

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

**ANÁLISE DA ESTABILIDADE DO DIODO PIERCE COM
EFEITOS TÉRMICOS**

Thales Marques Corrêa da Silva

Trabalho de conclusão de curso realizado sob orientação do Prof. Dr. Renato Pakter, apresentado à Comissão de Graduação em Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Porto Alegre

2010

Agradecimentos

- Ao meu orientador, professor Renato Pakter, que, para mim, sempre será um exemplo a ser seguido de competência enquanto orientador, pesquisador e professor.
- Aos demais professores e funcionários do Instituto de Física da UFRGS, em particular, aos professores Cláudio Schneider, Leonardo Brunnet e Luiz Fernando Ziebell.
- À minha família e aos meus amigos.

Resumo

Neste trabalho, analisarei a estabilidade do diodo Pierce como função dos parâmetros pertinentes ao sistema no caso de um feixe frio (temperatura zero), de um feixe isotérmico e de um feixe adiabático. O diodo Pierce clássico é um sistema unidimensional que consiste em um plasma limitado entre duas placas paralelas aterradas, com densidade iônica n_0 uniforme, onde um feixe monoenergético de elétrons é injetado com velocidade v_0 e densidade n_0 . Esse sistema já foi invocado em diversas aplicações práticas, tais como neutralização do feixe iônico para fusão por confinamento inercial, geração e amplificação de microondas, etc. Como mostrado na literatura, no caso frio, o sistema apresenta um rico comportamento dinâmico em função de um único parâmetro de controle. Neste trabalho, deduzirei, a partir da equação de Vlasov, as equações de fluidos para levar em conta os efeitos térmicos. Procedendo com a linearização das equações e aplicando as condições de contorno do diodo Pierce, obterei a relação de dispersão de cada caso, que será cuidadosamente analisada. Em particular, para os casos com efeitos térmicos, será mostrado que a primeira instabilidade e as pequenas regiões de estabilidade acontecem para valores do parâmetro de controle menores que no caso frio.

Palavras-chave: Diodo Pierce, Diodo Pierce com efeitos térmicos, plasmas delimitados.

Abstract

In this work, I will analyze the stability of the Pierce diode as a function of the relevant parameters to the system in the case of a cold beam (zero temperature) of an isothermal beam and an adiabatic beam. The classical Pierce diode is a one-dimensional system, which consists of a plasma with ionic density n_0 uniform between two parallel plates in short-circuit condition in which a monoenergetic beam of electrons is injected with speed v_0 and density n_0 . This system has been invoked in several practical applications such as ion-beam neutralization for inertial-confinement fusion, microwave generation and amplification, etc. As shown in literature, in the cold case, the system presents a rich dynamical behavior as a function of a single control parameter. In this work, I will deduce from Vlasov equation, the equations of fluids to take account the thermal effects. Proceeding with the linearization of the equations and applying the boundary conditions of the Pierce diode, I will obtain the dispersion relation of each case that will be carefully analyzed. In particular, for cases with thermal effects, it will be shown that the first instability and the small regions of stability occur for values of the control parameter lower than in the cold case.

Keywords: Pierce diode, Pierce diode with thermal effects, bounded plasma.

Conteúdo

1. Introdução	1
1.1 O diodo Pierce	1
1.2 Os modelos usados na descrição de plasmas	4
2. Teoria Cinética em Plasmas	6
2.1 A equação de Vlasov	6
2.2 Momentos da equação de Vlasov	9
3. Dedução das Equações de Fluidos	11
3.1 Caso de Temperatura Nula	11
3.2 Caso Isotérmico	14
3.3 Caso Adiabático	15
4. Análise da Estabilidade Linear	19
4.1 Dedução da Relação de Dispersão para $T=0$	20
4.2 Dedução da Relação de Dispersão para o Caso Isotérmico	26
4.3 Dedução da Relação de Dispersão para o Caso Adiabático	29
4.4 Resumo	31
5. Resultados	32
5.1 Soluções para $T=0$	32
5.2 Soluções para o Caso Isotérmico	34
5.3 Soluções para o Caso Adiabático	40
5.4 Primeira Instabilidade	45
6. Considerações Finais	48
7. Bibliografia	49

Lista de Figuras

Figura 1: Forma esquemática do diodo Pierce.	2
Figura 2: Projeção em $z \times v_z$ do espaço de fase.	7
Figura 3: $r \times \alpha$ para $\beta = 0$	33
Figura 4: $s \times \alpha$ para $\beta = 0$	34
Figura 5: Caso isotérmico, $r \times \alpha$ para $\beta = 0.001\pi$	35
Figura 6: Caso isotérmico, $s \times \alpha$ para $\beta = 0.001\pi$	35
Figura 7: Caso isotérmico, $r \times \alpha$ para $\beta = 0.005\pi$	36
Figura 8: Caso isotérmico, $s \times \alpha$ para $\beta = 0.005\pi$	36
Figura 9: Caso isotérmico, $r \times \alpha$ para $\beta = 0.01\pi$	37
Figura 10: Caso isotérmico, $s \times \alpha$ para $\beta = 0.01\pi$	37
Figura 11: Caso isotérmico, $r \times \alpha$ para $\beta = 0.05\pi$	38
Figura 12: Caso isotérmico, $s \times \alpha$ para $\beta = 0.05\pi$	38
Figura 13: Comparação do caso isotérmico para vários valores de β	39
Figura 14: Caso adiabático, $r \times \alpha$ para $\beta = 0.001\pi$	41
Figura 15: Caso adiabático, $s \times \alpha$ para $\beta = 0.001\pi$	41
Figura 16: Caso adiabático, $r \times \alpha$ para $\beta = 0.005\pi$	42
Figura 17: Caso adiabático, $s \times \alpha$ para $\beta = 0.005\pi$	42
Figura 18: Caso adiabático, $r \times \alpha$ para $\beta = 0.01\pi$	43
Figura 19: Caso adiabático, $s \times \alpha$ para $\beta = 0.01\pi$	43
Figura 20: Caso adiabático, $r \times \alpha$ para $\beta = 0.05\pi$	44
Figura 21: Caso adiabático, $s \times \alpha$ para $\beta = 0.05\pi$	44
Figura 22: Comparação do caso adiabático para vários valores de β	45
Figura 23: Primeira instabilidade	46

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é analisar a estabilidade linear do diodo Pierce em função dos parâmetros de controle, nos casos em que o feixe de elétrons injetado obedece às seguintes equações de estado: temperatura nula, temperatura uniforme e adiabático.

Para tal, seguirei o seguinte procedimento. Primeiro, apresentarei o diodo Pierce, mostrando as suas condições de contorno e algumas aplicações que implicam a importância da análise de sua estabilidade.

Em seguida, falarei sobre a aproximação de fluidos para plasmas e sobre a teoria cinética dos plasmas. Isso é necessário, pois um tratamento puramente cinético seria demasiado complicado para atingir meu objetivo. Entretanto, podemos usar a teoria cinética para deduzir as equações de fluidos de maneira muito mais simples do que uma dedução baseada, por exemplo, em conservações de determinadas quantidades e em computação de todas as forças que atuam sobre um elemento de volume do plasma, em cada um dos casos que serão analisados. Em particular, deduzirei a equação de Vlasov.

De posse da equação de Vlasov, o próximo passo será a dedução das equações de fluidos para os três casos. Solucionando tais equações, no regime linear, obterei uma relação de dispersão.

Por fim, analisarei a relação de dispersão para cada caso, interpretando suas soluções, alcançando o objetivo deste trabalho.

1.1 O diodo Pierce

Em 1944, John Robinson Pierce, em [1], propôs-se a estudar o fluxo de elétrons em regiões do espaço envolvidas por superfícies equipotenciais e na presença de íons uniformemente distribuídos. Seu objetivo era prever qual a corrente de elétrons máxima suportada por um dispositivo feito de plasma, isto é,

para uma dada geometria, descobrir o valor máximo de corrente para qual o fluxo de elétrons é estável.

Uma das geometrias analisadas por Pierce será chamada, neste trabalho, de diodo Pierce¹. Como mostrado na figura 1, ele consiste em duas placas paralelas, suficientemente grandes quando comparadas com a distância entre as placas (L) para serem consideradas infinitas. O movimento relevante dá-se em apenas uma dimensão. Além disso, as placas estão aterradas (potencial eletrostático nulo) e, numa delas, um feixe não-relativístico de elétrons é injetado com velocidade e densidade iniciais, respectivamente, v_0 e n_0 ². O movimento dos elétrons é indicado pelo sentido da flecha. Ao fundo, há uma densidade n_0 de íons, uniformemente distribuída e, por hipótese, estática. O problema que deve ser resolvido deve obedecer a essas condições de contorno.

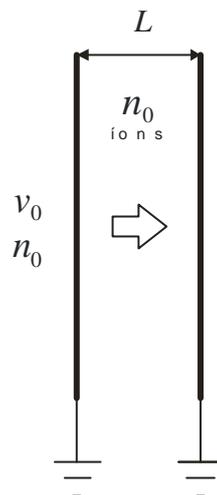


Figura 1: Forma esquemática do diodo Pierce.

A aproximação de íons estáticos significa que os fenômenos que esperamos observar são de tão alta frequência que, no intervalo de tempo em que acontecem, os íons, muito mais massivos que os elétrons, podem ter seu movimento negligenciado. Portanto, quando deduzirei as equações de fluidos, estará subentendido que são as equações para apenas uma das espécies: os elétrons.

Diversos autores, por exemplo, [2] e [3], classificam o diodo Pierce como o mais simples sistema de plasma com dimensões finitas. No caso de temperatura nula, amplamente estudado na literatura, o problema da estabilidade fica todo resumido a um único parâmetro de controle, que aqui chamarei de α , sendo definido por

¹ Essa é apenas uma das geometrias que podemos nomear assim.

² Essas são as condições de contorno do problema.

$$\alpha = \frac{L}{v_0} \omega_p, \quad (1.1.1)$$

onde $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}}$ é a frequência de plasma, $-e$ e m_e a carga e a massa do elétron, respectivamente, e ϵ_0 é a constante de permissividade elétrica do vácuo. Como argumentado em [4], α é proporcional à razão entre o tempo médio que o elétron leva para ir de uma placa a outra e o período de oscilação de elétron no plasma (por essa razão alguns autores chamam o parâmetro de “ângulo de trânsito do elétron” enquanto outros preferem chamar de “parâmetro de Pierce”). Então, de forma simplificada, podemos encarar α como uma medida da importância relativa entre os efeitos de borda e os efeitos de plasma.

Mesmo sendo considerado um sistema simples e bastante idealizado, o diodo Pierce apresenta um rico comportamento dinâmico, baseado no parâmetro α . Por exemplo, em [5], o autor mostrou que a transição de instabilidade para estabilidade, para valores de α logo abaixo de cada múltiplo ímpar de π , é uma bifurcação de Hopf e tem um atrator estranho associada. Todas as instabilidades somem no limite de $L \rightarrow \infty$, o que mostra que elas são decorrentes dos efeitos de borda [4].

O diodo Pierce já foi invocado em diversos contextos em aplicações práticas³. Por exemplo, geração de feixe de elétrons, geração e amplificação de microondas, neutralização de um feixe iônico para fusão por confinamento inercial, etc.

Desde que Pierce publicou seu artigo, o seu modelo já foi aprimorado de algumas formas para torná-lo um pouco mais realístico, embora o caso mais simples mostrou-se ser o limite superior para a corrente máxima que pode atravessar o sistema [4]. Em [3], há uma análise do diodo quando, em vez de as placas estarem aterradas, estão ligadas em série a um capacitor, um resistor e um indutor. Foi mostrado que apenas o capacitor pode mudar o tipo de equilíbrio do sistema, embora os três elementos possam alterar a estabilidade do equilíbrio.

Minha proposta aqui é a de estudar estabilidade do diodo Pierce clássico, descrito pelas condições de contorno já mencionadas, mas com efeitos térmicos. Em particular, queremos verificar se a primeira instabilidade ocorre para um valor maior ou menor do parâmetro de Pierce.

³ Em [4] há uma extensa lista de referências que tratam sobre aplicações e evidências experimentais das instabilidades.

1.2 Os modelos usados na descrição de plasmas

Os problemas em física de plasmas são, em geral, difíceis de tratar, uma vez que a densidade típica de íons e de elétrons é de 10^{12} cm^{-3} , e cada espécie sofre da interação eletromagnética gerada pelas demais partículas, assim como de alguma possível fonte externa. Para tentar solucionar essa questão, costuma-se usar duas abordagens distintas: tratar plasmas como fluidos ou usar teoria cinética. Caso ambos os processos falhem, resta-nos seguir o movimento individual das partículas [6].

No modelo de fluidos, é feita uma descrição de campos, isto é, conhecemos o comportamento do plasma sabendo como seus parâmetros pertinentes (potencial eletrostático, velocidade, densidade, etc.) variam com o espaço e com o tempo. O movimento individual de cada partícula não é levado em consideração – é um tratamento macroscópico [7].

Entretanto, em diversas ocasiões, para descrever determinado fenômeno, é necessário levar em conta mais detalhes do ponto de vista microscópico. Para tal, usa-se a teoria cinética, em que utilizamos a função distribuição $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ para deduzir os parâmetros pertinentes. Sua interpretação física [6], [8] é tal que o número de partículas no tempo t na região entre x e $x + dx$, y e $y + dy$ e z e $z + dz$, com componentes da velocidade entre v_x e $v_x + dv_x$, v_y e $v_y + dv_y$ e v_z e $v_z + dv_z$, é

$$dN = f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) dx dy dz dv_x dv_y dv_z.$$

Essa função geralmente considera comportamentos peculiares que possam existir no plasma. Embora essa teoria constitua uma descrição microscópica, muitas vezes, possui um papel dominante em determinar as propriedades macroscópicas do plasma. A função distribuição de velocidade deve obedecer à equação de Boltzmann [6], [7], como voltarei a discutir em breve.

Cabe salientar que, utilizando as equações de fluidos, conseguimos reproduzir resultados satisfatórios com funções, dependendo apenas do espaço e do tempo, enquanto na descrição cinética, temos que levar em conta também as três componentes da velocidade. Contudo, está subentendido, quando empregamos a abordagem de fluidos, que a distribuição de velocidade para os íons e elétrons é a que caracteriza o equilíbrio termodinâmico, ou seja, a Maxwelliana [6].

Essa talvez seja a maior falha do modelo de fluidos, pois, para plasmas com temperaturas altas, colisões - que frequentemente são o processo natural para chegar à distribuição de equilíbrio - podem ser raras. Logo, a distribuição pode ser diferente da Maxwelliana por um longo período de tempo. A distribuição fora de equilíbrio pode se apresentar das mais diferentes formas, no entanto, se a área abaixo das curvas $f \times v_i$ ($i = x, y \text{ e } z$) for a mesma, a descrição de fluidos não se distingue entre elas [6].

Capítulo 2

Teoria Cinética em Plasmas

Neste capítulo, examinarei brevemente as ferramentas da teoria cinética, que são necessárias para a dedução das equações de fluidos. O primeiro passo será debater a equação a que a função distribuição deve obedecer, ou seja, a equação de Boltzmann, conhecida como equação de Vlasov quando tratamos de problemas de natureza eletromagnética⁴. Em seguida, discutirei, de forma simplificada, como usar a função distribuição para calcular as propriedades do plasma.

2.1 A equação de Vlasov

A equação de Vlasov pode ser deduzida [8] considerando, no espaço de fase 6-dimensional, um elemento de hipervolume $d^3r d^3v$. Num intervalo de tempo dt , o incremento no número partículas (N) do elemento de volume, como resultado de seus respectivos movimentos, é dado por

$$dN = \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t + dt) - f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{dt} d^3r d^3v dt = \frac{\partial f}{\partial t} d^3r d^3v dt. \quad (2.1.1)$$

No mesmo intervalo de tempo dt , através do hiperplano $z = \text{constante}$, entram no elemento de volume todas as partículas que estão no volume $(\dot{z} dt) dx dy dv_x dv_y dv_z$, isto é, $f(x, y, z, v_x, v_y, v_z) \dot{z} dt dx dy dv_x dv_y dv_z$, como mostra a figura 2.

O número de partículas, deixando o elemento de volume através do hiperplano $z + dz = \text{constante}$, é dado pela mesma expressão anterior, calculada no ponto $z + dz$ em vez de z . A diferença do número de partículas que entra no elemento de volume no intervalo de tempo dt é

$$dN_z = (f\dot{z})_z dt dx dy dv_x dv_y dv_z - (f\dot{z})_{z+dz} dt dx dy dv_x dv_y dv_z, \quad (2.1.2)$$

⁴ Muitos autores chamam a equação de Boltzmann de equação de Vlasov também quando não estamos tratando de problemas eletromagnéticos.

