hankel. A desvantagem deste método é que o comportamento de estado estacionário do sistema original não é preservado e quase sempre resultará em offset.

O sistema resultante após o truncamento de sistema balanceado é dado pela Equação 2.12 :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_{11} \cdot \bar{x}_1 + \bar{B}_1 \cdot u \\ y = \bar{C}_1 \cdot \bar{x}_1 \end{cases} \quad (2.12)$$

O resultado é um sistema de EDO que contém menos estados do que o sistema original. O número de estados que pode ser truncado depende do próprio sistema e da precisão que se quer para a representação do sistema.

2.2.2 Redução de Ordem por Residualização

Se for importante manter o mesmo comportamento do estado estacionário do sistema original, o método de residualização pode alcançar melhores resultados do que o método de truncamento. A residualização é baseada na idéia de que as derivadas dos estados correspondentes aos menores valores de Hankel

(que seriam simplesmente truncados no método anterior) podem ser aproximadas por zero enquanto o resto do sistema é mantido, como é mostrado na Equação 2.13:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix} \cdot u \\ y = (\bar{C}_1 \quad \bar{C}_2) \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.13)$$

O conjunto resultante de Equações Algébrico-diferenciais (EADs) pode ser simplificado por eliminação dos estados \bar{x}_2 transformando o sistema de EADs em um sistema de EDOs., como é mostrado na Equação 2.14:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \tilde{A} \cdot \bar{x}_1 + \tilde{B} \cdot u \\ y = \tilde{C} \cdot \bar{x}_1 + \tilde{D} \cdot u \end{cases} \quad (2.14)$$

onde:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12} \cdot \bar{A}_{22}^{-1} \cdot \bar{A}_{21} \\ \tilde{B} &= \bar{B}_1 - \bar{A}_{12} \cdot \bar{A}_{22}^{-1} \cdot \bar{B}_2 \\ \tilde{C} &= \bar{C}_1 - \bar{C}_2 \cdot \bar{A}_{22}^{-1} \cdot \bar{A}_{21} \\ \tilde{D} &= -\bar{C}_2 \cdot \bar{A}_{22}^{-1} \cdot \bar{B}_2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

3. Redução de Ordem para Sistemas Não-Lineares

Não existe um método genérico para balanceamento de sistemas não lineares. Uma possibilidade, então, é linearizar o sistema e, posteriormente, aplicar os métodos descritos na seção anterior. Entretanto, o comportamento não-linear será perdido com a linearização.

Para melhor entendimento do método proposto, faz-se necessário a introdução de algumas definições que seguem.

Um sistema não-linear control-affine é representado da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t)) \cdot u(t) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde f , g e h são funções de x sendo $f(0) = 0$ e $h(0) = 0$.

A seguir, são definidas as funções Energia de Controlabilidade e Energia de Observabilidade, respectivamente:

$$L_c = \min_{u \in L_2(-\infty, 0), x(-\infty) = 0, x(0) = x_0} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \|u(t)\|^2 \cdot dt \quad (3.2)$$

$$L_o = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \|y(t)\|^2 \cdot dt \quad (3.3)$$

onde $x(0) = 0$, $u(t) \equiv 0$, $0 \leq t < \infty$.

As funções definidas acima não são necessariamente finitas. Em particular, L_o não será finita se o sistema for instável.

As funções Energia são relacionadas com as funções Gramians e sua relação para o caso linear é dada pelas Equações 3.4 e 3.5:

$$L_c(x_0) = \frac{1}{2} \cdot x_0^T \cdot W_c^{-1} \cdot x_0 \quad (3.4)$$

$$L_o(x_0) = \frac{1}{2} \cdot x_0^T \cdot W_o \cdot x_0 \quad (3.5)$$

Infelizmente, não é fácil calcular as funções Energia no caso não-linear. As funções dadas pelas equações 3.2 e 3.3 têm que ser resolvidas por Equações Diferenciais Parciais de Hamilton-Jacobi, mostradas nas equações 3.6 e 3.7, assumindo que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente instável:

$$\frac{\partial L_c(x)}{\partial x} \cdot f(x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial L_c(x)}{\partial x} \cdot g(x) \cdot g^T(x) \cdot \frac{\partial L_c(x)}{\partial x} = 0 \quad (3.6)$$

com $L_c(0) = 0$

$$\frac{\partial L_o(x)}{\partial x} \cdot f(x) + \frac{1}{2} \cdot h^T(x) \cdot h(x) = 0 \quad (3.7)$$

com $L_o(0) = 0$

Como o cálculo das funções energias é muito complexo e não existe uma forma genérica de cálculo para a matriz transformação que igualaria as funções energia para possibilitar a obtenção dos valores singulares de Hankel, o método de balanceamento para problemas de dimensão industrial torna-se quase impossível de ser aplicado.

