

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

ESTIMAÇÃO E PREVISÃO EM PROCESSOS COM  
LONGA DEPENDÊNCIA SAZONAIS

Cleber Bisognin

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática  
como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em  
Matemática Pura com ênfase em Probabilidade e  
Estatística Matemática

**Profa. Dra. Sílvia Regina Costa Lopes**  
Orientadora

Porto Alegre, 29 de agosto de 2003.

## RESUMO

Neste trabalho analisamos alguns processos com longa dependência sazonal, denotados por  $\text{SARFIMA}(0, D, 0)_s$ , onde  $s$  é a sazonalidade. Os estudos de estimação e previsão estão baseados em simulações de Monte Carlo para diferentes tamanhos amostrais e diferentes sazonalidades. Para estimar o parâmetro  $D$  de diferenciação sazonal utilizamos os estimadores propostos por Geweke e Porter-Hudak (1983), Reisen (1994) e Fox e Taqqu (1986). Para os dois primeiros procedimentos de estimação consideramos seis diferentes maneiras de compor o número de regressores necessários na análise de regressão, com o intuito de melhor comparar seus desempenhos. Apresentamos um estudo sobre previsão  $h$ -passos à frente utilizando os processos  $\text{SARFIMA}(0, D, 0)_s$  no qual analisamos o erro de previsão, as variâncias teórica e amostral, o vício, o pervício e o erro quadrático médio.

## ABSTRACT

In this work we analyze some long memory seasonal processes, denoted by  $\text{SARFIMA}(0, D, 0)_s$ , where  $s$  is the seasonality. The estimation and forecasting analysis in these processes are based on Monte Carlo simulation studies for different seasonal parameters and different sample sizes. To estimate the fractional seasonal parameter  $D$  we consider the methods proposed by Geweke and Porter-Hudak (1983), Reisen (1994) and Fox and Taqqu (1986). For the first two estimation procedures we consider six different ways to choose the number of regressors in the linear regression, to better compare their performances. We also consider here the study of the  $h$ -steps ahead forecasting for these  $\text{SARFIMA}(0, D, 0)_s$  processes analyzing the forecasting error, the theoretical and sample variances, the bias, the percentage bias and the mean square error.

# Contents

LISTA DE FIGURAS . . . . .	1
LISTA DE TABELAS . . . . .	4
<b>1 Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2 Conceitos Básicos</b>	<b>9</b>
<b>3 Modelos para Séries Temporais</b>	<b>18</b>
3.1 PROCESSOS ARMA( $p, q$ ) . . . . .	20
3.2 PROCESSOS ARIMA( $p, d, q$ ) . . . . .	21
3.3 PROCESSOS ARFIMA( $p, d, q$ ) . . . . .	21
<b>4 Processos SARFIMA(<math>p, d, q</math>) <math>\times</math> (<math>P, D, Q</math>)<sub>s</sub></b>	<b>26</b>
4.1 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES . . . . .	27
4.2 MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO . . . . .	44
4.2.1 ESTIMADOR <i>GPH</i> . . . . .	45
4.2.2 ESTIMADOR <i>SPR</i> . . . . .	47
4.2.3 ESTIMADOR <i>FT</i> . . . . .	48
4.3 PREVISÃO . . . . .	50
<b>5 Simulações</b>	<b>57</b>
5.1 ESTIMAÇÃO . . . . .	57
5.2 PREVISÃO . . . . .	76
<b>6 Conclusões e Propostas para Futuros Trabalhos</b>	<b>87</b>
6.1 Conclusões . . . . .	87
6.2 Futuros Trabalhos . . . . .	89
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>90</b>

APÊNDICE A	93
APÊNDICE B	98
APÊNDICE C	107
APÊNDICE D	110

# LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 4.1</b>	Número mensal de acidentes de trânsito fatais nos E.E.U.U., 1973 – 1978 (National Safety Council). . .	27
<b>Figura 4.2</b>	Função Densidade Espectral do SARFIMA(0, 0.2, 0) <sub>12</sub> .	40
<b>Figura 5.1</b>	Representação do <b>Método 1</b> , onde $r = g(n)/\lfloor s/2 \rfloor$ , para $s$ par e $r = g(n)/(\lfloor s/2 \rfloor + 1)$ , para $s$ ímpar. . . .	59
<b>Figura 5.2</b>	Representação do <b>Método 2</b> , onde $r = g(n)$ . . . . .	59
<b>Figura 5.3</b>	Representação do <b>Método 3</b> , onde $r = g(n)/s$ . . . . .	59
<b>Figura 5.4</b>	Representação do <b>Método 4</b> , onde $r = g(n)$ . . . . .	59
<b>Figura 5.5</b>	Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0) <sub>2</sub> , $n = 200$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	68
<b>Figura 5.6</b>	Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0) <sub>2</sub> , $n = 1000$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	68
<b>Figura 5.7</b>	Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0) <sub>3</sub> , $n = 200$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	69
<b>Figura 5.8</b>	Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0) <sub>3</sub> , $n = 1000$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	69
<b>Figura 5.9</b>	Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0) <sub>4</sub> , $n = 200$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	70
<b>Figura 5.10</b>	Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0) <sub>4</sub> , $n = 1000$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	70
<b>Figura 5.11</b>	Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0) <sub>5</sub> , $n = 200$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	71
<b>Figura 5.12</b>	Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0) <sub>5</sub> , $n = 1000$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	71
<b>Figura 5.13</b>	Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0) <sub>6</sub> , $n = 200$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	72
<b>Figura 5.14</b>	Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0) <sub>6</sub> , $n = 1000$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	72
<b>Figura 5.15</b>	Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0) <sub>12</sub> , $n = 200$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	73

<b>Figura 5.16</b> Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0) <sub>12</sub> , $n = 1000$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	73
<b>Figura 5.17</b> Estimadores versus Sazonalidade, $n=200$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	74
<b>Figura 5.18</b> Estimadores versus Sazonalidade, $n=1000$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	75
<b>Figura 5.19</b> Estimadores versus Sazonalidade, $n=200$ e $\alpha = 0.6$ . . . . .	75
<b>Figura 5.20</b> Estimadores versus Sazonalidade, $n=1000$ e $\alpha = 0.6$ . . . . .	76
<b>Figura 5.21</b> $Eqmp_n$ para SARFIMA(0, 0.2, 0) <sub>2</sub> , $n = 1000$ , $RE = 500$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	85
<b>Figura 5.22</b> $Eqmp_n$ para SARFIMA(0, 0.2, 0) <sub>3</sub> , $n = 1000$ , $RE = 500$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	85
<b>Figura 5.23</b> $Eqmp_n$ para SARFIMA(0, 0.2, 0) <sub>4</sub> , $n = 1000$ , $RE = 500$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	86
<b>Figura 5.24</b> $Eqmp_n$ para SARFIMA(0, 0.2, 0) <sub>5</sub> , $n = 1000$ , $RE = 500$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	86
<b>Figura B.1</b> Função de verossimilhança do SARFIMA (0, 0.4, 0) <sub>2</sub> , $n = 200$ . . . . .	99
<b>Figura B.2</b> Função de verossimilhança do SARFIMA (0, 0.4, 0) <sub>2</sub> , $n = 400$ . . . . .	99
<b>Figura B.3</b> Função de verossimilhança do SARFIMA (0, 0.4, 0) <sub>2</sub> , $n = 600$ . . . . .	100
<b>Figura B.4</b> Função de verossimilhança do SARFIMA (0, 0.4, 0) <sub>2</sub> , $n = 800$ . . . . .	100
<b>Figura B.5</b> Função de verossimilhança do SARFIMA (0, 0.4, 0) <sub>2</sub> , $n = 1000$ . . . . .	101
<b>Figura B.6</b> Função de verossimilhança do SARFIMA (0, 0.4, 0) <sub>5</sub> , $n = 200$ . . . . .	101
<b>Figura B.7</b> Função de verossimilhança do SARFIMA (0, 0.4, 0) <sub>5</sub> , $n = 600$ . . . . .	102
<b>Figura B.8</b> Função de verossimilhança do SARFIMA (0, 0.4, 0) <sub>5</sub> , $n = 1000$ . . . . .	102
<b>Figura B.9</b> Função de verossimilhança do SARFIMA (0, 0.4, 0) <sub>12</sub> , $n = 200$ . . . . .	103

<b>Figura B.10</b> Função de verossimilhança do SARFIMA $(0, 0.4, 0)_{12}$ , $n = 600$ . . . . .	103
<b>Figura B.11</b> Função de verossimilhança do SARFIMA $(0, 0.4, 0)_{12}$ , $n = 1000$ . . . . .	104
<b>Figura B.12</b> Função de verossimilhança do SARFIMA $(0, 0.4, 0)_{12}$ , $n = 1200$ . . . . .	104
<b>Figura B.13</b> Função de verossimilhança do SARFIMA $(0, 0.4, 0)_{12}$ , $n = 1400$ . . . . .	105
<b>Figura B.14</b> Função de verossimilhança do SARFIMA $(0, 0.4, 0)_{12}$ , $n = 1600$ . . . . .	105
<b>Figura B.15</b> Função de verossimilhança do SARFIMA $(0, 0.4, 0)_{12}$ , $n = 1800$ . . . . .	106

# LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 5.1.1</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_2$ , $\alpha = 0.5$ .	61
<b>Tabela 5.1.2</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_3$ , $\alpha = 0.5$ .	62
<b>Tabela 5.1.3</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_4$ , $\alpha = 0.5$ .	63
<b>Tabela 5.1.4</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_5$ , $\alpha = 0.5$ .	64
<b>Tabela 5.1.5</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_6$ , $\alpha = 0.5$ .	65
<b>Tabela 5.1.6</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_{12}$ , $\alpha = 0.5$ .	66
<b>Tabela 5.2.1</b>	Previsão para SARFIMA $(0, 0.2, 0)_{2, n = 1000}$ , $RE = 500$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	79
<b>Tabela 5.2.2</b>	Previsão para SARFIMA $(0, 0.2, 0)_3$ , $n = 1000$ , $RE = 500$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	80
<b>Tabela 5.2.3</b>	Previsão para SARFIMA $(0, 0.2, 0)_4$ , $n = 1000$ , $RE = 500$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	81
<b>Tabela 5.2.4</b>	Previsão para SARFIMA $(0, 0.2, 0)_5$ , $n = 1000$ , $RE = 500$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	82
<b>Tabela 5.2.5</b>	Previsão para SARFIMA $(0, 0.2, 0)_6$ , $n = 1000$ , $RE = 500$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	83
<b>Tabela 5.2.6</b>	Previsão para SARFIMA $(0, 0.2, 0)_{12}$ , $n = 1000$ , $RE = 500$ e $\alpha = 0.5$ . . . . .	84
<b>Tabela D.1</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_2$ , $\alpha = 0.6$ .	111
<b>Tabela D.2</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_3$ , $\alpha = 0.6$ .	112
<b>Tabela D.3</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_4$ , $\alpha = 0.6$ .	113
<b>Tabela D.4</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_5$ , $\alpha = 0.6$ .	114
<b>Tabela D.5</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_6$ , $\alpha = 0.6$ .	115
<b>Tabela D.6</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_{12}$ , $\alpha = 0.6$ .	116
<b>Tabela D.7</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_2$ , $\alpha = 0.7$ .	117
<b>Tabela D.8</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_3$ , $\alpha = 0.7$ .	118
<b>Tabela D.9</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_4$ , $\alpha = 0.7$ .	119
<b>Tabela D.10</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_5$ , $\alpha = 0.7$ .	120



<b>Tabela D.11</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_6$ , $\alpha = 0.7$ .	121
<b>Tabela D.12</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_{12}$ , $\alpha = 0.7$ .	122
<b>Tabela D.13</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_2$ , $\alpha = 0.8$ .	123
<b>Tabela D.14</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_3$ , $\alpha = 0.8$ .	124
<b>Tabela D.15</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_4$ , $\alpha = 0.8$ .	125
<b>Tabela D.16</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_5$ , $\alpha = 0.8$ .	126
<b>Tabela D.17</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_6$ , $\alpha = 0.8$ .	127
<b>Tabela D.18</b>	Estimação de $D$ para SARFIMA $(0, D, 0)_{12}$ , $\alpha = 0.8$ .	128

# Capítulo 1

## Introdução

Recentemente, na literatura de séries temporais, tem sido bastante mencionada a expressão longa dependência. *Longa dependência* pode ser definida, no domínio do tempo, como a característica na qual a função de autocorrelação não é absolutamente convergente. No domínio da frequência, a longa dependência aparece como a característica na qual a função densidade espectral torna-se ilimitada para frequências muito pequenas, em torno do zero.

O estudo de séries temporais com essa característica foi apresentado, primeiramente, pelo hidrologista Harold E. Hurst em 1951 enquanto investigava a série temporal das vazões do rio Nilo.

O principal objetivo em se estudar uma série temporal com longa dependência é encontrar um modelo matemático que nos possibilite fazer previsões sobre os futuros valores desta série. Um dos modelos, amplamente utilizado com esse objetivo, foi primeiramente proposto por Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981 e 1984), o qual é chamado *modelo auto-regressivo fracionalmente integrado média móvel*, denotado por  $\text{ARFIMA}(p, d, q)$ .

Neste trabalho queremos estudar séries temporais com sazonalidade. Para isto propomos os chamados *processos auto-regressivos fracionalmente integrados média móvel com sazonalidade  $s$* , denotados por  $\text{SARFIMA}(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ .

A metodologia do estudo destes processos consiste em identificar (estimar) os parâmetros deste processo usando alguns estimadores propostos na literatura de séries temporais com longa dependência e, em seguida, prever os valores futuros.

Porter-Hudak (1990) aplicou o modelo  $\text{SARFIMA}(0, D, 0)_s$  ao analisar a série temporal ‘US monetary aggregates’ usando o estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983) para estimar o parâmetro  $D$  de diferenciação sazonal. Ray (1993) analisa uma série temporal que possui comportamento de longa dependência sazonal e em seguida faz uma análise de previsão. Hassler (1994) analisa os modelos rígido e flexível para os processos  $\text{SARFIMA}(0, D, 0)_s$ , com sazonalidade  $s = 4$ . O autor trabalha com o estimador de regressão da função periodograma proposto por Geweke e

Porter-Hudak (1983), em torno de todas as frequências sazonais. Ooms (1995) analisa dois conjuntos de dados reais sazonais utilizando o estimador baseado na regressão da função periodograma, o estimador de máxima verossimilhança aproximado, proposto por Fox e Taquq (1983) e o estimador de máxima verossimilhança exato, proposto por Sowell (1992). Montanari (2000) analisa a série temporal do fluxo mensal do rio Nilo em Aswan, utilizando o estimador de máxima verossimilhança aproximado para estimar os parâmetros do processo SARFIMA( $p, d, q$ )  $\times$  ( $P, D, Q$ ) $_s$ . Peris e Singh (1996) apresentam alguns resultados de previsão  $h$ -passos à frente, utilizando os modelos SARFIMA( $p, d, q$ )  $\times$  ( $P, D, Q$ ) $_s$  nos casos em que todos os parâmetros são diferentes de zero e ainda, quando  $Q = q = 0$ , quando  $Q = q = 0$  e  $P = p = 1$  e por último, quando  $Q = P = q = p = 0$ .

Nosso objetivo neste trabalho é estudar os processos SARFIMA ( $0, D, 0$ ) $_s$  considerando a estimação do parâmetro de diferenciação sazonal, denotado por  $D$ , quando  $s = 2, 3, 4, 5, 6, 12$  e também a previsão 5-passos à frente para estes processos.

Para estimar o parâmetro  $D$ , consideramos dois estimadores semi-paramétricos, a saber: o estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983) que escreve a função periodograma dos processos SARFIMA( $0, D, 0$ ) $_s$  (um estimador não consistente para a função densidade espectral) como uma equação de regressão linear simples. Esta equação de regressão tem, como um de seus parâmetros desconhecidos, o parâmetro  $D$  e, através do método dos mínimos quadrados, encontra-se um estimador para o parâmetro  $D$ ; o estimador proposto por Reisen (1994) que possui a mesma metodologia empregada por Geweke e Porter-Hudak (1983) mas substituindo a função periodograma pela função periodograma suavizado. Além destes, consideramos o estimador, dito paramétrico, proposto por Fox e Taquq (1986), que é um estimador de máxima verossimilhança aproximado.

Neste estudo dos processos SARFIMA( $0, D, 0$ ) $_s$  destacamos os Teoremas 4.1 e 4.2. No Teorema 4.1 encontram-se algumas propriedades destes processos tais como a função densidade espectral, a função de autocovariância, a função de autocorrelação e de autocorrelação parcial. Algumas destas propriedades podem ser encontradas em Hassler (1994) e Ooms (1995) sem, no entanto, estarem demonstradas.

No Teorema 4.2 apresentamos a esperança e a variância condicionais de um processo SARFIMA( $0, D, 0$ ) $_s$ , com sazonalidade  $s$  e  $D \in (-0.5, 0.5)$ . Este teorema prova que a esperança e a variância condicionais destes processos dependem apenas dos valores passados distantes por múltiplos da sazonalidade  $s$ . Este resultado difere daquele para processos ARFIMA( $0, d, 0$ ) onde a esperança e a variância condicionais dependem de todos os valores passados. Não há resultado semelhante na literatura.

Na análise de previsão até 5-passos à frente, analisamos a previsão de erro quadrático médio mínimo, o erro de previsão, as variâncias teórica e amostral

do erro de previsão, o vício e o pervício cometido ao se estimar a variância teórica do erro de previsão e, por último, o erro quadrático médio.

No estudo de previsão utilizando os processos  $SARFIMA(0, D, 0)_s$ , destacamos o Teorema 4.3, o qual contém a demonstração das propriedades acima. Ressaltamos que a prova deste teorema para processos  $SARFIMA(0, D, 0)_s$  não apareceu antes na literatura.

No Capítulo 2, introduzimos os conceitos básicos para a análise de séries temporais. No Capítulo 3, definimos os processos  $ARMA(p, q)$ ,  $ARIMA(p, d, q)$  e  $ARFIMA(p, d, q)$  e, como caso particular deste último, o processo  $ARFIMA(0, d, 0)$ , além de suas principais propriedades. No Capítulo 4, apresentamos os processos  $SARFIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$  e, como caso particular, os processos  $SARFIMA(0, D, 0)_s$  que são o alvo de nosso estudo. Também apresentamos os estimadores para o parâmetro  $D$  de diferenciação sazonal e, por último, alguns resultados de previsão. No Capítulo 5, descrevemos o processo de simulação de Monte Carlo utilizado bem como seus resultados. No Capítulo 6, apresentamos nossas conclusões e propostas para futuros trabalhos.

# Capítulo 2

## Conceitos Básicos

Neste capítulo, apresentamos algumas definições necessárias para o estudo de uma série temporal. Uma *série temporal*, é um conjunto de observações ordenadas no tempo de qualquer fenômeno aleatório. Exemplos de séries temporais podem ser os índices diários da Bolsa de Valores, os registros de temperatura de uma cidade, as medidas dos níveis de água em uma bacia ou rio, a arrecadação do imposto de renda de um país, o PIB trimestral, a demanda horária de energia, a taxa de desemprego mensal, as vendas semanais de um certo tipo de refrigerante, etc.

Entre os objetivos ao se analisar uma série temporal, estão investigar o mecanismo gerador da série, procurar periodicidades relevantes nas observações, descrever o seu comportamento e fazer previsões.

Para analisar a natureza das observações futuras, é natural supor que cada observação  $x_t$  é um valor realizado de uma certa variável aleatória  $X_t$ . Desta forma, a série temporal  $\{x_t\}_{t \in T_0}$  é uma realização da família de variáveis aleatórias  $\{X_t\}_{t \in T_0}$ . Estas considerações sugerem modelar os dados de uma realização (ou parte dela) de um processo estocástico  $\{X_t\}_{t \in T}$ , onde  $T \supseteq T_0$ .

A seguir, apresentamos diversos conceitos necessários à compreensão e ao estudo de modelos em séries temporais. Um estudo mais completo pode ser encontrado em Brockwell e Davis (1991), Priestley (1981) e Wei (1990).

**Definição 2.1** Um *processo estocástico* é uma família de variáveis aleatórias  $\{X_t\}_{t \in T}$ , onde todas as variáveis estão definidas em um mesmo espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , sendo  $T \neq \emptyset$  um conjunto de índices,  $\Omega$  o espaço amostral,  $\mathcal{A}$  a classe de eventos aleatórios e  $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  a função que associa a probabilidade de um evento qualquer.

Se o conjunto de índices  $T$  for qualquer subconjunto, ou mesmo o próprio  $\mathbb{R}$  diz-se que o processo estocástico é a parâmetro contínuo. Se  $T$  for finito ou enumerável, como  $T = \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $T = \mathbb{Z}$  ou  $T = \mathbb{N}$ , obtemos um processo estocástico a parâmetro discreto, que será o alvo do nosso estudo.

A classe dos eventos aleatórios  $\mathcal{A}$  é uma  $\sigma$ -álgebra, i.e., uma coleção (não vazia) de subconjuntos do espaço amostral  $\Omega$  que satisfaz as seguintes propriedades

- (i)  $\Omega \in \mathcal{A}$ ;
- (ii) se  $A \in \mathcal{A}$ , então  $A^c \in \mathcal{A}$ ;
- (iii) se  $A_n \in \mathcal{A}$  é uma seqüência contável de conjuntos em  $\mathcal{A}$ , então  $\cup_n A_n \in \mathcal{A}$ .

Definimos a seguir, a *função de distribuição n-dimensional* (ou *função de distribuição conjunta*) para um vetor aleatório  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  e as *funções de autocovariância* e de *autocorrelação* de um processo estocástico. As duas últimas funções fornecem o grau de interdependência entre as variáveis aleatórias e são importantes na identificação de um modelo para uma série temporal.

**Definição 2.2** Seja  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  um vetor aleatório (ou variável aleatória n-dimensional), cujas componentes são variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . A *função de distribuição n-dimensional* (ou *função de distribuição conjunta*) do vetor é definida por

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \dots, X_{t_n} \leq x_n),$$

quaisquer que sejam  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ,  $t_i \in T$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Definição 2.3** Seja  $\{X_t\}_{t \in T}$  um processo estocástico tal que  $Var(X_t) < \infty$  para todo  $t \in T$ . A *função de autocovariância* do processo, denotada por  $\gamma_X(\cdot, \cdot)$ , é dada por

$$\gamma_X(r, s) = Cov(X_r, X_s) = \mathbb{E}[(X_r - \mathbb{E}(X_r))(X_s - \mathbb{E}(X_s))], \quad r, s \in T,$$

onde  $\mathbb{E}(X_t) \equiv \mu_t$  é a *esperança matemática ou média* da variável aleatória  $X_t$ .

**Definição 2.4** Seja  $\{X_t\}_{t \in T}$  um processo estocástico tal que  $Var(X_t) < \infty$  para todo  $t \in T$ . A *função de autocorrelação* do processo, denotada por  $\rho_X(\cdot, \cdot)$ , é dada por

$$\rho_X(r, s) = \frac{\gamma_X(r, s)}{\sqrt{Var(X_r)}\sqrt{Var(X_s)}}, \quad r, s \in T,$$

onde  $Var(X_t) \equiv \gamma_X(t, t)$ , para todo  $t \in T$ .

**Definição 2.5** Seja  $\{X_t\}_{t \in T}$  um processo estocástico com média zero e com função de autocovariância  $\gamma_X(\cdot, \cdot)$  tal que  $\gamma_X(r, s) \rightarrow 0$ , quando  $|r - s| \rightarrow \infty$ . A função de autocorrelação parcial, denotada por  $\phi_X(k, j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ ,  $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ , é o coeficiente na equação

$$\mathcal{P}_{\overline{sp}(X_1, X_2, \dots, X_k)}(X_{k+1}) = \sum_{j=1}^k \phi_X(k, j) X_{k+1-j},$$

onde  $\mathcal{P}_{\overline{sp}(X_1, X_2, \dots, X_k)}(X_{k+1})$  é a projeção ortogonal de  $X_{k+1}$  no subespaço fechado  $\overline{sp}(X_1, X_2, \dots, X_k)$  gerado pelas observações anteriores.

A partir da equação

$$\langle X_{k+1} - \mathcal{P}_{\overline{sp}(X_1, X_2, \dots, X_k)}(X_{k+1}), X_j \rangle = 0, \text{ para } j = 1, 2, \dots, k,$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é definido como o produto interno sobre o espaço de Hilbert  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  dado por  $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(XY)$ , obtemos o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_X(1) & \rho_X(2) & \cdots & \rho_X(k-1) \\ \rho_X(1) & 1 & \rho_X(1) & \cdots & \rho_X(k-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_X(k-1) & \rho_X(k-2) & \rho_X(k-3) & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_X(k, 1) \\ \phi_X(k, 2) \\ \vdots \\ \phi_X(k, k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_X(1) \\ \rho_X(2) \\ \vdots \\ \rho_X(k) \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

onde  $\rho_X(\cdot)$  é a função de autocorrelação do processo  $\{X_t\}_{t \in T}$  e os coeficientes  $\phi_X(k, j)$  são unicamente determinados pelo sistema (2.1).

Usando a regra de Cramer sucessivamente para  $k \in \mathbb{N} - \{0\}$  obtemos a função de autocorrelação parcial, de ordem  $k$ , do processo  $\{X_t\}_{t \in T}$  dada por

$$\phi_X(k, k) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_X(1) & \rho_X(2) & \cdots & \rho_X(k-2) & \rho_X(1) \\ \rho_X(1) & 1 & \rho_X(1) & \cdots & \rho_X(k-3) & \rho_X(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_X(k-1) & \rho_X(k-2) & \rho_X(k-3) & \cdots & \rho_X(1) & \rho_X(k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_X(1) & \cdots & \rho_X(k-2) & \rho_X(k-1) \\ \rho_X(1) & 1 & \cdots & \rho_X(k-3) & \rho_X(k-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_X(k-1) & \rho_X(k-2) & \cdots & \rho_X(1) & 1 \end{vmatrix}}.$$

Para um estudo mais completo, ver Brockwell e Davis (1991).

Nas situações em que se pretende utilizar modelos para descrever processos físicos, são necessárias algumas suposições. No caso de processos estocásticos, uma suposição normalmente feita é a da estacionariedade. A seguir definimos formalmente esta importante característica dos processos estocásticos.

**Definição 2.6** Um processo estocástico  $\{X_t\}_{t \in T}$  diz-se *fortemente estacionário* se as funções de distribuição conjunta dos vetores  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  e  $(X_{t_{1+h}}, X_{t_{2+h}}, \dots, X_{t_{n+h}})$  são as mesmas, para todo  $n \in T$  e para todo  $h, t_i, t_{i+h} \in T$  com  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Definição 2.7** Um processo estocástico  $\{X_t\}_{t \in T}$  é dito ser *fracamente estacionário* ou somente *estacionário* (como serão chamados daqui por diante) se

- (i)  $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$ , para todo  $t \in T$ ;
- (ii)  $\mathbb{E}(X_t) = \mu$ , uma constante independente de  $t$ ;
- (iii)  $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r + t, s + t)$ , para quaisquer  $r, s, t \in T$ .

Observamos que, conforme o item (iii) da Definição 2.7, a função de autocovariância de um processo estocástico estacionário satisfaz  $\gamma_X(r, s) = \gamma_X(r - s, 0)$ , para quaisquer  $r, s \in T$ . Por esta razão, é conveniente redefinirmos a *função de autocovariância de ordem  $k$*  de um processo estacionário como

$$\gamma_X(k) \equiv \gamma_X(k, 0) = \text{Cov}(X_{t+k}, X_t),$$

para quaisquer  $k, t \in T$ .

A estacionariedade definida acima é também dita ser *estacionariedade no sentido largo, estacionariedade de segunda ordem ou estacionariedade de covariância*. Para maiores detalhes, ver Priestley (1981).

**Definição 2.8** Um processo estocástico  $\{X_t\}_{t \in T}$  diz-se *Gaussiano* se, para qualquer conjunto  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ , as variáveis aleatórias  $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$  têm uma distribuição normal  $n$ -dimensional.

Observamos que um processo  $\{X_t\}_{t \in T}$  fracamente estacionário não precisa ser fortemente estacionário. No entanto, como um processo Gaussiano, com variância finita, é determinado pelas médias e covariâncias, se ele for fracamente estacionário, será também fortemente estacionário (ver Brockwell e Davis (1991)).

A seguir veremos alguns conceitos básicos da Teoria Ergódica. Para um estudo mais geral sobre Processos Estocásticos Ergódicos referenciamos o leitor a Billingsley (1995).

**Definição 2.9** Seja  $(\Omega, \mathcal{A})$  um espaço mensurável. Uma transformação  $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$  é chamada *mensurável* se e só se para todo  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ .

Como é usual, denota-se

$$\varphi^j \equiv \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{j\text{-vezes}}.$$



**Definição 2.10** Seja  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade. Dizemos que a transformação mensurável  $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$  *preserva a probabilidade* se e só se  $\mathbb{P}(\varphi^{-1}(A)) = \mathbb{P}(A)$ , para todo  $A \in \mathcal{A}$ . Dizemos também que  $\mathbb{P}$  é *invariante* para  $\varphi$ .

**Definição 2.11** Seja  $\Omega = S^T$  e  $\mathcal{A}$  a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos cilindros. A transformação  $\tau : \Omega \rightarrow \Omega$  é chamada *operador shift* se ela é definida por  $\tau(w) = \tau(\cdots, w_{-2}, w_{-1}, w_0 \bullet w_1, w_2, \cdots) = (\cdots, w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1 \bullet w_2, \cdots)$ , para todo  $w = (\cdots, w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, w_2, \cdots) \in \Omega$ .

Note que  $\tau$  é  $\mathcal{A}$ -mensurável.

**Proposição 2.1** Considere  $\{X_t\}_{t \in T}$  um processo estocástico, definido em  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , onde  $\Omega = S^T$ ,  $\mathcal{A}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos cilindros e  $\mathbb{P}$  a probabilidade definida por este processo. Então  $\mathbb{P}$  é invariante, se e só se,  $\{X_t\}_{t \in T}$  é fortemente estacionário.

Para a demonstração dessa proposição e maiores detalhes, ver Durrett (1996).

**Definição 2.12** Considere  $\{X_t\}_{t \in T}$  um processo estocástico (fortemente) estacionário, definido em  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , onde  $\Omega = S^T$ ,  $\mathcal{A}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos cilindros e  $\mathbb{P}$  é a probabilidade definida por este processo. Então, a probabilidade  $\mathbb{P}$  é *ergódica* (para o operador shift  $\tau$ ) se e só se para todo  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $\tau^{-1}(A) = A$  tem-se  $\mathbb{P}(A) = 0$  ou  $\mathbb{P}(A) = 1$ .

Neste trabalho, consideramos o conjunto de índices  $T$  como sendo o conjunto dos números inteiros  $\mathbb{Z}$  e  $S = \mathbb{R}$ .

**Observação 2.1:** As funções de autocovariância e autocorrelação de um processo estocástico estacionário  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  possuem as seguintes propriedades

- $\gamma_X(k) = Cov(X_{t+k}, X_t) = Cov(X_t, X_{t-k})$ , para todo  $t, k \in \mathbb{Z}$ ;
- $\gamma_X(0) = Cov(X_t, X_t) = Var(X_t)$ , para todo  $t \in \mathbb{Z}$ ;
- $\gamma_X(k) = \gamma_X(-k)$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ ;
- $|\gamma_X(k)| \leq \gamma_X(0)$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ ;
- $\rho_X(k) = \frac{\gamma_X(k)}{\gamma_X(0)}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ ;
- $\rho_X(k) = \rho_X(-k)$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ ;
- $|\rho_X(k)| \leq \rho_X(0) = 1$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

A seguir, definimos a *função densidade espectral* de um processo estocástico estacionário que nada mais é do que a transformada de Fourier da função de autocovariância, quando esta for absolutamente convergente. Em outras palavras, a representação espectral de um processo estocástico estacionário decompõe, o mesmo, em uma soma de componentes senoidais com coeficientes aleatórios não correlacionados.

**Definição 2.13** Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo estocástico estacionário de valor real com  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma_X(k)| < \infty$ . A *função densidade espectral*,  $f_X(\cdot)$ , de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é dada por

$$\begin{aligned} f_X(w) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_X(k) e^{-iwk} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_X(k) \cos(wk) \\ &= \frac{1}{2\pi} \gamma_X(0) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_X(k) \cos(wk), \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

**Observação 2.2:** A *função de autocovariância* do processo estocástico estacionário  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  pode ser obtida através da função densidade espectral  $f_X(\cdot)$ , usando a transformada inversa de Fourier

$$\gamma_X(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f_X(w) e^{iwk} dw. \quad (2.3)$$

Assim, pelas equações (2.2) e (2.3), concluímos que a função densidade espectral,  $f_X(\cdot)$ , e a função de autocovariância,  $\gamma_X(\cdot)$ , formam um par pela transformada de Fourier com uma sendo unicamente determinada pela outra.

O teorema a seguir, apresenta algumas propriedades da *função densidade espectral* de um processo estocástico estacionário.

**Teorema 2.1** Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo estocástico com  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma_X(k)| < \infty$ . A *função densidade espectral* de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ ,  $f_X(\cdot)$ , possui as seguintes propriedades

- $f_X(w)$  é uma função real contínua;
- $f_X(w) = f_X(-w)$ , para todo  $\omega \in [-\pi, \pi]$ ;
- $f_X(w) \geq 0$ , para todo  $\omega \in [-\pi, \pi]$ ;
- $\int_{-\pi}^{\pi} f_X(w) dw < \infty$ , para todo  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

Um estudo mais completo, incluindo a demonstração das propriedades da função densidade espectral, pode ser encontrado em Brockwell e Davis (1991) e Wei (1990).

A seguir, definimos os estimadores naturais, isto é, estimadores obtidos pelo método dos momentos, para a esperança matemática e para as funções de autocovariância, autocorrelação, autocorrelação parcial e densidade espectral de um processo estocástico estacionário  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  tal que

- $\mathbb{E}(X_t) = \mu$ , para todo  $t \in \mathbb{Z}$ ;
- $Var(X_t) = \sigma_X^2$ , para todo  $t \in \mathbb{Z}$ ;
- $Cov(X_t, X_{t-k}) = \gamma_X(k)$ , para todo  $t \in \mathbb{Z}$ .

Para definirmos os estimadores através do método dos momentos, consideramos uma série temporal com  $n$  observações,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , obtidas a partir do processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ .

**Definição 2.14** Um estimador para a esperança matemática de um processo estocástico estacionário  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , é a *média amostral* definida por

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j,$$

que é a média das  $n$  observações da série temporal  $\{X_t\}_{t=1}^n$ .

O estimador  $\bar{X}$  é não-viciado ( $\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu$ ) e fracamente consistente ( $Var(\bar{X}) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ ) para  $\mu$ .

**Definição 2.15** A *função de autocovariância amostral de ordem  $k$* , é definida por

$$\hat{\gamma}_X(k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-k} (X_j - \bar{X})(X_{j+k} - \bar{X}), \text{ para todo } |k| \leq n. \quad (2.4)$$

**Observação 2.3:**

1) Na equação (2.4), é preferível o quociente  $n$  em vez de  $n-k$  pois, apesar de ser um estimador viciado,  $\hat{\gamma}_X(\cdot)$  é uma função definida não-negativa. Além do mais, apesar do estimador baseado no quociente  $n-k$  ter menor vício, ele possui maior variância (ver Wei (1990)).

2) A *função de autocorrelação amostral de ordem  $k$*  de um processo estocástico estacionário  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é definida por

$$\hat{\rho}_X(k) = \frac{\hat{\gamma}_X(k)}{\hat{\gamma}_X(0)},$$

onde  $\hat{\gamma}_X(0)$  é a variância amostral do processo.

**Definição 2.16** A função de autocorrelação parcial amostral de ordem  $k$  é obtida substituindo-se  $\rho_X(\cdot)$  por  $\widehat{\rho}_X(\cdot)$  em (2.1).

Para facilitar a resolução do sistema (2.1) utilizaremos um método recursivo, sugerido por Box et al. (1994), dado por

$$\widehat{\phi}_X(k+1, k+1) = \frac{\widehat{\rho}_X(k+1) - \sum_{j=1}^k \widehat{\phi}_X(k, j)\widehat{\rho}_X(k+1-j)}{1 - \sum_{j=1}^k \widehat{\phi}_X(k, j)\widehat{\rho}_X(j)} \quad (2.5)$$

$$\widehat{\phi}_X(k+1, j) = \widehat{\phi}_X(k, j) - \widehat{\phi}_X(k+1, k+1)\widehat{\phi}_X(k, k+1-j), \quad (2.6)$$

para todo  $j = 1, 2, \dots, k$  e  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , onde  $\widehat{\phi}_X(1, 1) = \widehat{\rho}_X(1)$ .

O sistema acima pode, também, ser usado para obter o valor teórico da função de autocorrelação parcial,  $\phi_X(\cdot, \cdot)$ , a partir da função de autocorrelação,  $\rho_X(\cdot)$  (ver Apêndice A).

**Definição 2.17** Seja  $\{X_t\}_{t=1}^n$  uma série temporal obtida a partir de um processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ . A função periodograma,  $I(\cdot)$ , da série temporal  $\{X_t\}_{t=1}^n$ , é definida por

$$I(w) = \frac{1}{2\pi} [\widehat{\gamma}_X(0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \widehat{\gamma}_X(k) \cos(wk)], \quad w \in [-\pi, \pi], \quad (2.7)$$

onde  $\widehat{\gamma}_X(\cdot)$  é a função de autocovariância amostral do processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ .

A função periodograma é um estimador não-viciado mas, inconsistente, para a função densidade espectral,  $f_X(\cdot)$ . Definimos a seguir, um estimador consistente para a função densidade espectral (ver Priestley (1981)).

**Definição 2.18** A função periodograma suavizado,  $f_{smoo}(\cdot)$ , definida por

$$f_{smoo}(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \lambda(k) \widehat{\gamma}_X(k) \cos(wk), \quad w \in [-\pi, \pi], \quad (2.8)$$

é um estimador consistente para  $f_X(\cdot)$ , onde  $\lambda(\cdot)$  é uma função de ponderação conhecida como *janela espectral*.

Na literatura, são sugeridas várias janelas espectrais para a análise de séries temporais (ver Priestley (1981)). Neste trabalho, utilizamos a *janela de Parzen* que é definida por

$$\lambda(k) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{k}{m}\right)^2 + 6\left(\frac{|k|}{m}\right)^3, & \text{se } |k| \leq \frac{m}{2}, \\ 2\left(1 - \frac{|k|}{m}\right)^3, & \text{se } \frac{m}{2} < |k| \leq m, \\ 0, & \text{caso contrario,} \end{cases} \quad (2.9)$$

onde  $m$  é definido como o *ponto de truncamento da janela* e depende do número  $n$  de observações da série temporal através de  $m = n^\beta$ , para algum  $\beta \in (0, 1)$ .

Um estudo mais completo pode ser encontrado em Brockwell e Davis (1991) e Priestley (1981).

## Capítulo 3

# Modelos para Séries Temporais

Neste capítulo apresentamos uma classe de processos estocásticos, introduzidos por G.E.P. Box e G.M. Jenkins, definidos em termos de equações de diferenças lineares com coeficientes constantes. Tais processos são chamados de *processos auto-regressivos de médias móveis* (ARMA). Posteriormente, Mandelbrot (1965) e Mandelbrot e van Ness (1968) definiram o *Movimento Browniano Fracionário*, que é um processo estocástico estacionário com longa dependência a tempo contínuo, usado para explicar o efeito Hurst. O nome de *efeito Hurst*, é dado ao comportamento de dependência entre as observações, mesmo distantes, divulgado primeiramente pelo hidrólogo Harold E. Hurst em 1951 enquanto investigava a série temporal dos níveis do rio Nilo. Em seguida, Mandelbrot e Wallis (1969) definiram o *Ruído Gaussiano Fracionário* que é uma versão do Movimento Browniano Fracionário a tempo discreto, mostrando que este processo também exibe o efeito Hurst. Mais tarde, Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981) estendem a classe de processos definidos em Box et al. (1994) para os chamados *processos auto-regressivos de médias móveis com integração fracionária*, denotados por ARFIMA( $p, d, q$ ).

Os processos ARFIMA( $p, d, q$ ) apresentam a *propriedade de longa dependência*. Recentemente, na literatura da análise de séries temporais, tem aparecido freqüentemente o estudo de modelos de séries temporais com longa dependência.

*Longa dependência* pode ser definida, no domínio do tempo, como a característica na qual a função de autocorrelação não é absolutamente convergente. No domínio da freqüência, a longa dependência aparece como a característica na qual a função densidade espectral se torna ilimitada para freqüências muito pequenas, em torno do zero.

A seguir, introduzimos uma definição mais formal para a *propriedade de longa dependência*. Ressaltamos que, na literatura, existem outras formas de definir esta propriedade.

**Definição 3.1** Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , um processo estocástico estacionário. Se existe um número real  $u \in (0, 1)$  tal que

$$\rho_X(k) \approx k^{-u},$$

onde  $\rho_X(\cdot)$  é a função de autocorrelação do processo, ou equivalentemente, se existe um número real  $b \in (0, 1)$  tal que

$$f_X(w) \approx w^b,$$

onde  $f_X(\cdot)$  é a função densidade espectral do processo, então dizemos que  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um *processo estocástico estacionário com longa dependência* (ou *longa memória*).

Se na Definição 3.1,  $u \in (1, 2)$ , dizemos que  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um *processo estocástico estacionário com dependência intermediária*.

As seguintes notações referem-se a Definição 3.1 e serão utilizadas ao longo deste trabalho.

**Notações:**

a) Se, para a seqüência  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , existe um número real  $u \in \mathbb{R}$  e constantes  $c_1, c_2 > 0$  tais que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , vale

$$c_1 \leq \left| \frac{a_n}{n^{-u}} \right| \leq c_2,$$

então, denotaremos tal fato por  $a_n \approx n^{-u}$ .

b) Se, para a função  $g(\cdot)$ , existe um número real  $b \in \mathbb{R}$  e constantes  $d_1, d_2 > 0$  tais que, para todo  $x$ , vale

$$d_1 \leq \left| \frac{g(x)}{x^b} \right| \leq d_2,$$

então, denotaremos tal fato por  $g(x) \approx x^b$ .

Um estudo mais completo sobre estes processos pode ser encontrado em Hosking (1981), Brockwell e Davis (1991), Beran (1994) e Olbermann (2002).

