Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática e Estatística

Programa de Pós-Graduação em Matemática

MINIMIZANTES QUASI-ABERTOS E PROPRIEDADE DA MÉDIA NO CONTEXTO NÃO-LOCAL

Tese de Doutorado

DANRLEI VAZ OLIVEIRA

Porto Alegre, 5 de fevereiro de 2025

Tese submetida por Danrlei Vaz Oliveira*, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Prof. Dr. Diego Marcon Farias (UFRGS)

Professor Coorientador:

Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino (UFRGS)

Banca examinadora:

Prof.ª Dra. Celene Buriol (UFSM)

Prof. Dr. Juliano Damião Bittencourt de Godoi (UFSM)

Prof. Dr. Maurício Fronza da Silva (UFSM)

Prof. Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano (UFRGS)

Data da apresentação: 05/02/2025

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) no período de 03/2020 a 07/2024

CIP - Catalogação na Publicação

Oliveira, Danrlei Vaz
MINIMIZANTES QUASI-ABERTOS E PROPRIEDADE DA MÉDIA NO CONTEXTO NÃO-LOCAL / Danrlei Vaz Oliveira. -- 2025.
68 f.
Orientador: Diego Marcon Farias.

Coorientador: Leonardo Prange Bonorino.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2025.

1. Equações Diferenciais Parciais. 2. Desigualdades Geométricas. 3. Laplaciano Fracionário. 4. Funções s-sub-harmônicas. 5. Propriedade da Média. I. Farias, Diego Marcon, orient. II. Bonorino, Leonardo Prange, coorient. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Agradecimentos

Aos meus pais, Juarez e Marinelza, sem os quais nada disto seria possível.

À Andressa, por todo apoio nestes anos ao meu lado, essencial para todas as minhas conquistas.

Aos meus amigos, Christian, Isadora, Juliana, Leonardo, Matheus, Poliana, Stephanie, que desde o mestrado têm contribuído, tanto matematicamente, quanto nos momentos de distração, necessários para superar os percalços do caminho.

Aos professores Diego Marcon Farias e Leonardo Prange Bonorino, por toda orientação, apoio e parceria ao longo deste processo.

Aos membros da banca examinadora, por terem aceitado ler meu trabalho.

A todos os professores que, direta ou indiretamente, contribuíram para minha formação.

À CAPES pelo apoio financeiro.

“It is impossible to be a mathematician without being a poet in soul”

Sofia Kovalevskaya

Resumo

Neste trabalho, investigamos novas propriedades do Laplaciano fracionário, um operador não-local que tem atraído grande atenção. Apresentamos dois resultados principais: o primeiro garante a existência de minimizantes quasi-abertos para um funcional relacionado a este operador, obtido através de propriedades de conjuntos com perímetro fracionário finito; o segundo apresenta uma versão não-local da Propriedade da Média para funções sub-harmônicas no contexto fracionário, obtido a partir de propriedades da transformada de Fourier e da solução fundamental do Laplaciano fracionário. Estes resultados se relacionam com a técnica do *Princípio de Seleção*, que permite restringir o estudo de desigualdades geométricas para uma classe de conjuntos regulares.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais, Desigualdades Geométricas e Funcionais, Laplaciano Fracionário, Funções s-Sub-Harmônicas, Propriedade da Média, Princípio de Seleção.

Abstract

In this work, we investigate new properties of the fractional Laplacian, a non-local operator that has received great attention. We present two main results: the first guarantees the existence of quasi-open minimizers for a functional related to this operator, obtained through properties of sets with finite fractional perimeter; the second presents a non-local version of the Mean Value Property for sub-harmonic functions in the fractional context, obtained from properties of the Fourier transform and of the fundamental solution of the fractional Laplacian. These results are related to the technique of the *Selection Principle*, which allows restricting the study of geometric inequalities to a class of regular sets.

Keywords: Partial Differential Equations, Geometric and Functional Inequalities, Fractional Laplacian, s-Subharmonic Functions, Mean Value Property, Selection Principle.

Índice

Introdução

Desigualdades Geométricas são tema de estudos desde a antiguidade e estão longe de perderem o seu interesse, a exemplo de [4, 5, 6, 8, 14], dentre outros. Muitas delas estão intrinsecamente relacionadas com Desigualdades Funcionais e Equações Diferenciais Parciais (EDP's), como por exemplo a Desigualdade Isoperimétrica e a Desigualdade de Sobolev, a primeira relaciona quantidades geométricas de conjuntos, enquanto a segunda relaciona normas de funções, sendo possível verificar em certos contextos que ambas são equivalentes e a Desigualdade de Faber-Krahn, que relaciona informações geométricas de um conjunto a partir de uma EDP.

Quando trabalhamos com subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que possuem boas regularidades (por exemplo, abertos com bordo suave), temos à disposição mais ferramentas na investigação de propriedades relacionadas à desigualdade em questão, por exemplo, fazendo estimativas para a função que parametriza o bordo do conjunto. Para uma discussão sobre algumas técnicas e recentes resultados envolvendo desigualdades geométricas e funcionais como as supracitadas, sugerimos a consulta de [13].

Nesse sentido, uma pergunta que surge é: quando é possível restringir o estudo de uma desigualdade geométrica à classe de conjuntos "bons o suficiente", ou, em outras palavras, sabendo que uma dada desigualdade é válida para conjuntos com boas regularidades, é possível concluir que a mesma é válida para qualquer conjunto?

Para tal abordagem, o trabalho revolucionário de Cicalese e Leonardi [8] introduz a técnica do *Princípio de Seleção*, utilizando-a para obter uma nova demonstração para uma versão quantitativa ótima da Desigualdade Isoperimétrica.

Em linhas gerais, a ideia do *Princípio de Seleção* se baseia em produzir uma sequência de conjuntos com boa regularidade (por exemplo, com fronteira C^1) a partir de uma família de conjuntos "ruins" que satisfazem uma certa condição. Uma vez que se tenha a desigualdade desejada válida para conjuntos regulares, supõe-se por absurdo que a mesma não vale para conjuntos mais gerais. Assim, é possível construir uma sequência de conjuntos que não satisfazem a desigualdade e, a partir do *Princípio de Seleção*, produz-se uma nova sequência de conjuntos "mais regulares" que preservam as propriedades dos anteriores, o que gera uma contradição. Esta técnica traz uma nova abordagem para desigualdades geométricas e funcionais, permitindo restringir seu estudo a conjuntos com melhores propriedades.

Seguindo o raciocínio descrito acima, Brasco, De Philippis e Velichkov [5] obtêm uma versão quantitativa ótima para uma desigualdade do tipo Faber-Krahn, primeiro mostrando que ela é válida para quaisquer conjuntos quase-esféricos, isto é, conjuntos suavemente próximos da bola unitária centrada na origem, e posteriormente estendendo esta desigualdade para conjuntos arbitrários a partir da construção realizada com o *Princípio de Seleção*. Isto envolve a análise dos minimizantes de um funcional definido para subconjuntos contidos em uma bola fixada, através de propriedades e estimativas relacionadas à solução de uma EDP associada.

O desenvolvimento desta técnica é bastante intrincada e requer análises profundas, uma vez que é intrinsecamente relacionada ao problema em questão. Em contrapartida, os resultados obtidos ao longo do processo se mostram interessantes por si só. Inspirados por este contexto, iniciamos este trabalho investigando propriedades similares às encontradas em [5], porém agora no contexto não-local do

Laplaciano fracionário.

Para a obtenção da sequência de conjuntos regulares através do *Princípio de Seleção*, primeiro é necessário considerar uma classe de conjuntos mais gerais, chamados de *quasi-abertos*, definidos na página 12, os quais possuem propriedades um pouco menos exigentes do que os conjuntos abertos. Neste sentido, o Capítulo 2 é dedicado ao estudo do funcional $\mathscr{G}_{\tilde{\eta},j}$, definido em (2.10), adequado ao propósito do *Princípio do Seleção*, e para o qual provamos o seguinte resultado:

Teorema. O ínfimo de $\mathscr{G}_{\tilde{\eta},j}$, dentre todos os conjuntos quasi-abertos contidos em uma bola fixada, é atingido por um conjunto quasi-aberto.

Este resultado é uma contraparte do caso local estabelecido em [5], onde a ideia utilizada para a demonstração se baseia na construção de uma sequência de conjuntos de nível do tipo $\{u_k > s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, onde s_k converge a 0, com perímetro (local) uniformemente limitado independente de $k \in \mathbb{N}$, da qual é possível extrair, através de resultados de compacidade, um conjunto limite. Devido à natureza não-local do operador que consideramos neste trabalho, não foi possível obter uma limitação uniforme no perímetro fracionário, definido na página 13. Para superar este problema, consideramos agora sequências de conjuntos com nível fixado do tipo $\{u_k > t_i\}_{k\in\mathbb{N}}$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Desta forma, obtemos um conjunto limite W_i, $i \in \mathbb{N}$, e com a construção dos níveis t_i's de modo que t_i converge a 0, após mais algumas análises conseguimos obter o minimizante desejado.

O próximo passo na investigação de melhores propriedades dos conjuntos minimizantes produzidos no Teorema acima, é mostrar que os conjuntos são na verdade abertos. Para este propósito, são necessárias análises mais refinadas acerca de sua função energia, como por exemplo, estimativas uniformes em uma vizinhança de um ponto no qual a média da função é pequena, dentre outras. Neste sentido, o Capítulo 3 investiga algumas propriedades de funções s-sub-harmônicas em geral, com relação à uma propriedade da média não-local adequada para as estimativas que desejamos, e que têm aplicações relacionadas à função energia mencionada acima. Desta forma, no Teorema 3.1.3 provamos a validade da seguinte propriedade da média não-local:

Teorema. Seja $0 < s < \frac{1}{2}$. Se $u \in H^s \cap L^\infty$ é uma função s-sub-harmônica em um aberto Ω, então para quase todo $x \in \Omega$ e $r > 0$ tais que $B_r(x) \subset \Omega$, vale

$$\underline{u}(x) \leq \int_{\mathcal{C}B_r(x)} \frac{u(y) C_{n,s} r^{2s}}{|x-y|^n \left(|x-y|^2 - r^2\right)^s} \, \mathrm{d}y,$$

onde $C_{n,s} > 0$ é uma constante adequada.

Com este e outros resultados auxiliares, obtemos uma estimativa local para funções com média não-local pequena, a qual é dada no Teorema 3.2.2:

Teorema. Se $u \in H^s \cap L^\infty$ satisfaz $(-\Delta)^s u \leq 1$ em $\mathbb{R}^n$ e

$$\int_{\mathcal{C}B_\rho(x_0)} \frac{u(y) C_{n,s} \rho^{2s}}{|y-x_0|^n (|y-x_0|^2 - \rho^2)^s} \, \mathrm{d}y \leq m\rho^s,$$

para certos parâmetros m,ρ, então

$$\sup_{B_{\frac{\kappa\rho}{4}}(x_0)} u \leq C(n,s)(m\rho^s + \rho^{2s}), \qquad \forall\, \kappa \in (0, 1/3).$$

Alguns resultados referentes à funções s-harmônicas e propriedade da média já são estabelecidos. Para citar alguns: em [1] o autor obtém uma representação para funções com regularidade $C^{2s+\varepsilon}$, a qual envolve o Laplaciano fracionário da função e a média não-local com a mesma função η_r que usamos aqui, e que pode ser usada para obter a propriedade da média para funções com tal regularidade; já em [22] o autor obtém uma propriedade da média para funções s-sub-harmônicas com uma função média diferente da que trabalhamos aqui.

Para finalizar, no Capítulo 4 delineamos algumas perspectivas para a continuação deste trabalho, que consiste em relacionar os dois capítulos antecessores no desenvolvimento do *Princípio de Seleção* neste contexto do operador Laplaciano fracionário.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste capítulo, introduzimos notações e definições que utilizamos ao longo do texto, bem como resultados necessários para o entendimento do texto e que fazem parte da teoria já estabelecida, sendo assim apenas enunciados sem demonstração. Também incluímos alguns resultados que acreditamos ser conhecidos, embora não tenhamos encontrado referências que os justifiquem e, portanto, incluímos as demonstrações dos mesmos para a conveniência do leitor.

1.1 Notações e definições

Ao longo de todo o texto consideramos $n \geq 2$.

Conjuntos de $\mathbb{R}^n$

(i) Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, denotamos o seu complementar por $\mathcal{C}A = \mathbb{R}^n \setminus A$, e o seu fecho topológico por $\overline{A}$;

(ii) Denotamos a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$ por $|x| = \sqrt{x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2}$, enquanto que o produto interno usual é denotado por $x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$, onde

$x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$;

(iii) Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$, denotamos por $B_t(x) = \{y \in \mathbb{R}^n;\ |x-y| < t\}$ a bola aberta de raio t centrada em x. Quando a bola tiver centro na origem, denotamos $B_t := B_t(0)$;

(iv) Denotamos a medida (de Lebesgue) de um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ por $|E|$. A medida da bola unitária de $\mathbb{R}^n$ é denotada por $\omega_n = |B_1|$;

(v) Dados dois conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$, denotamos a diferença simétrica entre A e B por

$$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,. \tag{1.1}$$

Observamos que $|A \,\Delta\, B| = 0$ se, e somente se, A e B são iguais a menos de um conjunto de medida nula;

(vi) Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$, definimos o conjunto

$$\{f > t\} := \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) > t\}.$$

Espaços de funções

(i) Dados $1 \leq p < \infty$ e $U \subset \mathbb{R}^n$, o espaço (das classes) de funções p-integráveis a *Lebesgue* em U é denotado por

$$L^p(U) = \left\{ f : U \to \mathbb{R};\ f \text{ é mensurável e } \int_U |f(x)|^p \,\mathrm{d}x < \infty \right\},$$

munido da norma

$$\|f\|_{L^p(U)} = \left(\int_U |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Usamos também a notação do produto interno

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_U f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad f, g \in L^2(U).$$

Quando $p = \infty$, definimos

$$\|f\|_{L^\infty(U)} = \sup_{x \in U} \operatorname{ess} |f(x)|.$$

Denotamos ainda por L^p_{loc} o espaço das funções que pertencem a $L^p(K)$ para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.

No caso em que $U = \mathbb{R}^n$, escrevemos simplesmente $L^p = L^p(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, para simplificar a escrita e facilitar a leitura, utilizamos também a notação

$$\int f = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \mathrm{d}x;$$

(ii) Dados um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{N}$, denotamos o espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ cujas derivadas parciais até a ordem k são contínuas,

$$C^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega) = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{R};\ \varphi \in C^\infty(\Omega) \ \text{ e } \ S(\varphi) \text{ é compacto}\},$$

onde $S(\varphi)$ é o suporte de φ, definido por $S(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega;\ \varphi(x) \neq 0\}}$.

(iii) O espaço de Schwartz das funções suaves cujas derivadas de qualquer ordem decaem mais rápido do que potências de x é denotado por

$$\mathscr{S} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n,\ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty\},$$

onde $\mathbb{N}_0^n = (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, com a notação usual de multi-índice $x^\alpha = {x_1}^{\alpha_1} \ldots {x_n}^{\alpha_n}$, e $D^\beta = \dfrac{\partial^{\beta_1}}{\partial {x_1}^{\beta_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\beta_n}}{\partial {x_n}^{\beta_n}}$. Em concordância, definimos $\mathscr{S}'$, o espaço dual de $\mathscr{S}$, chamado de espaço das distribuições temperadas. Dadas $u \in \mathscr{S}'$ e $\varphi \in \mathscr{S}$, denotamos a ação de u em φ por $u(\varphi)$.

(iv) Dados um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $s \in (0{,}1)$, definimos o espaço de Sobolev

$$H^s(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ [u]_{H^s(\Omega)} < \infty\},$$

onde consideramos a (semi)norma de Gagliardo:

$$[u]^2_{H^s(\Omega)} = \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Em particular, quando $\Omega = \mathbb{R}^n$, escrevemos apenas $H^s = H^s(\mathbb{R}^n)$ e, neste caso, $[\cdot]_s := [\cdot]_{H^s}$ é de fato uma *norma* em H^s já que a única (classe de) função constante em L^2 é a função nula em quase todo ponto. Além disso, consideramos também o produto interno em H^s

$$\langle u,v\rangle_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{1.2}$$

Salientamos, entretanto, que a norma usual do espaço $H^s(\Omega)$ é dada por

$$\|\cdot\|_{H^s(\Omega)} = (\|\cdot\|^2_{L^2(\Omega)} + [\cdot]^2_{H^s(\Omega)})^{\frac{1}{2}},$$

a qual o torna um espaço de Banach, e, no caso de H^s, um espaço de Hilbert. Denotamos por $H^s_0(\Omega)$ o espaço obtido pelo fecho de $C^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$ com respeito à norma $\|\cdot\|_{H^s}$.

