UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Elizandro Max Borba

Uma Proposta para o Ensino de Matrizes com o Apoio de Tecnologia

Porto Alegre

2011

Elizandro Max Borba

Uma Proposta para o Ensino de Matrizes com o Apoio de Tecnologia

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Porto Alegre

2011

Elizandro Max Borba

Uma Proposta para o Ensino de Matrizes com o Apoio de Tecnologia

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Aprovado em ___ de Julho de 2011 com conceito _______.

BANCA EXAMINADORA

Dr. Vilmar Trevisan – Orientador

Professor do Instituto de Matemática da UFRGS

____

Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana

Professora do Instituto de Matemática da UFRGS

____

Dr. Ítalo Modesto Dutra

Professor do Colégio de Aplicação da UFRGS

Unfortunately, no one can be told what the Matrix is.

You have to see it for yourself.

Morpheus – “The Matrix”

AGRADECIMENTOS

À minha noiva, Kate, e à minha família, pelo incessável apoio, confiança e compreensão.

Ao professor Vilmar Trevisan, pelo incentivo e orientação.

Ao corpo docente do Instituto de Matemática, em especial Marilaine Sant'Ana, Maria Alice Gravina e Marcus Basso.

Aos meus colegas de curso, em especial Henrique e Sílvia, pelo companheirismo e amizade.

Ao Colégio de Aplicação da UFRGS, em especial aos meus alunos e aos professores Ítalo Dutra e Mariana Lima Duro, sem os quais a implementação desse trabalho não seria possível.

Aos meus colegas de trabalho Douglas e Afrânio, e meu gerente, Maurício, pela compreensão nos meus períodos de ausência.

RESUMO

Atualmente, o ensino de matrizes tende a enfatizar o uso de matrizes pequenas, adequadas para o cálculo manual. Este trabalho propõe uma abordagem baseada em tecnologia, usando recursos de informática como planilhas eletrônicas e applets disponíveis na Internet, a fim de permitir a exploração de matrizes maiores, além o uso do Algoritmo de Escalonamento para resolver Sistemas Lineares, e de conexão com a Teoria dos Grafos, com aplicações reais para cada um desses tópicos. Usamos a Abordagem Incorporada como principal ferramenta teórica.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem de Matemática; Matrizes; Sistemas Lineares; Grafos; Abordagem Incorporada; Matemática e Tecnologia.

ABSTRACT

Currently, the teaching of matrices tends to emphasize the use of small matrices, suitable for manual calculation. This work proposes a technology-based approach using information resources such as electronic spreadsheets and web applets, in order to allow the exploration of bigger matrices, as well as the use of the Echelon Algorithm to solve Linear Systems, and connections with Graph Theory, with real-world applications for each of these topics. Here we use the Embodied Approach as main theoretical tool.

Keywords: Mathematics Teaching and Learning; Matrices; Linear Systems; Graph Theory; Embodied Approach; Mathematics and Technology.

Índice de Figuras

Sumário

1. Introdução

No Ensino Médio, tende-se a restringir a manipulação de matrizes (e consequentemente a resolução de sistemas lineares) a matrizes pequenas, que permitam o cálculo no papel. Mesmo matrizes simples, como as quadradas de ordem 3, exigem cálculos tediosos e sujeitos a erros, ainda que se restrinja os valores a números inteiros ou frações simples. As matrizes maiores normalmente são apenas referenciadas, de maneira um tanto distante, como exemplo de aplicação de resultados mais gerais.

Atualmente, vários autores consideram que a Álgebra Linear tem papel fundamental na Matemática Aplicada[1]. Várias aplicações modernas podem ser modeladas com o emprego de matrizes e sistemas lineares: balanceamento de equações químicas, design de circuitos elétricos, computação gráfica, controle de tráfego, sistemas de navegação, interação entre setores da economia, entre muitas outras (para uma lista mais extensa, ver KHOURY). Entretanto, mesmo sistemas relativamente simples exigem a manipulação de matrizes grandes o suficiente para inviabilizar, em termos práticos, o cálculo no papel.

Hoje em dia, o acesso a recursos de informática, tanto pelas escolas quanto pelos alunos, é mais amplo do que em qualquer período na história. Além disso, existem inúmeras ferramentas computacionais que podem auxiliar na manipulação de matrizes. Planilhas eletrônicas comerciais (como o Excel) e gratuitas (como o LibreOffice) oferecem uma forma rápida de tabular dados, e oferecem opção de efetuar o cálculo de determinante, inversa, e multiplicação de matrizes, além da possibilidade de programação via macros. Várias páginas na internet contêm *applets* para manipulação de matrizes, com grande variedade na finalidade, poder computacional e forma de apresentação. Num nível mais avançado, há os pacotes de software de Matemática como Mathematica, Maple e Maxima.

---

[1] Por exemplo, LAY (1999) afirma que "[N]a atualidade, os cientistas e engenheiros trabalham em problemas muito mais complexos do que se sonhava ser possível há algumas décadas. Hoje, a Álgebra Linear tem mais valor em potencial para os alunos, em muitas áreas científicas e de negócios, do que qualquer assunto em matemática em nível de graduação!" (p.1) Já (STRANG, 1986) ressalta que deve ser feita "uma menção especial ao papel da Álgebra Linear [na matemática Aplicada]. Se há um assunto que se tornou indispensável, é este." (p. viii, tradução nossa)

Com tamanha disponibilidade, não há porque limitar o contato do aluno a matrizes 3x3 com números inteiros. As ferramentas computacionais disponíveis possibilitam maior agilidade nas manipulações, o uso de valores mais realísticos, e uma melhor apreciação dos processos que estão por trás da resolução dos sistemas. Com isso, abre-se o caminho para poder experimentar as matrizes e sistemas lineares em contextos mais próximos da realidade (e mais interessantes).

O objetivo foi fazer uma análise da abordagem costumeira sobre o assunto, pesquisar sobre aplicações que possam ser apresentadas no Ensino Médio, com as adaptações necessárias, e então elaborar atividades que contemplem o uso das ferramentas computacionais já citadas. Essas atividades foram implementadas em um disciplina eletiva no Colégio de Aplicação da UFRGS (CAp), oferecida a alunos do segundo ano do Ensino Médio.

Não é a intenção do presente texto aprofundar os conteúdos matemáticos envolvidos, ou justificá-los rigorosamente. Citamos como referência, inicialmente, para Matrizes e Sistemas Lineares, LAY (1999); para Grafos, SANTOS, MELLO, & MURARI (2008) e MALTA (2008).

No capítulo 2, é justificada a necessidade de um uso mais amplo de tecnologia no ensino de matrizes, através da análise histórica, e dando evidências da ausência de referências ao uso de tecnologia nos livros didáticos.

A elaboração das atividades usa a *Abordagem Incorporada* como principal ferramenta teórica. Uma exposição mais detalhada sobre essa metodologia é feita no capítulo 3. No capítulo 4, é mostrado como foi concebida a parte prática do trabalho, e no capítulo 5 faz-se um relato da prática, descrevendo a estrutura do curso e algumas das principais atividades realizadas.

2. Justificativa

Desde o surgimento dos computadores eletrônicos, em meados do século 20, o estudo de matrizes tem estado cada vez mais ligado às suas aplicações computacionais, envolvendo matrizes de tamanho muito maior que as abordadas usualmente. Entretanto, os livros didáticos geralmente não contemplam o uso de ferramentas computacionais para esse tópico. Buscamos, portanto, elaborar uma proposta no sentido de tentar diminuir essa discrepância.

Nesse capítulo, inicialmente, faremos uma breve análise histórica, e a seguir buscaremos ver o que dizem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), e veremos como Sistemas Lineares e Matrizes aparecem em alguns livros didáticos do Ensino Médio. Finalmente, foram buscadas referências em artigos e outras publicações.

2.1 Histórico

A manipulação de matrizes como técnica de resolução de sistemas de equações vem de longa data. O registro mais antigo que se tem notícia é no texto chinês *Jiu Zhang Suan Shu*, ("Nove Capítulos sobre a Arte matemática", entre 300 AC e 200 DC), que também cita o conceito de determinante, cerca de 1000 anos antes de Seki (1683) e Leibniz (1693). Em 1750, Cramer apresentou a regra que leva seu nome.

No início, a teoria das matrizes enfatizou mais os determinantes que as matrizes propriamente, e um conceito de matriz semelhante à noção moderna surgiu apenas em 1858, no livro *Memoir on the theory of matrices*, de Cayley. O termo "matriz" foi cunhado por Sylvester, que via a matriz como um objeto que dava origem a outros menores, semelhantes ao que hoje conhecemos como cofatores. Etimologicamente, a palavra "matriz" vem do latim *mater* (mãe).

Cauchy foi o primeiro a provar afirmações mais gerais sobre determinantes e autovalores. Sua abordagem, entretanto, era mais concreta, em contraste com o tratamento mais axiomático dado posteriormente (fim do século 19 e começo do 20) por Kronecker e Weierstrass. Também nessa época, a eliminação de Gauss-

Jordan (da qual a hoje chamada eliminação gaussiana é um caso especial) foi estabelecida por Jordan.

No início do século 20, as matrizes adquirem um papel central na Álgebra Linear. A introdução da mecânica matricial por Heisenberg, Born e Jordan levou ao estudo de matrizes com infinitas linhas e colunas. Mais tarde, von Neumann formalizou a mecânica quântica, aprofundando noções analíticas funcionais como Operadores Lineares e Espaços de Hilbert, que, grosso modo, correspondem ao Espaço Euclidiano, porém com infinitas direções independentes *(Matrix (Mathematics):History)*.