A seguir, definimos os processos ARMA( $p, q$ ), ARIMA( $p, d, q$ ) e ARFIMA( $p, d, q$ ). Porém, antes, damos duas definições importantes.

**Definição 3.2** O processo  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é dito ser um *ruído branco* com média zero e variância  $\sigma_\varepsilon^2$ , denotado por  $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , se

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0, \quad Var(\varepsilon_t) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2 \quad \text{e} \quad \gamma_\varepsilon(k) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

**Definição 3.3** O processo  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é dito ser composto por *variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas* (iid), denotado por  $\varepsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$ , se

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0 \quad \text{e} \quad Var(\varepsilon_t) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2.$$

### 3.1 PROCESSOS ARMA( $p, q$ )

Nesta seção, definimos os processos *auto-regressivos de médias móveis* para séries temporais e apresentamos algumas propriedades tais como causalidade, invertibilidade e função densidade espectral destes processos.

**Definição 3.4** Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo estocástico que satisfaz a equação

$$\phi(\mathcal{B})(X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \quad (3.1)$$

onde  $\mu$  é a média do processo,  $\varepsilon_t$  é o processo ruído branco (ver Definição 3.2),  $\mathcal{B}$  é o operador *defasagem ou de retardo*, isto é,  $\mathcal{B}^k X_t = X_{t-k}$ ,  $\phi(\cdot)$  e  $\theta(\cdot)$  polinômios de ordem  $p$  e  $q$  (inteiros), respectivamente, dados por

$$\begin{aligned} \phi(z) &= 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \phi_3 z^3 - \dots - \phi_p z^p \\ \theta(z) &= 1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2 - \theta_3 z^3 - \dots - \theta_q z^q \end{aligned} \quad (3.2)$$

com  $\phi_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , e  $\theta_j$ ,  $1 \leq j \leq q$  constantes reais. Então,  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um *processo auto-regressivo de média móvel de ordem  $(p, q)$* , denotado por ARMA( $p, q$ ).

**Definição 3.5** Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo ARMA( $p, q$ ). Então,

(i)  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é dito ser *causal* se existe uma seqüência de constantes  $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\sum_{j \geq 0} |\psi_j| < \infty \quad \text{e} \quad X_t = \sum_{j \geq 0} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

(ii)  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é dito ser *invertível* se existe uma seqüência de constantes  $\{\pi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\sum_{j \geq 0} |\pi_j| < \infty \quad \text{e} \quad \varepsilon_t = \sum_{j \geq 0} \pi_j X_{t-j}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

**Observação 3.1:**

- 1) Tanto a causalidade como a invertibilidade não são propriedades do processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  sozinho mas sim da relação entre os dois processos  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  e  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ .
- 2) Se na equação (3.1),  $q = 0$ , obtemos o *processo auto-regressivo de ordem  $p$* , denotado por AR( $p$ ). Da mesma forma se  $p = 0$ , na equação (3.1), obtemos o *processo média móvel de ordem  $q$* , denotado por MA( $q$ ).
- 3) Um processo ARMA( $p, q$ ) é dito ser um processo com memória curta pois,



a função de autocorrelação,  $\rho_X(k)$ , decai rapidamente quando  $k$  tende para o infinito.

O teorema a seguir trata da função densidade espectral de um processo  $ARMA(p, q)$  e sua demonstração pode ser encontrada em Brockwell e Davis (1991).

**Teorema 3.1** *Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo  $ARMA(p, q)$  onde  $\phi(\cdot)$  e  $\theta(\cdot)$  não possuem raízes em comum e  $\phi(\cdot)$  não tem raízes no círculo unitário. Então, o processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  tem função densidade espectral dada por*

$$f_X(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\theta(e^{-iw})|^2}{2\pi |\phi(e^{-iw})|^2}, \quad w \in [-\pi, \pi].$$

## 3.2 PROCESSOS $ARIMA(p, d, q)$

Nesta seção, definimos os processos *auto-regressivos integrados de médias móveis* para séries temporais quaisquer.

**Definição 3.6** Um processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é dito ser um processo *auto-regressivo integrado de média móvel de ordem  $(p, d, q)$* , com média  $\mu$ , denotado por  $ARIMA(p, d, q)$ , se a diferenciação  $(1 - \mathcal{B})^d \equiv \nabla^d$ ,  $d \in \mathbb{N} - \{0\}$ , resultar em um processo  $ARMA(p, q)$ .

O processo é dado pela expressão

$$\phi(\mathcal{B})\nabla^d(X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \quad (3.3)$$

onde  $\phi(\cdot)$ ,  $\theta(\cdot)$  são os polinômios definidos em (3.2),  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é o processo ruído branco (ver Definição 3.2) e  $d$  é chamado *parâmetro ou grau de diferenciação*.

**Observação 3.2:** Se  $d = 0$  na equação (3.3), obtemos o processo  $ARMA(p, q)$ , isto é, a classe dos processos  $ARMA(p, q)$  é um caso particular da classe dos processos  $ARIMA(p, d, q)$ .

## 3.3 PROCESSOS $ARFIMA(p, d, q)$

Nesta seção, estendemos a classe de processos  $ARIMA(p, d, q)$ , onde  $d \in \mathbb{N} - \{0\}$ , a uma classe de processos chamados *auto-regressivos de médias móveis com integração fracionária*, denotados por  $ARFIMA(p, d, q)$ , onde  $d \in \mathbb{R}$ .

Primeiramente, definimos o operador diferença.

**Definição 3.7** Para todo real  $d > -1$ , definimos o *operador diferença*  $\nabla^d \equiv (1 - \mathcal{B})^d$  através da expansão binomial

$$\nabla^d \equiv (1 - \mathcal{B})^d = \sum_{k \geq 0} \binom{d}{k} (-\mathcal{B})^k = 1 - d\mathcal{B} - \frac{d(1-d)}{2!} \mathcal{B}^2 - \dots, \quad (3.4)$$

onde

$$\binom{d}{k} = \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)},$$

na qual  $\Gamma(\cdot)$  é a função Gama definida por

- (i)  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt;$
- (ii)  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x \in \mathbb{R}.$

**Definição 3.8** Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo estocástico satisfazendo a equação

$$\phi(\mathcal{B})\nabla^d(X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B})\varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

onde  $\mu$  é a média do processo,  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é o processo ruído branco,  $\phi(\cdot)$  e  $\theta(\cdot)$  são os polinômios definidos em (3.2) e  $\nabla^d$  é o operador diferença. Então,  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é chamado de *processo auto-regressivo fracionariamente integrado de média móvel de ordem  $(p, d, q)$* , denotado por ARFIMA( $p, d, q$ ), onde  $d$  é o grau ou parâmetro de diferenciação.

Um caso particular do processo ARFIMA( $p, d, q$ ) é o processo onde  $p = q = 0$ , isto é, ARFIMA( $0, d, 0$ ) que também é chamado de *ruído branco fracionariamente diferenciado (ou Fractional Differenced White Noise (FDWN))* o qual satisfaz a equação

$$\nabla^d(X_t - \mu) \equiv (1 - \mathcal{B})^d(X_t - \mu) = \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (3.5)$$

Nos teoremas a seguir, apresentamos algumas propriedades dos processos ARFIMA( $0, d, 0$ ) e ARFIMA( $p, d, q$ ), respectivamente, e suas demonstrações podem ser encontradas em Hosking (1981) e Brockwell e Davis (1991).

Consideramos  $\mu \equiv 0$ , sem perda de generalidade.

**Teorema 3.2** *Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo ARFIMA( $0, d, 0$ ) dado pela expressão (3.5). Então,*

- (i) *Quando  $d > -0.5$ ,  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo inversível e apresenta-se como um processo auto-regressivo infinito, isto é,*

$$\Pi(\mathcal{B})X_t = \sum_{k \geq 0} \pi_k X_{t-k} = \varepsilon_t,$$

onde

$$\pi_k = \frac{-d(1-d) \cdots (k-d-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-d)}.$$

Quando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\pi_k \sim \frac{k^{-d-1}}{\Gamma(-d)}$ , onde “ $\sim$ ” indica que a razão entre os dois termos tende a 1 quando  $k \rightarrow \infty$ .

- (ii) Quando  $d < 0.5$ ,  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo estacionário e apresenta-se como um processo média móvel infinito, isto é,

$$X_t = \Psi(\mathcal{B})\varepsilon_t = \sum_{k \geq 0} \psi_k \varepsilon_{t-k},$$

onde

$$\psi_k = \frac{d(1+d) \cdots (k+d-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d)}.$$

Quando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\psi_k \sim \frac{k^{d-1}}{\Gamma(d)}$ .

Nos itens a seguir, assumimos que  $d \in (-0.5, 0.5)$ .

- (iii) O processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  possui função densidade espectral dada por

$$f_X(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left[ 2 \operatorname{sen}\left(\frac{w}{2}\right) \right]^{-2d}, \quad 0 < w \leq \pi. \quad (3.6)$$

Quando  $w$  se aproxima de zero,  $f_X(w) \sim w^{-2d}$ .

- (iv) O processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  possui funções de autocovariância e de autocorrelação, de ordem  $k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , dadas, respectivamente, por

$$\gamma_X(k) = \mathbb{E}(X_t X_{t-k}) = \frac{(-1)^k \Gamma(1-2d)}{\Gamma(k-d+1)\Gamma(1-k-d)} \sigma_\varepsilon^2$$

e

$$\rho_X(k) = \frac{\gamma_X(k)}{\gamma_X(0)} = \frac{\Gamma(k+d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(k-d+1)\Gamma(d)}.$$

Quando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\rho_X(k) \sim \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} k^{2d-1}$ .

(v) O processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  possui função de autocorrelação parcial dada por

$$\phi_X(k, k) = \frac{d}{k - d}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N} - \{0\}$$

e

$$\phi_X(k, j) = - \binom{k}{j} \frac{\Gamma(j - d)\Gamma(k - d - j + 1)}{\Gamma(-d)\Gamma(k - d + 1)},$$

onde  $j = 1, \dots, k$ , e  $\Gamma(\cdot)$  é a função Gama (ver Definição 3.7).

**Observação 3.3:**

1) A função de autocorrelação parcial do processo ARFIMA(0,  $d$ , 0) é solução do sistema (2.1). Para maiores detalhes, ver Anexo A.

2) Podemos observar que para  $d > 0$ , a função densidade espectral  $f_X(\cdot)$  é ilimitada nas frequências próximas do zero e que a função de autocorrelação  $\rho_X(k)$  possui decaimento hiperbólico, quando  $k$  tende ao infinito.

**Teorema 3.3** *Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo ARFIMA( $p, d, q$ ) com  $d \in (-0.5, 0.5)$ . Suponha que os polinômios  $\phi(\cdot)$  e  $\theta(\cdot)$  não possuam raízes em comum e que suas raízes estão fora do círculo unitário. Então,*

(i) *O processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é estacionário e inversível, com as representações média móvel e auto-regressivo infinitas dadas, respectivamente, por*

$$X_t = \sum_{k \geq 0} \psi_k \varepsilon_{t-k} \quad e \quad \sum_{k \geq 0} \pi_k X_{t-k} = \varepsilon_t,$$

onde  $\psi_k$  e  $\pi_k$  são, respectivamente, os coeficientes de  $\mathcal{B}^k$  nas expansões das igualdades

$$\Psi(\mathcal{B}) = \frac{\theta(\mathcal{B})}{\phi(\mathcal{B})}(1 - \mathcal{B})^{-d} \quad e \quad \Pi(\mathcal{B}) = \frac{\phi(\mathcal{B})}{\theta(\mathcal{B})}(1 - \mathcal{B})^d.$$

(ii) *Considere  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo estacionário e inversível. Seja  $U_t = (1 - \mathcal{B})^d X_t$ . Então, o processo  $\{U_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo ARMA( $p, q$ ), isto é,  $\phi(\mathcal{B})U_t = \theta(\mathcal{B})\varepsilon_t$  com função densidade espectral  $f_U(\cdot)$  e função de autocovariância  $\gamma_U(\cdot)$ . Seja  $Y_t = \frac{\phi(\mathcal{B})}{\theta(\mathcal{B})}X_t$ . Então,  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo ARFIMA(0,  $d, 0$ ) com função densidade espectral  $f_Y(\cdot)$  e função de autocovariância  $\gamma_Y(\cdot)$ , dadas no Teorema 3.2. Então,*

a) A função densidade espectral de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ ,  $f_X(\cdot)$ , satisfaz a seguinte equação

$$f_X(w) = f_U(w)f_Y(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\theta(e^{-iw})|^2}{2\pi |\phi(e^{-iw})|^2} \left[ 2 \operatorname{sen}\left(\frac{w}{2}\right) \right]^{-2d},$$

para todo  $0 < w \leq \pi$ .

Quando  $w \rightarrow 0$ ,  $\lim w^{2d} f_X(w)$  existe e é finito.

b) Seja  $\rho_X(\cdot)$  a função de autocorrelação do processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ . Então, quando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\lim k^{1-2d} \rho_X(k)$  existe e é finito.

Um estudo mais completo sobre estes processos, incluindo estimadores para o parâmetro fracionário do modelo ARFIMA, nas situações de estacionariedade e não estacionariedade, podem ser encontrados em Hosking (1981), Beran (1994), Brockwell e Davis (1991) e Lopes et al. (2003). Também podemos encontrar em Crato e Taylor (1996), Peiris e Singh (1996) e em Reisen e Lopes (1999) estudos relacionados com a previsão em modelos ARFIMA.

# Capítulo 4

## Processos

### SARFIMA( $p, d, q$ ) $\times$ ( $P, D, Q$ ) $_s$

Muitas séries temporais exibem um modelo que tem a característica de repetir-se durante um certo período fixo de tempo. Nos referimos a tal comportamento como *sazonalidade* e a sua duração como *período sazonal*, denotado por  $s$ . Por exemplo, para séries mensais com modelo sazonal anual, o período sazonal é  $s = 12$ ; já para séries trimestrais, o período é  $s = 4$ .

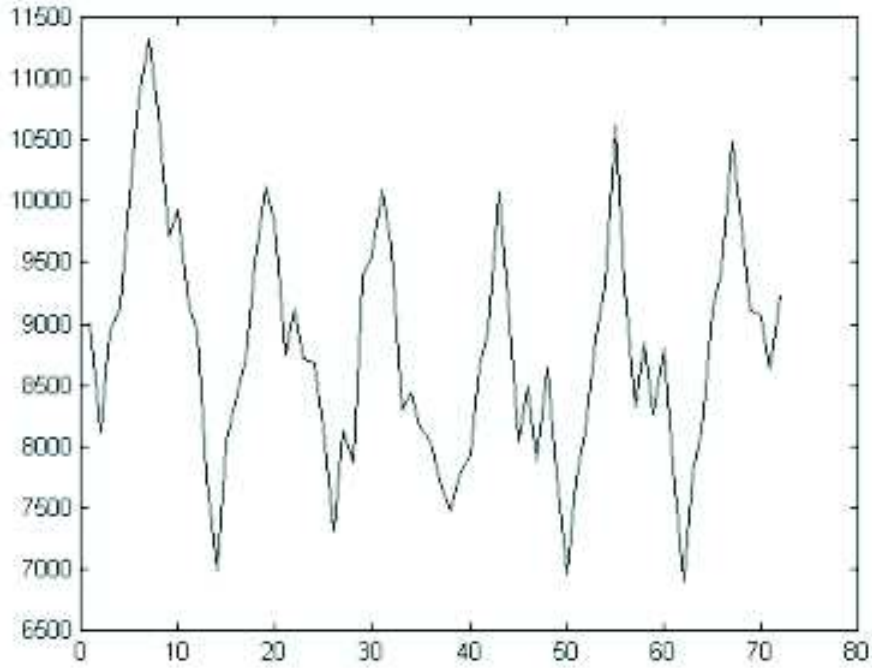
Séries temporais que contém componente sazonal são bastante comuns, especialmente em economia, negócios, sociologia, ciências e engenharia. Séries econômicas sazonais, por exemplo, são aquelas ligadas a produção, vendas, inventários, empregos, receitas e gastos governamentais e rendimentos pessoais.

Exemplos de séries temporais sazonais podem ser a demanda mensal de eletricidade em uma cidade, o total mensal de passageiros em uma companhia aérea, acidentes de trânsito fatais mensais, vendas de carros novos, rotação da terra ao redor do sol, a venda de sorvetes a cada verão, etc.

Para ilustração, a Figura 4.1 representa uma série temporal com sazonalidade  $s = 12$ . Neste capítulo, estamos interessados em estudar séries temporais com característica de longa dependência e que sejam sazonais. Estas séries são caracterizadas por uma forte correlação entre observações distanciadas pelo período sazonal  $s$ .

Para descrevermos tais séries, vamos estudar os *processos sazonais fracionalmente integrados*, denotados por SARFIMA( $0, D, 0$ ) $_s$ . Pretendemos analisar, nesse estudo de modelos de longa dependência com sazonalidade, a estimação do parâmetro de diferenciação  $D$ , utilizando os estimadores propostos por Geweke e Porter-Hudak (1983), Reisen (1994) e Fox e Taqqu (1986). Também serão apresentados alguns resultados em previsão utilizando tais modelos.

A seguir, definiremos os *processos sazonais auto-regressivos fracionalmente integrados de média móvel*, denotados por SARFIMA( $p, d, q$ ) $\times$ ( $P, D, Q$ ) $_s$ ,



**Figura 4.1:** Número mensal de acidentes de trânsito fatais nos E.E.U.U., 1973 – 1978 (National Safety Council).

os quais são uma extensão dos modelos ARFIMA( $p, d, q$ ), propostos por Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981). Em seguida, apresentamos os processos SARFIMA( $0, D, 0$ )<sub>s</sub> juntamente com algumas de suas propriedades.

## 4.1 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

**Definição 4.1** Para todo  $D > -1$ , definimos o *operador diferença sazonal*  $\nabla_s^D \equiv (1 - \mathcal{B}^s)^D$ , onde  $s$  é a sazonalidade,  $s \in \mathbb{N} - \{0\}$ , através da expansão binomial

$$\nabla_s^D \equiv (1 - \mathcal{B}^s)^D = \sum_{k \geq 0} \binom{D}{k} (-\mathcal{B}^s)^k = 1 - D\mathcal{B}^s - \frac{D(1-D)}{2!} \mathcal{B}^{2s} - \dots, \quad (4.1)$$

onde

$$\binom{D}{k} \equiv \frac{\Gamma(D+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(D-k+1)},$$

na qual  $\Gamma(\cdot)$  é a função Gama (ver Definição 3.7).

**Definição 4.2** Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo estocástico satisfazendo a equação

$$\phi(\mathcal{B})\Phi(\mathcal{B}^s)\nabla^d\nabla_s^D(X_t - \mu) = \theta(\mathcal{B})\Theta(\mathcal{B}^s)\varepsilon_t, \quad (4.2)$$

onde  $\mu$  é a média do processo,  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é o processo ruído branco (ver Definição 3.2),  $s \in \mathbb{N} - \{0\}$  é a sazonalidade,  $\mathcal{B}$  é o operador *defasagem ou de retardo*, isto é,  $\mathcal{B}^k X_t = X_{t-k}$  e  $\mathcal{B}^{sk} X_t = X_{t-sk}$ ,  $\nabla^d$  e  $\nabla_s^D$  são os operadores, respectivamente, diferença e diferença sazonal,  $\phi(\cdot)$  e  $\theta(\cdot)$ ,  $\Phi(\cdot)$  e  $\Theta(\cdot)$  são os polinômios de ordem  $p$ ,  $q$ ,  $P$  e  $Q$ , respectivamente, definidos por

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \sum_{i=0}^p (-\phi_i) z^i, & \theta(z) &= \sum_{j=0}^q (-\theta_j) z^j, \\ \Phi(z) &= \sum_{k=0}^P (-\Phi_k) z^k, & \Theta(z) &= \sum_{l=0}^Q (-\Theta_l) z^l, \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde  $\phi_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ ,  $\theta_j$ ,  $1 \leq j \leq q$ ,  $\Phi_k$ ,  $1 \leq k \leq P$ , e  $\Theta_l$ ,  $1 \leq l \leq Q$ , são constantes reais. Então,  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um *processo sazonal auto-regressivo fracionalmente integrado de média móvel de ordem  $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$*  com sazonalidade  $s$ , denotado por  $\text{SARFIMA}(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ , onde  $d$  e  $D$  são, respectivamente, o *grau de diferenciação* e o *grau de diferenciação sazonal*.

**Observação 4.1:**

1) Se na Definição 4.2,  $d$  e  $D$  são inteiros não negativos, o processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é dito ser um *processo sazonal auto-regressivo integrado de média móvel de ordem  $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$  com sazonalidade  $s$* , denotado por  $\text{SARIMA}(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ .

2) Um caso particular do processo  $\text{SARFIMA}(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$  é quando  $p = q = P = Q = d = 0$ . Este processo é chamado de *processo sazonal fracionalmente integrado com sazonalidade  $s$* , denotado por  $\text{SARFIMA}(0, D, 0)_s$ , o qual será o alvo de nosso estudo neste trabalho, e é representado por

$$\nabla_s^D(X_t - \mu) \equiv (1 - \mathcal{B}^s)^D(X_t - \mu) = \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (4.4)$$

3) Quando  $P = Q = 0$ ,  $D = 0$  e  $s = 1$  o processo  $\text{SARFIMA}(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$  recai no processo  $\text{ARFIMA}(p, d, q)$ .

A seguir, apresentamos um teorema com algumas propriedades do processo  $\text{SARFIMA}(0, D, 0)_s$ . Estas propriedades podem ser encontradas em Hassler (1994) e Ooms (1995).



**Teorema 4.1** *Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_s$  dado pela equação (4.4), onde  $s$  é a sazonalidade,  $s$  fixo. Então,*

- (i) *Quando  $D > -0.5$ ,  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo inversível e apresenta-se como um processo auto-regressivo infinito, isto é,*

$$\Pi(\mathcal{B}^s)X_t = \sum_{k \geq 0} \pi_k X_{t-sk} = \varepsilon_t, \quad (4.5)$$

onde

$$\pi_k = \frac{-D(1-D) \cdots (k-D-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k-D)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-D)}. \quad (4.6)$$

Quando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\pi_k \sim \frac{k^{-D-1}}{\Gamma(-D)}$ , onde “ $\sim$ ” indica que a razão entre os dois termos tende a 1 quando  $k \rightarrow \infty$ .

- (ii) *Quando  $D < 0.5$ ,  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo estacionário e apresenta-se como um processo média móvel infinito, isto é,*

$$X_t = \Psi(\mathcal{B}^s)\varepsilon_t = \sum_{k \geq 0} \psi_k \varepsilon_{t-sk}, \quad (4.7)$$

onde

$$\psi_k = \frac{D(1+D) \cdots (k+D-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k+D)}{\Gamma(k+1)\Gamma(D)}. \quad (4.8)$$

Quando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\psi_k \sim \frac{k^{D-1}}{\Gamma(D)}$ .

Nos itens a seguir, assumimos que  $D \in (-0.5, 0.5)$ .

- (iii) *O processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  possui função de densidade espectral dada por*

$$f_X(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left[ 2 \operatorname{sen}\left(\frac{ws}{2}\right) \right]^{-2D}, \quad 0 < w \leq \pi. \quad (4.9)$$

Nas frequências sazonais, para  $\nu = 0, 1, \dots, \lfloor s/2 \rfloor$ ,

$$f_X\left(\frac{2\pi\nu}{s} + w\right) \sim \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} (ws)^{-2D}, \quad \text{quando } w \rightarrow 0.$$

(iv) O processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  possui funções de autocovariância e de autocorrelação de ordem  $k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , dadas, respectivamente, por

$$\gamma_X(sk) = \frac{(-1)^k \Gamma(1 - 2D)}{\Gamma(k - D + 1) \Gamma(1 - k - D)} \sigma_\varepsilon^2,$$

$$\gamma_X(sk + \zeta) = 0, \quad \text{para } \zeta = 1, \dots, s - 1$$

e

$$\rho_X(sk) = \frac{\Gamma(k + D) \Gamma(1 - D)}{\Gamma(1 + k - D) \Gamma(D)},$$

$$\rho_X(sk + \zeta) = 0, \quad \text{para } \zeta = 1, \dots, s - 1.$$

Quando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\rho_X(sk) \sim \frac{\Gamma(1-D)}{\Gamma(D)} k^{2D-1}$ .

(v) O processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  possui função de autocorrelação parcial dada por

$$\phi_X(sk, sk) = \frac{D}{k - D}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

$$\phi_X(t, j) = \phi_X(t-1, j) - \phi_X(t, t) \phi_X(t-1, t-j), \quad j = 1, \dots, t-1 \quad (4.10)$$

e

$$\phi_X(sk + \zeta, sk + \zeta) = 0, \quad \text{para } \zeta = 1, \dots, s - 1.$$

### Demonstração:

(i) Quando  $D > -0.5$ , a expansão em séries de potência de  $(1 - \mathcal{B}^s)^D$  é dada por

$$\begin{aligned} (1 - \mathcal{B}^s)^D &= \sum_{k \geq 0} \binom{D}{k} (-\mathcal{B}^s)^k \\ &= \binom{D}{0} + \binom{D}{1} (-\mathcal{B}^s) + \binom{D}{2} (-\mathcal{B}^s)^2 + \binom{D}{3} (-\mathcal{B}^s)^3 + \dots \\ &= 1 - D\mathcal{B}^s - \frac{D(1-D)}{2!} \mathcal{B}^{2s} - \frac{D(1-D)(2-D)}{3!} \mathcal{B}^{3s} - \dots \\ &= \sum_{k \geq 0} \pi_k \mathcal{B}^{sk}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde

$$\pi_k = \frac{-D(1-D)\cdots(k-D-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k-D)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-D)}.$$

Logo,

$$(1 - \mathcal{B}^s)^D X_t = \left( \sum_{k \geq 0} \pi_k \mathcal{B}^{sk} \right) X_t = \sum_{k \geq 0} \pi_k X_{t-sk}.$$

Portanto, a representação auto-regressiva infinita do processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é dada por

$$\sum_{k \geq 0} \pi_k X_{t-sk} = \varepsilon_t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

onde  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é o processo ruído branco.

Pela fórmula de Stirling, quando  $k$  tende a infinito, temos

$$\begin{aligned} \pi_k &= \frac{\Gamma(k-D)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-D)} \sim \frac{e^{D+1}(k-D-1)^{k-D-\frac{1}{2}}}{\Gamma(-D)k^{k+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{e^{D+1}(k-D-1)^{-D-1}(k-D-1)^{k+\frac{1}{2}}}{\Gamma(-D)k^{k+\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Mas

$$(k-D-1) < (k-\frac{1}{2}) < k \quad \text{e} \quad (k-D-1)^{k+\frac{1}{2}} < k^{k+\frac{1}{2}}. \quad (4.12)$$

Aplicando a equação (4.12), os coeficientes  $\{\pi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  da expressão (4.11) são aproximados por

$$\pi_k \sim \frac{e^{D+1}(k-D-1)^{-D-1}}{\Gamma(-D)} \sim \frac{c_1 k^{-D-1}}{\Gamma(-D)} \sim \frac{k^{-D-1}}{\Gamma(-D)},$$

onde  $c_1 = e^{D+1}$ .

(ii) Quando  $D < 0.5$ , o processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  pode ser escrito na forma

$$X_t = (1 - \mathcal{B}^s)^{-D} \varepsilon_t.$$

Expandindo  $(1 - \mathcal{B}^s)^{-D}$  em série de potências temos

$$\begin{aligned}
(1 - \mathcal{B}^s)^{-D} &= \sum_{k \geq 0} \binom{-D}{k} (-\mathcal{B}^s)^k \\
&= \binom{-D}{0} + \binom{-D}{1} (-\mathcal{B}^s) + \binom{-D}{2} (-\mathcal{B}^s)^2 + \binom{-D}{3} (-\mathcal{B}^s)^3 + \dots \\
&= 1 + D\mathcal{B}^s + \frac{D(1+D)}{2!} \mathcal{B}^{2s} + \frac{D(1+D)(2+D)}{3!} \mathcal{B}^{3s} + \dots \\
&= \sum_{k \geq 0} \psi_k \mathcal{B}^{sk}, \tag{4.13}
\end{aligned}$$

onde

$$\psi_k = \frac{D(1+D) \cdots (k+D-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k+D)}{\Gamma(k+1)\Gamma(D)}.$$

Logo,

$$(1 - \mathcal{B}^s)^{-D} \varepsilon_t = \left( \sum_{k \geq 0} \psi_k \mathcal{B}^{sk} \right) \varepsilon_t = \sum_{k \geq 0} \psi_k \varepsilon_{t-sk}.$$

Portanto, a representação média móvel infinita do processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é dada por

$$X_t = \sum_{k \geq 0} \psi_k \varepsilon_{t-sk}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z},$$

onde  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é o processo ruído branco.

Pela fórmula de Stirling, quando  $k$  tende ao infinito, temos

$$\begin{aligned}
\psi_k &= \frac{\Gamma(k+D)}{\Gamma(k+1)\Gamma(D)} \sim \frac{e^{-D+1}(k+D-1)^{k+D-\frac{1}{2}}}{\Gamma(D)k^{k+\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{e^{-D+1}(k+D-1)^{D-1}(k+D-1)^{k+\frac{1}{2}}}{\Gamma(D)k^{k+\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Mas

$$(k+D-1) < (k - \frac{1}{2}) < k \quad \text{e} \quad (k+D-1)^{k+\frac{1}{2}} < k^{k+\frac{1}{2}}. \tag{4.14}$$

Assim, pela equação (4.14), os coeficientes  $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  da expressão (4.13) podem ser aproximados por

$$\psi_k \sim \frac{e^{-D+1}(k+D-1)^{D-1}}{\Gamma(D)} \sim \frac{c_2 k^{D-1}}{\Gamma(D)} \sim \frac{k^{D-1}}{\Gamma(D)},$$

onde  $c_2 = e^{-D+1}$ .

(iii) Pela definição de função densidade espectral de processos estocásticos estacionários, para um processo SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_s$ , dado pela expressão (4.4), temos que

$$f_X(w) = [|1 - e^{-iws}|^{-D}]^2 f_\varepsilon(w), \quad \text{para } 0 < w \leq \pi,$$

onde  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é o processo ruído branco. Como  $f_\varepsilon(w) = \sigma_\varepsilon^2/2\pi$ , onde  $\sigma_\varepsilon^2$  é a variância do processo ruído branco, temos que

$$\begin{aligned} f_X(w) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} [|1 - e^{-iws}|^2]^{-D} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} [(1 - e^{-iws})(1 - e^{iws})]^{-D} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} [2 - 2 \cos(ws)]^{-D} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left[ 4 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(ws) \right) \right]^{-D} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{ws}{2} \right) \right]^{-2D}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Como  $\operatorname{sen} \left( \frac{ws}{2} \right) \rightarrow \left( \frac{ws}{2} \right)$ , quando  $w \rightarrow 0$ , temos que

$$f_X \left( \frac{2\pi\nu}{s} + w \right) \sim \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} (ws)^{-2D}, \quad \text{quando } w \rightarrow 0,$$

onde  $\nu = 0, 1, \dots, \lfloor s/2 \rfloor$ .

Observamos que a função densidade espectral  $f_X(\cdot)$  é ilimitada nas frequências  $w_j = (2\pi j)/s$  para  $j = 0, 1, \dots, \lfloor s/2 \rfloor$ , de tal forma que o modelo apresenta tendência persistente e  $\lfloor s/2 \rfloor$  componentes sazonais, onde  $\lfloor x \rfloor$  é o maior inteiro menor ou igual a  $x$  (ver Baillie (1996), página 26). Portanto, o processo SARFIMA mostra um comportamento nas frequências sazonais similar ao comportamento de processos ARFIMA na frequência zero.

(iv) Vamos inicialmente calcular a função de autocovariância  $\gamma_X(\cdot)$  do processo SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_s$ , para  $s = 1$ . Pela expressão (2.3) e como  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é um processo real, temos que

$$\gamma_X(k) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(wk) f_X(w) dw, \tag{4.16}$$

onde  $f_X(\cdot)$  é a função densidade espectral do processo, dada pela equação (4.9). Logo,

$$\begin{aligned}
\gamma_X(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(wk) \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left| 2 \operatorname{sen}\left(\frac{w}{2}\right) \right|^{-2D} dw \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} 2^{-2D} \int_0^{2\pi} \cos(wk) \left| \operatorname{sen}\left(\frac{w}{2}\right) \right|^{-2D} dw. \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Substituindo  $\lambda$  por  $\frac{w}{2}$  na equação (4.17), temos que

$$\begin{aligned}
\gamma_X(k) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} 2^{-2D} 2 \int_0^\pi \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\pi} 2^{-2D} \left[ \frac{\pi \cos\left(\frac{2k\pi}{2}\right)}{2^{-2D}(-2D+1) \mathbf{B}\left(\frac{-2D+1+2k+1}{2}, \frac{-2D+1-2k+1}{2}\right)} \right] \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\pi} \frac{(-1)^k \Gamma(-2D+2)}{(-2D+1)\Gamma(k-D+1)\Gamma(1-k-D)} \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\pi} \frac{(-1)^k (-2D+1)\Gamma(-2D+1)}{(-2D+1)\Gamma(k-D+1)\Gamma(1-k-D)} \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\pi} \frac{(-1)^k \Gamma(-2D+1)}{\Gamma(k-D+1)\Gamma(1-k-D)},
\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{B}(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$  é a função Beta e  $\Gamma(-2D+2) = (-2D+1)\Gamma(-2D+1)$ .

Para a segunda igualdade acima referenciamos Gradshteyn e Ryzhik (1965) (fórmula 3.631.8, página 372; válida para  $-2D+1 > 0$ , isto é,  $D < 0.5$ ).

Provaremos, agora, a expressão de  $\gamma_X(\cdot)$  para  $s \neq 1$ . Pela expressão (4.16), temos que

$$\begin{aligned}
\gamma_X(sk) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(wsk) \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left| 2 \operatorname{sen}\left(\frac{ws}{2}\right) \right|^{-2D} dw \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} 2^{-2D} \int_0^{2\pi} \cos(wsk) \left| \operatorname{sen}\left(\frac{ws}{2}\right) \right|^{-2D} dw. \quad (4.18)
\end{aligned}$$

Substituindo  $\lambda$  por  $\frac{ws}{2}$  na equação (4.18), temos que

$$\gamma_X(sk) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{s\pi} 2^{-2D} \int_0^{\pi s} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda.$$

Conforme a Observação 4.2 abaixo, temos que

$$\begin{aligned}
\gamma_X(sk) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{s\pi} 2^{-2D} \int_0^{\pi s} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{s\pi} 2^{-2D} s \int_0^\pi \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\pi} 2^{-2D} \frac{\pi(-1)^k \Gamma(-2D+1)}{2^{-2D} \Gamma(k-D+1) \Gamma(1-k-D)} \\
&= \frac{(-1)^k \Gamma(-2D+1)}{\Gamma(k-D+1) \Gamma(1-k-D)} \sigma_\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

É fácil ver que

$$\gamma_X(sk + \zeta) = 0, \quad \text{para } \zeta = 1, \dots, s-1.$$

Nosso próximo passo é calcular a função de autocorrelação  $\rho_X(\cdot)$  do processo. Temos que

$$\begin{aligned}
\rho_X(sk) &= \frac{\gamma_X(sk)}{\gamma_X(0)} \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2 (-1)^k \Gamma(-2D+1)}{\Gamma(k-D+1) \Gamma(1-k-D)} \frac{\Gamma(-D+1) \Gamma(-D+1)}{\sigma_\varepsilon^2 \Gamma(-2D+1)} \\
&= \frac{(-1)^k \Gamma(1-D) \Gamma(1-D)}{\Gamma(k-D+1) \Gamma(1-k-D)} \\
&= \frac{\Gamma(k+D) \Gamma(1-D)}{\Gamma(k-D+1) \Gamma(D)}.
\end{aligned}$$

Como  $\gamma_X(sk + \zeta) = 0$ , para  $\zeta = 1, \dots, s-1$ , então

$$\rho_X(sk + \zeta) = 0, \quad \text{para } \zeta = 1, \dots, s-1.$$

Isto prova o item (iv) do teorema.

(v) A prova deste item utiliza o Apêndice A. Como os cálculos são extensos e são análogos àqueles do Apêndice A, não faremos a demonstração deste item.  $\square$

**Observação 4.2:** Queremos mostrar que

$$\int_0^{\pi s} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda = s \int_0^\pi \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda, \quad (4.19)$$

para todo  $s \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ .

Inicialmente, vamos mostrar para  $s = 2, 3$  e depois faremos a prova por indução para  $s \in \mathbb{N}$ .

a) Substituindo  $s = 2$  na integral do lado esquerdo da expressão (4.19), temos que

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \cos(2k\lambda) |\text{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda = \\ & = \int_0^{\pi} \cos(2k\lambda) |\text{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda + \int_{\pi}^{2\pi} \cos(2k\lambda) |\text{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Substituindo  $\lambda$  por  $w + 2\pi$ , na segunda integral da igualdade (4.20), temos que

$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos(2k\lambda) |\text{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda = \int_{-\pi}^0 \cos(2k(w + 2\pi)) |\text{sen}(w + 2\pi)|^{-2D} dw.$$

Como  $f(w) = \cos(2k(w + 2\pi)) |\text{sen}(w + 2\pi)|^{-2D}$  é uma função par e periódica com período  $2\pi$ , temos que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 \cos(2k(w + 2\pi)) |\text{sen}(w + 2\pi)|^{-2D} dw &= \int_{-\pi}^0 \cos(2kw) |\text{sen}(w)|^{-2D} dw \\ &= \int_0^{\pi} \cos(2kw) |\text{sen}(w)|^{-2D} dw. \end{aligned}$$

Portanto, a igualdade (4.20) pode ser escrita por

$$\int_0^{2\pi} \cos(2k\lambda) |\text{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda = 2 \int_0^{\pi} \cos(2k\lambda) |\text{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda.$$

b) Substituindo  $s = 3$  na integral do lado esquerdo da expressão (4.19), temos que

$$\begin{aligned} & \int_0^{3\pi} \cos(2k\lambda) |\text{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda = \int_0^{\pi} \cos(2k\lambda) |\text{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda + \\ & + \int_{\pi}^{2\pi} \cos(2k\lambda) |\text{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda + \int_{2\pi}^{3\pi} \cos(2k\lambda) |\text{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Substituindo  $\lambda$  por  $w + 2\pi$ , na segunda integral do lado direito da expressão (4.21), temos que



$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda = \int_{-\pi}^0 \cos(2k(w+2\pi)) |\operatorname{sen}(w+2\pi)|^{-2D} dw.$$

Como  $f(w) = \cos(2k(w+2\pi)) |\operatorname{sen}(w+2\pi)|^{-2D}$  é uma função par e periódica com período  $2\pi$ , temos que

$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda = \int_0^{\pi} \cos(2kw) |\operatorname{sen}(w)|^{-2D} dw.$$

Analogamente, substituindo  $\lambda$  por  $w+2\pi$ , na terceira integral do lado direito da expressão (4.21), temos que

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda = \int_0^{\pi} \cos(2k(w+2\pi)) |\operatorname{sen}(w+2\pi)|^{-2D} dw.$$

Novamente,  $f(w) = \cos(2k(w+2\pi)) |\operatorname{sen}(w+2\pi)|^{-2D}$  é uma função periódica com período  $2\pi$ . Portanto,

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda = \int_0^{\pi} \cos(2kw) |\operatorname{sen}(w)|^{-2D} dw.$$

Desta forma, a expressão (4.21) pode ser escrita por

$$\int_0^{3\pi} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda = 3 \int_0^{\pi} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda.$$

c) Considere  $s$  par. Então, a integral do lado esquerdo da expressão (4.19) pode ser escrita por

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi s} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda &= \int_0^{2\pi} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda + \\ &+ \int_{2\pi}^{4\pi} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda + \cdots + \int_{\frac{s}{2}\pi}^{\pi s} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda. \end{aligned}$$

Suponha que a expressão (4.19) vale para  $s$ . Queremos provar que ela vale para  $s+2$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi(s+2)} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda &= \int_0^{\pi s+2\pi} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda = \\ &= \int_0^{\pi s} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda + \int_{\pi s}^{\pi s+2\pi} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda = \end{aligned}$$

$$= s \int_0^\pi \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda + \int_{\pi s}^{\pi s+2\pi} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda. \quad (4.22)$$

Substituindo  $\lambda$  por  $w + \pi s$  na segunda integral do lado direito da equação (4.22), temos

$$\begin{aligned} \int_{\pi s}^{\pi s+2\pi} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda &= \int_0^{2\pi} \cos(2k(w + \pi s)) |\operatorname{sen}(w + \pi s)|^{-2D} dw = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(2kw) |\operatorname{sen}(w)|^{-2D} dw = 2 \int_0^\pi \cos(2kw) |\operatorname{sen}(w)|^{-2D} dw, \end{aligned}$$

pois a função  $f(w) = \cos(2k(w + \pi s)) |\operatorname{sen}(w + \pi s)|^{-2D}$  é par e periódica de período  $2\pi$ . Portanto, a expressão (4.22) pode ser escrita por

$$\int_0^{\pi(s+2)} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda = (s+2) \int_0^\pi \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda.$$

d) Considere  $s$  ímpar. Então, a integral do lado esquerdo da expressão (4.19) pode ser escrita por

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi s} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda &= \int_0^\pi \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda + \\ &+ \int_\pi^{2\pi} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda + \cdots + \int_{\pi(s-1)}^{\pi s} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda. \end{aligned}$$

Suponha que a expressão (4.19) vale para  $s$ . Queremos provar que ela vale para  $s+1$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi(s+1)} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda &= \int_0^{\pi s+\pi} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda = \\ &= \int_0^{\pi s} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda + \int_{\pi s}^{\pi s+\pi} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda = \\ &= s \int_0^\pi \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda + \int_{\pi s}^{\pi s+\pi} \cos(2k\lambda) |\operatorname{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda. \quad (4.23) \end{aligned}$$

Substituindo  $\lambda$  por  $w + \pi s$  na segunda integral do lado direito da equação (4.23), temos

$$\begin{aligned} \int_{\pi s}^{\pi s + \pi} \cos(2k\lambda) |\text{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda &= \int_0^{\pi} \cos(2k(w + \pi s)) |\text{sen}(w + \pi s)|^{-2D} dw \\ &= \int_0^{\pi} \cos(2kw) |\text{sen}(w)|^{-2D} dw, \end{aligned}$$

pois a função  $f(w) = \cos(2k(w + \pi s))$  é periódica de período  $2\pi$  e  $|\text{sen}(w)|$  é periódica de período  $\pi$ .