Notações de funções

(i) Dada uma função $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, denotamos por f_+ a sua parte positiva, isto é,

$$f_+(x) = \max\{f(x),0\};$$

(ii) Dada uma função $f \in \mathscr{S}$, definimos a sua transformada de Fourier como

$$\mathfrak{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

enquanto que a transformada inversa de Fourier é dada por

$$\mathfrak{F}^{-1}f(x) = \check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n;$$

(iii) Dada $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$, definimos o representante preciso de f por

$$\underline{f}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\rho\to 0} \fint_{B_\rho(x)} f, & \text{se o limite existe,} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde

$$\fint_{B_\rho(x)} f = \frac{1}{|B_\rho(x)|}\int_{B_\rho(x)} f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad \rho > 0.$$

Observamos que $\underline{f} = f$ em *quase todo ponto* (q. t. p.), isto é, o conjunto onde $\underline{f} \neq f$ tem medida (de Lebesgue) nula. Para mais detalhes, sugerimos a consulta de [12];

(iv) Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, denotamos a sua função característica (ou indicadora) por

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \; x \in A, \\ 0, & \text{se } \; x \notin A; \end{cases}$$

(v) Dizemos que uma sequência de funções $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge para f em L^1_{loc} se, para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, vale

$$\int_K |f_j(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \longrightarrow 0, \quad \text{quando } \; j \to \infty;$$

(vi) Dados um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $v \in H^s(\Omega)$, consideramos o funcional

$$J[v] = \frac{c(n,s)}{4}[v]^2_{H^s} - \int_\Omega v(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1.3}$$

onde $c(n,s)$ é uma constante positiva adequada à nossa definição do operador Laplaciano fracionário (definido abaixo) e motivada pela Proposição 1.2.3;

(vii) Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definimos a s-energia de Ω como

$$E_s(\Omega) = \inf_{v \in H^s_0(\Omega)} J[v].$$

Denotamos por u_Ω a função que atinge o ínfimo acima, a qual chamamos de função s-energia de Ω. Sem risco de confusão, omitimos a ordem s por simplicidade.

Laplaciano fracionário

(i) Fixado $s \in (0,1)$, definimos o Laplaciano fracionário de $u \in \mathscr{S}$ por

$$\begin{aligned}(-\Delta)^s u(x) &= c(n,s)\,\text{V.P.}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}y \\ &= c(n,s)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathcal{C}B_\varepsilon(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde V.P. significa no sentido do Valor Principal, definido a partir do limite dado pela última igualdade. No caso em que $0 < s < 1/2$, a integral em $\mathbb{R}^n$ acima é convergente e, portanto, não é necessário considerá-la como Valor Principal (veja, por exemplo, [9, Obs. 3.1]).

(ii) Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que $u \in H^s$ é uma solução (no sentido das distribuições) da equação $(-\Delta)^s u = 1$ em Ω quando, para toda função teste $\varphi \in H_0^s(\Omega)$, vale:

$$\frac{c(n,s)}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Usando a notação (1.2), podemos reescrever a equação acima como

$$\frac{c(n,s)}{2}\langle u,\varphi\rangle_{H^s} = \int_\Omega \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall\, \varphi \in H_0^s(\Omega).$$

(iii) A solução fundamental do Laplaciano fracionário é denotada por

$$\Phi(x) = \frac{\mathcal{A}_{n,s}}{|x|^{n-2s}}, \qquad x \neq 0, \tag{1.5}$$

onde

$$\mathcal{A}_{n,s} = \frac{\Gamma(n/2-s)}{2^{2s}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(s)} > 0$$

é escolhida de modo que $(-\Delta)^s\Phi = \delta_0$ no sentido das distribuições, sendo δ_0 a distribuição Delta de Dirac centrada em zero, e Γ a função Gama. Uma prova deste fato é feito em [7, Teo. 2.3].

(iv) Outra função importante para os nossos propósitos é o paraboloide fracionário

$$\Psi_\rho(x) = \gamma_{n,s}(\rho^2 - |x|^2)_+^s, \quad \rho > 0, \tag{1.6}$$

onde

$$\gamma_{n,s} = \frac{\Gamma(n/2)}{2^{2s}\Gamma(1+s)\Gamma(n/s+s)} > 0$$

é escolhida de modo que $(-\Delta)^s\Psi_\rho = 1$ em B_ρ. Para maiores detalhes e construção desta função sugerimos a consulta de [10].

(v) Dizemos que uma função $u \in H^s$ é s-sub-harmônica em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ quando, para toda função teste $\varphi \in H_0^s(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, vale:

$$\frac{c(n,s)}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq 0. \tag{1.7}$$

Capacidade de ordem s e conjuntos quasi-abertos

(i) Dado um conjunto mensurável $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definimos a capacidade de ordem s (ou s-capacidade) de Ω como

$$\operatorname{cap}_s(\Omega) = \inf\left\{[v]_{H^s}^2;\ v \in H^s,\ v \geq 1 \text{ q. t. p. em uma vizinhança de } \Omega\right\}.$$

(ii) Um conjunto de s-capacidade nula é chamado de polar.

(iii) Dizemos que uma propriedade vale s-quasi em todo lugar, e escrevemos s-q.e.*, se o conjunto onde ela não for válida é um conjunto polar. Por simplicidade, escrevemos apenas capacidade quando não houver risco de confusão com relação à ordem s, bem como q.e. em lugar de s-q.e. e assim por diante;

*Ressaltamos aqui o emprego da notação $s-$q.e. emprestada do inglês s-quasi-everywhere, a qual é utilizada para enfatizar a diferença de almost everywhere (a.e.), no nosso caso q. t. p., e que se refere à medida de Lebesgue.

(iv) Dizemos que um conjunto mensurável $V \subset \mathbb{R}^n$ é s-quasi-aberto quando existe uma sequência decrescente $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ tal que $V \cup A_k$ é aberto, para todo $k \in \mathbb{N}$, e $\operatorname{cap}_s(A_k) \longrightarrow 0$ quando $k \to \infty$. Sem risco de confusão, omitiremos a ordem s por conveniência de escrita.

(v) Dizemos que uma função $u \in H^s$ é s-quasi-contínua se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $u|_{\mathcal{C}A}$ é contínua em $\mathcal{C}A$ e $\operatorname{cap}_s(A) < \varepsilon$. Para toda função $u \in H^s$, existe um único (a menos de um conjunto polar) representante u^* quasi-contínuo tal que $u^* = u$ q. t. p. (veja, por exemplo, [23, Teo. 3.7]). Assim, sem perda de generalidade, consideramos sempre o representante quasi-contínuo de $u \in H^s$, ainda que utilizamos u^* quando queremos enfatizar que a função em questão é quasi-contínua. Observamos que o conjunto $\{u^* > t\}$ é um quasi-aberto, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(vi) Dado um conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ quasi-aberto, definimos o espaço

$$H_0^s(V) := \{v \in H^s;\ \operatorname{cap}_s(\{v^* \neq 0\} \cap \mathcal{C}V) = 0\},$$

que é um subespaço fechado (na topologia forte) de H^s (veja a Proposição 1.3.3). Observamos que se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, então a definição de $H_0^s(\Omega)$ dada acima coincide com aquela da página 8 (veja a Proposição 1.3.4).

(vii) Analogamente ao que é feito para conjuntos abertos, dizemos que $u \in H_0^s(V)$ é uma solução de $(-\Delta)^s u = 1$ em V se, para toda $\varphi \in H_0^s(V)$, vale

$$\frac{c(n,s)}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.8}$$

(viii) Definimos também a energia de um conjunto quasi-aberto V como

$$E_s(V) = \inf_{v\in H_0^s(V)} J[v] = \inf_{v\in H_0^s(V)}\left\{\frac{c(n,s)}{4}[v]_{H^s}^2 - \int_V v\right\}.$$

Na Observação 1.2.9, verificamos que existe um único $v \in H_0^s(V)$ que atinge o ínfimo acima.

(ix) Denotamos por v_V a função que atinge o ínfimo acima, chamada de função energia do conjunto V. Neste caso, v_V é a única solução de

$$\begin{cases} (-\Delta)^s v = 1 & \text{em } V, \\ v = 0 & \text{em } \mathcal{C}V, \end{cases}$$

e, além disso, vale $V = \{v_V > 0\}$ a menos de um conjunto polar [20, Prop. 2.8].

Para maiores detalhes acerca de conjuntos quasi-abertos e s-capacidade, referenciamos [2, 20, 23].

Perímetro fracionário

Fixado $s \in (0,1)$, dado um conjunto mensurável $E \subset \mathbb{R}^n$, definimos o perímetro fracionário de ordem s (ou s-perímetro) de E como

$$P_s(E) = 2 \int_E \int_{\mathcal{C}E} \frac{1}{|x-y|^{n+s}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{1.9}$$

Dizemos ainda que um conjunto E tem s-perímetro finito quando $P_s(E) < \infty$.

Assimetria do baricentro

Dado um conjunto mensurável $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definimos o baricentro e a assimetria do baricentro de Ω, respectivamente, por

$$x_\Omega := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega y \,\mathrm{d}y, \qquad \alpha(\Omega) := \int_{\Omega \,\Delta\, B_1(x_\Omega)} \big|1 - |x - x_\Omega|\big| \,\mathrm{d}x. \tag{1.10}$$

Observamos que $\alpha(\Omega) = 0$ se, e somente se, Ω é uma bola de raio 1 (a menos de um conjunto de medida nula). Além disso, $\alpha(\cdot)$ é contínua com respeito à convergência de conjuntos em L^1_{loc}, ou seja, se $\mathbb{1}_{U_j} \longrightarrow \mathbb{1}_U$ em L^1_{loc}, quando $j \to \infty$, então $\alpha(U_j) \longrightarrow \alpha(U)$, quando $j \to \infty$.

Média não local de uma função

Introduzimos uma função que faz o papel de 'média' na integral:

$$\eta_r(x) := \begin{cases} 0, & \text{para} \quad |x| \leq r, \\ \dfrac{C_{n,s} r^{2s}}{|x|^n (|x|^2 - r^2)^s}, & \text{para} \quad |x| > r, \end{cases} \tag{1.11}$$

onde $C_{n,s}$ é escolhida de modo que $\displaystyle\int \eta_r = 1$ para todo $r > 0$. Como pode ser conferido em [7, Apêndice A.3]:

$$C_{n,s} = \left(\int_{\mathcal{C}B_1(0)} \frac{1}{|z|^n (|z|^2 - 1)^s} \, \mathrm{d}z \right)^{-1} = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2+1}} \operatorname{sen}(\pi s).$$

Com esta função média, podemos escrever a média fracionária de uma função u no "bordo não local" de $B_r(x)$ como

$$\int_{\mathcal{C}B_r(x)} \frac{C_{n,s} r^{2s} u(y)}{|x-y|^n (|x-y|^2 - r^2)^s} \, \mathrm{d}y = u * \eta_r(x).$$

É importante salientar a analogia com o caso local do Laplaciano usual (veja [11, Seção 2.2]), onde a média no bordo da bola B_r é dada em termos da função constante $\dfrac{1}{n\omega_n r^{n-1}}$:

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) \, \mathrm{d}S(y), \quad \text{para } u \text{ harmônica em } U \supset B_r(x).$$

Parâmetro s e constantes arbitrárias

Ao longo de todo o texto, a ordem do Laplaciano fracionário é um número real $s \in (0,1)$, salvo menção explícita em contrário. Além disso, utilizamos $C, C_1, C_2, \ldots,$ para representar constantes positivas arbitrárias, que podem ser alteradas de uma linha para outra, ficando explicitado, quando necessário, apenas os parâmetros de sua dependência.

1.2 Resultados preliminares

Nesta seção, elencamos algumas propriedades e resultados importantes relacionados aos elementos definidos na seção anterior que são essenciais ao longo do trabalho.

Começamos com duas proposições que reúnem algumas relações concernindo a transformada de Fourier.

Proposição 1.2.1. *Sejam f,$g \in \mathscr{S}$. Então valem:*

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi$; **(Teorema de Plancherel)**;

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)} \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} \,\mathrm{d}\xi$;

(iii) $\overline{\hat{g}} = \mathfrak{F}^{-1}\overline{g}$;

(iv) $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{f}\,\widehat{g}$.

Lembrando que o espaço de Schwarz $\mathscr{S}$ é denso em L^2, podemos estender as conclusões da proposição acima às funções em L^2.

Proposição 1.2.2. *Sejam f,$g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então valem:*

(i) $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{f}\widehat{g}$;

(ii) $\|\widehat{f * g}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$;

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)g(\xi) \,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\hat{g}(\xi) \,\mathrm{d}\xi$.

Para mais detalhes da transformada de Fourier e demonstrações dos resultados acima, sugerimos a consulta de [15, 16].

Abaixo, enunciamos alguns resultados que relacionam o operador Laplaciano fracionário com a transformada de Fourier. Maiores informações sobre os espaços

H^s e o operador $(-\Delta)^s$, bem como as demonstrações das três proposições a seguir, podem ser encontradas em [9].

Proposição 1.2.3 (Prop. 3.3)**.** *Para toda $u \in \mathscr{S}$ vale:*

$$(-\Delta)^s u = \mathfrak{F}^{-1}\left(|\xi|^{2s}\mathfrak{F}u\right), \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Proposição 1.2.4 (Prop. 3.4)**.** *O espaço H^s é equivalente ao espaço*

$$\widehat{H}^s := \left\{ f \in L^2;\ \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2s})|\hat{f}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi < \infty \right\},$$

e, em particular, para toda $v \in H^s$ vale:

$$[v]^2_{H^s} = \frac{2}{c(n,s)} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}|\hat{v}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi,$$

sendo

$$c(n,s) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(\zeta_1)}{|\zeta|^{n+2s}} \, \mathrm{d}\zeta \right)^{-1} = \frac{2^{2s} s\Gamma(n/2+s)}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(1-s)},$$

que é a mesma constante que aparece em (1.3)*.*

Conforme [9], os dois resultados acima permitem entender $(-\Delta)^s$ como um operador *pseudo-diferencial* de símbolo $|\xi|^{2s}$, de modo que é bem definido a ação $(-\Delta)^{\frac{s}{2}} : H^s \to L^2$, dada por $(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u = \mathfrak{F}^{-1}\left(|\xi|^s \mathfrak{F}u\right)$, $u \in H^s$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Proposição 1.2.5 (Prop. 3.6)**.** *Para toda $v \in H^s$ vale que*

$$[v]^2_{H^s} = \frac{2}{c(n,s)} \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} v\|^2_{L^2},$$

onde $c(n,s)$ é a mesma constante da Proposição 1.2.4.

Corolário 1.2.6. *Se $u,v \in H^s$, então vale*

$$\langle u,v \rangle_{H^s} = \frac{2}{c(n,s)} \langle (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u, (-\Delta)^{\frac{s}{2}} v \rangle_{L^2},$$

onde $c(n,s)$ é a mesma constante das proposições acima.

Demonstração. De fato, basta aplicar a Proposição 1.2.5 para a função $u+v \in H^s$ para obter o resultado. $\square$

Os próximos resultados, que são provados em [20, Prop. 2.1, Prop. 2.2], respectivamente, nos fornecem versões da Desigualdade de Poincaré e do Teorema de Rellich-Kondrachov para o espaço de Sobolev de um conjunto quasi-aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Observamos que para conjuntos abertos, tais resultados já são clássicos e podem ser conferidos em [9, 18].