A partir da metade do século 20, com o advento dos computadores eletrônicos, cresce a importância dos modelos lineares. Um marco importante foi o trabalho de Wassily Leontief, que em 1949 construiu um modelo (hoje chamado de Modelo de Entrada-Saída de Leontief) descrevendo a interação entre 500 "setores" da economia americana. O sistema original, de 500 equações e 500 incógnitas, foi simplificado para 42 equações e 42 incógnitas. Ainda assim, o computador Mark II precisou de 56 horas para resolvê-lo. Por esse trabalho, Leontief ganhou o prêmio Nobel de Economia de 1973 (LAY, 1999, p. 1).

O advento das grandes redes de computadores exigiu a aplicação de algoritmos da teoria de grafos, como o SPF de Dijkstra, que escolhe o caminho mais curto entre dois pontos. Esse uso se amplia atualmente, com a popularização dos mecanismos de roteamento em mapas, principalmente em softwares de navegação baseados em GPS ou sites como o Google Maps.

Uma aplicação insuspeita de matrizes acontece em um ato corriqueiro nos dias de hoje: fazer uma busca no Google. Isso porque o site usa um algoritmo de *PageRank*, que é o que diferenciou o Google dos demais mecanismos de busca, por avaliar o quanto uma página é relevante a uma expressão de pesquisada. O algoritmo envolve matrizes com tamanho da ordem de bilhões de linhas e colunas (BRYAN & LEISE). Ou seja, todos os dias milhões de pessoas, sem saber, manipulam enormes matrizes.

2.2 PCN

Em sua versão mais recente, os PCN afirmam que o estudo de sistemas lineares deve

> "(...) receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem (...) sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares 3 por 3, aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas do conhecimento. Uma abordagem mais qualitativa e profunda deve ser feita dentro da parte flexível do currículo, como opção específica de cada escola." (BRASIL, 2006, p. 122)

Entendemos que essa predileção por "problemas simples" e sistemas pequenos seja devida à premissa de que os cálculos serão necessariamente manuais. O uso do computador, como já frisamos, seria a ferramenta que possibilitaria a extensão das aplicações para problemas "mais complexos". Entretanto, os PCN parecem não vislumbrar a totalidade do potencial computador como ferramenta de automação dos cálculos, tratando-o principalmente como ferramenta de edição, comunicação e busca:

> "O crescente uso dos computadores constitui um importante capítulo à parte, pois, além de sua capacidade de edição de textos e organização de dados, abre portas para um universo de informações, com o aprendizado da "navegação" na Internet, permitindo consultar inúmeros bancos de dados e sites informativos e formativos, para não falar dos estimulantes intercâmbios individuais e institucionais." (BRASIL, 2006, p. 136)

O termo "organização de dados" é demasiado vago e restrito para incluir as possibilidades do uso de recursos computacionais na matemática. Na seção Sob "Análise de Dados: Contagem", há outra referência vaga à "abordagem de problemas com dados reais ao mesmo tempo que o aluno pode ter a oportunidade de se familiarizar com as máquinas e os softwares." (BRASIL, 2006, p. 127). Essa falta de especificidade contradiz outro trecho que cita entre as competências desejáveis

> "[p]erceber o papel desempenhado pelo conhecimento matemático no desenvolvimento da tecnologia e a complexa relação entre ciência e tecnologia ao longo da história. A exigência de rapidez e complexidade dos

cálculos fez com que a Matemática se desenvolvesse e, por outro lado, as pesquisas e avanços teóricos da Matemática e demais ciências permitiram o aperfeiçoamento de máquinas como o computador, que vêm tornando os cálculos cada vez mais rápidos." (BRASIL, 2006, p. 118)

Além disso, a possibilidade de efetivamente utilizar a internet para realizar cálculos, como pretendemos fazer em alguns momentos, é algo que escapa à visão apresentada nos últimos PCN. Acreditamos que isso deva ser corrigido, pois no ritmo em que ocorrem as revoluções tecnológicas hoje em dia, é difícil escrever alguma linha-guia sobre informática que continue atual por muito tempo.

2.3 Livros Didáticos

Partimos então para a análise de alguns livros utilizados na rede de ensino. São eles:

a) GIOVANNI, José Ruy. BONJORNO, José Roberto. GIOVANNI JR., José Ruy. Matemática Fundamental: uma nova abordagem: Ensino Médio: volume único. São Paulo: FTD, 2002.

b) MELLO, José Luiz Pastore, coord téc.. Matemática: construção e significado: Ensino Médio: volume único. São Paulo: Moderna, 2005.

c) SPINELLI, Walter. SOUZA, Maria Helena. REAME, Eliane. Matemática: Ensino Médio: volume 2. São Paulo: Nova Geração, 2005.

Doravante, referenciaremos a), b), e c) por $\mathbf{L_G}$, $\mathbf{L_M}$ e $\mathbf{L_S}$, sendo a letra em subscrito a inicial do nome do primeiro autor.

Apesar das ressalvas feitas na seção anterior, nota-se que os elaboradores dos PCN têm ciência de que a popularização do computador leva a novos paradigmas didáticos. Entretanto, isso não se reflete nos livros escolhidos. L_M chega a afirmar que "[h]oje, as matrizes constituem ferramenta indispensável à programação de computadores para a resolução de intrincados sistemas de equações" (p. 306). Entretanto, não dá instruções de como utilizar os recursos computacionais para executar essa tarefa. Nos demais livros não há qualquer referência ao uso de tecnologia. Acreditamos ser esta a situação dominante. Outra evidência vem de BATTAGLIOLI (2008), que analisa a abordagem a sistemas lineares em três livros didáticos de Ensino Médio (sendo um deles L_G), e conclui que "nenhum dos livros analisados apresenta alguma atividade com o uso do computador envolvendo sistemas lineares" (p. 44).

Procedamos, então, a uma rápida visão geral da abordagem didática dos três livros escolhidos. L_G usa uma abordagem bem tradicional, iniciando com matrizes e suas operações, passando para determinantes, e em seguida passando para sistemas lineares. As aplicações mostradas são essencialmente expansões dos problemas comumente vistos no estudo de equações de 1º grau. L_M mostra-se mais conciso, com intensos exercícios numéricos e algébricos, mas as aplicações, com exceção dos usos geométricos dos determinantes, tendem a limitar-se a exemplos introdutórios.

Na introdução de L_S, cita-se que os sistemas lineares encontram aplicações em situações como (p. 170): "(...) o controle do fluxo de trânsito, a pontuação de audiência de faixas de rádios ou canais de televisão, organização de entregas de mercadorias, (...) balanceamento de reações químicas, estabelecimentos de proporções entre ligas metálicas, em situações que envolvem premiações, notas em provas etc." Também fala de aplicações de determinantes na geometria e transformações. Algumas aplicações interessantes de sistemas lineares são mostradas, como exemplos simples de controle de fluxo de trânsito e balanceamento de equações químicas, citadas acima, e alocação de tarefas. Em nenhum caso, entretanto, o limiar de três equações e três incógnitas é ultrapassado.

2.4 Outras Referências

LAY (1999) "enfatiza o impacto do computador tanto no desenvolvimento quanto na prática da Álgebra Linear em ciência e engenharia", e "contém exercícios (...) em todas as seções (aproximadamente 200 ao todo) para serem resolvidos com o auxílio de um 'programa Matricial'(...)" (p. xiii). Ainda assim, apesar de ser o livro-texto da disciplina de Álgebra Linear I da UFRGS, pouca ênfase é dada a esse tratamento computacional, e nenhuma aula em laboratório é oferecida aos estudantes.

ELENBOGEN, JAMES, & LACHANCE (1999) apresentam uma interessante perspectiva:

> "(...) engenheiros e profissionais da computação (...) nos perguntaram por que a Álgebra Linear que eles aprenderam na faculdade é tão diferente daquela que eles usam no trabalho. A maioria dos cursos provê um conjunto de habilidades de manipulação de matrizes combinada com um corpo de conhecimento teórico. (...) Nosso projeto implementa mudanças nessa trajetória, motivado pelo objetivo de ensinar os estudantes a opera em um nível algébrico e geométrico mais elevado, tanto na área do entendimento teórico quanto na área de resolução de problemas. É um objetivo sofisticado, que não sera alcançado meramente incluindo mais aplicações." (p. 1, tradução nossa)

O artigo também afirma que "a tecnologia do computador é invocada para promover um ponto de vista mais elevado ao eliminar o tédio [do processo] da manipulação de matrizes." (p. 2, tradução nossa)

3. Metodologia

A principal ferramenta teórica utilizada no trabalho foi a *abordagem incorporada*, que será descrita na primeira parte do capítulo. Na segunda parte, falaremos dos recursos de Informática necessários para a realização do trabalho.

3.1 Abordagem Incorporada[2]

A abordagem incorporada, apresentada por Tall[3], defende, em suma, que o caminho para os níveis mais abstratos do pensamento matemático é facilitado se passar por uma fase de interação visual e enativa[4], usando *organizadores genéricos* para manipular *raízes cognitivas*.

Tall cita a classificação feita por Bruner dos modos de representação mental em enativo (através de ações), icônico[5] (organização sensório-visual) e simbólico (representação em palavras ou linguagem). Além disso, "essas representações crescem em sequência no crescimento cognitivo do indivíduo, primeiro enativo, depois icônico e, finalmente, a capacidade para representação simbólica." (TALL, 2003, p. 2, tradução nossa)

Tall aproveita essa classificação, dividindo os modos de representação do pensamento matemático em três categorias, ou "mundos" (TALL, 2003, p. 3, tradução nossa):

> - **incorporado**: baseado nas percepções humanas num contexto do mundo real, incluindo (mas não limitado a) aspectos visuais e enativos;
>
> - **simbólico-proceitual**: combinando o papel dos símbolos na aritmética, álgebra e cálculo simbólico, baseado na teoria segundo a qual esses símbolos têm ação dupla, como processo e conceito (proceito);

[2] A expressão "Abordagem incorporada" é uma tradução nossa do inglês *Embodied Approach*. *Embodied* literalmente significa algo que tomou corpo ou forma, que se materializou.