Portanto, a expressão (4.23) pode ser escrita por

$$\int_0^{\pi(s+1)} \cos(2k\lambda) |\text{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda = (s+1) \int_0^{\pi} \cos(2k\lambda) |\text{sen}(\lambda)|^{-2D} d\lambda.$$

Concluimos que a expressão (4.19) vale para todo  $s \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ .

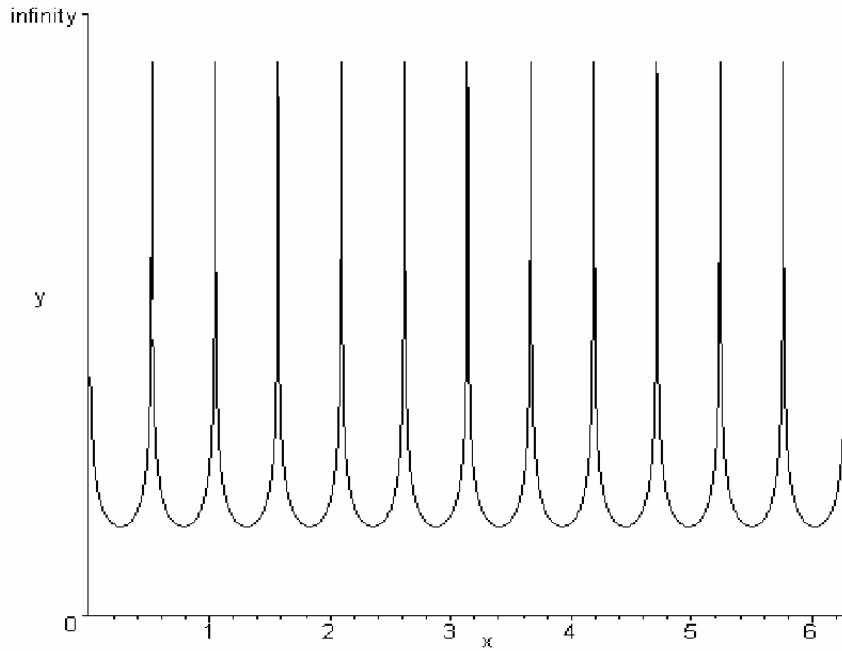
**Observação 4.3:**

- 1) A função densidade espectral do processo SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>s</sub> estacionário, é ilimitada se  $0 < D < 0.5$  e tem zeros se o parâmetro de diferenciação sazonal,  $D$ , é negativo.
- 2) Entre as frequências sazonais, os processos SARFIMA possuem um comportamento similar aos processos ARFIMA.
- 3) O processo SARFIMA( $p, d, q$ )  $\times$  ( $P, D, Q$ )<sub>s</sub> é estacionário quando  $d$  e  $D$  são menores que 0.5 e as raízes de  $\phi(z)$  e  $\Phi(z)$  estão fora do círculo unitário. Quando  $D > 0$ , o processo tem longa dependência sazonal.
- 4) Se  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  for um processo estocástico SARFIMA( $p, d, q$ )  $\times$  ( $P, D, Q$ )<sub>s</sub>, (ver Definição 4.2), com  $d, D \in (-0.5, 0.5)$ , o processo é estacionário e a sua função densidade espectral é dada por

$$f_X(w) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\theta(e^{-iw})|^2 |\Theta(e^{-iws})|^2}{2\pi |\phi(e^{-iw})|^2 |\Phi(e^{-iws})|^2} \left[ 2 \text{sen}\left(\frac{ws}{2}\right) \right]^{-2D} \left[ 2 \text{sen}\left(\frac{w}{2}\right) \right]^{-2d},$$

para todo  $0 < w \leq \pi$ , onde  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é o processo ruído branco (ver Definição 3.2).

A Figura 4.2 representa a função densidade espectral do processo SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>s</sub>, quando  $D = 0.2$  e  $s = 12$ .



**Figura 4.2:** Função Densidade Espectral do SARFIMA(0, 0.2, 0)<sub>12</sub>.

A seguir, observamos que os processos estocásticos  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , dados pela expressão (4.4), com sazonalidade  $s$  e  $D < 0.5$ , são processos ergódicos. De fato, utilizando o Lema 3.1 de Olbermann (2002) pode-se mostrar, de maneira análoga a Proposição 3.1 também de Olbermann (2002), que o processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é ergódico. Isto decorre do Teorema 4.1, item (ii), pois o processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  envolve uma relação a partir do processo independente  $\{\varepsilon_{sk}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  que é ergódico (ver também Observação após Teorema 1.3, Capítulo 6 de Durrett (1996) e mais o fato de que  $\sum_{k \geq 0} \psi_k^2 < \infty$ , para  $D < 0.5$ ). Sendo assim, os procedimentos realizados nas simulações de Monte Carlo determinam valores aproximados para integrais de funções. Esta propriedade será utilizada no Capítulo 5, onde apresentamos o método de geração de processos SARFIMA(0,  $D$ , 0) <sub>$s$</sub> .

Observamos que, para os processos ARFIMA(0,  $d$ , 0), a esperança e a variância condicionais dependem de todos os valores passados (ver Olbermann (2002)). O teorema, a seguir, prova que para os processos  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , dados por (4.4), com sazonalidade  $s$  e  $D \in (-0.5, 0.5)$ , a esperança e a variância condicionais dependem apenas dos valores passados distantes por múltiplos da sazonalidade  $s$ . Este teorema é importante no método de geração dos processos  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , como veremos na Seção 5.1.

**Teorema 4.2** *Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo estocástico definido pela expressão (4.4), com sazonalidade  $s$ , média zero e  $D \in (-0.5, 0.5)$ . A esperança e a variância condicionais de  $X_t$ , dado  $X_\ell$ ,  $\ell < t$ , denotadas respectivamente por  $m_t \equiv \mathbb{E}(X_t|X_\ell, \ell < t)$  e  $v_t \equiv \text{Var}(X_t|X_\ell, \ell < t)$ , são dadas por*

$$\begin{cases} m_\zeta = 0, & \text{para } \zeta = 1, \dots, s-1, \\ m_{sk} = \sum_{j=1}^k \phi_X(sk, sj) X_{sk-sj}, & \text{para } k \in \mathbb{N}, \\ m_{sk+\zeta} = \sum_{j=1}^k \phi_X(sk + \zeta, sj) X_{sk+\zeta-sj}, \end{cases} \quad (4.24)$$

e

$$\begin{cases} v_\zeta = \sigma_\varepsilon^2, & \text{para } \zeta = 1, \dots, s-1, \\ v_{sk} = \sigma_\varepsilon^2 \prod_{j=1}^k (1 - \phi_X^2(sj, sj)), & \text{para } k \in \mathbb{N}, \\ v_{sk+\zeta} = v_{sk}, \end{cases} \quad (4.25)$$

onde  $t = \zeta$  determina a média e a variância em defasagens menores que  $s$ ,  $t = sk$  para defasagens múltiplas de  $s$  e  $t = sk + \zeta$  para defasagens não múltiplas de  $s$ ,  $\phi_X(\cdot, \cdot)$  é a função de autocorrelação parcial do processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  dada no Teorema 4.1, item (v) e  $\sigma_\varepsilon^2$  é a variância do processo ruído branco.

**Demonstração:** Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_s$  com sazonalidade  $s$ , dado pela expressão (4.4). Primeiramente, queremos obter a esperança condicional do processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ . Conforme Hosking (1984), para qualquer processo estocástico estacionário com média zero, da forma (4.4), temos que a esperança condicional de  $X_t$  dadas as observações passadas, pode ser escrita por

$$m_t \equiv \mathbb{E}(X_t|X_\ell, \ell < t) = \sum_{j=1}^t \phi_X(t, j) X_{t-j}, \quad (4.26)$$

onde  $\phi_X(\cdot, \cdot)$  é a função de autocorrelação parcial dos processos SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_s$  dadas no item (v) do Teorema 4.1.

Queremos mostrar que  $m_t$  é dada pela expressão (4.24). Seja  $s \in \mathbb{N} - \{0\}$ . Seja  $\zeta \in \{1, \dots, s-1\}$ . Assim, para  $t = \zeta$  na expressão (4.26) temos que

$$\begin{aligned} m_\zeta &= \sum_{j=1}^{\zeta} \phi_X(\zeta, j) X_{\zeta-j} \\ &= \phi_X(\zeta, 1) X_{\zeta-1} + \phi_X(\zeta, 2) X_{\zeta-2} + \dots + \phi_X(\zeta, \zeta) X_0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois  $\phi_X(\zeta, j) = 0$  para  $j \in \{1, \dots, \zeta\}$ .

Para  $t = sk$  na expressão (4.26) temos que

$$\begin{aligned} m_{sk} &= \sum_{j=1}^{sk} \phi_X(sk, j) X_{sk-j} \\ &= \phi_X(sk, 1) X_{sk-1} + \dots + \phi_X(sk, s) X_{sk-s} + \phi_X(sk, s+1) X_{sk-s-1} + \dots \\ &\quad + \phi_X(sk, 2s) X_{sk-2s} + \dots + \phi_X(sk, sk) X_0. \end{aligned}$$

Pela expressão (4.10), temos que

$$\phi_X(sk, j) = \phi_X(sk-1, j) - \phi_X(sk, sk) \phi_X(sk-1, sk-j)$$

Se  $j = sl + \zeta$ , onde  $\ell \in \mathbb{N}$  e  $\zeta \in \{1, \dots, s-1\}$ , temos que

$$\phi_X(sk, sl + \zeta) = \phi_X(sk-1, sl + \zeta) - \phi_X(sk, sk) \phi_X(sk-1, s(k-\ell) - \zeta) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} m_{sk} &= \phi_X(sk, s) X_{sk-s} + \phi_X(sk, 2s) X_{sk-2s} + \dots + \phi_X(sk, sk) X_0 \\ &= \sum_{j=1}^k \phi_X(sk, sj) X_{sk-sj}. \end{aligned}$$

Para  $t = sk + \zeta$  na expressão (4.26) onde  $\zeta \in \{1, \dots, s-1\}$ , temos que

$$\begin{aligned} m_{sk+\zeta} &= \sum_{j=1}^{sk+\zeta} \phi_X(sk + \zeta, j) X_{sk+\zeta-j} \\ &= \phi_X(sk + \zeta, 1) X_{sk+\zeta-1} + \dots + \phi_X(sk + \zeta, s) X_{sk+\zeta-s} + \dots \\ &\quad + \phi_X(sk + \zeta, sk) X_\zeta + \dots + \phi_X(sk + \zeta, sk + \zeta) X_0. \end{aligned}$$

Pela expressão (4.10), temos que

$$\phi_X(sk + \zeta, j) = \phi_X(sk + \zeta - 1, j) - \phi_X(sk + \zeta, sk + \zeta)\phi_X(sk + \zeta - 1, sk + \zeta - j)$$

Se  $j = s\ell + \zeta$ , onde  $\ell \in \mathbb{N}$  e  $\zeta \in \{1, \dots, s-1\}$ , temos que

$$\phi_X(sk + \zeta, j) = \phi_X(sk + \zeta, s\ell + \zeta) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} m_{sk+\zeta} &= \phi_X(sk + \zeta, s)X_{sk+\zeta-s} + \dots + \phi_X(sk + \zeta, sk)X_\zeta \\ &= \sum_{j=1}^k \phi_X(sk + \zeta, sj)X_{sk+\zeta-sj}. \end{aligned}$$

Isto prova as igualdades da expressão (4.24).

A seguir, provaremos as igualdades da expressão (4.25).

Para qualquer processo estocástico estacionário com média zero, a variância condicional dadas as observações passadas é dada por (ver Hosking (1984))

$$v_t \equiv \text{Var}(X_t | X_\ell, \ell < t) = \sigma_\varepsilon^2 \prod_{j=1}^t (1 - \phi_X^2(j, j)). \quad (4.27)$$

Pelo item (v) do Teorema 4.1, a função de autocorrelação parcial dos processos SARFIMA(0, D, 0)<sub>s</sub> é dada por

$$\phi_X(sk, sk) = \frac{D}{k - D} \quad \text{e} \quad \phi_X(sk + \zeta, sk + \zeta) = 0,$$

onde  $k \in \mathbb{N}$  e  $\zeta \in \{1, \dots, s-1\}$ . Assim, para  $t = \zeta$  na expressão (4.27) temos que

$$\begin{aligned} v_\zeta &= \sigma_\varepsilon^2 \prod_{j=1}^{\zeta} (1 - \phi_X^2(j, j)) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 (1 - \phi_X^2(1, 1)) \times \dots \times (1 - \phi_X^2(\zeta, \zeta)) \\ &= \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Para  $t = sk$  na expressão (4.27), temos que

$$\begin{aligned}
v_{sk} &= \sigma_\varepsilon^2 \prod_{j=1}^{sk} (1 - \phi_X^2(j, j)) \\
&= \sigma_\varepsilon^2 (1 - \phi_X^2(1, 1)) \times \cdots \times (1 - \phi_X^2(s, s))(1 - \phi_X^2(s+1, s+1)) \times \cdots \\
&\quad \times (1 - \phi_X^2(sk, sk)) \\
&= \sigma_\varepsilon^2 (1 - \phi_X^2(s, s))(1 - \phi_X^2(2s, 2s)) \times \cdots \times (1 - \phi_X^2(sk, sk)) \\
&= \sigma_\varepsilon^2 \prod_{j=1}^k (1 - \phi_X^2(sj, sj)).
\end{aligned}$$

Para  $t = sk + \zeta$  na expressão (4.27), onde  $\zeta \in \{1, \dots, s-1\}$ , temos que

$$\begin{aligned}
v_{sk+\zeta} &= \sigma_\varepsilon^2 \prod_{j=1}^{sk+\zeta} (1 - \phi_X^2(j, j)) \\
&= \sigma_\varepsilon^2 (1 - \phi_X^2(1, 1)) \times \cdots \times (1 - \phi_X^2(s, s))(1 - \phi_X^2(s+1, s+1)) \times \cdots \\
&\quad \times (1 - \phi_X^2(sk, sk))(1 - \phi_X^2(sk+1, sk+1)) \times \cdots \times (1 - \phi_X^2(sk+\zeta, sk+\zeta)) \\
&= \sigma_\varepsilon^2 (1 - \phi_X^2(s, s))(1 - \phi_X^2(2s, 2s)) \times \cdots \times (1 - \phi_X^2(sk, sk)) \\
&= \sigma_\varepsilon^2 \prod_{j=1}^k (1 - \phi_X^2(sj, sj)) \\
&= v_{sk},
\end{aligned}$$

pois  $\phi_X(sk + \zeta, sk + \zeta) = 0$  sempre que  $k \in \mathbb{N}$  e  $\zeta \in \{1, \dots, s-1\}$ .

Portanto, vale o sistema (4.25). □

Na seção a seguir, apresentamos alguns métodos de estimação do *parâmetro ou grau de diferenciação sazonal*  $D$ .

## 4.2 MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO

Na literatura sobre processos estocásticos SARFIMA, existem alguns estimadores propostos para o parâmetro  $D$  de diferenciação sazonal. Nesta seção, apresentamos três métodos para estimar esse parâmetro.

1) Método de regressão utilizando a função periodograma proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983). O estimador será denotado por  $GPH$ ;



2) Método de regressão utilizando a função periodograma suavizado proposto por Reisen (1994). O estimador será denotado por *SPR*;

3) Método da função de máxima verossimilhança aproximada proposto por Fox e Taqqu (1986). O estimador será denotado por *FT*.

#### 4.2.1 ESTIMADOR *GPH*

Nesta seção, apresentamos o estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), o qual se baseia no método de regressão utilizando a função periodograma (ver Definição 2.17). A seguir descrevemos tal método de estimação.

Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_s$ , com  $D \in (-0.5, 0.5)$  definido na expressão (4.4). A função densidade espectral deste processo é dada por

$$f_X(w) = f_\varepsilon(w) \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{ws}{2} \right) \right]^{-2D}, \quad 0 < w \leq \pi, \quad (4.28)$$

onde  $f_\varepsilon(\cdot)$  é a função densidade espectral de um processo ruído branco (ver Definição 3.2).

Aplicando a função logarítmica a ambos os lados da equação (4.28) temos

$$\begin{aligned} \ln f_X(w) &= \ln \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{ws}{2} \right) \right]^{-2D} + \ln f_\varepsilon(w) \\ &= \ln f_\varepsilon(w) - D \ln \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{ws}{2} \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Adicionando  $\ln f_\varepsilon(0)$  e  $\ln I(w)$ , a ambos os lados da equação (4.29), onde  $I(\cdot)$  é a função periodograma (ver Definição 2.17) e fazendo uso das propriedades da função logarítmica, obtemos

$$\ln I(w) = \ln f_\varepsilon(0) - D \ln \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{ws}{2} \right) \right]^2 + \ln \left[ \frac{f_\varepsilon(w)}{f_\varepsilon(0)} \right] + \ln \left[ \frac{I(w)}{f_X(w)} \right]. \quad (4.30)$$

Substituindo  $w$  pelas frequências de Fourier  $w_j = \frac{2\pi j}{n}$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, \frac{n}{2} | j \neq \frac{in}{s}\}$ , na equação (4.30), obtemos

$$\ln I(w_j) = \ln f_\varepsilon(0) - D \ln \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{w_j s}{2} \right) \right]^2 + \ln \left[ \frac{f_\varepsilon(w_j)}{f_\varepsilon(0)} \right] + \ln \left[ \frac{I(w_j)}{f_X(w_j)} \right]. \quad (4.31)$$

Considerando o limite máximo de  $j$  igual a  $g(n)$ , o qual é escolhido de tal forma que  $g(n)/n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  e  $w_j \leq w_{g(n)}$ , onde  $w_{g(n)}$  é pequeno, o termo  $\ln \left[ \frac{f_\varepsilon(w_j)}{f_\varepsilon(0)} \right]$  é desprezível se comparado com os outros termos da equação

(4.31) (ver Reisen (1994)). Assim, obtemos uma forma aproximada para a equação (4.31), dada por

$$\ln I(w_j) \simeq \ln f_\varepsilon(0) - D \ln \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{w_j s}{2} \right) \right]^2 + \ln \left[ \frac{I(w_j)}{f_X(w_j)} \right]. \quad (4.32)$$

Podemos observar que a equação (4.32) é uma forma aproximada da equação de regressão linear simples dada por

$$y_j \simeq a + bx_j + \epsilon_j, \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, g(n),$$

onde

$$y_j = \ln I(w_j), \quad x_j = \ln \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{w_j s}{2} \right) \right]^2, \quad \epsilon_j = \ln \left[ \frac{I(w_j)}{f_X(w_j)} \right] + c,$$

$$b = -D, \quad a = \ln f_\varepsilon(0) - c, \quad c = \mathbb{E} \left( \ln \left[ \frac{I(w_j)}{f_X(w_j)} \right] \right).$$

Utilizando a regressão de mínimos quadrados (ver Apêndice B), podemos encontrar o estimador para o parâmetro  $D$  pelo método proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), denotado por  $GPH$ , através da função periodograma.

Assim,

$$GPH = - \frac{\sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x}) y_j}{\sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})^2}, \quad (4.33)$$

com

$$\mathbb{E}(GPH) \cong D, \quad \operatorname{Var}(GPH) \cong \frac{\pi^2}{6 \sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})^2}, \quad (4.34)$$

onde  $\bar{x}$  é a média dos  $x_j$  para  $j = 1, 2, \dots, g(n)$ .

**Observação 4.4:** Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_s$ , dado na expressão (4.4), com  $D \in (-0.5, 0)$ . Seja  $GPH$ , dado pela expressão (4.33), o estimador de  $D$ , onde  $I(\cdot)$  é a função periodograma de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  dada pela expressão (2.7), nas frequências de Fourier  $w_j = \frac{2\pi j}{n}$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, \frac{n}{2} | j \neq \frac{n}{2}\}$ . Suponha que  $g(n) = n^\alpha$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  satisfaça  $g(n) \rightarrow \infty$  e  $\frac{g(n)}{n} \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Então,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(GPH) = D$ . Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\ln(n)]^2}{n} = 0$  então,

$$\frac{GPH - D}{\sqrt{Var(GPH)}} \xrightarrow{\mathfrak{D}} Z,$$

onde  $Z \sim N(0, 1)$  e  $Var(GPH)$  é dada pela expressão (4.34). Este resultado foi estendido para  $D \in (-0.5, 0.5)$  por Robinson (1995).

#### 4.2.2 ESTIMADOR *SPR*

Nesta seção apresentamos o estimador proposto por Reisen (1994). Este estimador se baseia no uso da função periodograma suavizado, onde  $\lambda(\cdot)$  é a janela de Parzen (ver Definição 2.18), em vez da função periodograma no estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983). Essa mudança se deve ao fato de que a função periodograma é um estimador não viciado, mas inconsistente para a função densidade espectral de um processo, enquanto que a função periodograma suavizado é um estimador não viciado e consistente para ela.

Assim, substituindo-se a função periodograma pela função periodograma suavizado na equação (4.32), obtemos

$$\ln f_{smoo}(w_j) \simeq \ln f_\varepsilon(0) - D \ln \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{w_j s}{2} \right) \right]^2 + \ln \left[ \frac{f_{smoo}(w_j)}{f_X(w_j)} \right]. \quad (4.35)$$

Da mesma forma que a equação (4.32), a equação acima é um forma aproximada da equação de regressão linear simples, isto é,

$$y_j \simeq a + bx_j + \epsilon_j, \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, g(n),$$

onde

$$y_j = \ln f_{smoo}(w_j), \quad x_j = \ln \left[ 2 \operatorname{sen} \left( \frac{w_j s}{2} \right) \right]^2, \quad \epsilon_j = \ln \left[ \frac{f_{smoo}(w_j)}{f_X(w_j)} \right] + c,$$

$$b = -D, \quad a = \ln f_\varepsilon(0) - c, \quad c = \mathbb{E} \left( \ln \left[ \frac{f_{smoo}(w_j)}{f_X(w_j)} \right] \right).$$

Portanto, o estimador de  $D$ , denotado por *SPR*, através do método de regressão de mínimos quadrados (ver Apêndice B), utilizando a função periodograma suavizado é dado por

$$SPR = - \frac{\sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x}) y_j}{\sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})^2},$$

com

$$\mathbb{E}(SPR) \cong D, \quad Var(SPR) \cong 0.53928 \frac{m}{n \sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})^2},$$

onde  $\bar{x}$  é a média dos  $x_j$  para  $j = 1, 2, \dots, g(n)$  e  $0.53928 \frac{m}{n}$  é a variância assintótica de  $\ln \left[ \frac{f_{smoo}(w_j)}{f_X(w_j)} \right]$ .

O estimador  $SPR$  é assintoticamente normal com  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(SPR) = D$  e a variância assintótica é dada pela expressão acima.

Maiores detalhes podem ser encontrados em Reisen (1994).

### 4.2.3 ESTIMADOR $FT$

Nesta seção apresentamos o estimador de máxima verossimilhança. Para modelos ARFIMA( $p, d, q$ ), Fox e Taquq (1986), utilizando a aproximação sugerida por Whittle (1951), apresentam condições que permitem que este estimador, para seqüências com forte dependência, seja consistente e tenha distribuição normal assintótica. Sowell (1992) apresenta resultados para o estimador de máxima verossimilhança exata. Ooms (1995) apresenta alguns resultados para modelos com longa dependência sazonais fazendo uma comparação entre os estimadores de máxima verossimilhança exata proposto por Sowell (1992), com a de máxima verossimilhança aproximada proposto por Fox e Taquq (1986) e ainda com o estimador baseado na regressão da função periodograma proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983).

A seguir, descrevemos o procedimento para encontrar o estimador de máxima verossimilhança aproximada.

Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo Gaussiano com média  $\mu > 0$  e função densidade espectral dada por

$$f_X(w, \eta, \sigma^2) = \sigma^2 f(w, \eta), \quad w \in [-\pi, \pi],$$

onde  $\sigma^2 > 0$  (não precisa ser a variância do processo  $X_t$ ) e  $f(\cdot, \eta)$  é uma função da forma

$$f(w, \eta) \simeq |w|^{-\alpha(\eta)} G_\eta(w), \quad \text{quando } w \rightarrow 0,$$

com  $0 < \alpha(\eta) < 1$  e  $G_\eta(w)$  uma função que varia suavemente quando  $w \rightarrow 0$  e  $\eta$  é o vetor de parâmetros desconhecidos os quais desejamos estimar.

A estimação dos parâmetros do vetor  $\eta$  e  $\sigma^2$  é obtida através da série temporal  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , cuja função de distribuição conjunta, ou a de verossimilhança, é dada por

$$h(x, \eta, \sigma^2) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |Q_n(\eta)|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{z' Q_n^{-1}(\eta) z}{2} \right\}, \quad (4.36)$$

onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$  e  $Q_n(\eta)$  é a matriz de Toeplitz contendo os valores da função de autocovariância do processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  cujos elementos são dados por  $\{Q_n(\eta)\}_{i,j} = \gamma_X(|i-j|)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .

Aplicando a função logarítmica na equação (4.36) obtemos a seguinte expressão

$$\mathcal{L}(x, \eta, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |Q_n(\eta)| - \frac{1}{2} z' Q_n^{-1}(\eta) z. \quad (4.37)$$

O estimador de máxima verossimilhança de  $\eta$  e de  $\sigma^2$  é obtido maximizando-se a função  $\mathcal{L}(x, \eta, \sigma^2)$  com respeito ao vetor de parâmetros  $\eta$  e  $\sigma^2$ .

Computacionalmente, é complicado obter a inversa da matriz de autocovariâncias  $Q_n(\eta)$ . Whittle (1951) estabelece a forma aproximada para  $Q_n^{-1}(\eta)$ . Fox e Taqqu (1986), fazendo uso desta aproximação, aplicam o método da máxima verossimilhança aproximada para estimar  $\eta$  e  $\sigma^2$  maximizando a função

$$h(x, \eta, \sigma^2) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \right)^n \exp \left\{ -\frac{Z' A_n(\eta) Z}{2 n \sigma^2} \right\}, \quad (4.38)$$

onde  $Z = (X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})$  com  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$  e  $A_n(\eta)$  é uma

matriz de ordem  $n \times n$ , proposta por Whittle, para aproximar  $Q_n^{-1}(\eta)$ , onde o  $(i, j)$ -ésimo elemento é dado por

$$\{A_n(\eta)\}_{i,j} = a_{i-j}(\eta) = a_\ell(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i w \ell} [f_X(w, \eta)]^{-1} dw.$$

Os estimadores de máxima verossimilhança aproximada de  $\eta$  e  $\sigma^2$  que maximizam a equação (4.38), são denotados por  $\hat{\eta}_n$  e  $\hat{\sigma}_n^2$ .

Maximizar a função  $h(x, \eta, \sigma^2)$  é equivalente a encontrar  $\hat{\eta}_n$  que minimize

$$\hat{\sigma}_n^2(\eta) = \frac{Z' A_n(\eta) Z}{n}.$$

Computacionalmente, o estimador de máxima verossimilhança é obtido minimizando a função, na forma discreta,

$$\mathcal{L}_n(\eta) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^T \left( \ln f_X(w_j, \eta) + \frac{I(w_j)}{f_X(w_j, \eta)} \right), \quad (4.39)$$

onde  $\eta$  denota o vetor de parâmetros desconhecidos,  $w_j = \frac{2\pi j}{n}$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, T | j \neq \frac{in}{s}\}$ , são as frequências de Fourier e  $T = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ .

**Observação 4.5:** No Apêndice B, encontram-se alguns gráficos da função de verossimilhança aproximada  $\mathcal{L}_n(\cdot)$  do processo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  dado pela expressão

(4.4), para diferentes valores da sazonalidade  $s$  e diferentes tamanhos amostrais  $n$ .

Denotado por  $FT$ , o estimador de máxima verossimilhança aproximada proposto por Fox e Taqqu (1986), sob certas condições de regularidade, é consistente e tem distribuição assintótica normal. Um estudo completo desse estimador pode ser encontrado em Fox e Taqqu (1986) e Beran (1994).

### 4.3 PREVISÃO

Estudos relacionados com previsão de modelos ARFIMA (modelos autorregressivos fracionalmente integrados de média móvel) apareceram recentemente na literatura em Peiris e Singh (1996) apresentando previsões de um passo à frente. Em Reisen e Lopes (1999) são apresentados alguns resultados na previsão de modelos ARFIMA(2,  $d$ , 2) incluindo a variância do erro quadrático médio utilizando o método de regressão da função periodograma suavizado (ver Reisen (1994)) para estimação do parâmetro de diferenciação  $d$ . Neste artigo também é apresentada uma análise de dados reais, comparando os modelos ARIMA e ARFIMA.

Em Peiris e Singh (1996) também são apresentados alguns resultados de previsão de  $h$ -passos à frente, para modelos SARFIMA( $p, d, q$ )  $\times$  ( $P, D, Q$ ) $_s$ , nos casos em que todos os parâmetros são diferentes de zero, quando  $Q = q = 0$ , quando  $Q = q = 0$  e  $P = p = 1$  e por último, quando  $Q = P = q = p = 0$ .

A seguir apresentamos alguns resultados de previsão para modelos SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_s$ .

Suponha que tenhamos uma série temporal  $\{X_t\}_{t=1}^n$  e gostaríamos de prever o valor de  $X_{t+h}$  para  $h$ -passos à frente.

A previsão de erro quadrático médio mínimo é dado por

$$\widehat{X}_t(h) \equiv \mathbb{E}(X_{t+h} | X_\ell, \ell \leq t). \quad (4.40)$$

Este valor minimiza o erro quadrático médio de previsão dado por  $\mathbb{E}(X_{t+h} - \widehat{X}_t(h))$ . Neste caso, o erro de previsão é dado por

$$e_t(h) = X_{t+h} - \widehat{X}_t(h). \quad (4.41)$$

Para calcularmos as previsões usamos os seguintes fatos

$$(a) \mathbb{E}(X_{t+h} | X_\ell, \ell \leq t) = \begin{cases} X_{t+h}, & \text{se } h \leq 0, \\ \widehat{X}_t(h), & \text{se } h > 0, \end{cases}$$

$$(b) \mathbb{E}(\varepsilon_{t+h} | X_\ell, \ell \leq t) = \begin{cases} \varepsilon_{t+h}, & \text{se } h \leq 0, \\ 0, & \text{se } h > 0. \end{cases}$$

Assim, para calcularmos as previsões temos que

- (a) substituir esperanças passadas ( $h \leq 0$ ) por valores conhecidos,  $X_{t+h}$  e  $\varepsilon_{t+h}$ ;
- (b) substituir esperanças futuras ( $h > 0$ ) por previsões  $\widehat{X}_t(h)$  e 0.

O teorema a seguir, apresenta alguns resultados para previsão em processos SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_s$ , dados pela expressão (4.4).

**Teorema 4.3** *Seja  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  um processo SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_s$ , com média zero, dado pela expressão (4.4), onde  $s$  é a sazonalidade. Considere  $D > -0.5$ . Então, para todo  $h \geq 1$ ,*

- (i) a previsão de erro quadrático médio mínimo é dada por

$$\widehat{X}_n(h) = - \sum_{k \geq 1} \pi_k \widehat{X}_n(h - sk), \quad (4.42)$$

onde  $\pi_k$  é dado pela expressão (4.6),

- (ii) o erro de previsão é dado por

$$e_n(h) = \sum_{k=0}^{\lceil \frac{h}{s} \rceil - 1} \psi_k \varepsilon_{n+h-sk},$$

onde  $\psi_k$  é dado pela expressão (4.8) e  $\lceil x \rceil$  é o menor valor inteiro maior ou igual a  $x$ ,

- (iii) as variâncias teórica e amostral do erro de previsão são dadas, respectivamente, por

$$\text{Var}(e_n(h)) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\lceil \frac{h}{s} \rceil - 1} \psi_k^2, \quad \widehat{\text{Var}}(e_n(h)) = \widehat{\sigma}_\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\lceil \frac{h}{s} \rceil - 1} \widehat{\psi}_k^2,$$

onde  $\lceil x \rceil$  é o menor valor inteiro maior ou igual a  $x$ ,

$$\psi_k = \frac{\Gamma(k+D)}{\Gamma(k+1)\Gamma(D)} \quad e \quad \widehat{\psi}_k = \frac{\Gamma(k+\widehat{D})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\widehat{D})} \quad (4.43)$$

com  $\widehat{\psi}_k$  obtido quando  $D$  é substituído pelo seu valor estimado, através de algum dos métodos de estimação propostos na Seção 4.2,

(iv) o vício e o pervício ao estimar a variância teórica do erro de previsão são dados por

$$\text{vício}(h) = \widehat{\text{Var}}(e_n(h)) - \text{Var}(e_n(h)),$$

$$\text{pervício}(h) = \frac{|\widehat{\text{Var}}(e_n(h)) - \text{Var}(e_n(h))|}{\text{Var}(e_n(h))} \times 100 \%,$$

(v) o erro quadrático médio de previsão é dado por

$$\text{eqmp}_n = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^h (e_n(k))^2.$$

(vi) Além disso, se o processo  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  é tal que  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , para cada  $t \in \mathbb{Z}$ , então o intervalo de previsão a  $100\gamma\%$  de confiança para  $X_{n+h}$  é dado por

$$\widehat{X}_n(h) - z_{\frac{\gamma}{2}} \widehat{\sigma}_\varepsilon \left[ \sum_{k=0}^{\lceil \frac{h}{s} \rceil - 1} \widehat{\psi}_k^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq X_{n+h} \leq \widehat{X}_n(h) + z_{\frac{\gamma}{2}} \widehat{\sigma}_\varepsilon \left[ \sum_{k=0}^{\lceil \frac{h}{s} \rceil - 1} \widehat{\psi}_k^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

onde  $z_{\frac{\gamma}{2}}$  é o valor tal que  $\mathbb{P}(Z \geq z_{\frac{\gamma}{2}}) = \frac{\gamma}{2}$  com  $Z \sim N(0, 1)$  e  $\widehat{\psi}_k$  é dado pela expressão (4.43).

### Demonstração:

(i) Como vimos no Teorema 4.1, itens (i) e (ii), o processo SARFIMA(0, D, 0)<sub>s</sub> pode ser escrito na forma auto-regressiva e média móvel infinitas. Reescrevendo as equações (4.5) e (4.7) no tempo  $t + h$  temos

$$\varepsilon_{t+h} = \sum_{k \geq 0} \pi_k X_{t+h-sk}, \quad (4.44)$$

$$X_{t+h} = \sum_{k \geq 0} \psi_k \varepsilon_{t+h-sk}, \quad (4.45)$$

onde  $\pi_k$  e  $\psi_k$  são dados pelas equações (4.6) e (4.8), respectivamente.

Estamos interessados na previsão  $h$ -passos à frente. Desta forma, pelas equações (4.44) e (4.45) temos que

$$\varepsilon_{t+h} = \sum_{k \geq 1} \pi_k X_{t+h-sk} + X_{t+h},$$



$$X_{t+h} = \varepsilon_{t+h} - \sum_{k \geq 1} \psi_k \varepsilon_{t+h-sk},$$

Considere  $t = n$ . Aplicando a equação (4.40) na equação acima, e usando as propriedades da esperança condicional, temos que

$$\widehat{X}_n(h) \equiv \mathbb{E}(X_{n+h} | X_\ell, \ell \leq n) = \mathbb{E}(\varepsilon_{n+h} - \sum_{k \geq 1} \pi_k X_{n+h-sk} | X_\ell, \ell \leq n),$$

ou seja,

$$\widehat{X}_n(h) = \mathbb{E}(\varepsilon_{n+h} | X_\ell, \ell \leq n) - \sum_{k \geq 1} \pi_k \mathbb{E}(X_{n+h-sk} | X_\ell, \ell \leq n).$$

Logo, como a variável aleatória  $\varepsilon_{n+h}$  é independente de  $X_\ell$ , para todo  $\ell \leq n$ , temos que

$$\widehat{X}_n(h) = - \sum_{k \geq 1} \pi_k \widehat{X}_n(h - sk), \quad \text{para } h \geq 1,$$

onde  $\mathbb{E}(\varepsilon_{n+h} | X_\ell, \ell \leq n) = 0$  e  $\widehat{X}_n(j) = X_{n+j}$ , para  $j \leq 0$ .

(ii) Estamos interessados em obter o erro de previsão  $e_n(h)$  e, para isto, utilizamos a representação média móvel infinita do processo SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>s</sub>. Aplicando a equação (4.40) na equação (4.45) obtemos, para todo  $h \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{X}_n(h) &= \mathbb{E}(X_{n+h} | X_\ell, \ell \leq n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k \geq 0} \psi_k \varepsilon_{n+h-sk} | X_\ell, \ell \leq n\right) \\ &= \sum_{k \geq 0} \psi_k \mathbb{E}(\varepsilon_{n+h-sk} | X_\ell, \ell \leq n) = \sum_{k \geq 0} \psi_k \widehat{\varepsilon}_n(h - sk) \\ &= \sum_{k=\lceil \frac{h}{s} \rceil}^{\infty} \psi_k \varepsilon_{n+h-sk}, \end{aligned}$$

onde  $\widehat{\varepsilon}_n(j) = 0$ , para  $j \geq 1$ ,  $\widehat{\varepsilon}_n(j) = \varepsilon_{n+j}$ , para  $j \leq 0$  e  $\lceil x \rceil$  é o menor valor inteiro maior ou igual a  $x$ .

Então, o erro de previsão na origem  $n$  para  $h \geq 1$  passos à frente, é dado por

$$\begin{aligned}
e_n(h) &= X_{n+h} - \widehat{X}_n(h) \\
&= \sum_{k \geq 0} \psi_k \varepsilon_{n+h-sk} - \sum_{k=\lceil \frac{h}{s} \rceil}^{\infty} \psi_k \varepsilon_{n+h-sk} \\
&= \sum_{k=0}^{\lceil \frac{h}{s} \rceil - 1} \psi_k \varepsilon_{n+h-sk}.
\end{aligned}$$

Observamos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e_n(h) | X_\ell, \ell \leq n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\lceil \frac{h}{s} \rceil - 1} \psi_k \varepsilon_{n+h-sk} | X_\ell, \ell \leq n\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\lceil \frac{h}{s} \rceil - 1} \psi_k \mathbb{E}(\varepsilon_{n+h-sk} | X_\ell, \ell \leq n) = 0
\end{aligned}$$

pois  $\varepsilon_{n+h-sk}$  é independente de  $X_1, \dots, X_n$  para todo  $h \geq 1$  e  $k = 0, 1, \dots, \lceil \frac{h}{s} \rceil - 1$ .

(iii) A variância teórica do erro de previsão é dada por

$$\text{Var}(e_n(h)) = \text{Var}\left(\sum_{k=0}^{\lceil \frac{h}{s} \rceil - 1} \psi_k \varepsilon_{n+h-sk}\right) = \sum_{k=0}^{\lceil \frac{h}{s} \rceil - 1} \psi_k^2 \text{Var}(\varepsilon_{n+h-sk}).$$

Portanto,

$$\text{Var}(e_n(h)) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\lceil \frac{h}{s} \rceil - 1} \psi_k^2 = \sigma_\varepsilon^2 \left(1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_{\lceil \frac{h}{s} \rceil - 1}^2\right).$$

Como  $\psi_k \sim \frac{k^{D-1}}{\Gamma(D)}$ , quando  $k \rightarrow \infty$  (ver expressão (4.8)), temos que  $\sum_{k \geq 0} \psi_k^2 < \infty$ . Logo,

$$\text{Var}(e_n(h)) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\lceil \frac{h}{s} \rceil - 1} \psi_k^2 < \infty, \quad \text{para } h \geq 1.$$

No desenvolvimento acima calculamos a variância teórica do erro de previsão, denotada por  $\text{Var}(e_n(h))$ , supondo que os parâmetros do modelo são conhecidos. Na prática, usamos o modelo estimado para fazer as previsões. Neste caso, a variância amostral do erro de previsão, denotada por

$\widehat{Var}(e_n(h))$ , é obtida substituindo-se  $\sigma_\varepsilon^2$  e  $\psi_k$  pelos seus respectivos estimadores  $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$  e  $\widehat{\psi}_k$ . Ou seja,

$$\widehat{Var}(e_n(h)) = \widehat{\sigma}_\varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\lceil \frac{h}{s} \rceil - 1} \widehat{\psi}_k^2, \quad \text{para } h \geq 1,$$

onde

$$\widehat{\psi}_k = \frac{\Gamma(\widehat{D} + k)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\widehat{D})}.$$

(iv) Após termos calculado as variâncias teórica e amostral do erro de previsão a  $h$ -passos à frente, podemos calcular o vício e o pervício ao estimar a variância teórica do erro de previsão. Denotados, respectivamente, por  $vício_n(h)$  e  $pervício_n(h)$ , eles são dados por

$$vício_n(h) = \widehat{Var}(e_n(h)) - Var(e_n(h)),$$

e

$$pervício_n(h) = \frac{|\widehat{Var}(e_n(h)) - Var(e_n(h))|}{Var(e_n(h))} \times 100 \%,$$

onde o pervício determina a porcentagem do vício cometido ao estimar a variância teórica  $h$ -passos à frente.

(v) O erro quadrático médio de previsão na origem  $n$ , é dado por

$$eqmp_n = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^h (e_n(k))^2,$$

é obtido através da média aritmética dos quadrados dos  $h$  erros de previsão e será denotado por  $eqmp_n$ . Ou seja,

$$eqmp_n = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^h (e_n(k))^2 = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^h \left( \sum_{\ell=0}^{\lceil \frac{h}{s} \rceil - 1} \psi_\ell \varepsilon_{n+h-s\ell} \right)^2.$$

(vi) Com a hipótese adicional de que  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , para cada  $t \in \mathbb{Z}$ , segue-se que, dados os valores passados e presentes da série temporal  $\{X_t\}_{t=1}^n$ , a distribuição condicional de  $X_{n+h}$  será  $N(\widehat{X}_n(h), Var(e_n(h)))$ .