Teorema 1.2.7. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto quasi-aberto de medida finita. Então, existe uma constante $C' = C'(n,s) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^2} \leq C'|\Omega|^{\frac{2s}{n}}[u]_{H^s}, \qquad \forall\, u \in H_0^s(\Omega).$$

Teorema 1.2.8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto quasi-aberto de medida finita. Então, para toda sequência limitada $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset H_0^s(\Omega)$, existe uma subsequência $\{f_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e uma função $f \in H_0^s(\Omega)$ tais que $f_{j_k} \longrightarrow f$ em $L^2(\Omega)$ quando $k \to \infty$.*

A seguir, reunimos algumas observações acerca da energia de conjuntos quasi-abertos.

Observação 1.2.9. Se $V \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto quasi-aberto de medida finita, então existe um único $v \in H_0^s(V)$ tal que

$$J[v] = \inf_{f\in H_0^s(V)} J[f].$$

De fato, pelo Teorema 1.2.7 podemos verificar que

$$J[f] \geq \frac{c(n,s)}{8}[f]_{H^s}^2 - \frac{|V|}{\varepsilon^2}, \qquad \forall\, f \in H_0^s(V),$$

onde $\varepsilon = \varepsilon(n,s,|V|) > 0$ é um parâmetro adequado, donde concluímos que J é coercivo em $H_0^s(V)$. Assim, pelos argumentos do Cálculo Variacional, juntamente com o Teorema 1.2.8, segue que existe um único minimizante $v \in H_0^s(V)$ para J.

Observação 1.2.10. Sejam $V \subset \mathbb{R}^n$ um quasi-aberto e $v \in H_0^s(V)$ uma função atingindo o ínfimo

$$\inf_{f \in H_0^s(V)} J[f].$$

Então, $(-\Delta)^s v = 1$ em V no sentido das distribuições, isto é, para toda $f \in H_0^s(V)$ vale

$$\frac{c(n,s)}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(v(x) - v(y))(f(x) - f(y))}{|x-y|^{n+2s}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_V f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Observação 1.2.11. Temos que $E_s(V) \leq 0$ para todo quasi-aberto $V \subset \mathbb{R}^n$. De fato, se $u \in H_0^s(V)$ é a função energia de V, então

$$\frac{c(n,s)}{2} \langle u, u \rangle_{H^s} = \int_V u,$$

e, consequentemente,

$$E_s(V) = \frac{c(n,s)}{4} [u]_{H^s}^2 - \int_V u = -\frac{1}{2} \int_V u = -\frac{c(n,s)}{2} [u]_{H^s}^2 \leq 0.$$

Observação 1.2.12. Dado $r > 0$, por reescala, segue que $E_s(B_r) = r^{2s+n} E_s(B_1)$. De fato, como $(-\Delta)^s \Psi_r = 1$ em B_r, sendo $\Psi_r(x) = \gamma_{n,s}(r^2 - |x|^2)_+^s$, pela observação acima:

$$E_s(B_r) = -\frac{1}{2} \int_{B_r} \gamma_{n,s}(r^2 - |x|^2)^s \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int_{B_1} \gamma_{n,s}(r^2 - |ry|^2)^s r^n \, \mathrm{d}y = r^{2s+n} E_s(B_1).$$

Observação 1.2.13. Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, a solução u_Ω do problema de contorno

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = 1, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \mathcal{C}\Omega, \end{cases}$$

é comumente chamada na literatura de função s-torção do conjunto Ω, e neste caso, a s-torção de Ω é dada por $T_s(\Omega) = \displaystyle\int_\Omega u_\Omega$. Com relação à definição de energia de Ω que adotamos, vale a relação $E_s(\Omega) = -\dfrac{1}{2} T_s(\Omega)$.

Além disso, se B_Ω é uma bola tal que $|\Omega| = |B_\Omega|$, então segue da caracterização variacional de T_s (veja [4]) e do Princípio de Pólya-Szegö não local (veja [3, Seção 9.2]) que $T_s(B_\Omega) \geq T_s(\Omega)$. Desta forma, temos $E_s(B_\Omega) \leq E_s(\Omega)$.

O resultado a seguir é um caso particular de [19, Prop. 2.13] e fornece a compacidade para o perímetro fracionário que precisamos no Capítulo 2.

Proposição 1.2.14. *Seja* $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de conjuntos em* $\mathbb{R}^n$ *com s-perímetro uniformemente limitado. Então, existem uma subsequência* $\{E_{j_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ *e um conjunto* $E \subset \mathbb{R}^n$ *tais que* E_{j_i} *converge localmente para* E*, isto é,*

$$\int_V \mathbb{1}_{E_{j_i}} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \int_V \mathbb{1}_E, \qquad \textit{para todo compacto } \ V \subset \mathbb{R}^n.$$

A proposição abaixo, que pode ser encontrada em [21, Lema 4.3], fornece uma Fórmula da Coarea para funções em

$$W^{s,1} := \left\{ f \in L^1; \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{n+s}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Proposição 1.2.15. *Para toda função* $f \in W^{s,1}$ *vale*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{n+s}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} P_s(\{f > t\})\,\mathrm{d}t.$$

O próximo resultado, que fornece uma estimativa para a diferença entre a assimetria do baricentro de dois conjuntos limitados, é demonstrado em [5, Lema 4.2(b)]:

Lema 1.2.16. *Seja* $R \geq 2$. *Existe uma constante* $d = d(R) > 0$ *tal que, para quaisquer* $\Omega_1, \Omega_2 \subset B_R$*, vale*

$$|\alpha(\Omega_1) - \alpha(\Omega_2)| \leq d|\Omega_1 \,\Delta\, \Omega_2|,$$

onde $\Omega_1 \,\Delta\, \Omega_2$ *é a diferença simétrica definida em* (1.1).

Reunimos na observação abaixo algumas propriedades sobre a solução fundamental do Laplaciano fracionário, definida em (1.5).

Observação 1.2.17. (i) Temos que Φ é semicontínua inferiormente, isto é, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e toda sequência $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $x_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} x$, vale

$$\liminf_{j\to\infty} \Phi(x_j) \geq \Phi(x);$$

(ii) Vale que

$$\int_{|x|>1} \frac{\Phi(x)}{|x|^{n+2s}}\,\mathrm{d}x = \int_{|x|>1} \frac{\mathcal{A}_{n,s}}{|x|^{2n}}\,\mathrm{d}x < \infty;$$

(iii) Por [17, Apêndice A.3]:

$$\int_{|y|>r} \frac{r^{2s}}{(|y|^2-r^2)^s|y|^n|x-y|^{n-2s}}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma(\frac{n}{2})\,\mathrm{sen}(\pi s)}\frac{1}{|x|^{n-2s}}, \qquad |x| \geq r;$$

(iv) Por [17, Apêndice A.4]:

$$\int_{|y|>r} \frac{r^{2s}}{(|y|^2-r^2)^s|y|^n|x-y|^{n-2s}}\,\mathrm{d}y < \frac{\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma(\frac{n}{2})\,\mathrm{sen}(\pi s)}\frac{1}{|x|^{n-2s}}, \qquad |x| < r;$$

(v) $\Phi \in \mathscr{S}'$, já que $\Phi \in L^1_{\mathrm{loc}}$ e $|\Phi| \leq \mathcal{A}_{n,s}$ para $|x| \geq 1$. Além disso, por [15, Teo. 2.4.6], no sentido das distribuições vale que $\widehat{\Phi} = 2^{-2s}|\xi|^{-2s}$, ou seja:

$$\widehat{\Phi}(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} 2^{-2s}|\xi|^{-2s}\widehat{\psi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad \forall\, \psi \in \mathscr{S}.$$

Observando que

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma(\frac{n}{2})\,\mathrm{sen}(\pi s)} = \frac{1}{C_{n,s}},$$

sendo $C_{n,s}$ a constante comparecendo na definição da função média η_r, segue de (iii) e (iv) acima que

$$\eta_r * \Phi \leq \Phi \quad \text{em} \;\; \mathbb{R}^n, \quad \text{e} \;\; \eta_r * \Phi = \Phi \quad \text{em} \;\; \mathbb{R}^n \setminus B_r.$$

Para finalizar os resultados preliminares, apresentamos um lema que nos será essencial para a demonstração do Teorema 3.1.3, sendo aplicado para a solução fundamental Φ na construção de uma função teste específica. Este resultado é o corolário do Lema 1.14 de [17, Seção 6, Cap. I].

Lema 1.2.18. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$, $f \not\equiv \infty$, que satisfaz as seguintes condições:*

(i) f é semicontínua inferiormente;

(ii) $\displaystyle\int_{|x|>1} \frac{|f(x)|}{|x|^{n+2s}}\,\mathrm{d}x < \infty;$

(iii) para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\rho > 0$ suficientemente pequeno, vale que $\eta_\rho * f(x) \leq f(x)$.

Então, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixado, a função $r \mapsto \eta_r * f(x)$ é decrescente.

1.3 Demonstrações complementares

Provamos aqui alguns resultados que acreditamos não serem novos, mas que não conhecemos uma demonstração em tais condições.

Começamos com uma proposição útil para analisar o conjunto de positividade do limite de uma sequência de funções em L^2, que usamos no próximo capítulo.

Proposição 1.3.1. *Sejam $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em L^2, $v \in L^2$, $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais, $W_k := \{u_k > t_k\}$, tais que:*

i) $u_k \longrightarrow v$ em L^2 quando $k \to \infty$;

ii) existe $M > 0$ tal que $\|u_k\|_{L^\infty} \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$;

iii) $t_k \longrightarrow 0$ quando $k \to \infty$;

iv) $W_k \longrightarrow W$ em L^1 quando $k \to \infty$, isto é, $\mathbb{1}_{W_k} \longrightarrow \mathbb{1}_W$ em L^1.

Então, $V := \{v > 0\} \subset W$ a menos de um conjunto de medida (de Lebesgue) nula.

Demonstração. De fato, suponhamos que $|V \setminus W| > 0$. Neste caso, segue

$$\begin{aligned}
\|v - (u_k - t_k)_+\|_{L^2} &\geq \|v - (u_k - t_k)_+\|_{L^2(V\setminus W)} \\
&\geq \|v\|_{L^2(V\setminus W)} - \|(u_k - t_k)_+\|_{L^2(V\setminus W)} \\
&\geq \|v\|_{L^2(V\setminus W)} - \|(u_k - t_k)_+\|_{L^2((V\setminus W)\cap W_k)} \\
&\geq \|v\|_{L^2(V\setminus W)} - \|(u_k - t_k)_+\|_{L^2(W \,\Delta\, W_k)},
\end{aligned}$$

onde $W \,\Delta\, W_k$ representa a diferença simétrica definida em (1.1). Agora, como

$$\|u_k\|_{L^2(W \,\Delta\, W_k)} \leq M|W \,\Delta\, W_k|^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0, \qquad \text{quando} \;\; k \to \infty,$$

concluímos que

$$\|v - (u_k - t_k)_+\|_{L^2} \geq \|v\|_{L^2(V\setminus W)} - \|(u_k - t_k)_+\|_{L^2(W \,\Delta\, W_k)} \longrightarrow \|v\|_{L^2(V\setminus W)} > 0,$$

o que é absurdo a não ser que $v = 0$ em quase todo ponto de $V \setminus W$, isto é, $V \subset W$ a menos de um conjunto de medida nula. □

A proposição a seguir é uma reformulação de [23, Lema 3.8], onde a s-capacidade é ligeiramente diferente da que definimos na página 11. Por este motivo resolvemos reescrever a demonstração feita nesta referência, a fim de explicitar alguns detalhes sutis:

Proposição 1.3.2. *Sejam $v, v_j \subset H^s$, $j \in \mathbb{N}$, tais que $\|v_j - v\|_{H^s} \longrightarrow 0$ quando $j \to \infty$. Então, existem um conjunto $P \subset \mathbb{R}^n$ e uma subsequência $\{v_{j_k}\}$ tais que*

$$\text{cap}_s(P) = 0, \qquad e \quad v^*_{j_k}(x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} v^*(x), \;\; \forall\, x \in \mathcal{C}P.$$

Demonstração. Consideremos $\{v_{j_k}\}$ uma subsequência tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \|v_{j_k} - v\|^2_{H^s} < \infty.$$

Definimos $f_k := v^*_{j_k}$, $G_k := \left\{x;\; |f_k(x) - v^*(x)| > \dfrac{1}{k}\right\}$, $k \in \mathbb{N}$, e $P := \displaystyle\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$. Dado $x \in \mathcal{C}P$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin G_k$ para todo $k \geq k_0$, isto é

$$|f_k(x) - v^*(x)| \leq \frac{1}{k}, \qquad \forall\, k \geq k_0,$$

e, consequentemente, $f_k(x) \longrightarrow v^*(x)$ para todo $x \in \mathcal{C}P$. Agora, para verificar que P tem s-capacidade nula, fixemos $\varepsilon > 0$ arbitrário. Daí, existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=N}^{\infty} k^2 \|f_k - v^*\|^2_{H^s} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Observando que G_k é um quasi-aberto, existe $A_k \subset \mathbb{R}^n$ aberto de modo que $G_k \cup A_k$ é aberto e $\operatorname{cap}_s(A_k) < \dfrac{\varepsilon}{2^{k+2}}$. Desta forma, existe $h_k \in H^s$ tal que $h_k \geq 1$ q. t. p. em uma vizinhança de A_k e $[h_k]^2_{H^s} \leq \operatorname{cap}_s(A_k) + \dfrac{\varepsilon}{2^{k+2}}$. Assim, como $k|f_k - v^*| > 1$ em G_k, segue que $k|f_k - v^*| + h_k \in H^s$ e $k|f_k - v^*| + h_k \geq 1$ q. t. p. em uma vizinhança de G_k e, consequentemente,

$$\begin{aligned}
\operatorname{cap}_s(G_k) &\leq [k|f_k - v^*| + h_k]^2_{H^s} \\
&\leq 2[k|f_k - v^*|]^2_{H^s} + 2[h_k]^2_{H^s} \\
&\leq 2\|k|f_k - v^*|\|^2_{H^s} + 2\operatorname{cap}_s(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \\
&\leq 2k^2\|f_k - v^*\|^2_{H^s} + \frac{\varepsilon}{2^k},
\end{aligned}$$

donde segue

$$\operatorname{cap}_s(P) \leq \sum_{k=N}^{\infty} \operatorname{cap}_s(G_k) \leq 2\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $\operatorname{cap}_s(P) = 0$. $\square$

Proposição 1.3.3. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto quasi-aberto, então o conjunto $H^s_0(\Omega)$ é um subespaço fechado (na topologia forte) de H^s.*

Demonstração. Sejam $u, v \in H^s_0(\Omega)$, $a, b \in \mathbb{R}$, tome $w := au + bv$. Então $w \in H^s$ e, como

$$\{w \neq 0\} \subset (\{u \neq 0\} \cup \{v \neq 0\}),$$

segue que $\operatorname{cap}_s(\{w \neq 0\} \cap \mathcal{C}\Omega) = 0$. Logo, $H^s_0(\Omega)$ é um espaço vetorial.

Agora, sejam $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset H^s_0(\Omega)$ e $v \in H^s$ tais que $v_j \longrightarrow v$ em H^s quando $j \to \infty$, ou seja,

$$\|v_j - v\|_{L^2} + [v_j - v]_{H^s} \longrightarrow 0, \qquad \text{quando} \;\; j \to \infty.$$

Pela Proposição 1.3.2, podemos escrever $V := \{v \neq 0\} = V_\infty \cup P$, onde

$$\operatorname{cap}_s(P) = 0, \qquad \text{e} \qquad v_j(x) \longrightarrow v(x) \quad \text{para todo} \quad x \in V_\infty.$$

Notemos que,

$$\begin{aligned} x \in V_\infty \quad &\iff \quad v(x) \neq 0 \ \text{ e } \ v_j(x) \longrightarrow v(x) \\ &\iff \quad \exists\, j_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tal que } v_j(x) \neq 0, \ \forall\, j \geq j_0 \\ &\iff \quad x \in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} V_k, \end{aligned}$$

onde $V_k = \{v_k \neq 0\}$. Portanto, $V_\infty \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} V_k$. Consequentemente,

$$\operatorname{cap}_s (V \cap \mathcal{C}\Omega) \leq \operatorname{cap}_s \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} V_k \cap \mathcal{C}\Omega \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{cap}_s (V_j \cap \mathcal{C}\Omega) = 0,$$

e, assim, $v \in H_0^s(\Omega)$. □

Para finalizar esta seção, justificamos a equivalência das definições do espaço de Sobolev $H_0^s(\Omega)$ quando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto. Para tal, consideramos a definição de capacidade dada por

$$\operatorname{CAP}_s(E) = \inf \left\{ \|u\|_{H^s}^2; \ u \in H^s \text{ e } u \geq 1 \ \text{ q. t. p. numa vizinhança de } \ E \right\}.$$

Conforme [23, Teo. 4.1] e [2, Teo. 10.1.1], vale

$$H_0^s(\Omega) = \{u \in H^s; \ \operatorname{CAP}_s (\{u^* \neq 0\} \cap \mathcal{C}\Omega) = 0\},$$

e, assim, é suficiente provar o seguinte resultado:

Proposição 1.3.4. *Sejam $R \geq 2$ e $E \subset B_R$. Então,*

$$\operatorname{cap}_s(E) = 0 \iff \operatorname{CAP}_s(E) = 0.$$

Demonstração. ($\Longleftarrow$) Imediato já que $[\cdot]_{H^s} \leq \| \cdot \|_{H^s}$.