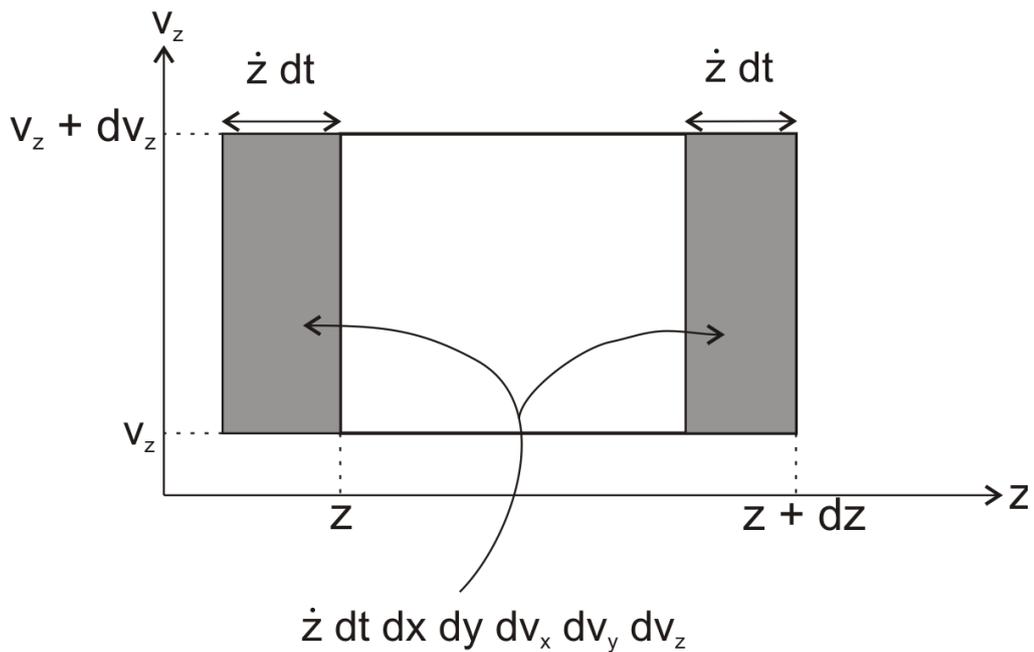


Figura 2: Projeção em $z \times v_z$ do espaço de fase.

onde o índice z no número de partículas N indica que essa é a variação apenas na direção do eixo z no espaço de fase.

Expandindo o segundo termo da expressão (2.1.2) em série de Taylor e mantendo apenas os termos em primeira ordem em dz , obtemos

$$dN_z = -\frac{\partial(f\dot{z})}{\partial z} d^3r d^3v dt. \quad (2.1.3)$$

Analogamente, temos expressões semelhantes a (2.1.3) para as demais dimensões do espaço de fase. A soma da contribuição de todas essas expressões deve ser igual à variação total no número de partículas

$$dN = -\sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial(f\dot{x}_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(f\dot{v}_i)}{\partial v_i} \right] d^3r d^3v dt, \quad (2.1.4)$$

onde, por simplicidade, passei a usar notação indicial, fazendo a conversão usual de $x \rightarrow i = 1$, $y \rightarrow i = 2$ e $z \rightarrow i = 3$. Como as expressões (2.1.1) e (2.1.4) representam a mesma quantidade, temos

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial(f\dot{x}_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial(f\dot{v}_i)}{\partial v_i} \right] \right\} d^3r d^3v dt = 0. \quad (2.1.5)$$

Na equação (2.1.5), os elementos infinitesimais de volume do espaço de fase e de tempo são arbitrários e independentes. Então, a expressão entre chaves deve ser igual a zero. Podemos simplificar a expressão, abrindo as derivadas do produto de funções

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left[f \underbrace{\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i}}_{=0} + \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + f \underbrace{\frac{\partial \dot{v}_i}{\partial v_i}}_{=0} + \dot{v}_i \frac{\partial f}{\partial v_i} \right] = 0. \quad (2.1.6)$$

O termo $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ é nulo, pois, considerando o espaço de fase, as variáveis v_i e x_i são independentes (por exemplo, para cada posição x_i há diversas partículas com as mais diferentes velocidades v_i). O termo $\frac{\partial \dot{v}_i}{\partial v_i} = \frac{1}{m} \frac{\partial F_i}{\partial v_i}$ é nulo, em geral, quando as forças não dependem da velocidade. Entretanto, no caso de plasmas temos a força de Lorentz $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Mesmo assim a derivada $\frac{\partial F_i}{\partial v_i}$ será nula, pois a componente da força na i -ésima direção depende apenas das componentes ortogonais da velocidade.

Obtemos então a equação de Vlasov

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (2.1.7)$$

onde o operador $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$ é definido como

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial v_x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial v_y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial v_z}. \quad (2.1.8)$$

A equação (2.1.7) pode ser interpretada da seguinte maneira [6]. Consideramos um conjunto de pontos que estejam infinitesimalmente próximos no espaço de fase. A densidade de partículas é dada exatamente pela função distribuição f . Se não houver colisão entre partículas, com o passar do tempo, as partículas mudam de posição como resultado de suas velocidades e mudam de velocidade como resultado da força que atua sobre elas. Como a força depende somente da posição e da velocidade, todas as partículas que estão próximas vão se mover juntas para outra região do espaço de fase, isto é, a densidade de partículas não irá mudar. Num referencial que se move com as partículas, a variação de f é

nula, isto é, $\frac{df}{dt} = 0$, onde o operador $\frac{d}{dt}$, que representa a derivada convectiva generalizada para o espaço de fase (que, na verdade, não é nada além da derivada total de uma função que depende de t , \mathbf{r} e \mathbf{v}), leva em conta justamente essa mudança de referencial.

O fato de na ausência de colisões termos que a função distribuição obedece à equação $\frac{df}{dt} = 0$ é apenas um caso particular do Teorema de Liouville da mecânica hamiltoniana [8].

2.2 Momentos da equação de Vlasov

O procedimento padrão para a dedução das equações de fluidos leva em conta tomar os diversos momentos em velocidade da equação de Vlasov, isto é, multiplicar a (2.1.7) por $v^n d^3v$ e integrar. Como analisarei três casos diferentes, torna-se essencial entender detalhadamente cada termo quando nos valem de tal procedimento, assim podemos distinguir o que deve ser levado em consideração e o que podemos ignorar em cada caso. Algumas vezes, entretanto, não é trivial fazer a correspondência entre a equação e o seu significado físico, e tal quantidade pode ser entendida como uma definição, mas é necessário sempre manter em mente que tal definição estaria de acordo com os experimentos.

Primeiramente temos que

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v, \quad (2.2.1)$$

onde n é a densidade de elétrons. A integração é feita sobre todas as velocidades possíveis. Vale salientar que essa é a densidade real, número de partículas por unidade de volume (ao contrário da seção 2.1 em que o termo densidade foi diversas vezes usado para densidade no espaço de fase). Basicamente o que a expressão (2.2.1) significa é dado o número de partículas por unidade de volume por unidade de volume no espaço de velocidades, multiplicamos por um elemento de volume do espaço de velocidades. Assim, teremos o número de partículas por unidade de volume com velocidade entre \mathbf{v} e $\mathbf{v} + d^3v$. Somando sobre todas as velocidades, temos o número de partículas por unidade de volume que é a densidade.

Podemos computar o valor médio da velocidade pela definição de média

$$\bar{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 v}{\int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 v}. \quad (2.2.2)$$

Essa é, por definição, a velocidade do plasma. Novamente a integração estende-se sobre todos os valores possíveis da velocidade. Usando a (2.2.1), podemos escrever a (2.2.2) como

$$n\bar{v} = \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 v. \quad (2.2.3)$$

De forma geral, temos que

$$n\bar{v}^k = \int v^k f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3 v. \quad (2.2.4)$$

Juntando as equações (2.2.4) para $k = 1$ e $k = 2$ podemos definir a pressão

$$p \equiv nm (\overline{v^2} - \bar{v}^2), \quad (2.2.5)$$

onde m é a massa do elétron.

A equação (2.2.5) é semelhante à equação de estado dos gases ideais. De fato, o termo $(\overline{v^2} - \bar{v}^2)$ representa a temperatura (a menos de uma constante multiplicativa). A interpretação da temperatura como relacionada com $\overline{v^2}$ das moléculas do gás é algo conhecido da teoria cinética dos gases. No caso do diodo Pierce um feixe de elétrons é injetado com uma velocidade inicial, então há uma velocidade preferencial, por assim dizer. Portanto fica mais lógico que a temperatura seja interpretada como o desvio quadrático médio da velocidade em relação à velocidade média do feixe num determinado ponto do espaço $\overline{(v - \bar{v})^2}$.

Outra definição que será necessária é a do fluxo de calor (para mais detalhes sobre essa definição, olhar a referência [8]).

$$Q \propto n \overline{(v - \bar{v})^3} = n (\overline{v^3} - 3\bar{v}^2\bar{v} + 2\bar{v}^3), \quad (2.2.6)$$

onde $\overline{v^3}$ é dado pela (2.2.4) com $k = 3$.

As definições acima são suficientes para analisar os casos de feixes com temperatura nula, isotérmico e adiabático.

Capítulo 3

Dedução das Equações de Fluidos

A teoria cinética para plasmas é mais geral que o modelo de fluidos, entretanto, seu tratamento matemático é mais complexo. Por isso, frequentemente, torna-se conveniente usar o modelo de fluidos que diversas vezes traz bons resultados. Por isso, prosseguirei agora com a dedução das equações de fluidos tomando os momentos da equação de Vlasov.

A partir de agora, deixarei de usar o caso mais geral e tratarei apenas de sistemas unidimensionais. Para o caso do diodo Pierce, podemos supor que há um campo magnético (infinitamente forte) paralelo à direção do fluxo de elétrons que serve para manter o feixe de elétrons coeso, mas que não afeta o fluxo unidimensional [1].

Veremos que o procedimento padrão da dedução das equações de fluidos nos leva há uma hierarquia infinita de equações, isto é, na i -ésima equação deduzida aparece uma quantidade não determinada anteriormente para a qual precisamos deduzir a $(i+1)$ -ésima equação de fluido. Para truncar tal hierarquia, precisamos especificar uma equação de estado do caso que estamos analisando – isto é – se a temperatura é nula, constante ou o feixe é adiabático.

3.1 Caso de Temperatura Nula

O caso de temperatura nula já foi amplamente estudado na literatura em, por exemplo, [1], [2], [3], [4] e [5]. Entretanto, é muito importante repeti-lo aqui, pois, para deduzirmos as equações para os demais casos, eventualmente teríamos que passar por esse e será útil para fins de comparação de resultados.

Como dito na seção 2.2, a temperatura ser nula significa que

$$T \propto p = 0. \tag{3.1.1}$$

A função distribuição de velocidades unidimensional deve obedecer à equação de Vlasov. Ignorando campos magnéticos em alguma direção perpendicular ao movimento dos elétrons, a (2.1.7) fica

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{qE}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = 0. \quad (3.1.2)$$

O primeiro passo é deduzir a equação da continuidade. Para tal multiplicamos a (3.1.2) por um elemento infinitesimal de velocidade, dv , e integramos sobre todas as possíveis velocidades.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{-\infty}^{\infty} v \frac{\partial f}{\partial x} dv + \frac{qE}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial v} dv = 0. \quad (3.1.3)$$

Na primeira integral da (3.1.3), podemos inverter a ordem da derivação em t e da integração em v , pois são variáveis independentes. Então, reconhecemos que a integral restante é o análogo unidimensional da (2.2.1), isto é, representa a densidade.

Analogamente, podemos fazer o mesmo na segunda integral da (3.1.3), sempre mantendo em mente que v é apenas um parâmetro, não dependendo de x . A velocidade do plasma, essa sim que depende de x e t , é dada pela (2.2.2).

O terceiro termo da (3.1.3) é nulo, pois a função distribuição deve ir a zero para velocidades $v \rightarrow \pm\infty$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial v} dv = f(v = \infty) - f(v = -\infty) = 0. \quad (3.1.4)$$

Utilizando a (2.2.1), (2.2.3) e (3.1.4), podemos reescrever a (3.1.3) como

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(n\bar{v})}{\partial x} = 0. \quad (3.1.5)$$

Que é a equação da continuidade usual da mecânica de fluidos. Repare que o que foi dito antes realmente acontece – na equação deduzida acima temos duas incógnitas para apenas uma equação. Para descobrirmos a velocidade do plasma, precisamos tomar o primeiro momento em velocidade da equação de Vlasov, ou seja, multiplicar por $v dv$ a (3.1.2) e integrar sobre todas as velocidades possíveis.

$$\int_{-\infty}^{\infty} v \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{-\infty}^{\infty} v^2 \frac{\partial f}{\partial x} dv + \frac{qE}{m} \int_{-\infty}^{\infty} v \frac{\partial f}{\partial v} dv = 0. \quad (3.1.6)$$

Argumentos semelhantes aos anteriores nos levam à interpretação dos dois primeiros termos da (3.1.6). O último termo pode ser desenvolvido utilizando integração por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} v \frac{\partial f}{\partial v} dv = (vf)_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f dv = -n, \quad (3.1.7)$$

onde novamente usamos o fato que a função distribuição tende a zero no limite $v \rightarrow \pm\infty$ e ainda supomos que tende a zero numa potência de v menor que -1 . Na realidade, essa dependência em muitos casos será exponencial, como, por exemplo, na Maxwelliana, por isso não argumentarei novamente quando encontrarmos expressões do tipo $v^n f$ que, no limite, será zero.

Juntando as expressões (2.2.3), (2.2.4) e (3.1.7), a (3.1.6) pode ser escrita como

$$\frac{\partial(n\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(n\bar{v}^2)}{\partial x} - \frac{nqE}{m} = 0. \quad (3.1.8)$$

A expressão (3.1.8) pode ser escrita numa forma mais familiar. Para tal, abrimos o primeiro termo na derivada do produto e usamos a equação (3.1.5)

$$\frac{\partial(n\bar{v})}{\partial t} = n \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial n}{\partial t} = n \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - \bar{v} \frac{\partial(n\bar{v})}{\partial x}. \quad (3.1.9)$$

É de utilidade notar que

$$\frac{\partial(n\bar{v}^2)}{\partial x} = n\bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial(n\bar{v})}{\partial x}. \quad (3.1.10)$$

Agora utilizando as equações (2.2.5), (3.1.9) e (3.1.10), podemos reescrever a (3.1.8) na forma

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \frac{qE}{m} - \frac{1}{mn} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3.1.11)$$

Essa é a equação que representa o balanço das forças no sistema, ou seja, é o análogo da equação de Navier-Stokes para o plasma. Com a equação (3.1.11), aparentemente ficamos com quatro incógnitas (n , \bar{v} , p e E) e duas equações (3.1.5 e 3.1.11). Entretanto, até agora, não foi mencionado que esse é um problema envolvendo quantidades descritas pela teoria eletromagnética, isto é, o campo elétrico deve obedecer às equações de Maxwell. Em particular, é de utilidade agregar ao conjunto de equações (3.1.5) e (3.1.11) a equação de Poisson

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e(n_0 - n)}{\epsilon_0}. \quad (3.1.12)$$

Na (3.1.12), n_0 representa a densidade iônica, que é constante, nesse problema (por causa da aproximação de íons estáticos). Portanto, temos agora quatro incógnitas e três equações. Poderíamos tomar o próximo momento em velocidade da equação de Vlasov e tentar descobrir a pressão. Entretanto, fatalmente, tal equação dependerá de um momento maior e seguiríamos tal procedimento *ad infinitum*. Felizmente, já estamos em condição de usar nossa equação de estado, isto é, $T = 0$. Isso porque a temperatura é proporcional a pressão e $T = 0 \Rightarrow p = 0$.

Então, temos que

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(n\bar{v})}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \frac{qE}{m}, \\ \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e(n_0 - n)}{\epsilon_0}, \end{cases} \quad (3.1.13)$$

forma um conjunto auto-consistente de equações para resolver o problema para o caso em que $T = 0$.

3.2 Caso Isotérmico

A extensão do caso de temperatura nula para temperatura constante é direta. Basta lembrar como a pressão é definida pela (2.2.5) e que a temperatura, a menos

de uma constante multiplicativa, é representada pelo termo $(\overline{v^2} - \bar{v}^2)$. Então, para o caso de temperatura constante, podemos escrever a (2.2.5) como

$$p = \beta mn, \quad (3.2.1)$$

onde β é uma constante proporcional a temperatura dos elétrons. Essa é a equação de estado que trunca a hierarquia de equações para esse caso.

Colocando a (3.2.1) com na (3.1.11), resulta em

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \frac{qE}{m} - \frac{\beta}{n} \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (3.2.2)$$

O conjunto auto-consistente de equações para resolver o problema com temperatura constante é

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(n\bar{v})}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \frac{qE}{m} - \frac{\beta}{n} \frac{\partial n}{\partial x}, \\ \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e(n_0 - n)}{\epsilon_0}. \end{array} \right. \quad (3.2.3)$$

3.3 Caso Adiabático

Estender a análise para o caso adiabático não é tão trivial quanto para o caso de temperatura constante. De fato, precisamos deduzir a equação para o próximo momento em velocidade da equação de Vlasov. Então, multiplicamos a (3.1.2) por $v^2 dv$ e integramos sobre todos os valores de velocidade.

