

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Física  
Trabalho de Conclusão de Curso

# Estudo de Efeitos do Espaço-Tempo Não-Comutativo na Gravitação

Trabalho de Conclusão de Curso

Laura Martins da Silva

Porto Alegre, RS  
2025

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Física  
Trabalho de Conclusão de Curso

# **Estudo de Efeitos do Espaço-Tempo Não-Comutativo na Gravitação**

**Laura Martins da Silva**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como  
requisito parcial para obtenção do título de Bacharel  
em Física.

**Orientador:**  
**Prof. Dr. Dimiter Hadjimichef**

**Porto Alegre, RS  
2025**

Martins, L.

Estudo de Efeitos do Espaço-Tempo Não-Comutativo na Gravitação / Laura Martins da Silva. -- 2025.

47f.

Orientador: Dr. Dimiter Hadjimichef

Trabalho (Conclusão de Curso) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Física, Porto Alegre, BR-RS, 2025.

Não-comutatividade, Espaço-tempo, buraco negro de Schwarzschild, buraco negro de Reissner-Nordström, Relatividade Geral, Mecânica Quântica.. I. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Física.

# Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Dimiter, pela paciência e atenção.

Ao meu companheiro, Nikolas, pelo suporte, pela compreensão e pelo amor e carinho ao longo de todo esse processo.

À minha mãe, por todo o amor, apoio e por sempre acreditar em mim.

Ao meu pai, por ser minha inspiração suprema em tudo.

Com efeito, nada é realmente  
pequeno; quem quer que seja  
sujeito às penetrações  
profundas da natureza bem o  
sabe. Embora nenhuma  
satisfação absoluta seja  
concedida à filosofia, como  
circunscrever a causa e limitar  
o efeito, o contemplador cai em  
êxtases sem-fim na presença de  
todas essas decomposições de  
forças visando à unidade. Tudo  
trabalha em favor de tudo.

---

Os Miseráveis, Victor Hugo

# Resumo

Este trabalho investiga os efeitos da não-comutatividade do espaço-tempo na gravitação, utilizando as métricas de Schwarzschild e Reissner-Nordström como base para o estudo de buracos negros. A não-comutatividade é implementada por meio da abordagem de estados coerentes. Grandezas como massa e carga passam a ser descritas por distribuições gaussianas, com seus campos estando definidos em células de tamanho mínimo. Resultados destacam como a não-comutatividade elimina singularidades clássicas, modifica a estrutura dos horizontes de eventos e regula divergências térmicas associadas à evaporação de buracos negros, evidenciando uma temperatura máxima e a presença de remanescentes estáveis no processo de evaporação.

**Palavras-chave:** Não-comutatividade, Espaço-tempo, buraco negro de Schwarzschild, buraco negro de Reissner-Nordström, Relatividade Geral, Mecânica Quântica.

# Abstract

This work investigates the effects of spacetime noncommutativity on gravitation, using the Schwarzschild and Reissner-Nordström metrics as a basis for studying black holes. Noncommutativity is implemented through the coherent state approach. Quantities such as mass and charge are described by Gaussian distributions, with their fields defined within cells of minimum size. The results highlight how noncommutativity eliminates classical singularities, modifies the structure of event horizons, and regulates thermal divergences associated with black hole evaporation, revealing a maximum temperature and the presence of stable remnants in the evaporation process.

**Keywords:** Noncommutativity, Spacetime, Schwarzschild black hole, Reissner-Nordström black hole, General relativity, Quantum Mechanics

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>1</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>3</b>
2.1 Teoria Quântica Não-Comutativa . . . . .	3
2.2 Produto Moyal . . . . .	4
2.3 Estados Coerentes . . . . .	6
2.4 Buraco Negro de Schwarzschild . . . . .	11
<b>3</b>	<b>18</b>
3.1 Modelo Comutativo . . . . .	18
3.2 Modelo Não-Comutativo . . . . .	21
<b>4</b>	<b>30</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>32</b>

# Lista de Figuras

Figura 2.1	Gráfico de $\theta\rho_\theta$ em função de $r/\sqrt{\theta}$ . Perfil de densidade de matéria em função da distância da origem do sistema para diferentes valores da massa total do objeto. A densidade apresenta comportamento constante próximo à origem do sistema e quando $r > 4\sqrt{\theta}$ , a mesma rapidamente se anula. . . . .	14
Figura 2.2	Gráfico de $g_{00}$ em função de $r/\sqrt{\theta}$ , para diferentes valores de massa dos buracos negros. Os horizontes de eventos são encontrados calculando numericamente a interceptação da curva com o eixo horizontal. . . . .	15
Figura 2.3	Gráfico de $\sqrt{\theta}T_H$ em função de $r_H\sqrt{\theta}$ . A figura ilustra o comportamento da temperatura Hawking no caso comutativo e também considerando efeitos da não-comutatividade. No caso comutativo a temperatura do buraco negro diverge conforme o raio do horizonte diminui. O caso não-comutativo modifica esse perfil ao evidenciar a temperatura máxima para o buraco negro, que ocorre em $r = 4.7\sqrt{\theta}$ , e também mostra que em $r = 3\sqrt{\theta}$ a temperatura se anula. . . . .	17
Figura 3.1	Métrica do buraco negro Reissner-Nordström $g_{00}$ em função de $r$ para diferentes relações entre $M$ e $Q$ , em comparação com o buraco negro de Schwarzschild. A figura mostra que no caso $M^2 > Q^2$ existem dois horizontes de eventos, para $M^2 = Q^2$ esses dois se mesclam formando um, e para $M^2 < Q^2$ não existem horizontes de eventos, e portanto, buracos negros. . . . .	19
Figura 3.2	Massa $M(r_H, Q)$ do buraco negro de Reissner-Nordström no modelo comutativo em função do raio do horizonte de eventos $r_H$ e $Q$ . A curva pontilhada une os pontos mínimos de cada curva, conectando as configurações que fornecem buracos negros extremos. É mostrado que diferente do buraco negro de Schwarzschild, o buraco negro carregado exibe uma massa mínima no final de sua evolução. . . . .	21
Figura 3.3	Métrica do buraco negro Reissner-Nordström no caso não-comutativo $g_{00}\left(\frac{M}{\sqrt{\theta}}, \frac{r}{\sqrt{\theta}}\right)$ em função de $M$ e $r$ para $Q = 1$ . O plano $g_{00} = 0$ está destacado em vermelho. A interseção da curva de $g_{00}$ com o plano descreve a curva do horizonte de eventos, que descreve a massa em função do raio do horizonte de eventos. . . . .	25
Figura 3.4	Métrica $g_{00}$ em função de $\frac{r}{\sqrt{2\theta}}$ , para diferentes combinações de $Q$ e $M$ , exibindo o comportamento dos horizontes de eventos de acordo com massa e carga. . . . .	26

Figura 3.5	Massa do buraco negro Reissner-Nordström não-comutativo $\frac{M(r_H, Q)}{\sqrt{\theta}}$ em função dos horizontes de eventos $\frac{r_H}{\sqrt{\theta}}$ e da carga. A figura evidencia o estado de menor energia para cada sistema, que termina em uma massa mínima. . . . .	27
Figura 3.6	Comportamento da temperatura $\sqrt{\theta}T_H$ em relação ao raio do horizonte de eventos $r_H$ para a métrica de Reissner-Nordström. O caso $Q=0$ contempla a métrica de Schwarzschild. A temperatura atinge um máximo durante a evaporação e depois vai a zero, deixando um objeto remanescente de massa mínima. . . . .	28

# Introdução

A conciliação entre a mecânica quântica e a relatividade geral é um dos maiores problemas da física moderna. A necessidade dessa conciliação se manifesta de diversas maneiras, mas a principal motivação é a busca por uma teoria unificada da natureza. A teoria quântica de campos, que descreve a mecânica quântica e a relatividade especial, foi capaz de integrar todas as interações conhecidas, com exceção da gravidade. Acredita-se que a busca pela unificação dessas duas grandes teorias não apenas avançará nossa compreensão do universo, mas também poderá oferecer soluções para os problemas de divergências que surgem na teoria quântica de campos. Entre as abordagens mais proeminentes estão a quantização canônica da gravidade e a teoria das cordas [1].

Uma teoria de gravitação quântica é de grande importância também para a cosmologia, especialmente para esclarecer os estágios iniciais do universo e a evolução final de buracos negros. As singularidades que emergem da relatividade geral representam um desafio significativo, pois a partir das mesmas a teoria não faz previsões físicas válidas. A unificação dessas teorias é uma das maiores esperanças para solucionar tais questões. Contudo, muitos consideram essas duas teorias incompatíveis; uma característica marcante dessa incompatibilidade é a natureza do tempo. Enquanto na mecânica quântica o tempo é tratado como um parâmetro absoluto e externo, na relatividade geral ele é considerado uma entidade dinâmica e intrínseca.

Questões sobre o estágio final da evaporação de buracos negros e a necessidade de uma quantização do espaço-tempo na teoria das cordas levaram muitos a reconsiderar a não-comutatividade como ferramenta essencial para esclarecer alguns problemas da uni-

ficação, especialmente após o trabalho pioneiro de Snyder, que inicialmente teve pouca relevância [2]. A proposta de Snyder introduziu a ideia de que, em escalas microscópicas, o espaço-tempo pode ser descrito por coordenadas não-comutativas, sugerindo uma discretização em células de Planck.

O presente trabalho busca estudar os efeitos da implementação da não-comutatividade na gravitação, observando principalmente os efeitos gerados em soluções de buracos negros. Considera-se a evolução de buracos negros, em específico seu estágio final de evaporação pela emissão de radiação Hawking, que na teoria clássica apresenta divergências na temperatura. O estudo será fundamentado na métrica de Schwarzschild e na métrica de Reissner-Nordström.

## Revisão Bibliográfica

### 2.1 Teoria Quântica Não-Comutativa

Na mecânica quântica tradicional, o comutador

$$[Q_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (2.1)$$

representa uma relação de incerteza entre as variáveis de posição e momentum, de modo que existe uma limitação ao conhecimento pleno dessas duas quantidades simultaneamente.