($\Longrightarrow$) Consideramos $\varphi \in C_c^\infty(B_{2R})$ tal que

$$0 \leq \varphi \leq 1, \qquad \varphi \equiv 1 \text{ em } \ B_R, \qquad |\nabla \varphi| \leq C,$$

onde $C > 0$. Fixemos $\varepsilon > 0$ arbitrário e seja $u \in H^s$ tal que $u \geq 1$ q. t. p. numa vizinhança de E e

$$[u]_{H^s}^2 \leq \operatorname{cap}_s(E) + \varepsilon = \varepsilon. \tag{1.12}$$

Tomando $v = \varphi u$, temos $v \in H^s$ e $v = u \geq 1$ q. t. p. numa vizinhança de E. Assim,

$$\begin{aligned}
\operatorname{CAP}_s(E) &\leq \|v\|_{H^s}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi u(x) - \varphi u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi u(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&= (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}).
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Usando a Desigualdade de Hölder, combinada com $|\varphi| \leq 1$ e a Desigualdade de Sobolev fracionária [9, Teo. 6.5], obtemos

$$\begin{aligned}
(\mathrm{II}) &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi u(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{B_{2R}} |\varphi u(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\leq \left(\int_{B_{2R}} |\varphi u(x)|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \left(\int_{B_{2R}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C(n,s,R)\|u\|_{L^{2^*}}^2 \\
&\leq C[u]_{H^s}^2,
\end{aligned}$$

onde $C = C(n,s,R) > 0$, $2^* = \dfrac{2n}{n-2s}$ e $\dfrac{1}{q} + \dfrac{2}{2^*} = 1$. Agora, para (I) observamos que

$$\begin{aligned}
(\mathrm{I}) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi u(x) - \varphi u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&\leq 2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)u(x) - \varphi(x)u(y)|^2 + |\varphi(x)u(y) - \varphi(y)u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)|^2|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + 2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|^2|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&\leq 2[u]_{H^s}^2 + 2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|^2|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Agora, estimamos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathcal{C}B_{3R}} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}x + \int_{B_{3R}} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathcal{C}B_{3R}} \frac{|\varphi(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}x + \int_{B_{3R}} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}x \\ &= A_1 + A_2, \qquad y \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Notando que $\varphi(y) = 0$ para $|y| > 2R$, enquanto que $|\varphi(y)| \leq 1$ para $|y| \leq 2R$, segue

$$A_1 = \int_{\mathcal{C}B_{3R}} \frac{|\varphi(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathcal{C}B_{3R}} \frac{\mathbb{1}_{B_{2R}}(y)}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}x \leq \mathbb{1}_{B_{2R}}(y) \int_{|x|\geq 3R} \left(\frac{3}{|x|}\right)^{n+2s} \mathrm{d}x,$$

onde usamos que

$$|x-y| \geq \frac{|x|}{3}, \qquad \text{se } |y| \leq 2R \quad \text{e} \quad |x| \geq 3R.$$

Daí, existe $C = C(n,s,R) > 0$ de modo que $A_1 \leq C\mathbb{1}_{B_{2R}}(y)$. Agora, para estimar A_2, notemos que para $|y| < 4R$, usando que φ é Lipschitz, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_{3R}} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}x &\leq C^2 \int_{B_{3R}} \frac{1}{|x-y|^{n+2s-2}}\,\mathrm{d}x \\ &\leq C^2 \int_{B_{8R}(y)} \frac{1}{|x-y|^{n+2s-2}}\,\mathrm{d}x \\ &\leq C(n,s,R),\end{aligned}$$

enquanto que, para $|y| \geq 4R$, segue

$$|x-y| \geq \frac{|y|}{4}, \qquad \text{se} \quad |x| < 3R,$$

e, consequentemente,

$$\int_{B_{3R}} \frac{1}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}x \leq \int_{B_{3R}} \left(\frac{4}{|y|}\right)^{n+2s} \mathrm{d}x \leq \frac{C(n,s,R)}{|y|^{n+2s}}.$$

Assim, existe uma constante $C = C(n,s,R) > 0$ de modo que

$$A_2 \leq C\left(\mathbb{1}_{B_{4R}}(y) + \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{C}B_{4R}}(y)}{|y|^{n+2s}}\right), \qquad y \in \mathbb{R}^n.$$

Desta forma, observando que $\mathbb{1}_{B_{2R}}(y) \leq \mathbb{1}_{B_{4R}}(y)$, pelo Teorema de Fubini e as desigualdades de Hölder e Sobolev fracionária, segue

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|^2|\varphi(x)-\varphi(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^2\,(A_1+A_2)\,\mathrm{d}y \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^2 C\left(\mathbb{1}_{B_{4R}}(y) + \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{C}B_{4R}}(y)}{|y|^{n+2s}}\right)\mathrm{d}y \\
&= C\left(\int_{B_{4R}} |u(y)|^2\,\mathrm{d}y + \int_{\mathcal{C}B_{4R}} \frac{|u(y)|^2}{|y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}y\right) \\
&\leq C\|u\|_{L^{2^*}}^2 |B_{4R}|^{\frac{1}{q}} \\
&\qquad + C\|u\|_{L^{2^*}}^2 \left(\int_{|y|\geq 4R} |y|^{-q(n+2s)}\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C\|u\|_{L^{2^*}} \\
&\leq C(n,s,R)[u]_{H^s}^2,
\end{aligned}$$

onde $q > 1$ é novamente tal que $\dfrac{1}{q} + \dfrac{2}{2^*} = 1$. Assim, concluímos que

$$(\mathrm{I}) \leq C(n,s,R)[u]_{H^s}^2,$$

donde, por (1.13) e (1.12) segue

$$\mathrm{CAP}_s(E) \leq C[u]_{H^s}^2 \leq C\varepsilon,$$

onde $C = C(n,s,R) > 0$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos o resultado desejado. $\square$

Capítulo 2

Existência de minimizantes quasi-abertos

Neste capítulo, o principal resultado é o Teorema 2.2.2 que garante a existência de um minimizante quasi-aberto para o funcional $\mathscr{G}_{\tilde{\eta},j}$ definido em 2.10 para conjuntos quasi-abertos contidos na bola B_R. O método utilizado é do tipo de diagonal de Cantor.

2.1 Resultados auxiliares

Nesta seção, demonstramos dois resultados essenciais na prova do Teorema 2.2.2. Como não encontramos uma demonstração destes resultados nestes termos, e consideramos instrutivos os cálculos e estimativas obtidas, incluímos as provas, por conveniência.

Proposição 2.1.1. *Sejam $R \geq 2$, $\Omega \subset B_R$ um conjunto quasi-aberto e $u \in H_0^s(\Omega)$ a solução fraca de*

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = 1 \quad \text{em} \ \ \Omega, \\ u = 0 \qquad\quad \text{em} \ \ \mathcal{C}\Omega. \end{cases}$$

Então, $u \in L^\infty$, com

$$|u| \leq \gamma_{n,s} R^{2s},$$

onde $\gamma_{n,s}$ é a constante comparecendo na expressão do paraboloide fracionário Ψ_R definido em (1.6).

Demonstração. Vejamos que $u \leq \Psi_R$, onde Ψ_R é a solução de $(-\Delta)^s \Psi_R = 1$ em B_R, donde a conclusão do resultado segue uma vez que

$$\Psi_R(x) = \gamma_{n,s} \left(R^2 - |x|^2\right)_+^s \leq \gamma_{n,s} R^{2s}.$$

Seja $O := \{u > \Psi_R\}$ e suponhamos que $|O| > 0$. Observamos que $O \subset \Omega$, já que $u = 0$ fora de Ω. Tomamos $f := \min\{u, \Psi_R\}$ e escrevamos $u = f + v_1$, onde $v_1 := (u - \Psi_R)_+ > 0$ em O. Como $f \in H_0^s(\Omega)$, temos $J[f] \geq J[u]$, onde J é definido em (1.3), e, consequentemente,

$$\frac{c(n,s)}{4}[f + v_1]_{H^s}^2 - \int (f + v_1) \leq \frac{c(n,s)}{4}[f]_{H^s}^2 - \int f.$$

Logo, usando o produto interno associado:

$$J[v_1] \leq -\frac{c(n,s)}{2}\langle f, v_1\rangle_{H^s}. \tag{2.1}$$

Agora, tomamos $g := \max\{u, \Psi_R\} = \Psi_R + v_1$. Neste caso, $g \in H_0^s(B_R)$ e, pela unicidade do minimizante, $J[g] > J[\Psi_R]$. Assim,

$$-\frac{c(n,s)}{2}\langle \Psi_R, v_1\rangle_{H^s} < J[v_1]. \tag{2.2}$$

Por (2.1) e (2.2), concluímos que

$$\langle f, v_1\rangle_{H^s} < \langle \Psi_R, v_1\rangle_{H^s}. \tag{2.3}$$

Observando que $v_1 = 0$ e $f \leq \Psi_R$ em $\mathcal{C}O$, enquanto que $f = \Psi_R$ em O, temos

$$\begin{aligned}
\langle f, v_1 \rangle_{H^s} &= \langle f, v_1 \rangle_{H^s(O)} + \int_O \int_{\mathcal{C}O} \frac{(f(x) - f(y))(v_1(x) - v_1(y))}{|x-y|^{n+2s}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\mathcal{C}O} \int_O \frac{(f(x) - f(y))(v_1(x) - v_1(y))}{|x-y|^{n+2s}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + \langle f, v_1 \rangle_{H^s(\mathcal{C}O)} \\
&\geq \langle \Psi_R, v_1 \rangle_{H^s(O)} + \int_O \int_{\mathcal{C}O} \frac{(\Psi_R(x) - \Psi_R(y))(v_1(x) - v_1(y))}{|x-y|^{n+2s}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\mathcal{C}O} \int_O \frac{(\Psi_R(x) - \Psi_R(y))(v_1(x) - v_1(y))}{|x-y|^{n+2s}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \langle \Psi_R, v_1 \rangle_{H^s} \\
&> \langle f, v_1 \rangle_{H^s},
\end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto, devemos ter $g = \Psi_R$, ou seja, $u \leq \Psi_R$. $\square$

Proposição 2.1.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto quasi-aberto e $u \in H_0^s(\Omega)$ a sua função energia. Para $t > 0$, considere $V := \{u > t\}$ e $v := (u-t)_+$. Então, vale*

$$J[v] \leq E_s(V) + |\Omega| t. \tag{2.4}$$

Demonstração. De fato, observando que

$$[(u-t)_+]_{H^s} \leq [u-t]_{H^s} = [u]_{H^s},$$

segue

$$\begin{aligned}
J[v] &= \frac{c(n,s)}{4} [(u-t)_+]_{H^s}^2 - \int_V (u-t)_+ \\
&\leq \frac{c(n,s)}{4} [u]_{H^s}^2 - \int_\Omega u + \int_{\Omega \setminus V} u + t|V| \\
&\leq E_s(\Omega) + |\Omega| t \\
&\leq E_s(V) + |\Omega| t,
\end{aligned}$$

já que $V \subset \Omega \implies H_0^s(V) \subset H_0^s(\Omega)$, e, portanto, $E_s(\Omega) \leq E_s(V)$. $\square$

2.2 Existência de minimizantes

Nesta seção demonstramos o teorema principal deste capítulo, Teorema 2.2.2, que garante a existência de minimizantes quasi-abertos para o funcional $\mathscr{G}_{\tilde{\eta},j}$ que definimos logo mais. Antes disso, para a definição deste funcional, vamos considerar a função auxiliar f_η definida abaixo e o funcional $\mathscr{F}_{\tilde{\eta}}$ definido no próximo lema, ambos sendo necessários para a definição de $\mathscr{G}_{\tilde{\eta},j}$ dada em (2.10).

Consideramos a função

$$f_\eta(t) = \begin{cases} \eta(t-\omega_n), & \text{se } t \leq \omega_n, \\ (t-\omega_n)/\eta, & \text{se } t \geq \omega_n, \end{cases}$$

onde ω_n representa o volume da bola unitária de $\mathbb{R}^n$ e $0 < \eta < 1$ é um parâmetro por ser escolhido. Esta função tem o papel de *penalizar* os conjuntos com volume diferente da bola unitária na minimização dos funcionais deste capítulo.

Notemos que f_η satisfaz a seguinte condição de Lipschitz:

$$\eta(t_2 - t_1) \leq f_\eta(t_2) - f_\eta(t_1) \leq \frac{1}{\eta}(t_2 - t_1), \qquad \text{para quaisquer } \ 0 \leq t_1 \leq t_2. \tag{2.5}$$

O próximo resultado é o análogo do [5, Lema 4.5] para o caso fracionário.

Lema 2.2.1. *Para todo $R \geq 2$, existe um parâmetro positivo $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(n,R,s) < 1$ tal que, a menos de translação, B_1 é um minimizante de*

$$\mathscr{F}_{\tilde{\eta}}(\Omega) = E_s(\Omega) + f_{\tilde{\eta}}(|\Omega|) \tag{2.6}$$

dentre os subconjuntos quasi-abertos de B_R. Além disso, existe $C_4 = C_4(n,R,s) > 0$ tal que, para qualquer bola B_r, com $0 < r \leq R$, vale

$$\mathscr{F}_{\tilde{\eta}}(B_r) - \mathscr{F}_{\tilde{\eta}}(B_1) \geq \frac{|r-1|}{C_4}. \tag{2.7}$$

Demonstração. Se $\tilde{\Omega} \subset B_R$ é um minimizante de $\mathscr{F}_\eta$, então a bola $\tilde{B}$ com o mesmo volume de $\tilde{\Omega}$ satisfaz, pela conclusão após a Observação 1.2.13:

$$\mathscr{F}_\eta(\tilde{B}) = E_s(\tilde{B}) + f_\eta(|\tilde{B}|) \leq E_s(\tilde{\Omega}) + f_\eta(|\tilde{\Omega}|) = \mathscr{F}_\eta(\tilde{\Omega}).$$

Assim, existem bolas dentre os minimizantes de $\mathscr{F}_\eta$. Agora, vamos encontrar $\tilde{\eta} < 1$ para o qual B_1 é um minimizante. Para isso, seja $g(r) := \mathscr{F}_\eta(B_r)$, $0 < r \leq R$. Neste caso, pela definição de $\mathscr{F}_\eta$ e a Observação 1.2.12

$$g(r) = \begin{cases} r^{2s+n}E_s(B_1) + \eta\omega_n(r^n - 1), & \text{se } r \leq 1, \\ r^{2s+n}E_s(B_1) + \dfrac{\omega_n(r^n-1)}{\eta}, & \text{se } r \geq 1. \end{cases}$$

Vejamos que, com a escolha adequada de $\tilde{\eta}$, existe $C > 0$ tal que:

$$\lim_{r\to 1^-} g'(r) \leq -\frac{1}{C} \qquad \text{e} \qquad \lim_{r\to 1^+} g'(r) \geq \frac{1}{C}. \tag{2.8}$$

De fato, primeiro note que para $r > 1$:

$$\begin{aligned} g'(r) &= (n+2s)r^{n+2s-1}E_s(B_1) + \frac{n\omega_n}{\eta}r^{n-1} \\ &= r^{n-1}\left((n+2s)E_s(B_1)r^{2s} + \frac{n\omega_n}{\eta}\right), \end{aligned}$$

donde, para

$$\eta < \frac{n\omega_n}{(n+2s)(-E_s(B_1))R^{2s}} =: c_0$$

temos, novamente pela conclusão após a Observação 1.2.13, $g'(r) > 0$ para $1 < r \leq R$.