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^2 \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{-\infty}^{\infty} v^3 \frac{\partial f}{\partial x} dv + \frac{qE}{m} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 \frac{\partial f}{\partial v} dv = 0, \quad (3.3.1)$$

Novamente os dois primeiros termos são facilmente identificáveis. O terceiro termo pode ser desenvolvido integrando por partes, isto é

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^2 \frac{\partial f}{\partial v} dv = \underbrace{(v^2 f)_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - 2 \int_{-\infty}^{\infty} v f dv = -2n\bar{v}. \quad (3.3.2)$$

Usando a (2.2.4) e (3.3.2), podemos reescrever a equação (3.3.1) como

$$\frac{\partial(n\bar{v}^2)}{\partial t} = \frac{2nqE\bar{v}}{m} - \frac{\partial(n\bar{v}^3)}{\partial x}. \quad (3.3.3)$$

Temos também que

$$\frac{\partial(n\bar{v}^2)}{\partial t} = \bar{v} \frac{\partial(n\bar{v})}{\partial t} + n\bar{v} \frac{\partial\bar{v}}{\partial t}, \quad (3.3.4)$$

e usando as equações (3.1.8) e (3.1.11) a (3.3.4) fica

$$\frac{\partial(n\bar{v}^2)}{\partial t} = \frac{2nqE\bar{v}}{m} - \bar{v} \frac{\partial(n\bar{v}^2)}{\partial x} - \bar{v} \frac{\partial p}{\partial x} - n\bar{v}^2 \frac{\partial\bar{v}}{\partial x}. \quad (3.3.5)$$

Subtraindo da (3.3.3) a (3.3.5), obtemos

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \bar{v} \frac{\partial p}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial(n\bar{v}^2)}{\partial x} + n\bar{v}^2 \frac{\partial\bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial(n\bar{v}^3)}{\partial x}. \quad (3.3.6)$$

É conveniente agora colocar $n\bar{v}^3$ em termos das quantidades com significado físico, isto é, aquelas definidas nas expressões (2.2.5) e (2.2.6). Fazendo isso, temos

$$n\bar{v}^3 = \frac{Q}{\delta} + 3\bar{v}p + n\bar{v}^3, \quad (3.3.7)$$

onde δ é constante de proporcionalidade que torna a (2.2.6) uma igualdade.

Substituindo a (3.3.7) na (3.3.6), obtemos

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\delta} \frac{\partial Q}{\partial x} - \bar{v} \frac{\partial p}{\partial x} - 3p \frac{\partial\bar{v}}{\partial x}. \quad (3.3.8)$$

Estamos aptos agora a impor a nossa condição para o caso adiabático, que é $Q = 0$, obtendo

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\bar{v} \frac{\partial p}{\partial x} - 3p \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}. \quad (3.3.9)$$

Chegamos ao nosso objetivo, a nossa quarta equação. Agora o problema é solúvel, temos um número de equações igual ao número de incógnitas.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(n\bar{v})}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \frac{qE}{m} - \frac{1}{mn} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -\bar{v} \frac{\partial p}{\partial x} - 3p \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \\ \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e(n_0 - n)}{\epsilon_0}. \end{array} \right. \quad (3.3.10)$$

Por sorte, esse sistema de equações pode ser simplificado para ficar similar com o dos casos anteriores. Isso porque podemos juntar a primeira e a terceira das equações (3.3.10). Abrindo a derivada do produto na primeira, ficamos com

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial n}{\partial x} = -n \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \quad (3.3.11)$$

e substituindo isso na terceira, obtemos

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial p}{\partial x} = 3 \frac{p}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial n}{\partial x} \right). \quad (3.3.12)$$

Como $p = p(x, t)$ e $n = n(x, t)$, notando também que $\bar{v} = \frac{dx}{dt}$ a (3.3.12) reduz-se a

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{3}{n} \frac{dn}{dt}. \quad (3.3.13)$$

O resultado da integração da equação (3.3.13) é

$$p = \gamma n^3, \quad (3.3.14)$$

onde γ é uma constante. Esse é um resultado conhecido: quando o fluxo de calor é desprezível, é sabido que um sistema d-dimensional obedece à equação de estado [6]

$$p = \gamma n^{\frac{(d+2)}{d}}, \quad (3.3.15)$$

que se reduz a equação (3.3.14) para o caso unidimensional e se reduz ao caso de um gás ideal monoatômico para o caso tridimensional.

Usando a (3.3.14), o sistema de equações (3.3.10) pode ser escrito como

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(n\bar{v})}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \frac{qE}{m} - \frac{3n\gamma}{m} \frac{\partial n}{\partial x}, \\ \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e(n_0 - n)}{\epsilon_0}. \end{cases} \quad (3.3.16)$$

que forma um conjunto auto-consistente de equações (três equações e três incógnitas) para o problema de um feixe adiabático.

Capítulo 4

Análise da Estabilidade Linear

Embora deduzido no capítulo anterior, para os três casos, um conjunto completo de equações que se apresentam em mesmo número que as incógnitas, a resolução analítica do problema ainda é inviável, pois a equação do balanço das forças é não-linear.

No entanto, a proposta desse trabalho é o estudo da estabilidade do diodo Pierce e, para tanto, não é necessário preocupar-nos com a forma detalhada das grandezas físicas que seriam a solução das equações (3.1.13), (3.2.3) e (3.3.16).

O método que será usado para obter a estabilidade do sistema é o da análise da estabilidade linear, amplamente usado na física de fluidos e na física de plasmas. Basicamente, supomos que as quantidades físicas relevantes ao problema podem ser escritas como o seu valor no equilíbrio somado a uma pequena perturbação

$$S = S_0 + S_1 . \quad (4.1)$$

Na (4.1), S representa uma grandeza física genérica (velocidade, densidade, etc.), e o subíndice “0” indica o valor no equilíbrio e o subíndice “1” refere-se à perturbação. No equilíbrio, supomos que a quantidade física não varie com o tempo e seja homogênea no espaço, isto é, S_0 é uma constante. Toda dependência temporal e espacial do problema fica na função S_1 .

Ao substituir a (4.1) nas equações que descrevem o problema, desprezamos os termos que são produtos de termos perturbativos, pois se tratam de termos de segunda ordem que são supostos serem muito menores que os termos de primeira ordem, de tal forma que é irrelevante levá-los em consideração. Procedendo dessa forma, vamos sempre obter equações lineares para o problema.

O próximo passo é o de supor uma dependência temporal para as perturbações com uma forma exponencial complexa, isto é

$$S_1(x, t) = S_1(x)e^{-i\omega t}, \quad (4.2)$$

onde ω é uma frequência complexa. O nosso objetivo para analisar a estabilidade é exatamente descobrir para quais valores de ω , em função dos parâmetros pertinentes ao problema, obtemos uma solução não trivial para as grandezas físicas. Em particular, a parte imaginária de ω irá nos dar detalhes sobre as regiões de estabilidade e de instabilidade, pois quando obtivermos que $Im(\omega) > 0$, o sistema será instável, pois a (4.2) pode ser escrita como

$$S_1(x, t) = S_1(x) e^{-i[Re(\omega)]t} e^{[Im(\omega)]t}, \quad (4.3)$$

e o termo $e^{[Im(\omega)]t}$ fará a solução divergir da solução de equilíbrio com o passar do tempo. Da mesma forma, tal termo irá convergir para a solução de equilíbrio quando $Im(\omega) < 0$, e o sistema é estável.

Embora a análise da estabilidade linear funcione bem para pequenas perturbações em relação ao equilíbrio, ela ainda pode ser vista como um limite superior da região em que o sistema é estável, para o caso em que a perturbação não seja tão pequena. Isso porque, um sistema que se instabiliza frente a uma pequena perturbação continuará a se instabilizar para uma mudança mais radical. Entretanto, a recíproca não é verdadeira, o sistema que é estável para pequenas mudanças em relação ao equilíbrio não necessariamente o será para grandes mudanças.

4.1 Dedução da Relação de Dispersão para T=0

De posse do conjunto de equações (3.1.13), vou linearizá-las usando a técnica descrita anteriormente. Será utilizada uma notação levemente diferente da usada até aqui que é mais conveniente. Como dito, esse caso já foi largamente estudado na literatura [1], [2], [3], [4], [5], mas é necessário repeti-lo aqui, pois os outros casos são uma generalização desse e precisamos comparar os resultados.

O campo elétrico passará a ser escrito em termos do potencial, ou seja,

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (4.1.1)$$

A velocidade será escrita sem indicar que estou tratando do valor médio (macroscópico) da mesma.

$$\bar{v} = v . \quad (4.1.2)$$

Também passarei a escrever, por economia de notação, as quantidades descritas pela equação (4.1) como

$$S_e = S_0 + S(x, t) , \quad (4.1.3)$$

onde o índice “e” é para lembrar que as quantidades flutuantes referem-se aos elétrons (como dito anteriormente, estamos usando a aproximação de íons estáticos). O que a equação (4.1.3) nos diz é que, sempre que encontrarmos uma quantidade sem índice estamos tratando do termo perturbativo.

O problema que temos que resolver é

$$\begin{cases} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial(n_e v_e)}{\partial x} = 0 , \\ \frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial v_e}{\partial x} = \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} , \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = e \frac{n_e - n_0}{\epsilon_0} , \end{cases} \quad (4.1.4)$$

$$\varphi(x = 0, t) = \varphi(x = L, t) = 0 ,$$

$$n_e(x = 0, t) = n_0 ,$$

$$v_e(x = 0, t) = v_0 ,$$

Temos que a solução de equilíbrio para a densidade e para a velocidade desse sistema é $n_e = n_0$ e $v_e = v_0$ (satisfazem automaticamente as condições de contorno e a primeira equação). De acordo com a terceira equação, para $n_e = n_0$, $\varphi = A + Bx$, onde A e B são constantes. Para satisfazer as condições de contorno temos que $A = B = 0$ e, portanto, $\varphi_0 = 0$. As soluções serão procuradas em torno desse equilíbrio.

Escrevendo então a velocidade e a densidade seguindo o modelo da equação (4.1.3).

$$n_e = n_0 + n(x, t), \quad (4.1.5)$$

$$v_e = v_0 + v(x, t).$$

Substituindo a (4.1.5) na equação da continuidade, ignorando os termos de segunda ordem, obtemos

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v}{\partial x} + v_0 \frac{\partial n}{\partial x} = 0. \quad (4.1.6)$$

A equação do balanço das forças com a (4.1.5), resulta

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (4.1.7)$$

Por fim, substituindo a (4.1.5) na equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{en}{\epsilon_0}. \quad (4.1.8)$$

Um procedimento muito útil de se realizar sempre que possível é adimensionalizar as equações em termos dos parâmetros pertinentes ao sistema. Isso muitas vezes dá até mesmo uma intuição física melhor do problema. Por exemplo, a equação de Navier-Stokes adimensionalizada (ignorando o termo devido ao campo gravitacional) é

$$\frac{dv}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 v. \quad (4.1.9)$$

Nela resta apenas a dependência num parâmetro muito conveniente para descrever o problema, que é o número de Reynolds. Assim, podemos fazer, por exemplo, a aproximação de movimento lento ($Re \rightarrow 0$) diretamente, sem termos de nos preocupar com o particular valor da viscosidade, comprimento típico e velocidade típica do problema.

Temos três constantes típicas para o problema (L, v_0 e n_0) que podem ser utilizadas para adimensionalizar as equações. Para tal, faremos as substituições

$$x \rightarrow Lx, \quad (4.1.10)$$

$$v \rightarrow v_0 v. \quad (4.1.11)$$

As equações (4.1.10) e (4.1.11) automaticamente adimensionalizam o tempo

$$t \rightarrow \frac{L}{v_0} t. \quad (4.1.12)$$

Substituindo a (4.1.10), a (4.1.11) e a (4.1.12) na equação (4.1.6)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial x} = 0. \quad (4.1.13)$$

Notemos que t , v e x já estão sem dimensão na equação (4.1.13).
Procedendo da mesma maneira para a equação (4.1.7)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{e}{m v_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (4.1.14)$$

E na (4.1.8)

$$\frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{en}{\epsilon_0}. \quad (4.1.15)$$

A equação (4.1.14) sugere que o potencial eletrostático pode ser adimensionalizado na forma

$$\varphi \rightarrow \frac{m v_0^2}{e} \varphi. \quad (4.1.16)$$

Resta adimensionalizar a densidade o que pode ser feito diretamente

$$n \rightarrow n_0 n. \quad (4.1.17)$$

Usando as equações (4.1.16) e (4.1.17) podemos escrever as equações (4.1.13), (4.1.14) e (4.1.15) com todas as grandezas físicas na forma adimensional

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \alpha^2 n. \end{array} \right. \quad (4.1.18)$$

Onde $\alpha = \frac{L}{v_0} \omega_p$, onde ω_p denota a frequência de plasma. O processo de adimensionalizar as equações nos levou a tratar de apenas um parâmetro importante para descrever o problema, em vez de investigarmos separadamente do comprimento do diodo, da velocidade e da densidade nas quais o feixe é injetado.

Agora supomos que a parte temporal das perturbações é dada por $e^{-i\omega t}$ (notemos que ω foi adimensionalizado a $\omega \rightarrow \frac{v_0}{L} \omega$). Substituindo esse *ansatz* nas equações da fórmula (4.1.18), obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} -i\omega n + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial x} = 0, \\ -i\omega v + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \alpha^2 n. \end{array} \right. \quad (4.1.19)$$

Segue da primeira equação do conjunto acima que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = i\omega \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad (4.1.20)$$

E da segunda equação do conjunto (4.1.19)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -i\omega \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (4.1.21)$$

Substituindo a primeira equação da (4.1.19) e a (4.1.20) na (4.1.21), obtemos uma equação que depende apenas do potencial elétrico e da densidade. Usando a última equação da (4.1.19), podemos desacoplar o conjunto de equações (4.1.19) numa equação diferencial apenas para φ

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - 2i\omega \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - (\omega^2 - \alpha^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \quad (4.1.22)$$

Supondo que $\varphi = e^{jx}$, tornamos a equação (4.1.22) numa equação algébrica.

$$j^4 - 2i\omega j^3 - (\omega^2 - \alpha^2)j^2 = 0. \quad (4.1.23)$$

Que apresenta $j = 0$ como raiz dupla. Para $j \neq 0$, a equação (4.1.23) é satisfeita para $j = i(\omega + \alpha)$ e para $j = i(\omega - \alpha)$. A solução geral da (4.1.22) é

$$\varphi(x) = A + Bx + Ce^{i(\omega+\alpha)x} + De^{i(\omega-\alpha)x}. \quad (4.1.24)$$

Segue que da última equação da (4.1.19) que a condição de contorno $\rho_e(x=0) = \rho_0 \Rightarrow \rho(x=0) = 0$ é equivalente a $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0$. Usando as três equações definidas como (4.1.19), vemos que a condição de contorno $v_e(x=0) = v_0 \Rightarrow v(x=0) = 0$ é idêntica a $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \Big|_{x=0} + \alpha^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$. Temos ainda as duas condições de contorno $\varphi(x=0) = \varphi(x=1) = 0$ e com todas elas podemos, *a priori*, descobrir a solução da equação (4.1.24). As equações que as constantes A, B, C e D devem satisfazer são

$$A + C + D = 0,$$

$$A + B + Ce^{i(\omega+\alpha)} + De^{i(\omega-\alpha)} = 0,$$

$$C(\omega + \alpha)^2 + D(\omega - \alpha)^2 = 0, \quad (4.1.25)$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 B + i(\omega + \alpha)[\alpha^2 - (\omega + \alpha)^2]C \\ + i(\omega - \alpha)[\alpha^2 - (\omega - \alpha)^2]D = 0. \end{aligned}$$

Para obtermos uma solução não trivial, temos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & e^{i(\omega+\alpha)} & e^{i(\omega-\alpha)} \\ 0 & 0 & (\omega + \alpha)^2 & (\omega - \alpha)^2 \\ 0 & \alpha^2 & i(\omega + \alpha)[\alpha^2 - (\omega + \alpha)^2] & i(\omega - \alpha)[\alpha^2 - (\omega - \alpha)^2] \end{vmatrix} = 0. \quad (4.1.26)$$

O cálculo do determinante da (4.1.26) resulta na relação de dispersão que é a função desejada para obtermos a estabilidade linear do sistema.

$$2\omega^2(\omega^2 - \alpha^2) + i\alpha[(\omega + \alpha)^2(e^{i(\omega-\alpha)} - 1) - (\omega - \alpha)^2(e^{i(\omega+\alpha)} - 1)] = 0. \quad (4.1.27)$$

Mais detalhes sobre o significado dessa equação e as suas soluções serão discutidos mais adiante, quando de posse da relação de dispersão para os casos de um feixe com temperatura constante e um feixe adiabático.