[3] David Tall: matemático inglês que, a partir de 1980, voltou-se para a educação matemática. Merece menção o paper TALL & VINNER (1981), que trata de como uma definição matemática precisa (a *definição conceitual*) se relaciona com o construto mental que a representa (*imagem conceitual*). Tall aposentou-se em 2006 e tornou-se Professor Emérito em Pensamento Matemático na Universidade de Warwick, Reino Unido.

[4] Relativa à ação.

[5] Os PCN citam o aspecto icônico dos sistemas de equações através de sua visualização geométrica (BRASIL 2006, p.122). Usando softwares de geometria dinâmica, é possível também conferir caráter enativo a essa visualização.

> - **formal-axiomático**: abordagem formal partindo de axiomas escolhidos e fazendo deduções lógicas para provar teoremas.

A abordagem incorporada, portanto, defende que a assimilação de um determinado conceito (ou mais precisamente, um proceito) deve seguir essa sequência. Entretanto, a abordagem usual dada no ensino médio normalmente já passa para a etapa simbólico-proceitual. Assim, entendemos que o assunto poderia ter um tratamento prévio usando o paradigma da incorporação.

TALL (ibid., p.12, tradução nossa) afirma que

> Dois conceitos são úteis na construção de uma abordagem incorporada à matemática:
>
> • um *organizador genérico* é um ambiente (ou micromundo) que permite que o aprendiz manipule exemplos e (se possível) contraexemplos de um conceito matemático específico ou um sistema de conceitos relacionados.
>
> • uma *raiz cognitiva* é um conceito que (potencialmente) já possui significado para o estudante, e ainda contém as sementes de expansão cognitiva e posterior desenvolvimento teórico.
>
> (...) Por exemplo, a noção de linearidade local é uma raiz cognitiva para a diferenciação. Isso foi demonstrado no programa *Magnify* (...). O gráfico parece menos curvado quando ampliado, e altamente ampliado, parece 'localmente linear'. O programa *Magnify* é um organizador genérico para a noção de linearidade local.

Assim, uma etapa importante na construção das atividades foi elencar candidatos a raízes cognitivas e organizadores genéricos para os diversos proceitos. Essas escolhas serão detalhadas no capítulo 4.

3.2 Recursos de Informática

Os organizadores genéricos utilizados serão, invariavelmente, recursos de software[6] de dois tipos principais:

- *Planilha eletrônica*: programa que processa tabelas, sendo possível inserir valores numéricos e de texto, ou construir esses valores a partir de fórmulas. Esse tipo de programa foi um candidato natural para nosso trabalho, já que, em essência, uma planilha é uma grande matriz. Também útil pela capacidade de gerar gráficos a partir desses valores.

- *Applets*: pequenos programas que podem ser "embutidos" em outros programas. Seu uso mais comum é em navegadores de internet.

Nessas escolhas, preocupamo-nos com a *portabilidade* das atividades, ou seja, esperamos que elas possam ser reproduzidas com um número mínimo ou nulo de mudanças na plataforma de hardware e software onde as atividades forem porventura aplicadas. O laboratório de informática do CAp foi propício para isso, pois divide-se em duas partes; numa delas, as máquinas têm instalado o sistema operacional Windows, e na outra, Linux. As duas partes foram utilizadas, embora a maior parte das atividades tenha sido executada na parte com Linux.

A oferta de planilhas eletrônicas é atualmente bastante ampla, inclusive de programas gratuitos, como o LibreOffice[7], que será a opção mais utilizada aqui. Embora seja um programa comercial, a popularidade do Excel justifica sua menção em alguns pontos; o Excel também possui alguns interessantes recursos que – ao menos por enquanto – não estão disponíveis nas planilhas gratuitas.

Quanto aos applets, a portabilidade já uma preocupação natural de seus programadores, uma vez que um applet normalmente ficará disponível em um site na Internet – que pode, a princípio, ser acessado por inúmeras combinações

[6] Ressaltamos, apenas, que Tall não faz restrição quanto à *forma* dos organizadores genéricos, que podem ser, por exemplo, objetos concretos.
[7] Previamente conhecido como OpenOffice, internacionalmente, e no Brasil como BrOffice.

diferentes de tipo de máquina, sistemas operacional (Linux, Windows, Mac etc.) e navegador (Firefox, Internet Explorer, Chrome, Opera, Konqueror etc.) [8].

É altamente recomendável que cada aluno utilize seu próprio computador[9] com acesso à internet[10]. Nossa experiência também mostrou que é essencial que o professor tenha à sua disposição um projetor, além do quadro. O aluno estará constantemente transitando entre duas formas de linguagem: a escrita no papel e a entrada no computador através do teclado e mouse. Constatamos que é muito difícil expressar uma linguagem pelo instrumento da outra, seja escrever uma equação no computador[11] ou – muito pior – descrever o uso de um software dispondo apenas do quadro. No nosso caso, dispusemos de um quadro móvel que também servia de anteparo para o projetor, o que tem a vantagem de podermos "riscar a tela", o que pode ser bastante útil.

---

[8] Isso sem considerar que num futuro próximo provavelmente estaremos considerando o uso de celulares, tablets, e outros dispositivos ainda a serem inventados, aumentando essa quantidade de combinações.

[9] Ou então que haja uma máquina disponível para cada três alunos, no máximo.

[10] Embora, em tese, seja possível instalar os applets para uso off-line, ou seja, instalá-los localmente na máquina desconectada, o imenso trabalho necessário para isso não se justifica, ainda mais considerando a tendência para a ubiquidade do acesso à internet.

[11] A tendência é que isso mude, dada a crescente oferta de telas sensíveis ao toque (*touchscreen*).

4. Concepção da Prática

Como o campo é muito amplo, foi necessário inicialmente limitar o escopo do trabalho antes de iniciar a confecção das atividades. Deixaremos de lado, por exemplo, temas como representação gráfica matricial[12] e vetorial, transformações geométricas e aplicações de determinantes. Foram escolhidos os seguintes temas:

- Definição de matrizes por fórmulas

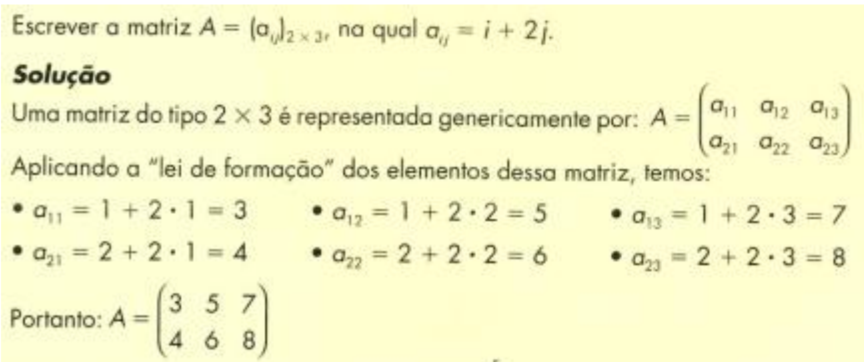
- Sistemas lineares

- Grafos

A seguir, para cada um desses temas, buscamos escolher uma raiz cognitiva e um organizador genérico. Essas escolhas são detalhadas neste capítulo. Finalmente, pesquisamos por aplicações que servissem de motivações para a confecção das atividades.

4.1 Definição de matrizes por fórmulas

Um caminho bastante usado para o ensino de matrizes é o de definir uma matriz $A_{i \times j}$ por uma fórmula do tipo $a_{ij} = f(i,j)$. Segue um exemplo retirado de L_S (p.310):



Escrever a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, na qual $a_{ij} = i + 2j$.

Solução

Uma matriz do tipo 2×3 é representada genericamente por: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

Aplicando a "lei de formação" dos elementos dessa matriz, temos:

- $a_{11} = 1 + 2 \cdot 1 = 3$
- $a_{12} = 1 + 2 \cdot 2 = 5$
- $a_{13} = 1 + 2 \cdot 3 = 7$
- $a_{21} = 2 + 2 \cdot 1 = 4$
- $a_{22} = 2 + 2 \cdot 2 = 6$
- $a_{23} = 2 + 2 \cdot 3 = 8$

Portanto: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

Figura 1: Exemplo retirado de livro didático de definição de matriz por f órmula.

[12] Embora tenha sido feita uma apresentação aos alunos a fim de introduzir essa representação.

Podemos automatizar a geração dessa matriz com uma planilha eletrônica como o Excel, usando as funções COLUNA e LIN[13]. Com poucos cliques, pode-se expandir a matriz para um tamanho bem maior que o 2×3 do exercício acima. No Excel 2010, a ferramenta de *Formatação Condicional* provê colorização automática conforme o valor da célula[14], criando um mapa análogo a um mapa de contorno colorizado[15]. Nesse ponto, podemos perceber que a matriz pode ser vista como a discretização de uma função de duas variáveis.

A1 =COLUNA(A1)+2*LIN(A1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
4	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
5	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
6	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
7	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
8	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
9	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
10	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
11	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
12	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
13	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
14	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
15	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
16	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
17	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
18	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
19	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53

A1 =COLUNA(A1)+2*LIN(A1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
4	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
5	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
6	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
7	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
8	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
9	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
10	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
11	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
12	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
13	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
14	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
15	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
16	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
17	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
18	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
19	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53

Figura 2: A matriz definida por $a_{ij} = i + 2j$ gerada no Excel, sem formatação (à esquerda) e colorizada utilizando o recurso de formatação condicional (à direita).

Essa visualização é, portanto, uma raiz cognitiva para a geração de matrizes, e o Excel, o organizador genérico associado. A tendência é que, com o tempo, essa funcionalidade de colorização automática, como tantas outras, torne-se comum em planilhas não comerciais.