Portanto,

$$Z = \frac{X_{n+h} - \widehat{X}_n(h)}{[Var(e_n(h))]^{1/2}} \sim N(0, 1).$$

Fixado o nível de confiança  $\gamma$ , podemos encontrar um valor  $z_{\frac{\gamma}{2}}$  tal que  $\mathbb{P}(Z \geq z_{\frac{\gamma}{2}}) = \frac{\gamma}{2}$ . Ou seja, com probabilidade  $\gamma$ ,

$$\widehat{X}_n(h) - z_{\frac{\gamma}{2}} [\text{Var}(e_n(h))]^{\frac{1}{2}} \leq X_{n+h} \leq \widehat{X}_n(h) + z_{\frac{\gamma}{2}} [\text{Var}(e_n(h))]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.46)$$

Substituindo-se  $\text{Var}(e_n(h))$  por  $\widehat{\text{Var}}(e_n(h))$  em (4.46), temos que

$$\widehat{X}_n(h) - z_{\frac{\gamma}{2}} \widehat{\sigma}_\varepsilon \left[ \sum_{k=0}^{\lceil \frac{h}{s} \rceil - 1} \widehat{\psi}_k^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq X_{n+h} \leq \widehat{X}_n(h) + z_{\frac{\gamma}{2}} \widehat{\sigma}_\varepsilon \left[ \sum_{k=0}^{\lceil \frac{h}{s} \rceil - 1} \widehat{\psi}_k^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.47)$$

Observe que a variância aumenta com  $h$  (ver Observação 4.6 abaixo). Nesse caso, as amplitudes dos intervalos (4.47) aumentarão à medida que nos afastamos da origem  $n$ , caracterizando com isso o aumento da incerteza das previsões para  $h$ -passos à frente, quando  $h$  assume valor grande.  $\square$

**Observação 4.6:** Conforme o comentário acima, considerando-se  $s = 2$ , as variâncias do erro de previsão a um e dois passos à frente são dadas por

$$\text{Var}(e_n(1)) = \sigma_\varepsilon^2 \quad \text{e} \quad \text{Var}(e_n(2)) = \sigma_\varepsilon^2.$$

No entanto, a variância do erro de previsão a três passos à frente será

$$\text{Var}(e_n(3)) = \sigma_\varepsilon^2(1 + \psi_1^2) \geq \sigma_\varepsilon^2.$$

Desta forma, a variância do erro de previsão a três passos à frente será, em geral, maior do que a variância do erro de previsão a um e dois passos à frente. Isto ilustra que a variância aumenta com  $h$ .

# Capítulo 5

## Simulações

Neste capítulo apresentamos o método de simulação de processos SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_s$ , a estimação do parâmetro  $D$  de diferenciação sazonal e também a previsão de  $h$ -passos à frente para estes processos.

O programa para simulação foi desenvolvido na linguagem Fortran Workstation 4.0 utilizando também algumas subrotinas da biblioteca IMSL.

Para simular as amostras de processos SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_s$ , utilizamos o método descrito por Hosking (1984). A seguir, descrevemos as etapas para a simulação de amostras de tamanho  $n$  de um processo SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_s$ , onde  $n$  é múltiplo de  $s$ .

**Etapa I:** Calcular a função de autocorrelação parcial através das equações dadas pelo Teorema 4.1, item (v).

**Etapa II:** Gerar uma variável aleatória  $N(0, 1)$ , através da subrotina *RN NOR*, de tamanho  $N$ , para simular um processo ruído branco  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  Gaussiano (ver Definições 2.8 e 3.2). O tamanho amostral  $n$  é dado por  $n = Ns$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ .

**Etapa III:** Calcular a média e a variância da variável aleatória  $X_t$ , dadas pelo Teorema 4.2.

**Observação 5.1:** Para as simulações dos processos SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_s$ , utilizamos sempre  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ . Observe ainda que estes processos são fortemente estacionários (ver comentários após a Definição 2.8).

**Etapa IV:** Gerar uma variável aleatória  $X_t$ , com distribuição Normal com média  $m_t$  e variância  $v_t$ , para  $t = 1, 2, \dots, n$ . As expressões de  $m_t$  e  $v_t$  são dadas em (4.24) e (4.25) no Teorema 4.2.

### 5.1 ESTIMAÇÃO

Através do processo de simulação dado pelas **Etapas I** até **IV**, obtemos uma série temporal  $\{X_t\}_{t=1}^n$  do processo SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_s$  dado por

$$(1 - \mathcal{B}^s)^D X_t = \varepsilon_t \quad \text{para } t = 1, \dots, n.$$

Após a obtenção da série temporal, a próxima etapa é estimar o parâmetro  $D$  de diferenciação sazonal.

Foram considerados os seguintes estimadores para o parâmetro de diferenciação sazonal:  $GPH$ ,  $SPR$  e  $FT$  (para a descrição dos métodos de estimação ver Seção 4.2).

Para os estimadores  $GPH$  e  $SPR$  utilizamos, nas equações de regressão (4.32) e (4.35), a função  $g(n) = n^\alpha$ , com  $\alpha = 0.5, 0.6, 0.7$  e  $0.8$ . Na função periodograma suavizado consideramos o ponto de truncamento  $m$  da janela de Parzen (ver equação (2.9)) dado por  $m = n^\beta$ , com  $\beta = 0.9$  (ver Reisen (1994)).

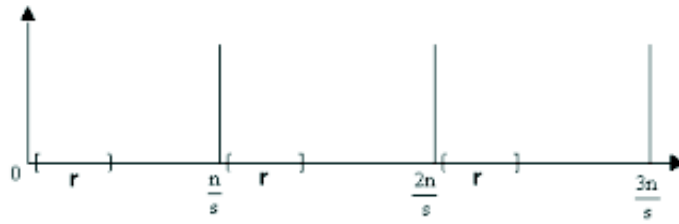
Ainda para os estimadores  $GPH$  e  $SPR$ , consideramos seis métodos para selecionar os regressores que farão parte da análise de regressão. A seguir, explicamos os referidos métodos.

- **Método 1:** O número total de regressores  $g(n)$  é dividido entre todas as frequências sazonais para cada valor de  $s$ . Por exemplo, quando  $s = 2$ , o número total de regressores  $g(n)$  são selecionados apenas na primeira frequência sazonal; quando  $s = 6$ , os regressores são divididos em três partes iguais (ver Figura 5.1).
- **Método 2:** O número total de regressores  $g(n)$  é selecionado somente na primeira frequência sazonal, independente do valor de  $s$  (ver Figura 5.2).
- **Método 3:** O número total de regressores  $g(n)$  é dividido por  $s$  e estes são selecionados no início e no fim de cada frequência sazonal (ver Figura 5.3).

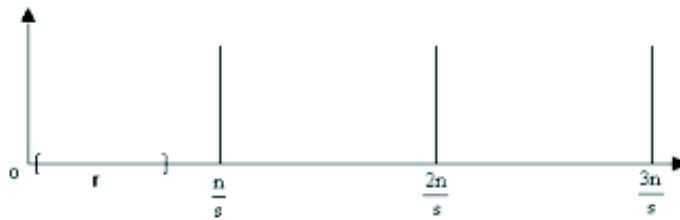
**Observação:** Para  $s$  ímpar, na última frequência sazonal, são selecionados regressores apenas no seu início.

- **Método 4:** O número total de regressores  $g(n)$  é selecionado em cada frequência sazonal (ver Figura 5.4).
- **Método 5:** Este método é similar ao Método 3 mas considerando-se um número fixo de regressores a serem selecionados.
- **Método 6:** Este método é similar ao Método 4 mas considerando-se um número fixo de regressores a serem selecionados.

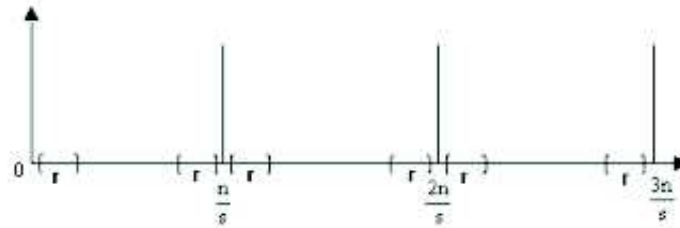
Para o estimador  $FT$ ,  $g(n) = \lfloor (n - 1)/2 \rfloor$ , onde  $\lfloor x \rfloor$  é o maior inteiro menor ou igual a  $x$  (ver Seção 4.2.3).



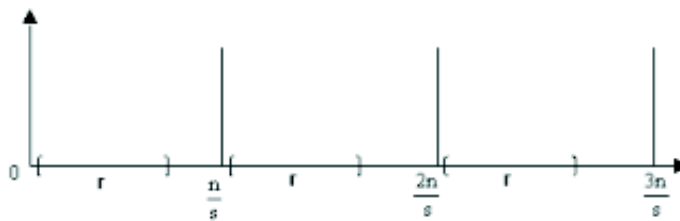
**Figura 5.1:** Representação do **Método 1**, onde  $r = g(n)/\lfloor s/2 \rfloor$ , para  $s$  par e  $r = g(n)/(\lfloor s/2 \rfloor + 1)$ , para  $s$  ímpar.



**Figura 5.2:** Representação do **Método 2**, onde  $r = g(n)$ .



**Figura 5.3:** Representação do **Método 3**, onde  $r = g(n)/s$ .



**Figura 5.4:** Representação do **Método 4**, onde  $r = g(n)$ .

**Observação 5.2:** Para estimar o parâmetro  $D$  de diferenciação sazonal, geramos  $RE$  séries, onde  $RE$  é o número de replicações. Para cada série estimamos o valor de  $D$ , através dos métodos propostos na Seção 4.2 e em seguida tomamos a média aritmética destes valores, isto é,

$$\bar{D} = \frac{1}{RE} \sum_{j=1}^{RE} \hat{D}_j,$$

onde  $\bar{D}$  é a média que denotamos, respectivamente, por  $GPH$ ,  $SPR$  ou  $FT$ , conforme o método usado.

Para analisarmos os estimadores calculamos o erro quadrático médio, denotado por  $eqm$  nas tabelas, para cada estimador, isto é,

$$eqm = \frac{1}{RE} \sum_{j=1}^{RE} (\hat{D}_j - D)^2.$$

Nas Tabelas 5.1.1 a 5.1.6, a seguir, apresentamos os resultados das simulações para a estimação do parâmetro  $D$  de diferenciação sazonal dos processos SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_s$  utilizando os estimadores propostos na Seção 4.2.

Apesar de termos feito o estudo de simulação de Monte Carlo para os casos em que  $D \in \{0.2, 0.4\}$ ,  $n \in \{200, 1000\}$ ,  $RE \in \{500, 1000\}$  e  $s \in \{2, 3, 4, 5, 6, 12\}$ , considerando todos os seis diferentes procedimentos para a escolha do tamanho dos regressores  $r$  e ainda considerando  $g(n) = n^\alpha$  com  $\alpha \in \{0.5, 0.6, 0.7, 0.8\}$ , por questão de espaço, estamos incluindo apenas as Tabelas 5.1.1 até 5.1.6 no corpo do texto. Estas tabelas se referem apenas ao caso em que  $\alpha = 0.5$ . Os demais casos estão incluídos no Apêndice D.

Analisando as Tabelas 5.1.1 a 5.1.6 observamos que, aumentando-se o tamanho amostral, o erro quadrático médio dos estimadores diminui e ocorre uma sensível melhora nos seus desempenhos. Com relação ao número de replicações, quando aumentamos de 500 para 1000 não há significativa mudança no desempenho dos estimadores. Para o estimador  $GPH$ , este aumento no número de replicações acarretou na diminuição do erro quadrático médio com exceção quando  $D = 0.2$  e  $n = 200$ , para  $s = 2, 6$  e  $12$  em todos os métodos; para  $s = 3$  e  $4$ , nos Métodos 2 e 4 e para  $s = 5$  em todos os métodos com exceção do Método 3. Quando  $D = 0.2$  e  $n = 1000$ , para  $s = 5$  e  $12$  em todos os métodos com exceção do Método 3; para  $s = 2$ , todos os métodos; para  $s = 3$ , nos Métodos 2, 4, 5 e 6 e para  $s = 6$  nos Métodos 1, 3 e 6. Quando  $D = 0.4$  e  $n = 200$ , para  $s = 2, 5$  e  $6$  todos os métodos; para  $s = 3$ , os Métodos 1, 3 e 5; para  $s = 4$  nos Métodos 1 e 3 e para  $s = 12$ , nos Métodos 1 e 5. Quando  $D = 0.4$  e  $n = 1000$ , para  $s = 2, 3$  e  $4$  em todos os métodos e para  $s = 6$  e  $12$  em todos os métodos menos o Método 3.



**Tabela 5.1.1:** Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>2</sub>,  $\alpha = 0.5$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2011	0.2011	0.1853	0.2011	0.1781	0.1918	-
	<i>eqm</i>	0.0508	0.0508	0.1288	0.0508	0.1697	0.1097	-
	<i>SPR</i>	0.1429	0.1429	0.0865	0.1429	0.0703	0.1002	-
	<i>eqm</i>	0.0325	0.0325	0.0775	0.0325	0.0908	0.0663	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1485
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0113
1000	<i>GPH</i>	0.2007	0.2007	0.1979	0.2007	0.1974	0.2050	-
	<i>eqm</i>	0.0514	0.0514	0.1382	0.0514	0.1797	0.1163	-
	<i>SPR</i>	0.1447	0.1447	0.0936	0.1447	0.0774	0.1062	-
	<i>eqm</i>	0.0337	0.0337	0.0761	0.0337	0.0876	0.0658	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1535
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0110
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2033	0.2016	0.1948	0.2016	0.1980	0.2043	-
	<i>eqm</i>	0.0180	0.0191	0.0405	0.0191	0.0446	0.0238	-
	<i>SPR</i>	0.1687	0.1679	0.1413	0.1679	0.1400	0.1622	-
	<i>eqm</i>	0.0127	0.0131	0.0280	0.0131	0.0311	0.0168	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1905
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0015
1000	<i>GPH</i>	0.2042	0.2046	0.2010	0.2046	0.2037	0.2089	-
	<i>eqm</i>	0.0183	0.0192	0.0422	0.0192	0.0466	0.0242	-
	<i>SPR</i>	0.1719	0.1715	0.1461	0.1715	0.1430	0.1664	-
	<i>eqm</i>	0.0123	0.0127	0.0277	0.0127	0.0306	0.0162	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1887
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0016
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4082	0.4082	0.4189	0.4082	0.4271	0.4130	-
	<i>eqm</i>	0.0457	0.0457	0.1295	0.0457	0.1657	0.0990	-
	<i>SPR</i>	0.3935	0.3935	0.3670	0.3935	0.3596	0.3718	-
	<i>eqm</i>	0.0253	0.0253	0.0578	0.0253	0.0672	0.0501	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3477
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0102
1000	<i>GPH</i>	0.4008	0.4008	0.4042	0.4008	0.4060	0.4031	-
	<i>eqm</i>	0.0476	0.0476	0.1328	0.0476	0.1682	0.1069	-
	<i>SPR</i>	0.3939	0.3939	0.3692	0.3939	0.3594	0.3766	-
	<i>eqm</i>	0.0267	0.0267	0.0583	0.0267	0.0674	0.0514	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3484
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0099
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4089	0.4098	0.3995	0.4098	0.3960	0.4095	-
	<i>eqm</i>	0.0171	0.0170	0.0383	0.0170	0.0404	0.0220	-
	<i>SPR</i>	0.4044	0.4042	0.3827	0.4042	0.3787	0.4009	-
	<i>eqm</i>	0.0109	0.0112	0.0234	0.0112	0.0251	0.0137	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3948
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0013
1000	<i>GPH</i>	0.4140	0.4136	0.4091	0.4136	0.4088	0.4129	-
	<i>eqm</i>	0.0169	0.0172	0.0393	0.0172	0.0413	0.0228	-
	<i>SPR</i>	0.4039	0.4037	0.3875	0.4037	0.3848	0.4012	-
	<i>eqm</i>	0.0107	0.0111	0.0240	0.0111	0.0257	0.0140	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3941
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0014

**Tabela 5.1.2:** Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>3</sub>,  $\alpha = 0.5$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2070	0.1937	0.2037	0.1937	0.2063	0.2036	-
	<i>eqm</i>	0.1568	0.0523	0.2546	0.0523	0.1944	0.1279	-
	<i>SPR</i>	0.0976	0.1384	0.0584	0.1384	0.0815	0.1071	-
	<i>eqm</i>	0.0827	0.0360	0.1134	0.0360	0.0970	0.0722	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1375
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0193
1000	<i>GPH</i>	0.2053	0.2024	0.2021	0.2024	0.2039	0.2010	-
	<i>eqm</i>	0.1435	0.0528	0.2431	0.0528	0.1810	0.1190	-
	<i>SPR</i>	0.0999	0.1439	0.0641	0.1439	0.0859	0.1087	-
	<i>eqm</i>	0.0809	0.0358	0.1099	0.0358	0.0937	0.0707	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1393
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0194
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.1988	0.1962	0.1984	0.1962	0.1970	0.2002	-
	<i>eqm</i>	0.0428	0.0190	0.0909	0.0190	0.0473	0.0239	-
	<i>SPR</i>	0.1404	0.1673	0.1182	0.1673	0.1368	0.1605	-
	<i>eqm</i>	0.0293	0.0123	0.0537	0.0123	0.0319	0.0155	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1886
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0023
1000	<i>GPH</i>	0.1957	0.1999	0.1929	0.1999	0.1918	0.2003	-
	<i>eqm</i>	0.0425	0.0191	0.0884	0.0191	0.0477	0.0242	-
	<i>SPR</i>	0.1388	0.1697	0.1142	0.1697	0.1350	0.1623	-
	<i>eqm</i>	0.0285	0.0123	0.0502	0.0123	0.0312	0.0159	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1871
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0024
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4032	0.3971	0.4310	0.3971	0.4218	0.3978	-
	<i>eqm</i>	0.1144	0.0429	0.2031	0.0429	0.1511	0.1004	-
	<i>SPR</i>	0.4021	0.4108	0.4024	0.4108	0.4041	0.4005	-
	<i>eqm</i>	0.0522	0.0246	0.0661	0.0246	0.0583	0.0477	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3214
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0171
1000	<i>GPH</i>	0.3921	0.3904	0.4024	0.3904	0.4035	0.3903	-
	<i>eqm</i>	0.1211	0.0425	0.2112	0.0425	0.1586	0.0990	-
	<i>SPR</i>	0.3977	0.4083	0.3954	0.4083	0.3985	0.3976	-
	<i>eqm</i>	0.0521	0.0243	0.0674	0.0243	0.0588	0.0463	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3186
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0182
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4241	0.4122	0.4307	0.4122	0.4221	0.4122	-
	<i>eqm</i>	0.0391	0.0166	0.0681	0.0166	0.0402	0.0218	-
	<i>SPR</i>	0.4140	0.4140	0.4066	0.4140	0.4121	0.4144	-
	<i>eqm</i>	0.0201	0.0100	0.0342	0.0100	0.0215	0.0128	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3862
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0021
1000	<i>GPH</i>	0.4188	0.4138	0.4267	0.4138	0.4164	0.4121	-
	<i>eqm</i>	0.0398	0.0176	0.0703	0.0176	0.0416	0.0231	-
	<i>SPR</i>	0.4090	0.4147	0.4017	0.4147	0.4068	0.4135	-
	<i>eqm</i>	0.0204	0.0104	0.0333	0.0104	0.0216	0.0134	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3876
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0020

**Tabela 5.1.3:** Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>4</sub>,  $\alpha = 0.5$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2266	0.2329	0.1937	0.2329	0.2159	0.2228	-
	<i>eqm</i>	0.1346	0.0502	0.3106	0.0502	0.1609	0.1105	-
	<i>SPR</i>	0.1237	0.1725	0.0409	0.1725	0.1036	0.1331	-
	<i>eqm</i>	0.0707	0.0339	0.1169	0.0339	0.0813	0.0621	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1216
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0259
1000	<i>GPH</i>	0.2179	0.2203	0.2069	0.2203	0.2159	0.2186	-
	<i>eqm</i>	0.1310	0.0475	0.3316	0.0475	0.1647	0.1036	-
	<i>SPR</i>	0.1204	0.1646	0.0469	0.1646	0.1027	0.1318	-
	<i>eqm</i>	0.0694	0.0317	0.1216	0.0317	0.0819	0.0590	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1187
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0264
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.1977	0.2047	0.1921	0.2047	0.1959	0.2021	-
	<i>eqm</i>	0.0448	0.0193	0.0982	0.0193	0.0481	0.0259	-
	<i>SPR</i>	0.1491	0.1750	0.1104	0.1750	0.1450	0.1665	-
	<i>eqm</i>	0.0286	0.0132	0.0553	0.0132	0.0313	0.0176	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1833
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0032
1000	<i>GPH</i>	0.2080	0.2055	0.2119	0.2055	0.2060	0.2055	-
	<i>eqm</i>	0.0426	0.0185	0.0957	0.0185	0.0458	0.0247	-
	<i>SPR</i>	0.1521	0.1749	0.1168	0.1749	0.1480	0.1677	-
	<i>eqm</i>	0.0279	0.0129	0.0543	0.0129	0.0304	0.0168	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1824
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0034
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4035	0.3975	0.3876	0.3975	0.4056	0.4058	-
	<i>eqm</i>	0.1096	0.0436	0.2753	0.0436	0.1447	0.0987	-
	<i>SPR</i>	0.4313	0.4213	0.4104	0.4213	0.4258	0.4326	-
	<i>eqm</i>	0.0438	0.0203	0.0620	0.0203	0.0490	0.0404	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2944
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0267
1000	<i>GPH</i>	0.3864	0.3882	0.3931	0.3882	0.3918	0.3875	-
	<i>eqm</i>	0.1111	0.0404	0.3016	0.0404	0.1429	0.0880	-
	<i>SPR</i>	0.4165	0.4170	0.4080	0.4170	0.4164	0.4190	-
	<i>eqm</i>	0.0430	0.0207	0.0698	0.0207	0.0502	0.0382	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2869
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0291
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4201	0.4181	0.4210	0.4181	0.4236	0.4175	-
	<i>eqm</i>	0.0346	0.0158	0.0959	0.0158	0.0389	0.0191	-
	<i>SPR</i>	0.4220	0.4237	0.4044	0.4237	0.4200	0.4242	-
	<i>eqm</i>	0.0193	0.0101	0.0391	0.0101	0.0206	0.0122	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3855
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0030
1000	<i>GPH</i>	0.4219	0.4215	0.4240	0.4215	0.4242	0.4193	-
	<i>eqm</i>	0.0360	0.0160	0.1031	0.0160	0.0400	0.0200	-
	<i>SPR</i>	0.4233	0.4250	0.4102	0.4250	0.4223	0.4237	-
	<i>eqm</i>	0.0199	0.0100	0.0400	0.0100	0.0212	0.0120	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3856
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0029

**Tabela 5.1.4:** Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>5</sub>,  $\alpha = 0.5$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2141	0.2170	0.2325	0.2170	0.2190	0.2218	-
	<i>eqm</i>	0.1761	0.0455	0.5123	0.0455	0.1433	0.0896	-
	<i>SPR</i>	0.0788	0.1495	0.0060	0.1495	0.1012	0.1254	-
	<i>eqm</i>	0.0867	0.0363	0.1210	0.0363	0.0773	0.0605	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.0898
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0406
1000	<i>GPH</i>	0.2164	0.2138	0.2253	0.2138	0.2144	0.2155	-
	<i>eqm</i>	0.1888	0.0493	0.5057	0.0493	0.1458	0.0944	-
	<i>SPR</i>	0.0755	0.1504	0.0001	0.1504	0.0970	0.1215	-
	<i>eqm</i>	0.0921	0.0370	0.1282	0.0370	0.0808	0.0636	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.0912
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0406
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.1965	0.2080	0.2006	0.2080	0.2050	0.2023	-
	<i>eqm</i>	0.0671	0.0161	0.1589	0.0161	0.0405	0.0201	-
	<i>SPR</i>	0.1305	0.1720	0.0853	0.1720	0.1459	0.1626	-
	<i>eqm</i>	0.0422	0.0120	0.0773	0.0120	0.0287	0.0161	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1757
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0045
1000	<i>GPH</i>	0.2168	0.2136	0.2074	0.2136	0.2153	0.2102	-
	<i>eqm</i>	0.0681	0.0183	0.1563	0.0183	0.0430	0.0227	-
	<i>SPR</i>	0.1392	0.1767	0.0810	0.1767	0.1519	0.1692	-
	<i>eqm</i>	0.0402	0.0125	0.0771	0.0125	0.0273	0.0157	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1779
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0044
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.3593	0.3870	0.3569	0.3870	0.3835	0.3884	-
	<i>eqm</i>	0.1974	0.0390	0.5139	0.0390	0.1476	0.0929	-
	<i>SPR</i>	0.4269	0.4259	0.4079	0.4259	0.4332	0.4396	-
	<i>eqm</i>	0.0517	0.0186	0.0674	0.0186	0.0467	0.0356	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2603
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0416
1000	<i>GPH</i>	0.3710	0.3858	0.3469	0.3858	0.3845	0.3893	-
	<i>eqm</i>	0.2022	0.0393	0.5344	0.0393	0.1489	0.0948	-
	<i>SPR</i>	0.4287	0.4279	0.4041	0.4279	0.4342	0.4380	-
	<i>eqm</i>	0.0544	0.0178	0.0652	0.0178	0.0482	0.0353	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2594
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0415
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4216	0.4159	0.4114	0.4159	0.4244	0.4180	-
	<i>eqm</i>	0.0706	0.0165	0.1673	0.0165	0.0439	0.0219	-
	<i>SPR</i>	0.4258	0.4307	0.4039	0.4307	0.4342	0.4332	-
	<i>eqm</i>	0.0311	0.0104	0.0510	0.0104	0.0229	0.0137	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3807
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0040
1000	<i>GPH</i>	0.4169	0.4173	0.4197	0.4173	0.4229	0.4197	-
	<i>eqm</i>	0.0653	0.0162	0.1645	0.0162	0.0428	0.0211	-
	<i>SPR</i>	0.4219	0.4308	0.4041	0.4308	0.4324	0.4330	-
	<i>eqm</i>	0.0305	0.0104	0.0492	0.0104	0.0225	0.0132	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3805
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0039

**Tabela 5.1.5:** Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>6</sub>,  $\alpha = 0.5$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2669	0.2237	0.2471	0.2237	0.2451	0.2410	-
	<i>eqm</i>	0.1990	0.0501	0.4952	0.0501	0.1522	0.0991	-
	<i>SPR</i>	0.1084	0.1619	0.0306	0.1619	0.1224	0.1390	-
	<i>eqm</i>	0.0858	0.0360	0.1199	0.0360	0.0728	0.0572	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.0732
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0517
1000	<i>GPH</i>	0.2428	0.2094	0.2287	0.2094	0.2315	0.2256	-
	<i>eqm</i>	0.2106	0.0503	0.5047	0.0503	0.1571	0.1013	-
	<i>SPR</i>	0.0943	0.1501	0.0182	0.1501	0.1103	0.1280	-
	<i>eqm</i>	0.0911	0.0360	0.1257	0.0360	0.0773	0.0594	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.0613
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0555
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2233	0.2092	0.2313	0.2092	0.2169	0.2088	-
	<i>eqm</i>	0.0627	0.0176	0.2140	0.0176	0.0434	0.0222	-
	<i>SPR</i>	0.1430	0.1796	0.0761	0.1796	0.1562	0.1732	-
	<i>eqm</i>	0.0396	0.0129	0.0829	0.0129	0.0306	0.0163	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1780
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0054
1000	<i>GPH</i>	0.2038	0.2093	0.2096	0.2093	0.2034	0.2079	-
	<i>eqm</i>	0.0627	0.0174	0.2282	0.0174	0.0411	0.0224	-
	<i>SPR</i>	0.1287	0.1779	0.0631	0.1779	0.1463	0.1715	-
	<i>eqm</i>	0.0418	0.0129	0.0893	0.0129	0.0296	0.0162	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1788
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0054
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.3829	0.3728	0.3985	0.3728	0.3981	0.3842	-
	<i>eqm</i>	0.1790	0.0419	0.4588	0.0419	0.1442	0.0894	-
	<i>SPR</i>	0.4454	0.4246	0.4314	0.4246	0.4434	0.4372	-
	<i>eqm</i>	0.0507	0.0188	0.0535	0.0188	0.0457	0.0348	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2199
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0635
1000	<i>GPH</i>	0.3730	0.3717	0.3806	0.3717	0.3834	0.3771	-
	<i>eqm</i>	0.1909	0.0427	0.4993	0.0427	0.1459	0.0907	-
	<i>SPR</i>	0.4441	0.4262	0.4321	0.4262	0.4425	0.4377	-
	<i>eqm</i>	0.0500	0.0181	0.0566	0.0181	0.0440	0.0337	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2197
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0619
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4227	0.4198	0.4499	0.4198	0.4274	0.4185	-
	<i>eqm</i>	0.0603	0.0166	0.2118	0.0166	0.0399	0.0213	-
	<i>SPR</i>	0.4319	0.4280	0.4160	0.4280	0.4393	0.4320	-
	<i>eqm</i>	0.0271	0.0099	0.0475	0.0099	0.0200	0.0129	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3739
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0048
1000	<i>GPH</i>	0.4223	0.4163	0.4287	0.4163	0.4189	0.4172	-
	<i>eqm</i>	0.0621	0.0176	0.2111	0.0176	0.0402	0.0221	-
	<i>SPR</i>	0.4314	0.4295	0.4032	0.4295	0.4336	0.4325	-
	<i>eqm</i>	0.0273	0.0101	0.0463	0.0101	0.0195	0.0124	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3752
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0047

**Tabela 5.1.6:** Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>12</sub>,  $\alpha = 0.5$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2121	0.1930	0.2415	0.1930	0.1785	0.1929	-
	<i>eqm</i>	0.4317	0.1006	1.1592	0.1006	0.1253	0.0938	-
	<i>SPR</i>	0.0041	0.1216	-0.0509	0.1216	0.0757	0.1079	-
	<i>eqm</i>	0.1148	0.0766	0.1221	0.0766	0.0786	0.0693	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	-0.1195
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.1727
1000	<i>GPH</i>	0.2020	0.1813	0.1846	0.1813	0.1869	0.1851	-
	<i>eqm</i>	0.4680	0.1023	1.1823	0.1023	0.1292	0.0959	-
	<i>SPR</i>	0.0074	0.1137	-0.0537	0.1137	0.0813	0.1028	-
	<i>eqm</i>	0.1151	0.0770	0.1244	0.0770	0.0771	0.0694	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	-0.1241
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.1756
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2152	0.2054	0.2055	0.2054	0.2009	0.2072	-
	<i>eqm</i>	0.1600	0.0165	0.5720	0.0165	0.0377	0.0210	-
	<i>SPR</i>	0.0777	0.1739	-0.0238	0.1739	0.1432	0.1704	-
	<i>eqm</i>	0.0809	0.0130	0.1147	0.0130	0.0288	0.0161	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1466
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0130
1000	<i>GPH</i>	0.2225	0.2053	0.2296	0.2053	0.1974	0.2040	-
	<i>eqm</i>	0.1609	0.0168	0.5526	0.0168	0.0392	0.0214	-
	<i>SPR</i>	0.0832	0.1738	-0.0172	0.1738	0.1435	0.1681	-
	<i>eqm</i>	0.0796	0.0130	0.1120	0.0130	0.0294	0.0163	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1474
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0136
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2964	0.3400	0.3291	0.3400	0.3150	0.3300	-
	<i>eqm</i>	0.4675	0.1023	1.2311	0.1023	0.1344	0.0962	-
	<i>SPR</i>	0.4720	0.4686	0.4515	0.4686	0.4550	0.4676	-
	<i>eqm</i>	0.0377	0.0385	0.0260	0.0385	0.0275	0.0292	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	-0.0073
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.2432
1000	<i>GPH</i>	0.3186	0.3462	0.3348	0.3462	0.3299	0.3401	-
	<i>eqm</i>	0.4746	0.0968	1.1619	0.0968	0.1347	0.0927	-
	<i>SPR</i>	0.4751	0.4669	0.4508	0.4669	0.4613	0.4675	-
	<i>eqm</i>	0.0381	0.0371	0.0262	0.0371	0.0288	0.0285	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	-0.0013
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.2375
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4057	0.3902	0.4667	0.3902	0.3973	0.3871	-
	<i>eqm</i>	0.1324	0.0150	0.5201	0.0150	0.0335	0.0189	-
	<i>SPR</i>	0.4453	0.4227	0.4065	0.4227	0.4422	0.4240	-
	<i>eqm</i>	0.0367	0.0079	0.0324	0.0079	0.0158	0.0096	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3323
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0137
1000	<i>GPH</i>	0.3971	0.3942	0.4327	0.3942	0.3967	0.3942	-
	<i>eqm</i>	0.1348	0.0155	0.5121	0.0155	0.0350	0.0197	-
	<i>SPR</i>	0.4394	0.4255	0.4045	0.4255	0.4392	0.4276	-
	<i>eqm</i>	0.0364	0.0083	0.0344	0.0083	0.0163	0.0103	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3315
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0136

Também podemos observar que o estimador *GPH* possui maior erro quadrático médio que o estimador *SPR*, independentemente do procedimento utilizado para a escolha do tamanho dos regressores  $r$ .

Quando analisamos o comportamento do estimador *SPR* ocorre uma diminuição do erro quadrático médio quando aumentamos o número de replicações exceto quando  $D = 0.2$  e  $n = 200$ , para  $s = 5$  e  $6$  em todos os métodos; para  $s = 2$  nos Métodos 1, 2 e 4; para  $s = 4$  nos Métodos 3 e 5 e para  $s = 12$  nos Métodos 1, 2, 3 e 6. Quando  $D = 0.2$  e  $n = 1000$ , para  $s = 3$  o Método 6; para  $s = 5$  nos Métodos 2 e 4; para  $s = 6$ , nos Métodos 1 e 3 e para  $s = 12$  nos Métodos 5 e 6. Quando  $D = 0.4$  e  $n = 200$ , para  $s = 2$ , em todos os métodos; para  $s = 3$  nos Métodos 3 e 5; para  $s = 4$  nos Métodos 2, 4 e 5; para  $s = 5$  nos Métodos 1 e 5; para  $s = 6$  o Método 3 e para  $s = 12$  nos Métodos 1, 3 e 5. Quando  $D = 0.4$  e  $n = 1000$ , para  $s = 3$  em todos os métodos menos o Método 3; para  $s = 4$  nos Métodos 1, 3 e 5; para  $s = 6$  nos Métodos 1, 2 e 4 e para  $s = 12$  em todos os métodos menos o Método 1.

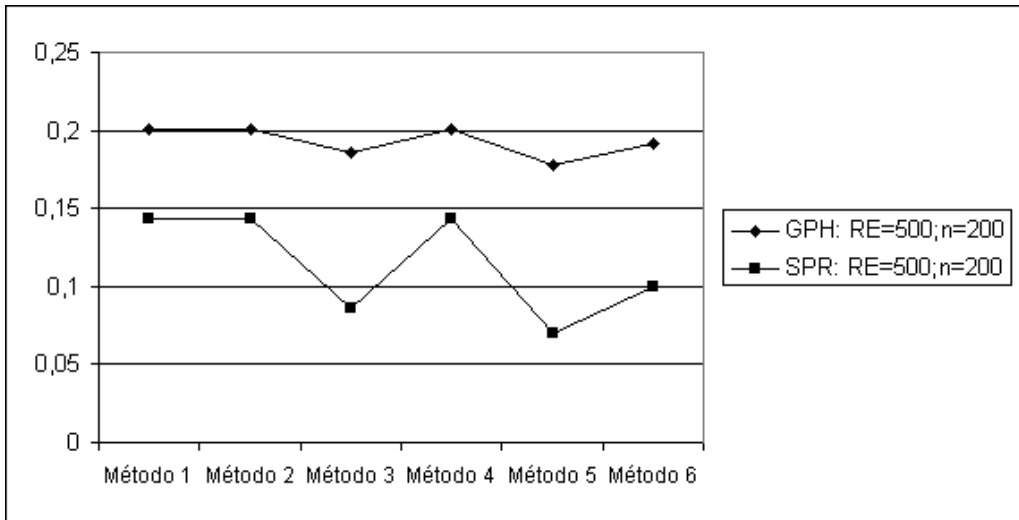
Comparando o erro quadrático médio do estimador *FT* com o do estimador *SPR*, observamos que no primeiro estimador ele é menor que o do segundo exceto quando  $D = 0.2$  e  $n = 200$ , para  $s = 5$  e  $6$  nos Métodos 2 e 4; para  $s = 12$  em todos os métodos. Quando  $D = 0.2$  e  $n = 1000$ , para  $s = 12$  nos Métodos 2 e 4. Quando  $D = 0.4$  e  $n = 200$ , para  $s = 4$  nos Métodos 2 e 4; para  $s = 5$  nos Métodos 2, 4 e 6; para  $s = 6$  e  $12$  em todos os métodos e quando  $D = 0.4$  e  $n = 1000$ , para  $s = 12$  nos Métodos 2, 4 e 6.

O erro quadrático médio do estimador *FT* diminui com o aumento do número de replicações exceto quando  $D = 0.2$  e  $n = 200$  para  $s \in \{3, 4, 5$  e  $12\}$ ; quando  $D = 0.2$  e  $n = 1000$  para  $s \in \{2, 3, 4$  e  $12\}$ ; quando  $D = 0.4$  e  $n = 200$  para  $s \in \{3$  e  $4\}$  e quando  $D = 0.4$  e  $n = 1000$  para  $s = 2$ .

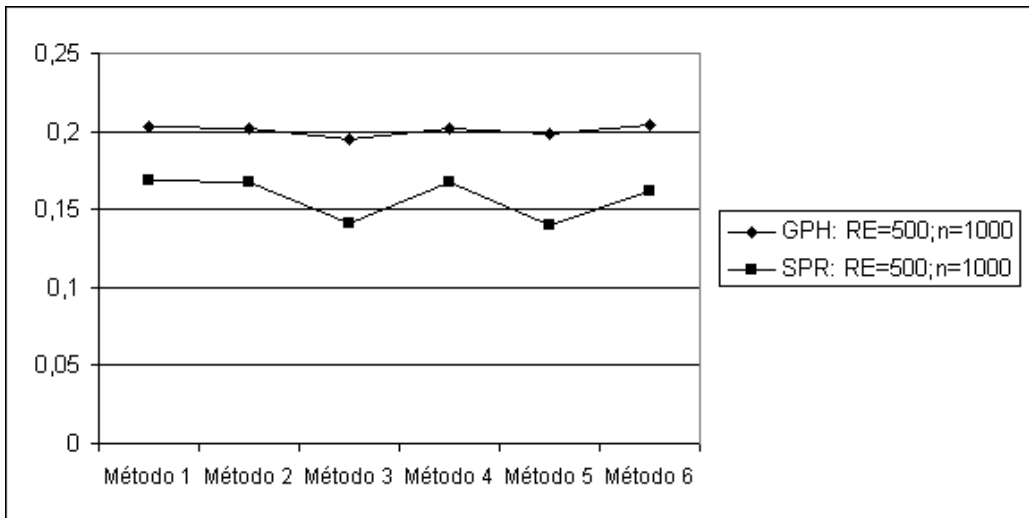
As Figuras 5.5 a 5.16, a seguir, apresentam graficamente os resultados de algumas estimativas dos estimadores do parâmetro  $D$ , obtidas a partir de um processo SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_s$  quando  $\alpha = 0.5$ ,  $D = 0.2$ ,  $n = 200$  e  $n = 1000$ , respectivamente, onde  $s \in \{2, 3, 4, 5, 6, 12\}$ . Não incluímos os resultados com diferentes valores de replicações pois, em relação as estimativas, não houve mudança significativa nos casos analisados.

Comparando as Figuras 5.5 a 5.16 concluímos que aumentando o tamanho amostral ocorre uma sensível melhora nas estimativas dos estimadores *GPH* e *SPR* em todos os métodos. O mesmo fato ocorre com o estimador *FT*, quando analisamos os resultados nas Tabelas 5.1.1 a 5.1.6. Podemos observar que, conforme aumentamos o valor da sazonalidade, o estimador *GPH* possui tendência a superestimar o valor teórico enquanto que os estimadores *SPR* e *FT*, sempre subestimam o valor teórico.

Também observamos que o estimador *SPR* torna-se competitivo, comparado com o estimador *GPH*, quando o tamanho amostral é  $n = 1000$  nos Métodos 2,4 e 6.