4.2 Dedução da Relação de Dispersão para o Caso Isotérmico

De posse das equações de fluido para o caso de temperatura constante, vamos realizar o mesmo procedimento efetuado para temperatura nula. Partimos do conjunto de equações

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial(n_e v_e)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial v_e}{\partial x} = \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\beta}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = e \frac{n_e - n_0}{\epsilon_0}. \end{array} \right. \quad (4.2.1)$$

Supomos agora que as quantidades que se referem aos elétrons são o valor no equilíbrio (a solução de equilíbrio é a mesma do caso anterior) mais uma pequena perturbação e linearizamos as equações. O termo que aparece devido aos efeitos térmicos fica, até primeira ordem

$$-\frac{\beta}{n_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{n}{n_0}\right)} \frac{\partial(n_0 + n)}{\partial x} = -\frac{\beta}{n_0} \left(1 - \frac{n}{n_0}\right) \frac{\partial n}{\partial x} = -\frac{\beta}{n_0} \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (4.2.2)$$

O conjunto de equações linearizadas é

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v}{\partial x} + v_0 \frac{\partial n}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\beta}{n_0} \frac{\partial n}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{en}{\epsilon_0}. \end{array} \right. \quad (4.2.3)$$

Adimensionalizando a equação acima, em termos dos mesmos parâmetros anteriores e com β sendo escrito como $\beta \rightarrow v_0^2 \beta$, obtemos as equações na forma linear e adimensional

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \beta \frac{\partial n}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \alpha^2 n. \end{array} \right. \quad (4.2.4)$$

Supomos uma dependência do tipo $e^{-i\omega t}$ (ω já adimensionalizado, $\omega \rightarrow \frac{v_0}{L} \omega$) para a parte temporal da velocidade e da densidade. Podemos facilmente derivar (no espaço) as duas primeiras equações e por substituição obtermos uma equação em termos da densidade e do potencial eletrostático. Por fim, usando a equação de Poisson podemos torná-la uma equação só para o potencial, assim como foi feito no caso de temperatura nula. A equação que resulta é

$$(1 - \beta) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - 2i\omega \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - (\omega^2 - \alpha^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (4.2.5)$$

que recai, como esperado, na equação (4.1.22) no limite em que $\beta \rightarrow 0$.

Apenas uma das condições de contorno, a da velocidade, muda do caso anterior para esse. O cálculo é facilmente realizável usando as equações (4.2.4) e já supondo a dependência temporal $e^{-i\omega t}$. As condições de contorno ficam

$$\varphi(x=0) = \varphi(x=1) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = (1 - \beta) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \Big|_{x=0} + \alpha^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \quad (4.2.6)$$

A equação (4.2.5) é uma equação diferencial linear, homogênea e a coeficientes constantes. Supondo uma solução do tipo e^{jx} , transformamos o problema numa equação algébrica para descobrir os valores de j que satisfazem a equação diferencial.

$$(1 - \beta)j^4 - 2i\omega j^3 - (\omega^2 - \alpha^2)j^2 = 0. \quad (4.2.7)$$

Novamente $j = 0$ é raiz dupla da equação. As outras duas soluções são

$$j_{\pm} = i \left[\frac{\omega \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta(\omega^2 - \alpha^2)}}{1 - \beta} \right]. \quad (4.2.8)$$

E a solução geral da equação (4.2.5) é

$$\varphi(x) = A + Bx + Ce^{j_+x} + De^{j_-x}. \quad (4.2.9)$$

As constantes A , B , C e D devem ser tais que $\varphi(x)$ satisfaça as condições de contorno. Isso implica o sistema de equações abaixo

$$A + C + D = 0,$$

$$A + B + Ce^{j_+} + De^{j_-} = 0, \quad (4.2.10)$$

$$Cj_+^2 + Dj_-^2 = 0,$$

$$\alpha^2 B + j_+[\alpha^2 + j_+^2(1 - \beta)]C + j_-[\alpha^2 + j_-^2(1 - \beta)]D = 0.$$

O sistema admite solução não-trivial se, e somente se

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & e^{j_+} & e^{j_-} \\ 0 & 0 & j_+^2 & j_-^2 \\ 0 & \alpha^2 & j_+[\alpha^2 + j_+^2(1 - \beta)] & j_-[\alpha^2 + j_-^2(1 - \beta)] \end{vmatrix} = 0. \quad (4.2.11)$$

De onde obtemos diretamente a relação de dispersão linear para o caso de temperatura constante.

$$\begin{aligned}
 & 2\sqrt{\alpha^2 + \beta(\omega^2 - \alpha^2)}(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 2\alpha^2(\omega^2 - \alpha^2)\sqrt{\alpha^2 + \beta(\omega^2 - \alpha^2)} + \\
 & \alpha^2 i \left\{ \left[\omega + \sqrt{\alpha^2 + \beta(\omega^2 - \alpha^2)} \right]^2 \left[\exp \left[\frac{i}{1-\beta} (\omega - \sqrt{\alpha^2 + \beta(\omega^2 - \alpha^2)}) \right] - 1 \right] - \right. \\
 & \left. \left[\omega - \sqrt{\alpha^2 + \beta(\omega^2 - \alpha^2)} \right]^2 \left[\exp \left[\frac{i}{1-\beta} (\omega + \sqrt{\alpha^2 + \beta(\omega^2 - \alpha^2)}) \right] - 1 \right] \right\} = 0.
 \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

A equação acima é levemente mais complexa que a do caso de temperatura nula. Por isso, um bom limite para testá-la é fazer $\beta \rightarrow 0$ e assim notarmos se recuperamos a (4.1.27). De fato, isso acontece. Analisarei as soluções da (4.2.12) mais adiante.

4.3 Dedução da Relação de Dispersão para o Caso Adiabático

Resta agora empregar o mesmo método das seções anteriores para as equações que descrevem um feixe de elétrons adiabático.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial(n_e v_e)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial v_e}{\partial x} = \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{3\gamma n_e}{m} \frac{\partial n_e}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = e \frac{n_e - n_0}{\varepsilon_0}. \end{array} \right. \quad (4.3.1)$$

Escrevemos v_e e n_e em termos dos seus valores no equilíbrio (que novamente são os mesmos do caso em que $T = 0$) somados a uma pequena perturbação. Desprezando os termos de segunda ordem nas perturbações, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v}{\partial x} + v_0 \frac{\partial n}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{3\gamma n_0}{m} \frac{\partial n}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{en}{\varepsilon_0}. \end{array} \right. \quad (4.3.2)$$

O conjunto de equações (4.3.2) é muito semelhante ao (4.2.3). De fato, a única diferença é um fator constante na frente de um de seus termos. Poderíamos

pensar que ajustando adequadamente tal termo, poderia fazer os casos adiabático e isotérmico serem idênticos. Entretanto, isso não é verdade. Existe uma relação entre as constantes β (do caso isotérmico) e γ (do caso adiabático).

Na equação (3.2.1), temos a relação entre β, p e n . Tal relação vale sempre no caso isotérmico. Em particular, vale no equilíbrio

$$p_0 = \beta m n_0. \quad (4.3.3)$$

Para o caso adiabático, a definição da constante γ está na equação (3.3.14). Ela também vale no equilíbrio, isto é

$$p_0 = \gamma n_0^3. \quad (4.3.4)$$

Dividindo a (4.3.4) pela (4.3.3) e rearranjando os termos, ficamos com

$$\gamma = \frac{\beta m}{n_0^2}. \quad (4.3.5)$$

Substituindo a (4.3.5) na (4.3.2), obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v}{\partial x} + v_0 \frac{\partial n}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 3 \frac{\beta}{n_0} \frac{\partial n}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{en}{\epsilon_0}, \end{array} \right. \quad (4.3.6)$$

que é um conjunto de equações semelhante ao (4.2.3), com exceção do fator “3” na segunda equação. Isso mostra que o caso isotérmico e o caso adiabático nunca serão idênticos para uma dada densidade e pressão no equilíbrio, isto é, para o mesmo sistema físico.

Podemos obter diretamente a relação de dispersão para o caso adiabático, simplesmente pegando a equação (4.2.12) e trocando β por 3β o que resulta em

$$\begin{aligned}
& 2\sqrt{\alpha^2 + 3\beta(\omega^2 - \alpha^2)}(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 2\alpha^2(\omega^2 - \alpha^2)\sqrt{\alpha^2 + 3\beta(\omega^2 - \alpha^2)} + \\
& \alpha^2 i \left\{ \left[\omega + \sqrt{\alpha^2 + 3\beta(\omega^2 - \alpha^2)} \right]^2 \left[\exp \left[\frac{i}{1-3\beta} (\omega - \sqrt{\alpha^2 + 3\beta(\omega^2 - \alpha^2)}) \right] - 1 \right] - \right. \\
& \left. \left[\omega - \sqrt{\alpha^2 + 3\beta(\omega^2 - \alpha^2)} \right]^2 \left[\exp \left[\frac{i}{1-3\beta} (\omega + \sqrt{\alpha^2 + 3\beta(\omega^2 - \alpha^2)}) \right] - 1 \right] \right\} = 0. \quad (4.3.7)
\end{aligned}$$

4.4 Resumo

Nesse capítulo, obtive as seguintes relações de dispersão.

- Caso “frio”

$$2\omega^2(\omega^2 - \alpha^2) + i\alpha[(\omega + \alpha)^2(e^{i(\omega-\alpha)} - 1) - (\omega - \alpha)^2(e^{i(\omega+\alpha)} - 1)] = 0. \quad (4.4.1)$$

- Caso isotérmico

$$\begin{aligned}
& 2\sqrt{\alpha^2 + \beta(\omega^2 - \alpha^2)}(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 2\alpha^2(\omega^2 - \alpha^2)\sqrt{\alpha^2 + \beta(\omega^2 - \alpha^2)} + \\
& \alpha^2 i \left\{ \left[\omega + \sqrt{\alpha^2 + \beta(\omega^2 - \alpha^2)} \right]^2 \left[\exp \left[\frac{i}{1-\beta} (\omega - \sqrt{\alpha^2 + \beta(\omega^2 - \alpha^2)}) \right] - 1 \right] - \right. \\
& \left. \left[\omega - \sqrt{\alpha^2 + \beta(\omega^2 - \alpha^2)} \right]^2 \left[\exp \left[\frac{i}{1-\beta} (\omega + \sqrt{\alpha^2 + \beta(\omega^2 - \alpha^2)}) \right] - 1 \right] \right\} = 0. \quad (4.4.2)
\end{aligned}$$

- Caso adiabático

$$\begin{aligned}
& 2\sqrt{\alpha^2 + 3\beta(\omega^2 - \alpha^2)}(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 2\alpha^2(\omega^2 - \alpha^2)\sqrt{\alpha^2 + 3\beta(\omega^2 - \alpha^2)} + \\
& \alpha^2 i \left\{ \left[\omega + \sqrt{\alpha^2 + 3\beta(\omega^2 - \alpha^2)} \right]^2 \left[\exp \left[\frac{i}{1-3\beta} (\omega - \sqrt{\alpha^2 + 3\beta(\omega^2 - \alpha^2)}) \right] - 1 \right] - \right. \\
& \left. \left[\omega - \sqrt{\alpha^2 + 3\beta(\omega^2 - \alpha^2)} \right]^2 \left[\exp \left[\frac{i}{1-3\beta} (\omega + \sqrt{\alpha^2 + 3\beta(\omega^2 - \alpha^2)}) \right] - 1 \right] \right\} = 0. \quad (4.4.3)
\end{aligned}$$

Passarei a discutir agora a solução dessas relações de dispersão.

Capítulo 5

Resultados

Aqui apresentarei as soluções, obtidas de forma numérica, das relações de dispersão. Durante tal procedimento é necessário muito cuidado, pois surgem algumas soluções espúrias, valores de ω que, de fato, são solução da relação de dispersão, mas não são soluções do problema.

A falsidade dessas soluções pode ser provada analiticamente com argumentos simples. Nos três casos, para $\omega = \pm\alpha$, as relações de dispersão são satisfeitas. Entretanto, nesse caso, essa relação de dispersão não é válida, pois a equação da qual ela foi deduzida (4.1.22) e (4.2.5) já não é mais a mesma. De fato, se $\omega = \pm\alpha$, a (4.1.22) fica

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - 2i\omega \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 0, \quad (5.1)$$

e sua solução é completamente diferente da (4.1.24).

Outra solução falsa, que aparece somente nos casos com efeitos térmicos, é

$$\omega = \pm i\alpha \sqrt{\frac{1}{\chi} - 1}, \quad (5.2)$$

onde $\chi = \beta$ no caso isotérmico e $\chi = 3\beta$ no caso adiabático. Essa solução é falsa (aqui analisarei somente casos em que $\chi < 1$), pois, olhando para a definição de j_{\pm} na equação (4.2.8), temos que o discriminante será nulo quando vale a (5.2), isto é, teríamos que $j_+ = j_-$ e essa solução seria degenerada e, novamente, a solução da equação para φ seria diferente.

Nos gráficos a seguir, as soluções falsas estarão omitidas.

5.1 Soluções para T=0

Segue abaixo as soluções da (4.1.27). Escrevi ω como $\omega = r + is$. Os gráficos devem ser analisados da seguinte maneira. Primeiramente, as soluções com cores diferentes representam soluções diferentes. Para um dado valor de α , olhamos

algum valor na curva, por exemplo, no gráfico da parte real. O correspondente valor da parte imaginária estará com a mesma cor no gráfico da parte imaginária. Como dito anteriormente, para esse trabalho o que é realmente relevante está na parte imaginária, pois ele fornece a informação sobre a estabilidade, mas a título de curiosidade e completeza, coloquei o gráfico da parte real também.

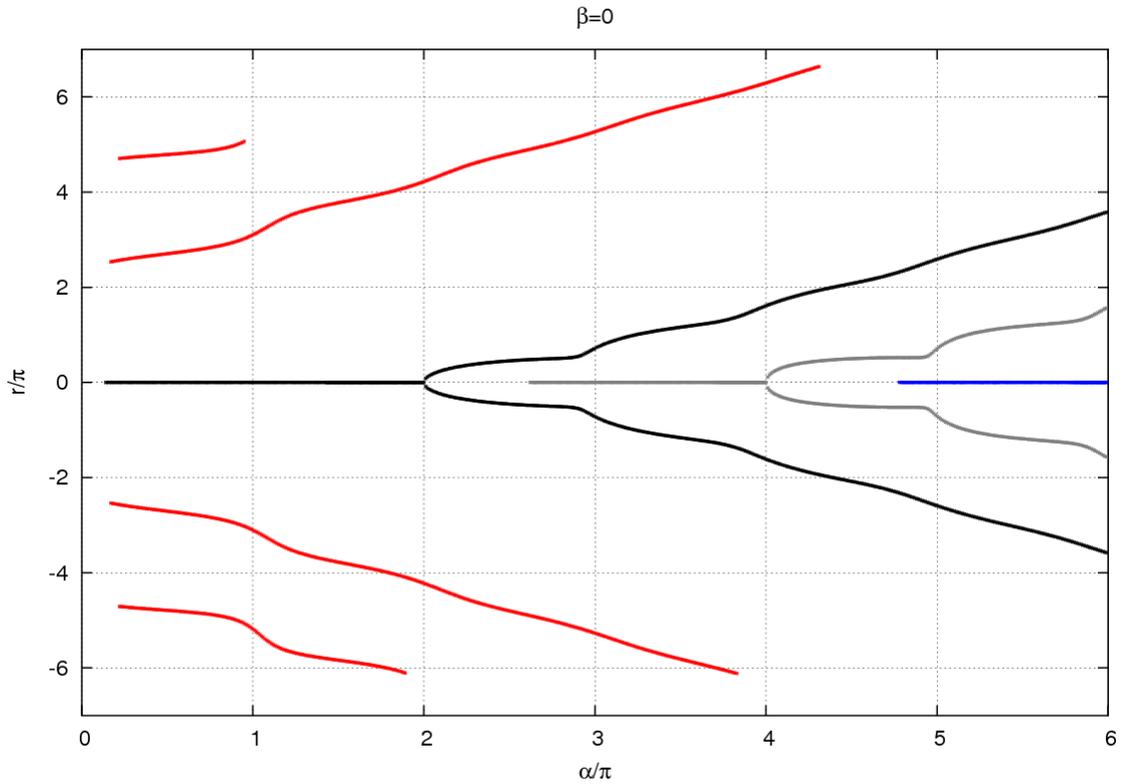


Figura 3: r x α para $\beta = 0$

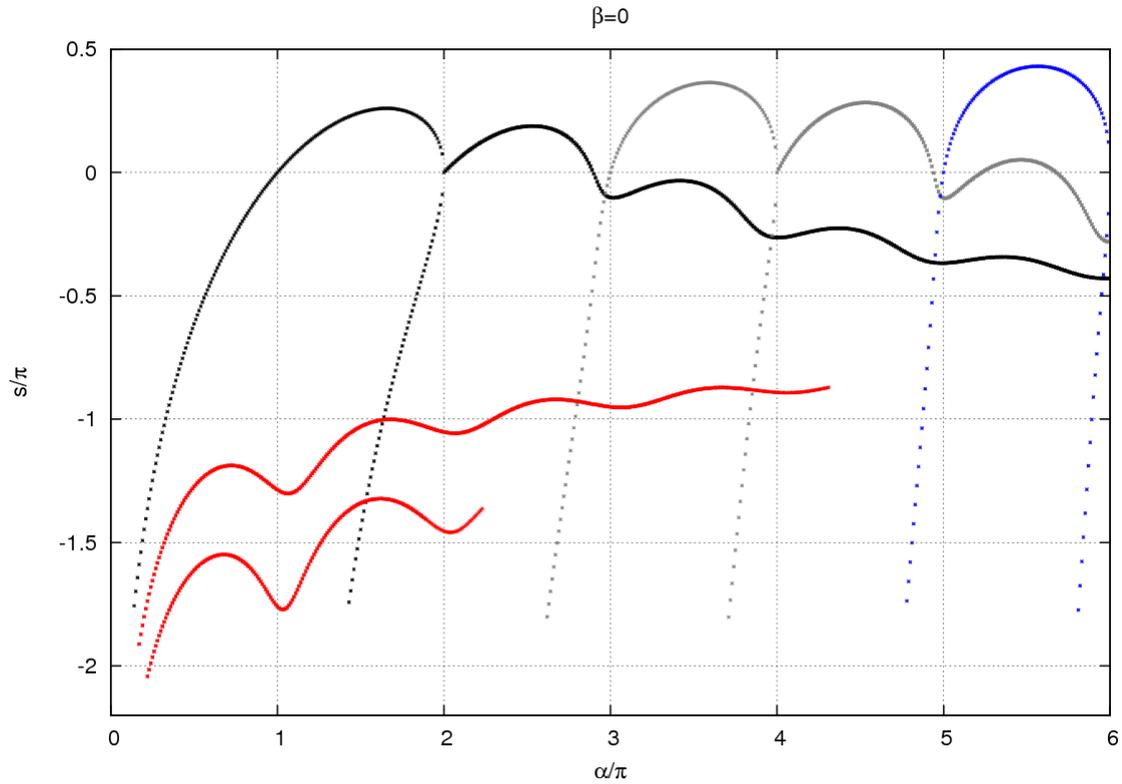


Figura 4: $s \times \alpha$ para $\beta = 0$

Para o caso de $T=0$, o sistema permanece estável até um valor de $\alpha = \pi$, quando surge a primeira instabilidade. Isso significa, na prática, que, dado uma densidade para o plasma e fixando a velocidade em que o feixe é injetado, aumentando o valor do comprimento do diodo, o sistema será estável até que o parâmetro α tenha tal valor. O sistema permanecerá instável até um valor um pouco menor que $\alpha = 3\pi$. Isso acontecerá sempre para valores de $\alpha = (2n + 1)\pi$, $\{n \in \mathbb{N}; n > 1\}$, isso é, sempre, para uma pequena região antes de α atingir esses valores, há uma região de estabilidade que termina exatamente em $\alpha = (2n + 1)\pi$. Como dito na introdução, a essa região está associada um rico comportamento dinâmico, mas que foge do escopo discutir aqui.