[13] LINHA no LibreOffice.

[14] O LibreOffice Calc também possui um recurso chamado *Formatação Condicional*, porém limitado a poucas regras definidas pelo usuário, sendo que a cada uma é associada uma única cor. Pode-se implementar uma regra dinâmica como a existente no Excel, porém essa depende da programação de macros, o que exige um trabalho considerável de programação, além de ter outros problemas relacionados a segurança e portabilidade.

[15] O site Wolfram Alpha (http://www.wolframalpha.com/) tem um recurso similar chamado "Matrix Plot"; neste contexto, porém, sua utilização é pouco prática.

4.2 Resolução de sistemas lineares

Para sistemas de duas equações e duas incógnitas, é comum começar pelo método de isolar uma das incógnitas em uma das equações e substituí-la na outra. Este procedimento é bastante intuitivo mas, já no caso de três equações e três incógnitas, mostra-se pouco prático.

Nosso objetivo é inserir o escalonamento como método primário de resolução. O problema do escalonamento manual, como bem sabem os estudantes de Álgebra Linear em nível universitário, é o excesso de operações a serem executadas; e nessas operações, qualquer erro, como o esquecimento de um sinal, pode propagar-se de forma desastrosa nos passos posteriores.

É nesse ponto que o computador pode ser um aliado. Queremos usar a *eliminação gaussiana* como raiz cognitiva, mas precisamos de uma ferramenta (organizador genérico) que execute as operações de linha, sendo que o aluno deve meramente indicá-las. Dessa forma, o aluno consegue ter uma visão melhor do *processo* de eliminação, deixando de ver o escalonamento como uma infindável série de operações sujeitas a erros. Outra vantagem é que os passos são todos reversíveis.

Existem diversos applets e programas que executam operações de linha em uma matriz dada. Para o presente trabalho, foi escolhido o applet *Row Echelon Form*, localizado em um site[16] do IITB (Indian Institute of Technology Bombay). Apesar de estar disponível apenas em inglês, e só poder operar com matrizes de tamanho máximo 6×6, essa ferramenta tem atributos interessantes que justificaram sua escolha, como o registro (*log*) das operações efetuadas. Outra característica útil é o fato de que ele opera com frações, ou seja, mais parecido com o trabalho que seria feito no papel. Embora a operação com números em ponto flutuante seja mais útil para a resolução de problemas práticos (o que pode ser feito numa etapa posterior), a manipulação é menos óbvia para a finalidade de o aluno guiar o processo de escalonamento.

---

[16] http://www.mathresource.iitb.ac.in/linear%20algebra/RowEchelonForm

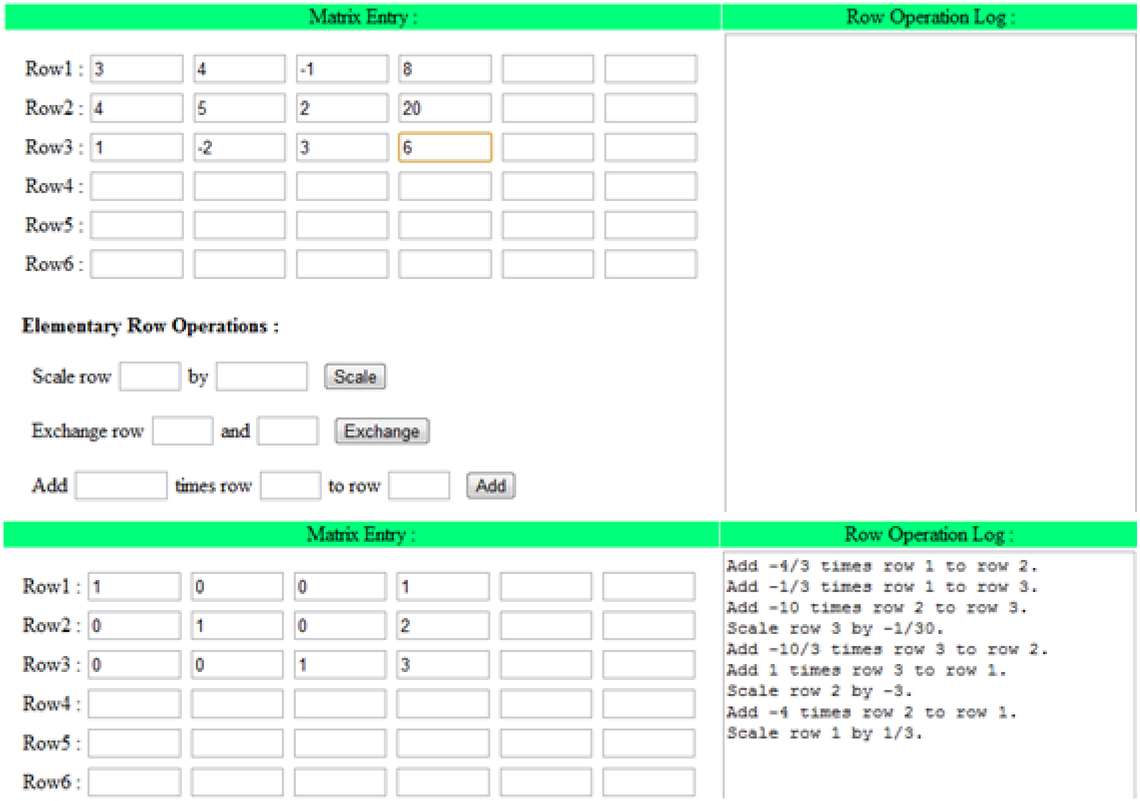


Figura 3: Telas do applet *Row Echelon Form*. Acima, foi inserida uma matriz representando um sistema linear. Abaixo, uma sequência de operações de linha (registradas no painel à direita) produzem a forma escalonada reduzida da matriz.

4.3 Grafos

Grafos são objetos relativamente fáceis de explicar e de bom apelo visual – isso sem falar em suas aplicações computacionais, que os ligam intimamente às matrizes. Assim, é de se admirar que sejam tão pouco trabalhados no Ensino Básico.

A inserção do ensino de grafos no Ensino Médio foi abordada por MALTA (2008), que destaca "a necessidade de representar um grafo de maneira que pudesse ser tratada ou processada no computador" (p. 76). Embora este trabalho realize várias atividades envolvendo a representação de grafos por matrizes de adjacência, não chega efetivamente a utilizar o computador para processá-las. Entretanto, admite que "a questão operatória (...) pode se tornar extensa quando um grafo tiver muitos vértices. Não chegamos a trabalhar com uma planilha de cálculo, mas talvez neste momento pudéssemos ter feito relação com algum software que facilitasse os cálculos." (p. 80). Tentaremos aqui preencher essa lacuna.

Entretanto, antes de manipular as matrizes, é preciso que o aluno compreenda a *representação do grafo como matriz de adjacência*. Esta possivelmente será nossa escolha mais ousada de raiz cognitiva, por ser uma noção latente bastante abstrata.

O organizador escolhido foi um applet (que designaremos "applet 1") em um site[17] da UTC (University of Tennesee Chattanooga). Uma interessante abordagem é usada: é possível ver as mudanças na matriz à medida que o grafo é criado e alterado, como mostra a Figura 5. Entre as limitações estão a impossibilidade de inserir laços, traçar mais de uma aresta entre dois nós, ou criar arestas orientadas.

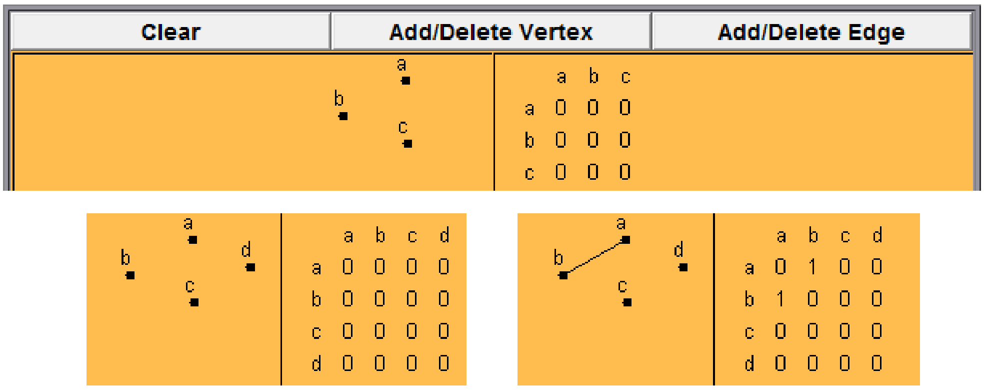


Figura 4: Telas do applet 1. Acima, 3 nós desconectados correspondendo a uma matriz nula. Abaixo, o efeito da adição de um nó e posteriormente de uma aresta.

No mesmo site, há outro applet interessante ("applet 2"), que pode ser útil na questão, também abordada por Malta, de encontrar caminhos entre nós através de potências da matriz de adjacência. Em uma única visualização, pode-se visualizar a matriz de adjacência A, e a matriz A^2, em que cada elemento a_{ij} mostra o número de caminhos de tamanho 2 entre os nós i e j, como mostrado na Figura 6. A partir daí, pode-se utilizar uma planilha eletrônica ou outra ferramenta para calcular potências maiores de A.