Uma relação semelhante envolvendo operadores de posição foi apresentada no contexto da teoria quântica de campos pela primeira vez por Snyder, em 1947 [3]. Um sistema quântico estaria sujeito não só à incerteza associada ao espaço de fase, mas também à incerteza envolvendo as coordenadas espaciais, o que descreve uma discretização do espaço em células de tamanho mínimo.

A origem do questionamento se baseava no problema existente na descrição da interação entre campo e matéria que, utilizando o modelo de interações pontuais, gerava divergências ultravioleta. Snyder propôs como solução a existência de um espaço-tempo com uma unidade mínima de comprimento - dessa forma a abordagem seria capaz de eliminar os comportamentos divergentes da teoria.

O interesse geral por essa linha diminuiu com o surgimento de teorias de renormalização. No entanto, desenvolvimentos recentes em teorias de gravitação quântica indicam que o caminho da não-comutatividade deve ser revisitado [4].

A não-comutatividade do espaço é codificada no comutador

$$[Q_j, Q_k] = 2i\hbar\theta_{jk}, \quad (2.2)$$

onde  $\theta$  é uma matriz antissimétrica que caracteriza a não-comutatividade [3]. Dessa forma, modificações na teoria quântica de campos vêm sendo realizadas para incorporar a não-comutatividade das coordenadas na descrição de campos. Duas delas, o produto Moyal e a abordagem de estados coerentes, são as mais relevantes e devem ser mencionadas no presente trabalho.

## 2.2 Produto Moyal

O produto Moyal é uma abordagem que busca implementar a não-comutatividade através de uma modificação na estrutura matemática da geometria do espaço-tempo. Introduce-se então uma nova regra do produto de duas funções definidas nesse espaço que inclui termos adicionais envolvendo o parâmetro de não-comutatividade.

Um exemplo dessa abordagem pode ser observado na dinâmica de um sistema quântico na representação de Schrödinger [5]. Assumindo o Hamiltoniano do sistema

$$H(Q_l, P_l) = \frac{P_l P_l}{2m} + V(Q_l) \quad (2.3)$$

sendo  $l = 1, \dots, N$ . Aqui  $Q_l$  e  $P_l$  são coordenadas não-comutativas, que obedecem as relações

$$\begin{aligned} [Q_l, Q_k] &= 2i\hbar\theta_{lk} \\ [Q_l, P_k] &= i\hbar\delta_{lk} \\ [P_l, P_k] &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para aplicar o Hamiltoniano acima à equação de Schrödinger, utilizam-se coordenadas comutativas usuais, que são relacionadas às coordenadas não-comutativas da seguinte forma

$$Q_l = \tilde{Q}_l - \theta_{lk} \tilde{P}_k \quad (2.5)$$

$$P_l = \tilde{P}_l, \quad (2.6)$$

e são definidas como

$$\begin{aligned} [\tilde{Q}_l, \tilde{Q}_k] &= 0 \\ [\tilde{Q}_l, \tilde{P}_k] &= i\hbar\delta_{lk} \\ [\tilde{P}_l, \tilde{P}_k] &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Reescreve-se, então, o Hamiltoniano em coordenadas comutativas:

$$H(\tilde{Q}_l - \theta_{lk}\tilde{P}_k, \tilde{P}_l) = \frac{\tilde{P}_l\tilde{P}_l}{2m} + V(\tilde{Q}_l - \theta_{lk}\tilde{P}_k). \quad (2.8)$$

Para descrever a evolução temporal do sistema, aplica-se o Hamiltoniano na equação de Schrödinger

$$H|\Psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle \quad (2.9)$$

e escrevendo os operadores das coordenadas na representação de posição

$$\begin{aligned} \langle\tilde{q}|Q_l|\tilde{q}'\rangle &= \langle\tilde{q}|(\tilde{Q}_l - \theta_{lk}\tilde{P}_k)|\tilde{q}'\rangle \\ &= \tilde{q}_l\delta^{(N)}(\tilde{q} - \tilde{q}') + i\hbar\theta_{lk}\frac{\partial}{\partial\tilde{q}_k}\delta^{(N)}(\tilde{q} - \tilde{q}') \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \langle\tilde{q}|P_l|\tilde{q}'\rangle &= \langle\tilde{q}|\tilde{P}_l|\tilde{q}'\rangle \\ &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\tilde{q}_l}\delta^{(N)}(\tilde{q} - \tilde{q}'), \end{aligned} \quad (2.11)$$

obtem-se a equação de Schrödinger representada em posição.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\tilde{q}}^2\Psi(\tilde{q}, t) + V\left(\tilde{q}_l + i\hbar\theta_{lk}\frac{\partial}{\partial\tilde{q}_k}\right)\Psi(\tilde{q}, t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(\tilde{q}, t)}{\partial t} \quad (2.12)$$

Analisando a equação (2.12) verifica-se que a não-comutatividade se encontra caracterizada pela componente da matriz,  $\theta_{lk}$  no termo do potencial. Esse fator pode ser reescrito na forma

$$V(\tilde{q})\left[\exp\left(i\hbar\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\tilde{q}_l}\theta_{lk}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\tilde{q}_k}\right)\right]\Psi(\tilde{q}, t), \quad (2.13)$$

com a seguinte notação sendo utilizada para as derivadas

$$f(\tilde{q})\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\tilde{q}_l}\theta_{lk}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\tilde{q}_k}g(\tilde{q}) = \frac{\partial f(\tilde{q})}{\partial\tilde{q}_l}\theta_{lk}\frac{\partial g(\tilde{q})}{\partial\tilde{q}_k}. \quad (2.14)$$

Expandindo a exponencial em uma série

$$V(\tilde{q})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\hbar)^n}{n!}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\tilde{q}_l}\theta_{lk}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\tilde{q}_k}\right)^n\Psi(\tilde{q}, t), \quad (2.15)$$

e aplicando as derivadas de acordo com a regra (2.14), tem-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{q}_1}\dots\frac{\partial}{\partial\tilde{q}_n}V(\tilde{q})\right](\theta_{l_1k_1}\dots\theta_{l_nk_n})\left[(i\hbar)^n\frac{\partial}{\partial\tilde{q}_{k_1}}\dots\frac{\partial}{\partial\tilde{q}_{k_n}}\right]. \quad (2.16)$$

Agora, considerando a expressão da transformada de Fourier de  $V(\tilde{q})$  para o espaço de  $\tilde{k}$ , calcula-se as derivadas em  $\tilde{q}_l$ ,

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{q}_{l_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_{l_n}} \frac{d^N \tilde{k}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int V(\tilde{k}) e^{\frac{i}{\hbar} \tilde{q} \cdot \tilde{k}} = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \int \frac{d^N \tilde{k}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} V(\tilde{k}) \tilde{k}_{l_1} \cdots \tilde{k}_{l_n} e^{\frac{i}{\hbar} \tilde{q} \cdot \tilde{k}} \quad (2.17)$$

e aplica-se-as na equação principal.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \int \frac{d^N \tilde{k}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} V(\tilde{k}) \tilde{k}_{l_1} \cdots \tilde{k}_{l_n} e^{\frac{i}{\hbar} \tilde{q} \cdot \tilde{k}} \right] (\theta_{l_1 k_1} \cdots \theta_{l_n k_n}) \left[ (i\hbar)^n \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_{k_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_{k_n}} \right] \quad (2.18)$$

Inverte-se a ordem entre o somatório e a integral

$$\int \frac{d^N \tilde{k}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} V(\tilde{k}) e^{\frac{i}{\hbar} \tilde{q} \cdot \tilde{k}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \tilde{k}_{l_1} \cdots \tilde{k}_{l_n} (\theta_{l_1 k_1} \cdots \theta_{l_n k_n}) \left[ (i\hbar)^n \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_{k_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_{k_n}} \right], \quad (2.19)$$

e fazendo uso da expressão para o operador momentum, obtém-se

$$\int \frac{d^N \tilde{k}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} V(\tilde{k}) e^{\frac{i}{\hbar} \tilde{q} \cdot \tilde{k}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \tilde{k}_{l_1} \cdots \tilde{k}_{l_n} (\theta_{l_1 k_1} \cdots \theta_{l_n k_n}) (-1)^n \tilde{P}_{k_1} \cdots \tilde{P}_{k_n} \Psi(\tilde{q}, t). \quad (2.20)$$

Une-se os termos em potências de n

$$\int \frac{d^N \tilde{k}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} V(\tilde{k}) e^{\frac{i}{\hbar} \tilde{q} \cdot \tilde{k}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n (-1)^n (\tilde{k}_l \cdot \theta_{lk} \tilde{P}_k)^n, \quad (2.21)$$

o que possibilita que a expressão para a exponencial seja utilizada novamente e escrita como uma única transformada de Fourier.

$$\int \frac{d^N \tilde{k}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} V(\tilde{k}) e^{\frac{i}{\hbar} \tilde{q} \cdot \tilde{k}} e^{-\frac{i}{\hbar} \tilde{k}_l \cdot \theta_{lk} \tilde{P}_k} = \int \frac{d^N \tilde{k}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} V(\tilde{k}) e^{\frac{i}{\hbar} \tilde{k}_l \cdot [\tilde{q}_l - \theta_{lk} \tilde{P}_k]} \quad (2.22)$$

Dessa forma, fica justificada a reescrita do potencial da equação (2.12) como o produto Moyal definido como a equação (2.13).

$$V \left( \tilde{q}_l + i\hbar \theta_{lk} \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_k} \right) \Psi(\tilde{q}, t) = V(\tilde{q}) \star \Psi(\tilde{q}, t) \quad (2.23)$$

Dessa forma, é evidente que a implementação de coordenadas não-comutativas provoca uma modificação das interações, como modifica o potencial definido acima, incluindo termos com dependência no parâmetro de não-comutatividade [3].