As soluções em vermelho parecem, pelo menos para os valores de α já estudados, não serem muito importantes (muito autores ignoram elas), pois são bastante estáveis, nessa região.

5.2 Soluções para o Caso Isotérmico

Segue abaixo, um conjunto de gráficos para quatro valores diferentes de β . Na sequência, há um gráfico com a parte imaginária de todos eles e o com $\beta = 0$ para fins de comparação.

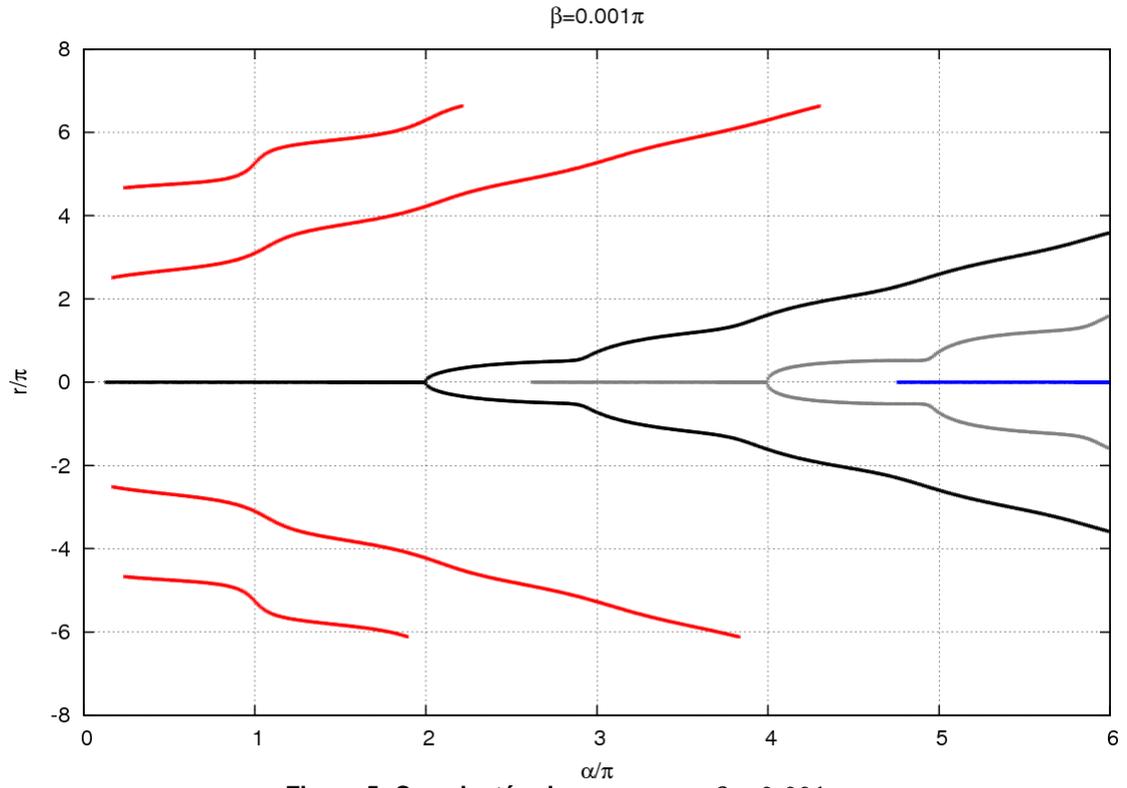


Figura 5: Caso isotérmico, $r \times \alpha$ para $\beta = 0.001\pi$

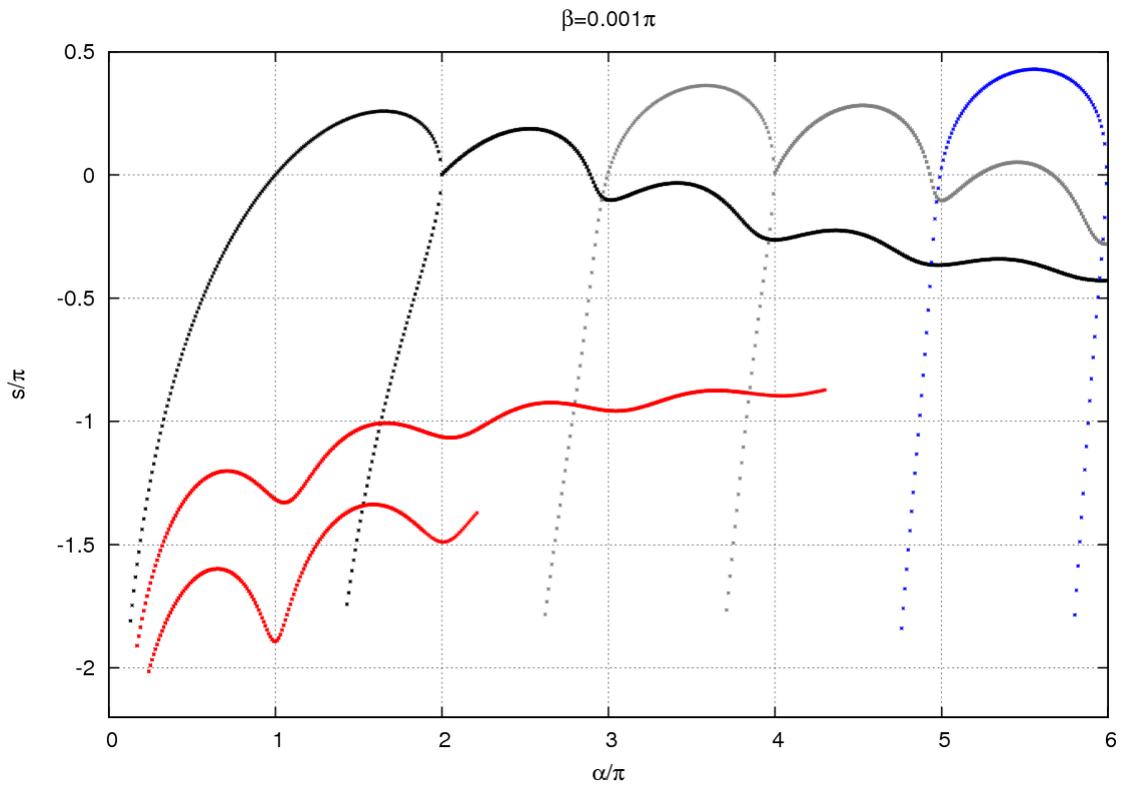


Figura 6: Caso isotérmico, $s \times \alpha$ para $\beta = 0.001\pi$

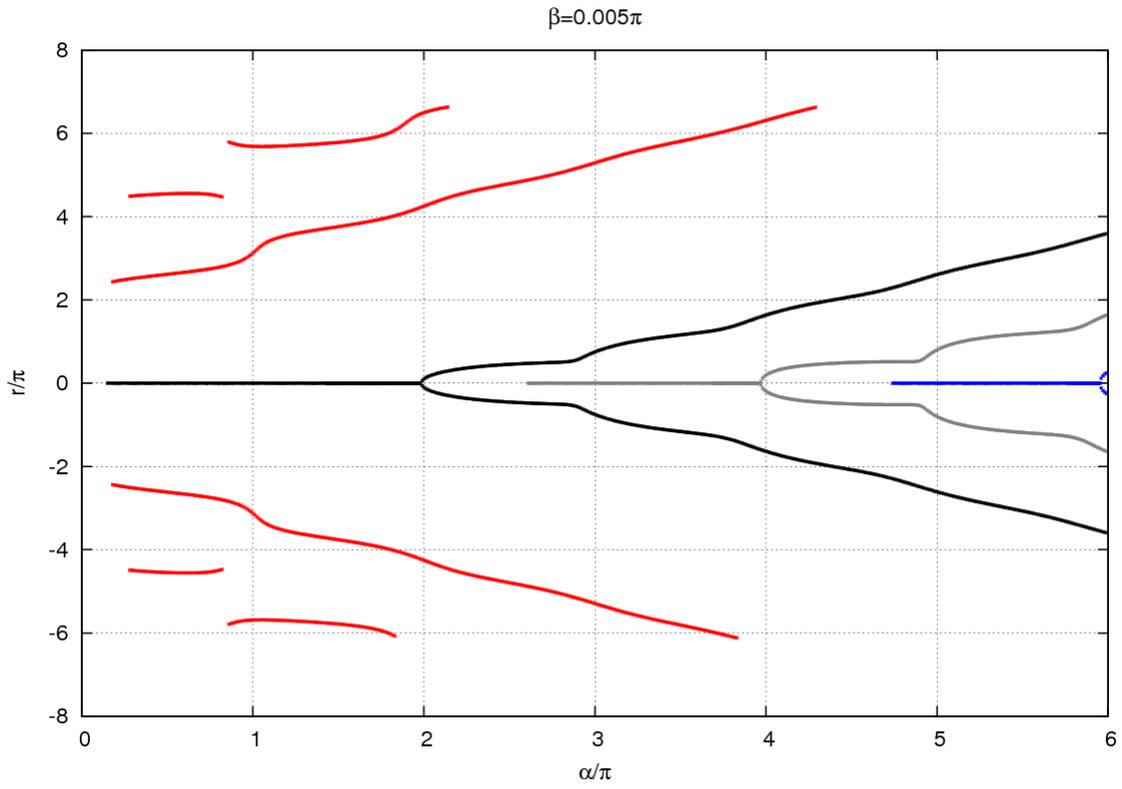


Figura 7: Caso isotérmico, r x α para $\beta = 0.005\pi$

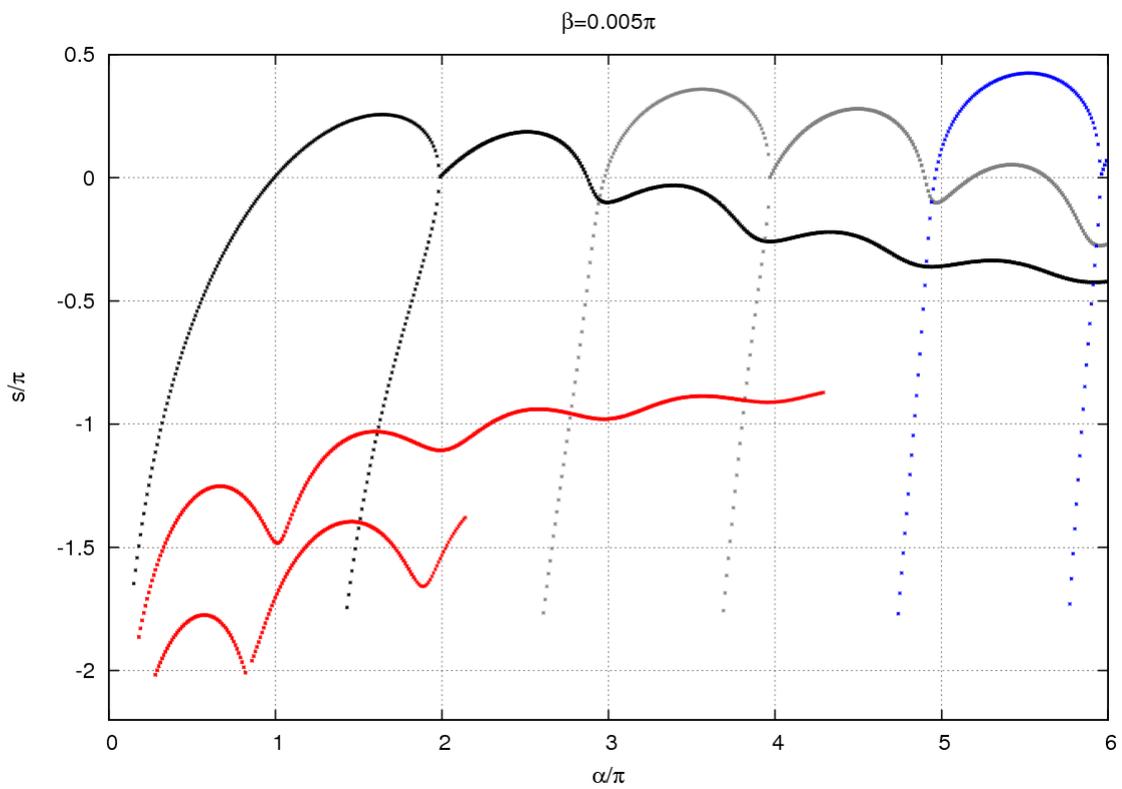


Figura 8: Caso isotérmico, s x α para $\beta = 0.005\pi$

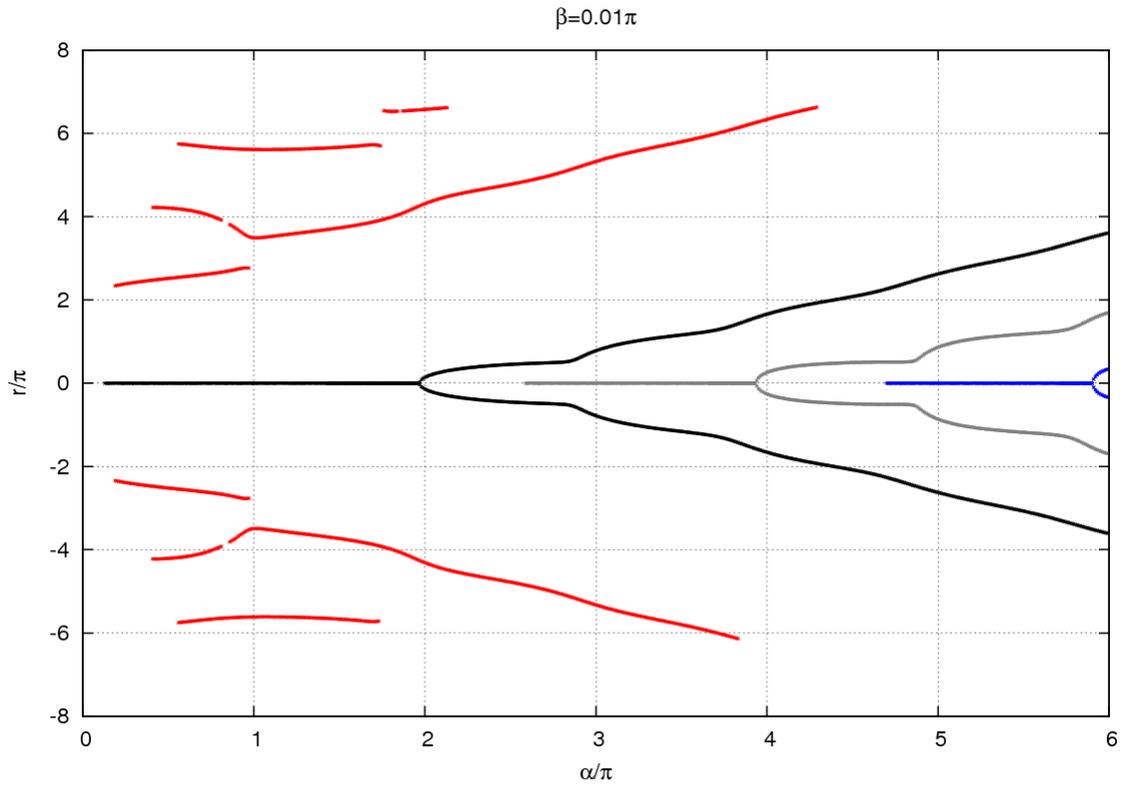


Figura 9: Caso isotérmico, $r \times \alpha$ para $\beta = 0.01\pi$

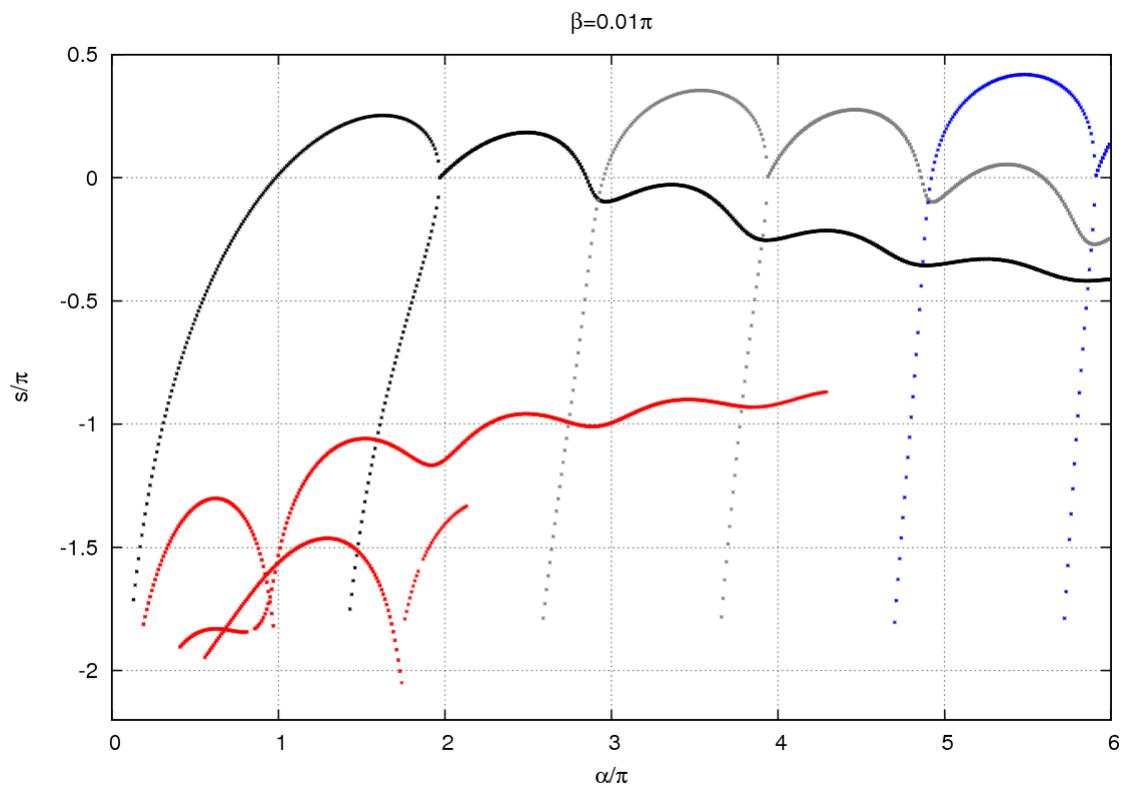


Figura 10: Caso isotérmico, $s \times \alpha$ para $\beta = 0.01\pi$

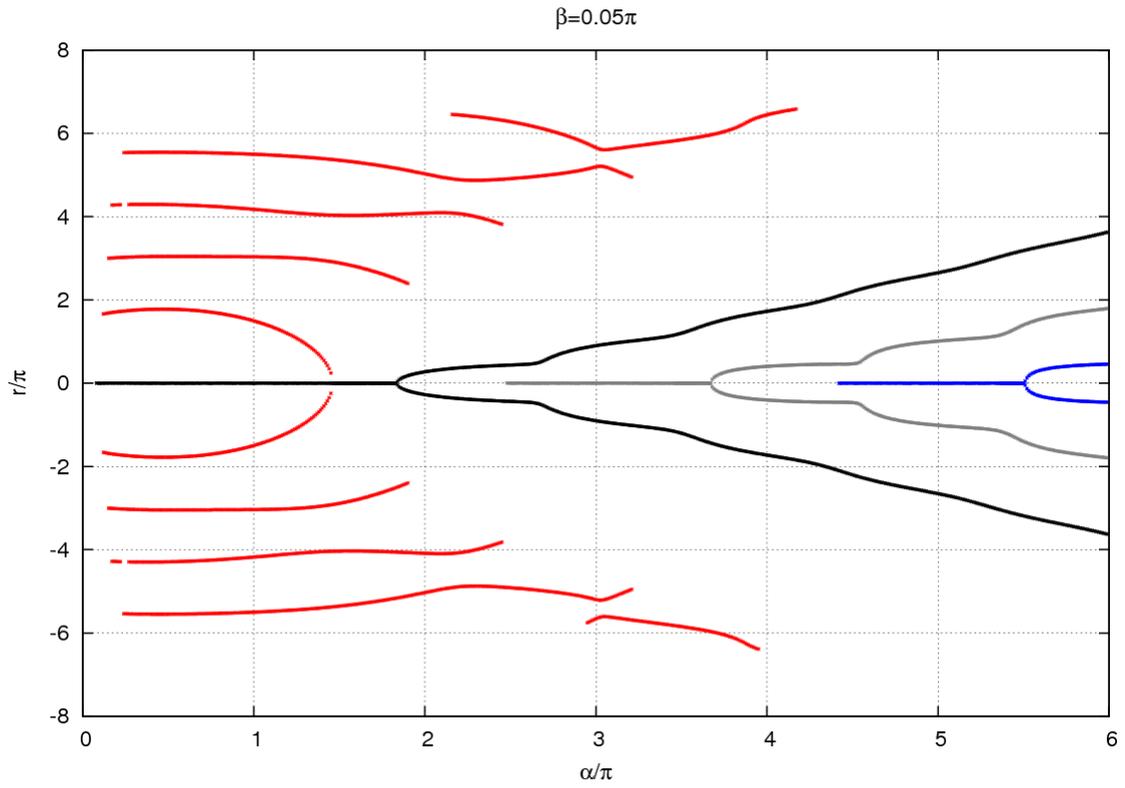


Figura 11: Caso isotérmico, $r \times \alpha$ para $\beta = 0.05\pi$

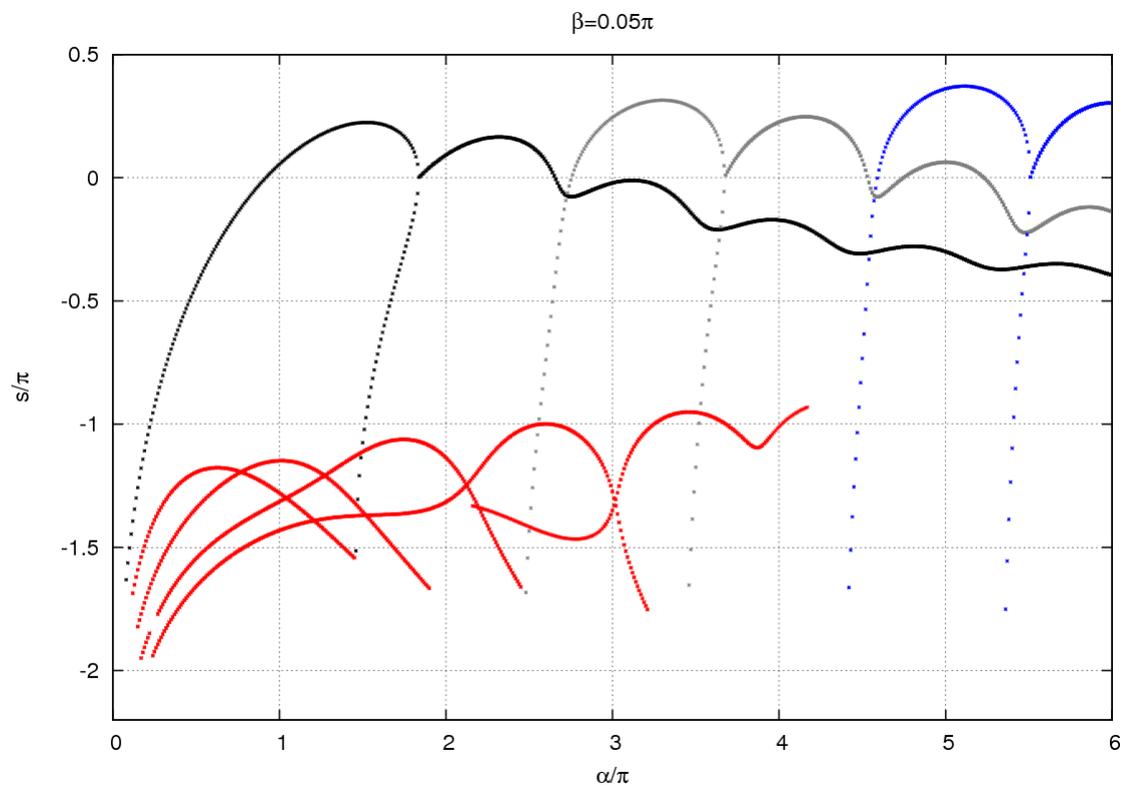


Figura 12: Caso isotérmico, $s \times \alpha$ para $\beta = 0.05\pi$

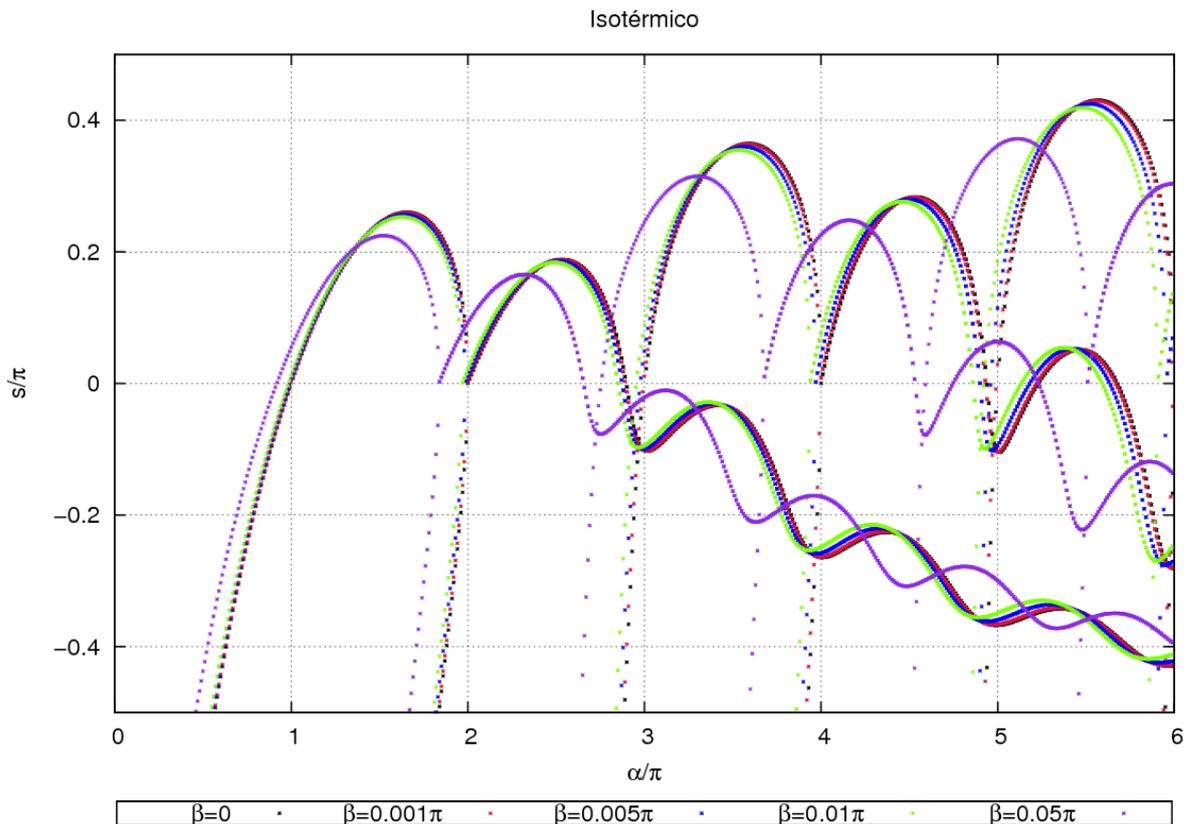


Figura 13: Comparação do caso isotérmico para vários valores de β

Primeiramente notamos que, qualitativamente, as curvas são praticamente iguais às do caso $\beta = 0$. Entretanto, temos vários resultados novos para serem analisados.

A diferença mais saliente talvez seja a forma que as soluções em vermelho assumem, que são bastante diferentes com o aumento de β , em relação ao caso $\beta = 0$. Entretanto, essas soluções continuam bastante estáveis, então, para esse trabalho são irrelevantes.