[17] http://oneweb.utc.edu/~Christopher-Mawata/petersen/lesson7.htm

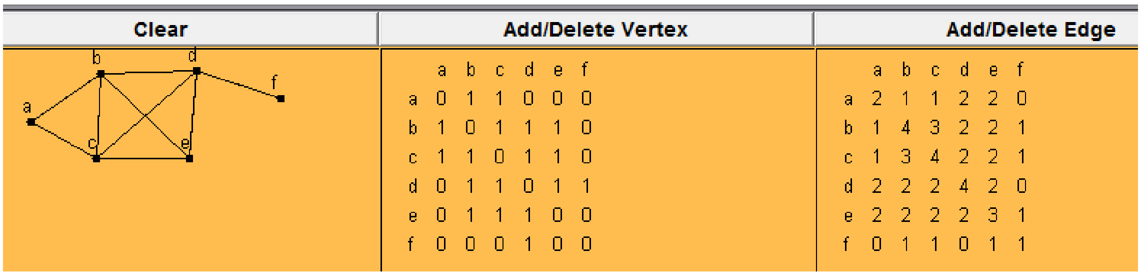


Figura 5: Tela do applet 2, contendo um grafo (esquerda), sua matriz de adjacência A (centro), e A^2 (direita).

Os applets 1 e 2 tratam apenas da "ida" do proceito, ou seja, a construção da matriz a partir do grafo; a "volta", comparativamente mais abstrata, é a construção do grafo a partir da matriz. É digno de nota um applet ("applet 3") localizado em um site[18] do RPI (Rensselaer Polytechnic Institute) que traça grafos a partir de vários tipos de representações (incluindo matriz de adjacência), como mostrado na Figura 6. Entretanto, o método de entrada, em texto puro, não é tão adequado aos nossos propósitos, e houve problemas de compatibilidade com alguns navegadores. No presente trabalho, seu uso será apenas ilustrativo, sem ser empregado em atividades executadas pelos alunos.

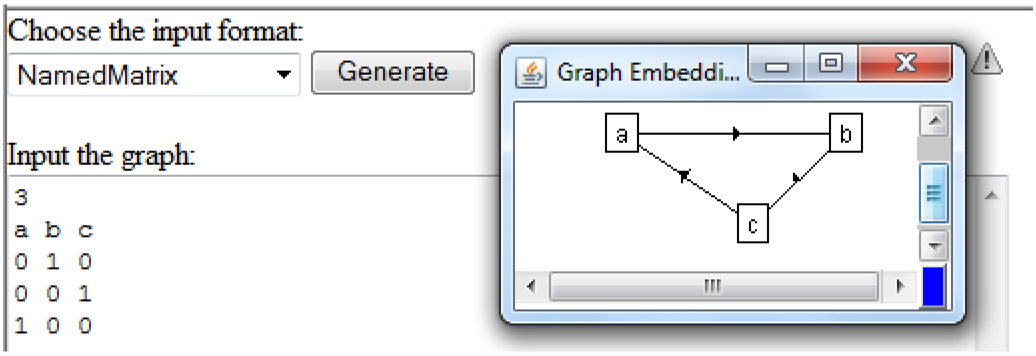


Figura 6: Tela do applet 3, mostrando um grafo gerado a partir de uma matriz de adjacência dada.

[18] http://www.cs.rpi.edu/research/groups/pb/graphdraw/headpage.html

5. Prática

Figura 7: Um dos laboratórios utilizados para as aulas. Ao centro, a minha mesa com o projetor.

As atividades foram implementadas no Colégio de Aplicação (CAp) da UFRGS, na forma de uma disciplina eletiva chamada “Explorando Matrizes e Grafos com o Auxílio do Computador”, ministrada às sextas-feiras das 14:15 às 15:45. Quinze alunos estavam inscritos. Neste capítulo, será feito um relato de algumas das atividades realizadas no decurso da disciplina.

5.1 Site

Um componente vital do trabalho foi o site construído para a disciplina[19], que funcionou como guia para as atividades. O site foi hospedado pelo Google Sites, que permite a criação de sites de forma gratuita e de e que possibilita edição fácil e rápida – muitas vezes, a edição foi feita em plena aula.

No site, foram criadas páginas para cada aula, contendo direcionamentos para as atividades a serem executadas, bem como registros *a posteriori* das atividades, resumos de conteúdos e gabaritos. de cada aula , além de links para as ferramentas utilizadas. O site ficará disponível de forma permanente e livre.

[19] https://sites.google.com/site/explorandomatrizesegrafos ou pelo link comprimido bit.ly/matgraf

Figura 8: Imagem do site da disciplina.

5.2 Problemas envolvendo sistemas lineares

Inicialmente, foi feita uma exposição no quadro sobre os métodos usuais de resolução de sistemas de equações. Todos sabiam como resolver um sistema de ordem dois usando isolamento, e alguns sabiam como "somar" as duas equações, de modo a eliminar uma das incógnitas, inclusive dizendo como esse método era "mais fácil". A exposição, então, teve o objetivo de mostrar como representar o sistema como uma matriz, e apresentar as operações de linha como equivalentes às operações que eles já conheciam.

A seguir, foi apresentado o applet *Row Echelon Form*, que nomeamos "Ferramenta de Escalonamento de Matrizes". A partir deste ponto, várias dificuldades, tanto operacionais quanto didáticas, apareceram:

- Nessa aula, os alunos estavam com seu notebook do projeto UCA[20], cuja tela de 7 polegadas não permitia que o aluno visualizasse, ao mesmo tempo, a matriz e os botões de comando. Isso levou alguns alunos a executar uma mesma operação repetidamente (por exemplo, multiplicar um linha por 3), já que o resultado não era imediatamente visível.

[20] "Um computador por Aluno", versão brasileira do projeto OLPC ("*One Laptop per Child*"), que visa fornecer a cada aluno um computador com acesso à Internet para uso em aula.

- O fato de os comandos serem em inglês (apesar de ter sido colocada a tradução dos comandos na página da disciplina).

- Percebeu-se que a matriz escolhida como exemplo era razoavelmente complexa para introduzir o assunto. Isso foi sanado mais tarde, através de uma lista[21] contendo matrizes nas quais as operações a serem feitas estavam mais evidentes.

- Nessa aula ainda não se dispunha de um projetor. Assim, foi bastante complicado guiar os alunos através do quadro. A fim de tentar compensar isso, foi disponibilizado um vídeo[22] descrevendo o processo de escalonamento. Isso acabou sendo bastante útil, pois ficou como uma referência permanente em casos de dúvida em relação ao procedimento.

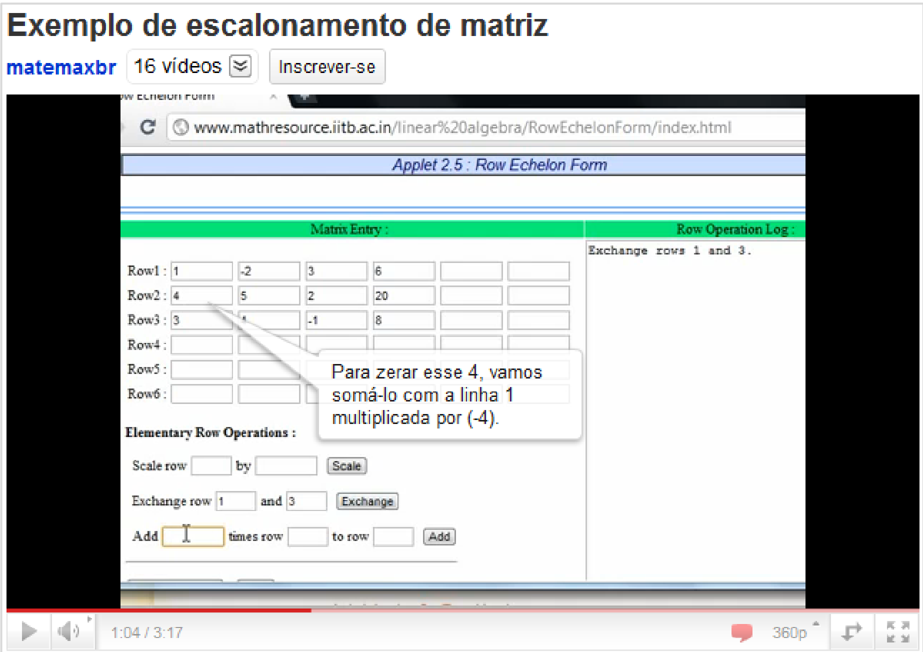


Figura 9: Vídeo explicando o processo de escalonamento de matriz

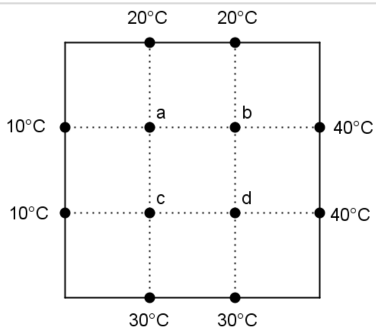
Nos tópicos a seguir, serão mostrados alguns dos problemas aplicados de sistemas lineares trabalhados em aulas subsequentes.

21 https://sites.google.com/site/explorandomatrizesegrafos/upload/Resumo05-Lista.pdf
22 http://www.youtube.com/watch?v=HMsVO6Aj1I0

5.2.1 Distribuição de temperaturas numa placa

O problema abaixo (“Problema 1”) fez parte da primeira avaliação. O objetivo era que os alunos montassem e resolvessem um sistema de equações lineares baseando-se em uma aplicação em algum campo (no caso, na Física). No caso, temos um sistema de 4 equações e quatro incógnitas. Este problema foi adaptado de (LAY, 1999, p. 11); a versão original continha 6 pontos.

O problema a seguir vem do estudo da distribuição do calor. Conhecendo a temperatura nas bordas de uma placa metálica fina, podemos fazer uma aproximação da temperatura em pontos no interior da placa. Se fizermos um reticulado (quadradinhos), uma aproximação que pode ser feita é a seguinte:



A temperatura em um ponto é aproximadamente a média dos pontos vizinhos.