## 2.3 Estados Coerentes

A teoria quântica de campos quando modificada pela não-comutatividade precisa descrever como se dá a definição de campos - que são funções de coordenadas espaciais -

em um *manifold* não-comutativo. Como definir funções  $F(Q_1, Q_2)$ , quando os operadores não possuem autovetores em comum, de modo que seja possível definir o valor esperado desse campo em relação a um estado arbitrário? [6]

A abordagem de estados coerentes busca responder essa questão definindo um conjunto ideal de autoestados  $|z\rangle$  em relação aos quais campos podem ser definidos - semelhante aos estados coerentes da mecânica quântica tradicional.

Considera-se a relação de comutação simplificada

$$[Q_i, Q_j] = i\theta\epsilon_{ij}, \quad (2.24)$$

onde a matriz de não-comutatividade é reescrita como um parâmetro de não-comutatividade multiplicado pelo símbolo de Levi-Civita. Para encontrar o valor de uma função  $F(Q_1, Q_2)$  qualquer definida por operadores, precisa-se encontrar o seu valor esperado em relação à algum estado. Porém como os operadores  $Q_1$  e  $Q_2$  não comutam, não existe um conjunto de autoestados comuns aos dois. Dessa forma, é necessário encontrar um conjunto de estados ideal para definir o valor esperado de F. Define-se os operadores de aniquilação e criação:

$$Z \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + iQ_2) \quad (2.25)$$

$$Z^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - iQ_2) \quad (2.26)$$

que satisfazem a seguinte relação de comutação:

$$\begin{aligned} [Z, Z^\dagger] &= \theta \\ &= \frac{1}{2}[(Q_1 + iQ_2)(Q_1 - iQ_2) - (Q_1 - iQ_2)(Q_1 + iQ_2)] \\ &= i[Q_2Q_1 - Q_1Q_2] \\ &= \theta. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Definindo o operador número como  $N = Z^\dagger Z$  - forma semelhante ao método escada do oscilador harmônico quântico [7] - que satisfaz a relação

$$N |n\rangle = n |n\rangle, \quad (2.28)$$

pode-se definir os comutadores

$$\begin{aligned} [N, Z] &= [Z^\dagger Z, Z] \\ &= Z^\dagger [Z, Z] + [Z^\dagger, Z]Z \\ &= -\theta Z, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned}
[N, Z^\dagger] &= [Z^\dagger Z, Z^\dagger] \\
&= Z^\dagger [Z, Z^\dagger] + [Z^\dagger, Z^\dagger] Z \\
&= \theta Z^\dagger.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Em posse das relações de comutação aplica-se o operador número aos estados  $Z|n\rangle$  e  $Z^\dagger|n\rangle$ .

$$\begin{aligned}
N(Z|n\rangle) &= ([N, Z] + ZN)|n\rangle \\
&= -\theta Z|n\rangle + nZ|n\rangle \\
&= (n - \theta)Z|n\rangle
\end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}
N(Z^\dagger|n\rangle) &= ([N, Z^\dagger] + Z^\dagger N)|n\rangle \\
&= \theta Z^\dagger|n\rangle + nZ^\dagger|n\rangle \\
&= (n + \theta)Z^\dagger|n\rangle
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Analisando a equação (2.28) coletivamente com as relações (2.31) e (2.32), conclui-se que  $Z|n\rangle$  e  $|n - \theta\rangle$  são iguais a menos de uma constante.

$$Z|n\rangle = c|n - \theta\rangle \tag{2.33}$$

$$Z^\dagger|n\rangle = d|n + \theta\rangle \tag{2.34}$$

Considerando que  $|n\rangle$  e  $|n - \theta\rangle$  são normalizados

$$\begin{aligned}
n &= \langle n|N|n\rangle \\
&= \langle n|Z^\dagger Z|n\rangle \\
&= \langle n - \theta|\bar{c}c|n - \theta\rangle \\
&= |c|^2,
\end{aligned} \tag{2.35}$$

assim como

$$\begin{aligned}
n + \theta &= \langle n|N + \theta|n\rangle \\
&= \langle n|ZZ^\dagger|n\rangle \\
&= \langle n + \theta|\bar{d}d|n + \theta\rangle \\
&= |d|^2.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Em posse das constantes define-se completamente a consequência da aplicação dos operadores criação e aniquilação nos estados  $|n\rangle$ .

$$Z|n\rangle = \sqrt{n}|n - \theta\rangle \tag{2.37}$$

$$Z^\dagger|n\rangle = \sqrt{n + \theta}|n + \theta\rangle \tag{2.38}$$

A partir disso, encontra-se qualquer estado  $|n\rangle$ , através da aplicação sucessiva do operador criação,  $n$  vezes, sobre o estado de vácuo  $|0\rangle$ .

$$|n\rangle = \frac{(Z^\dagger)^n}{\sqrt{n!\theta^{\frac{n}{2}}}} |0\rangle \quad (2.39)$$

Define-se então os estados coerentes  $|z\rangle$ , que são os autoestados do operador aniquilação

$$Z |z\rangle = z |z\rangle. \quad (2.40)$$

Escrevendo os estados coerentes como uma combinação linear dos estados  $|n\rangle$

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle, \quad (2.41)$$

os coeficientes da expansão são determinados por

$$\begin{aligned} C_n &= \langle n|z\rangle \\ &= \langle 0| \frac{(Z)^n}{\sqrt{n!\theta^{\frac{n}{2}}}} |z\rangle \\ &= \langle 0|z\rangle \frac{z^n}{\sqrt{n!\theta^{\frac{n}{2}}}}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

e considerando que os estados  $|z\rangle$  devem ser normalizados, pode-se determinar o fator  $\langle 0|z\rangle$  através da normalização

$$\begin{aligned} \langle z|z\rangle &= 1 \\ &= \langle z|0\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!\theta^{\frac{n}{2}}}} |n\rangle \langle 0|z\rangle \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\sqrt{m!\theta^{\frac{m}{2}}}} |m\rangle \\ &= |\langle 0|z\rangle|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{\sqrt{n!\theta^{\frac{n}{2}}}} \frac{z^n}{\sqrt{n!\theta^{\frac{n}{2}}}} \\ &= |\langle 0|z\rangle|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z\bar{z}}{\theta}\right)^n \\ &= |\langle 0|z\rangle|^2 \exp\left(\frac{z\bar{z}}{\theta}\right) \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde considera-se  $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$  e utiliza-se a série da exponencial para reduzir a equação. Dessa forma, tem-se

$$\langle 0|z\rangle = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{2\theta}\right) \quad (2.44)$$

e finalmente obtém-se a equação para os estados coerentes

$$\begin{aligned} |z\rangle &= \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{2\theta}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!\theta^{\frac{n}{2}}}} \frac{(Z^\dagger)^n}{\sqrt{n!\theta^{\frac{n}{2}}}} |0\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{2\theta}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{zZ^\dagger}{\theta}\right)^n |0\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{2\theta}\right) \exp\left(\frac{z}{\theta} Z^\dagger\right) |0\rangle, \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$|z\rangle = \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{2\theta}\right) \exp\left(\frac{z}{\theta}Z^\dagger\right) |0\rangle \quad (2.46)$$

utilizando novamente a série da exponencial para simplificar o somatório.

Agora é possível calcular o valor esperado da função dos operadores  $F(Q_1, Q_2)$  em relação ao estado  $|z\rangle$  - estado coerente - de forma que se encontra uma função ordinária  $F(z)$ .

$$F(z) \equiv \langle z| F(Q_1, Q_2) |z\rangle \quad (2.47)$$

Podemos definir a transformada de Fourier não-comutativa, onde precisamos calcular o valor esperado da onda plana.

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int f(p) \langle z| \exp(ip_j Q_j) |z\rangle d^2p \quad (2.48)$$

Manipulando a onda plana pode-se escrevê-la em termos dos operadores  $Z$  e  $Z^\dagger$  como

$$\begin{aligned} \exp(ip_1 Q_1 + ip_2 Q_2) &= \exp\left(ip_1 \frac{(Z + Z^\dagger)}{\sqrt{2}} + ip_2 \frac{(Z - Z^\dagger)}{\sqrt{2}i}\right) \\ &= \exp\left(\frac{i}{\sqrt{2}} [(p_1 - ip_2)Z + (p_1 + ip_2)Z^\dagger]\right) \\ &= \exp(ip_- Z + ip_+ Z^\dagger), \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde  $p_\pm = (p_1 \pm ip_2)/\sqrt{2}$ . Para decompor a exponencial em duas multiplicações é necessário fazer uso da decomposição de Hausdorff [7] - visto que  $Z$  e  $Z^\dagger$  não comutam - dada por  $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{[A,B]}{2}}$ .

$$\begin{aligned} \langle z| \exp(ip_+ Z^\dagger + ip_- Z) |z\rangle &= \langle z| \exp(ip_+ Z^\dagger) \exp(ip_- Z) \exp\left(\frac{p_+ p_-}{2} [Z^\dagger, Z]\right) |z\rangle \\ &= \exp\left[i \frac{p_1}{\sqrt{2}}(z + \bar{z}) + i \frac{p_2}{\sqrt{2}}(z - \bar{z}) - \frac{\theta}{4}(p_1^2 + p_2^2)\right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

Aplicando o resultado (2.50) na equação (2.48) se obtém a transformada de Fourier não comutativa.

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int f(p) \exp\left[-\frac{\theta}{4}(p_1^2 + p_2^2)\right] \exp\left[i \frac{p_1}{\sqrt{2}}(z + \bar{z}) + \frac{p_2}{\sqrt{2}}(z - \bar{z})\right] d^2p \quad (2.51)$$

A não-comutatividade entre as coordenadas de posição produz a não-comutatividade entre o operador de aniquilação e criação, o que traz a necessidade da utilização da decomposição de Hausdorff. Essa decomposição gera o fator de decaimento

existente na expressão de  $F(z)$ , que tem o papel de suprimir a divergência que pode ocorrer quando  $p_1$  e  $p_2$  explodem no regime de altas energias. Esse fator fornece o limite finito necessário para a modificação da teoria quântica de campos [6].