Por outro lado, para $r < 1$:

$$\begin{aligned} g'(r) &= (n+2s)r^{n+2s-1}E_s(B_1) + \eta\omega_n n r^{n-1} \\ &= r^{n-1}\left((n+2s)E_s(B_1)r^{2s} + n\omega_n\eta\right), \end{aligned}$$

e, neste caso, g possui um máximo em $r_0 = \left(\dfrac{n\omega_n\eta}{(n+2s)(-E_s(B_1))}\right)^{\frac{1}{2s}}$. Tomando

$$\eta \leq \frac{-E_s(B_1)}{2\omega_n} =: \frac{c_1}{2},$$

obtemos $r_0 < 1$ e

$$g(0) - g(1) = -\eta\omega_n - E_s(B_1) \geq \frac{-E_s(B_1)}{2} > 0. \tag{2.9}$$

Além disso, para

$$\eta \leq \frac{(n+2s)(n+2s-1)(-E_s(B_1))R^{2s}}{n(n-1)\omega_n} =: c_2$$

temos $g''(r) \leq 0$ para $0 < r < 1$.

Com a escolha

$$\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(n,R,s) := \frac{1}{2}\min\{c_0, c_1, c_2\},$$

segue que $r = 1$ é um minimizante de g. Para ver que $\tilde{\eta} < 1$, note que

$$\frac{(-E_s(B_1))}{2\omega_n} > 1 \implies \frac{\omega_n}{(-E_s(B_1))} < \frac{1}{2} \implies \frac{n\omega_n}{2(n+2s)(-E_s(B_1))R^{2s}} < \frac{1}{4},$$

enquanto que

$$\frac{n\omega_n}{2(n+2s)(-E_s(B_1))R^{2s}} > 1 \implies \frac{\omega_n}{(-E_s(B_1))} > 2 \implies \frac{(-E_s(B_1))}{2\omega_n} < \frac{1}{4}.$$

Logo, necessariamente ou $\frac{c_0}{2} < 1$ ou $\frac{c_1}{2} < 1$.

Assim, com tal escolha de $\tilde{\eta}$ temos:

- $\lim_{r\to 1^-} g'(r) = (n+2s)E_s(B_1) + n\omega_n\tilde{\eta} \leq 2sE_s(B_1) < 0$;
- $\lim_{r\to 1^+} g'(r) = (n+2s)E_s(B_1) + \frac{n\omega_n}{\tilde{\eta}} \geq (R^{2s}-1)(n+2s)(-E_s(B_1)) > 0$.

Assim, para concluir (2.8) basta tomar $c_3 := \frac{1}{2s(-E_s(B_1))}$.

Agora, seja $\varepsilon_0 > 0$ tal que $|g'(r)| \geq \frac{1}{2c_3}$ para todo $1-\varepsilon_0 < r < 1+\varepsilon_0$, e notemos que ε_0 só depende de n, R e s. Com isso, para $r \in (1-\varepsilon_0, 1+\varepsilon_0)$ vale que

$$|g(r) - g(1)| \geq \frac{|r-1|}{2c_3}.$$

Desta forma, para $r \in (1+\frac{\varepsilon_0}{2},R]$ segue

$$g(r) - g(1) \geq g\left(1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right) - g(1) > \frac{\varepsilon_0}{4c_3} > \frac{\varepsilon_0}{4(R-1)c_3}(r-1),$$

enquanto que, para $r \in (0,1)$, $g''(r) \leq 0$, ou seja, a função é côncava, logo, por (2.9), segue

$$\begin{aligned} g(r) \geq g(0) - r(g(0)-g(1)) &\implies g(r)-g(1) \geq (1-r)\,(g(0)-g(1)) \\ &\implies g(r)-g(1) \geq (1-r)\frac{(-E_s(B_1))}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente, para concluir o resultado basta tomar

$$C_4(n,R,s) = \max\left\{2c_3, \frac{4(R-1)c_3}{\varepsilon_0}, \frac{2}{(-E_s(B_1))}\right\}. \qquad \square$$

Estamos agora em condição de definir o funcional $\mathscr{G}_{\tilde{\eta},j}$, para o qual provamos a existência de minimizantes quasi-abertos.

Consideremos então

$$\mathscr{G}_{\tilde{\eta},j}(\Omega) := \mathscr{F}_{\tilde{\eta}}(\Omega) + \sqrt{\varepsilon_j^2 + \sigma^2(\alpha(\Omega)-\varepsilon_j)^2}, \tag{2.10}$$

definido para conjuntos quasi-abertos $\Omega \subset B_R$, onde $\varepsilon_j \longrightarrow 0$ quando $j \to \infty$, e $\sigma > 0$ é um parâmetro a ser escolhido.

Observamos que não é possível concluir imediatamente que uma bola de raio 1 é minimizante para $\mathscr{G}_{\tilde{\eta},j}$, já que o termo da raiz quadrada é minimizado em conjuntos com $\alpha(\Omega) = \varepsilon_j$, onde $\alpha(\cdot)$ é definido em (1.10). Entretanto, com a hipótese de que $\varepsilon_j \to 0$, é esperado que a sequência de minimizantes (que provamos existir no próximo resultado), se convergente, convirja a uma bola de raio 1 em algum sentido adequado.

No próximo resultado, que é o análogo fracionário de [5, Lema 4.6], mostramos que, para valores de σ pequenos, um minimizante de $\mathscr{G}_{\tilde{\eta},j}$ em B_R é um conjunto quasi-aberto.

Teorema 2.2.2. *Existe* $\sigma_1 = \sigma_1(n,R,s) > 0$ *tal que, se* $\sigma \leq \sigma_1$*, então o ínfimo*

$$\inf\{\mathscr{G}_{\tilde{\eta},j}(\Omega);\ \Omega \subset B_R\}$$

é atingido por um conjunto quasi-aberto Ω_j*.*

Demonstração. Para simplificar a notação, escrevemos $\mathscr{G} = \mathscr{G}_{\tilde{\eta},j}$. Seja $\{\mathcal{O}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência minimizante de $\mathscr{G}_{\tilde{\eta},j}$ em B_R satisfazendo

$$\mathscr{G}(\mathcal{O}_k) \leq \inf \mathscr{G} + \frac{1}{k}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \tag{2.11}$$

e consideremos $u_k \in H^s$ a função energia de $\mathcal{O}_k$, ou seja, $\mathcal{O}_k = \{u_k > 0\}$. Primeiramente, observemos que a sequência $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada em H^s, pois da Observação 1.2.11 e da Proposição 2.1.1, obtemos

$$\frac{c(n,s)}{4}[u_k]^2_{H^s} \leq \int_{\mathcal{O}_k} u_k \leq \gamma_{n,s}R^{2s}|\mathcal{O}_k| \leq C(n,R,s), \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

e, da mesma forma,

$$\|u_k\|_{L^2} \leq \gamma_{n,s}R^{2s}|\mathcal{O}_k| \leq C(n,R,s), \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Assim, pela Proposição 1.2.8, existe $v \in H^s_0(B_R)$ tal que, a menos de uma subsequência, $u_k \longrightarrow v$ em $L^2(B_R)$ (e fracamente em H^s) quando $k \to \infty$.

Sejam $t_1 = 1$ e $V_{1,k} = \{u_k > t_1\}$. Mostraremos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe um nível $s_{1,k} \in [0, t_1]$ de modo que os conjuntos de nível $\{u_k > s_{1,k}\}$ possuem $\frac{s}{2}$-perímetro limitado independente de k.

Agora, para $v_{1,k} = (u_k - t_1)_+$ e

$$\tilde{u_k}(x) := \begin{cases} u_k(x), & \text{se } \ x \notin V_{1,k}, \\ t_1, & \text{se } \ x \in V_{1,k}, \end{cases}$$

segue que $u_k = v_{1,k} + \tilde{u_k}$. Daí, temos

$$[u_k]^2_s = [v_{1,k}]^2_s + 2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(v_{1,k}(x) - v_{1,k}(y))(\tilde{u_k}(x) - \tilde{u_k}(y))}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + [\tilde{u_k}]^2_s.$$

Como

$$v_{1,k}(x) - v_{1,k}(y) = 0 \quad \text{se} \ \ x,y \notin V_{1,k}$$

e

$$\tilde{u_k}(x) - \tilde{u_k}(y) = 0 \quad \text{se} \ \ x,y \in V_{1,k},$$

obtemos

$$(v_{1,k}(x) - v_{1,k}(y))(\tilde{u_k}(x) - \tilde{u_k}(y)) =$$

$$= \begin{cases} (u_k(x) - t_1)(t_1 - u_k(y)), & \text{para} \ \ x \in V_{1,k}, \ y \notin V_{1,k}, \\ (t_1 - u_k(y))(u_k(x) - t_1), & \text{para} \ \ x \notin V_{1,k}, \ y \in V_{1,k}, \end{cases}$$

donde concluímos que $\langle v_{1,k}, \tilde{u_k} \rangle_{H^s} \geq 0$. Além disso,

$$(t_1 - u_k(y))(u_k(x) - t_1) = (u_k(y) - t_1)(t_1 - u_k(x))$$

e, portanto,

$$\langle v_{1,k}, \tilde{u_k} \rangle_{H^s} = 2 \int_{V_{1,k}} \int_{\mathcal{C}V_{1,k}} \frac{(u_k(x) - t_1)(t_1 - u_k(y))}{|x-y|^{n+2s}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

Consequentemente,

$$[u_k]_s^2 = [v_{1,k}]_s^2 + 4 \int_{V_{1,k}} \int_{\mathcal{C}V_{1,k}} \frac{(u_k(x) - t_1)(t_1 - u_k(y))}{|x-y|^{n+2s}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + [\tilde{u_k}]_s^2, \tag{2.12}$$

donde concluímos que

$$[\tilde{u_k}]_s^2 \leq [u_k]_s^2 - [v_{1,k}]_s^2. \tag{2.13}$$

Agora, como $v_{1,k} \in H_0^s(V_{1,k})$, vale

$$E_s(V_{1,k}) \leq \frac{c(n,s)}{4} [v_{1,k}]_s^2 - \int_{V_{1,k}} v_{1,k},$$

e, por (2.11) segue que

$$\frac{c(n,s)}{4}[u_k]_s^2 - \int_{\mathcal{O}_k} u_k + f_{\tilde{\eta}}(|\mathcal{O}_k|) + T_{j,\sigma}(\mathcal{O}_k) \leq$$

$$\frac{c(n,s)}{4}[v_{1,k}]_s^2 - \int_{V_{1,k}} v_{1,k} + f_{\tilde{\eta}}(|V_{1,k}|) + T_{j,\sigma}(V_{1,k}) + \frac{1}{k};$$

onde $T_{j,\sigma}(A) = \sqrt{\varepsilon_j^2 + \sigma^2(\alpha(A) - \varepsilon_j)^2}$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Usando que $t \mapsto \sqrt{\varepsilon_j^2 + \sigma^2(t - \varepsilon_j)^2}$ é uma função de Lipschitz com constante σ, juntamente com (2.5) e o Lema 1.2.16, obtemos a seguinte estimativa:

$$\frac{c(n,s)}{4}([u_k]_s^2 - [v_{1,k}]_s^2) + \tilde{\eta}(|\mathcal{O}_k| - |V_{1,k}|) \leq t_1|\mathcal{O}_k| + \sigma d|\{0 < u_k < t_1\}| + \frac{1}{k},$$

onde $d = d(R) > 0$. Com a escolha $\sigma_1 < \frac{\tilde{\eta}}{2d}$, para $\sigma \leq \sigma_1$ segue que $\sigma d < \frac{\tilde{\eta}}{2}$, e consequentemente,

$$\frac{c(n,s)}{4}([u_k]_s^2 - [v_{1,k}]_s^2) + \frac{\tilde{\eta}}{2}|\{0 < u_k < t_1\}| \leq t_1|B_R| + \frac{1}{k}, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Da Proposição 1.2.15, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{t_1} P_{\frac{s}{2}}(\{u_k > t\})\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} P_{\frac{s}{2}}(\{\tilde{u_k} > t\})\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\tilde{u_k}(x) - \tilde{u_k}(y)|}{|x-y|^{n+\frac{s}{2}}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &=: I_1 + I_2,\end{aligned}$$

onde, sendo $B = B_{2R}$,

$$I_1 = \int_B\int_B \frac{|\tilde{u_k}(x) - \tilde{u_k}(y)|}{|x-y|^{n+\frac{s}{2}}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad I_2 = 2\int_B\int_{\mathcal{C}B} \frac{|\tilde{u_k}(x) - \tilde{u_k}(y)|}{|x-y|^{n+\frac{s}{2}}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

Escrevendo também $B_{1,k} := B \setminus V_{1,k}$, como $\tilde{u_k} \equiv t_1$ em $V_{1,k}$, temos

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_B\int_B \frac{|\tilde{u_k}(x) - \tilde{u_k}(y)|}{|x-y|^{n+\frac{s}{2}}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{B_{1,k}}\int_{B_{1,k}} \frac{|\tilde{u_k}(x) - \tilde{u_k}(y)|}{|x-y|^{n+\frac{s}{2}}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + 2\int_{V_{1,k}}\int_{B_{1,k}} \frac{|\tilde{u_k}(x) - \tilde{u_k}(y)|}{|x-y|^{n+\frac{s}{2}}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= I_{1,1} + 2I_{1,2},\end{aligned}$$

donde, utilizando Cauchy–Schwarz, para $I_{1,1}$ obtemos a estimativa

$$\begin{aligned}I_{1,1} &= \int_{\mathcal{O}_k\setminus V_{1,k}}\int_{\mathcal{O}_k\setminus V_{1,k}} \frac{|\tilde{u_k}(x) - \tilde{u_k}(y)|}{|x-y|^{n+\frac{s}{2}}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + 2\int_{B\setminus\mathcal{O}_k}\int_{\mathcal{O}_k\setminus V_{1,k}} \frac{|\tilde{u_k}(x) - \tilde{u_k}(y)|}{|x-y|^{n+\frac{s}{2}}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\mathcal{O}_k\setminus V_{1,k}}\int_{\mathcal{O}_k\setminus V_{1,k}} \frac{|\tilde{u_k}(x) - \tilde{u_k}(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{O}_k\setminus V_{1,k}}\int_{\mathcal{O}_k\setminus V_{1,k}} \frac{1}{|x-y|^{n-s}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2\int_{B\setminus\mathcal{O}_k}\int_{\mathcal{O}_k\setminus V_{1,k}} \frac{|\tilde{u_k}(x)-\tilde{u_k}(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + 2\int_{B\setminus\mathcal{O}_k}\int_{\mathcal{O}_k\setminus V_{1,k}} \frac{1}{|x-y|^{n-s}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
\leq\ & \int_{B_{1,k}}\int_{B_{1,k}} \frac{|\tilde{u_k}(x)-\tilde{u_k}(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + 2\int_{\mathcal{O}_k\setminus V_{1,k}}\int_{B_{3R}(y)} \frac{1}{|x-y|^{n-s}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=\ & [\tilde{u_k}]^2_{H^s(B_{1,k})} + C(n,R,s)|\{0<u_k<t_1\}|,
\end{aligned}
$$

enquanto que, utilizando a Desigualdade de Hölder e fazendo uma mudança para coordenadas polares, para $I_{1,2}$ obtemos

$$
\begin{aligned}
I_{1,2} &\leq \left(\int_{V_{1,k}}\int_{B\setminus V_{1,k}} \frac{|\tilde{u_k}(x)-\tilde{u_k}(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{V_{1,k}}\int_{B\setminus V_{1,k}} \frac{1}{|x-y|^{n-s}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \left(\frac{n\omega_n(3R)^s}{s}|V_{1,k}|\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{V_{1,k}}\int_{B\setminus V_{1,k}} \frac{|\tilde{u_k}(x)-\tilde{u_k}(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Portanto, para $C_1 = C_1(n,R,s) > 0$ adequada, segue

$$
I_1 \leq [\tilde{u_k}]^2_{H^s(B_{1,k})} + C_1\left(|\{0<u_k<t_1\}| + \left(\int_{V_{1,k}}\int_{B_{1,k}} \frac{|\tilde{u_k}(x)-\tilde{u_k}(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right).
$$