Por exemplo, a temperatura no ponto **a** da figura pode ser aproximada por:

$$a = \frac{10 + 20 + b + c}{4}$$

Podemos multiplicar os dois lados da equação por 4, e então colocar as variáveis no lado esquerdo e as constantes no lado direito:

$$4a = 10 + 20 + b + c$$

$$4a - b - c = 30$$

Repetindo o processo para os demais pontos, cria-se um sistema de equações.

a) escreva esse sistema, colocando as variáveis do lado esquerdo.
b) escreva a matriz que representa o sistema em (a).
c) usando escalonamento de matriz, resolva o sistema e escreva sua solução..

Figura 10: Problema 1: Temperaturas em uma placa com 4 valores a determinar.

Para o escalonamento, foi novamente usada a Ferramenta de Escalonamento de Matrizes. A resolução completa do problema está no Anexo 1.

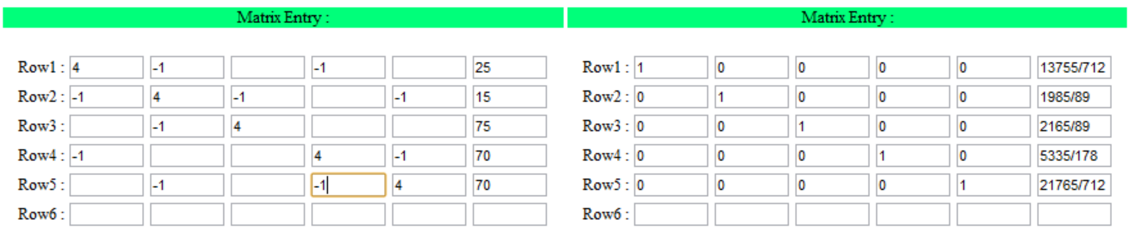
Observando a resolução feita pelos alunos, nota-se que os erros mais comuns aconteciam na conversão do sistema em matriz. Em mais de um caso, aconteceu de o aluno construir a matriz como $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 30 \\ 4 & -1 & -1 & 60 \\ 4 & -1 & -1 & 40 \\ 4 & -1 & -1 & 70 \end{bmatrix}$, ou seja, apenas repetindo o procedimento exemplificado, sem dar atenção ao fato de que os nomes das incógnitas mudavam e que uma poderia estar faltando. Nesse caso, orientou-se a primeiro nomear as colunas com os nomes das incógnitas, mais a coluna das constantes, para só então preencher a matriz.

Em outra aula, apresentei outra versão do problema ("Problema 2"), dessa vez com 5 incógnitas[23]. Como o LibreOffice das máquinas dos alunos não possui o recurso de colorização automática, mostrei no projetor o seguinte diagrama representando o problema:

0	10	15	20	20
15	a	b	c	25
30	d	e	30	35
40	40	40	40	40

Figura 11: Problema 2: Distribuição em temperaturas em uma placa com 5 valores a determinar.

Sugeri, então, que tentássemos resolver o problema de uma forma um pouco mais direta, pulando algumas etapas em relação ao procedimento descrito anteriormente. Observando o exercício anterior, pode-se notar que a *variável de interesse* em cada linha era aquela que ficava com coeficiente 4, e já estava do lado "certo"[24] (esquerdo) da equação. As demais estavam do lado "errado" (direito), portanto ao passar para o lado "certo", elas trocariam de sinal. Do lado direito, ficariam as somas das temperaturas conhecidas.



Matrix Entry :

Row1 :	4	-1		-1		25
Row2 :	-1	4	-1		-1	15
Row3 :		-1	4			75
Row4 :	-1			4	-1	70
Row5 :		-1		-1	4	70
Row6 :						

Matrix Entry :

Row1 :	1	0	0	0	0	13755/712
Row2 :	0	1	0	0	0	1985/89
Row3 :	0	0	1	0	0	2165/89
Row4 :	0	0	0	1	0	5335/178
Row5 :	0	0	0	0	1	21765/712
Row6 :						

Figura 12: Ferramenta de Escalonamento com a matriz representando o sistema associado ao Problema 2 (esquerda) e sua forma escalonada reduzida (direita).

A seguir foi realizado o escalonamento, bastante longo, e que gerava números mais "quebrados", resultando em frações com denominadores de até 712. Entretanto, como o cálculo estava entregue ao computador, isso não foi problema.

[23] o máximo que o applet permitia, pois o tamanho máximo suportado é 6 × 6

[24] É óbvio que "certo" e "errado", nesse contexto, referem-se apenas ao nosso objetivo, que é de montar a matriz que representa o sistema linear, com as incógnitas à direita da igualdade e as constantes à esquerda.

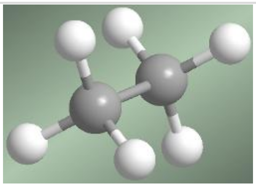
Ao final, bastou usar uma calculadora ou planilha para conseguir valores aproximados, com os quais completamos o diagrama.

0	10	15	20	20
15	19,3	22,3	24,3	25
30	29,9	30,5	30	35
40	40	40	40	40

Figura 13: Distribuição de temperaturas depois de resolvido o sistema associado ao Problema 2.

5.2.2 Balanceamento de equação química

Normalmente, o balanceamento de equações químicas é feito por meio de tentativas e erros e algumas deduções sobre as proporções de reagentes e produtos. Entretanto, podemos modelar isso por um sistema de equações lineares. Também como parte da primeira avaliação, aplicamos o problema a seguir ("Problema 3"), adaptado de (KHOURY)[25]:



A reação química abaixo representa a combustão do etano (C_2H_6), produzindo gás carbônico e água como subproduto:

$$\_\_C_2H_6 + \_\_O_2 \rightarrow \_\_CO_2 + \_\_H_2O$$

Para determinar as proporções dos reagentes e dos produtos, ou seja, balancear a equação química, podemos atribuir variáveis aos índices procurados:

$$x\ C_2H_6 + y\ O_2 \rightarrow z\ CO_2 + t\ H_2O$$

E então escrever as equações considerando cada elemento. Por exemplo, o número de átomos de carbono (C) deve ser o mesmo dos dois lados da equação. Do lado esquerdo temos $2x$ átomos, e do lado direito, z átomos. Então temos:

$$2x = z$$

Colocando todas as variáveis do mesmo lado, temos $2x - z = 0$. Repetindo o processo para os demais átomos, criamos um sistema de equações.

Figura 14: Problema 3: Balanceamento de equação química.

A resolução completa do problema encontra-se no Anexo 2.

Um aspecto interessante desse sistema é que ele é *homogêneo*, ou seja, todas as constantes são zero, e sempre tem ao menos uma solução: aquelas em que todas as incógnitas são iguais a zero. Claro, no caso, essa solução não é de muito

[25] http://aix1.uottawa.ca/~jkhoury/chemistry.htm

interesse prático, pois, apesar de a equação estar “balanceada”, nada acontece, pois não há reagentes.

Não adiantaria colocar esse sistema na Ferramenta de Escalonamento de Matrizes, pois daí resultaria a solução $x = y = z = t = 0$. Assim, o “truque” sugerido foi de fazer uma das incógnitas iguais a 1 e reescrever o sistema, pois então as demais incógnitas teriam valores proporcionais. Essa ideia requereu vários exemplos com pesos e proporções de reagentes, até ser finalmente aceita.

A seguir, restou ajustar as soluções fracionárias, uma vez que o balanceamento deve mostrar coeficientes inteiros[26]. Também foram precisos alguns exemplos para a ideia de que, como as soluções representavam *proporções* entre os reagentes, poderíamos multiplicá-las juntas, o que não alteraria as proporções e eliminaria os denominadores. Após, alguns até sugeririam o uso do m.m.c. para eliminar simultaneamente os denominadores.

Assim como no problema de Distribuição de Temperaturas, em outra aula apresentei uma versão mais complicada do problema (“Problema 4”), extraída de LAY (1999, p. 53):

$$a\, PbN_6 + b\, CrMn_2O_8 \rightarrow c\, Pb_3O_4 + d\, Cr_2O_3 + e\, MnO_2 + f\, NO$$

Novamente sugeri que fosse feita a montagem da matriz de forma mais direta, como no Problema 2. Porém, a última coluna (formada totalmente por zeros) não pôde ser colocada na Ferramenta de Escalonamento de Matrizes. Porém, ao fazer a substituição de uma das incógnitas por 1, percebemos que bastaria inverter o sinal da coluna da incógnita escolhida – convenientemente, a última. Aí bastou escalonar a matriz e multiplicar as soluções de modo a eliminar os denominadores.

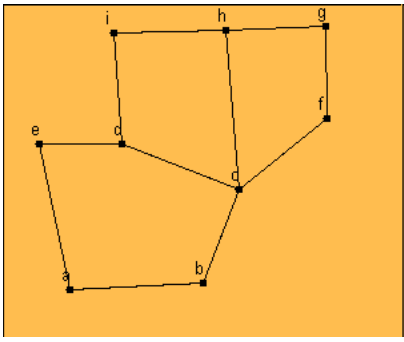
[26] Na verdade, há várias exceções. É costume, por exemplo, permitir múltiplos de $\frac{1}{2}$ como coeficientes de moléculas diatômicas; poderíamos, no nosso caso, deixar $y = \frac{7}{2}$, e na equação balanceada constaria o termo $\frac{7}{2}O_2$. Além disso, as equações de oxidação-redução (redox) também precisam levar em conta a carga de cada elemento, requerendo ajustes adicionais nos índices. Preferimos, porém, omitir esses detalhes.

5.3 Criação e análise de Grafos

Primeiramente, foi feita uma exposição sobre grafos, seus elementos e a matriz de adjacência (A) e o significado de A^2, através do applet 2 citado no item 4.3. Posteriormente, foi proposta uma atividade com as seguintes etapas:

1) Procurar um mapa na Internet. Sugeriu-se acessar o Google Maps e mapear um conjunto de cidades, ou então algumas ruas de uma região qualquer, como os arredores da casa do aluno.
2) Escolher um conjunto de pontos desse mapa[27], e reproduzir o gráfico correspondente no applet 2 (por nós nomeada "Ferramenta de Criação de Grafos"). Identificar o que representam os pontos (a até j) do grafo.
3) Escolher dois pontos razoavelmente distantes, e descobrir a distância mínima entre eles, usando potências da matriz de adjacência A.