Se considerarmos agora o caso em que  $f(p)$  é uma constante - o que corresponde à incerteza máxima no momentum - temos em tese uma posição mais bem definida. A transformada de Fourier nesse caso fornece

$$F(z) = \frac{4\pi}{\theta} \exp \left[ -\frac{4}{\theta} z \bar{z} \right]. \quad (2.52)$$

Observa-se que, mesmo definindo o máximo possível a posição, a incerteza associada às coordenadas não desaparece no caso não-comutativo, e pode somente chegar até um mínimo proporcional a  $\sqrt{\theta}$ . Isso contrapõe o caso comutativo  $\theta \rightarrow 0$ , onde a  $F(z)$  é reduzida à delta de Dirac.

Esses resultados são a indicação de que no regime não-comutativo temos campos definidos em células de tamanho mínimo, ao invés de pontos. Além disso, a importância da definição dos estados coerentes se dá pelo fato de, como mostrado anteriormente, serem estados de mínima incerteza e de serem o mais próximo de um limite clássico[7].

## 2.4 Buraco Negro de Schwarzschild

Em 1916, Karl Schwarzschild encontrou a primeira solução exata das equações de campo de Einstein, que descrevem a gravidade em termos da curvatura do espaço-tempo [8]. Sua solução, conhecida como a métrica de Schwarzschild (2.53), caracteriza o campo gravitacional externo à um corpo esfericamente simétrico, como uma estrela ou um buraco negro [9],

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\phi^2 \quad (2.53)$$

onde  $M$  é a massa do corpo esférico. O horizonte de eventos dessa métrica, que define a região além da qual nada pode escapar da atração gravitacional do corpo, está localizado em

$$r_H = 2M. \quad (2.54)$$

Em 1975, Stephen Hawking, ao aplicar os princípios da mecânica quântica aos buracos negros descobriu que esses objetos não são completamente negros, mas emitem radiação

térmica [10]. Esta radiação é conhecida como radiação Hawking e a temperatura do buraco negro de Schwarzschild é dada por:

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \left. \frac{dg_{00}}{dr} \right|_{r=r_H}. \quad (2.55)$$

Dessa forma, entendeu-se que buracos negros podem eventualmente evaporar emitindo radiação térmica. No entanto, esse processo de evaporação leva a um problema fundamental: à medida que o raio  $r$  do buraco negro se aproxima de zero, a temperatura  $T_H$  tende ao infinito. Uma abordagem para eliminar a divergência ultravioleta na temperatura do estágio final é implementar a não-comutatividade entre as coordenadas espaciais. Para verificar isso, é preciso analisar as equações de campo nessa nova perspectiva e modificá-las.

A modificação das equações de campo se dá a partir do tensor energia-momentum, sem que haja a necessidade de alterar intimamente o tensor de Einstein. Isso se dá porque que a métrica é definida sobre um *manifold*, e a não-comutatividade é uma propriedade intrínseca do mesmo. O que é diretamente afetado pela não-comutatividade é a distribuição de energia e matéria que, por fim, afeta a curvatura do espaço-tempo [4]. Dessa forma uma modificação no tensor energia-momentum provoca indiretamente a modificação no tensor de Einstein, que contém a informação sobre a geometria, como descreve a equação abaixo.

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.56)$$

A natureza da modificação do tensor energia-momentum se manifesta na estrutura dos campos na Teoria Quântica de Campos Não-Comutativa. Campos são descritos não mais como fontes pontuais, mas sim como distribuições gaussianas em células de tamanho mínimo. A densidade de matéria dos corpos que antes era representada por uma delta de Dirac, agora é substituída por uma distribuição gaussiana.

$$\rho_\theta(r) = \frac{M}{(4\pi\theta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4\theta}} \quad (2.57)$$

Assim, deve-se determinar a forma do tensor energia-momentum levando em consideração a nova forma para a densidade do corpo gravitante e a partir disso encontrar as soluções das equações de campo para determinar a métrica de Schwarzschild no espaço não-comutativo.

A forma da densidade determina que o tensor energia-momentum seja dado por

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{bmatrix} -\rho_{\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{\perp} \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

onde as últimas duas componentes da matriz diagonal são iguais visto que a simetria do sistema é esférica.

A determinação dos componentes da matriz é dada pela conservação do tensor energia-momentum.

$$\nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.59)$$

Os cálculos completos estão apresentados no apêndice A. O tensor energia-momentum fica definido como:

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{bmatrix} -\rho_{\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-r}{2} \partial_r \rho_{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-r}{2} \partial_r \rho_{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

A determinação de  $T_{\nu}^{\mu}$  evidencia a natureza da matéria como sendo uma gota autogravitante de fluido anisotrópico de densidade  $\rho_{\theta}$ . O fluido é anisotrópico visto que a pressão radial e a pressão tangencial são diferentes. No entanto, a modificação mais fundamental observada é a autogravitância da matéria. Classicamente a matéria sofre um colapso gravitacional, o que dá origem à singularidade. No caso da métrica não-comutativa a presença da pressão radial não nula contrapõe a atração gravitacional e evita o colapso. Esse resultado fundamental elimina o conceito da singularidade e é a origem de uma nova física em distâncias de ordens de  $\sqrt{\theta}$  [4],[11]. Isso é evidenciado pelo perfil de densidade da figura (2.1).

Na região central em torno da origem a densidade é aproximadamente constante com um valor finito de  $\theta\rho_{\theta} = \frac{M}{(4\pi)^{3/2}}$ . Conforme há um afastamento da origem, a densidade decai exponencialmente até atingir o ponto  $r = 4\sqrt{\theta}$ , onde os efeitos não-comutativos se tornam desprezíveis, e a mesma se anula, recuperando o comportamento clássico.

Calculando a métrica com as equações de campo (2.56), utilizando o tensor encontrado, obtém-se

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma(3/2, r^2/4\theta) \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma(3/2, r^2/4\theta) \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.61)$$

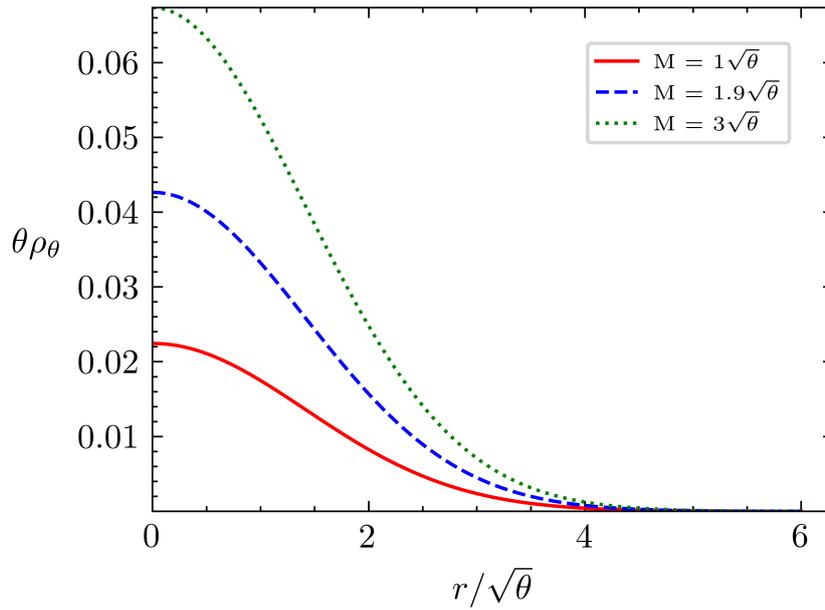


FIGURA 2.1. Gráfico de  $\theta\rho_\theta$  em função de  $r/\sqrt{\theta}$ . Perfil de densidade de matéria em função da distância da origem do sistema para diferentes valores da massa total do objeto. A densidade apresenta comportamento constante próximo à origem do sistema e quando  $r > 4\sqrt{\theta}$ , a mesma rapidamente se anula.

onde  $\gamma(3/2, r^2/4\theta)$  é a função gamma incompleta inferior dada por

$$\gamma(3/2, r^2/4\theta) = \int_0^{r^2/4\theta} t^{1/2} e^{-t} dt. \quad (2.62)$$

Fora do limite não-comutativo  $\frac{r}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$  a função gamma pode ser aproximada como

$$\gamma(s, x) \approx \Gamma(s) \quad (2.63)$$

de forma que (2.61) recupera a forma da métrica de Schwarzschild.