Para valores de β , razoavelmente pequenos (dos quatro casos que abordei aqui, isso vale para os três menores), a curva difere muito pouco da com $\beta = 0$, justificando que é uma boa aproximação, para diversos casos úteis, não levar em conta os efeitos térmicos. Se, incluindo os efeitos térmicos, o comportamento tivesse uma mudança brusca, essa aproximação não seria boa e não deveria ser usada.

Outro comportamento que esse caso apresenta em relação ao mais idealizado é que a primeira instabilidade, bem como as pequenas regiões de estabilidade e toda a curva de uma maneira geral, são puxadas para a esquerda. Isso é, o sistema se instabiliza antes que no caso de $\beta = 0$.

Além disso, o “período”⁵ das curvas diminui com o aumento de β . Na figura 13, notamos que na primeira vez em que as curvas surgem para $\beta = 0.001\pi$, $\beta = 0.005\pi$ e $\beta = 0.01\pi$, elas estão muito próximas, mas para $\alpha \leq 6\pi$ a diferença entre elas é notável. Isso ocorre justamente por causa dessa mudança no período com β . Voltarei a esse detalhe no final deste capítulo com um embasamento teórico que tornará mais fácil o entendimento.

Por fim, outra diferença entre as curvas é que a amplitude máxima delas é menor em relação ao caso $\beta = 0$. Isso é de alguma relevância para valores de β pequenos em que as curvas sejam quase coincidentes com a de $\beta = 0$. Assim, sabemos que o sistema não irá afastar-se do equilíbrio tão rapidamente quanto no caso idealizado, embora essa não seja uma diferença tão significativa.

5.3 Soluções para o Caso Adiabático

Como a relação de dispersão é a mesma do caso anterior, não é esperada nenhuma mudança significativa com relação ao descrito anteriormente. Entretanto, o fator “3”, faz com que as mudanças ocorram muito mais rapidamente que no caso isotérmico para o mesmo valor de β . Segue abaixo um conjunto de gráficos para os mesmos valores de β usados anteriormente, mas para o caso adiabático.

⁵ Aqui estou me referindo a quando “nasce” uma curva com um comportamento já apresentado antes. Por exemplo, na figura 4, a curva cinza e a curva azul têm comportamento semelhante à curva preta.