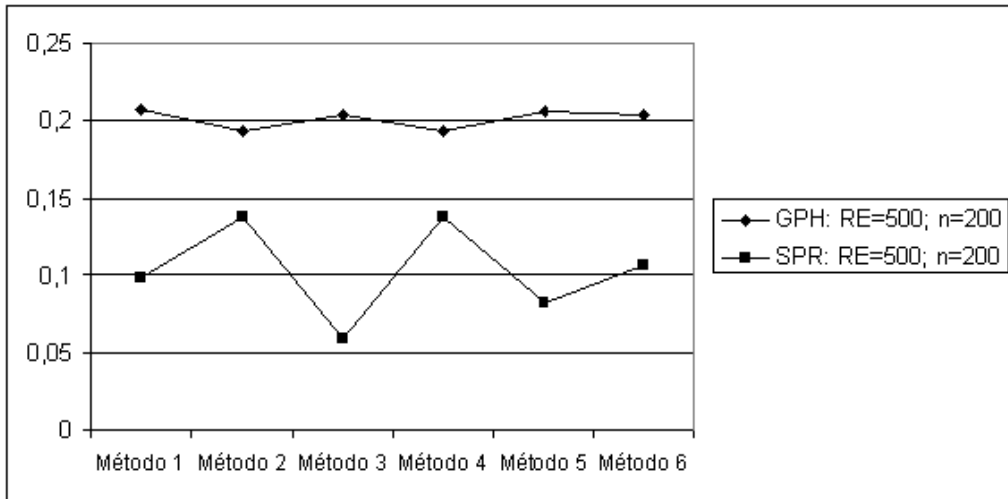


**Figura 5.5:** Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0)<sub>2</sub>,  $n = 200$  e  $\alpha = 0.5$ .

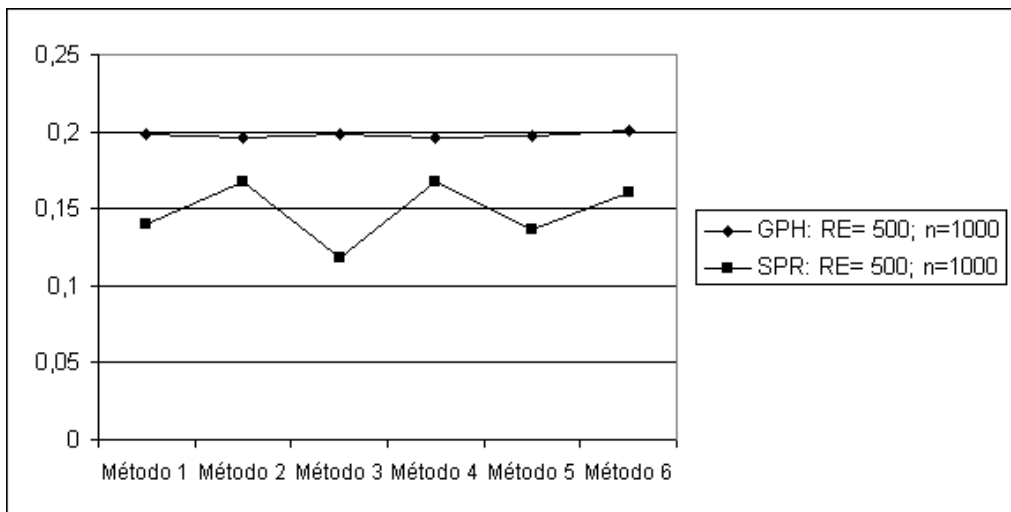


**Figura 5.6:** Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0)<sub>2</sub>,  $n = 1000$  e  $\alpha = 0.5$ .

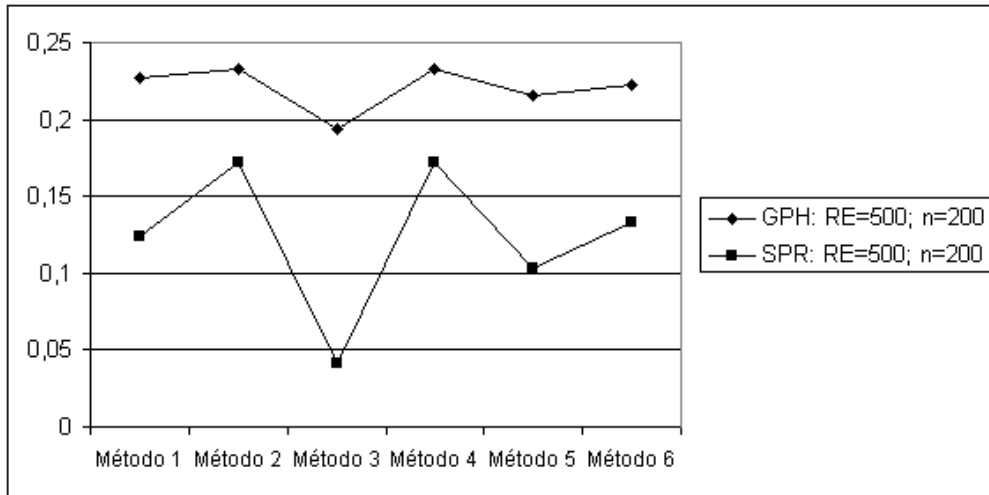




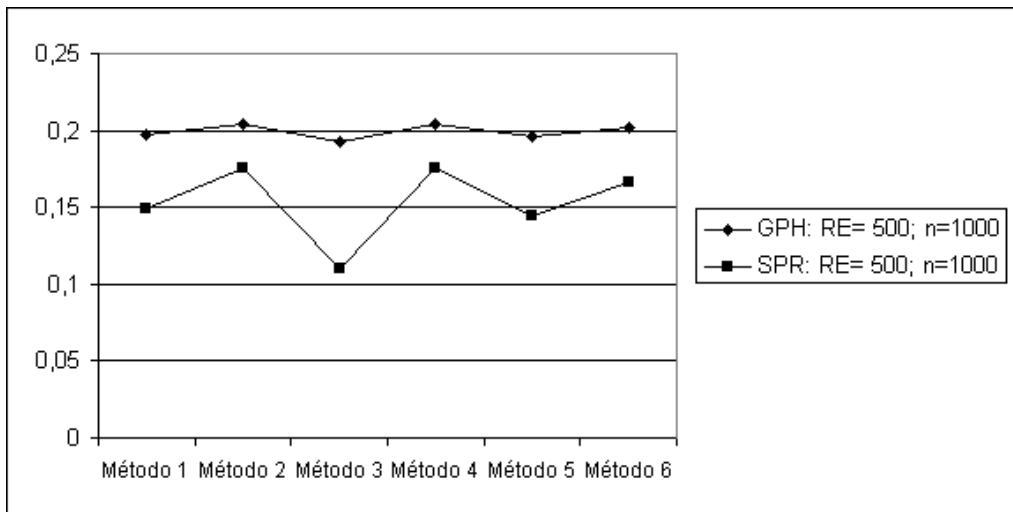
**Figura 5.7:** Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0)<sub>3</sub>,  $n = 200$  e  $\alpha = 0.5$ .



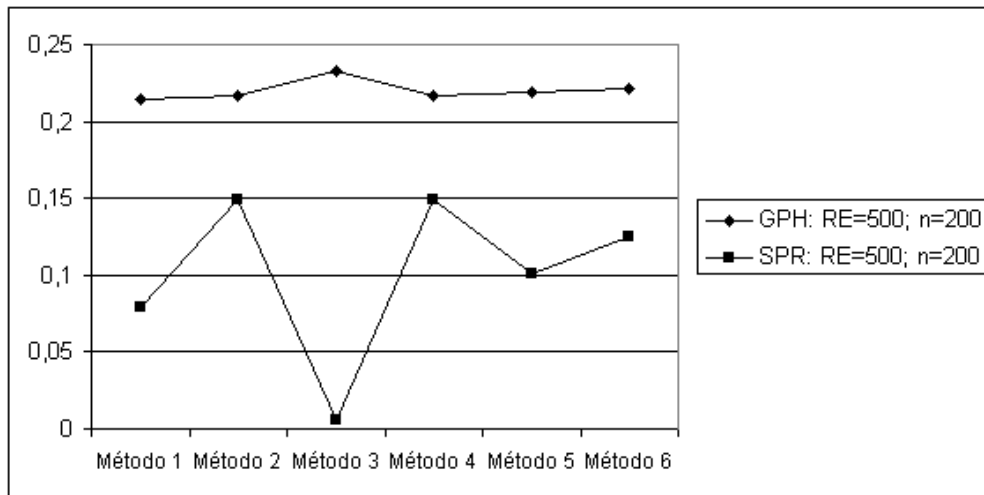
**Figura 5.8:** Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0)<sub>3</sub>,  $n = 1000$  e  $\alpha = 0.5$ .



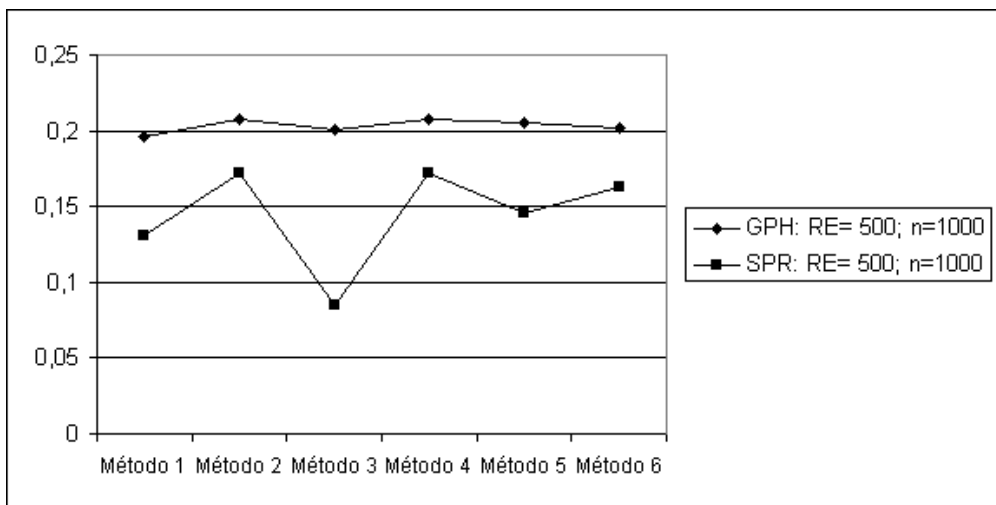
**Figura 5.9:** Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0)<sub>4</sub>,  $n = 200$  e  $\alpha = 0.5$ .



**Figura 5.10:** Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0)<sub>4</sub>,  $n = 1000$  e  $\alpha = 0.5$ .



**Figura 5.11:** Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0)<sub>5</sub>,  $n = 200$  e  $\alpha = 0.5$ .



**Figura 5.12:** Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0)<sub>5</sub>,  $n = 1000$  e  $\alpha = 0.5$ .

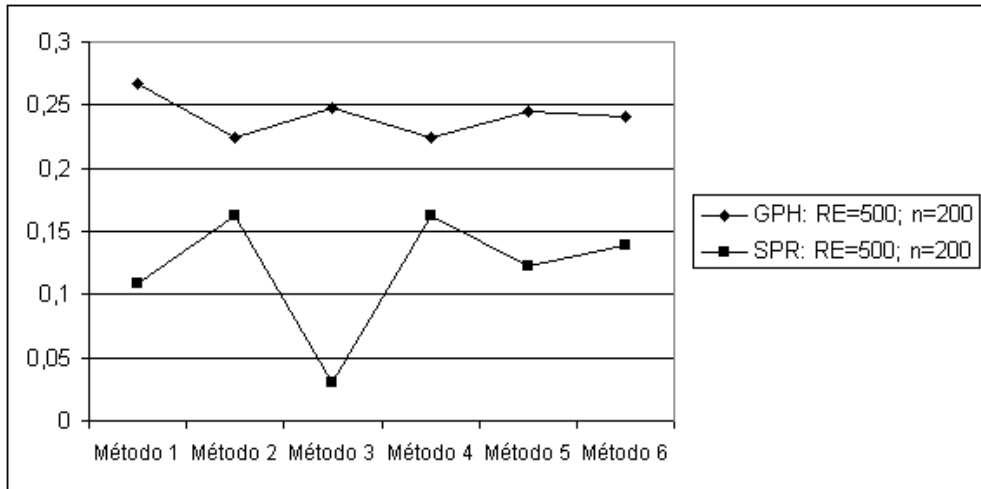


Figura 5.13: Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0)<sub>6</sub>, n = 200 e  $\alpha = 0.5$ .

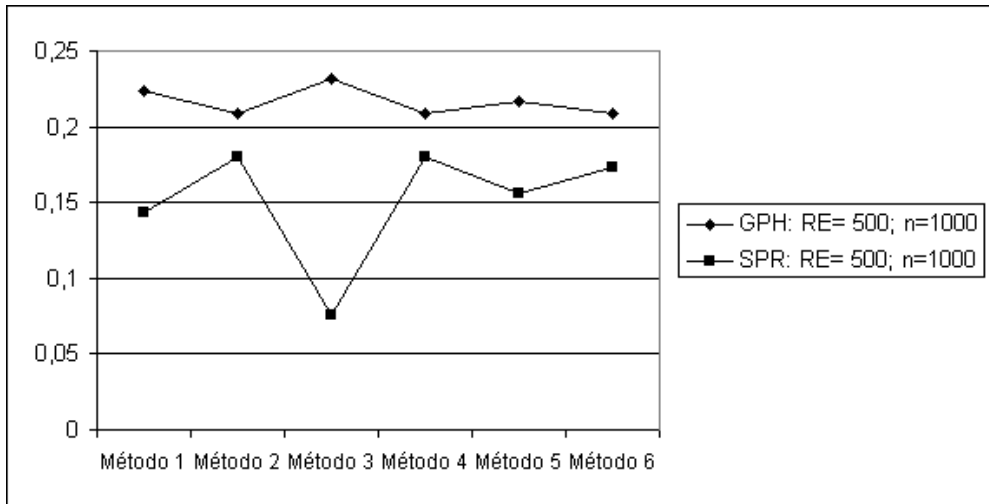
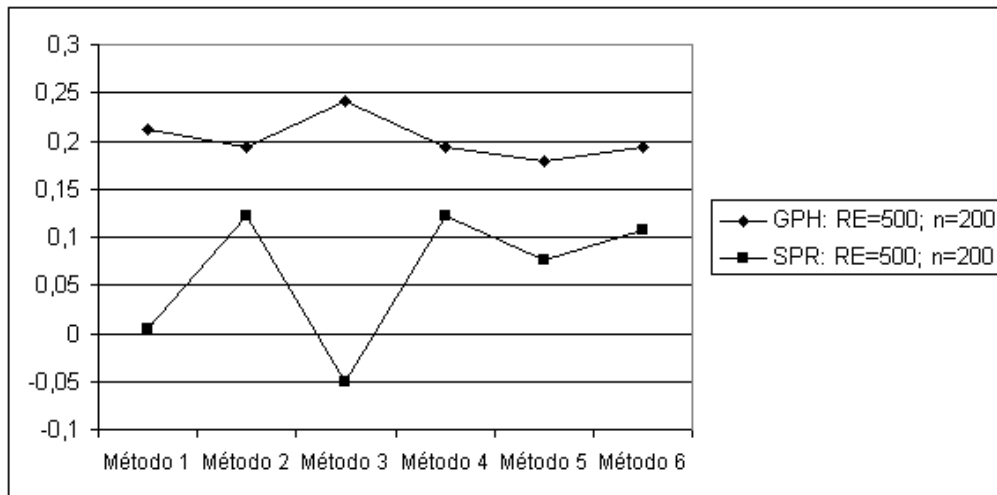
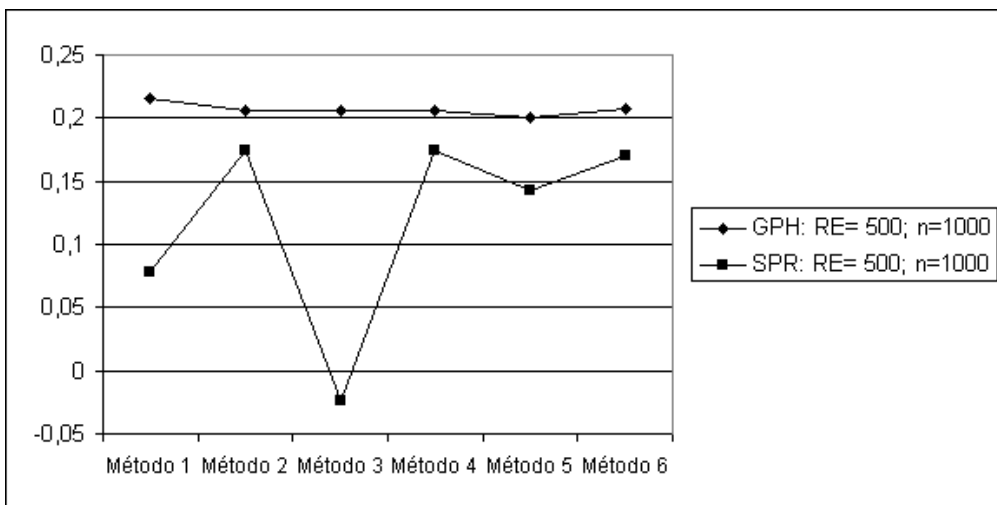


Figura 5.14: Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0)<sub>6</sub>, n = 1000 e  $\alpha = 0.5$ .



**Figura 5.15:** Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0)<sub>12</sub>,  $n = 200$  e  $\alpha = 0.5$ .

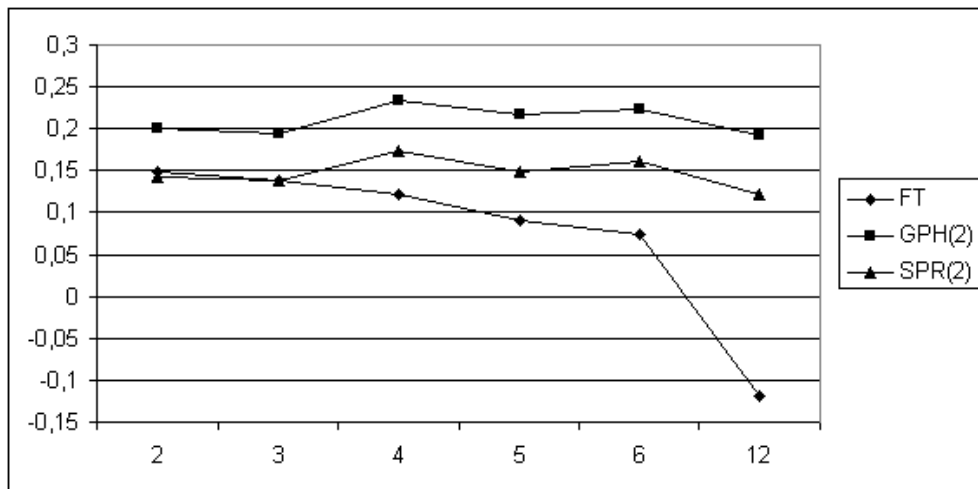


**Figura 5.16:** Estimação para SARFIMA(0, 0.2, 0)<sub>12</sub>,  $n = 1000$  e  $\alpha = 0.5$ .

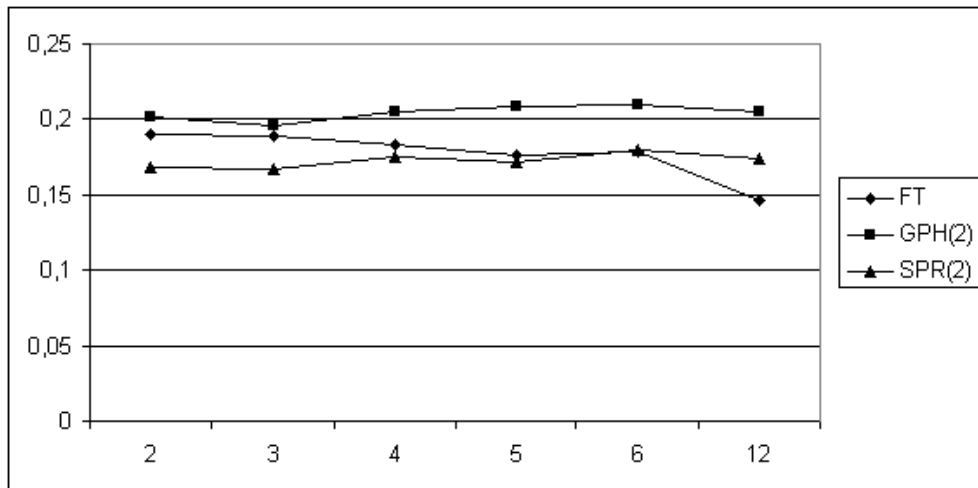
As Figuras 5.17 a 5.20 apresentam os gráficos dos estimadores *GPH*, *SPR* e *FT* em relação a sazonalidade com  $\alpha \in \{0.5, 0.6\}$  e  $RE = 500$ . Para os dois primeiros estimadores utilizamos apenas o Método 2 por possuir o menor erro quadrático médio, quando comparado com os outros métodos. Na Figura 5.19 observamos que, para os estimadores *GPH* e *SPR*, quando  $s = 12$ , não há regressores suficientes para serem selecionados.

Podemos observar, claramente, que o estimador *GPH* possui a tendência a superestimar o valor teórico enquanto os estimadores *SPR* e *FT* possuem a tendência a subestimar o valor teórico. Também podemos observar que o estimador *SPR* possui melhor desempenho que o *FT* quando o tamanho amostral é  $n = 200$ . Quando o tamanho amostral é  $n = 1000$ , este comportamento se inverte, isto é, o estimador *FT* possui melhor desempenho que o *SPR*, somente permanece igual quando  $s = 12$ .

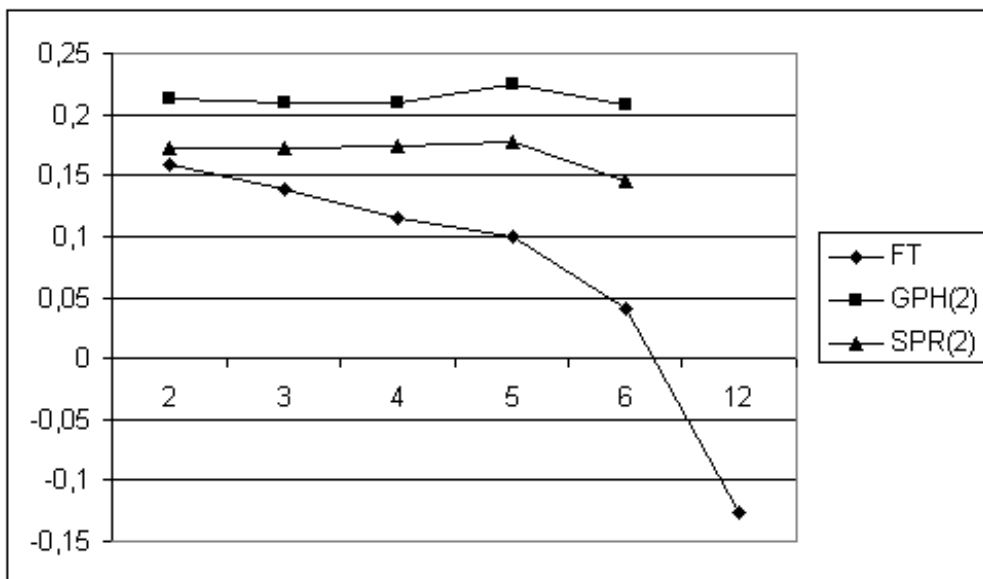
Comparando as Figuras 5.17 e 5.18 com as Figuras 5.19 e 5.20, onde  $\alpha = 0.6$ , observamos o mesmo comportamento dos estimadores visto para o caso  $\alpha = 0.5$ . Entretanto, ocorre uma sensível melhora nas estimativas dos estimadores *GPH* e *SPR* quando  $\alpha$  aumenta.



**Figura 5.17:** Estimadores versus Sazonalidade,  $n=200$  e  $\alpha = 0.5$ .



**Figura 5.18:** Estimadores versus Sazonalidade,  $n=1000$  e  $\alpha = 0.5$ .



**Figura 5.19:** Estimadores versus Sazonalidade,  $n=200$  e  $\alpha = 0.6$ .

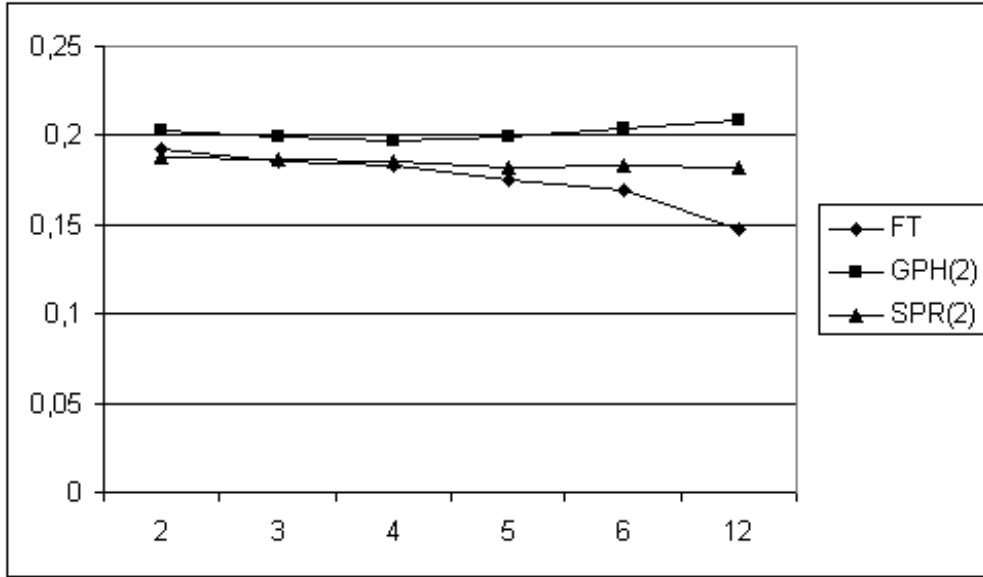


Figura 5.20: Estimadores versus Sazonalidade,  $n=1000$  e  $\alpha = 0.6$ .

## 5.2 PREVISÃO

Após estimarmos o parâmetro  $D$  de diferenciação fracionária sazonal, o passo seguinte é fazer a previsão  $h$ -passos à frente. A previsão  $h$ -passos à frente é obtida truncando-se a expressão da previsão de erro quadrático médio mínimo, dada pelo Teorema 4.3, item (i), isto é,

$$\hat{X}_n(h) = - \sum_{j=1}^k \hat{\pi}_j \hat{X}_n(h - sj), \quad (5.1)$$

onde  $k = \lfloor \frac{n+h-1}{s} \rfloor$ , e

$$\hat{\pi}_j = \frac{\Gamma(j - \hat{D})}{\Gamma(j + 1)\Gamma(-\hat{D})},$$

obtido quando  $D$  é substituído pelo seu valor estimado através de algum dos métodos de estimação propostos na Seção 4.2. Na expressão (5.1), quando  $\ell = h + s(1 - j) \leq 0$ , temos que  $\hat{X}_n(\ell) = X_{n+\ell}$ .

A seguir, apresentamos, explicitamente, alguns previsores  $h$ -passos à frente para  $s \in \mathbb{N} - \{0\}$ . Observe os valores de  $\hat{X}_n(h)$ , dado pela expressão (5.1), quando  $h = 1, 2, s, s + 1, 2s, 2s + 1$ .



a)  $\widehat{X}_n(1) = -\widehat{\pi}_1 X_{n+1-s} - \widehat{\pi}_2 X_{n+1-2s} - \widehat{\pi}_3 X_{n+1-3s} - \cdots - \widehat{\pi}_k X_{n+1-ks},$

com  $k = \lfloor \frac{n}{s} \rfloor;$

b)  $\widehat{X}_n(2) = -\widehat{\pi}_1 X_{n+2-s} - \widehat{\pi}_2 X_{n+2-2s} - \widehat{\pi}_3 X_{n+2-3s} - \cdots - \widehat{\pi}_k X_{n+2-ks},$

com  $k = \lfloor \frac{n+1}{s} \rfloor;$

c)  $\widehat{X}_n(s) = -\widehat{\pi}_1 X_n - \widehat{\pi}_2 X_{n-s} - \widehat{\pi}_3 X_{n-2s} - \cdots - \widehat{\pi}_k X_{n+s(1-k)},$

com  $k = \lfloor \frac{n+s-1}{s} \rfloor,$

d)  $\widehat{X}_n(s+1) = -\widehat{\pi}_1 \widehat{X}_n(1) - \widehat{\pi}_2 X_{n+1-s} - \widehat{\pi}_3 X_{n+1-2s} - \cdots - \widehat{\pi}_k X_{n+1+s(1-k)},$

com  $k = \lfloor \frac{n+s}{s} \rfloor,$

e)  $\widehat{X}_n(2s) = -\widehat{\pi}_1 \widehat{X}_n(s) - \widehat{\pi}_2 X_n - \widehat{\pi}_3 X_{n-s} - \cdots - \widehat{\pi}_k X_{n+s(2-k)},$

com  $k = \lfloor \frac{n+2s-1}{s} \rfloor,$

f)  $\widehat{X}_n(2s+1) = -\widehat{\pi}_1 \widehat{X}_n(s+1) - \widehat{\pi}_2 \widehat{X}_n(1) - \widehat{\pi}_3 X_{n+1-s} - \cdots - \widehat{\pi}_k X_{n+1+s(2-k)},$

com  $k = \lfloor \frac{n+2s}{s} \rfloor.$

A rotina de previsão ainda inclui o cálculo do erro de previsão, no passo  $h$ , isto é,

$$e_n(h) = X_{n+h} - \widehat{X}_n(h), \quad \text{para } h \geq 1.$$

A seguir, encontramos as variâncias teórica e amostral do erro cujas expressões estão no item (iii) do Teorema 4.3. Como próximo passo, calculamos o vício e o pervício no passo  $h$  cometidos ao estimar a variância teórica  $h$ -passos à frente, os quais estão explicitados no item (iv) do Teorema 4.3. Por último, para obtermos o erro quadrático médio amostral no passo  $h$ , utilizamos o item (v) do Teorema 4.3.

Os cálculos acima foram efetuados para cada uma das RE séries geradas e em seguida calculamos a média aritmética dos RE valores para cada um dos  $h$ -passos, isto é,

- $e_n(h) = \frac{1}{RE} \sum_{j=1}^{RE} e_n^j(h);$
- $\widehat{Var}(e_n(h)) = \frac{1}{RE} \sum_{j=1}^{RE} \widehat{Var}(e_n^j(h));$

- $vício_n(h) = \frac{1}{RE} \sum_{j=1}^{RE} vício_n^j(h);$
- $pervício_n(h) = \frac{1}{RE} \sum_{j=1}^{RE} pervício_n^j(h);$
- $eqmp_n = \frac{1}{RE} \sum_{j=1}^{RE} eqmp_n(j).$

**Observação 5.3:**

- 1) Neste trabalho, estamos interessados em previsão a 5-passos à frente.
- 2) Para previsão, utilizamos os estimadores baseados na função periodograma, na função periodograma suavizado e na função de máxima verossimilhança aproximada, conforme a Seção 4.2. Para os dois primeiros, utilizamos os **Métodos 1 e 3** (ver Seção 5.1) os quais serão denotados, respectivamente, por  $GPH(1)$ ,  $GPH(3)$ ,  $SPR(1)$  e  $SPR(3)$ .

A seguir, apresentamos os resultados das simulações para previsão utilizando os processos SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_s$ .

Apesar de termos feito o estudo de simulação de Monte Carlo, em previsão, para os casos em que  $D \in \{0.2, 0.4\}$ ,  $n \in \{200, 1000\}$ ,  $RE \in \{500, 1000\}$  e  $s \in \{2, 3, 4, 5, 6, 12\}$ , considerando todos os seis diferentes procedimentos para a escolha do tamanho dos regressores  $r$  e ainda considerando  $g(n) = n^\alpha$ , com  $\alpha \in \{0.5, 0.6, 0.7, 0.8\}$ , por questão de espaço, estamos incluindo apenas as Tabelas 5.2.1 até 5.2.6 no corpo do texto. Estas tabelas se referem apenas ao caso em que  $D = 0.2$ ,  $n = 1000$ ,  $RE = 500$ ,  $\alpha = 0.5$  para todos os valores da sazonalidade  $s$ .

Analisando as Tabelas 5.2.1 a 5.2.6, podemos concluir que o erro de previsão amostral é próximo de zero qualquer que seja o passo de previsão e para todos os estimadores considerados.

Podemos observar que o estimador  $GPH(3)$  possui o maior erro quadrático médio de previsão e ainda, este erro aumenta conforme a sazonalidade cresce. Isto já era esperado pois, na estimação do parâmetro de diferenciação sazonal  $D$ , seu desempenho foi considerado insatisfatório. Os outros estimadores possuem erro quadrático médio de previsão relativamente pequeno mesmo quando  $s$  é grande. O estimador  $FT$  foi o que obteve melhor desempenho comparado com o erro quadrático médio de previsão de todos os estimadores para todos os valores da sazonalidade.

Para as sazonalidades  $s = 2, 3$  e  $4$ , a variância amostral para cada passo cresce conforme o valor do passo à frente que desejamos prever. Para  $s = 2$ , os estimadores  $SPR(1)$ ,  $SPR(2)$  e  $FT$  obtiveram os melhores resultados em estimar a variância teórica e, conseqüentemente, apresentaram menores vício e pervício.

**Table 5.2.1:** Previsão para SARFIMA(0, 0.2, 0)<sub>2</sub>,  $n = 1000$ , RE = 500 e  $\alpha = 0.5$ .

D = 0.2					
$h = 1$ $Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	0.0475	1.0000	0.0000	0.0000	0.8538
<i>GPH</i> (3)	0.0583	1.0000	0.0000	0.0000	1.1133
<i>SPR</i> (1)	0.0396	1.0000	0.0000	0.0000	0.8419
<i>SPR</i> (3)	0.0313	1.0000	0.0000	0.0000	0.9250
<i>FT</i>	0.0394	1.0000	0.0000	0.0000	0.8278
$h = 2$ $Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	0.0053	1.0000	0.0000	0.0000	0.9127
<i>GPH</i> (3)	0.0196	1.0000	0.0000	0.0000	1.1716
<i>SPR</i> (1)	0.0082	1.0000	0.0000	0.0000	0.8974
<i>SPR</i> (3)	0.0051	1.0000	0.0000	0.0000	0.9643
<i>FT</i>	0.0049	1.0000	0.0000	0.0000	0.8773
$h = 3$ $Var(e_n(h)) = 1.0400$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	0.0173	1.0593	0.0193	4.0381	0.9329
<i>GPH</i> (3)	0.0200	1.0784	0.0384	5.9041	1.1337
<i>SPR</i> (1)	0.0120	1.0402	0.0002	2.8080	0.9208
<i>SPR</i> (3)	0.0085	1.0446	0.0046	3.5085	0.9779
<i>FT</i>	0.0106	1.0377	-0.0023	1.1478	0.9026
$h = 4$ $Var(e_n(h)) = 1.0400$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	-0.0241	1.0593	0.0193	4.0381	0.9503
<i>GPH</i> (3)	-0.0202	1.0784	0.0384	5.9041	1.1088
<i>SPR</i> (1)	-0.0219	1.0402	0.0002	2.8080	0.9385
<i>SPR</i> (3)	-0.0232	1.0446	0.0046	3.5085	0.9809
<i>FT</i>	-0.0241	1.0377	-0.0023	1.1478	0.9239
$h = 5$ $Var(e_n(h)) = 1.0544$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	-0.0149	1.0739	0.0195	4.2165	0.9597
<i>GPH</i> (3)	-0.0135	1.0931	0.0387	6.1207	1.0908
<i>SPR</i> (1)	-0.0190	1.0539	-0.0005	2.9620	0.9483
<i>SPR</i> (3)	-0.0208	1.0578	0.0034	3.7080	0.9819
<i>FT</i>	-0.0209	1.0519	-0.0025	1.2030	0.9371

**Table 5.2.2:** Previsão para SARFIMA(0, 0.2, 0)<sub>3</sub>,  $n = 1000$ , RE = 500 e  $\alpha = 0.5$ .

D = 0.2					
$h = 1$ $Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	-0.0309	1.0000	0.0000	0.0000	0.9917
<i>GPH</i> (3)	-0.0471	1.0000	0.0000	0.0000	2.7644
<i>SPR</i> (1)	-0.0375	1.0000	0.0000	0.0000	0.9725
<i>SPR</i> (3)	-0.0384	1.0000	0.0000	0.0000	1.1219
<i>FT</i>	-0.0337	1.0000	0.0000	0.0000	0.9076
$h = 2$ $Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	-0.0328	1.0000	0.0000	0.0000	0.9917
<i>GPH</i> (3)	-0.0859	1.0000	0.0000	0.0000	2.9005
<i>SPR</i> (1)	-0.0386	1.0000	0.0000	0.0000	0.9722
<i>SPR</i> (3)	-0.0427	1.0000	0.0000	0.0000	1.1164
<i>FT</i>	-0.0336	1.0000	0.0000	0.0000	0.9076
$h = 3$ $Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	-0.0100	1.0000	0.0000	0.0000	0.9666
<i>GPH</i> (3)	-0.0394	1.0000	0.0000	0.0000	2.8475
<i>SPR</i> (1)	-0.0101	1.0000	0.0000	0.0000	0.9435
<i>SPR</i> (3)	-0.0122	1.0000	0.0000	0.0000	1.0939
<i>FT</i>	-0.0148	1.0000	0.0000	0.0000	0.8794
$h = 4$ $Var(e_n(h)) = 1.0400$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	-0.0210	1.0824	0.0424	6.3543	0.9506
<i>GPH</i> (3)	-0.0332	1.1302	0.0902	10.8110	2.3949
<i>SPR</i> (1)	-0.0224	1.0455	0.0055	3.7513	0.9303
<i>SPR</i> (3)	-0.0243	1.0610	0.0210	4.9946	1.0590
<i>FT</i>	-0.0215	1.0377	-0.0023	1.3697	0.8746
$h = 5$ $Var(e_n(h)) = 1.0400$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	-0.0222	1.0824	0.0424	6.3543	0.9412
<i>GPH</i> (3)	-0.0389	1.1302	0.0902	10.8110	2.1257
<i>SPR</i> (1)	-0.0232	1.0455	0.0055	3.7513	0.9225
<i>SPR</i> (3)	-0.0268	1.0610	0.0210	4.9946	1.0378
<i>FT</i>	-0.0214	1.0377	-0.0023	1.3697	0.8718

**Table 5.2.3:** Previsão para SARFIMA(0, 0.2, 0)<sub>4</sub>,  $n = 1000$ , RE = 500 e  $\alpha = 0.5$ .

D = 0.2					
$h = 1 \quad Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	0.0642	1.0000	0.0000	0.0000	1.0328
<i>GPH</i> (3)	0.1581	1.0000	0.0000	0.0000	7.6755
<i>SPR</i> (1)	0.0498	1.0000	0.0000	0.0000	0.9694
<i>SPR</i> (3)	0.0737	1.0000	0.0000	0.0000	1.1896
<i>FT</i>	0.0439	1.0000	0.0000	0.0000	0.9115
$h = 2 \quad Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	0.0643	1.0000	0.0000	0.0000	1.0332
<i>GPH</i> (3)	0.1644	1.0000	0.0000	0.0000	7.4036
<i>SPR</i> (1)	0.0505	1.0000	0.0000	0.0000	0.9700
<i>SPR</i> (3)	0.0766	1.0000	0.0000	0.0000	1.1956
<i>FT</i>	0.0440	1.0000	0.0000	0.0000	0.9116
$h = 3 \quad Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	0.0616	1.0000	0.0000	0.0000	1.0299
<i>GPH</i> (3)	0.1648	1.0000	0.0000	0.0000	7.6046
<i>SPR</i> (1)	0.0473	1.0000	0.0000	0.0000	0.9687
<i>SPR</i> (3)	0.0747	1.0000	0.0000	0.0000	1.2120
<i>FT</i>	0.0439	1.0000	0.0000	0.0000	0.9116
$h = 4 \quad Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	-0.0358	1.0000	0.0000	0.0000	1.0448
<i>GPH</i> (3)	0.0677	1.0000	0.0000	0.0000	7.6920
<i>SPR</i> (1)	-0.0417	1.0000	0.0000	0.0000	0.9890
<i>SPR</i> (3)	-0.0161	1.0000	0.0000	0.0000	1.2486
<i>FT</i>	-0.0517	1.0000	0.0000	0.0000	0.9347
$h = 5 \quad Var(e_n(h)) = 1.0400$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	0.0231	1.0838	0.0438	6.5714	0.8538
<i>GPH</i> (3)	0.0372	1.1350	0.0950	11.2331	6.2520
<i>SPR</i> (1)	0.0139	1.0483	0.0083	3.8296	0.8017
<i>SPR</i> (3)	0.0250	1.0594	0.0194	4.8155	1.0180
<i>FT</i>	0.0084	1.0366	-0.0034	1.6126	0.7560

**Table 5.2.4:** Previsão para SARFIMA(0, 0.2, 0)<sub>5</sub>,  $n = 1000$ , RE = 500 e  $\alpha = 0.5$ .

D = 0.2					
$h = 1$ $Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	-0.0176	1.0000	0.0000	0.0000	1.2110
<i>GPH</i> (3)	0.2812	1.0000	0.0000	0.0000	30.8500
<i>SPR</i> (1)	-0.0231	1.0000	0.0000	0.0000	1.0352
<i>SPR</i> (3)	0.0130	1.0000	0.0000	0.0000	1.3286
<i>FT</i>	-0.0206	1.0000	0.0000	0.0000	0.9297
$h = 2$ $Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	-0.0095	1.0000	0.0000	0.0000	1.2621
<i>GPH</i> (3)	0.2888	1.0000	0.0000	0.0000	30.6270
<i>SPR</i> (1)	-0.0224	1.0000	0.0000	0.0000	1.0332
<i>SPR</i> (3)	0.0121	1.0000	0.0000	0.0000	1.3171
<i>FT</i>	-0.0203	1.0000	0.0000	0.0000	0.9296
$h = 3$ $Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	-0.0143	1.0000	0.0000	0.0000	1.2575
<i>GPH</i> (3)	0.2686	1.0000	0.0000	0.0000	30.3211
<i>SPR</i> (1)	-0.0219	1.0000	0.0000	0.0000	1.0333
<i>SPR</i> (3)	0.0137	1.0000	0.0000	0.0000	1.3245
<i>FT</i>	-0.0206	1.0000	0.0000	0.0000	0.9295
$h = 4$ $Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	-0.0115	1.0000	0.0000	0.0000	1.2632
<i>GPH</i> (3)	0.3225	1.0000	0.0000	0.0000	32.4848
<i>SPR</i> (1)	-0.0219	1.0000	0.0000	0.0000	1.0325
<i>SPR</i> (3)	0.0174	1.0000	0.0000	0.0000	1.3210
<i>FT</i>	-0.0205	1.0000	0.0000	0.0000	0.9295
$h = 5$ $Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	-0.0357	1.0000	0.0000	0.0000	1.2300
<i>GPH</i> (3)	0.2546	1.0000	0.0000	0.0000	31.5189
<i>SPR</i> (1)	-0.0365	1.0000	0.0000	0.0000	1.0096
<i>SPR</i> (3)	-0.0086	1.0000	0.0000	0.0000	1.3051
<i>FT</i>	-0.0337	1.0000	0.0000	0.0000	0.9104

**Table 5.2.5:** Previsão para SARFIMA(0, 0.2, 0)<sub>6</sub>,  $n = 1000$ , RE = 500 e  $\alpha = 0.5$ .

D = 0.2					
$h = 1$ $Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	0.0178	1.0000	0.0000	0.0000	0.4271
<i>GPH</i> (3)	0.2571	1.0000	0.0000	0.0000	63.7161
<i>SPR</i> (1)	0.0071	1.0000	0.0000	0.0000	0.1937
<i>SPR</i> (3)	0.0833	1.0000	0.0000	0.0000	0.5094
<i>FT</i>	-0.0024	1.0000	0.0000	0.0000	0.0752
$h = 2$ $Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	0.0193	1.0000	0.0000	0.0000	0.4225
<i>GPH</i> (3)	0.2398	1.0000	0.0000	0.0000	72.9735
<i>SPR</i> (1)	0.0068	1.0000	0.0000	0.0000	0.1923
<i>SPR</i> (3)	0.0851	1.0000	0.0000	0.0000	0.5240
<i>FT</i>	-0.0019	1.0000	0.0000	0.0000	0.0755
$h = 3$ $Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	0.0208	1.0000	0.0000	0.0000	0.4239
<i>GPH</i> (3)	0.1723	1.0000	0.0000	0.0000	79.9468
<i>SPR</i> (1)	0.0066	1.0000	0.0000	0.0000	0.1913
<i>SPR</i> (3)	0.0837	1.0000	0.0000	0.0000	0.5358
<i>FT</i>	-0.0018	1.0000	0.0000	0.0000	0.0756
$h = 4$ $Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	0.0188	1.0000	0.0000	0.0000	0.4189
<i>GPH</i> (3)	0.1483	1.0000	0.0000	0.0000	87.9142
<i>SPR</i> (1)	0.0057	1.0000	0.0000	0.0000	0.1893
<i>SPR</i> (3)	0.0798	1.0000	0.0000	0.0000	0.5459
<i>FT</i>	-0.0024	1.0000	0.0000	0.0000	0.0756
$h = 5$ $Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	0.0166	1.0000	0.0000	0.0000	0.4203
<i>GPH</i> (3)	0.2097	1.0000	0.0000	0.0000	83.9389
<i>SPR</i> (1)	0.0052	1.0000	0.0000	0.0000	0.1896
<i>SPR</i> (3)	0.0812	1.0000	0.0000	0.0000	0.5483
<i>FT</i>	-0.0015	1.0000	0.0000	0.0000	0.0756

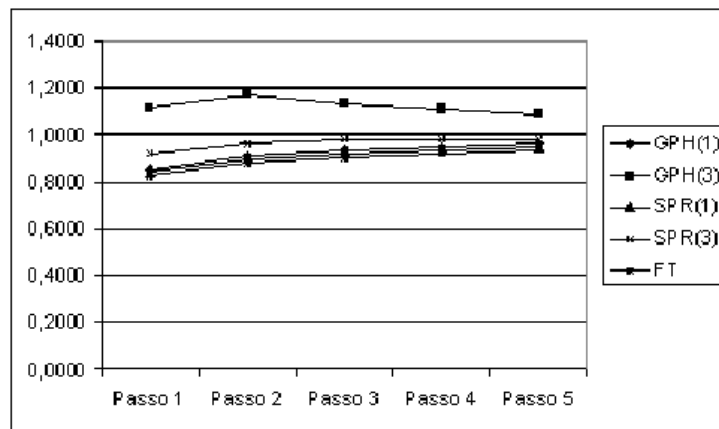
**Table 5.2.6:** Previsão para SARFIMA(0, 0.2, 0)<sub>12</sub>,  $n = 1000$ , RE = 500 e  $\alpha = 0.5$ .