Outra mudança significativa provocada pela não-comutatividade na métrica de Schwarzschild é a respeito de horizontes de eventos, que podem ser encontrados a partir da relação

$$g_{00}(r_H) = 0. \quad (2.64)$$

Numericamente encontra-se os valores  $r_H$  calculando o valor da componente temporal da métrica para diferentes valores de  $r/\sqrt{\theta}$ , e então encontra-se as interseções com o eixo horizontal. Isso pode ser visualizado através da figura (2.2). Três situações distintas podem ocorrer a depender da massa do buraco negro envolvido. Se  $M < M_0$ , não existe horizonte de eventos, visto que a curva nunca intercepta o eixo horizontal, o que define

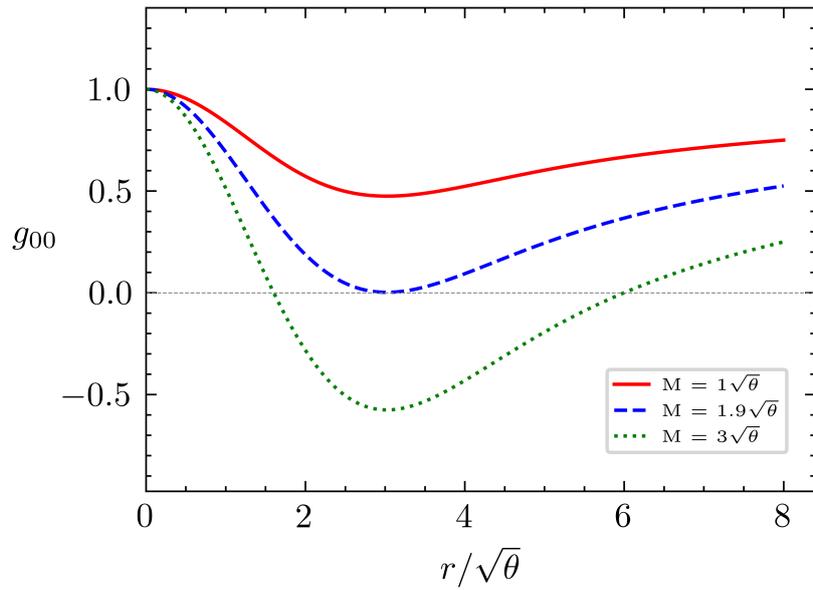


FIGURA 2.2. Gráfico de  $g_{00}$  em função de  $r/\sqrt{\theta}$ , para diferentes valores de massa dos buracos negros. Os horizontes de eventos são encontrados calculando numericamente a interseção da curva com o eixo horizontal.

uma massa mínima para a existência de um buraco negro. Já para  $M = M_0 = 1.9\sqrt{\theta}$ , existe a presença de um horizonte de eventos degenerado em  $r = 3\sqrt{\theta}$  - uma situação de um buraco negro extremo. No último caso,  $M > M_0$ , existem dois horizontes de eventos, um em  $r = 1.6\sqrt{\theta}$  e outro em  $r = 6\sqrt{\theta}$ .

A temperatura do buraco negro de Schwarzschild não-comutativo pode ser calculada através da relação (2.55) considerando a componente temporal da métrica (2.61).

$$\begin{aligned}
 T_H &= \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left( 1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma(3/2, r^2/4\theta) \right) \\
 &= \frac{M}{\pi\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{r^2} \gamma(3/2, r^2/4\theta) - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \gamma(3/2, r^2/4\theta) \right)
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Para calcular a derivada da função gamma incompleta inferior é preciso primeiro consi-

derar a regra da cadeia e posteriormente fazer uso do teorema fundamental do cálculo.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} \int_0^{r^2/b\theta} t^{s-1} e^{-t} dt &= \frac{d}{dx} \gamma(s, r^2/b\theta) \frac{dx}{dr} \\
&= \frac{2r}{b\theta} \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt \\
&= \frac{2r}{b\theta} \frac{d}{dx} (F(x) - F(0)) \\
&= \frac{2r}{b\theta} (f(x) - f(0)) \\
&= \frac{2r}{b\theta} (x^{s-1} e^{-x}) \\
&= \frac{2r}{b\theta} \left( \frac{r^2}{b\theta} \right)^{s-1} e^{-\frac{r^2}{4\theta}}
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Calculando (2.64) e invertendo para  $M$ , encontra-se  $M = \frac{r_H \sqrt{\pi}}{4\gamma(3/2, r_H^2/4\theta)}$ . Inserindo estes resultados em (2.65), tem-se

$$T_H = \frac{1}{4\pi r_H} \left( 1 - \frac{r_H^3}{4\theta^{3/2}} \frac{e^{-\frac{r_H^2}{4\theta}}}{\gamma(3/2, r_H^2/4\theta)} \right) \tag{2.67}$$

Tomando o limite não-comutativo  $r^2/4\theta \rightarrow 0$ , a equação (2.67) se torna

$$T_H = \frac{1}{4\pi r_H}. \tag{2.68}$$

Pode-se observar o comportamento da Temperatura Hawking em relação ao raio do horizonte de eventos, em ambos casos, comutativo e não-comutativo, analisando a figura (2.3).

Nos estágios iniciais da evaporação de buracos negros no caso comutativo, o raio do horizonte de eventos diminui e a temperatura aumenta, até que no estágio final, próximo à origem, ocorre uma divergência da temperatura. Já no caso não-comutativo, a evaporação tem três estágios distintos. Primeiro, quando a massa do buraco negro é maior que a massa crítica,  $M \gg M_0$ , o comportamento da temperatura se assemelha ao caso comutativo. Isso ocorre porque fora do regime não-comutativo  $r \gg \sqrt{\theta}$ , o fator não-comutativo na equação (2.67) praticamente não contribui. Conforme a massa se aproxima de  $M_0$  as correções da não-comutatividade começam a ter relevância e a temperatura se mantém abaixo da temperatura clássica, até atingir um ponto de temperatura máxima correspondente à massa  $M = 2.4\sqrt{\theta}$  e raio  $r_H = 4.7\sqrt{\theta}$ . Após esse ponto a temperatura diminui até atingir o zero absoluto em  $r = 3\sqrt{\theta}$  deixando como produto um buraco negro

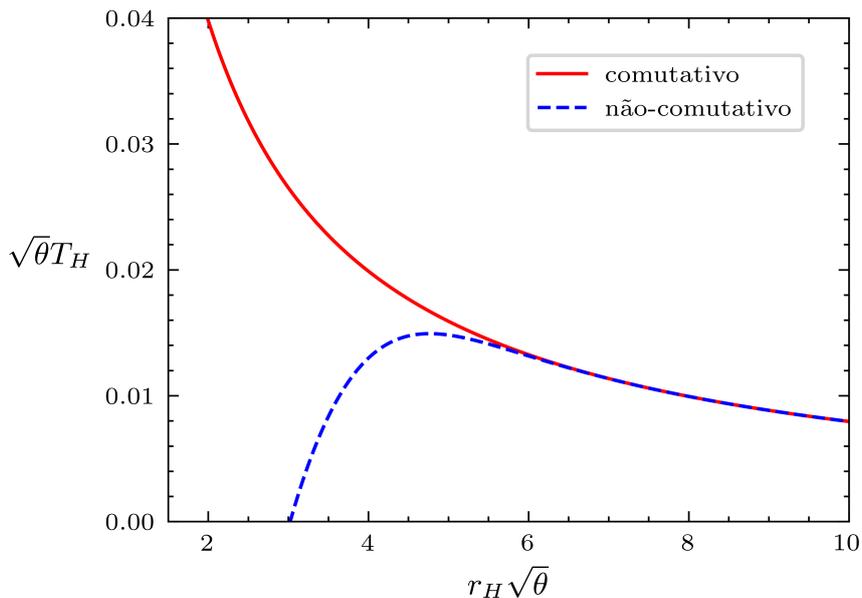


FIGURA 2.3. Gráfico de  $\sqrt{\theta}T_H$  em função de  $r_H\sqrt{\theta}$ . A figura ilustra o comportamento da temperatura Hawking no caso comutativo e também considerando efeitos da não-comutatividade. No caso comutativo a temperatura do buraco negro diverge conforme o raio do horizonte diminui. O caso não-comutativo modifica esse perfil ao evidenciar a temperatura máxima para o buraco negro, que ocorre em  $r = 4.7\sqrt{\theta}$ , e também mostra que em  $r = 3\sqrt{\theta}$  a temperatura se anula.

extremo 'congelado' de massa  $M_0$ . Além desse ponto, não se define mais a temperatura visto que não são mais definidos horizontes de eventos para valores de massa inferiores à  $M_0$  como foi discutido no contexto da figura (2.2).

Uma questão final a ser discutida é o caso de um objeto que, de início, possui uma massa inferior a  $M_0$ . Poderia argumentar-se que como para esses valores de massa não estão definidos horizontes de eventos, esse objeto poderia corresponder eventualmente à uma singularidade nua. Para que exista essa singularidade o escalar de Ricci deve divergir  $R \rightarrow \infty$ . No entanto, considerando a não-comutatividade, o escalar de Ricci fornece

$$R(0) = \frac{4M}{\sqrt{\pi}\theta^{3/2}}, \quad (2.69)$$

um valor finito, de forma que a singularidade nua não ocorre nesse caso [4].

## Buraco Negro de Reissner-Nordström

A extensão natural do estudo dos efeitos não-comutativos nas métricas que descrevem buracos negros, para além do buraco negro de Schwarzschild é baseada na introdução do campo elétrico nesse modelo. Baseado nisso, aborda-se nesse capítulo o estudo da métrica não-comutativa de Reissner-Nordström que representa a solução para uma massa carregada sem rotação. [11]

### 3.1 Modelo Comutativo

A métrica de Reissner-Nordström é uma solução estática e assintoticamente plana das equações de campo de Einstein-Maxwell, que descreve o campo gravitacional de uma massa pontual carregada, esféricamente simétrica. A solução em regiões livres de fontes ( $j^\mu = 0$ ) é descrita pelo elemento de linha na equação (3.1)

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.1)$$

onde  $M$  é a massa do buraco negro e  $Q$ , sua carga. A solução descreve o campo gravitacional comutativo, onde existe uma singularidade intrínseca localizada em  $r = 0$ , assim como no caso da métrica de Schwarzschild. No entanto, com a introdução do campo eletromagnético, a métrica se apresenta diferente do caso neutro em outros aspectos. [12]

Quando analisamos o anulamento da componente temporal da métrica, obtemos a descrição dos horizontes de eventos característicos possíveis desse buraco negro. Resolvendo a equação  $g_{00}(r_H) = 0$ , encontramos os raios de horizontes de eventos como

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (3.2)$$

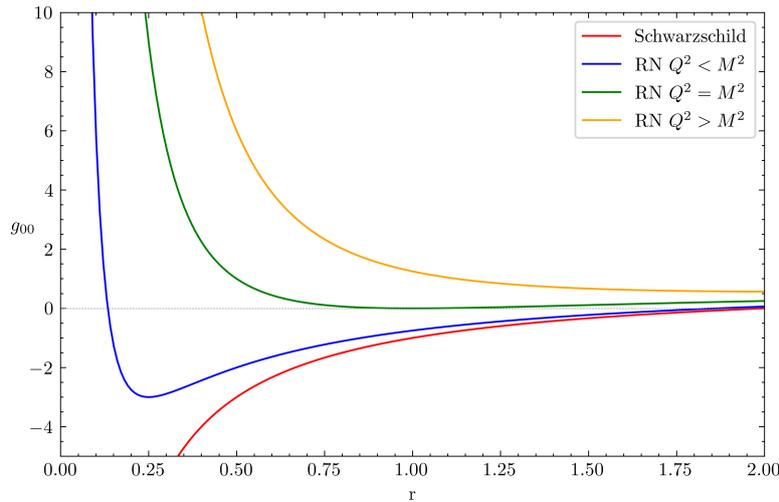


FIGURA 3.1. Métrica do buraco negro Reissner-Nordström  $g_{00}$  em função de  $r$  para diferentes relações entre  $M$  e  $Q$ , em comparação com o buraco negro de Schwarzschild. A figura mostra que no caso  $M^2 > Q^2$  existem dois horizontes de eventos, para  $M^2 = Q^2$  esses dois se mesclam formando um, e para  $M^2 < Q^2$  não existem horizontes de eventos, e portanto, buracos negros.