3.2 MOR via Gramians Empíricas

Nesta seção, será apresentado o método publicado por (Lall, Marsden et al. 1999) e por (Hahn and Edgar 2002), que combina o uso da aproximação para sistemas lineares com a flexibilidade requerida para sistemas não-lineares. Este método calcula as funções gramians com a utilização de dados de planta. Estas funções são, então, balanceadas pelo mesmo procedimento usado para sistemas lineares. A transformação balanceada é utilizada juntamente com uma projeção de Galerkin para transformar o sistema não-linear em um sistema balanceado. As equações não-lineares resultantes podem ser reduzidas usando tanto o método de truncamento como o método de residualização. Na Figura 3.1, é mostrado um procedimento esquemático para aplicação deste método.

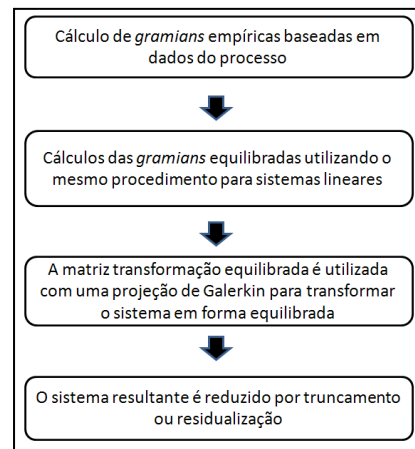


Figura 3.1: Procedimento esquemático para aplicação do método de MOR via Gramians Empíricas.

Os exemplos de aplicação do método proposto por (Lall, Marsden et al. 1999) são de sistemas mecânicos

enquanto os de (Hahn and Edgar 2002) são em uma série de dois CSTRs não isotérmicos em série e em modelo simplificado de coluna de destilação.

3.2.1 Cálculo de Gramians Empíricas

O primeiro passo para aplicação do método é, então, o cálculo de gramians empíricas. Este cálculo é mostrado nas equações 3.8 e 3.9, respectivamente para gramian empírica de controlabilidade e gramian empírica de observabilidade :

$$W_c = \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^s \sum_{i=1}^p \frac{1}{r \cdot s \cdot c_m^2} \cdot \int_0^\infty \Phi^{ilm}(t) \cdot dt \quad (3.8)$$

$$W_o = \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^s \frac{1}{r \cdot s \cdot c_m^2} \cdot \int_0^\infty T_l \cdot \Psi^{lm}(t) \cdot T_l^T \cdot dt \quad (3.9)$$

onde T_l : matrizes das direções excitação/perturbação
 r : número total de matrizes das direções excitação/perturbação
 c_m : tamanho da excitação/perturbação para cada direção
 s : número total dos diferentes tamanhos de excitação/perturbação para cada direção
 p : número de inputs
 $\{\Phi^{ilm}(t), \Psi^{lm}(t)\} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$
 n : número de entradas (3.8) ou de estados (equação (3.9))

As expressões Φ^{ilm} e Ψ^{lm} são dadas pelas equações 3.10 e 3.11:

$$\Phi^{ilm}(t) = (x^{ilm}(t) - x_0^{ilm}), (x^{ilm}(t) - x_0^{ilm})^T \quad (3.10)$$

onde: $x^{ilm}(t)$ é o estado correspondente ao impulso $u(t) = c_m \cdot T_l \cdot e_i \cdot \delta(t) + u_0$
 x_0^{ilm} refere-se ao estado estacionário do sistema

$$\Psi^{lm}(t) = (y^{lm}(t) - y_0^{lm}) \cdot (y^{lm}(t) - y_0^{lm})^T \quad (3.11)$$

onde: $y^{lm}(t)$ é a saída correspondente à condição inicial $x(0) = c_m \cdot T_l \cdot e_i + x_0$
 y_0^{lm} refere-se à medição de saída correspondente ao estado estacionário do sistema

As gramians empíricas podem ser calculadas com dados experimentais ou simulados, coletados ou gerados dentro de uma região onde o processo é controlado. As matrizes gramians empíricas capturam parte do comportamento não linear dentro da região de operação.

3.2.2 Projeção de Galerkin

A projeção de Galerkin é baseada na idéia de que a dinâmica do sistema pode ser representada por uma dinâmica em um subespaço do sistema original. Esta técnica tem sido largamente utilizada para encontrar EDOs para substituir EDPs tão bem como construir modelos matemáticos de baixa ordem.

Dado um sistema autônomo, é possível aproximar o sistema por um modelo de baixa ordem como na equação 3.12 :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t)) \quad (3.12)$$

Para aplicar a projeção de Galerkin, $x(t)$ tem que ser reescrito da seguinte forma:

$$x(t) = \tilde{P}^T \cdot \bar{x}(t) + r(t) \quad (3.13)$$

onde $r(t)$ é o resíduo.