D = 0.2					
$h = 1$ $Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	-0.0715	1.0000	0.0000	0.0000	2.9686
<i>GPH</i> (3)	0.6559	1.0000	0.0000	0.0000	1410.3520
<i>SPR</i> (1)	-0.0161	1.0000	0.0000	0.0000	0.4238
<i>SPR</i> (3)	0.0085	1.0000	0.0000	0.0000	0.9891
<i>FT</i>	-0.0102	1.0000	0.0000	0.0000	0.0742
$h = 2$ $Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	-0.0654	1.0000	0.0000	0.0000	2.8556
<i>GPH</i> (3)	0.9369	1.0000	0.0000	0.0000	1787.1420
<i>SPR</i> (1)	-0.0131	1.0000	0.0000	0.0000	0.4018
<i>SPR</i> (3)	0.0156	1.0000	0.0000	0.0000	0.9593
<i>FT</i>	-0.0121	1.0000	0.0000	0.0000	0.0743
$h = 3$ $Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	-0.0674	1.0000	0.0000	0.0000	2.7921
<i>GPH</i> (3)	1.3553	1.0000	0.0000	0.0000	2078.5250
<i>SPR</i> (1)	-0.0178	1.0000	0.0000	0.0000	0.4050
<i>SPR</i> (3)	0.0107	1.0000	0.0000	0.0000	1.0047
<i>FT</i>	-0.0116	1.0000	0.0000	0.0000	0.0744
$h = 4$ $Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	-0.0710	1.0000	0.0000	0.0000	2.8737
<i>GPH</i> (3)	0.7769	1.0000	0.0000	0.0000	1886.0190
<i>SPR</i> (1)	-0.0154	1.0000	0.0000	0.0000	0.4018
<i>SPR</i> (3)	0.0142	1.0000	0.0000	0.0000	0.9688
<i>FT</i>	-0.0114	1.0000	0.0000	0.0000	0.0744
$h = 5$ $Var(e_n(h)) = 1.0000$					
	$e_n(h)$	$\widehat{Var}(e_n(h))$	$vício_n(h)$	$pervício_n(h)$	$eqmp_n$
<i>GPH</i> (1)	-0.0556	1.0000	0.0000	0.0000	2.8547
<i>GPH</i> (3)	0.8055	1.0000	0.0000	0.0000	2055.6770
<i>SPR</i> (1)	-0.0051	1.0000	0.0000	0.0000	0.3959
<i>SPR</i> (3)	0.0134	1.0000	0.0000	0.0000	0.9593
<i>FT</i>	-0.0105	1.0000	0.0000	0.0000	0.0744

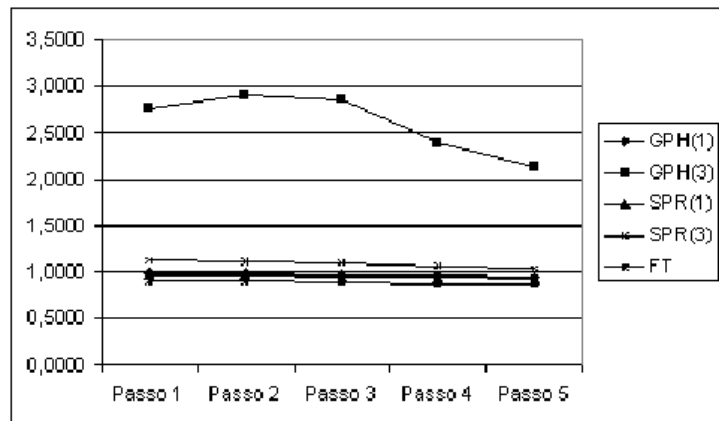


Ainda para  $s = 2$ , os estimadores  $SPR(1)$  e  $SPR(2)$  superestimam enquanto o estimador  $FT$  subestima a variância teórica. Para  $s = 3$  e 4, os procedimentos de estimação que obtiveram os melhores resultados ao estimar a variância teórica e, conseqüentemente, apresentando menor vício e pervício, foram o  $SPR(1)$  e o  $FT$ , sendo que o primeiro superestima e o segundo subestima a variância teórica.

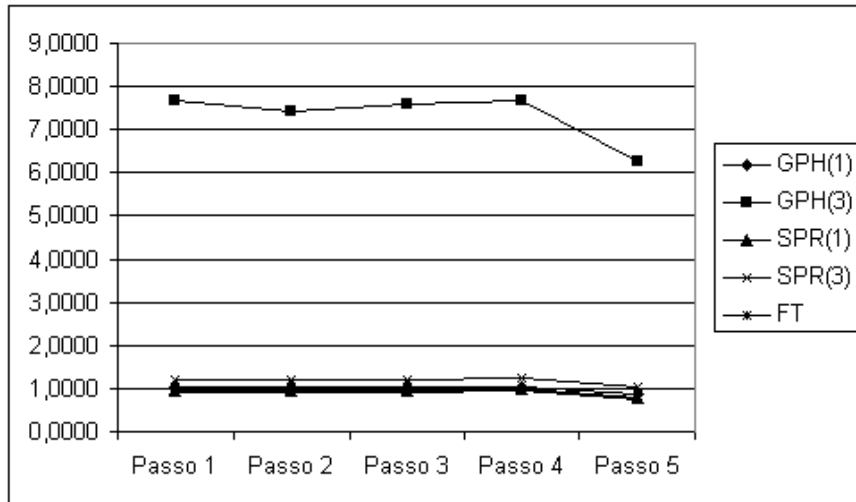
Analisando todos os resultados de previsão, concluímos que quando aumentamos o valor de  $\alpha$ , as previsões melhoram significativamente, isto é, o erro de previsão diminui, a variância amostral se aproxima da teórica de tal forma que, o vício e o pervício diminuem. O mesmo acontece com o erro de previsão e com o erro quadrático médio de previsão.



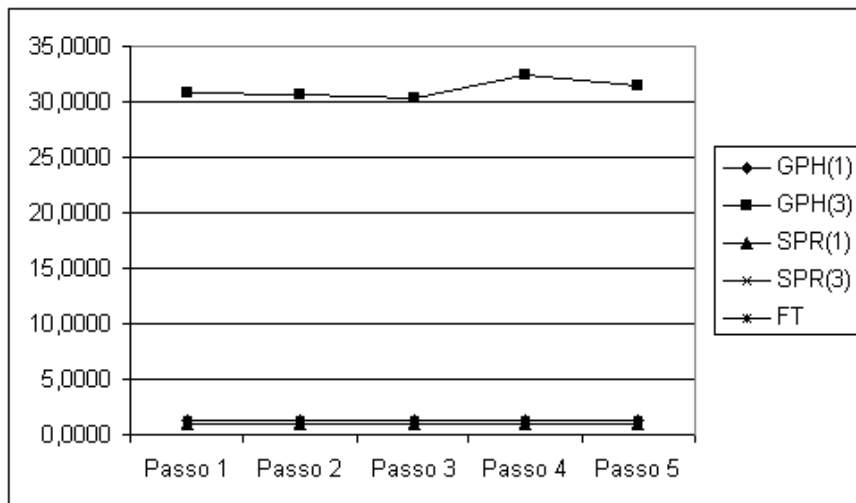
**Figura 5.21:**  $Eqmp_n$  para SARFIMA(0, 0.2, 0)<sub>2</sub>,  $n = 1000$ ,  $RE = 500$  e  $\alpha = 0.5$ .



**Figura 5.22:**  $Eqmp_n$  para SARFIMA(0, 0.2, 0)<sub>3</sub>,  $n = 1000$ ,  $RE = 500$  e  $\alpha = 0.5$ .



**Figura 5.23:**  $Eqmp_n$  para SARFIMA(0,0.2,0)<sub>4</sub>,  $n = 1000$ ,  $RE = 500$  e  $\alpha = 0.5$ .



**Figura 5.24:**  $Eqmp_n$  para SARFIMA(0,0.2,0)<sub>5</sub>,  $n = 1000$ ,  $RE = 500$  e  $\alpha = 0.5$ .

**Observação 5.4:** As Figuras 5.21 a 5.24 apresentam os gráficos do erro quadrático médio de previsão em cada passo para os estimadores  $GPH(1)$ ,  $GPH(3)$ ,  $SPR(1)$ ,  $SPR(3)$  e  $FT$ . Para os casos  $s = 6$  e  $12$ , não incluímos os gráficos pois o erro quadrático médio de previsão do estimador  $GPH(3)$  é muito grande em relação aos outros estimadores. Observe que, tendo em vista que a variância teórica do erro de previsão foi determinada ser 1.0, o erro quadrático médio de previsão fica também em torno de 1.0.

# Capítulo 6

## Conclusões e Propostas para Futuros Trabalhos

### 6.1 Conclusões

Analisando as estimativas do parâmetro de diferenciação sazonal  $D$ , para processos SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_s$  quando  $D \in (-0.5, 0.5)$  e quando  $s \in \{2, 3, 4, 5, 6, 12\}$ , concluímos que o erro quadrático médio dos estimadores  $GPH$ ,  $SPR$  e  $FT$  diminui quando o tamanho amostral aumenta. Para os dois primeiros, a diminuição do erro quadrático médio ocorre em todos os métodos considerados para a determinação do número de regressores  $r$ .

Entre os estimadores,  $SPR$  possui menor erro quadrático médio do que o estimador  $GPH$ , em relação a todos os métodos. Entretanto, o estimador  $FT$ , para sazonalidades pequenas ( $s = 2, 3, 4$ ) possui menor erro quadrático médio que o estimador  $SPR$ . No entanto, conforme a sazonalidade aumenta ( $s = 5, 6, 12$ ), o erro quadrático médio de  $FT$  aumenta, pois as estimativas ficam mais distantes do valor teórico esperado, aumentando o vício. Isto se deve ao fato de que, conforme a sazonalidade aumenta, o tamanho amostral deveria aumentar para que o estimador  $FT$  tivesse um desempenho satisfatório. Mostramos, através do Apêndice B, que o mínimo da função de máxima verossimilhança  $\mathcal{L}_n(\cdot)$  só é localizado quando o tamanho amostral é relativamente grande, à medida que a sazonalidade aumenta.

Na maioria dos casos analisados, o erro quadrático médio dos estimadores diminui com o aumento do número de replicações. Observamos também que o número de replicações igual a 500 já é suficientemente satisfatório. O aumento das replicações para 1000 não trouxe contribuição significativa.

Quanto ao desempenho dos estimadores, na maioria dos casos analisados, os melhores resultados foram obtidos com o estimador  $GPH$ . O estimador  $SPR$  torna-se competitivo com  $GPH$  nos Métodos 2, 4 e 6 quando o tamanho amostral é 1000, no caso  $\alpha = 0.5$ .

Quanto ao valor de  $\alpha$ , para os estimadores  $GPH$  e  $SPR$ , conforme au-

mentamos o valor de  $\alpha \in \{0.5, 0.6, 0.7, 0.8\}$  o erro quadrático médio destes estimadores diminui na maioria dos casos. O desempenho dos estimadores também melhorou com o aumento de  $\alpha$ . Podemos concluir que os melhores resultados foram obtidos para  $\alpha \in \{0.7, 0.8\}$ , conforme mostramos no Apêndice D. Esta conclusão também foi obtida por Lopes et al. (2003), para o caso  $s = 1$ , que sugerem  $\alpha \in \{0.6, 0.7, 0.8\}$  e por Porter-Hudak (1990), para o caso  $s = 12$ , que sugere  $\alpha \in (0.62, 0.75)$ .

Podemos observar que conforme a sazonalidade aumenta, o estimador *GPH* possui a tendência a superestimar o valor teórico, ao contrário dos estimadores *SPR* e *FT* que possuem a tendência a subestimar o valor teórico.

Entre os métodos analisados para os estimadores *GPH* e *SPR*, os que obtiveram melhores resultados, sob o ponto de vista de menor erro quadrático médio, foram os Métodos 2, 4 e 6. Estes métodos são semelhantes pois o Método 2 seleciona todos os regressores somente na primeira frequência sazonal, o Método 4 seleciona o número total de regressores em cada frequência sazonal e o Método 6 é similar ao Método 4 mas considerando um número fixo de regressores. O desempenho dos Métodos 3 e 5 não foi satisfatório comparado com os outros métodos. Nestes métodos o número total de regressores é dividido por  $s$  e são selecionados no início e no final de cada frequência sazonal.

Quanto a previsão 5-passos à frente, podemos concluir que o erro de previsão amostral é próximo de zero para qualquer que seja o passo de previsão e para todos os procedimentos de estimação considerados.

O estimador *GPH*(3) possui maior erro quadrático médio de previsão e ele aumenta conforme a sazonalidade cresce. Já o estimador *FT*, possui menor erro quadrático médio de previsão e se mantém constante conforme a sazonalidade cresce.

Os procedimentos de estimação que obtiveram melhores resultados ao estimar a variância teórica do erro de previsão e, conseqüentemente, apresentaram menores vício e pervício, para o caso  $s = 2$ , foram os estimadores *SPR*(1), *SPR*(3) e *FT*. Para o caso  $s = 3$  e 4 os melhores estimadores foram *SPR*(1) e *FT*. Para a maioria dos casos analisados, os estimadores sempre superestimaram a variância teórica.

Analisando os resultados de previsão em relação ao valor de  $\alpha$ , observamos que, quando  $\alpha$  cresce, os resultados melhoram significativamente, isto é, o erro de previsão diminui, a variância amostral do erro de previsão se aproxima da variância teórica e, conseqüentemente, o vício e o pervício diminuem. O erro quadrático médio de previsão, neste caso, também diminui.

O erro quadrático médio dos estimadores diminui quando o tamanho amostral aumenta. O estimador *SPR* possui menor erro quadrático médio do que o *GPH*. Para  $s = 2, 3$  e 4, o estimador *FT* possui menor erro quadrático médio do que o *SPR*; para  $s = 5, 6$  e 12, o estimador *SPR* possui menor erro quadrático médio do que o *FT*. Na maioria dos casos analisados, o

erro quadrático médio diminui com o aumento do número de replicações. O número de replicações igual a 500 já é suficientemente satisfatório. O aumento das replicações para 1000 não trouxe contribuição significativa para a melhora no desempenho dos estimadores. Quanto ao desempenho dos estimadores, na maioria dos casos analisados, os melhores resultados foram obtidos com o estimador *GPH*. O estimador *SPR* torna-se competitivo com *GPH* nos Métodos 2, 4 e 6 quando o tamanho amostral é 1000, no caso  $\alpha = 0.5$ . Quanto ao valor de  $\alpha$ , conforme  $\alpha$  aumenta, o erro quadrático médio dos estimadores *GPH* e *SPR* diminui. O desempenho destes estimadores melhora significativamente à medida que  $\alpha$  aumenta. Conforme  $s$  aumenta, o estimador *GPH* possui a tendência a superestimar o valor teórico, ao contrário dos estimadores *SPR* e *FT* que possuem a tendência a subestimar o valor teórico. Sob o ponto de vista de menor erro quadrático médio, os Métodos 2, 4 e 6 obtiveram melhores resultados. Os Métodos 3 e 5 não obtiveram resultados satisfatórios comparados com os outros métodos.

O erro de previsão é próximo de zero. O estimador *GPH*(3) possui maior erro quadrático médio de previsão e ele aumenta conforme a sazonalidade aumenta. O estimador *FT* possui menor erro quadrático médio de previsão. Os estimadores que obtiveram melhores resultados ao estimar a variância teórica do erro de previsão e, conseqüentemente, menor vício e pervício, para o caso  $s = 2$ , foram os estimadores *SPR*(1), *SPR*(3) e *FT*. Para o caso  $s = 3$  e 4 os melhores foram os estimadores *SPR*(1) e *FT*. Quando  $\alpha$  aumenta, os resultados de previsão melhoram significativamente.

## 6.2 Futuros Trabalhos

Neste trabalho estudamos os estimadores propostos por Geweke e Porter-Hudak (1983), Reisen (1994) e Fox e Taquq (1986) para o parâmetro de diferenciação  $D$  dos processos SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_s$  e também analisamos a previsão 5-passos à frente utilizando estes processos. Como futuros trabalhos, pretendemos

- estender os estudos dos processos SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_s$  para os processos SARFIMA ( $P$ ,  $D$ ,  $Q$ ) $_s$ , quando  $P$  e  $Q$  são diferentes de zero e, conseqüentemente, para os processos SARFIMA( $p$ ,  $d$ ,  $q$ )  $\times$  ( $P$ ,  $D$ ,  $Q$ ) $_s$ ;
- estudar outros estimadores para o parâmetro de diferenciação  $d$  e de diferenciação sazonal  $D$ ;
- aplicar os resultados obtidos neste trabalho, tanto em estimação como em previsão, a dados reais.

# REFERÊNCIAS

- Baillie, R.T. (1996). “Long memory processes and fractional integration in econometrics”. *Journal of Econometrics*, Vol. **73**, pp. 5-59.
- Beran, J. (1994). *Statistics for Long-Memory Processes*. New York: Chapman & Hall.
- Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure*. New York: John Wiley.
- Box, G.E.P., G.M. Jenkins e G.C. Reinsel (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. New Jersey: Prentice Hall.
- Brockwell, P.J. e R.A. Davis (1991). *Time Series: Theory and Methods*. New York: Springer-Verlag.
- Carlin, J.B., e A.P. Dempster (1989). “Sensitivity analysis of seasonal adjustments: Empirical case studies”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **84**(405), pp. 6-20.
- Carlin, J.B., e A.P. Dempster (1985). “On models and methods for Bayesian time series analysis”. *Journal of Econometrics*, Vol. **30**, pp. 67-90.
- Crato, N. e H.M. Taylor (1996). “Stationary persistent time series misspecified as nonstationary ARIMA”. *Statistische Hefte/Statistical Papers*, Vol. **37**, pp. 215-223.
- Draper, N. e H. Smith (1981). *Applied Regression Analysis*. New York: John Wiley.
- Durrett, R. (1996). *Probability: Theory and Examples*. Belmont: Duxbury Press.
- Fox, R. e M.S. Taqqu (1986). “Large-sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary Gaussian time series”. *The Annals of Statistics*, Vol. **14**, pp. 517-532.

- Geweke, J. e S. Porter-Hudak (1983). “The Estimation and Application of Long Memory Time Series Model”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 4(4), pp. 221-238.
- Gradshteyn, I.S. e I.M. Ryzhik (1965). “Table of Integrals, Series e Products”. New York: Academic Press.
- Granger, C.W.J. e R. Joyeux (1980). “An Introduction to Long Memory Time Series Models and Fractional Differencing”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 1(1), pp. 15-29.
- Hassler, U. (1994). “(Mis)Specification of Long Memory in Seasonal Time Series”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 15(1), pp. 19-30.
- Hosking, J.R.M. (1981). “Fractional Differencing”. *Biometrika*, Vol. 68(1), pp. 165-176.
- Hosking, J. R. M. (1984). “Modelling Persistence in Hydrological Time Series Using Fractional Differencing”. *Water Resources Research*, Vol. 20(12), pp. 1898-1908.
- Hurst, H.E. (1951). “Long-term storage capacity of reservoirs”. *Transactions of American Society in Civil Engineers*, Vol. 116, pp. 165-167.
- Lopes, S.R.C., B.P. Olbermann e V.A. Reisen (2003). “A Comparison of Estimation in Non-Stationary ARFIMA Processes”. *Accepted in Journal of Statistical Computation and Simulation*.
- Mandelbrot, B.B. (1965). “Une classe de processus stochastiques homothétiques à soi; application a la loi climatologique de E. Hurst”. *Comptes Rendus Acaden. Sci. Paris*, Vol. 260, pp. 3274-3277.
- Mandelbrot, B.B. e J.W. van Ness (1968). “Fractional Brownian motions, fractional noises and applications”. *SIAM Review*, Vol. 10(4), pp. 422-437.
- Mandelbrot, B.B. e J.R. Wallis (1969). “Computer experiments with fractional Gaussian noises. Part One, Averages and variances”. *Water Resources Research*, Vol. 5(1), pp. 228-241.
- Montanari, A., R. Rosso e M.S. Taqqu (2000). “A seasonal fractional ARIMA model applied to the Nile River monthly flows at Aswan”. *Water Resources Research*, Vol. 36(5), pp. 1249-1259.
- Olbermann, B.P. (2002). “Estimação em Classes de Processos Estocásticos com Decaimento Hiperbólico da Função de Autocorrelação”. Tese de Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS, Porto Alegre. O endereço URL é: <http://athena.mat.ufrgs.br/~slopes>.

- Ooms, M (1995). “Flexible seasonal long memory and economic time series”. *Preprint of the Econometric Institute*, Erasmus University, Rotterdam.
- Peiris, M.S. e N. Singh (1996). “Predictors for Seasonal and Nonseasonal Fractionally Integrated Arima Models”. *Biometrika* , Vol. **38**(6), pp. 741-752.
- Porter-Hudak, S. (1990). “An Application of the Seasonal Fractionally Differenced Model to the Monetary Aggregates”. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **85**(410), pp. 338-344.
- Priestley, M.B. (1981). *Spectral Analysis in Time Series*. New York: Academic Press.
- Ray, B.K. (1993). “Long-Range forecasting of IBM product revenues using a seasonal fractionally differenced ARMA model”. *International Journal of Forecasting*, Vol. **9**, pp. 255-269.
- Reisen, V.A. (1994). “Estimation of the Fractional Difference Parameter in the ARIMA(p,d,q) model using the Smoothed Periodogram”. *Journal of Time Series Analysis*, Vol. **15**(3), pp. 335-350.
- Reisen, V.A. e S.R.C. Lopes (1999). “Some Simulations and Applications of Forecasting Long-Memory Time Series Models”. *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. **80**(2), pp. 269-287.
- Robinson, P.M. (1995). “Log-Periodogram Regression of Time Series with Long Range Dependence”. *Annals of Statistics*, Vol. **23**(3), pp. 1048-1072.
- Sowell, F. (1992). “Maximum Likelihood estimation of estationary univariate fractionally integrated time series models”. *Journal of Econometrics*, Vol. **53**, pp. 165-188.
- Wei, W. (1990). *Time Series Analysis. Univariate and Multivariate Methods*. New York: Addison Wesley.
- Whittle, P. (1951). *Hypothesis Testing in Time Series Analysis*. New York: Hafner.



# APÊNDICE A

Considere os sistemas (2.5) e (2.6), para as suas quantidades teóricas, dados, respectivamente, por

$$\phi_X(k+1, k+1) = \frac{\rho_X(k+1) - \sum_{j=1}^k \phi_X(k, j)\rho_X(k+1-j)}{1 - \sum_{j=1}^k \phi_X(k, j)\rho_X(j)} \quad (\text{A.1})$$

e

$$\phi_X(k+1, j) = \phi_X(k, j) - \phi_X(k+1, k+1)\phi_X(k, k+1-j), \quad (\text{A.2})$$

onde

$$\rho_X(k) = \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(k-d+1)}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.3})$$

é a função de autocorrelação de ordem  $k$  de um processo ARFIMA(0,  $d$ , 0), com  $d \in (-0.5, 0.5)$ .

Neste apêndice, queremos mostrar que a função de autocorrelação parcial de um processo ARFIMA(0,  $d$ , 0), dada pelas equações a seguir (ver Teorema 3.2, item (v)), satisfaz os sistemas (A.1) e (A.2)

$$\phi_X(k+1, k+1) = \frac{d}{k+1-d}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N} - \{0\} \quad (\text{A.4})$$

e

$$\phi_X(k, j) = -\binom{k}{j} \frac{\Gamma(j-d)\Gamma(k-d-j+1)}{\Gamma(-d)\Gamma(k-d+1)}, \quad \text{para todo } j = 1, \dots, k-1. \quad (\text{A.5})$$

Inicialmente, vamos mostrar que vale o sistema (A.1).

Substituindo as equações (A.3) e (A.5) no numerador da equação (A.1) temos que

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(k+1+d)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1-d+1)} - \sum_{j=1}^k (-1) \binom{k}{j} \frac{\Gamma(j-d)\Gamma(k-d-j+1)}{\Gamma(-d)\Gamma(k-d+1)} \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(k+1-j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(k+1-j-d+1)} = \\
& = \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(k+1+d)}{\Gamma(d)\Gamma(k-d+2)} + \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(k-d+1)\Gamma(d)} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \frac{\Gamma(j-d)\Gamma(k-d-j+1)\Gamma(k+d-j+1)}{\Gamma(k-d-j+2)} \\
& = \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(k+d+1)}{\Gamma(d)\Gamma(k-d+2)} + \frac{(-d)}{\Gamma(d)\Gamma(k-d+1)} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \frac{\Gamma(j-d)\Gamma(k+d-j+1)}{(k-d-j+1)} \tag{A.6}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-d}{\Gamma(d)\Gamma(k-d+1)} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\Gamma(j-d)\Gamma(k+d-j+1)}{(k-d-j+1)}, \tag{A.7}$$

pois o termo  $j = 0$  do somatório na expressão (A.6) é dado por

$$\frac{(-d)}{\Gamma(d)\Gamma(k-d+1)} \frac{\Gamma(-d)\Gamma(k+d+1)}{(k-d+1)} = \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(k+d+1)}{\Gamma(d)\Gamma(k-d+2)},$$

que é exatamente a primeira parcela da soma na expressão (A.6).

Analogamente, substituindo as equações (A.3) e (A.5) no denominador da equação (A.1) temos que

$$\begin{aligned}
& 1 - \sum_{j=1}^k \left[ (-1) \binom{k}{j} \frac{\Gamma(j-d)\Gamma(k-d-j+1)}{\Gamma(-d)\Gamma(k-d+1)} \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j-d+1)} \right] = \\
& = 1 + \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(k-d+1)\Gamma(d)} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \frac{\Gamma(j-d)\Gamma(k-d-j+1)\Gamma(j+d)}{\Gamma(j-d+1)} \\
& = 1 + \frac{(-d)}{\Gamma(d)\Gamma(k-d+1)} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \frac{\Gamma(j+d)\Gamma(k-d-j+1)}{(j-d)} \tag{A.8}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-d}{\Gamma(d)\Gamma(k-d+1)} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\Gamma(j+d)\Gamma(k-d-j+1)}{(j-d)} \tag{A.9}$$

pois o termo  $j = 0$  do somatório na expressão (A.8) é dado por

$$\frac{(-d)}{\Gamma(d)\Gamma(k-d+1)} \frac{\Gamma(d)\Gamma(k-d+1)}{(-d)} = 1,$$

que é exatamente a primeira parcela da soma na expressão (A.8).

Desta forma, através das expressões (A.7) e (A.9), precisamos mostrar que

$$\frac{\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\Gamma(j-d)\Gamma(k+d-j+1)}{(k-d-j+1)}}{\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\Gamma(j+d)\Gamma(k-d-j+1)}{(j-d)}} = \frac{d}{k+1-d}. \tag{A.10}$$

Como  $\binom{k}{j} = \binom{k}{k-j}$ , para todo  $j = 0, \dots, k$ , o denominador da expressão (A.10) pode ser reescrito por

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\Gamma(j+d)\Gamma(k-d-j+1)}{(j-d)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{k-j} \frac{\Gamma(j+d)\Gamma(k-d-j+1)}{(j-d)}. \quad (\text{A.11})$$

Substituindo  $\ell$  por  $k-j$  na expressão do lado direito de (A.11), temos que

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{k-j} \frac{\Gamma(j+d)\Gamma(k-d-j+1)}{(j-d)} = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} \frac{\Gamma(k-\ell+d)\Gamma(\ell-d+1)}{(k-\ell-d)}. \quad (\text{A.12})$$

Portanto, substituindo o denominador da expressão (A.10), por (A.12), queremos mostrar que

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\Gamma(j-d)\Gamma(k+d-j+1)}{(k+1-d-j)} = \frac{d}{k+1-d} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} \frac{\Gamma(k-\ell+d)\Gamma(\ell-d+1)}{(k-\ell-d)}. \quad (\text{A.13})$$

Pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} (k+1-d) \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\Gamma(j-d)\Gamma(k+d-j+1)}{(k+1-d-j)} &= \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(1+d)(-1)^k \Gamma(k+1) 2^k \prod_{l=0}^{k-1} (d - \frac{l+1}{2})}{\frac{\Gamma(k+2-d)}{\Gamma(-d)}} \\ &= \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(1+d)\Gamma(-d)\Gamma(2d)(-1)^k \Gamma(k+1)}{\Gamma(k+2-d)\Gamma(2d-k)} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

pois

$$\begin{aligned} \prod_{l=0}^{k-1} \left( d - \frac{l+1}{2} \right) &= 2^{-k} \prod_{l=0}^{k-1} (2d - (l+1)) = 2^{-k} (2d-1) \times \cdots \times (2d-k) \\ &= 2^{-k} \frac{\Gamma(2d)}{\Gamma(2d-k)}. \end{aligned}$$

Similarmente, mostra-se que

$$d \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} \frac{\Gamma(k-\ell+d)\Gamma(\ell-d+1)}{(k-\ell-d)} = \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(1+d)(-1)^k \Gamma(k+1) 2^k \prod_{l=0}^{k-1} (d - \frac{l+1}{2})}{\frac{\Gamma(k+2-d)}{\Gamma(-d)}} \quad (\text{A.15})$$

que coincide com a expressão (A.14).

Pelas expressões (A.14) e (A.15) concluímos que

$$\frac{(k+1-d) \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\Gamma(j-d)\Gamma(k+d-j+1)}{(k-d-j+1)}}{d \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\Gamma(j+d)\Gamma(k-d-j+1)}{(j-d)}} = 1 \quad (\text{A.16})$$

o que prova o sistema (A.1).

Como próximo passo, queremos provar o sistema (A.2). Substituindo as equações (A.3) e (A.5) no lado direito da equação (A.2), para todo  $k \in \mathbb{N} - \{0\}$  e  $j = 1, \dots, k$ , temos que

$$\begin{aligned}
& \phi_X(k, j) - \phi_X(k+1, k+1)\phi_X(k, k+1-j) = \\
& = -\binom{k}{j} \frac{(j-d-1)!(k-d-j)!}{(-d-1)!(k-d)!} + \frac{d}{(k+1-d)} \binom{k}{k+1-j} \frac{(k-j-d)!(j-d-1)!}{(-d-1)!(k-d)!} \\
& = -\frac{(j-d-1)!(k+1-d-j)!}{(-d-1)!(k+1-d)!} \left[ \binom{k}{j} - \frac{d}{(k+1-d)} \binom{k}{k+1-j} \right] \left[ \frac{k+1-d}{k+1-d-j} \right]. \tag{A.17}
\end{aligned}$$

Na expressão (A.17) os termos em colchetes são dados por

$$\begin{aligned}
& \left[ \binom{k}{d} - \frac{d}{k+1-d} \binom{k}{k+1-j} \right] \left[ \frac{k+1-d}{k+1-d-j} \right] = \\
& = \frac{k+1-d}{k+1-d-j} \left[ \frac{k!}{j!(k-j)!} - \frac{d}{k+1-d} \frac{k!}{(k+1-j)!(j-1)!} \right] \\
& = \frac{k+1-d}{k+1-d-j} \frac{k!}{(j-1)!(k-j)!} \left[ \frac{1}{j} - \frac{d}{k+1-d} \frac{1}{k+1-j} \right] \\
& = \frac{(k+1)!}{j!(k+1-j)!} \left\{ \frac{k+1-d}{k+1-d-j} \frac{j(k+1-j)}{k+1} \left[ \frac{1}{j} - \frac{d}{k+1-d} \frac{1}{k+1-j} \right] \right\} \\
& = \binom{k+1}{j} \left\{ \frac{k+1-d}{k+1-d-j} \frac{k+1-j}{k+1} - \frac{dj}{(k+1)(k+1-d-j)} \right\} \\
& = \binom{k+1}{j} \left[ \frac{(k+1-d)(k+1-j) - dj}{(k+1)(k+1-d-j)} \right] \\
& = \binom{k+1}{j}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \phi_X(k, j) - \phi_X(k+1, k+1)\phi_X(k, k+1-j) = \\ &= - \binom{k+1}{j} \frac{(j-d-1)!(k+1-d-j)!}{(-d-1)!(k+1-d)!} \\ &= - \binom{k+1}{j} \frac{\Gamma(j-d)\Gamma(k+1-d-j+1)}{\Gamma(-d)\Gamma(k+1-d+1)} \\ &= \phi_X(k+1, j). \end{aligned}$$

O sistema (A.2) está provado.

# APÊNDICE B

Para obtermos estimativas para o parâmetro  $D$  de um processo SARFIMA  $(0, D, 0)_s$  através do estimador de máxima verossimilhança aproximado, denotado na Seção 4.2.3 por FT, necessitamos encontrar o ponto de mínimo no intervalo  $(-0.5, 0.5)$  da função de máxima verossimilhança  $\mathcal{L}_n(\cdot)$  dada pela equação (4.39).

Durante as simulações, observamos que a subrotina BCONF da biblioteca de subrotinas IMSL, utilizada para minimizar a função  $\mathcal{L}_n(\cdot)$ , isto é, utilizada para encontrar o ponto de mínimo, para determinadas séries geradas, não conseguia convergência nos limites estipulados. Para obtermos uma solução para este problema, vamos analisar graficamente a função de máxima verossimilhança aproximada de uma série temporal gerada a partir de um processo SARFIMA  $(0, D, 0)_s$ , com  $D = 0.4$  e para valores de sazonalidade  $s = 2, 5, 12$ .

A seguir descrevemos as etapas para o cálculo da função de máxima verossimilhança em função do parâmetro  $D$  de diferenciação sazonal.

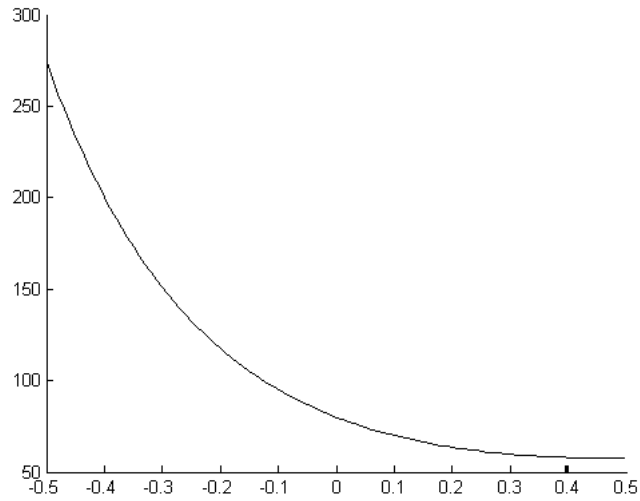
- (I) Gerar uma série temporal conforme os procedimentos no Capítulo 5.
- (II) Calcular a função periodograma, dada pela equação (2.7).
- (III) Para cada valor de  $D$ , calcular a função densidade espectral (ver equação (4.9)) e, em seguida, calcular a função de máxima verossimilhança dada pela equação (4.39).

**Observação:** Os gráficos a seguir, foram gerados para valores de  $D$  no intervalo  $(-0.5, 0.5)$ , com incrementos de 0.01, isto é,  $D = -0.5 + 0.01\ell$  para  $\ell \in \{0, 1, 2, \dots, 100\}$ .

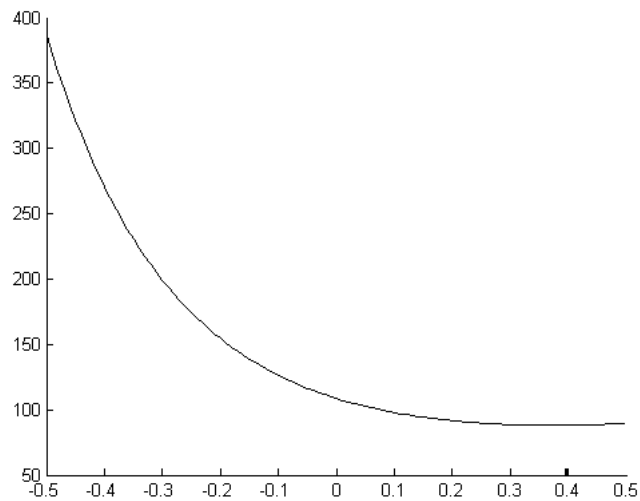
As Figuras B.1 até B.5 contêm os gráficos da função de verossimilhança  $\mathcal{L}_n(\cdot)$ , dada pela expressão (4.39), para processos SARFIMA  $(0, 0.4, 0)_2$ , quando o tamanho amostral é dado por  $n = 200, 400, 600, 800$  e 1000.

Analisando as Figuras B.1 até B.5, onde  $s = 2$ , observamos que para  $n = 200$ , o ponto de mínimo da função de máxima verossimilhança  $\mathcal{L}_n(\cdot)$

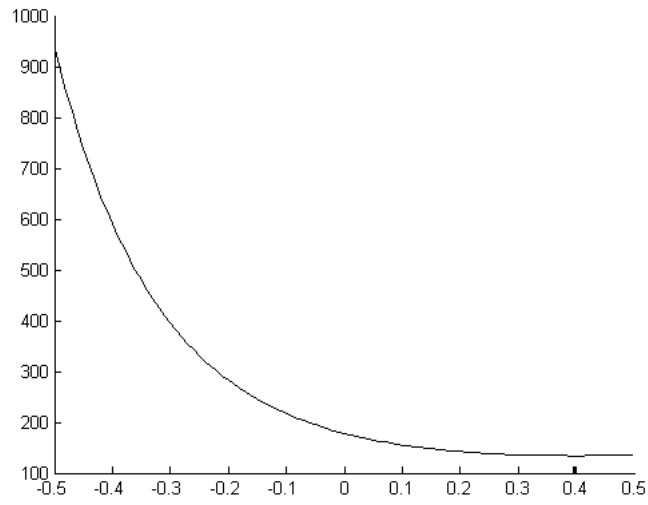
estava distante do valor teórico. Verificamos que, conforme aumentamos o tamanho amostral, a função  $\mathcal{L}_n(\cdot)$  possui ponto de mínimo mais próximo do valor teórico,  $D = 0.4$ .



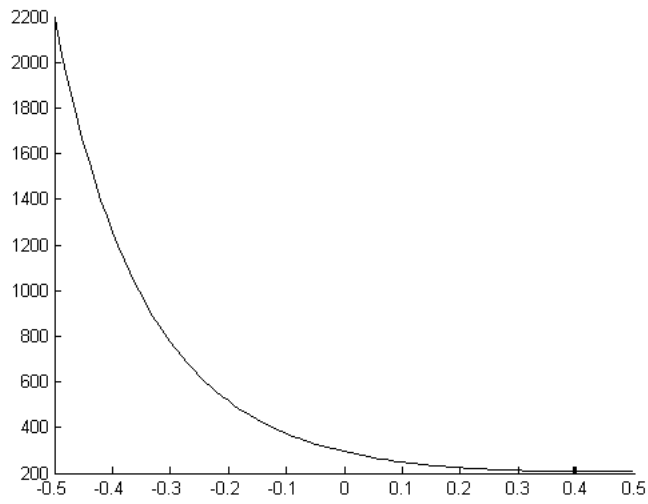
**Figura B.1:** Função de máxima verossimilhança do processo SARFIMA  $(0, 0.4, 0)_2$ , quando  $n = 200$ .