Dessa forma, fica evidente que esses horizontes dependem agora da relação entre a massa e a carga do buraco negro. A figura (3.1) mostra os possíveis arranjos para esse sistema.

O caso  $M^2 > Q^2$  mostra que existe a presença de dois horizontes de eventos, um externo e um interno. O horizonte externo é caracterizado por  $r_+$  e é o ponto a partir do qual a luz não é capaz de escapar. Adentrando nessa região as coordenadas espacial e temporal têm seus papéis invertidos. O fim dessa região se dá no horizonte interno, também conhecido como horizonte de Cauchy, localizado em  $r_-$ . Desse horizonte até a origem as coordenadas, têm seus papéis invertidos novamente. Dessa forma as três regiões delimitadas pelos dois horizontes de eventos não possuem conexão causal. O segundo caso ocorre quando  $Q^2 = M^2$ , onde os horizontes externo e interno se mesclam, formando um único horizonte, localizado em  $r = M$ . Esse é o caso do buraco negro carregado extremo, onde a massa é a menor possível. A partir disso, quando  $M^2 < Q^2$  a curva da métrica não apresenta raízes reais. Dessa forma, não existe presença de horizonte de eventos. [12]

Uma outra perspectiva das relações entre a massa, a carga e o raio do horizonte de eventos é descrita pela equação (3.3), que é obtida manipulando  $g_{00}(r_H) = 0$ .

$$M = \frac{r_H^2 + Q^2}{2r_H} \quad (3.3)$$

A figura (3.2) mostra como se dá o comportamento da massa do buraco negro para diferentes valores de  $Q$  e de que forma os horizontes de evento evoluem. A linha tracejada conecta todos os pontos mínimos da curva, onde  $M = r_H$ . Nesse ponto, a massa tem o seu mínimo valor possível e  $M = Q$ , como fica evidente na equação (3.2). Esses pontos mínimos representam as configurações de carga, massa e raio do horizonte de eventos dos buracos negros extremos. A partir desse ponto, conforme a massa aumenta, surgem somente buracos negros com dois horizontes de eventos.

Um outro aspecto interessante é a comparação entre o comportamento da métrica de Reissner-Nordström e a métrica de Schwarzschild ( $Q = 0$ ). Na figura vemos que todas as curvas correspondentes à cargas não-nula possuem uma massa mínima final. No entanto, o buraco negro de Schwarzschild tem massa mínima  $M = 0$ . Isso decorre do fato de que o buraco negro carregado precisa ter uma massa mínima  $M = Q$  para que exista condições para horizontes de eventos. Isso é evidente na figura anterior quando não se tem presença de horizontes para  $M^2 < Q^2$ .

A partir desse comportamento fica evidente o destino de cada buraco negro em um processo de evaporação. Enquanto o buraco negro de Schwarzschild evapora completamente, até desaparecer em  $M = 0$ , o buraco negro Reissner-Nordström apresenta uma massa final mínima nesse processo.

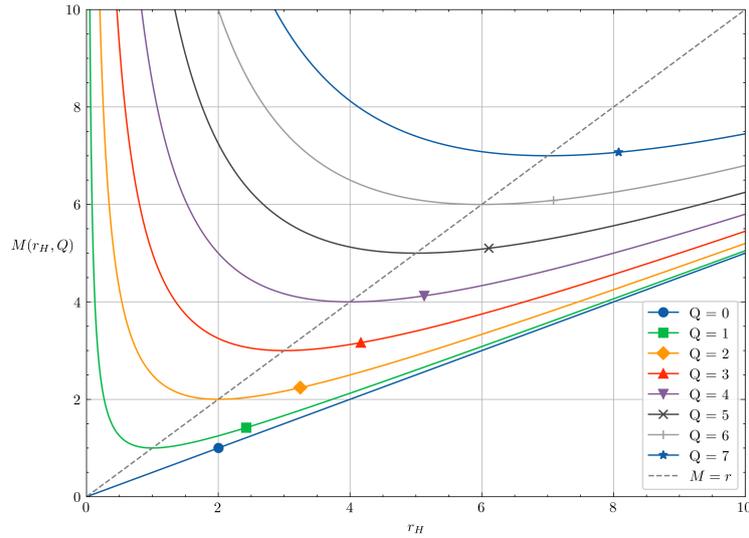


FIGURA 3.2. Massa  $M(r_H, Q)$  do buraco negro de Reissner-Nordström no modelo comutativo em função do raio do horizonte de eventos  $r_H$  e  $Q$ . A curva pontilhada une os pontos mínimos de cada curva, conectando as configurações que fornecem buracos negros extremos. É mostrado que diferente do buraco negro de Schwarzschild, o buraco negro carregado exibe uma massa mínima no final de sua evolução.

### 3.2 Modelo Não-Comutativo

O modelo não-comutativo da métrica de Reissner-Nordström é baseado na solução das equações de campo de Einstein-Maxwell, na presença de uma distribuição gaussiana de massa e carga.

É natural que, da mesma forma que no caso anterior, a carga elétrica seja representada por uma distribuição gaussiana, como a massa, dado que a não-comutatividade é uma propriedade do tecido do espaço-tempo em si. A densidade de carga é representada pela distribuição gaussiana dada pela equação

$$\rho_e(\vec{r}) = \frac{e}{(4\pi\theta)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\theta}\right), \quad (3.4)$$

onde  $e$  é a carga elétrica elementar.

Para resolvermos as equações de campo Einstein-Maxwell

$$G_\nu^\mu = 8\pi(T_\nu^\mu|_{mt} + T_\nu^\mu|_e), \quad (3.5)$$

precisamos primeiro descrever o tensor eletromagnético de acordo com a distribuição

gaussiana. Este pode ser definido através do campo elétrico como

$$F^{\mu\nu} = \delta^{0[\mu} \delta^{r\nu]} \quad (3.6)$$

$$F^{\mu\nu} = (\delta^{0\mu} \delta^{r\nu} - \delta^{0\nu} \delta^{r\mu}) E(r). \quad (3.7)$$

Dessa forma, o tensor eletromagnético é dado por:

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E(r) & 0 & 0 \\ -E(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

A estrutura do tensor manifesta a distribuição física. A única componente não nula do campo elétrico é a componente radial, o que manifesta a simetria da distribuição. Além disso, todas as componentes do campo magnético também são nulas, visto que a distribuição é estática. Essas mesmas características da distribuição também definem a forma da quadricorrente. Devido à simetria esférica da distribuição de cargas, as componentes angulares da quadricorrente são nulas. Além disso, a componente radial é definida como

$$J^r = \rho_e v^r, \quad (3.9)$$

sendo  $v^r$  a velocidade na direção radial. Como a distribuição é estática, essa componente também é nula, de forma que a quadricorrente é definida como:

$$J^\mu = \rho_e \delta_0^\mu. \quad (3.10)$$

Definidos o tensor eletromagnético e a quadricorrente, podemos encontrar a descrição correta do campo elétrico, através das equações de Maxwell para campos com curvatura, dadas pela equação abaixo. O desenvolvimento completo está descrito no apêndice B.

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = J^\nu. \quad (3.11)$$

A expressão encontrada para o campo elétrico é dada por

$$E(r) = \frac{2Q}{\sqrt{\pi} r^2} \gamma \left( \frac{3}{2}; \frac{r^2}{4\theta} \right), \quad (3.12)$$

a partir do qual agora podemos definir completamente o tensor eletromagnético, a fim de encontrar o tensor eletromagnético tensão-energia, dado pela equação (3.13).

$$T_{\mu\nu}|_e = -g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (3.13)$$

A partir de (3.8) e (3.12), utilizando as contrações  $F_\nu^\mu = g^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu}$ ,  $F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}F^{\alpha\beta}$  e  $T_\nu^\mu = g^{\mu\alpha}T_{\alpha\nu}$ , e aplicando tudo isso em (3.13) chegamos na forma para o tensor energia-momentum.

$$T_\nu^\mu = \begin{bmatrix} \frac{E(r)^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E(r)^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Com o tensor tensor eletromagnético tensão-energia em mãos, e o tensor energia-momentum correspondente à matéria (2.57), podemos calcular as equações de Einstein-Maxwell (3.5). Dessa forma encontramos a métrica não-comutativa de Reissner-Nordström.

$$ds^2 = -g_{00}dt^2 + g_{00}^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (3.15)$$

$$g_{00} = 1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{Q^2}{\pi r^2}F(r) \quad (3.16)$$

$$m(r) = \frac{2m_0}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r^2}{4\theta}\right) \quad (3.17)$$

$$F(r) = \gamma^2\left(\frac{1}{2}; \frac{r^2}{4\theta}\right) - \frac{r}{\sqrt{2\theta}}\gamma\left(\frac{1}{2}; \frac{r^2}{2\theta}\right) \quad (3.18)$$

É interessante estudar o comportamento da métrica obtida nos regimes assintóticos. Para  $r \rightarrow 0$ , aproximamos a função gamma inferior incompleta como

$$\gamma(s, x) \rightarrow \frac{x^s}{s}, \quad (3.19)$$

de forma que a componente temporal da métrica (3.16) se reduz à:

$$g_{00} = 1 - \frac{m_0}{3\sqrt{\pi}\theta^{3/2}}r^2. \quad (3.20)$$

Percebe-se que a parte carregada da métrica não exibe contribuições significativas nesse regime. Também fica evidente que próximo à origem, a métrica se assemelha à métrica de De Sitter, caracterizada por

$$g_{00} = 1 - \frac{\Lambda}{3}r^2 \quad (3.21)$$

de forma que na métrica não-comutativa de Reissner-Nordström, a constante cosmológica efetiva é dada por:

$$\Lambda = \frac{m_0}{\sqrt{\pi}\theta^{3/2}}. \quad (3.22)$$

Próximo à origem do sistema, o espaço seria predominantemente dominado pelo vácuo, onde a geometria não-comutativa induz uma constante cosmológica positiva devido às flutuações quânticas. Assim como ocorre na métrica neutra, a não-comutatividade desempenha um papel crucial ao eliminar a singularidade da métrica, tornando-a regular em todas as regiões do espaço [12], [13], [14].