Para I_2, novamente utilizando coordenadas polares:

$$
\begin{aligned}
I_2 = 2\int_B\int_{\mathcal{C}B} \frac{|\tilde{u_k}(x)-\tilde{u_k}(y)|}{|x-y|^{n+\frac{s}{2}}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= 2\int_{\mathcal{O}_k}\int_{\mathcal{C}B} \frac{|\tilde{u_k}(x)|}{|x-y|^{n+\frac{s}{2}}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&\leq 2t_1\int_{\mathcal{O}_k}\int_{\mathcal{C}B_R(x)} \frac{1}{|x-y|^{n+\frac{s}{2}}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&\leq C_2(n,R,s)t_1.
\end{aligned}
$$

Ainda, por (2.13) e (2.14) temos

$$
[\tilde{u_k}]^2_s \leq [u_k]^2_s - [v_{1,k}]^2_s \leq \frac{4}{c(n,s)}\left(t_1|B_R| + \frac{1}{k}\right) \leq C_3(n,R,s)t_1,
$$

e consequentemente,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t_1} P_{\frac{s}{2}}(\{u_k>t\})\,\mathrm{d}t &= I_1 + I_2\\
&\leq C_3t_1 + C_1\left(|\{0<u_k<t_1\}| + (C_3t_1)^{\frac{1}{2}}\right) + C_2t_1,
\end{aligned}
$$

donde, utilizando (2.14), para uma constante adequada $C = C(n,R,s) > 0$, concluímos:

$$
\tilde{\eta}\int_0^{t_1} P_{\frac{s}{2}}(\{u_k>t\})\,\mathrm{d}t \leq C(t_1+\sqrt{t_1}).
$$

Desta forma, existem $s_{1,k} \in [0, t_1]$ e um conjunto $W_{1,k} = \{u_k > s_{1,k}\}$ tais que:

$$P_{\frac{s}{2}}(W_{1,k}) \leq \frac{2\tilde{\eta}}{\tilde{\eta} t_1} \int_0^{t_1} P_{\frac{s}{2}}(\{u_k > t\})\, \mathrm{d}t \leq C\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t_1}}\right), \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Assim, pela Proposição 1.2.14, a menos de uma subsequência, existe um conjunto $W_1 \subset B_R$ tal que $\mathbb{1}_{W_{1,k}} \longrightarrow \mathbb{1}_{W_1}$ em $L^1(B_R)$. Além disso, a menos de outra subsequência, existe $s_1 \in [0, t_1]$ de modo que $s_{1,k} \longrightarrow s_1$. Notemos que $\{v > s_1\} \subset W_1$ pela Proposição 1.3.1. Se $s_1 = 0$, então encerramos a demonstração verificando que a sequência $W_{1,k}$ é minimizante para $\mathscr{G}$ e que W_1 é o conjunto quasi-aberto que buscamos (fazemos esse argumento de maneira geral mais adiante). Se $s_1 > 0$, então existe um índice $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $s_{1,k} > \dfrac{s_1}{2}$ para todo $k \geq k_1$. Consideremos então a subsequência anterior a partir deste índice.

Tomamos $t_2 = \min\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{s_1}{2}\right\}$, $V_{2,k} = \{u_k > t_2\}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_1$. Repetindo o argumento acima, encontramos, para cada k, um nível $s_{2,k} \in [0, t_2]$ e um conjunto $W_{2,k} = \{u_k > s_{2,k}\}$ tal que

$$P_{\frac{s}{2}}(W_{2,k}) \leq C\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t_2}}\right), \quad \forall\, k \geq k_1.$$

Novamente por compacidade, existe $W_2 \subset B_R$ tal que, a menos de subsequência, $\mathbb{1}_{W_{2,k}} \longrightarrow \mathbb{1}_{W_2}$ em $L^1(B_R)$, e $s_{2,k} \longrightarrow s_2 \in [0, t_2]$. Mais uma vez, se $s_2 = 0$, finalizamos a prova verificando que W_2 é o conjunto desejado. Observamos novamente que $\{v > s_2\} \subset W_2$ a menos de um conjunto de medida nula. Se $s_2 > 0$, então existe $k_2 \in \mathbb{N}$, $k_2 \geq k_1$, tal que $s_{2,k} > \dfrac{s_2}{2}$ para todo $k \geq k_2$. Desta forma, observamos ainda que

$$s_{2,k} \leq t_2 \leq \frac{s_1}{2} < s_{1,k}, \quad \forall\, k \geq k_2,$$

e, portanto, $W_{2,k} = \{u_k > s_{2,k}\} \supset \{u_k > s_{1,k}\} = W_{1,k}$, donde concluímos que $W_1 \subset W_2$.

Tomamos $t_3 = \min\left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{s_2}{2}\right\}$, $V_{3,k} = \{u_k > t_3\}$ e repetimos todo o argumento, concluindo então que existem $s_{3,k} \in [0, t_3]$ e $W_{3,k} = \{u_k > s_{3,k}\}$ tais que $P_{\frac{s}{2}}(W_{3,k}) \leq$

$C\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{t_3}}\right)$. Consequentemente,

$$\mathbb{1}_{W_{3,k}} \longrightarrow \mathbb{1}_{W_3} \text{ em } L^1(B_R), \qquad s_{3,k} \longrightarrow s_3 \in [0,t_3], \quad \text{quando } k \to \infty.$$

Mais uma vez, temos $\{v > s_3\} \subset W_3$.

Repetindo o processo indutivamente, temos duas possibilidades:

(I) Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s_m = 0$. Neste caso, vejamos que $\{W_{m,k}\}_{k \geq k_m}$, onde $W_{m,k} = \{u_k > s_{m,k}\}$, é uma sequência minimizante para $\mathscr{G}$. De fato, escrevendo $c[\cdot]_s = \dfrac{c(n,s)}{4}[\cdot]_{H^s}$ e usando a notação $T_{j,\sigma}$ já definida logo após (2.13), segue pelas propriedades Lipschitz de $f_{\tilde{\eta}}$ e $T_{j,\sigma}$

$$\begin{aligned}
\mathscr{G}\left(W_{m,k}\right) &\leq c[(u_k - s_{m,k})_+]_s^2 - \int_{W_{m,k}} (u_k - s_{m,k})_+ + f_{\tilde{\eta}}(|W_{m,k}|) + T_{j,\sigma}(W_{m,k}) \\
&\leq \mathscr{G}(\mathcal{O}_k) + \int_{\mathcal{O}_k} u_k - \int_{W_{m,k}} u_k + s_{m,k}|W_{m,k}| - f_{\tilde{\eta}}(|\mathcal{O}_k|) + f_{\tilde{\eta}}(|W_{m,k}|) \\
&\qquad - T_{j,\sigma}(\mathcal{O}_k) + T_{j,\sigma}(W_{m,k}) \\
&\leq \inf \mathscr{G} + \frac{1}{k} + s_{m,k}|\mathcal{O}_k| - (\tilde{\eta} - d\sigma)\,|\mathcal{O}_k \setminus W_{m,k}|,
\end{aligned}$$

donde, com a escolha de $\sigma_1 \leq \dfrac{\tilde{\eta}}{2d}$, concluímos que $\mathscr{G}(W_{m,k}) \longrightarrow \inf \mathscr{G}$ quando $k \to \infty$.

Além disso, observamos que $V := \{v^* > 0\} \subset W_m$, onde v^* é o representante quasi-contínuo de v. Por outro lado, podemos redefinir, se necessário, v^* como identicamente zero fora de V sem alterar os valores de $[v^*]_s$ e de $\displaystyle\int_V v^*$, uma vez que $v^* = 0$ q. t. p. em $\mathcal{C}V$, e desta forma temos $v^* \in H_0^s(V)$. Portanto, como $v^* = v$ q. t. p. segue

$$E_s(V) \leq J[v^*] = J[v].$$

Assim, pela semi-continuidade inferior de $[\cdot]_s$ e a convergência de $\left\{\mathbb{1}_{W_{m,k}}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ em

$L^1(B_R)$, temos

$$\begin{aligned}
&E_s(V) + f_{\tilde{\eta}}(|W_m|) + T_{j,\sigma}(W_m) \leq \\
&\quad \liminf_{k\to\infty} \left(c[u_k]_s^2 - \int_{W_{m,k}} (u_k - s_{m,k})_+ + f_{\tilde{\eta}}(|W_{m,k}|) + T_{j,\sigma}(W_{m,k}) \right) \\
&\quad \leq \inf \mathscr{G} \\
&\quad \leq E_s(V) + f_{\tilde{\eta}}(|V|) + T_{j,\sigma}(V),
\end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\tilde{\eta}|W_m \setminus V| \leq d\sigma |W_m \setminus V|.$$

Portanto, $\Omega_j = V$ é o minimizante quasi-aberto. Além disso, notemos que

$$P_{\frac{s}{2}}(\Omega_j) = P_{\frac{s}{2}}(W_m) \leq \liminf_{k\to\infty} P_{\frac{s}{2}}(W_{m,k}) \leq C\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t_m}}\right) < \infty.$$

(II) Encontramos sequências $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ e $\{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tais que:

i) para cada $i \in \mathbb{N}$, $s_i = \lim_{k\to\infty} s_{i,k}$, com $s_{i+1} < s_i$. Além disso, $s_i \to 0$ quando $i \to \infty$;

ii) para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{1}_{W_i}$ é o limite em $L^1(B_R)$ de $\mathbb{1}_{W_{i,k}}$, onde $W_{i,k} = \{u_k > s_{i,k}\}$. Neste caso, por construção temos $s_{i+1,k} \leq s_{i,k}$, e, consequentemente, $W_i \subset W_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$;

iii) notemos que, como $\sigma_1 \leq \dfrac{\tilde{\eta}}{2d}$, segue

$$\begin{aligned}
\mathscr{G}(W_{i,k}) &\leq c[(u_k - s_{i,k})_+]_s^2 - \int_{W_{i,k}} (u_k - s_{i,k})_+ + f_{\tilde{\eta}}(|W_{i,k}|) + T_{j,\sigma}(W_{i,k}) \\
&\leq \mathscr{G}(\mathcal{O}_k) + \int\limits_{\mathcal{O}_k} u_k - \int\limits_{W_{i,k}} u_k + s_{i,k}|W_{i,k}| - f_{\tilde{\eta}}(|\mathcal{O}_k|) + f_{\tilde{\eta}}(|W_{i,k}|) \\
&\qquad - T_{j,\sigma}(\mathcal{O}_k) + T_{j,\sigma}(W_{i,k}) \\
&\leq \inf \mathscr{G} + \frac{1}{k} + \int\limits_{\mathcal{O}_k \setminus W_{i,k}} u_k + s_{i,k}|W_{i,k}| + (d\sigma - \tilde{\eta})\,|\mathcal{O}_k \setminus W_{i,k}| \\
&\leq \inf \mathscr{G} + \frac{1}{k} + \int\limits_{B_R \setminus W_{i,k}} u_k + s_{i,k}|W_{i,k}|, \qquad i,k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Agora, tomando $V_i := \{v^* > s_i\}$, $V := \{v^* > 0\}$, pela Proposição 1.3.1 temos $V_i \subset W_i$ a menos de um conjunto de medida nula, $V_i \subset V_{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$, e, além disso, $\mathbb{1}_{V_i} \longrightarrow \mathbb{1}_V$ monotonamente e em $L^1(B_R)$ quando $i \to \infty$.

iv) $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência minimizante para $\mathscr{G}$. De fato, pela Proposição 2.1.2:

$$\begin{aligned}
\mathscr{G}(V_i) &\leq J[(v^* - s_i)_+] + f_{\tilde{\eta}}(|V_i|) + T_{j,\sigma}(V_i) \\
&\leq J[(v - s_i)_+] + f_{\tilde{\eta}}(|V_i|) + T_{j,\sigma}(V_i) \\
&\leq E_s(W_{i,k}) + \tfrac{5}{2}s_{i,k}|\mathcal{O}_k| - J[(u_k - s_{i,k})_+] + J[(v - s_i)_+] \\
&\quad + f_{\tilde{\eta}}(|V_i|) + T_{j,\sigma}(V_i) \\
&= \mathscr{G}(W_{i,k}) + \tfrac{5}{2}s_{i,k}|\mathcal{O}_k| + \tfrac{c(n,s)}{4}\left([(v - s_i)_+]_s^2 - [(u_k - s_{i,k})_+]_s^2\right) \\
&\quad + \int_{W_{i,k}} (u_k - s_{i,k})_+ - \int_{V_i} (v - s_i)_+ - f_{\tilde{\eta}}(|W_{i,k}|) + f_{\tilde{\eta}}(|V_i|) \\
&\quad - T_{j,\sigma}(W_{i,k}) + T_{j,\sigma}(V_i) \\
&\leq \inf \mathscr{G} + \frac{1}{k} + \tfrac{5}{2}s_{i,k}|B_R| + \tfrac{c(n,s)}{4}\left([(v - s_i)_+]_s^2 - [(u_k - s_{i,k})_+]_s^2\right) \\
&\quad + \int_{B_R} u_k - \int_{V_i} v + s_i|V_i| - f_{\tilde{\eta}}(|W_{i,k}|) + f_{\tilde{\eta}}(|V_i|) \\
&\quad - T_{j,\sigma}(W_{i,k}) + T_{j,\sigma}(V_i),
\end{aligned}$$

agora, como $u_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} v$ em $L^2(B_R)$, $f_{\tilde{\eta}}$ e $T_{j,\sigma}$ são contínuas com respeito à convergência em $L^1(B_R)$, e $[\cdot]_s^2$ é semicontínuo inferiormente, fazendo $k \to \infty$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathscr{G}(V_i) &\leq \inf \mathscr{G} + \int_{B_R \setminus V_i} v + s_i\left(|V_i| + \tfrac{5}{2}|B_R|\right) - f_{\tilde{\eta}}(|W_i|) + f_{\tilde{\eta}}(|V_i|) \\
&\quad - T_{j,\sigma}(W_i) + T_{j,\sigma}(V_i) \\
&\leq \inf \mathscr{G} + \int_{B_R \setminus V_i} v + s_i C|B_R| + (d\sigma - \tilde{\eta})\,|W_i \setminus V_i| \\
&\leq \inf \mathscr{G} + \int_{B_R \setminus V_i} v + s_i C|B_R| \\
&\overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \inf \mathscr{G}.
\end{aligned}$$

Finalmente, observando que, como $V_i \subset V$ para todo $i \in \mathbb{N}$, e $V = \lim_{i\to\infty} V_i$ em $L^1(B_R)$, segue $H_0^s(V_i) \subset H_0^s(V)$ e

$$\begin{aligned}\mathscr{G}(V) &= \inf_{f\in H_0^s(V)} J[f] + f_{\tilde{\eta}}(|V|) + T_{j,\sigma}(V) \\ &\leq \inf_{g\in H_0^s(V_i)} J[g] + f_{\tilde{\eta}}(|V_i|) + T_{j,\sigma}(V_i) \\ &\qquad + f_{\tilde{\eta}}(|V|) - f_{\tilde{\eta}}(|V_i|) + T_{j,\sigma}(V) - T_{j,\sigma}(V_i) \\ &\overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \inf \mathscr{G},\end{aligned}$$

donde segue que V minimiza $\mathscr{G}$ e, como $V = \{v^* > 0\}$ é um quasi-aberto, concluímos o resultado. □

Observação 2.2.3. Em virtude da natureza não-local do problema, não foi possível obter uma estimativa uniforme para o perímetro fracionário de conjuntos de nível do tipo $\{u_k > t_k\}$ com $t_k \to 0$, a partir da qual seria obtido de maneira mais direta o minimizante para $\mathscr{G}$. Isto levou à modificação (em relação ao que é feito em [5]) utilizando conjuntos com nível fixado $\{u_k > t_i\}$, requerendo outras abordagens para a obtenção do minimizante.