Se \tilde{P} é uma matriz quadrada de rank cheio e sua dimensão é igual ao número de estados do sistema, então o resíduo é zero. Entretanto, para obter-se um modelo reduzido, \tilde{P} precisa ser escolhido de tal forma que o resíduo seja ortogonal ao subespaço reduzido. A projeção, então, resulta no seguinte sistema de equações que representam exatamente o sistema original:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \tilde{P} \cdot f(\tilde{P}^T \cdot \bar{x}(t) + r(t)) \quad (3.14)$$

Quando o resíduo $r(t)$ é deletado, algo do comportamento do sistema é perdido e o modelo reduzido pode somente se aproximar do comportamento do sistema original. Sendo assim, para obter-se uma boa aproximação, \tilde{P} tem que ser escolhido de forma a minimizar $r(t)$. O resultado do sistema de ordem reduzida é dado pela equação 3.15:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \tilde{P} \cdot f(\tilde{P}^T \cdot \bar{x}(t)) \quad (3.15)$$

No método de redução via gramians empíricas é implementada uma versão modificada da projeção de Galerkin, onde \tilde{P} é escolhida como sendo o produto entre a matriz transformação T (que faz o balanceamento da gramians empíricas) e a matriz redução P (que elimina a parte do subespaço que contribui pouco ou nada para o comportamento entrada/saída do sistema. P é uma matriz de dimensão apropriada que contém uma matriz identidade com dimensão igual ao número de estados do modelo de ordem reduzida e as linhas e colunas remanescentes são preenchidas com zero. Este método possui a vantagem de ser computacionalmente leve para redução de ordem de sistemas não-lineares, o que é um grande avanço em relação ao método de balanceamento. A desvantagem é que, como é utilizada uma projeção linear, o comportamento global do sistema pode não ser previsto pelo modelo reduzido. Entretanto, muitos processos apresentam uma região de operação e dentro desta região o sistema reduzido deve aproximar-se do comportamento do sistema original. Na região em que o modelo reduzido provê uma boa aproximação do modelo original, esta aproximação é certamente maior que a de um modelo simplesmente linearizado.

3.2.2 Truncamento Balanceado

Como no caso linear, truncamento balanceado pode ser aplicado no sistema, resultando na equação 3.16:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= P \cdot T \cdot f(T^{-1} \cdot P^T \cdot \bar{x}(t)) + P \cdot T \cdot g(T^{-1} \cdot P^T \cdot \bar{x}(t)) \cdot u(t) \\ y(t) &= P \cdot T \cdot h(T^{-1} \cdot P^T \cdot \bar{x}(t)) \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.3 Outros Métodos Existentes na Literatura

A seguir, são apresentados os métodos propostos por alguns autores na literatura.

3.3.1 Lee et al.

Também utilizando a idéia truncamento em sistemas balanceados, o método proposto por (Lee, Eom et al. 2000) leva em conta informações de entradas, estados e saídas juntos e resulta em um modelo de ordem reduzida que mapeia o sistema de uma forma geral ao invés de mapear em regiões. O método transforma o sistema original dado pela equação 3.17 em um sistema de ordem reduzida dado pela equação 3.18 utilizando o algoritmo mostrado na Figura 3.2.

$$\begin{cases} \dot{x}(t+1) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} \dot{z}(t+1) = (V^T \cdot V)^{-1} \cdot V^T \cdot f(V \cdot z(t), u(t)) \\ y(t) = h(V \cdot z(t)) \end{cases} \quad (3.18)$$

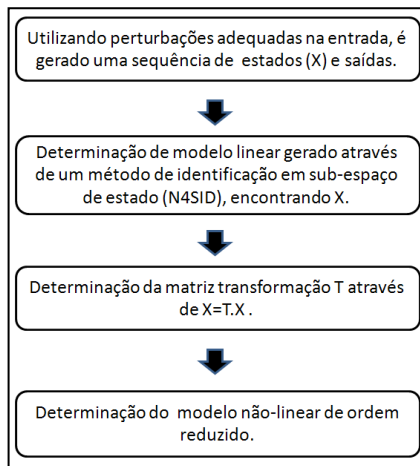


Figura 3.2: Algoritmo básico do método proposto por Lee et al.

O exemplo de aplicação do método é em um reator de leito fixo não-adiabático.

3.3.2 Shvartsman et al., 2000

Neste trabalho publicado por (Shvartsman, Theodoropoulos et al. 2000), não há nenhum método novo proposto, mas aplicação de metodologias existentes utilizando, por exemplo, projeção de Galerkin em um sistema de reação-difusão.