A partir da aproximação também fica evidente que um observador muito próximo à origem, presencia somente um campo gerado pela massa  $m_0$ , sendo despojado de quaisquer contribuições devido ao campo eletromagnético.

O outro limite interessante de ser analisado é  $r \rightarrow \infty$ , de forma que a métrica não-comutativa possa ser comparada com a versão não-comutativa. Dessa forma, estamos lidando com uma situação em que o observador se encontra distante da origem, e não consegue distinguir entre contribuições da massa do buraco negro e sua carga. Assim, não visualiza somente a massa  $m_0$ , mas sim toda a contribuição de matéria e energia como um todo, incluído o campo eletromagnético. Para descrever essa métrica, precisamos então levar em conta essa massa total  $M$  que pode ser calculada através da integral descrita por (3.23).

$$M = \oint_{\Sigma} d\sigma^{\mu} (T_{\mu}^0|_{mt} + T_{\mu}^0|_e), \quad (3.23)$$

onde  $\Sigma$  representa uma superfície tridimensional fechada, com  $t$  é constante [15]. Utilizando essa equação, a massa  $M$  é dada por:

$$M = m_0 + \frac{Q^2}{2\sqrt{2\pi\theta}}. \quad (3.24)$$

Aplicando a massa  $M$  na componente (3.16) da métrica, encontra-se

$$g_{00} = 1 - \frac{4M}{\sqrt{\pi r}} \gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r^2}{4\theta}\right) + \frac{Q^2}{\pi r^2} \left[ F(r) + \sqrt{\frac{2}{\theta}} r \gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r^2}{4\theta}\right) \right]. \quad (3.25)$$

Considerando a aproximação da função gamma descrita por (2.63), verificamos que a função recupera a forma comutativa de métrica de Reissner-Nordström, dada por (3.1).

O comportamento da métrica em função da distância  $r$  e da massa do objeto pode ser visualizada na figura (3.3) para um caso específico onde  $Q = 1$ .

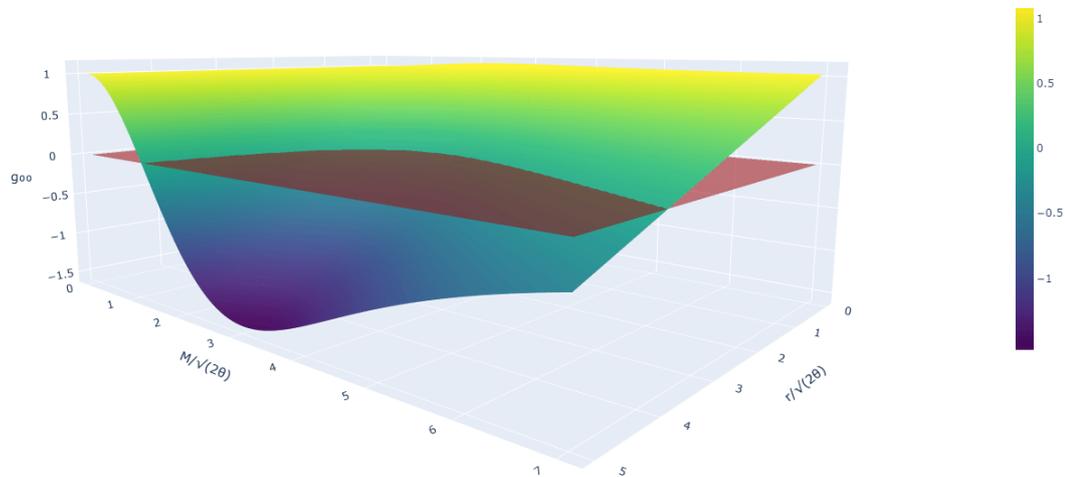


FIGURA 3.3. Métrica do buraco negro Reissner-Nordström no caso não-comutativo  $g_{00}\left(\frac{M}{\sqrt{\theta}}, \frac{r}{\sqrt{\theta}}\right)$  em função de  $M$  e  $r$  para  $Q = 1$ . O plano  $g_{00} = 0$  está destacado em vermelho. A interseção da curva de  $g_{00}$  com o plano descreve a curva do horizonte de eventos, que descreve a massa em função do raio do horizonte de eventos.

Outro aspecto relacionado à essa métrica que é interessante de ser analisado é a estrutura dessas métricas não-comutativas em relação aos seus horizontes de eventos. Como visto anteriormente, o caso comutativo no caso da métrica de Reissner-Nordström apresenta diferentes estruturas causais para diferentes relações entre a massa e a carga do objeto. Além disso, esses buracos negros possuem uma massa mínima como condição de existência, o que não ocorria na métrica neutra. A figura (3.4) mostra a componente temporal da métrica (3.25) para diferentes valores de massa e carga. Conclui-se que a modificação pela não-comutatividade não gera grandes modificações desse comportamento.

A configuração  $\frac{Q}{\sqrt{\theta}} = 0$ ,  $\frac{M}{\sqrt{\theta}} = 3$  recupera o caso Schwarzschild que foi previamente apresentado na figura (2.2). Além disso é interessante observar que, sob  $Q$  fixo, o aumento de  $M$  aumenta a distância entre os horizontes interno e externo, enquanto que o aumento de  $Q$ , sob  $M$  fixo, diminui a distância entre os horizontes, levando à uma configuração extrema.

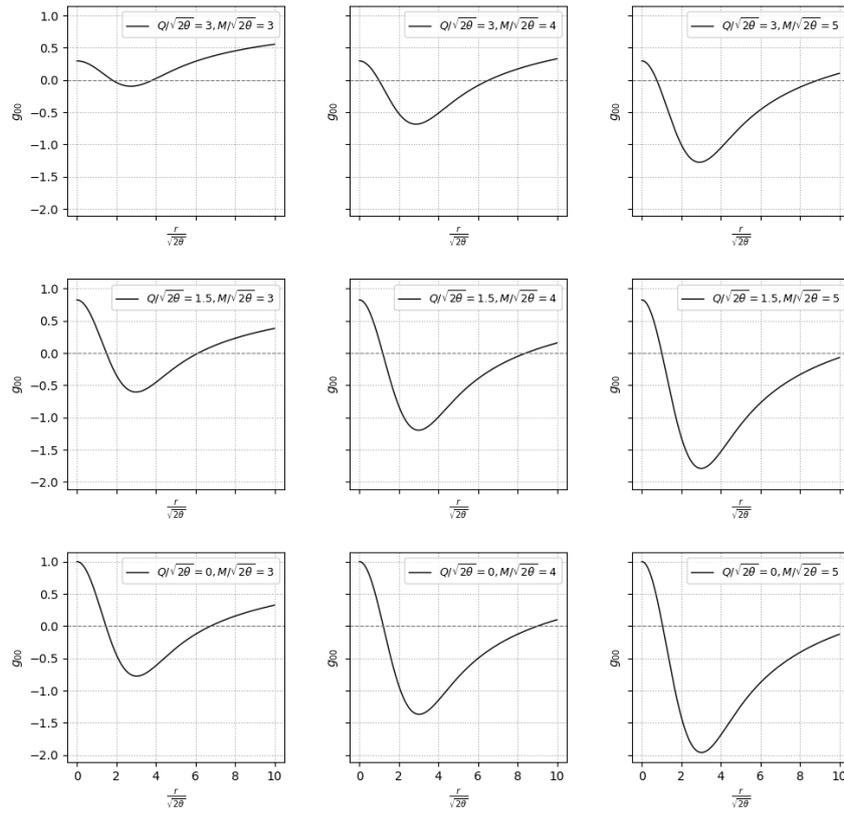


FIGURA 3.4. Métrica  $g_{00}$  em função de  $\frac{r}{\sqrt{2\theta}}$ , para diferentes combinações de  $Q$  e  $M$ , exibindo o comportamento dos horizontes de eventos de acordo com massa e carga.

A métrica descrita em (3.25) é relativamente complicada e não pode ser resolvida analiticamente para  $r_H$  em  $g_{00}(r_H) = 0$ . No entanto, podemos obtemos a partir da equação, uma função da massa em função de  $r_H$  e  $Q$ . Fazendo isso encontramos a equação abaixo.

$$M = \frac{Q^2}{2\sqrt{2\pi\theta}} + \frac{1}{\gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r_H^2}{4\theta}\right)} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{4} r_H + \frac{Q^2}{4\sqrt{\pi} r_H} F(r) \right] \quad (3.26)$$

Essa é a versão não-comutativa da relação (3.3) e pode ser visualizada na figura (3.5) mostrando como se comporta a massa dos buracos negros em função do raio do horizonte de eventos para diferentes valores de  $Q$ .