**Figura B.2:** Função de máxima verossimilhança do processo SARFIMA  $(0, 0.4, 0)_2$ , quando  $n = 400$ .

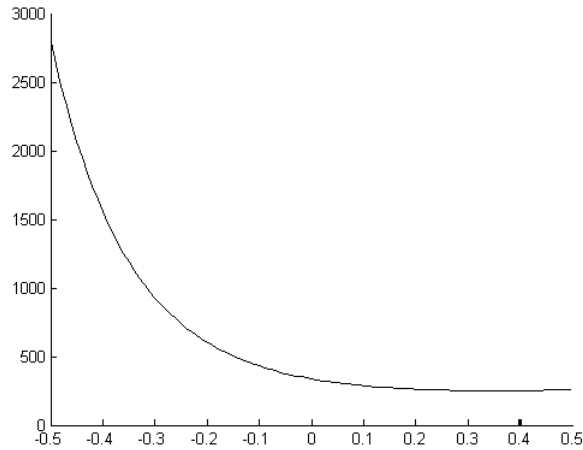


**Figura B.3:** Função de máxima verossimilhança do processo SARFIMA  $(0, 0.4, 0)_2$ , quando  $n = 600$ .



**Figura B.4:** Função de máxima verossimilhança do processo SARFIMA  $(0, 0.4, 0)_2$ , quando  $n = 800$ .

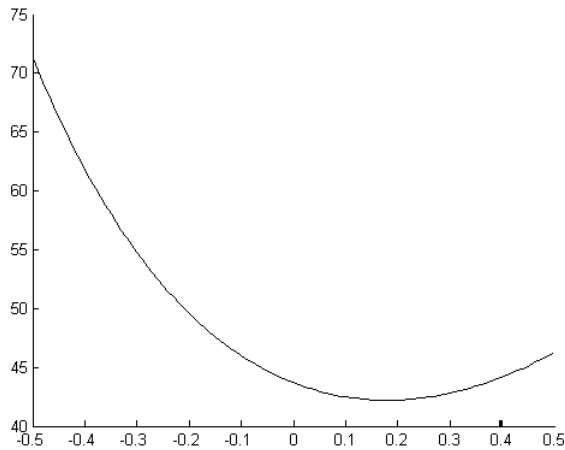




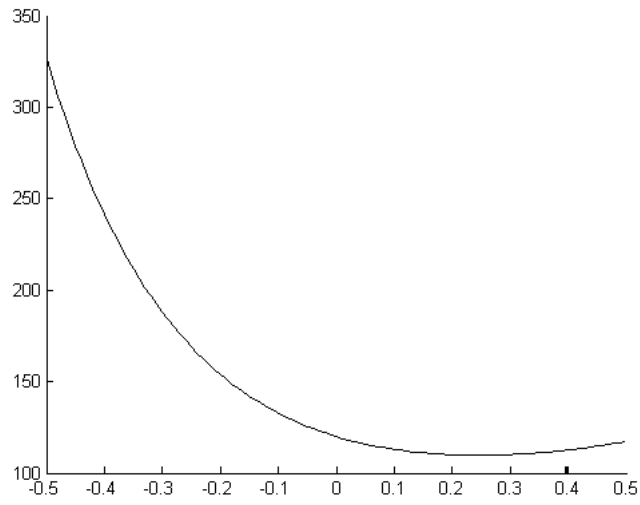
**Figura B.5:** Função de máxima verossimilhança do processo SARFIMA  $(0, 0.4, 0)_2$ , quando  $n = 1000$ .

As Figuras B.6 até B.8 contêm os gráficos da função de verossimilhança  $\mathcal{L}_n(\cdot)$ , dada pela expressão (4.39), para processos SARFIMA  $(0, 0.4, 0)_5$ , quando o tamanho amostral é dado por  $n = 200, 600$  e  $1000$ .

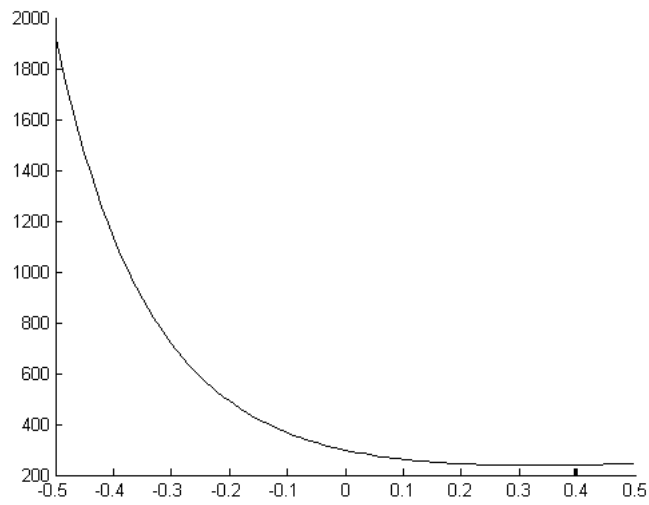
Para  $s = 5$ , quando  $n = 200$  (ver Figura B.6), a função  $\mathcal{L}_n(\cdot)$  possui ponto de mínimo distante do valor teórico. Conforme aumentamos o tamanho amostral (ver Figuras B.7 e B.8), o ponto de mínimo da função se aproxima do valor teórico  $D = 0.4$ .



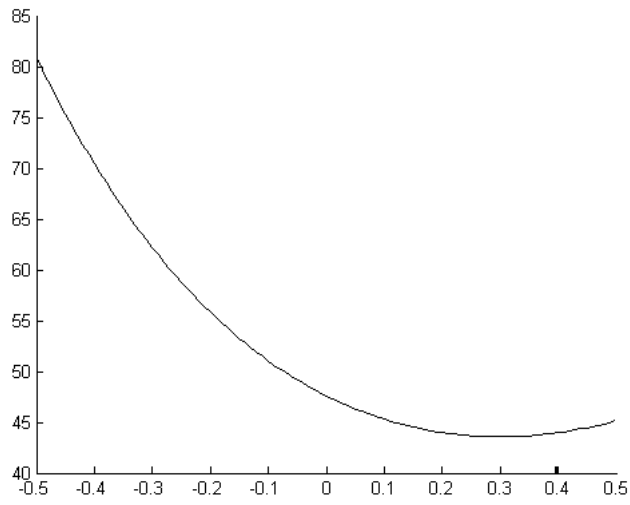
**Figura B.6:** Função de máxima verossimilhança do processo SARFIMA  $(0, 0.4, 0)_5$ , quando  $n = 200$ .



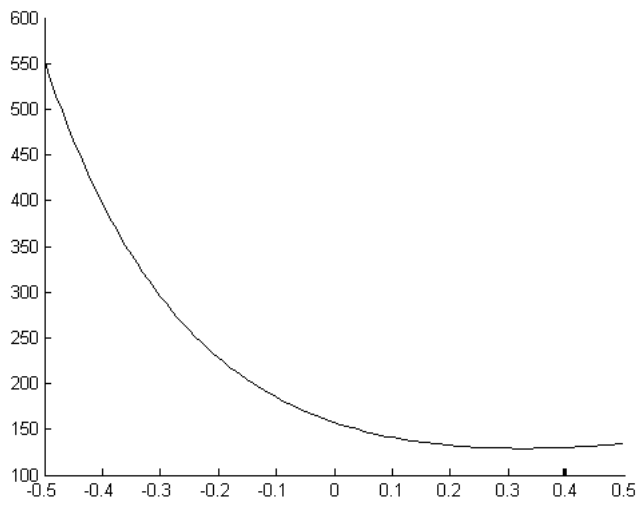
**Figura B.7:** Função de máxima verossimilhança do processo SARFIMA  $(0, 0.4, 0)_5$ , quando  $n = 600$ .



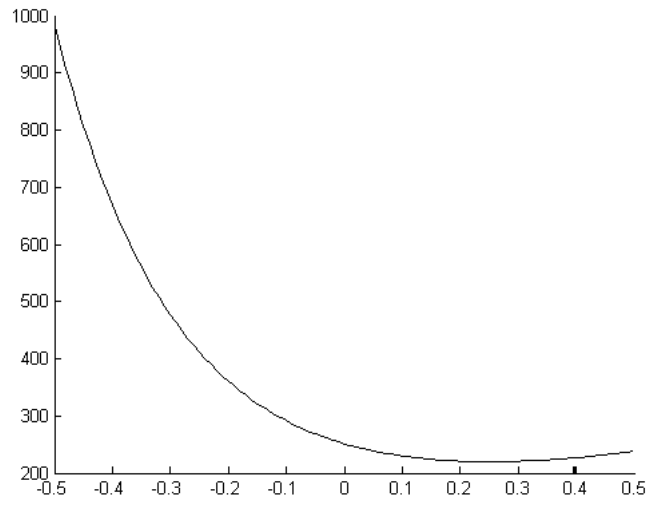
**Figura B.8:** Função de máxima verossimilhança do processo SARFIMA  $(0, 0.4, 0)_5$ , quando  $n = 1000$ .



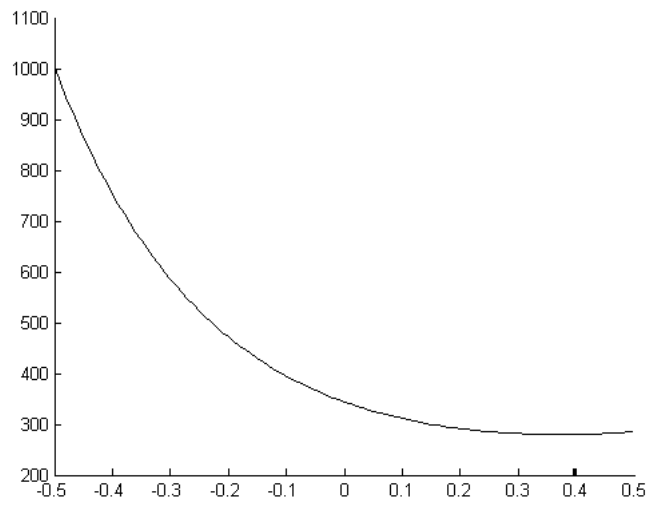
**Figura B.9:** Função de máxima verossimilhança do processo SARFIMA  $(0, 0.4, 0)_{12}$ , quando  $n = 200$ .



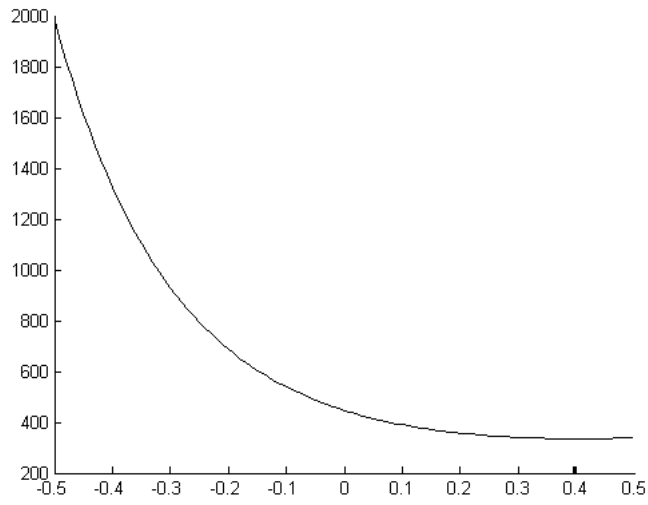
**Figura B.10:** Função de máxima verossimilhança do processo SARFIMA  $(0, 0.4, 0)_{12}$ , quando  $n = 600$ .



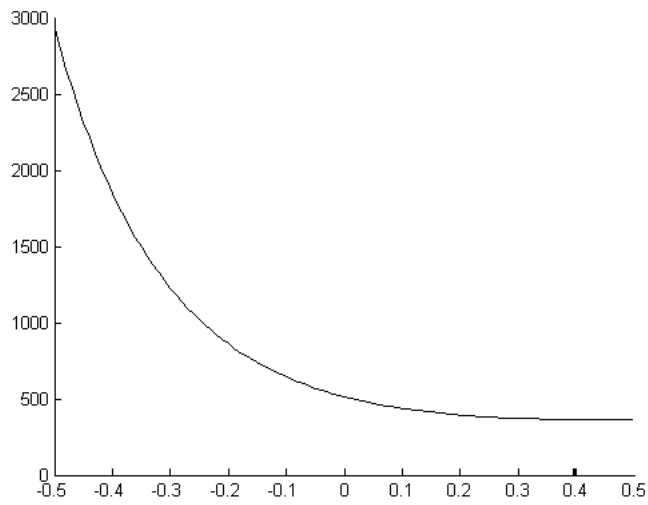
**Figura B.11:** Função de máxima verossimilhança do processo SARFIMA  $(0, 0.4, 0)_{12}$ , quando  $n = 1000$ .



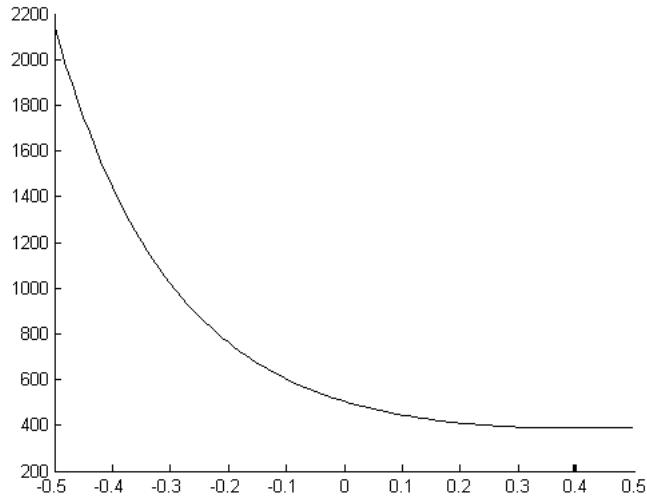
**Figura B.12:** Função de máxima verossimilhança do processo SARFIMA  $(0, 0.4, 0)_{12}$ , quando  $n = 1200$ .



**Figura B.13:** Função de máxima verossimilhança do processo SARFIMA  $(0, 0.4, 0)_{12}$ , quando  $n = 1400$ .



**Figura B.14:** Função de máxima verossimilhança do processo SARFIMA  $(0, 0.4, 0)_{12}$ , quando  $n = 1600$ .



**Figura B.15:** Função de máxima verossimilhança do processo SARFIMA  $(0, D, 0)_s$ , onde  $s = 12$  e  $n = 1800$ .

As Figuras B.9 até B.15 contêm os gráficos da função de verossimilhança  $\mathcal{L}_n(\cdot)$ , dada pela expressão (4.39), para processos SARFIMA  $(0, 0.4, 0)_{12}$ , quando o tamanho amostral é dado por  $n = 200, 600, 1000, 1200, 1400, 1600$  e  $1800$ .

Quando  $s = 12$ , conforme aumentamos o tamanho amostral (ver Figuras B.9 até B.15), o ponto de mínimo da função  $\mathcal{L}_n(\cdot)$  se aproxima lentamente do valor teórico. Para  $n = 1800$ , o seu ponto de mínimo está bem próximo do valor teórico esperado  $D = 0.4$ .

Através da análise das Figuras B.1 até B.15, ilustramos que o comportamento da função de verossimilhança  $\mathcal{L}_n(\cdot)$ , no intervalo  $(-0.5, 0.5)$ , será melhor quanto maior for o tamanho amostral. Observamos também que conforme aumenta a sazonalidade, maior deve ser o tamanho amostral para que o ponto de mínimo da função  $\mathcal{L}_n(\cdot)$  se aproxime do valor esperado.

# APÊNDICE C

Desejamos descrever o método dos mínimos quadrados para um modelo de regressão linear simples.

A análise de regressão tem por objetivo descrever, através de um modelo matemático, a relação existente entre duas variáveis, a partir de  $n$  observações dessas variáveis.

Dado um conjunto de valores observados, construir um modelo de regressão linear consiste em obter, a partir destes valores, uma função que melhor represente a relação verdadeira entre estas variáveis. A função escolhida será aquela que for sugerida analisando-se o conjunto de pontos dispostos no diagrama.

Apresentamos a seguir, o *modelo de regressão linear simples*, onde existem apenas duas variáveis envolvidas, quando o relacionamento entre elas é descrito pela equação linear

$$Y_j = a + bX_j + \epsilon_j, \quad (\text{C.1})$$

onde  $a$  é o coeficiente linear e  $b$  é o coeficiente angular. Para cada  $j$ , o erro  $\epsilon_j$  é um variável aleatória sobre a qual faremos as seguintes suposições

- (i)  $\mathbb{E}(\epsilon_j) = 0$ ;
- (ii)  $Var(\epsilon_j) = \sigma_\epsilon^2$ ;
- (iii)  $Cov(\epsilon_\ell, \epsilon_j) = 0$ , para todo  $\ell \neq j$ .

A variável  $Y$ , sendo função de  $\epsilon$ , é também uma variável aleatória, com  $\mathbb{E}(Y|X = x) = a + bx$  e  $Var(Y|X) = \sigma_\epsilon^2$ . Isto é, para cada valor de  $X$  existe uma distribuição de valores de  $Y$ , e não um único valor. Todas as distribuições têm a mesma variância  $\sigma_\epsilon^2$  e suas médias estão sobre a reta de regressão  $a + bX$ , ainda desconhecida, e cujos parâmetros queremos estimar.

Voltando a equação da reta, para cada valor  $x_j$  da variável explicativa  $X_j$  obtemos um valor predito para a variável resposta  $y_j$  dado por,

$$\hat{y}_j = \hat{a} + \hat{b}x_j.$$

Seja  $\epsilon_j$  a diferença entre o valor observado  $y_j$  e o valor predito  $\hat{y}_j = \hat{a} + \hat{b}x_j$ . Considere a soma dos quadrados destas diferenças ou desvios para todos os pontos observados, isto é,

$$\sum_{j=1}^n \epsilon_j^2 = \sum_{j=1}^n [y_j - (a + bx_j)]^2.$$

É claro que o valor de  $\sum_{j=1}^n \epsilon_j^2$  depende de  $a$  e  $b$ . Quanto menor o seu valor, melhor a equação de predição, ou seja, um bom ajuste será aquele em que  $\sum_{j=1}^n \epsilon_j^2$  for tão pequeno quanto possível. É este o princípio básico do *método dos mínimos quadrados*: tomar como estimativa dos parâmetros  $a$  e  $b$  valores que minimizem a soma  $\sum_{j=1}^n \epsilon_j^2$ .

A função  $\sum_{j=1}^n \epsilon_j^2$  terá mínimo quando suas derivadas parciais em relação a  $a$  e  $b$  forem nulas, isto é,

$$0 = \frac{\partial \sum_{j=1}^n \epsilon_j^2}{\partial a} = 2 \sum_{j=1}^n [y_j - (a + bx_j)](-1)$$

e

$$0 = \frac{\partial \sum_{j=1}^n \epsilon_j^2}{\partial b} = 2 \sum_{j=1}^n [y_j - (a + bx_j)](-x_j),$$

ou seja,

$$-\sum_{j=1}^n y_j + \sum_{j=1}^n (a + bx_j) = 0 \quad \text{e} \quad -\sum_{j=1}^n y_j x_j + \sum_{j=1}^n (ax_j + bx_j^2) = 0. \quad (4.2)$$

Portanto, da equação (4.2) temos

$$\sum_{j=1}^n y_j = \sum_{j=1}^n a + \sum_{j=1}^n bx_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^n y_j x_j = \sum_{j=1}^n ax_j + \sum_{j=1}^n bx_j^2,$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^n y_j = na + b \sum_{j=1}^n x_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^n y_j x_j = a \sum_{j=1}^n x_j + b \sum_{j=1}^n x_j^2. \quad (4.3)$$

Resolvendo a primeira equação do sistema (4.3) obtemos



$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j - \frac{\hat{b}}{n} \sum_{j=1}^n x_j,$$

ou seja,

$$\hat{a} = \bar{y} + \hat{b} \bar{x}, \quad (4.4)$$

onde

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j.$$

Substituindo (4.4) na segunda equação do sistema (4.3) temos

$$\sum_{j=1}^n x_j y_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j \sum_{j=1}^n x_j - \frac{\hat{b}}{n} \left( \sum_{j=1}^n x_j \right)^2 + \hat{b} \sum_{j=1}^n x_j^2,$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^n x_j y_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j \sum_{j=1}^n x_j - \hat{b} \left[ \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n x_j \right)^2 + \sum_{j=1}^n x_j^2 \right]. \quad (4.5)$$

Isolando a variável  $\hat{b}$  na equação (4.5) obtemos

$$\hat{b} = \frac{n \sum_{j=1}^n x_j y_j - \sum_{j=1}^n y_j \sum_{j=1}^n x_j}{n \sum_{j=1}^n x_j^2 - \left( \sum_{j=1}^n x_j \right)^2} = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2},$$

onde  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$  e  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j$ .

Assim,

$$\hat{b} = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) y_j}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}. \quad (4.6)$$

Logo, através das equações (4.4) e (4.6) podemos encontrar os coeficientes angular e linear da equação de regressão, a qual possui menor erro quadrático, isto é, que melhor descreve o conjunto de observações.

Um estudo mais completo sobre análise de regressão pode ser encontrado em Draper e Smith (1981).

# APÊNDICE D

As Tabelas D.1 a D.18, a seguir, apresentam os resultados de estimação do parâmetro  $D$  dos processos SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_s$ , quando  $\alpha \in \{0.6, 0.7, 0.8\}$ .

Da mesma forma que na Seção 5.1, o estudo de simulações de Monte Carlo foi realizado para os casos em que  $D \in \{0.2, 0.4\}$ ,  $n \in \{200, 1000\}$ ,  $RE \in \{500, 1000\}$  e  $s \in \{2, 3, 4, 5, 6, 12\}$  considerando todos os seis diferentes procedimentos para a escolha do tamanho dos regressores  $r$ .

Analisando as Tabelas D.1 a D.18, podemos concluir que, quando aumentamos o tamanho amostral, o erro quadrático médio dos três estimadores diminui. O mesmo ocorre, na maioria dos casos, quando o número de replicações aumenta.

Como concluímos para  $\alpha = 0.5$ , quando aumentamos o valor de  $\alpha$ , o estimador  $GPH$ , possui maior erro quadrático médio que o estimador  $SPR$ . Na maioria dos casos analisados, o estimador  $FT$  possui menor erro quadrático médio que o estimador  $SPR$ .

Quanto as estimativas dos estimadores, concluímos que o estimador  $GPH$  tem a tendência a superestimar o valor teórico enquanto que os estimadores  $SPR$  e  $FT$  possuem a tendência de subestimá-lo. Observamos que, para os estimadores  $GPH$  e  $SPR$ , conforme o valor de  $\alpha$  aumenta, as estimativas melhoram significativamente e o erro quadrático médio diminui.

**Observação:** Em algumas tabelas alguns dos métodos estão destacados com um asterisco (\*) devido ao fato de não possuírem regressores suficientes para serem selecionados na análise de regressão.

**Tabela D.1:** Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>2</sub>,  $\alpha = 0.6$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2121	0.2121	0.2078	0.2121	0.2024	0.2160	-
	<i>eqm</i>	0.0266	0.0266	0.0600	0.0266	0.1200	0.0918	-
	<i>SPR</i>	0.1722	0.1722	0.1381	0.1722	0.0938	0.1202	-
	<i>eqm</i>	0.0175	0.0175	0.0403	0.0175	0.0717	0.0564	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1597
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0103
1000	<i>GPH</i>	0.2095	0.2095	0.2066	0.2095	0.1898	0.2024	-
	<i>eqm</i>	0.0250	0.0250	0.0603	0.0250	0.1271	0.0888	-
	<i>SPR</i>	0.1700	0.1700	0.1382	0.1700	0.0888	0.1163	-
	<i>eqm</i>	0.0174	0.0174	0.0399	0.0174	0.0737	0.0558	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1589
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0111
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2034	0.2032	0.2090	0.2032	0.2116	0.2098	-
	<i>eqm</i>	0.0077	0.0080	0.0157	0.0080	0.0334	0.0174	-
	<i>SPR</i>	0.1882	0.1880	0.1811	0.1880	0.1575	0.1793	-
	<i>eqm</i>	0.0054	0.0055	0.0115	0.0055	0.0242	0.0125	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1923
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0014
1000	<i>GPH</i>	0.2013	0.2011	0.2047	0.2011	0.1989	0.2056	-
	<i>eqm</i>	0.0077	0.0079	0.0164	0.0079	0.0349	0.0183	-
	<i>SPR</i>	0.1859	0.1858	0.1759	0.1858	0.1489	0.1743	-
	<i>eqm</i>	0.0056	0.0056	0.0115	0.0056	0.0246	0.0126	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1920
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0013
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4123	0.4123	0.4223	0.4123	0.4391	0.4298	-
	<i>eqm</i>	0.0210	0.0210	0.0577	0.0210	0.1145	0.0841	-
	<i>SPR</i>	0.4051	0.4051	0.3998	0.4051	0.3813	0.3960	-
	<i>eqm</i>	0.0139	0.0139	0.0364	0.0139	0.0611	0.0497	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3538
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0084
1000	<i>GPH</i>	0.4059	0.4059	0.4146	0.4059	0.4172	0.4179	-
	<i>eqm</i>	0.0223	0.0223	0.0569	0.0223	0.1211	0.0862	-
	<i>SPR</i>	0.4017	0.4017	0.3947	0.4017	0.3678	0.3838	-
	<i>eqm</i>	0.0146	0.0146	0.0345	0.0146	0.0598	0.0477	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3507
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0092
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4064	0.4059	0.3927	0.4059	0.4001	0.3969	-
	<i>eqm</i>	0.0080	0.0081	0.0179	0.0081	0.0387	0.0198	-
	<i>SPR</i>	0.4043	0.4040	0.3893	0.4040	0.3799	0.3894	-
	<i>eqm</i>	0.0055	0.0056	0.0125	0.0056	0.0233	0.0135	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3939
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0015
1000	<i>GPH</i>	0.4118	0.4116	0.4055	0.4116	0.4095	0.4092	-
	<i>eqm</i>	0.0080	0.0082	0.0173	0.0082	0.0354	0.0191	-
	<i>SPR</i>	0.4078	0.4077	0.3988	0.4077	0.3893	0.3991	-
	<i>eqm</i>	0.0052	0.0053	0.0113	0.0053	0.0206	0.0121	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3953
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0014

**Tabela D.2:** Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>3</sub>,  $\alpha = 0.6$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2084	0.2102	0.2119	0.2102	0.2205	0.2140	-
	<i>eqm</i>	0.0636	0.0260	0.1109	0.0260	0.1340	0.0961	-
	<i>SPR</i>	0.1455	0.1718	0.1211	0.1718	0.1108	0.1278	-
	<i>eqm</i>	0.0399	0.0183	0.0632	0.0183	0.0724	0.0566	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1393
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0185
1000	<i>GPH</i>	0.1978	0.2048	0.2010	0.2048	0.2054	0.2006	-
	<i>eqm</i>	0.0579	0.0253	0.1018	0.0253	0.1254	0.0870	-
	<i>SPR</i>	0.1395	0.1701	0.1144	0.1701	0.1041	0.1222	-
	<i>eqm</i>	0.0385	0.0183	0.0596	0.0183	0.0688	0.0532	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1370
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0183
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.1925	0.1993	0.1912	0.1993	0.1990	0.1925	-
	<i>eqm</i>	0.0191	0.0074	0.0315	0.0074	0.0378	0.0206	-
	<i>SPR</i>	0.1679	0.1869	0.1565	0.1869	0.1495	0.1673	-
	<i>eqm</i>	0.0135	0.0054	0.0206	0.0054	0.0241	0.0145	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1860
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0026
1000	<i>GPH</i>	0.1969	0.1991	0.1938	0.1991	0.1972	0.1964	-
	<i>eqm</i>	0.0177	0.0077	0.0301	0.0077	0.0364	0.0190	-
	<i>SPR</i>	0.1692	0.1850	0.1554	0.1850	0.1485	0.1683	-
	<i>eqm</i>	0.0127	0.0057	0.0206	0.0057	0.0247	0.0135	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1851
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0025
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4048	0.3957	0.3975	0.3957	0.3933	0.3912	-
	<i>eqm</i>	0.0537	0.0228	0.0987	0.0228	0.1251	0.0829	-
	<i>SPR</i>	0.4133	0.4110	0.3990	0.4110	0.3962	0.3993	-
	<i>eqm</i>	0.0267	0.0131	0.0437	0.0131	0.0518	0.0375	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3187
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0182
1000	<i>GPH</i>	0.3963	0.3908	0.3908	0.3908	0.3933	0.3865	-
	<i>eqm</i>	0.0580	0.0233	0.1006	0.0233	0.1277	0.0848	-
	<i>SPR</i>	0.4055	0.4055	0.3926	0.4055	0.3902	0.3940	-
	<i>eqm</i>	0.0293	0.0138	0.0461	0.0138	0.0538	0.0400	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3173
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0189
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4178	0.4118	0.4153	0.4118	0.4142	0.4157	-
	<i>eqm</i>	0.0162	0.0077	0.0268	0.0077	0.0315	0.0178	-
	<i>SPR</i>	0.4140	0.4138	0.4066	0.4138	0.4043	0.4121	-
	<i>eqm</i>	0.0105	0.0053	0.0156	0.0053	0.0181	0.0113	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3897
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0021
1000	<i>GPH</i>	0.4147	0.4089	0.4141	0.4089	0.4168	0.4132	-
	<i>eqm</i>	0.0171	0.0076	0.0279	0.0076	0.0348	0.0187	-
	<i>SPR</i>	0.4133	0.4119	0.4098	0.4119	0.4086	0.4124	-
	<i>eqm</i>	0.0112	0.0053	0.0168	0.0053	0.0196	0.0120	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3903
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0021

**Tabela D.3:** Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_4$ ,  $\alpha = 0.6$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2195	0.2098	0.2031	0.2098	0.2120	0.2214	-
	<i>eqm</i>	0.0604	0.0291	0.1570	0.0291	0.1234	0.0876	-
	<i>SPR</i>	0.1553	0.1739	0.0917	0.1739	0.1132	0.1415	-
	<i>eqm</i>	0.0399	0.0213	0.0840	0.0213	0.0700	0.0531	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1157
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0306
1000	<i>GPH</i>	0.2095	0.2093	0.2053	0.2093	0.2094	0.2113	-
	<i>eqm</i>	0.0585	0.0288	0.1603	0.0288	0.1237	0.0855	-
	<i>SPR</i>	0.1451	0.1695	0.0867	0.1695	0.1046	0.1284	-
	<i>eqm</i>	0.0412	0.0217	0.0860	0.0217	0.0723	0.0555	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1108
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0309
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.1930	0.1972	0.1981	0.1972	0.1982	0.1946	-
	<i>eqm</i>	0.0173	0.0086	0.0433	0.0086	0.0370	0.0188	-
	<i>SPR</i>	0.1714	0.1851	0.1523	0.1851	0.1564	0.1695	-
	<i>eqm</i>	0.0118	0.0057	0.0263	0.0057	0.0229	0.0127	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1831
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0033
1000	<i>GPH</i>	0.1972	0.1983	0.2006	0.1983	0.2002	0.1989	-
	<i>eqm</i>	0.0164	0.0081	0.0389	0.0081	0.0345	0.0178	-
	<i>SPR</i>	0.1735	0.1861	0.1526	0.1861	0.1557	0.1724	-
	<i>eqm</i>	0.0116	0.0057	0.0258	0.0057	0.0228	0.0125	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1824
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0033
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4010	0.3944	0.4105	0.3944	0.4091	0.4030	-
	<i>eqm</i>	0.0490	0.0233	0.1503	0.0233	0.1166	0.0726	-
	<i>SPR</i>	0.4352	0.4226	0.4409	0.4226	0.4434	0.4409	-
	<i>eqm</i>	0.0271	0.0123	0.0503	0.0123	0.0457	0.0359	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2907
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0291
1000	<i>GPH</i>	0.4059	0.3935	0.4213	0.3935	0.4252	0.4116	-
	<i>eqm</i>	0.0491	0.0212	0.1501	0.0212	0.1157	0.0743	-
	<i>SPR</i>	0.4362	0.4215	0.4406	0.4215	0.4451	0.4409	-
	<i>eqm</i>	0.0266	0.0117	0.0499	0.0117	0.0446	0.0351	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2926
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0276
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4115	0.4119	0.4267	0.4119	0.4220	0.4108	-
	<i>eqm</i>	0.0146	0.0078	0.0373	0.0078	0.0324	0.0161	-
	<i>SPR</i>	0.4174	0.4186	0.4198	0.4186	0.4202	0.4163	-
	<i>eqm</i>	0.0093	0.0053	0.0200	0.0053	0.0178	0.0099	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3864
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0030
1000	<i>GPH</i>	0.4162	0.4105	0.4257	0.4105	0.4220	0.4158	-
	<i>eqm</i>	0.0159	0.0075	0.0379	0.0075	0.0333	0.0172	-
	<i>SPR</i>	0.4210	0.4166	0.4217	0.4166	0.4218	0.4208	-
	<i>eqm</i>	0.0102	0.0051	0.0203	0.0051	0.0181	0.0107	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3866
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0030

**Tabela D.4:** Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>5</sub>,  $\alpha = 0.6$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2302	0.2250	0.2323	0.2264	0.2378	0.2276	-
	<i>eqm</i>	0.0992	0.0380	0.2326	0.0372	0.1317	0.0788	-
	<i>SPR</i>	0.1361	0.1766	0.0981	0.1761	0.1280	0.1432	-
	<i>eqm</i>	0.0590	0.0279	0.0983	0.0273	0.0691	0.0506	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.0999
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0394
1000	<i>GPH</i>	0.2158	0.2213	0.2116	0.2225	0.2228	0.2144	-
	<i>eqm</i>	0.0925	0.0397	0.2207	0.0389	0.1197	0.0783	-
	<i>SPR</i>	0.1242	0.1697	0.0795	0.1693	0.1150	0.1313	-
	<i>eqm</i>	0.0594	0.0299	0.0999	0.0293	0.0684	0.0527	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.0914
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0423
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.1877	0.1991	0.2064	0.1991	0.1905	0.1874	-
	<i>eqm</i>	0.0286	0.0082	0.0566	0.0082	0.0345	0.0189	-
	<i>SPR</i>	0.1525	0.1821	0.1412	0.1821	0.1516	0.1600	-
	<i>eqm</i>	0.0207	0.0062	0.0351	0.0062	0.0239	0.0149	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1750
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0044
1000	<i>GPH</i>	0.1971	0.2013	0.2066	0.2013	0.1988	0.1971	-
	<i>eqm</i>	0.0288	0.0086	0.0559	0.0086	0.0356	0.0193	-
	<i>SPR</i>	0.1559	0.1835	0.1404	0.1835	0.1518	0.1653	-
	<i>eqm</i>	0.0208	0.0065	0.0368	0.0065	0.0251	0.0145	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1769
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0044
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.3992	0.3889	0.3737	0.3903	0.3950	0.3937	-
	<i>eqm</i>	0.0925	0.0279	0.2089	0.0274	0.1192	0.0753	-
	<i>SPR</i>	0.4415	0.4238	0.4317	0.4241	0.4417	0.4376	-
	<i>eqm</i>	0.0361	0.0161	0.0609	0.0155	0.0427	0.0311	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2587
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0410
1000	<i>GPH</i>	0.4070	0.3940	0.4041	0.3950	0.4025	0.3998	-
	<i>eqm</i>	0.0907	0.0277	0.1974	0.0271	0.1141	0.0757	-
	<i>SPR</i>	0.4485	0.4293	0.4476	0.4295	0.4512	0.4438	-
	<i>eqm</i>	0.0374	0.0163	0.0571	0.0156	0.0434	0.0325	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2634
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0403
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4197	0.4083	0.4207	0.4083	0.4241	0.4181	-
	<i>eqm</i>	0.0220	0.0072	0.0449	0.0072	0.0280	0.0169	-
	<i>SPR</i>	0.4288	0.4197	0.4281	0.4197	0.4308	0.4302	-
	<i>eqm</i>	0.0130	0.0046	0.0227	0.0046	0.0153	0.0098	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3813
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0035
1000	<i>GPH</i>	0.4122	0.4095	0.4143	0.4095	0.4143	0.4130	-
	<i>eqm</i>	0.0249	0.0074	0.0495	0.0074	0.0308	0.0173	-
	<i>SPR</i>	0.4253	0.4191	0.4221	0.4191	0.4252	0.4269	-
	<i>eqm</i>	0.0140	0.0046	0.0228	0.0046	0.0163	0.0102	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3788
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0037

**Tabela D.5:** Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>6</sub>,  $\alpha = 0.6$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.1914	0.2077	0.2098	0.2077	0.1856	0.1947	-
	<i>eqm</i>	0.0995	0.0450	0.2938	0.0450	0.1169	0.0831	-
	<i>SPR</i>	0.0985	0.1447	0.0369	0.1447	0.0889	0.1068	-
	<i>eqm</i>	0.0691	0.0365	0.1206	0.0365	0.0792	0.0604	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.0409
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0630
1000	<i>GPH</i>	0.1975	0.2013	0.2230	0.2013	0.1953	0.1942	-
	<i>eqm</i>	0.1030	0.0462	0.2838	0.0462	0.1199	0.0863	-
	<i>SPR</i>	0.1029	0.1405	0.0487	0.1405	0.0949	0.1087	-
	<i>eqm</i>	0.0697	0.0386	0.1130	0.0386	0.0789	0.0622	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.0385
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0654
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2130	0.2037	0.2196	0.2037	0.2109	0.2111	-
	<i>eqm</i>	0.0253	0.0080	0.0566	0.0080	0.0297	0.0159	-
	<i>SPR</i>	0.1680	0.1827	0.1383	0.1827	0.1626	0.1761	-
	<i>eqm</i>	0.0172	0.0056	0.0354	0.0056	0.0201	0.0115	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1691
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0052
1000	<i>GPH</i>	0.2181	0.2064	0.2207	0.2064	0.2156	0.2128	-
	<i>eqm</i>	0.0273	0.0082	0.0631	0.0082	0.0333	0.0179	-
	<i>SPR</i>	0.1737	0.1868	0.1390	0.1868	0.1667	0.1803	-
	<i>eqm</i>	0.0181	0.0061	0.0389	0.0061	0.0217	0.0125	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1740
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0054
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4080	0.3891	0.4220	0.3891	0.4121	0.4185	-
	<i>eqm</i>	0.0920	0.0337	0.2571	0.0337	0.1121	0.0718	-
	<i>SPR</i>	0.4620	0.4283	0.4710	0.4283	0.4637	0.4588	-
	<i>eqm</i>	0.0373	0.0183	0.0552	0.0183	0.0428	0.0318	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2316
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0563
1000	<i>GPH</i>	0.3970	0.3860	0.4061	0.3860	0.3972	0.4025	-
	<i>eqm</i>	0.0938	0.0347	0.2709	0.0347	0.1125	0.0747	-
	<i>SPR</i>	0.4594	0.4312	0.4598	0.4312	0.4600	0.4567	-
	<i>eqm</i>	0.0365	0.0188	0.0577	0.0188	0.0409	0.0316	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2303
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0578
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4031	0.4028	0.4071	0.4028	0.4054	0.4093	-
	<i>eqm</i>	0.0254	0.0073	0.0583	0.0073	0.0301	0.0173	-
	<i>SPR</i>	0.4240	0.4136	0.4239	0.4136	0.4261	0.4237	-
	<i>eqm</i>	0.0142	0.0045	0.0260	0.0045	0.0160	0.0101	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3723
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0052
1000	<i>GPH</i>	0.4050	0.4014	0.4033	0.4014	0.4022	0.4087	-
	<i>eqm</i>	0.0258	0.0070	0.0633	0.0070	0.0312	0.0165	-
	<i>SPR</i>	0.4242	0.4148	0.4247	0.4148	0.4243	0.4242	-
	<i>eqm</i>	0.0141	0.0045	0.0275	0.0045	0.0160	0.0096	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3716
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0052

Tabela D.6: Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>12</sub>,  $\alpha = 0.6$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.1978	-0.0148*	0.1737	-0.0156*	0.1902	0.1908	-
	<i>eqm</i>	0.2795	0.0463	1.0490	0.0467	0.1129	0.1162	-
	<i>SPR</i>	0.0389	0.0025*	-0.0624	0.0028*	0.0891	0.1155	-
	<i>eqm</i>	0.1144	0.0396	0.1342	0.0396	0.0790	0.0811	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	-0.1256
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.1826
1000	<i>GPH</i>	0.1922	-0.0147*	0.1851	-0.0155*	0.1908	0.1877	-
	<i>eqm</i>	0.2808	0.0463	1.0921	0.0466	0.1199	0.1180	-
	<i>SPR</i>	0.0335	0.0023*	-0.0635	0.0025*	0.0855	0.1136	-
	<i>eqm</i>	0.1159	0.0397	0.1329	0.0397	0.0818	0.0824	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	-0.1260
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.1843
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.1923	0.2090	0.1979	0.2090	0.2079	0.2085	-
	<i>eqm</i>	0.0613	0.0151	0.1342	0.0151	0.0372	0.0206	-
	<i>SPR</i>	0.1223	0.1819	0.0743	0.1819	0.1592	0.1743	-
	<i>eqm</i>	0.0438	0.0115	0.0753	0.0115	0.0262	0.0155	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1473
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0144
1000	<i>GPH</i>	0.1942	0.2072	0.1920	0.2072	0.2067	0.2064	-
	<i>eqm</i>	0.0608	0.0142	0.1430	0.0142	0.0332	0.0189	-
	<i>SPR</i>	0.1254	0.1809	0.0739	0.1809	0.1590	0.1732	-
	<i>eqm</i>	0.0421	0.0111	0.0772	0.0111	0.0243	0.0149	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1462
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0139
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.3435	0.0883*	0.3337	0.0943*	0.3549	0.3540	-
	<i>eqm</i>	0.2525	0.0973	1.1056	0.0936	0.1050	0.1016	-
	<i>SPR</i>	0.4748	0.0559*	0.4482	0.0599*	0.4713	0.4822	-
	<i>eqm</i>	0.0392	0.1185	0.0265	0.1158	0.0304	0.0413	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.0158
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.2239
1000	<i>GPH</i>	0.3561	0.0884*	0.3591	0.0944*	0.3514	0.3507	-
	<i>eqm</i>	0.2530	0.0973	1.1179	0.0936	0.1035	0.1013	-
	<i>SPR</i>	0.4845	0.0561*	0.4533	0.0601*	0.4697	0.4793	-
	<i>eqm</i>	0.0404	0.1184	0.0258	0.1157	0.0303	0.0406	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.0174
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.2240
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4232	0.4059	0.4518	0.4059	0.4077	0.4044	-
	<i>eqm</i>	0.0599	0.0125	0.1574	0.0125	0.0278	0.0158	-
	<i>SPR</i>	0.4591	0.4259	0.4683	0.4259	0.4388	0.4319	-
	<i>eqm</i>	0.0273	0.0075	0.0424	0.0075	0.0141	0.0091	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3416
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0122
1000	<i>GPH</i>	0.4117	0.4125	0.4340	0.4125	0.4122	0.4105	-
	<i>eqm</i>	0.0578	0.0121	0.1497	0.0121	0.0288	0.0154	-
	<i>SPR</i>	0.4529	0.4305	0.4585	0.4305	0.4404	0.4333	-
	<i>eqm</i>	0.0262	0.0074	0.0391	0.0074	0.0147	0.0087	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3439
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0116