Observação 2.2.4. Observamos que no caso **(I)**, em que existe uma sequência de níveis convergindo para zero de modo que o $\frac{s}{2}$-perímetro é uniformemente limitado, obtemos o minimizante $\Omega_j = W_m$ com $\frac{s}{2}$-perímetro finito, limitado por uma constante que não depende de j.

Com algumas hipóteses adicionais (em concordância com [5]) podemos obter mais propriedades acerca dos minimizantes $\{\Omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ provenientes do teorema acima. Para isto, suponhamos que existem uma sequência $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset B_R$ e uma constante $C(\sigma) > 1$ satisfazendo:

$$|U_j| = |B_1|, \quad \alpha(U_j) = \varepsilon_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad E_s(U_j) - E_s(B_1) \leq C(\sigma)\varepsilon_j,\ j \in \mathbb{N}, \tag{2.15}$$

Proposição 2.2.5. *Sejam $\{\Omega_j\}$ a sequência de minimizantes de $\mathscr{G}_{\tilde{\eta},j}$ obtida no Teorema 2.2.2 e $\{U_j\}$ uma sequência de conjuntos satisfazendo* (2.15)*. Então, valem:*

(*a*) *Existe uma constante* $C_2(\sigma) > 0$ *tal que*

$$0 \leq \mathscr{F}_{\tilde{\eta}}(\Omega_j) - \mathscr{F}_{\tilde{\eta}}(B_1) \leq C_2(\sigma)\varepsilon_j \qquad e \qquad |\alpha(\Omega_j) - \varepsilon_j| \leq C_2(\sigma)\varepsilon_j;$$

(*b*) *Existe uma constante* $C_3(\sigma) > 0$ *tal que*

$$||\Omega_j| - |B_1|| \leq C(n,R,s)C_3(\sigma)\varepsilon_j.$$

Demonstração. Pela minimalidade de Ω_j e por (2.15):

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_{\tilde{\eta}}(\Omega_j) + \varepsilon_j &\leq \mathscr{F}_{\tilde{\eta}}(\Omega_j) + \sqrt{\varepsilon_j^2 + \sigma^2\left(\alpha(\Omega_j) - \varepsilon_j\right)^2} \\
&= \mathscr{G}_{\tilde{\eta},j}(\Omega_j) \\
&\leq \mathscr{G}_{\tilde{\eta},j}(U_j) \\
&= E_s(U_j) + f_{\tilde{\eta}}(|U_j|) + \sqrt{\varepsilon_j^2 + \sigma^2\left(\alpha(U_j) - \varepsilon_j\right)^2} \\
&= E_s(U_j) + \varepsilon_j \\
&\leq \mathscr{F}_{\tilde{\eta}}(B_1) + C_2(\sigma)\varepsilon_j.
\end{aligned}$$

Como B_1 é mínimo de $\mathscr{F}_{\tilde{\eta}}$, concluímos (*a*) com $C_2(\sigma) = C(\sigma) - 1$. Além disso, pela mesma conta acima segue

$$\sqrt{\varepsilon_j^2 + \sigma^2(\alpha(\Omega_j) - \varepsilon_j)^2} \leq C_2(\sigma)\varepsilon_j \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma^2\left(\alpha(\Omega_j) - \varepsilon_j\right)^2 \leq \varepsilon_j^2\left(C_2(\sigma)^2 - 1\right),$$

donde concluímos (*b*) tomando $C_3(\sigma) = \dfrac{\sqrt{C_2(\sigma)^2 - 1}}{\sigma}$.

Finalmente, lembrando que se B_j é uma bola com o mesmo volume de Ω_j, então $\mathscr{F}_{\tilde{\eta}}(B_j) \leq \mathscr{F}_{\tilde{\eta}}(\Omega_j)$ e, pelo Lema 2.2.1,

$$\mathscr{F}_{\tilde{\eta}}(B_j) - \mathscr{F}_{\tilde{\eta}}(B_1) \geq \frac{|r_j - 1|}{C_4},$$

onde $C_4 = C_4(n,R,s) > 0$ e $r_j = \left(\dfrac{|\Omega_j|}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}$. Logo, segue

$$||\Omega_j| - \omega_n| \leq C(n,R)\left||\Omega_j|^{\frac{1}{n}} - \omega_n^{\frac{1}{n}}\right| \leq C(n,R,s)C_3(\sigma)\varepsilon_j. \qquad \square$$

Observação 2.2.6. O item (a) da Proposição acima diz que a sequência de minimizantes $\{\Omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ preserva a desigualdade relacionada à energia que é satisfeita por $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, enquanto que (b) e (c) afirmam que, se existir o limite $\lim\limits_{j\to\infty} \mathbb{1}_{\Omega_j} =: \mathbb{1}_{\Omega}$ em $L^1(B_R)$, então necessariamente $|\Omega \,\Delta\, B_1| = 0$. Ou seja, a sequência de minimizantes $\{\Omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, se convergente, converge a uma bola unitária (a menos de uma translação ou de um conjunto de medida nula).

Capítulo 3

Propriedade da média para funções s-sub-harmônicas

Ao longo deste capítulo consideramos $0 < s < \frac{1}{2}$, o que permite obter mais propriedades das funções η_r e Φ, definidas em (1.11) e (1.5) respectivamente. A saber, com s neste intervalo, obtemos que $\eta_r \in L^2$ e que $\Phi \in L^1 + L^2$, assim possibilitando usar as propriedades da transformada de Fourier das Proposições 1.2.1 e 1.2.2, além de garantir que $\widehat{\Phi}$ é dada como uma função definida em quase todo ponto.

Estudamos aqui algumas propriedades de funções s-sub-harmônicas definidas em (1.7). O resultado principal é o Teorema 3.1.3, demonstrado na Seção 3.1, que garante uma propriedade da média para funções s-sub-harmônicas em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Na Seção 3.2 obtemos, como aplicação dos resultados da Seção 3.1, uma estimativa local para funções com média pequena.

3.1 Propriedade da média para funções s-sub-harmônicas

O objetivo principal desta seção é demonstrar o Teorema 3.1.3, que estabelece uma estimativa para funções s-sub-harmônicas em termos da sua média no "bordo não local".

Para realizar a prova do Teorema 3.1.3 são necessários alguns lemas auxiliares.

Lema 3.1.1. *Para quaisquer $u \in H^s$ e $\varphi \in H^{2s}$ vale*

$$\langle u,\varphi\rangle_{H^s} = \frac{2}{c(n,s)}\langle u, (-\Delta)^s\varphi\rangle_{L^2}. \tag{3.1}$$

Demonstração. Observando que $H^{2s} \subset H^s$, pelo Corolário 1.2.6 basta verificar que

$$\langle(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{s}{2}}\varphi\rangle_{L^2} = \langle u, (-\Delta)^s\varphi\rangle_{L^2}, \quad \forall\, \varphi \in H^{2s}.$$

Para isso, primeiro vamos mostrar que para $u \in H^s$, vale $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u = \mathfrak{F}^{-1}\left(|\xi|^s\hat{u}\right)$ no sentido das distribuições. De fato, dada $g \in \mathscr{S}$, pela Proposição 1.2.3 temos:

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(g) &= \int u\,(-\Delta)^{\frac{s}{2}}g \\
&= \int u\,\mathfrak{F}^{-1}\left(|\xi|^s\hat{g}\right) \\
&\overset{\star}{=} \int \overline{\hat{\overline{u}}}\,|\xi|^s\hat{g} \\
&= \overline{\int \hat{u}\,|\xi|^s\overline{\hat{g}}} \\
&\overset{\star\star}{=} \overline{\int |\xi|^s\hat{u}\,\mathfrak{F}^{-1}\overline{g}} \\
&= \overline{\int \mathfrak{F}^{-1}\left(|\xi|^s\hat{u}\right)\, g} \\
&= \mathfrak{F}^{-1}\left(|\xi|^s\hat{u}\right)(g),
\end{aligned}$$

onde em $\star$ e $\star\star$ foram usadas as propriedades da Proposição 1.2.1, além do fato de u e g serem funções reais. Pela Proposição 1.2.4 temos $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u = \mathfrak{F}^{-1}\left(|\xi|^s\hat{u}\right) \in L^2$, e, desta forma, dada $\varphi \in H^{2s}$:

$$\begin{aligned}
\langle (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u, (-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi \rangle_{L^2} &= \int (-\Delta)^{\frac{s}{2}} u \overline{(-\Delta)^{\frac{s}{2}} \varphi} \\
&= \int \mathfrak{F}^{-1} \left(|\xi|^s \hat{u} \right) \overline{\mathfrak{F}^{-1} \left(|\xi|^s \varphi \right)} \\
&= \int |\xi|^s \hat{u} \overline{|\xi|^s \hat{\varphi}} \\
&= \int \hat{u} \overline{|\xi|^{2s} \hat{\varphi}} \\
&= \int \hat{u} \, \overline{\mathfrak{F} \left(\mathfrak{F}^{-1} \left(|\xi|^{2s} \hat{\varphi} \right) \right)} \\
&= \int u \, \overline{\mathfrak{F}^{-1} \left(|\xi|^{2s} \hat{\varphi} \right)} \\
&= \int u \overline{(-\Delta)^s \varphi} \\
&= \langle u, (-\Delta)^s \varphi \rangle_{L^2}.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.1.2. *Seja $u \in H^s \cap L^\infty$ uma função s-sub-harmônica em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então, para quase todo $x \in \Omega$ e $0 < r_1 < r_2$, tal que $B_{r_2}(x) \subset \Omega$, vale $u * \eta_{r_1}(x) \leq u * \eta_{r_2}(x)$, onde η_r é a função média definida em* (1.11).

Demonstração. Sem perda de generalidade tomamos $x = 0$. A ideia é utilizar a Equação (1.7) com a função teste $\psi = \Phi * (\eta_{r_1} - \eta_{r_2})$, entretanto precisamos nos atentar a algumas sutilezas para garantir que essa é uma função teste adequada. Inicialmente, notamos que, pelo Lema 1.2.18 e a Observação 1.2.17, temos $\psi \geq 0$. Além disso, pelo item (iii) da mesma observação, para $|y| > r_2$ temos

$$\Phi * \eta_{r_1}(y) - \Phi * \eta_{r_2}(y) = \Phi(y) - \Phi(y) = 0,$$

logo $\psi \equiv 0$ em $\mathcal{C}B_{r_2}$.

Fixado $i \in \{1,2\}$, mostramos que $\psi_i = \Phi * \eta_{r_i} \in H^{2s}$ verificando a validade da relação

$$\widehat{\Phi * \eta_{r_i}} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{\Phi} \widehat{\eta_{r_i}}. \tag{3.2}$$

Observamos que Φ não pertence a nenhum espaço L^p, mas podemos escrever $\Phi = (\Phi - f_k) + f_k$, onde $f_k = \mathbb{1}_{\mathcal{C}B_k}\Phi \in L^2$, e $(\Phi - f_k) \in L^1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, já que $n - 4s > 0$. Neste caso, a transformada de Φ é definida q. t. p. já que

$$\widehat{\Phi} = \widehat{\Phi - f_k} + \widehat{f_k} \in L^\infty + L^2.$$

Desta forma, como $\eta_{r_i} \in L^1 \cap L^2$, pelas Proposições 1.2.1 e 1.2.2, segue que

$$\widehat{\Phi * \eta_{r_i}} = \widehat{(\Phi - f_k) * \eta_{r_i}} + \widehat{f_k * \eta_{r_i}} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{(\Phi - f_k)}\widehat{\eta_{r_i}} + (2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{f_k}\widehat{\eta_{r_i}},$$

e, portanto, $\widehat{\Phi * \eta_{r_i}} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{\Phi}\widehat{\eta_{r_i}}$.

Finalmente, pela propriedade (v) da Observação 1.2.17 temos

$$|\xi|^{2s}\widehat{\Phi * \eta_{r_i}} = C|\xi|^{2s}\widehat{\Phi}\widehat{\eta_{r_i}} = C\widehat{\eta_{r_i}} \in L^2,$$

e, pela Proposição 1.2.4, concluímos que $\Phi * \eta_{r_i} \in H^{2s}$. Portanto, $\psi \in H_0^{2s}(B_{r_2})$, e, desta forma, pelo Lema 3.1.1 segue

$$0 \geq \langle u, \psi \rangle_{H^s} = \langle u, (-\Delta)^s \psi \rangle_{L^2} = u * \eta_{r_1}(0) - u * \eta_{r_2}(0),$$

donde concluímos o resultado desejado.

O caso geral $x \neq 0$ pode ser obtido considerando a função $u_x(y) := u(y + x)$, que é s-sub-harmônica em $\Omega - \{x\}$. Assim, para $0 < r_1 < r_2$ tal que $B_{r_2}(x) \subset \Omega$, segue que $B_{r_2}(0) \subset \Omega - \{x\}$ e, como

$$u * \eta_{r_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x - y)\eta_{r_i}(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} u_x(-y)\eta_{r_i}(y) = u_x * \eta_{r_i}(0), \quad i = 1,2,$$

provamos o resultado. $\square$

Teorema 3.1.3. *Seja $u \in H^s \cap L^\infty$ uma função s-sub-harmônica em um conjunto aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então, para quase todo $x \in \Omega$ e $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset \Omega$ vale:*

$$\underline{u}(x) \leq \int_{\mathcal{C}B_r(x)} \frac{C_{n,s} r^{2s} u(y)}{|x - y|^n (|x - y|^2 - r^2)^s}\, dy. \tag{3.3}$$

Demonstração. Pelo Lema acima, para quase todo $x \in \Omega$, a função $r \mapsto u * \eta_r(x)$ é decrescente e limitada por baixo, logo converge. Assim basta verificar que de fato converge para $\underline{u}(x)$ em quase todo $x \in \Omega$.

Sem perda de generalidade, consideramos $x = 0$. Observando que $\Omega \subset B_R$, para algum $R > 0$ e utilizando a mudança de variáveis $y = rz$, temos:

$$\int_{\complement B_r} \frac{C_{n,s} r^{2s} u(y)}{|y|^n(|y|^2 - r^2)^s} \, dy = \int_{\complement B_1 \cap B_R} \frac{C_{n,s} u(rz)}{|z|^n(|z|^2 - 1)^s} \, dz = \int_{\complement B_1 \cap B_R} u(rz)\eta_1(z) \, dz.$$

Seja $0 < \delta < 1$ a ser escolhido posteriormente. Como $\int \eta_r = 1$ para todo $r > 0$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\complement B_r} u(y)\eta_r(y) \, dy - \underline{u}(0) &= \int_{\complement B_1 \cap B_R} u(rz)\eta_1(z) \, dz - \int_{\complement B_1} \underline{u}(0)\eta_1(z) \, dz \\ &= I_1 + I_2 - I_3, \end{aligned}$$

onde

$$I_1 = \int_{B_{R+\frac{1}{\delta}} \setminus \overline{B_{1+\delta}}} (u(rz) - \underline{u}(0))\eta_1(z) \, dz, \qquad I_2 = \int_{B_{1+\delta} \setminus \overline{B_1}} (u(rz) - \underline{u}(0))\eta_1(z) \, dz,$$

e

$$I_3 = \int_{\complement B_{R+\frac{1}{\delta}}} \underline{u}(0)\eta_1(z) \, dz.$$

Agora, observamos que:

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int_{B_{R+\frac{1}{\delta}} \setminus \overline{B_{1+\delta}}} \frac{C_{n,s}|u(rz) - \underline{u}(0)|}{|z|^n(|z|^2 - 1)^s} \, dz \\ &\leq \frac{C_{n,s}}{(1+\delta)^n(2\delta + \delta^2)^s} \int_{B_{R+\frac{1}{\delta}} \setminus \overline{B_{1+\delta}}} |u(rz) - \underline{u}(0)| \, dz \\ &= \frac{C_{n,s}}{(1+\delta)^n(2\delta + \delta^2)^s} \int_{B_{r(R+\frac{1}{\delta})} \setminus \overline{B_{r(1+\delta)}}} |u(y) - \underline{u}(0)| r^{-n} \, dy \\ &\leq \frac{C_{n,s}}{\delta^{2s}} \left(R + \frac{1}{\delta}\right)^n \fint_{B_{r(R+\frac{1}{\delta})}} |u(y) - \underline{u}(0)| \, dy \\ &\qquad + (1+\delta)^n \fint_{\overline{B_{r(1+\delta)}}} |u(y) - \underline{u}(0)| \, dy, \end{aligned}$$

enquanto que

$$\begin{aligned}|I_2| &\leq \int_{B_{1+\delta}\setminus\overline{B_1}} |u(rz) - \underline{u}(0)|\eta_1(z)\,\mathrm{d}z \\ &\leq (\|u\|_{L^\infty} + |\underline{u}(0)|) \int_{B_{1+\delta}\setminus\overline{B_1}} \eta_1(z)\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned}|I_3| &= \left|\int_{\mathcal{C}B_{R+\frac{1}{\delta}}} \underline{u}(0)\eta_1(z)\,\mathrm{d}z\right| \\ &\leq |\underline{u}(0)| \int_{\mathcal{C}B_{R+\frac{1}{\delta}}} \frac{C_{n,s}}{|z|^n(|z|^2-1)^s}\,\mathrm{d}z \\ &\leq |\underline{u}(0)|C_{n,s}n\omega_n \int_{R+\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{1}{t(t^2-1)^s}\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{|\underline{u}(0)|C_{n,s}n\omega_n}{(R-1)^s} \int_{R+\frac{1}{\delta}}^{\infty} t^{-1-s}\,\mathrm{d}t \\ &= |\underline{u}(0)|C_1(n,s,R)\frac{1}{(R+\frac{1}{\delta})^s}.\end{aligned}$$

Fixe $\varepsilon > 0$. Como $\eta_1 \in L^1$, é possível escolher $\delta_0 = \delta_0(n,s,u,R,\varepsilon) > 0$ tal que

$$|I_2| + |I_3| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e, pela definição de $\underline{u}(0)$, existe $r_0 = r_0(\delta_0,u,n,s,R,\varepsilon) > 0$ de modo que

$$|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall\, 0 < r < r_0.$$

Portanto,

$$\int_{\mathcal{C}B_r} \frac{C_{n,s}r^{2s}u(y)}{|y|^n(|y|^2-r^2)^s}\,\mathrm{d}y = \int_{\mathcal{C}B_1\cap B_R} \frac{C_{n,s}u(rz)}{|z|^n(|z|^2-1)^s}\,\mathrm{d}z \longrightarrow \underline{u}(0), \quad \text{quando} \quad r \to 0.$$

Novamente, o caso geral é obtido com a função $u_x(y) := u(y+x)$ no lugar de u.