3.3.3 Kordt e Ackerman, 2000

O método de (Kordt and Ackermann 2000) é baseado em perturbações singulares, fracamente acopladas e custos funcionais para computação e análise do modelo de ordem reduzida. Utiliza conceito de multiplicadores de Lagrange. A implementação do método foi realizada em MatLab, gerando um Toolbox denominado NEON. O exemplo de aplicação do método é em modelos dinâmicos estrutural de aviões.

3.3.4 Matthies e Meyer, 2003

Utilizando projeção de Galerkin e elementos finitos, os autores (Matthies and Meyer 2003) aplicam redução de ordem em modelagem de turbina de vento, considerando os graus de liberdade aerodinâmicos e mecânicos.

3.3.5 Prasad e Bequete, 2003

Os autores (Prasad and Bequette 2003) propõem, nesta publicação, uma técnica para identificação e para redução de ordem de sistemas não-lineares utilizando rede neural. A redução de ordem é realizada através da aplicação da técnica de decomposição em valores singulares nas matrizes pesos da rede neural. A aplicação do método é mostrada em exemplos de reatores contínuo e em batelada e em uma coluna de destilação.

3.3.6 Condon e Ivanov, 2005

Neste método proposto por (Condon and Ivanov 2005), o sistema não-linear é aproximado por um sistema bi-linear. Para este sistema bi-linear é calculado as gramians controlabilidade e observabilidade e, posteriormente, é aplicado método de balanceamento já descrito neste documento. É mostrada a aplicação do método em circuitos elétricos.

3.3.7 Rewiński e White, 2005

Nesta publicação, os autores (Rewiński and White 2006) analisam o método de MOR chamado Trajectory Piecewise-linear (TPWL), que como o próprio nome sugere, é baseado na decomposição do sistema não-linear em “pedaços” de trajetória linear. Os exemplos de aplicação do método são em circuitos elétricos.

3.3.8 Fujimoto e Tsubakino, 2008

Neste artigo (Fujimoto and Tsubakino 2008), é proposto um algoritmo para truncamento balanceado baseado em expansão em série de Taylor. É utilizado uma transformação de coordenadas para os casos em que a realização em espaço de estado (funções f,g e h) é analítica. É um algoritmo recursivo em função da ordem em que é necessário expandir as funções. O algoritmo é aplicado em exemplo de um sistema de pêndulo duplo.

4. Conclusões

- O assunto MOR para modelos lineares é bem antigo e sedimentado;
- as publicações em MOR para sistemas não-lineares são mais voltadas à aplicação em circuitos elétricos, ou seja, a maioria dos pesquisadores que hoje trabalham com MOR para modelos não-lineares não são da área de Engenharia Química;
- aparentemente, não há um trabalho publicado que aplique um método de redução de ordem para um modelo completo de coluna de destilação;
- a aplicação de MOR para modelos não-lineares ainda é um assunto relativamente novo e pouco explorado.

5. Referências

CONDON, M. e R. IVANOV (2005). "Nonlinear systems – algebraic gramians and model reduction." *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering* 24(1): 202-219.

FUJIMOTO, K. e D. TSUBAKINO (2008). "Computation of nonlinear balanced realization and model reduction based on Taylor series expansion." *Systems & Control Letters* 57(4): 283-289.

HAHN, J. and T. F. EDGAR (2002). "An improved method for nonlinear model reduction using balancing of empirical gramians." *Computers & Chemical Engineering* 26(10): 1379-1397.

KORDT, M. and J. ACKERMANN (2000). "Nonlinear model reduction -- method and CAE-tool development." *Mathematics and Computers in Simulation* 53(4-6): 309-321.

LALL, S., J. E. MARSDEN, et al. (1999). *Empirical Model Reduction of Controlled Nonlinear Systems*. IFAC World Congress.

LEE, K. S., Y. EOM, et al. (2000). "A control-relevant model reduction technique for nonlinear systems." *Computers & Chemical Engineering* 24(2-7): 309-315.

MATTHIES, H. G. and M. MEYER (2003). "Nonlinear Galerkin methods for the model reduction of nonlinear dynamical systems." *Computers & Structures* 81(12): 1277-1286.

PRASAD, V. and B. W. BEQUETTE (2003). "Nonlinear system identification and model reduction using artificial neural networks." *Computers & Chemical Engineering* 27(12): 1741-1754.

REWIENSKI, M. and J. White (2006). "Model order reduction for nonlinear dynamical systems based on trajectory piecewise-linear approximations." *Linear Algebra and its Applications* 415(2-3): 426-454.

SHVARTSMAN, S. Y., C. THEODOROPOULOS, et al. (2000). "Order reduction for nonlinear dynamic models of distributed reacting systems." *Journal of Process Control* 10(2-3): 177-184.