Segue um exemplo de grafo criado por uma aluna, representando ruas nos arredores de sua casa.



	a	b	c	d	e	f	g	h	i
a	0	1	0	0	1	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	0	0	0	0
c	0	1	0	1	0	1	0	1	0
d	0	0	1	0	1	0	0	0	1
e	1	0	0	1	0	0	0	0	0
f	0	0	1	0	0	0	1	0	0
g	0	0	0	0	0	1	0	1	0
h	0	0	1	0	0	0	1	0	1
i	0	0	0	1	0	0	0	1	0

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
a	2	0	1	1	0	0	0	0	0
b	0	2	0	1	1	1	0	1	0
c	1	0	4	0	1	0	2	0	2
d	1	1	0	3	0	1	0	2	0
e	0	1	1	0	2	0	0	0	1
f	0	1	0	1	0	2	0	2	0
g	0	0	2	0	0	0	2	0	1
h	0	1	0	2	0	2	0	3	0
i	0	0	2	0	1	0	1	0	2

Figura 15: Grafo criado por aluna (esquerda), sua matriz de adjacência A **(centro) e A^2 (esquerda).**

Foi pedido então que, através da análise das potências de A, fosse descoberto o tamanho do caminho mínimo entre os pontos a e g. Na própria ferramenta podemos ver que, como tanto em A como A^2 o cruzamento entre a e g é 0, então não há caminho de tamanho 1 ou 2. Foi utilizada o site "Matrices: Arithmetic"[28].

---

[27] No máximo 10, que é o limite da ferramenta.

[28] http://www.quickmath.com/webMathematica3/quickmath/matrices/arithmetic/basic.jsp

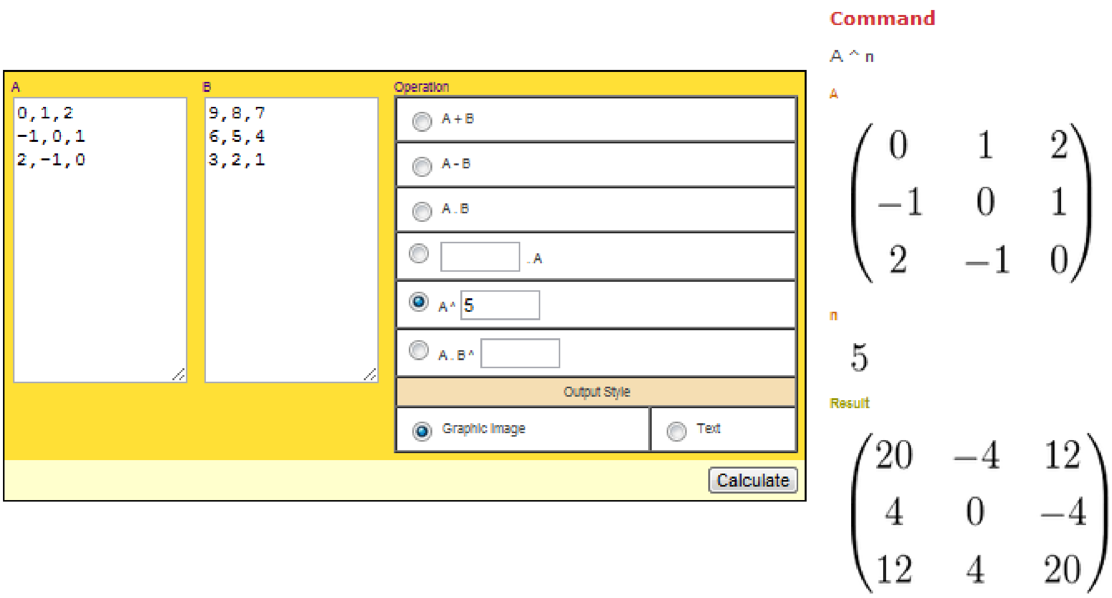


Figura 16: Tela do site "Matrices: Arithmetic". No exemplo, foi inserida uma matriz A, e a seguir calculou-se A^5.

Por limitações da Ferramenta de Criação de Grafos, a cópia de A para esta página teve de ser feita manualmente. Ao obter A^3, verifica-se que ainda não há caminho de tamanho 3. Já a matriz A^4 indica que existem dois caminhos de tamanho 4.

3

Result

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 7 & 1 & 6 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

4

Result

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 6 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 8 & 1 & 8 & 4 & 7 & 0 & 9 & 1 \\ 6 & 1 & 26 & 1 & 8 & 0 & 14 & 0 & 15 \\ 5 & 8 & 1 & 16 & 1 & 10 & 0 & 15 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 1 & 7 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 7 & 0 & 10 & 1 & 10 & 0 & 13 & 0 \\ 2 & 0 & 14 & 0 & 3 & 0 & 9 & 0 & 8 \\ 2 & 9 & 0 & 15 & 1 & 13 & 0 & 18 & 0 \\ 2 & 1 & 15 & 0 & 6 & 0 & 8 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Figura 17: Potências da matriz de adjacência: A^3 (esquerda) e A^4 (direita).

Uma inspeção rápida permite verificar que esses caminhos são (a)-b-c-f-g e (a)-b-c-h-g.

6. Considerações Finais

O uso das ferramentas computacionais permitiu o rompimento da barreira representada pelos sistemas lineares 3×3, citada pelos PCN e seguida pelos livros didáticos. Além disso, foi possível usar valores que não precisam ficar restritos a valores "bem-comportados". A introdução do algoritmo de escalonamento foi bem assimilada pelos alunos. Outras ferramentas disponíveis na Internet permitem a resolução de matrizes maiores[29].

Sabemos, entretanto, que as ferramentas têm muitas limitações. Por exemplo, a maioria dos applets usados neste trabalho está em inglês, o que atrapalha bastante em alguns momentos. Além disso, se um aluno quiser reusar resultados obtidos na Ferramenta de Escalonamento de Matrizes ou na Ferramenta de Criação de Grafos em uma planilha, terá que copiar os valores manualmente.

A tendência, entretanto, é que seja apenas questão de tempo para que essas ferramentas sejam melhoradas e surjam outras, com novas características interessantes, e também em português. Nem consideramos aqui as possibilidades que certamente surgirão com as novas tecnologias que emergem a cada instante, com novas formas de interação, como o uso de gestos em telas sensíveis a toque. Apenas um breve exercício de imaginação nesse sentido: uma ferramenta de escalonamento poderia permitir "arrastar" uma linha para cima de outra com o dedo, e, ao soltar, informar por quanto a linha arrastada deve ser multiplicada, antes de somá-la à linha destino; a multiplicação por escalar poderia ser acionada por um *pinch gesture*[30].

Didaticamente, os recursos computacionais desempenham um duplo papel positivo. Por um lado, facilitam a compreensão dos conceitos, através da abordagem incorporada. Por outro, auxiliam na resolução dos passos repetitivos.

---

[29] Como exemplo, citamos o applet *Linear Solver*, disponível no site http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?lang=en&+module=tool/linear/linsolver.en, que permite a entrada do sistema de até 9 equações, podendo-se digitá-las diretamente, colocar os coeficientes uma a um, ou através de matriz. A resolução indica se o sistema é insolúvel ou indeterminado (nesse caso, indica soluções paramétricas)

[30] Movimento que imita um "esticamento" da tela, em que dois dedos tocam a tela, e a seguir são afastados um do outro sem deixar de tocar a tela, como se a espichasse.

Os alunos que já haviam tido algum conteúdo de matrizes relatavam apenas lembrar que era preciso fazer uma grande quantidade de contas para montar uma matriz ou calcular um determinante, por exemplo. Liberado desse fardo, o aluno tem mais liberdade para visualizar o conteúdo de um ponto de vista mais elevado, facilitando a conexão com problemas reais, mais motivadores. Também pode-se fazer extensões para conteúdos mais avançados. Podemos pensar em, por exemplo, a partir do escalonamento, discutir tópicos como vetores e dependência linear.

Talvez a implementação dessas atividades, com os recursos recomendados, seja quase utópica para a maioria das salas de aula brasileiras. Porém, a expectativa é que esse cenário mude aos poucos, como atestam iniciativas como o projeto UCA. Além disso, acreditamos que estudos como este podem servir de argumento para a aquisição de tais recursos, e como norteadores para sua utilização.

Referências

BATTAGLIOLI, C. S. (2008). Sistemas Lineares na segunda série do Ensino Médio: um olhar sobre os livros didáticos. São Paulo.

BRASIL. (2006). Orientações Curriculares de Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: Ministério da educação (MEC), Secretaria da Educação Básica (SEB).

BRYAN, K., & LEISE, T. (s.d.). *THE $25,000,000,000 Eigenvector: the Linear Algebra behind Google.* Acesso em 2011 de 03 de 20, disponível em http://www.rose-hulman.edu/~bryan/googleFinalVersionFixed.pdf

ELENBOGEN, B., JAMES, D., & LACHANCE, M. (1999). Visual Linear Algebra: Web-Based Exploration Applets. *12 C7*.

GIOVANNI, J. R., BONJORNO, J. R., & GIOVANNI JR., J. R. (2002). *Matemática Fundamental: uma nova abordagem: ensino médio* (Vol. único). São Paulo: FTD.