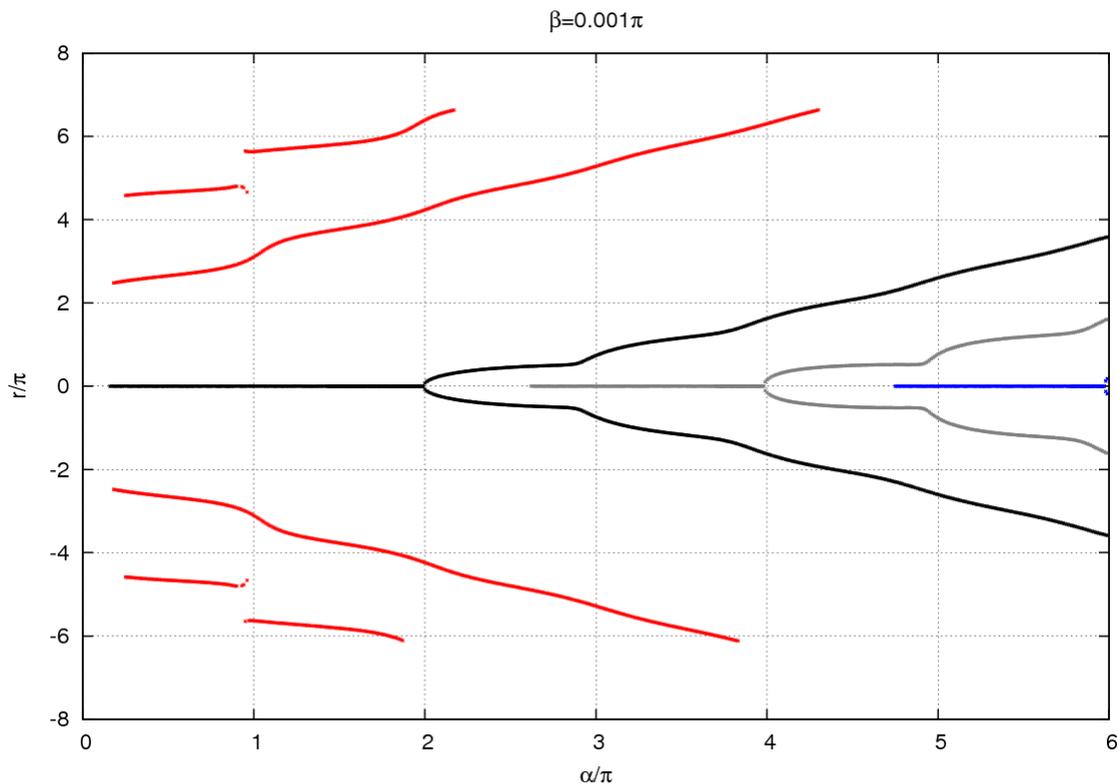


Figura 14: Caso adiabático, $r \times \alpha$ para $\beta = 0.001\pi$

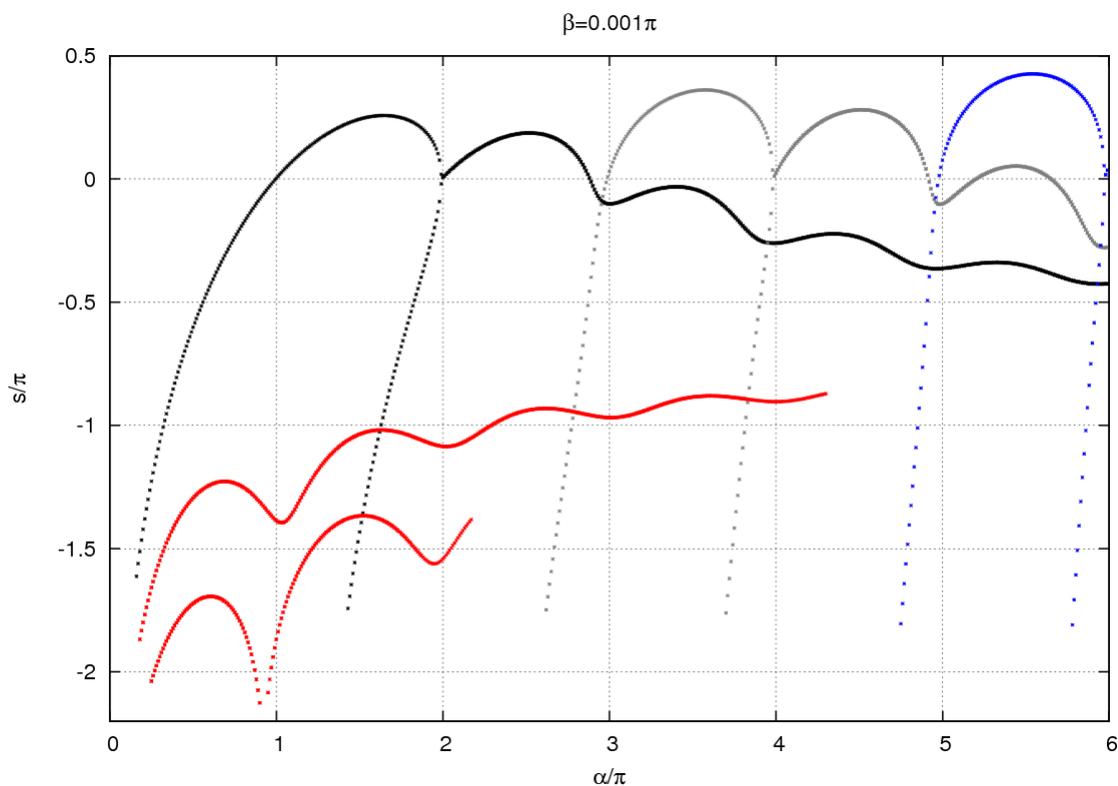


Figura 15: Caso adiabático, $s \times \alpha$ para $\beta = 0.001\pi$

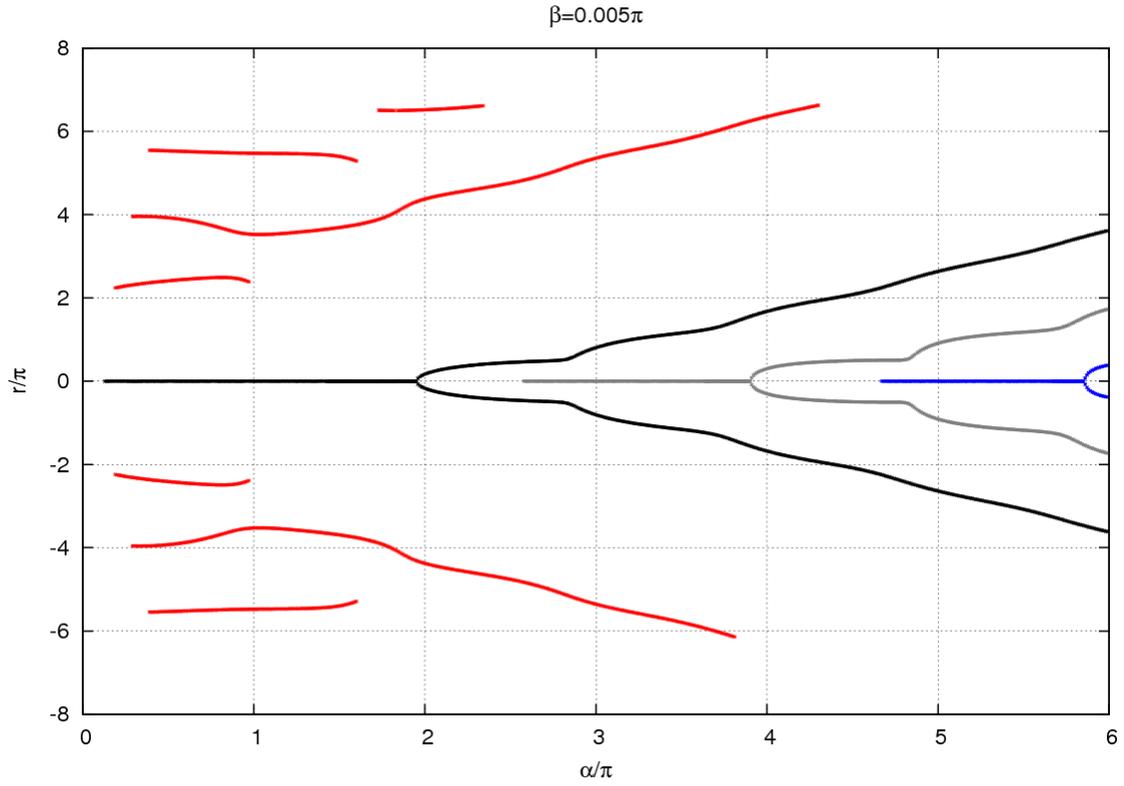


Figura 16: Caso adiabático, $r \times \alpha$ para $\beta = 0.005\pi$

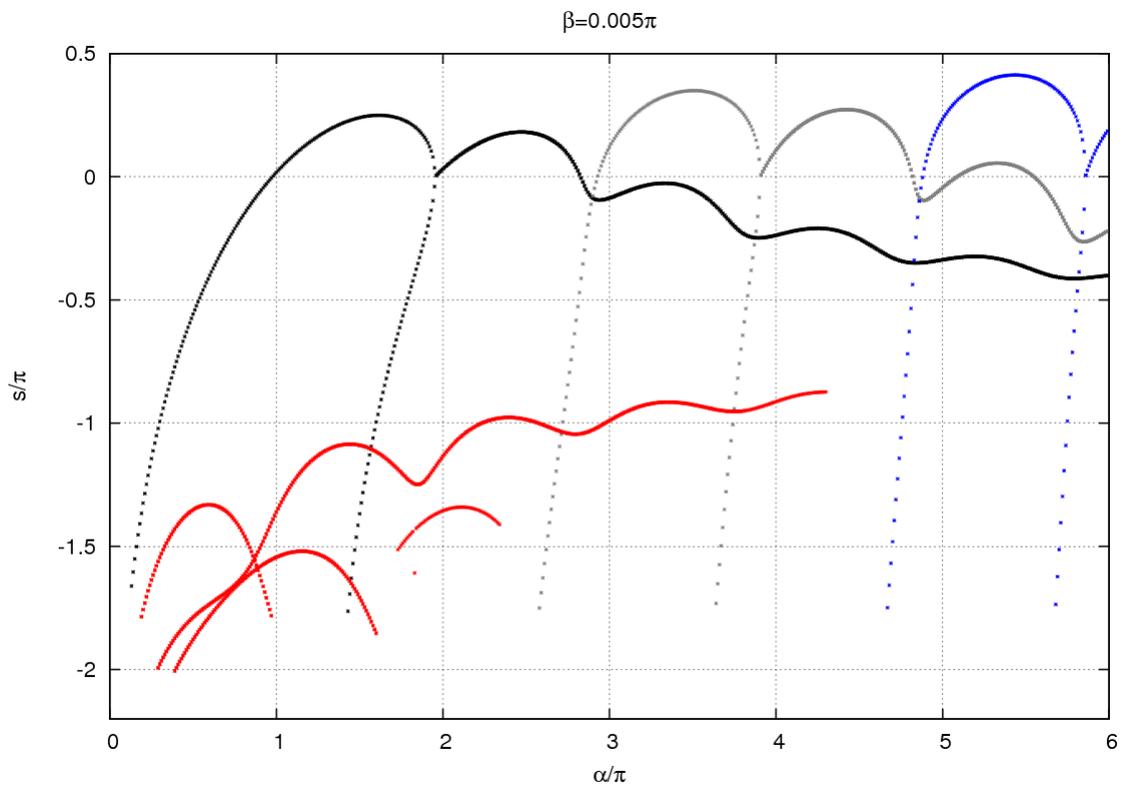


Figura 17: Caso adiabático, $s \times \alpha$ para $\beta = 0.005\pi$

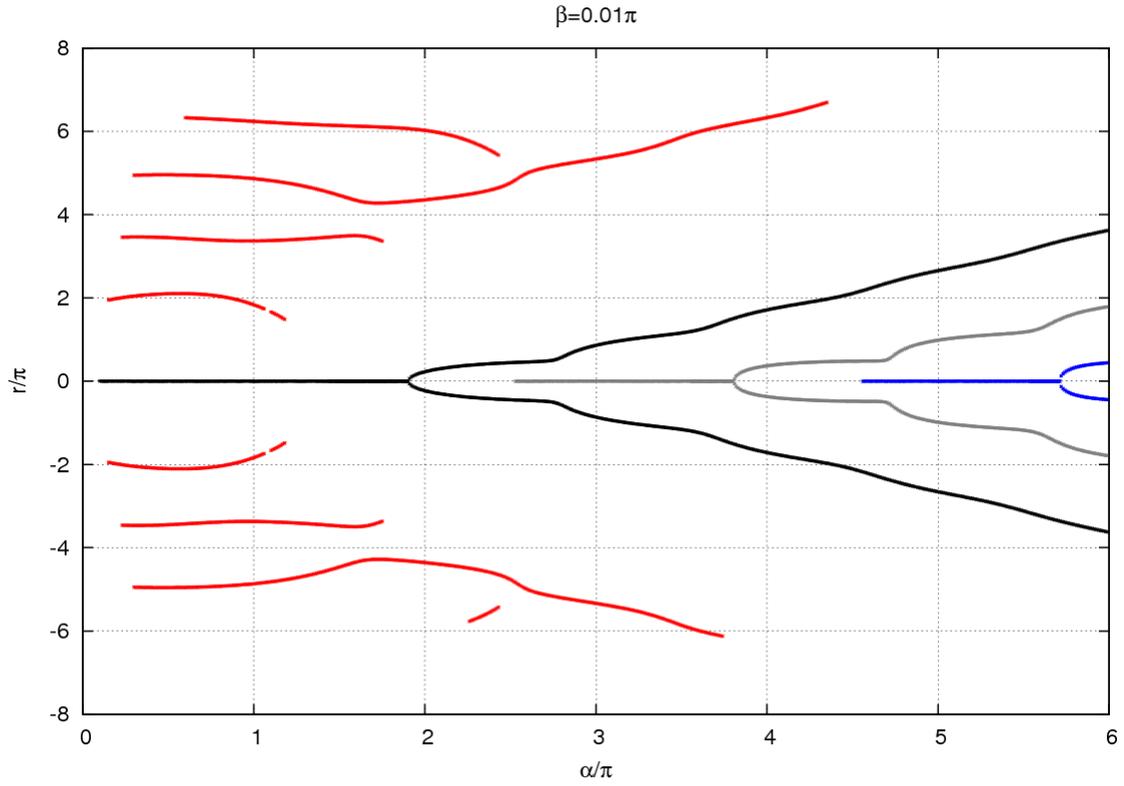


Figura 18: Caso adiabático, $r \times \alpha$ para $\beta = 0.01\pi$

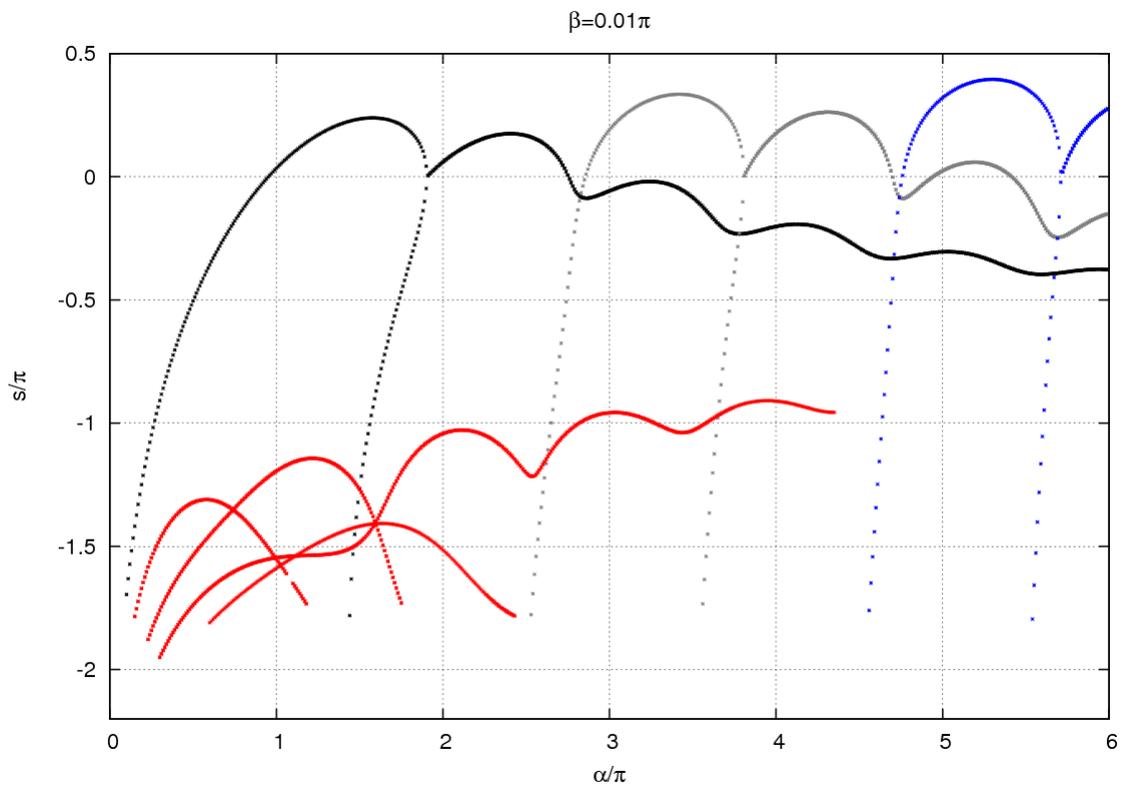


Figura 19: Caso adiabático, $s \times \alpha$ para $\beta = 0.01\pi$

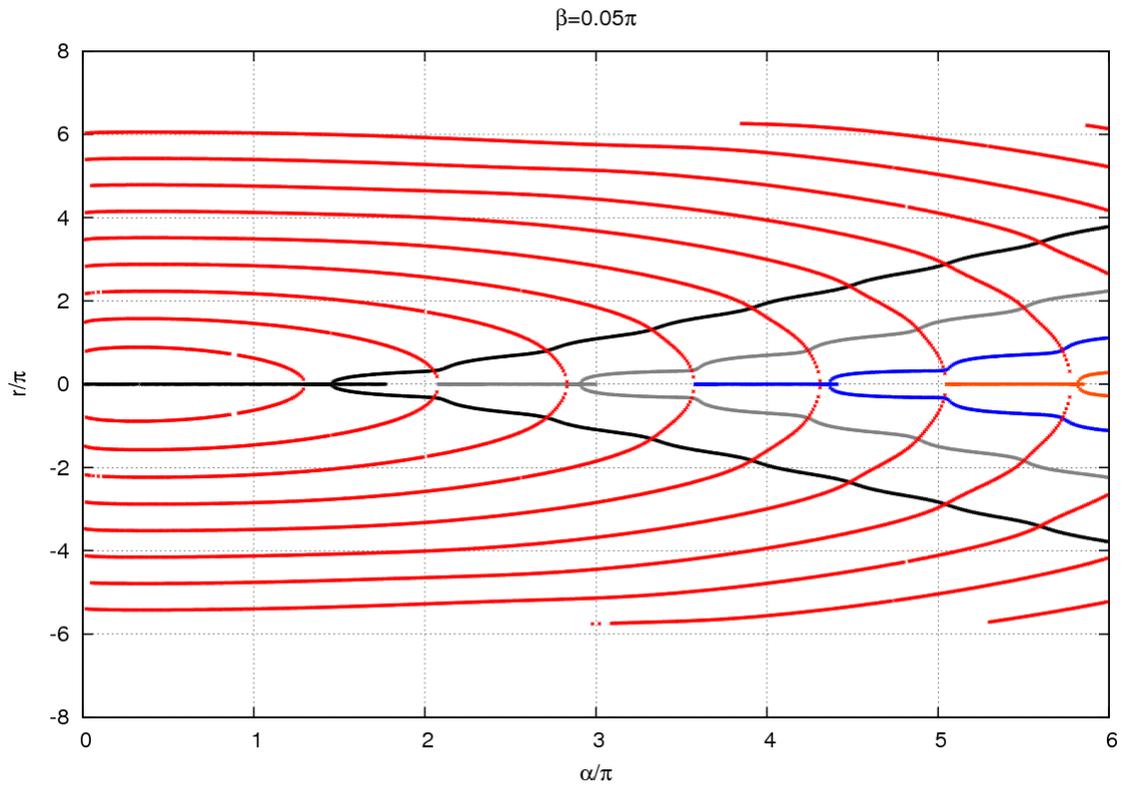


Figura 20: Caso adiabático, $r \times \alpha$ para $\beta = 0.05\pi$

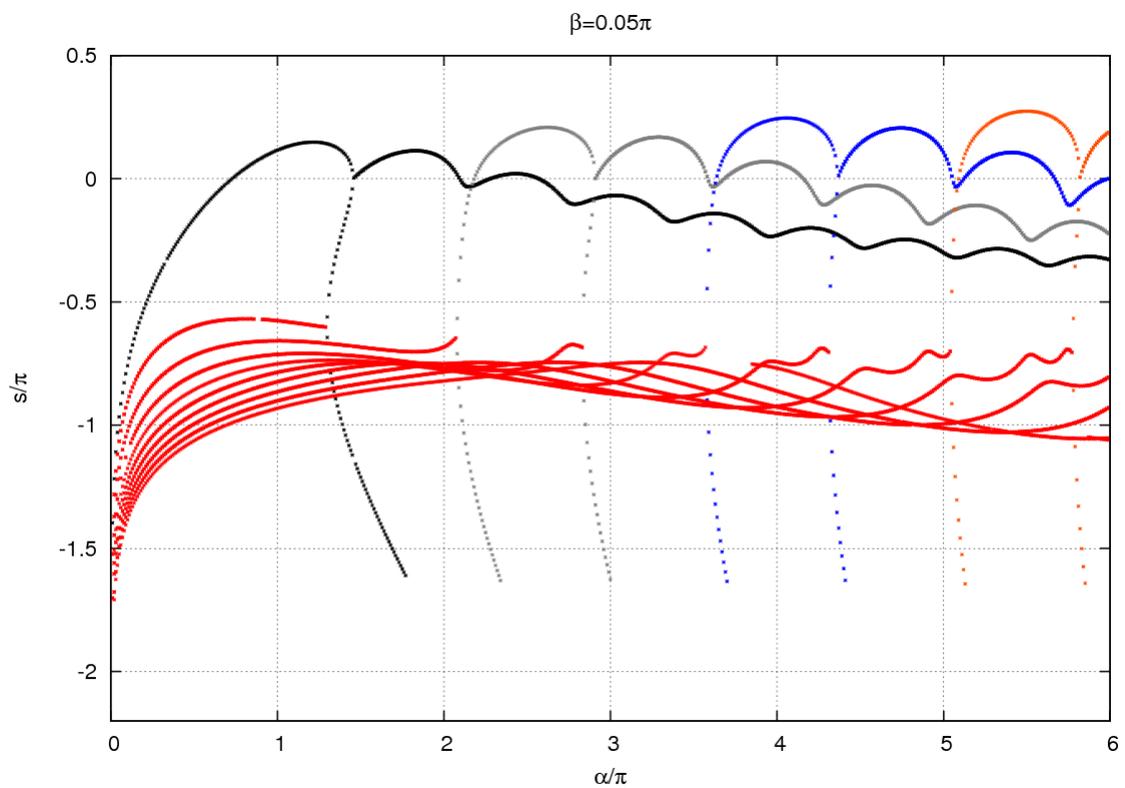


Figura 21: Caso adiabático, $s \times \alpha$ para $\beta = 0.05\pi$

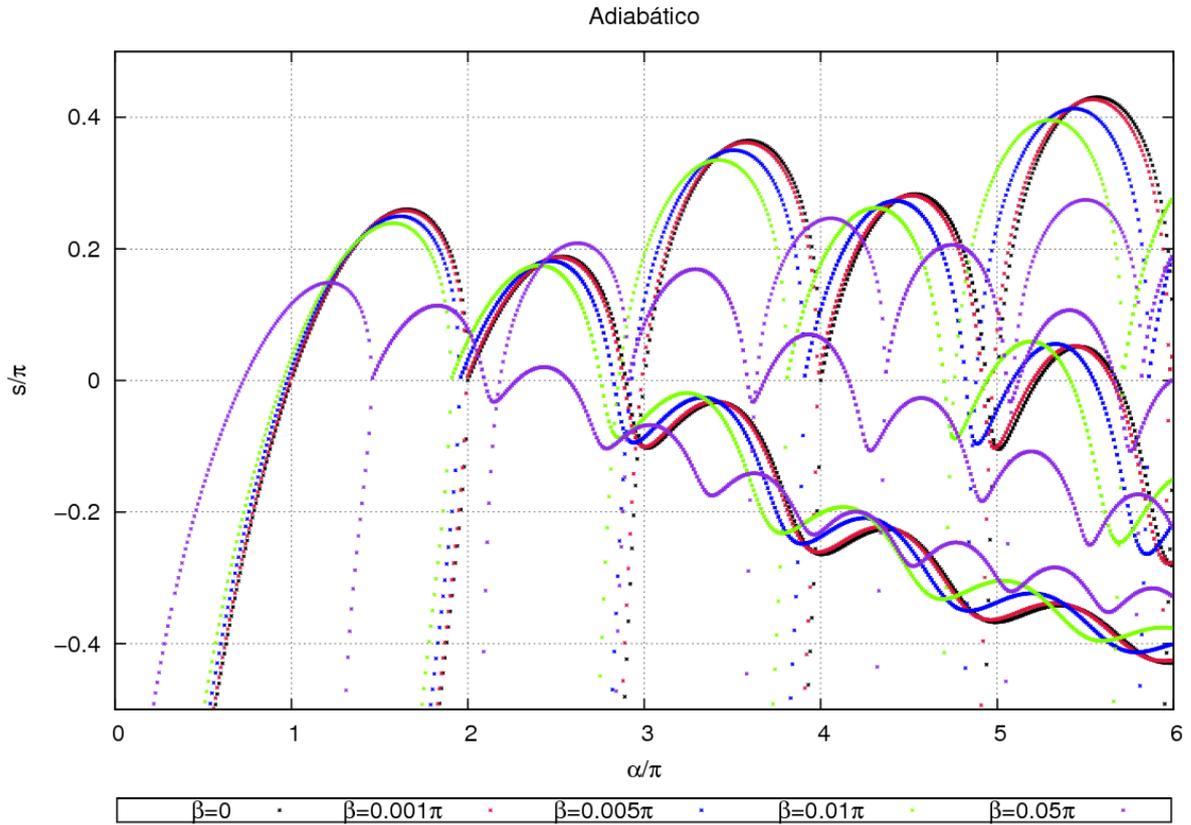


Figura 22: Comparação do caso adiabático para vários valores de β

5.4 Primeira Instabilidade

Talvez para vários fins práticos a maior importância seja quando surge a primeira instabilidade no sistema, que é exatamente o problema que motivou Pierce. Esse é um cálculo que pode ser feito analiticamente (principalmente após notar, com base nos gráficos acima, que a primeira instabilidade ocorre para $\omega = 0 + 0i = 0$). Seja uma relação de dispersão genérica com efeitos térmicos ($\chi = \beta$ para o caso isotérmico e $\chi = 3\beta$ para o caso adiabático) dada por

$$\begin{aligned}
 & 2\sqrt{\alpha^2 + \chi(\omega^2 - \alpha^2)}(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 2\alpha^2(\omega^2 - \alpha^2)\sqrt{\alpha^2 + \chi(\omega^2 - \alpha^2)} + \\
 & \alpha^2 i \left\{ \left[\omega + \sqrt{\alpha^2 + \chi(\omega^2 - \alpha^2)} \right]^2 \left[\exp \left[\frac{i}{1-\chi} \left(\omega - \sqrt{\alpha^2 + \chi(\omega^2 - \alpha^2)} \right) \right] - 1 \right] - \right. \quad (5.4.1) \\
 & \left. \left[\omega - \sqrt{\alpha^2 + \chi(\omega^2 - \alpha^2)} \right]^2 \left[\exp \left[\frac{i}{1-\chi} \left(\omega + \sqrt{\alpha^2 + \chi(\omega^2 - \alpha^2)} \right) \right] - 1 \right] \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Colocando $\omega = 0$ a expressão fica

$$\exp\left[\frac{i\alpha}{1-\chi}\sqrt{1-\chi}\right] = \exp\left[-\frac{i\alpha}{1-\chi}\sqrt{1-\chi}\right], \quad (5.4.2)$$

que é satisfeita se, e somente se

$$\sin\left[\frac{\alpha}{\sqrt{1-\chi}}\right] = 0, \quad (5.4.3)$$

que é equivalente a

$$\frac{\alpha}{\pi} = n\sqrt{1-\chi}, \quad (5.4.4)$$

com $n \in \mathbb{N}^*$.

Da expressão (5.4.4) podemos deduzir quando acontecerá a primeira instabilidade ($n = 1$). Segue abaixo um gráfico da (5.4.4) indicando os valores que usei anteriormente.

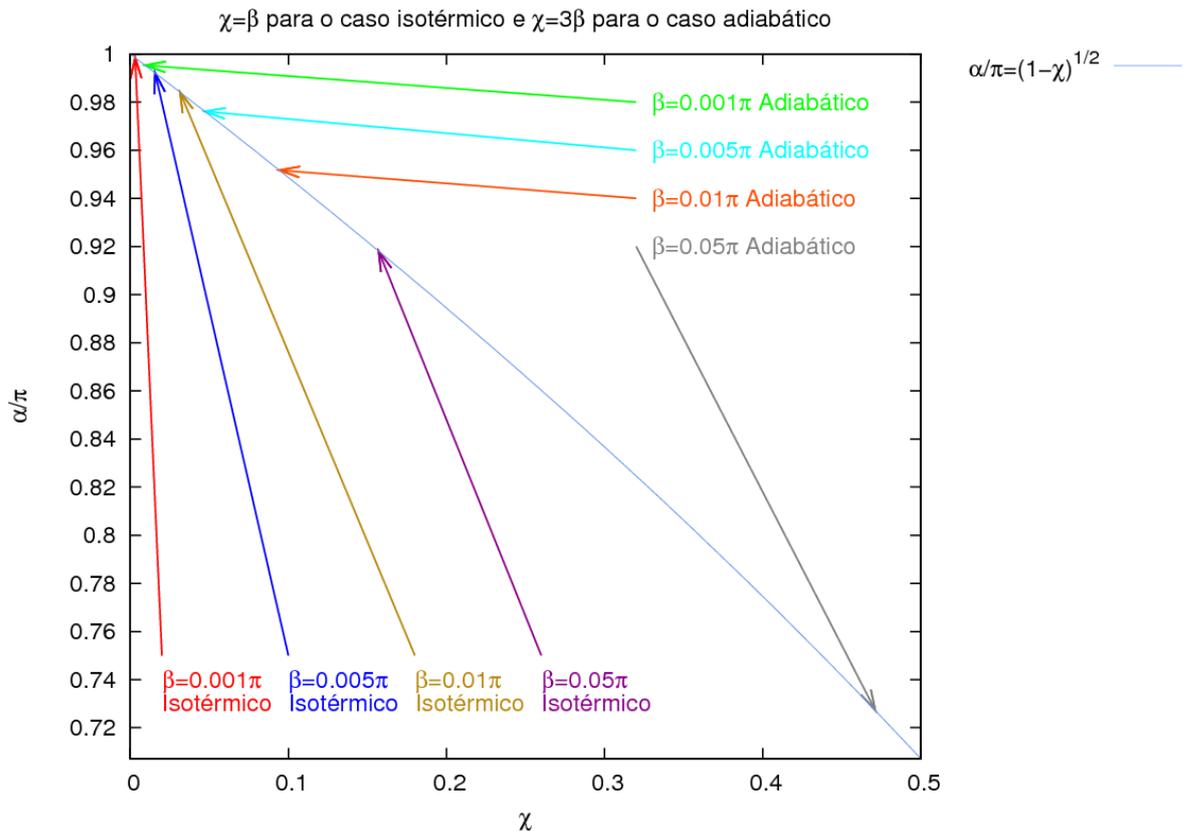


Figura 23: Primeira instabilidade

Outro resultado importante, que pode ser extraído da (5.4.4) e que já foi comentado anteriormente é o decréscimo do “período” da solução com o aumento de β . De fato, com exceção de $n = 1$, a (5.4.4) não pode ser usada para prever onde o sistema deixará de ser estável, pois há outras soluções envolvidas, como

mostra qualquer um dos gráficos apresentados nas seções anteriores. Esses valores em que $\omega = 0$, podem ser usados para definir mais precisamente aquilo a que me refiro como “período”. Um período é dado pela diferença entre a (5.4.4) com dois valores consecutivos, isto é