$\square$

3.2 Uma estimativa local para funções com média pequena

Nesta seção obtemos, como aplicação dos resultados da seção anterior, uma estimativa uniforme em torno de um ponto cuja média fracionária é pequena.

Para isso, precisaremos do Lema a seguir que possibilita estender a estimativa da função do centro da bola (da média) para qualquer ponto numa vizinhança suficientemente próxima do centro.

Lema 3.2.1. *Sejam $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função não-negativa, $x \in \mathbb{R}^n$ e $0 < \rho_1 < \rho_2$. Definimos*

$$\Theta(\rho_1,\rho_2,x) := \int_{\rho_1}^{\rho_2} g * \eta_\rho(x)\, \mathrm{d}\rho.$$

Então, existem $C = C(n) > 0$ e parâmetros ρ_3 e ρ_4 tais que $0 < \rho_3 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_4$, e para todo $x \in B_{\frac{\rho_1}{4}}$ vale

$$\frac{\Theta(\rho_1,\rho_2,x)}{\rho_2 - \rho_1} \leq C \frac{\Theta(\rho_3,\rho_4,0)}{\rho_4 - \rho_3}. \tag{3.4}$$

Demonstração. Fixemos $x \in B_{\frac{\rho_1}{4}}$, e observemos que

$$\begin{aligned}\Theta(\rho_1,\rho_2,x) &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \int_{\mathcal{C}B_\rho(x)} \frac{g(y) C_{n,s} \rho^{2s}}{|x-y|^n (|x-y|^2 - \rho^2)^s}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}\rho \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \int_{\rho_1}^{\rho_2} \eta_\rho(x-y)\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}y,\end{aligned}$$

e tomamos $I(x,y,\rho_1,\rho_2) := \displaystyle\int_{\rho_1}^{\rho_2} \eta_\rho(x-y)\, \mathrm{d}\rho$. Vejamos que existe $C > 0$ tal que

$$I(x,y,\rho_1,\rho_2) \leq C I(0,y,\rho_3,\rho_4).$$

De fato, para $y \neq x$, $y \neq 0$, vale $|x-y| = \gamma|y|$, onde $\gamma = \gamma(y) = |x-y| > 0$.

Daí

$$\begin{aligned}
I(x,y,\rho_1,\rho_2) &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{C_{n,s}\rho^{2s}\mathbb{1}_{\mathcal{C}B_\rho(x)}(y)}{|x-y|^n(|x-y|^2-\rho^2)^s}\,\mathrm{d}\rho \\
&= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{C_{n,s}\rho^{2s}\mathbb{1}_{\mathcal{C}B_\rho(x)}(y)}{\gamma^{n+2s}|y|^n(|y|^2-(\rho/\gamma)^2)^s}\,\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{1}{\gamma^{n+2s}} \int_{\rho_1/\gamma}^{\rho_2/\gamma} \frac{(t\gamma)^{2s}\mathbb{1}_{\mathcal{C}B_{t\gamma}(x)}(y)\gamma}{|y|^n(|y|^2-t^2)^s}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\star}{=} \frac{1}{\gamma^{n-1}} \int_{\rho_1/\gamma}^{\rho_2/\gamma} \frac{t^{2s}\mathbb{1}_{\mathcal{C}B_t}(y)}{|y|^n(|y|^2-t^2)^s}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\gamma^{n-1}} I\left(0,y,\frac{\rho_1}{\gamma},\frac{\rho_2}{\gamma}\right),
\end{aligned}$$

onde em $\star$ usamos que $\gamma|y| = |x-y|$. Com isso, concluímos

$$I(x,y,\rho_1,\rho_2) = \frac{1}{\gamma^{n-1}} I\left(0,y,\frac{\rho_1}{\gamma},\frac{\rho_2}{\gamma}\right).$$

Agora, para estimar γ, notamos que, para $y \in \mathcal{C}B_{\rho_1}(x)$:

$$|y| \geq |x-y| - |x| > \rho_1 - \frac{\rho_1}{4} = \frac{3}{4}\rho_1 \quad \Rightarrow \quad |x| \leq \frac{|y|}{3}.$$

Desta forma, segue que

$$\gamma|y| = |x-y| \geq |y| - |x| \geq |y|\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}|y| \quad \Rightarrow \quad \gamma \geq \frac{2}{3},$$

enquanto que, por outro lado,

$$\gamma|y| \leq |x| + |y| \leq \frac{4}{3}|y| \quad \Rightarrow \quad \gamma \leq \frac{4}{3}.$$

Portanto $\dfrac{2}{3} \leq \gamma \leq \dfrac{4}{3}$.

Definimos os parâmetros

$$\rho_3 := \frac{3}{4}\rho_1 \leq \rho_1, \qquad \rho_4 := \frac{3}{2}\rho_2 \geq \rho_2,$$

para os quais temos $\rho_3 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_4$. Além disso, vale $\dfrac{1}{\gamma^{n-1}} \leq \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$.

Portanto,

$$I(x,y,\rho_1,\rho_2) \le \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} I(0,y,\rho_3,\rho_4), \qquad \forall\, x \in B_{\frac{\rho_1}{4}}(0),$$

e, com isto, tomando $C_1 := \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$, concluímos

$$\Theta(x,\rho_1,\rho_2) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) I(x,y,\rho_1,\rho_2) \le C_1 \int_{\mathbb{R}^n} g(y) I(0,y,\rho_3,\rho_4)\,\mathrm{d}y = C_1 \Theta(0,\rho_3,\rho_4),$$

donde segue $\dfrac{\Theta(x,\rho_1,\rho_2)}{\rho_2-\rho_1} \le C_1 \dfrac{\Theta(0,\rho_3,\rho_4)}{\rho_2-\rho_1}$.

Finalmente, escolhendo $\rho_2 = 2\rho_1$, temos

$$\rho_4 = \frac{3}{2}\rho_2 = 3\rho_1 \qquad \Rightarrow \qquad \rho_4 - \rho_3 = \frac{9}{4}\rho_1,$$

donde, tomando $C = C(n) := \frac{9}{4} C_1 > 0$, com as escolhas de ρ_2, ρ_3 e ρ_4 acima, segue que, para todo $x \in B_{\frac{\rho_1}{4}}$, vale (3.4).

□

Teorema 3.2.2. *Seja $u \in H^s \cap L^\infty$ tal que $(-\Delta)^s u \le 1$ em $\mathbb{R}^n$. Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, suponhamos que existem constantes positivas m e ρ tais que*

$$\int_{\mathcal{C}B_\rho(x_0)} \frac{u(y) C_{n,s} \rho^{2s}}{|y-x_0|^n (|y-x_0|^2 - \rho^2)^s}\,\mathrm{d}y \le m\rho^s. \tag{3.5}$$

Então, existe uma constante $C > 0$ dependendo apenas de n,s de modo que, para todo $\kappa \in (0, 1/3)$, vale

$$\sup_{B_{\frac{\kappa\rho}{4}}(x_0)} u \le C(m\rho^s + \rho^{2s}). \tag{3.6}$$

Demonstração. Sem perda de generalidade assumimos $x_0 = 0$ e supomos que existam m,ρ para as quais vale (3.5). Como a função $u - \Psi_\rho$ é s-sub-harmônica em $B_\rho(0)$, segue pelo Lema 3.1.2 que, para todo $0 < r < \rho$:

$$\int_{\mathcal{C}B_r} \frac{(u-\Psi_\rho)(y) C_{n,s} r^{2s}}{|y|^n (|y|^2 - r^2)^s}\,\mathrm{d}y \le \int_{\mathcal{C}B_\rho} \frac{(u-\Psi_\rho)(y) C_{n,s} \rho^{2s}}{|y|^n (|y|^2 - \rho^2)^s}\,\mathrm{d}y \le m\rho^s.$$

Dado $0 < \kappa < \frac{1}{3}$, consideramos os seguintes parâmetros:

$$\rho_1 = \kappa\rho, \quad \rho_2 = 2\kappa\rho, \quad \rho_3 = \frac{3}{4}\kappa\rho, \quad \rho_4 = 3\kappa\rho < \rho.$$

Combinando o Lema 3.1.2 e o Teorema 3.1.3 com o Lema 3.2.1 para a função $g = (u - \Psi_\rho)_+$ e os parâmetros acima, concluímos que para quase todo $z \in B_{\frac{\kappa\rho}{4}}$ vale:

$$\begin{aligned}
(u - \Psi_\rho)(z) &\leq \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \int_{\mathcal{C}B_r(z)} (u - \Psi_\rho)_+(y)\eta_r(z - y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}r \\
&\leq C \frac{1}{\rho_4 - \rho_3} \int_{\rho_3}^{\rho_4} \int_{\mathcal{C}B_r} (u - \Psi_\rho)_+(y)\eta_r(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}r \\
&\leq C \frac{1}{\rho_4 - \rho_3} \int_{\rho_3}^{\rho_4} \int_{\mathcal{C}B_r} (u(y) + C'\rho^{2s})\eta_r(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}r \\
&\leq C_2\rho^{2s} + Cm\rho^s,
\end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\sup_{B_{\frac{\kappa\rho}{4}}} u \leq C(m\rho^s + \rho^{2s}). \qquad \square$$

Capítulo 4

Perspectivas futuras

Na sequência deste trabalho pretendemos aprofundar a investigação da estimativa local estabelecida no Teorema 3.2.2, com o objetivo de estender o resultado para a ordem $s \geq 1/2$ e, em paralelo, aplicando-a à função energia de cada conjunto Ω_j da sequência de quasi-abertos produzida no Teorema 2.2.2, com o objetivo de produzir constantes m e ρ adequadas para as quais seja possível concluir que, não só os valores da função ficam controlados numa vizinhança de um ponto onde sua média é pequena, mas que de fato a função é igual a zero nesta vizinhança.

Pretendemos também explorar propriedades geométricas da sequência $\{\Omega_j\}$, provando que se tratam na verdade de conjuntos abertos e que, quando $j \to \infty$, convergem para uma bola de raio 1, como já sugerido na Proposição 2.2.5. Mais além, o objetivo será verificar se de fato esta convergência se dá na norma C^k, para algum $k \in \mathbb{N}$. Com isto, esperamos concluir que a sequência $\{\Omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, a partir de algum índice suficientemente grande, é composta de conjuntos quasi-esféricos, e assim possuem boa regularidade de fronteira. Isto segue a ideia da construção dos conjuntos "bons" do *Princípio de Seleção* mencionado na introdução.

Aplicações de tais resultados, além de seu interesse por si só, podem levar à construção de um *Princípio de Seleção* no contexto do operador Laplaciano fracionário, que poderá ser útil na determinação de uma versão quantitativa ótima da Desigualdade de Faber-Krahn fracionária, a qual, até onde nos consta, não é conhecida.

Referências Bibliográficas

[1] N. Abatangelo. Large S-harmonic functions and boundary blow-up solutions for the fractional Laplacian. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 35(12):5555–5607, 2015.

[2] D. R. Adams and L. I. Hedberg. *Function spaces and potential theory*, volume 314 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[3] F. J. Almgren, Jr. and E. H. Lieb. Symmetric decreasing rearrangement is sometimes continuous. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(4):683–773, 1989.

[4] L. Brasco, E. Cinti, and S. Vita. A quantitative stability estimate for the fractional Faber-Krahn inequality. *J. Funct. Anal.*, 279(3):108560, 49, 2020.

[5] L. Brasco, G. De Philippis, and B. Velichkov. Faber-Krahn inequalities in sharp quantitative form. *Duke Math. J.*, 164(9):1777–1831, 2015.

[6] L. Brasco, E. Lindgren, and E. Parini. The fractional Cheeger problem. *Interfaces Free Bound.*, 16(3):419–458, 2014.

[7] C. Bucur. Some observations on the Green function for the ball in the fractional Laplace framework. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 15(2):657–699, 2016.

[8] M. Cicalese and G. P. Leonardi. A selection principle for the sharp quantitative isoperimetric inequality. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 206(2):617–643, 2012.

[9] E. Di Nezza, G. Palatucci, and E. Valdinoci. *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, volume 136. 2012.

[10] B. o. Dyda. Fractional calculus for power functions and eigenvalues of the fractional Laplacian. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 15(4):536–555, 2012.

[11] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

[12] L. C. Evans and R. F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, revised edition, 2015.

[13] N. Fusco. The quantitative isoperimetric inequality and related topics. *Bull. Math. Sci.*, 5(3):517–607, 2015.

[14] N. Fusco, F. Maggi, and A. Pratelli. Stability estimates for certain Faber-Krahn, isocapacitary and Cheeger inequalities. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 8(1):51–71, 2009.

[15] L. Grafakos. *Classical Fourier analysis*, volume 249 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, third edition, 2014.

[16] J. Hounie. *Teoria elementar das distribuicoes:(12e coloquio brasileiro de matematica, pocos de caldas 1979)*. Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 1979.

[17] N. S. Landkof. *Foundations of modern potential theory*, volume Band 180 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972. Translated from the Russian by A. P. Doohovskoy.

[18] G. Leoni. *A first course in fractional Sobolev spaces*, volume 229 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, [2023] ©2023.

[19] L. Lombardini. Approximation of sets of finite fractional perimeter by smooth sets and comparison of local and global s-minimal surfaces. *Interfaces Free Bound.*, 20(2):261–296, 2018.

[20] E. Parini and A. Salort. Compactness and dichotomy in nonlocal shape optimization. *Math. Nachr.*, 293(11):2208–2232, 2020.

[21] A. C. Ponce and D. Spector. A boxing inequality for the fractional perimeter. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 20(1):107–141, 2020.

[22] L. Silvestre. Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator. *Comm. Pure Appl. Math.*, 60(1):67–112, 2007.

[23] M. Warma. The fractional relative capacity and the fractional Laplacian with Neumann and Robin boundary conditions on open sets. *Potential Anal.*, 42(2):499–547, 2015.