Tabela D.7: Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>2</sub>,  $\alpha = 0.7$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.1999	0.1963	0.1948	0.1963	0.1919	0.1957	-
	<i>eqm</i>	0.0154	0.0155	0.0325	0.0155	0.1135	0.0845	-
	<i>SPR</i>	0.1731	0.1708	0.1506	0.1708	0.1028	0.1201	-
	<i>eqm</i>	0.0112	0.0115	0.0240	0.0115	0.0654	0.0535	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1515
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0113
1000	<i>GPH</i>	0.2016	0.1989	0.1948	0.1989	0.1999	0.1990	-
	<i>eqm</i>	0.0144	0.0147	0.0309	0.0147	0.1108	0.0810	-
	<i>SPR</i>	0.1753	0.1737	0.1521	0.1737	0.1000	0.1185	-
	<i>eqm</i>	0.0103	0.0108	0.0231	0.0108	0.0669	0.0537	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1521
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0108
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2034	0.2033	0.2027	0.2033	0.2004	0.2038	-
	<i>eqm</i>	0.0036	0.0037	0.0075	0.0037	0.0313	0.0163	-
	<i>SPR</i>	0.1937	0.1935	0.1816	0.1935	0.1541	0.1713	-
	<i>eqm</i>	0.0024	0.0024	0.0048	0.0024	0.0209	0.0110	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1907
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0014
1000	<i>GPH</i>	0.2030	0.2030	0.2040	0.2030	0.2082	0.2078	-
	<i>eqm</i>	0.0036	0.0037	0.0074	0.0037	0.0306	0.0156	-
	<i>SPR</i>	0.1937	0.1937	0.1845	0.1937	0.1603	0.1754	-
	<i>eqm</i>	0.0024	0.0024	0.0050	0.0024	0.0199	0.0107	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1912
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0014
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4089	0.4089	0.4154	0.4089	0.4148	0.4304	-
	<i>eqm</i>	0.0118	0.0126	0.0257	0.0126	0.0933	0.0737	-
	<i>SPR</i>	0.4075	0.4071	0.4080	0.4071	0.3876	0.4077	-
	<i>eqm</i>	0.0076	0.0083	0.0166	0.0083	0.0446	0.0361	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3564
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0090
1000	<i>GPH</i>	0.4045	0.4046	0.4119	0.4046	0.4132	0.4228	-
	<i>eqm</i>	0.0122	0.0131	0.0278	0.0131	0.1010	0.0750	-
	<i>SPR</i>	0.4063	0.4059	0.4048	0.4059	0.3793	0.3964	-
	<i>eqm</i>	0.0078	0.0083	0.0172	0.0083	0.0460	0.0362	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3550
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0094
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4077	0.4081	0.4131	0.4081	0.4261	0.4150	-
	<i>eqm</i>	0.0038	0.0038	0.0081	0.0038	0.0287	0.0146	-
	<i>SPR</i>	0.4070	0.4072	0.4070	0.4072	0.3994	0.4019	-
	<i>eqm</i>	0.0026	0.0026	0.0054	0.0026	0.0172	0.0094	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3948
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0014
1000	<i>GPH</i>	0.4076	0.4076	0.4122	0.4076	0.4194	0.4166	-
	<i>eqm</i>	0.0039	0.0040	0.0081	0.0040	0.0289	0.0157	-
	<i>SPR</i>	0.4066	0.4066	0.4070	0.4066	0.3994	0.4046	-
	<i>eqm</i>	0.0027	0.0027	0.0053	0.0027	0.0169	0.0094	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3951
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0014

Tabela D.8: Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>3</sub>,  $\alpha = 0.7$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2145	0.2044	0.2035	0.2052	0.1937	0.1978	-
	<i>eqm</i>	0.0305	0.0187	0.0498	0.0183	0.1127	0.0788	-
	<i>SPR</i>	0.1735	0.1782	0.1495	0.1780	0.1100	0.1283	-
	<i>eqm</i>	0.0197	0.0140	0.0327	0.0136	0.0621	0.0486	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1332
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0187
1000	<i>GPH</i>	0.2072	0.2034	0.2015	0.2038	0.2005	0.2022	-
	<i>eqm</i>	0.0305	0.0196	0.0505	0.0191	0.1141	0.0812	-
	<i>SPR</i>	0.1693	0.1790	0.1502	0.1784	0.1099	0.1300	-
	<i>eqm</i>	0.0207	0.0146	0.0332	0.0143	0.0654	0.0504	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1343
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0192
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2005	0.2001	0.2015	0.2001	0.1972	0.1978	-
	<i>eqm</i>	0.0079	0.0041	0.0115	0.0041	0.0269	0.0146	-
	<i>SPR</i>	0.1817	0.1875	0.1731	0.1875	0.1564	0.1694	-
	<i>eqm</i>	0.0055	0.0031	0.0081	0.0031	0.0192	0.0103	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1819
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0026
1000	<i>GPH</i>	0.2011	0.2017	0.2023	0.2017	0.1988	0.2012	-
	<i>eqm</i>	0.0078	0.0040	0.0116	0.0040	0.0271	0.0146	-
	<i>SPR</i>	0.1844	0.1906	0.1772	0.1906	0.1562	0.1734	-
	<i>eqm</i>	0.0054	0.0029	0.0081	0.0029	0.0188	0.0101	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1852
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0024
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.3928	0.3984	0.4161	0.3976	0.4428	0.4311	-
	<i>eqm</i>	0.0256	0.0186	0.0469	0.0175	0.1048	0.0790	-
	<i>SPR</i>	0.4105	0.4117	0.4210	0.4113	0.4225	0.4255	-
	<i>eqm</i>	0.0154	0.0110	0.0273	0.0103	0.0508	0.0432	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3221
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0183
1000	<i>GPH</i>	0.3986	0.3956	0.4085	0.3953	0.4321	0.4203	-
	<i>eqm</i>	0.0254	0.0166	0.0461	0.0159	0.0958	0.0716	-
	<i>SPR</i>	0.4120	0.4101	0.4165	0.4100	0.4197	0.4198	-
	<i>eqm</i>	0.0158	0.0101	0.0262	0.0096	0.0467	0.0379	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3208
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0180
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4118	0.4083	0.4135	0.4083	0.4168	0.4165	-
	<i>eqm</i>	0.0074	0.0036	0.0110	0.0036	0.0284	0.0160	-
	<i>SPR</i>	0.4141	0.4114	0.4166	0.4114	0.4195	0.4180	-
	<i>eqm</i>	0.0047	0.0024	0.0072	0.0024	0.0179	0.0094	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3908
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0021
1000	<i>GPH</i>	0.4090	0.4077	0.4112	0.4077	0.4117	0.4129	-
	<i>eqm</i>	0.0077	0.0039	0.0115	0.0039	0.0288	0.0156	-
	<i>SPR</i>	0.4110	0.4105	0.4135	0.4105	0.4119	0.4142	-
	<i>eqm</i>	0.0049	0.0025	0.0075	0.0025	0.0177	0.0095	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3905
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0022

**Tabela D.9:** Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0) $_4$ ,  $\alpha = 0.7$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2036	0.2116	0.2026	0.2116	0.1989	0.2012	-
	<i>eqm</i>	0.0333	0.0305	0.0602	0.0305	0.0982	0.0658	-
	<i>SPR</i>	0.1657	0.1737	0.1400	0.1737	0.1117	0.1317	-
	<i>eqm</i>	0.0245	0.0227	0.0415	0.0227	0.0618	0.0465	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1089
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0307
1000	<i>GPH</i>	0.2057	0.2138	0.2119	0.2138	0.2150	0.2137	-
	<i>eqm</i>	0.0317	0.0294	0.0621	0.0294	0.0987	0.0696	-
	<i>SPR</i>	0.1666	0.1753	0.1480	0.1753	0.1256	0.1417	-
	<i>eqm</i>	0.0218	0.0211	0.0394	0.0211	0.0568	0.0438	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1109
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0289
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2038	0.2048	0.2054	0.2048	0.2060	0.2034	-
	<i>eqm</i>	0.0082	0.0045	0.0166	0.0045	0.0309	0.0148	-
	<i>SPR</i>	0.1875	0.1919	0.1771	0.1919	0.1629	0.1778	-
	<i>eqm</i>	0.0055	0.0030	0.0120	0.0030	0.0205	0.0108	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1814
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0032
1000	<i>GPH</i>	0.2021	0.2033	0.2035	0.2033	0.2031	0.2020	-
	<i>eqm</i>	0.0078	0.0044	0.0173	0.0044	0.0306	0.0148	-
	<i>SPR</i>	0.1861	0.1904	0.1740	0.1904	0.1605	0.1749	-
	<i>eqm</i>	0.0057	0.0030	0.0130	0.0030	0.0213	0.0112	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1803
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0031
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4068	0.4105	0.4188	0.4105	0.4111	0.4107	-
	<i>eqm</i>	0.0227	0.0196	0.0560	0.0196	0.0831	0.0660	-
	<i>SPR</i>	0.4249	0.4228	0.4387	0.4228	0.4318	0.4346	-
	<i>eqm</i>	0.0133	0.0125	0.0266	0.0125	0.0337	0.0283	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2966
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0269
1000	<i>GPH</i>	0.4051	0.4064	0.4238	0.4064	0.4235	0.4244	-
	<i>eqm</i>	0.0249	0.0218	0.0568	0.0218	0.0878	0.0678	-
	<i>SPR</i>	0.4232	0.4201	0.4398	0.4201	0.4364	0.4392	-
	<i>eqm</i>	0.0136	0.0131	0.0269	0.0131	0.0366	0.0296	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2986
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0264
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4018	0.4041	0.3982	0.4041	0.3958	0.3955	-
	<i>eqm</i>	0.0077	0.0045	0.0167	0.0045	0.0258	0.0143	-
	<i>SPR</i>	0.4124	0.4116	0.4097	0.4116	0.4086	0.4107	-
	<i>eqm</i>	0.0048	0.0029	0.0100	0.0029	0.0147	0.0085	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3825
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0033
1000	<i>GPH</i>	0.4020	0.4041	0.3982	0.4041	0.3978	0.3975	-
	<i>eqm</i>	0.0080	0.0043	0.0175	0.0043	0.0279	0.0150	-
	<i>SPR</i>	0.4109	0.4102	0.4099	0.4102	0.4081	0.4110	-
	<i>eqm</i>	0.0051	0.0028	0.0103	0.0028	0.0159	0.0088	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3821
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0033

Tabela D.10: Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>5</sub>,  $\alpha = 0.7$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2118	-0.0234*	0.2013	-0.0191*	0.1984	0.1971	-
	<i>eqm</i>	0.0501	0.0506	0.0977	0.0488	0.1258	0.0747	-
	<i>SPR</i>	0.1523	0.0181*	0.1149	0.0214*	0.1062	0.1289	-
	<i>eqm</i>	0.0371	0.0341	0.0645	0.0332	0.0753	0.0519	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.0854
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0453
1000	<i>GPH</i>	0.2031	-0.0227*	0.1980	-0.0185*	0.2033	0.1925	-
	<i>eqm</i>	0.0499	0.0503	0.0980	0.0485	0.1275	0.0733	-
	<i>SPR</i>	0.1480	0.0175*	0.1139	0.0207*	0.1067	0.1265	-
	<i>eqm</i>	0.0364	0.0343	0.0635	0.0333	0.0740	0.0509	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.0801
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0455
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2082	0.2097	0.2047	0.2098	0.2035	0.2066	-
	<i>eqm</i>	0.0131	0.0058	0.0217	0.0057	0.0261	0.0155	-
	<i>SPR</i>	0.1830	0.1945	0.1670	0.1943	0.1601	0.1778	-
	<i>eqm</i>	0.0096	0.0044	0.0157	0.0043	0.0187	0.0116	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1803
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0046
1000	<i>GPH</i>	0.2064	0.2072	0.2040	0.2073	0.2009	0.2067	-
	<i>eqm</i>	0.0133	0.0057	0.0230	0.0056	0.0284	0.0162	-
	<i>SPR</i>	0.1833	0.1936	0.1689	0.1934	0.1607	0.1797	-
	<i>eqm</i>	0.0096	0.0041	0.0165	0.0041	0.0198	0.0116	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1799
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0044
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.3985	0.1091*	0.3928	0.1171*	0.4063	0.3949	-
	<i>eqm</i>	0.0362	0.0853	0.0816	0.0807	0.1034	0.0568	-
	<i>SPR</i>	0.4384	0.0856*	0.4385	0.0941*	0.4422	0.4382	-
	<i>eqm</i>	0.0188	0.0992	0.0344	0.0940	0.0394	0.0283	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2590
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0408
1000	<i>GPH</i>	0.3945	0.1072*	0.3904	0.1152*	0.3961	0.3931	-
	<i>eqm</i>	0.0386	0.0864	0.0888	0.0818	0.1104	0.0639	-
	<i>SPR</i>	0.4323	0.0845*	0.4356	0.0930*	0.4363	0.4356	-
	<i>eqm</i>	0.0184	0.1000	0.0350	0.0948	0.0401	0.0289	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2599
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0414
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4150	0.4116	0.4079	0.4120	0.4068	0.4145	-
	<i>eqm</i>	0.0102	0.0055	0.0194	0.0054	0.0259	0.0139	-
	<i>SPR</i>	0.4244	0.4189	0.4222	0.4191	0.4240	0.4248	-
	<i>eqm</i>	0.0060	0.0037	0.0103	0.0036	0.0133	0.0077	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3828
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0036
1000	<i>GPH</i>	0.4125	0.4102	0.4111	0.4106	0.4109	0.4130	-
	<i>eqm</i>	0.0113	0.0057	0.0213	0.0056	0.0276	0.0145	-
	<i>SPR</i>	0.4222	0.4168	0.4233	0.4170	0.4261	0.4228	-
	<i>eqm</i>	0.0070	0.0037	0.0117	0.0036	0.0147	0.0083	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3815
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0039

Tabela D.11: Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>6</sub>,  $\alpha = 0.7$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.1918	-0.0224*	0.1876	-0.0234*	0.1901	0.1867	-
	<i>eqm</i>	0.0538	0.0500	0.1183	0.0506	0.0936	0.0743	-
	<i>SPR</i>	0.1416	0.0136*	0.0977	0.0141*	0.1071	0.1229	-
	<i>eqm</i>	0.0379	0.0358	0.0688	0.0356	0.0602	0.0502	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.0492
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0577
1000	<i>GPH</i>	0.2056	-0.0198*	0.2138	-0.0208*	0.2087	0.2035	-
	<i>eqm</i>	0.0479	0.0489	0.1180	0.0493	0.0927	0.0705	-
	<i>SPR</i>	0.1497	0.0164*	0.1081	0.0170*	0.1158	0.1297	-
	<i>eqm</i>	0.0354	0.0347	0.0682	0.0345	0.0594	0.0487	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.0614
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0527
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2115	0.2052	0.2062	0.2052	0.2062	0.2105	-
	<i>eqm</i>	0.0121	0.0072	0.0280	0.0072	0.0280	0.0145	-
	<i>SPR</i>	0.1856	0.1925	0.1664	0.1925	0.1664	0.1816	-
	<i>eqm</i>	0.0086	0.0052	0.0202	0.0052	0.0202	0.0105	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1754
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0053
1000	<i>GPH</i>	0.2088	0.2044	0.2079	0.2044	0.2079	0.2089	-
	<i>eqm</i>	0.0122	0.0069	0.0285	0.0069	0.0285	0.0148	-
	<i>SPR</i>	0.1836	0.1919	0.1661	0.1919	0.1661	0.1808	-
	<i>eqm</i>	0.0089	0.0051	0.0207	0.0051	0.0207	0.0109	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1748
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0054
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.3696	0.1064*	0.3634	0.1100*	0.3599	0.3663	-
	<i>eqm</i>	0.0412	0.0867	0.1055	0.0846	0.0873	0.0664	-
	<i>SPR</i>	0.4221	0.0816*	0.4283	0.0841*	0.4242	0.4238	-
	<i>eqm</i>	0.0172	0.1018	0.0330	0.1002	0.0298	0.0260	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2136
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0645
1000	<i>GPH</i>	0.3698	0.1067*	0.3686	0.1103*	0.3650	0.3661	-
	<i>eqm</i>	0.0430	0.0865	0.1137	0.0844	0.0930	0.0686	-
	<i>SPR</i>	0.4267	0.0821*	0.4372	0.0847*	0.4342	0.4313	-
	<i>eqm</i>	0.0183	0.1015	0.0367	0.0998	0.0325	0.0264	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2210
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0620
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4065	0.4016	0.4080	0.4016	0.4080	0.4083	-
	<i>eqm</i>	0.0121	0.0055	0.0296	0.0055	0.0296	0.0154	-
	<i>SPR</i>	0.4208	0.4148	0.4252	0.4148	0.4252	0.4255	-
	<i>eqm</i>	0.0075	0.0037	0.0158	0.0037	0.0158	0.0093	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3739
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0046
1000	<i>GPH</i>	0.4087	0.4051	0.4115	0.4051	0.4115	0.4095	-
	<i>eqm</i>	0.0118	0.0057	0.0278	0.0057	0.0278	0.0151	-
	<i>SPR</i>	0.4229	0.4160	0.4296	0.4160	0.4296	0.4258	-
	<i>eqm</i>	0.0075	0.0038	0.0151	0.0038	0.0151	0.0091	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3746
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0047

Tabela D.12: Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>12</sub>,  $\alpha = 0.7$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.1873	-0.0159*	0.2075	-0.0164*	0.1879	0.1863	-
	<i>eqm</i>	0.1169	0.0467	0.2886	0.0470	0.1009	0.1073	-
	<i>SPR</i>	0.0856	0.0025*	0.0386	0.0028*	0.1017	0.1125	-
	<i>eqm</i>	0.0754	0.0396	0.1096	0.0395	0.0730	0.0786	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	-0.1209
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.1772
1000	<i>GPH</i>	0.1902	-0.0161*	0.1962	-0.0166*	0.1894	0.1897	-
	<i>eqm</i>	0.1162	0.0468	0.2650	0.0471	0.1032	0.1090	-
	<i>SPR</i>	0.0884	0.0023*	0.0368	0.0027*	0.1043	0.1151	-
	<i>eqm</i>	0.0764	0.0397	0.1064	0.0396	0.0749	0.0813	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	-0.1213
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.1778
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2090	0.0204*	0.2179	0.0220*	0.2090	0.2044	-
	<i>eqm</i>	0.0278	0.0332	0.0643	0.0327	0.0278	0.0170	-
	<i>SPR</i>	0.1628	0.0535*	0.1353	0.0566*	0.1628	0.1743	-
	<i>eqm</i>	0.0207	0.0229	0.0436	0.0222	0.0207	0.0125	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1440
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0141
1000	<i>GPH</i>	0.2086	0.0216*	0.2064	0.0233*	0.2086	0.2085	-
	<i>eqm</i>	0.0278	0.0327	0.0628	0.0322	0.0278	0.0169	-
	<i>SPR</i>	0.1639	0.0549*	0.1326	0.0581*	0.1639	0.1772	-
	<i>eqm</i>	0.0209	0.0225	0.0430	0.0217	0.0209	0.0123	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1478
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0134
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.3530	0.0878*	0.3533	0.0927*	0.3508	0.3516	-
	<i>eqm</i>	0.1116	0.0976	0.2537	0.0946	0.0944	0.0980	-
	<i>SPR</i>	0.4665	0.0549*	0.4761	0.0584*	0.4723	0.4744	-
	<i>eqm</i>	0.0271	0.1192	0.0369	0.1168	0.0282	0.0342	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.0147
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.2276
1000	<i>GPH</i>	0.3565	0.0884*	0.3481	0.0933*	0.3558	0.3557	-
	<i>eqm</i>	0.1130	0.0973	0.2539	0.0942	0.0948	0.0998	-
	<i>SPR</i>	0.4689	0.0551*	0.4785	0.0586*	0.4755	0.4777	-
	<i>eqm</i>	0.0282	0.1190	0.0375	0.1167	0.0303	0.0374	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.0168
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.2255
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.3924	0.1767*	0.4031	0.1865*	0.3924	0.3927	-
	<i>eqm</i>	0.0247	0.0506	0.0602	0.0464	0.0247	0.0136	-
	<i>SPR</i>	0.4311	0.1581*	0.4490	0.1670*	0.4311	0.4211	-
	<i>eqm</i>	0.0140	0.0592	0.0263	0.0550	0.0140	0.0078	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3313
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0138
1000	<i>GPH</i>	0.3985	0.1774*	0.3997	0.1872*	0.3985	0.3952	-
	<i>eqm</i>	0.0260	0.0503	0.0613	0.0461	0.0260	0.0139	-
	<i>SPR</i>	0.4346	0.1585*	0.4446	0.1675*	0.4346	0.4243	-
	<i>eqm</i>	0.0144	0.0589	0.0257	0.0548	0.0144	0.0080	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3336
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0138

**Tabela D.13:** Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>2</sub>,  $\alpha = 0.8$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2132	0.2132	0.2106	0.2132	0.2070	0.2078	-
	<i>eqm</i>	0.0142	0.0142	0.0176	0.0142	0.0861	0.0698	-
	<i>SPR</i>	0.1897	0.1897	0.1813	0.1897	0.1192	0.1341	-
	<i>eqm</i>	0.0099	0.0099	0.0123	0.0099	0.0530	0.0433	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1599
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0108
1000	<i>GPH</i>	0.2130	0.2130	0.2059	0.2130	0.2146	0.2117	-
	<i>eqm</i>	0.0138	0.0138	0.0171	0.0138	0.0853	0.0665	-
	<i>SPR</i>	0.1890	0.1890	0.1767	0.1890	0.1207	0.1330	-
	<i>eqm</i>	0.0097	0.0097	0.0120	0.0097	0.0524	0.0431	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1581
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0107
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2066	0.2066	0.2080	0.2066	0.2020	0.2076	-
	<i>eqm</i>	0.0023	0.0023	0.0038	0.0023	0.0220	0.0116	-
	<i>SPR</i>	0.1985	0.1985	0.1969	0.1985	0.1621	0.1827	-
	<i>eqm</i>	0.0015	0.0015	0.0025	0.0015	0.0161	0.0085	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1930
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0015
1000	<i>GPH</i>	0.2055	0.2055	0.2043	0.2055	0.2033	0.2057	-
	<i>eqm</i>	0.0022	0.0022	0.0037	0.0022	0.0231	0.0120	-
	<i>SPR</i>	0.1980	0.1980	0.1945	0.1980	0.1638	0.1807	-
	<i>eqm</i>	0.0014	0.0014	0.0025	0.0014	0.0162	0.0087	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1922
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0014
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.3973	0.3973	0.3945	0.3973	0.4053	0.4075	-
	<i>eqm</i>	0.0108	0.0108	0.0158	0.0108	0.0862	0.0703	-
	<i>SPR</i>	0.4003	0.4003	0.3988	0.4003	0.3819	0.3906	-
	<i>eqm</i>	0.0079	0.0079	0.0107	0.0079	0.0441	0.0355	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3475
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0101
1000	<i>GPH</i>	0.4041	0.4041	0.4012	0.4041	0.4111	0.4064	-
	<i>eqm</i>	0.0106	0.0106	0.0143	0.0106	0.0893	0.0652	-
	<i>SPR</i>	0.4023	0.4023	0.3991	0.4023	0.3767	0.3835	-
	<i>eqm</i>	0.0076	0.0076	0.0093	0.0076	0.0474	0.0360	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3505
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0095
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4105	0.4105	0.4119	0.4105	0.4111	0.4142	-
	<i>eqm</i>	0.0024	0.0024	0.0039	0.0024	0.0243	0.0131	-
	<i>SPR</i>	0.4071	0.4071	0.4083	0.4071	0.3943	0.4030	-
	<i>eqm</i>	0.0016	0.0016	0.0026	0.0016	0.0147	0.0078	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3958
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0015
1000	<i>GPH</i>	0.4070	0.4070	0.4070	0.4070	0.4078	0.4081	-
	<i>eqm</i>	0.0023	0.0023	0.0037	0.0023	0.0239	0.0126	-
	<i>SPR</i>	0.4052	0.4052	0.4048	0.4052	0.3921	0.4003	-
	<i>eqm</i>	0.0015	0.0015	0.0025	0.0015	0.0146	0.0081	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3941
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0014

Tabela D.14: Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>3</sub>,  $\alpha = 0.8$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2043	-0.0198*	0.2046	-0.0062*	0.2032	0.2009	-
	<i>eqm</i>	0.0186	0.0499	0.0269	0.0443	0.1020	0.0733	-
	<i>SPR</i>	0.1775	0.0353*	0.1663	0.0438*	0.1123	0.1256	-
	<i>eqm</i>	0.0147	0.0285	0.0210	0.0261	0.0593	0.0488	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1337
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0189
1000	<i>GPH</i>	0.2073	-0.0216*	0.2071	-0.0077*	0.2094	0.2056	-
	<i>eqm</i>	0.0182	0.0507	0.0266	0.0449	0.0996	0.0726	-
	<i>SPR</i>	0.1792	0.0360*	0.1694	0.0446*	0.1184	0.1322	-
	<i>eqm</i>	0.0141	0.0283	0.0203	0.0259	0.0586	0.0479	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1347
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0181
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2020	0.2013	0.2037	0.2018	0.2060	0.2025	-
	<i>eqm</i>	0.0038	0.0030	0.0057	0.0029	0.0240	0.0132	-
	<i>SPR</i>	0.1920	0.1930	0.1905	0.1929	0.1693	0.1805	-
	<i>eqm</i>	0.0028	0.0022	0.0041	0.0022	0.0168	0.0096	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1864
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0022
1000	<i>GPH</i>	0.2008	0.2009	0.2020	0.2012	0.2048	0.2015	-
	<i>eqm</i>	0.0038	0.0030	0.0057	0.0030	0.0242	0.0133	-
	<i>SPR</i>	0.1919	0.1941	0.1888	0.1939	0.1679	0.1778	-
	<i>eqm</i>	0.0028	0.0022	0.0042	0.0022	0.0167	0.0098	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1865
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0022
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.3947	0.1293*	0.4055	0.1454*	0.4143	0.4114	-
	<i>eqm</i>	0.0159	0.0749	0.0227	0.0666	0.0920	0.0670	-
	<i>SPR</i>	0.4094	0.1191*	0.4159	0.1367*	0.4208	0.4245	-
	<i>eqm</i>	0.0090	0.0798	0.0131	0.0705	0.0393	0.0323	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3214
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0167
1000	<i>GPH</i>	0.3988	0.1283*	0.4044	0.1447*	0.4143	0.4124	-
	<i>eqm</i>	0.0161	0.0754	0.0231	0.0669	0.0871	0.0625	-
	<i>SPR</i>	0.4107	0.1188*	0.4126	0.1364*	0.4173	0.4210	-
	<i>eqm</i>	0.0093	0.0800	0.0135	0.0706	0.0380	0.0304	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3225
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0171
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4108	0.4109	0.4126	0.4112	0.4189	0.4180	-
	<i>eqm</i>	0.0038	0.0030	0.0056	0.0030	0.0212	0.0121	-
	<i>SPR</i>	0.4098	0.4099	0.4120	0.4100	0.4123	0.4152	-
	<i>eqm</i>	0.0026	0.0022	0.0037	0.0022	0.0117	0.0073	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3910
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0023
1000	<i>GPH</i>	0.4113	0.4114	0.4133	0.4118	0.4174	0.4161	-
	<i>eqm</i>	0.0040	0.0031	0.0057	0.0031	0.0220	0.0122	-
	<i>SPR</i>	0.4107	0.4105	0.4120	0.4106	0.4127	0.4136	-
	<i>eqm</i>	0.0027	0.0022	0.0037	0.0022	0.0133	0.0078	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3916
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0022



Tabela D.15: Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>4</sub>,  $\alpha = 0.8$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2206	-0.0145*	0.2204	-0.0184*	0.2192	0.2301	-
	<i>eqm</i>	0.0263	0.0469	0.0313	0.0486	0.0844	0.0604	-
	<i>SPR</i>	0.1787	0.0298*	0.1708	0.0282*	0.1390	0.1582	-
	<i>eqm</i>	0.0189	0.0301	0.0214	0.0306	0.0514	0.0385	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1155
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0260
1000	<i>GPH</i>	0.2207	-0.0140*	0.2168	-0.0178*	0.2134	0.2207	-
	<i>eqm</i>	0.0257	0.0467	0.0344	0.0483	0.0887	0.0655	-
	<i>SPR</i>	0.1788	0.0296*	0.1679	0.0280*	0.1307	0.1478	-
	<i>eqm</i>	0.0193	0.0302	0.0240	0.0307	0.0541	0.0417	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1138
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0273
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2090	0.0549*	0.2042	0.0547*	0.1960	0.2026	-
	<i>eqm</i>	0.0043	0.0221	0.0081	0.0222	0.0246	0.0134	-
	<i>SPR</i>	0.1956	0.0994*	0.1867	0.1009*	0.1633	0.1797	-
	<i>eqm</i>	0.0028	0.0113	0.0056	0.0109	0.0175	0.0094	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1842
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0031
1000	<i>GPH</i>	0.2086	0.0556*	0.2029	0.0554*	0.1990	0.2011	-
	<i>eqm</i>	0.0045	0.0220	0.0083	0.0221	0.0241	0.0138	-
	<i>SPR</i>	0.1957	0.0991*	0.1866	0.1006*	0.1634	0.1787	-
	<i>eqm</i>	0.0031	0.0114	0.0057	0.0111	0.0169	0.0098	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1851
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0032
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.3939	0.1233*	0.3891	0.1217*	0.3904	0.3981	-
	<i>eqm</i>	0.0230	0.0777	0.0313	0.0786	0.0779	0.0623	-
	<i>SPR</i>	0.4164	0.1067*	0.4194	0.1039*	0.4251	0.4299	-
	<i>eqm</i>	0.0130	0.0868	0.0182	0.0884	0.0356	0.0304	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2878
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0288
1000	<i>GPH</i>	0.4004	0.1249*	0.3964	0.1232*	0.4036	0.4079	-
	<i>eqm</i>	0.0234	0.0768	0.0325	0.0777	0.0763	0.0596	-
	<i>SPR</i>	0.4210	0.1080*	0.4233	0.1052*	0.4295	0.4324	-
	<i>eqm</i>	0.0132	0.0860	0.0175	0.0876	0.0332	0.0284	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2931
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0282
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4107	0.2435*	0.4133	0.2454*	0.4152	0.4163	-
	<i>eqm</i>	0.0041	0.0255	0.0081	0.0250	0.0213	0.0131	-
	<i>SPR</i>	0.4125	0.2349*	0.4164	0.2369*	0.4175	0.4189	-
	<i>eqm</i>	0.0027	0.0281	0.0050	0.0274	0.0132	0.0082	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3861
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0029
1000	<i>GPH</i>	0.4117	0.2449*	0.4119	0.2467*	0.4141	0.4137	-
	<i>eqm</i>	0.0043	0.0251	0.0082	0.0246	0.0227	0.0133	-
	<i>SPR</i>	0.4137	0.2358*	0.4168	0.2378*	0.4183	0.4179	-
	<i>eqm</i>	0.0028	0.0278	0.0051	0.0271	0.0128	0.0079	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3859
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0030

Tabela D.16: Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>5</sub>,  $\alpha = 0.8$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2217*	-0.0115*	0.1959	-0.0081*	0.2021	0.1988	-
	<i>eqm</i>	0.0356	0.0456	0.0463	0.0443	0.0766	0.0581	-
	<i>SPR</i>	0.1724*	0.0261*	0.1420	0.0286*	0.1243	0.1311	-
	<i>eqm</i>	0.0288	0.0316	0.0359	0.0309	0.0526	0.0431	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.0869
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0436
500	<i>GPH</i>	0.2150*	-0.0125*	0.1955	-0.0091*	0.2023	0.1970	-
	<i>eqm</i>	0.0355	0.0461	0.0461	0.0448	0.0832	0.0607	-
	<i>SPR</i>	0.1677*	0.0247*	0.1425	0.0272*	0.1248	0.1326	-
	<i>eqm</i>	0.0292	0.0321	0.0353	0.0314	0.0534	0.0428	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.0836
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0445
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
1000	<i>GPH</i>	0.2026	0.0587*	0.2020	0.0722*	0.2127	0.2035	-
	<i>eqm</i>	0.0064	0.0211	0.0102	0.0177	0.0224	0.0125	-
	<i>SPR</i>	0.1886	0.0975*	0.1819	0.1068*	0.1718	0.1793	-
	<i>eqm</i>	0.0044	0.0118	0.0071	0.0101	0.0160	0.0087	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1808
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0040
1000	<i>GPH</i>	0.1998	0.0571*	0.1999	0.0704*	0.2032	0.2013	-
	<i>eqm</i>	0.0063	0.0216	0.0105	0.0182	0.0239	0.0133	-
	<i>SPR</i>	0.1861	0.0955*	0.1802	0.1047*	0.1636	0.1772	-
	<i>eqm</i>	0.0044	0.0122	0.0074	0.0106	0.0172	0.0094	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1780
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0040
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4029*	0.1215*	0.3885	0.1282*	0.3969	0.3884	-
	<i>eqm</i>	0.0272	0.0783	0.0406	0.0747	0.0786	0.0548	-
	<i>SPR</i>	0.4265*	0.1001*	0.4227	0.1069*	0.4343	0.4262	-
	<i>eqm</i>	0.0157	0.0905	0.0201	0.0865	0.0355	0.0277	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2657
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0381
1000	<i>GPH</i>	0.4060*	0.1217*	0.3909	0.1286*	0.4043	0.3958	-
	<i>eqm</i>	0.0271	0.0782	0.0402	0.0746	0.0760	0.0546	-
	<i>SPR</i>	0.4312*	0.1012*	0.4292	0.1081*	0.4398	0.4335	-
	<i>eqm</i>	0.0155	0.0899	0.0201	0.0859	0.0339	0.0271	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2684
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0379
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4070	0.2414*	0.4061	0.2585*	0.4055	0.4033	-
	<i>eqm</i>	0.0058	0.0264	0.0091	0.0214	0.0222	0.0115	-
	<i>SPR</i>	0.4137	0.2317*	0.4162	0.2500*	0.4185	0.4164	-
	<i>eqm</i>	0.0039	0.0293	0.0059	0.0236	0.0123	0.0075	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3788
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0043
1000	<i>GPH</i>	0.4050	0.2406*	0.4058	0.2576*	0.4078	0.4048	-
	<i>eqm</i>	0.0057	0.0266	0.0091	0.0217	0.0216	0.0116	-
	<i>SPR</i>	0.4137	0.2321*	0.4169	0.2503*	0.4220	0.4181	-
	<i>eqm</i>	0.0040	0.0292	0.0062	0.0235	0.0125	0.0079	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3784
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0043

Tabela D.17: Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>6</sub>,  $\alpha = 0.8$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2045	-0.0210*	0.2029	-0.0220*	0.2003	0.2000	-
	<i>eqm</i>	0.0459	0.0494	0.0567	0.0499	0.0800	0.0628	-
	<i>SPR</i>	0.1477	0.0142*	0.1390	0.0143*	0.1272	0.1368	-
	<i>eqm</i>	0.0366	0.0356	0.0413	0.0355	0.0533	0.0444	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.0430
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0626
1000	<i>GPH</i>	0.2067	-0.0203*	0.2030	-0.0213*	0.2037	0.1987	-
	<i>eqm</i>	0.0432	0.0491	0.0560	0.0495	0.0814	0.0615	-
	<i>SPR</i>	0.1535	0.0147*	0.1387	0.0148*	0.1260	0.1349	-
	<i>eqm</i>	0.0349	0.0353	0.0410	0.0353	0.0541	0.0448	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.0505
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0587
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2041	0.0538*	0.2032	0.0502*	0.2013	0.2027	-
	<i>eqm</i>	0.0070	0.0227	0.0132	0.0237	0.0228	0.0135	-
	<i>SPR</i>	0.1876	0.0904*	0.1790	0.0893*	0.1618	0.1781	-
	<i>eqm</i>	0.0050	0.0135	0.0098	0.0137	0.0166	0.0100	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1735
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0054
1000	<i>GPH</i>	0.2052	0.0541*	0.2025	0.0504*	0.2026	0.2021	-
	<i>eqm</i>	0.0069	0.0226	0.0132	0.0237	0.0233	0.0136	-
	<i>SPR</i>	0.1904	0.0919*	0.1792	0.0908*	0.1652	0.1784	-
	<i>eqm</i>	0.0049	0.0131	0.0093	0.0134	0.0164	0.0097	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1755
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0054
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.3840	0.1069*	0.3803	0.1087*	0.3694	0.3715	-
	<i>eqm</i>	0.0363	0.0865	0.0497	0.0854	0.0730	0.0542	-
	<i>SPR</i>	0.4263	0.0821*	0.4332	0.0831*	0.4319	0.4331	-
	<i>eqm</i>	0.0190	0.1015	0.0210	0.1008	0.0288	0.0233	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2222
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0617
1000	<i>GPH</i>	0.3822	0.1076*	0.3720	0.1094*	0.3766	0.3736	-
	<i>eqm</i>	0.0350	0.0860	0.0495	0.0850	0.0714	0.0558	-
	<i>SPR</i>	0.4258	0.0824*	0.4287	0.0834*	0.4379	0.4311	-
	<i>eqm</i>	0.0201	0.1013	0.0215	0.1006	0.0292	0.0233	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.2236
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0607
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4070	0.2339*	0.4090	0.2337*	0.4054	0.4082	-
	<i>eqm</i>	0.0059	0.0288	0.0106	0.0288	0.0207	0.0114	-
	<i>SPR</i>	0.4183	0.2241*	0.4248	0.2230*	0.4276	0.4252	-
	<i>eqm</i>	0.0038	0.0319	0.0070	0.0322	0.0115	0.0074	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3755
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0048
1000	<i>GPH</i>	0.4050	0.2334*	0.4074	0.2332*	0.4080	0.4072	-
	<i>eqm</i>	0.0058	0.0289	0.0110	0.0289	0.0215	0.0116	-
	<i>SPR</i>	0.4159	0.2230*	0.4213	0.2219*	0.4257	0.4218	-
	<i>eqm</i>	0.0039	0.0323	0.0071	0.0326	0.0120	0.0075	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3732
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0052

Tabela D.18: Estimação de  $D$  para SARFIMA(0,  $D$ , 0)<sub>12</sub>,  $\alpha = 0.8$ .

D = 0.2								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.1875	-0.0176*	0.1878	-0.0180*	0.1933*	0.1881	-
	<i>eqm</i>	0.1066	0.0475	0.1453	0.0477	0.1108	0.1074	-
	<i>SPR</i>	0.1147	0.0020*	0.0737	0.0022*	0.1153*	0.1155	-
	<i>eqm</i>	0.0804	0.0398	0.0869	0.0397	0.0783	0.0807	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	-0.1218
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.1780
1000	<i>GPH</i>	0.1880	-0.0175*	0.1805	-0.0179*	0.1919*	0.1887	-
	<i>eqm</i>	0.1083	0.0474	0.1437	0.0476	0.1129	0.1092	-
	<i>SPR</i>	0.1114	0.0016*	0.0679	0.0018*	0.1128*	0.1126	-
	<i>eqm</i>	0.0806	0.0399	0.0881	0.0399	0.0786	0.0810	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	-0.1250
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.1808
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.2004	0.0043*	0.2001	0.0059*	0.1994	0.1947	-
	<i>eqm</i>	0.0143	0.0388	0.0265	0.0383	0.0230	0.0144	-
	<i>SPR</i>	0.1733	0.0446*	0.1607	0.0470*	0.1635	0.1705	-
	<i>eqm</i>	0.0113	0.0254	0.0195	0.0248	0.0177	0.0116	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1411
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0145
1000	<i>GPH</i>	0.2088	0.0060*	0.2109	0.0077*	0.2093	0.2023	-
	<i>eqm</i>	0.0146	0.0382	0.0261	0.0376	0.0227	0.0146	-
	<i>SPR</i>	0.1790	0.0466*	0.1691	0.0491*	0.1713	0.1763	-
	<i>eqm</i>	0.0108	0.0247	0.0185	0.0241	0.0167	0.0111	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.1458
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0137
D = 0.4								
n = 200								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.3277	0.0897*	0.3153	0.0925*	0.3293*	0.3270	-
	<i>eqm</i>	0.1181	0.0965	0.1455	0.0948	0.1193	0.1211	-
	<i>SPR</i>	0.4662	0.0550*	0.4560	0.0569*	0.4710*	0.4668	-
	<i>eqm</i>	0.0441	0.1191	0.0325	0.1179	0.0426	0.0454	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	-0.0076
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.2532
1000	<i>GPH</i>	0.3464	0.0907*	0.3271	0.0935*	0.3477*	0.3466	-
	<i>eqm</i>	0.1045	0.0958	0.1434	0.0941	0.1065	0.1066	-
	<i>SPR</i>	0.4795	0.0559*	0.4624	0.0578*	0.4837*	0.4806	-
	<i>eqm</i>	0.0415	0.1185	0.0313	0.1172	0.0405	0.0428	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.0024
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.2393
n = 1000								
RE		Método 1	Método 2	Método 3	Método 4	Método 5	Método 6	
500	<i>GPH</i>	0.4114	0.1668*	0.4042	0.1740*	0.4059	0.4056	-
	<i>eqm</i>	0.0116	0.0549	0.0230	0.0516	0.0209	0.0118	-
	<i>SPR</i>	0.4322	0.1443*	0.4349	0.1512*	0.4320	0.4300	-
	<i>eqm</i>	0.0069	0.0658	0.0119	0.0624	0.0108	0.0068	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3421
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0123
1000	<i>GPH</i>	0.4092	0.1667*	0.4088	0.1739*	0.4065	0.4039	-
	<i>eqm</i>	0.0123	0.0549	0.0250	0.0517	0.0216	0.0126	-
	<i>SPR</i>	0.4307	0.1440*	0.4390	0.1508*	0.4352	0.4294	-
	<i>eqm</i>	0.0069	0.0660	0.0127	0.0626	0.0111	0.0068	-
	<i>FT</i>	-	-	-	-	-	-	0.3413
	<i>eqm</i>	-	-	-	-	-	-	0.0127