$$\text{Período} = \sqrt{1 - \chi}, \quad (5.4.5)$$

que claramente diminui com β .

A (5.4.4) também deixa claro o porquê da diferença entre as curvas aumenta para valores de β diferentes para valores α cada vez maiores. De fato, quando $n = 1$, a diferença entre a (5.4.4) para dois valores diferentes é

$$\frac{\alpha_a}{\pi} \Big|_{n=1} - \frac{\alpha_b}{\pi} \Big|_{n=1} = \sqrt{1 - \chi_a} - \sqrt{1 - \chi_b}. \quad (5.4.6)$$

Para $n = 2$, essa diferença é de

$$\frac{\alpha_a}{\pi} \Big|_{n=2} - \frac{\alpha_b}{\pi} \Big|_{n=2} = 2(\sqrt{1 - \chi_a} - \sqrt{1 - \chi_b}), \quad (5.4.7)$$

e assim sucessivamente, deixando explícito o aumento da diferença entre as duas curvas.

Capítulo 6

Considerações Finais

O presente trabalho teve como objetivo o estudo de como os efeitos térmicos modificam a estabilidade do diodo Pierce. Em particular, mostrei que a primeira instabilidade ocorre antes em relação ao caso “frio”, mas, para pequenos valores da constante que inclui os efeitos térmicos, o desvio é bastante pequeno, justificando a aproximação mais usada para tratar do diodo.

A construção do trabalho, em minha opinião, é auto-suficiente para o entendimento dele como um todo, pois parti de um argumento fundamental, que resultou na equação de Vlasov de onde foram deduzidas as equações de fluidos. Com tais equações linearizadas e aplicando as condições de contorno, obtive a relação de dispersão, sempre dando o máximo possível de detalhes sobre como analisar os resultados obtidos.

Há diversos pontos ainda em aberto, que talvez possam ser fruto de alguma investigação futura. Nesse trabalho, só foram analisados casos em que $\chi < 1$, mas parece que existe algo muito especial para $\chi = 1$, que carece de descrição ainda, sem falar de valores de $\chi > 1$, embora possa ser questionável o uso da aproximação de fluido em tais casos.

Pode-se também tentar dar uma descrição mais detalhada do que a existente na literatura para o caso em que deixamos de usar a hipótese de íons estáticos e consideramos efeitos térmicos concomitantemente. Outros assuntos que podem ser mais estudados são o efeito das colisões entre as partículas e geometrias em duas ou três dimensões.

Bibliografia

1. **Pierce, J. R.** Limiting Stable Current in Electron Beams in the Presence of Ions. *Journal of Applied Physics*. 1944, pp. 721-726.
2. **Barroso, J. J., Terra, M. O. e Macau, E. E. N.** Bifurcation and chaos in the second oscillatory window of the classical Pierce diode. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2001, pp. 2579-2586.
3. **Lawson, W.S.** The Pierce diode with an external circuit. I. Oscillations about nonuniform equilibria. *Physics of Fluids*. 1989, pp. 1483-1492.
4. **Kuhn, S.** Linear longitudinal oscillations in collisionless plasma diodes with thin sheaths. Part II. Application to an extended Pierce-type problem. *Physics of Fluids*. 1984, pp. 1834-1851.
5. **Godfrey, B. B.** Oscillatory nonlinear electron flow in a Pierce diode. *Physics of Fluids*. 1987, pp. 1553-1560.
6. **Chen, F.F.** *Introduction to plasma physics and controlled fusion*. 2ª Edição. Los Angeles : Plenum Press, 1984. Vol. I. 0-306-41332-9.
7. **Krall, N. A e Trivelpiece, A. W.** *Principles of Plasma Physics*. Baltimore : McGraw-Hill, 1973. 0-07-035346-8.
8. **Reif, F.** *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. Berkeley : McGraw-Hill, 1965. 0-07-051800-9.