HEFFERON, J. (s.d.). *Linear Algebra.* Acesso em 29 de maio de 2011, disponível em http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/book.pdf

KHOURY, J. (s.d.). *Applications of Linear Algebra*. Acesso em 2010 de dezembro de 22, disponível em http://aix1.uottawa.ca/~jkhoury/app.htm

LAY, D. L. (1999). *Álgebra Linear e suas Aplicações* (2ª ed.). Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos.

MALTA, G. H. (2008). Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível. Porto Alegre: PPGEM da UFRGS.

Matrix (Mathematics):History. (s.d.). Acesso em 20 de 03 de 2011, disponível em Wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_(mathematics)#History

MELLO, J. L. (2005). *Matemática: construção e significado: Ensino Médio* (Vol. único). São Paulo: Moderna.

SANTOS, J. P., MELLO, M. P., & MURARI, I. (2008). *Introdução à Análise Combinatória.* Ciência Moderna.

SPINELLI, W., SOUZA, M. H., & REAME, E. (2005). *Matemática: Ensino Médio* (Vol. 2). São Paulo: Nova Geração.

STRANG, G. (1986). *Introduction to Applied Mathematics.* Wellesley-MA (EUA): Wellesley-Cambridge Press.

TALL, D. (2003). Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. *História e Tecnologia no Ensino da Matemática , 1*, 1-28.

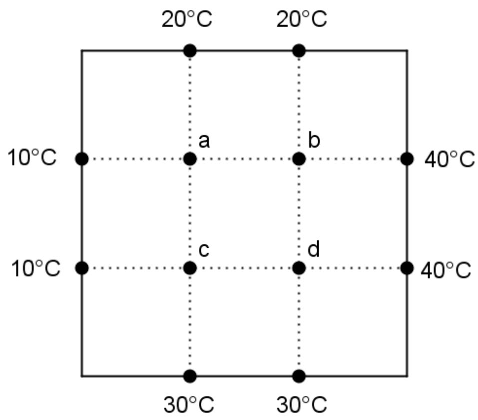
TALL, D., & VINNER, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics , 12*, 151-169.

Anexos

A seguir são apresentadas algumas das atividades realizadas, com sua resolução (em azul).

Anexo 1 – Distribuição de temperaturas numa placa (Resolução)

O problema a seguir vem do estudo da distribuição do calor. Conhecendo a temperatura nas bordas de uma placa metálica fina, podemos fazer uma aproximação da temperatura em pontos no interior da placa. Se fizermos um reticulado (quadradinhos), uma aproximação que pode ser feita é a seguinte:

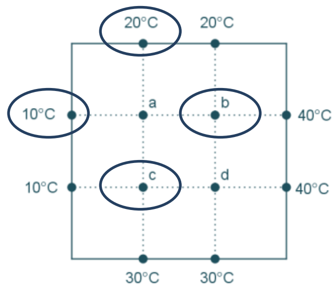


A temperatura em um ponto é aproximadamente a média dos pontos vizinhos.

Por exemplo, a temperatura no ponto **a** da figura pode ser aproximada por:

$$a = \frac{10 + 20 + b + c}{4}$$

Ou seja, é a soma dos vizinhos de b, conforme a figura ao lado, dividido por 4, resultando na média aritmética dos vizinhos.



Podemos multiplicar os dois lados da equação por 4, e então colocar as variáveis no lado esquerdo e as constantes no lado direito:

$$4a = 10 + 20 + b + c$$
$$4a - b - c = 30$$

Obs.: essa multiplicação por 4 é apenas uma conveniência, para lidarmos com menos frações. Não é obrigatória, mas pode facilitar bastante em muitos casos! Sem isso, a equação ficaria: $a - \frac{b}{4} - \frac{c}{4} = \frac{15}{2}$. Poderíamos seguir dessa maneira também, sem problemas; a resposta seria a mesma.

Repetindo o processo para os demais pontos, cria-se um sistema de equações.

a) escreva esse sistema, colocando as variáveis do lado esquerdo.

$$b = \frac{a + 20 + 40 + d}{4} \qquad c = \frac{10 + a + d + 30}{4} \qquad d = \frac{c + b + 40 + 30}{4}$$

$$4b = a + 60 + d \qquad 4c = 40 + a + d \qquad 4d = c + b + 70$$

$$-a + 4b - d = 60 \qquad -a + 4c - d = 40 \qquad -b - c + 4d = 70$$

O sistema fica:

$$\begin{aligned} 4a - b - c &= 30 \\ -a + 4b - d &= 60 \\ -a + 4c - d &= 40 \\ -b - c + 4d &= 70 \end{aligned}$$

b) escreva a matriz que representa o sistema em (a).

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} (a) & (b) & (c) & (d) & (const.) \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & 30 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 60 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 40 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 70 \end{bmatrix} \end{array}$$

c) usando escalonamento de matriz, resolva o sistema e escreva sua solução.

A matriz escalonada reduzida é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 55/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 45/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 30 \end{bmatrix}$

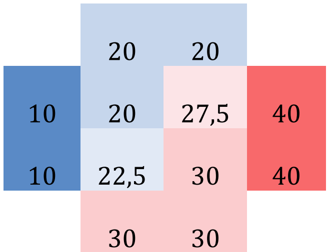
Que corresponde a:

$a = 20$
$b = 55/2$
$c = 45/2$
$d = 30$

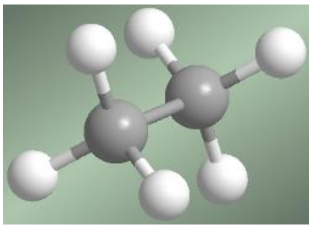
Como são temperaturas, temos:

$a = 20°C$
$b = 27{,}5°C$
$c = 22{,}5°C$
$d = 30°C$

Ao lado, um diagrama mostrando como seria aproximadamente essa distribuição de temperaturas, sendo azul mais frio, e vermelho mais quente.



Anexo 2 - Balanceamento de Equação Química (Resolução)



A reação química abaixo representa a combustão do etano (C_2H_6), produzindo gás carbônico e água como subproduto:

$$\_\_C_2H_6 + \_\_O_2 \rightarrow \_\_CO_2 + \_\_H_2O$$

Para determinar as proporções dos reagentes e dos produtos, ou seja, balancear a equação química, podemos atribuir variáveis aos índices procurados:

$$x\ C_2H_6 + y\ O_2 \rightarrow z\ CO_2 + t\ H_2O$$

E então escrever as equações considerando cada elemento. Por exemplo, o número de átomos de carbono (C) deve ser o mesmo dos dois lados da equação. Do lado esquerdo temos $2x$ átomos e do lado direito, z átomos . Então temos:

$$2x = z$$

Colocando todas as variáveis do mesmo lado, temos $2x - z = 0$. Repetindo o processo para os demais átomos, criamos um sistema de equações.

a) escreva esse sistema, colocando as variáveis do lado esquerdo.

Carbono:		$2x - z = 0$
Hidrogênio:	$6x = 2t$	$6x - 2t = 0$
Oxigênio:	$2y = 2z + t$	$2y - 2z - t = 0$

b) escreva a matriz que representa o sistema em (a).

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} (x) & (y) & (z) & (t) & (const.) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

O sistema obtido anteriormente é chamado de *homogêneo*. Esse tipo de sistema *sempre* tem pelo menos uma solução, que é fazer todas as variáveis iguais a zero. (De fato, se tivermos uma quantidade *zero* de todos os reagentes, a reação está "balanceada", mas isso não é lá muito útil...)

O interessante é descobrir se há soluções não-nulas. Para isso, vamos usar o seguinte truque: fixar uma das variáveis. Vamos usar $\boldsymbol{t = 1}$, mas podia ser qualquer em variável por qualquer valor ($\neq 0$).

Por que posso fazer isso? Por que os valores são proporcionais! Por exemplo, se numa equação química eu tenho que o índice do oxigênio é 1 e do hidrogênio é 2, isso significa que sempre tenho que ter o dobro de átomos de H em relação aos de O. Então, se eu disser a quantidade de um deles (1 é apenas um exemplo), conseguirei, depois de descobrir a equação, os outros, seguindo as proporções estabelecidas.

c) reescreva o sistema da letra (a), substituindo $t = 1$, sempre deixando as variáveis do lado esquerdo e as constantes do lado direito.

$2x - z = 0$ (não tem t, nada a fazer)

$$6x - 2t = 0$$
$$6x - 2 \cdot 1 = 0$$
$$6x - 2 = 0$$
$$6x = 2$$

$$2y - 2z - t = 0$$
$$2y - 2z - 1 = 0$$
$$2y - 2z = 1$$

O sistema fica:
$$\begin{cases} 2x - z = 0 \\ 6x = 2 \\ 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

d) escreva a matriz que representa o sistema em (c).

Como substituímos t por um número, não existe mais a variável t; assim, a matriz terá uma coluna a menos que a anterior.

$$\begin{array}{cccc} (x) & (y) & (z) & (const.) \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

e) usando escalonamento de matriz, resolva o sistema e escreva sua solução.

A matriz reduzida é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{bmatrix}$

Que corresponde a: $x = 1/3$ $\quad y = 7/6$ $\quad z = 2/3$

$t = 1$ (que foi a nossa escolha antes)

f) O que fazer com as soluções fracionárias? (Dica: se eu dobrar, triplicar, etc. a quantidade dos reagentes, o balanceamento não se altera). Escreva a equação química balanceada.

Como as quantidades são proporcionais, posso multiplicar todas juntas pelo número que eu quiser. No caso, multiplicar tudo por 6 eliminará os denominadores, resultando:

$$x = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$
$$y = 6 \cdot \frac{7}{6} = 7$$
$$z = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$$
$$t = 6 \cdot 1 = 6$$

Substituindo na equação química original, temos:

$2\ C_2H_6 + 7\ O_2 \rightarrow 4\ CO_2 + 6\ H_2O$

Confira, contando o total de átomos de C, O e H em cada lado da equação!