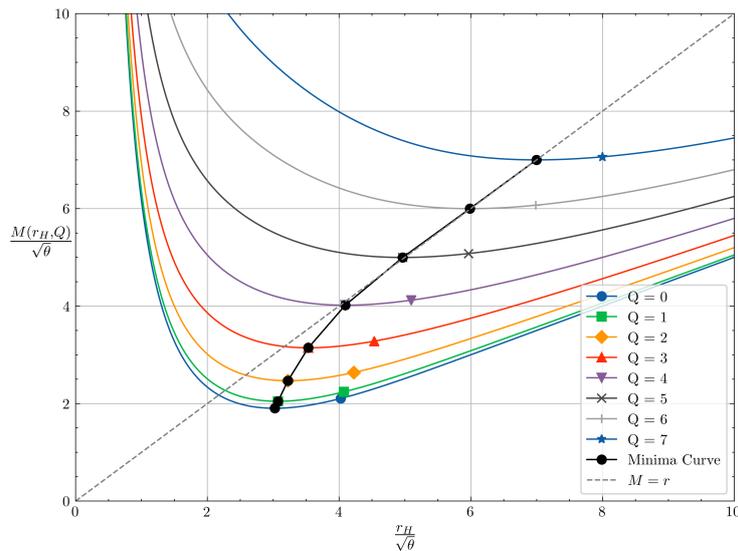


FIGURA 3.5. Massa do buraco negro Reissner-Nordström não-comutativo  $\frac{M(r_H, Q)}{\sqrt{\theta}}$  em função dos horizontes de eventos  $\frac{r_H}{\sqrt{\theta}}$  e da carga. A figura evidencia o estado de menor energia para cada sistema, que termina em uma massa mínima.

Um importante aspecto da figura (3.5) é representado pelos pontos de mínimo da massa. Esses pontos de mínimo em relação ao horizonte de eventos localiza os buracos negros extremos para cada configuração, sendo o *ground state* do sistema. Para massas maiores, o sistema evolui para buracos negros com dois horizontes de eventos. Aqui se localiza uma das principais diferenças entre o caso comutativo e o não-comutativo. Na figura (3.2), os pontos de mínimos eram completamente coincidentes com a linha  $M = r_H$ . No presente caso, devido à influência da geometria, os pontos mais ao limite não-comutativo apresentam desvios dessa linha, mas no limite comutativo retornam a relação vista anteriormente. Outro aspecto interessante é o fato de que o buraco negro sem carga também tem seu estado de menor energia em uma massa mínima, ao invés de evaporar completamente, como visto no capítulo anterior.

Após algumas discussões a respeito da estrutura da métrica e de que forma esses buracos negros evoluem, podemos finalmente abordar a questão da temperatura Hawking, e de que maneira ela se comporta no processo de evaporação. A temperatura Hawking para o buraco negro Reissner-Nordström é dada pela expressão abaixo.

$$T_H = \frac{1}{4\pi r_+} \left[ 1 - \frac{r_+^3 \exp(-\frac{r_+^2}{4\theta})}{4\theta^{3/2} \gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r_+^2}{4\theta}\right)} \right] - \frac{4Q^2}{\pi r_+^3} \left[ \gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r_+^2}{4\theta}\right) + \frac{r_+^3 \exp(-\frac{r_+^2}{4\theta})}{16\theta^{3/2} \gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r_+^2}{4\theta}\right)} F(r_+) \right] \quad (3.27)$$

A expressão se reduz à temperatura para o buraco negro não-comutativo de Schwarzschild (2.67) quando  $Q = 0$ . O comportamento da temperatura está representado na figura (3.6). Assim como concluído na discussão sobre a figura (3.5), o buraco negro de Reissner-Nordström não-comutativo tem um aumento na temperatura durante a evaporação, até atingir um valor máximo e depois cai à zero, deixando como remanescente uma massa mínima. O comportamento é semelhante ao buraco negro sem carga, a diferença se dá no valor da temperatura, que é menor na presença do campo eletromagnético.

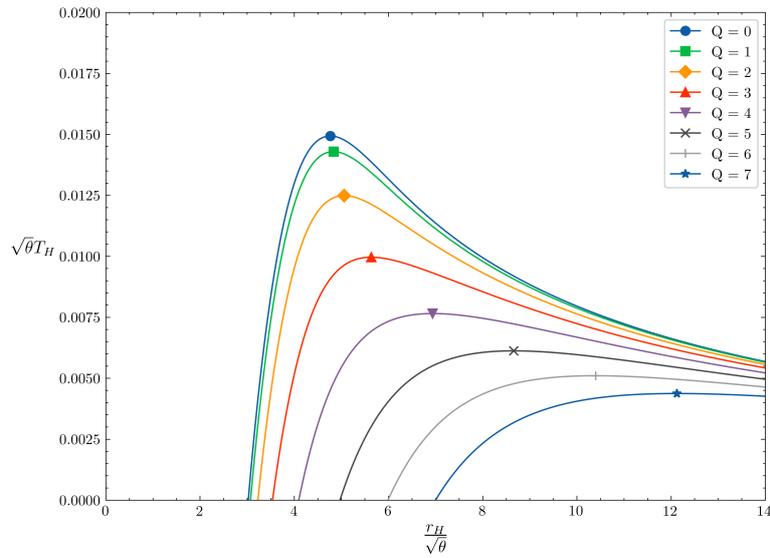


FIGURA 3.6. Comportamento da temperatura  $\sqrt{\theta}T_H$  em relação ao raio do horizonte de eventos  $r_H$  para a métrica de Reissner-Nordström. O caso  $Q=0$  contempla a métrica de Schwarzschild. A temperatura atinge um máximo durante a evaporação e depois vai a zero, deixando um objeto remanescente de massa mínima.

No caso de buracos negros neutros, o processo de evaporação ocorria somente pela emissão de radiação Hawking. No entanto, no caso de buracos negros carregados, outro fenômeno pode contribuir para a evaporação. Esse é o mecanismo de produção de pares de Schwinger, onde sob campo elétrico suficientemente intenso, existe a produção de pares elétron-pósitron. Dessa forma existem duas maneiras pelas quais um buraco negro pode evaporar e isso determina sua forma final. Se a evaporação majoritariamente ocorre via emissão de radiação Hawking a massa do buraco negro diminui e objeto percorre uma curva como as da figura (3.5), até atingir uma massa mínima com certo valor de carga. A outra opção é a evaporação através da produção de pares de Schwinger, onde existe tanto

---

a redução de sua massa como da sua carga através da emissão de partículas carregadas, de forma que o remanescente final é um buraco negro de Schwarzschild extremo.[13]

## 4

# Conclusão

Este trabalho demonstra que a não-comutatividade do espaço-tempo desempenha um papel crucial na reformulação da gravitação em escalas microscópicas. A introdução de coordenadas não-comutativas redefine o espaço em células de tamanho mínimo, onde as fontes pontuais deixam de existir e passam a ser descritas por distribuições gaussianas. Essa modificação elimina singularidades gravitacionais clássicas, prevenindo o colapso gravitacional e trazendo novas perspectivas para o estudo de buracos negros.

Uma das contribuições mais significativas dessa abordagem é a regulação das divergências térmicas previstas no modelo comutativo. Durante o estágio final da evaporação de buracos negros, a temperatura de Hawking atinge um valor máximo antes de cair a zero, deixando um remanescente estável de massa mínima e temperatura nula. Essa característica, que surge naturalmente da não-comutatividade, evita problemas teóricos críticos, como a divergência infinita de temperatura e o desaparecimento completo do buraco negro.

No presente trabalho, esses efeitos foram analisados em detalhes nas métricas de Schwarzschild e Reissner-Nordström, evidenciando como a não-comutatividade modifica a estrutura dos horizontes de eventos e regula o comportamento térmico desses sistemas. No caso da métrica de Reissner-Nordström, foi possível observar que tanto a massa quanto a carga do buraco negro influenciam diretamente o processo de evaporação, levando a remanescentes estáveis que diferem significativamente do caso neutro.

Esses resultados ampliam nossa compreensão dos efeitos da não-comutatividade em sistemas gravitacionais e mostram como essa abordagem pode contribuir para supe-

rar limitações das teorias clássicas. Os avanços apresentados aqui abrem possibilidades para investigações futuras, tanto teóricas quanto fenomenológicas, explorando novas implicações dessa geometria modificada em outros contextos da gravidade quântica e da cosmologia.

# Referências Bibliográficas

- [1] C. Kiefer. *Quantum Gravity: Third Edition*. International Series of Monographs on Physics. OUP Oxford, 2012.
- [2] Hartland S. Snyder. Quantized space-time. *Phys. Rev.*, 71:38–41, Jan 1947.
- [3] HO Girotti. Noncommutative quantum mechanics. *American Journal of Physics*, 72(5):608–612, 2004.
- [4] Piero Nicolini, Anais Smailagic, and Euro Spallucci. Noncommutative geometry inspired schwarzschild black hole. *Physics Letters B*, 632(4):547–551, 2006.
- [5] HO Girotti. Noncommutative quantum field theories. *arXiv preprint hep-th/0301237*, 2003.
- [6] Anais Smailagic and Euro Spallucci. Uv divergence-free qft on noncommutative plane. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(39):L517, 2003.
- [7] J.J. Sakurai and J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2017.
- [8] Karl Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to einstein’s theory. *arXiv preprint physics/9905030*, 1999.
- [9] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.
- [10] Stephen W Hawking. Particle creation by black holes. *Communications in mathematical physics*, 43(3):199–220, 1975.
- [11] Piero Nicolini. Noncommutative black holes, the final appeal to quantum gravity: a review. *International Journal of Modern Physics A*, 24(07):1229–1308, 2009.
- [12] R. D’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Clarendon Press, 1992.
- [13] Stefano Ansoldi, Piero Nicolini, Anais Smailagic, and Euro Spallucci. Noncommutative geometry inspired charged black holes. *Physics Letters B*, 645(2-3):261–266, 2007.
- [14] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley, New York,, 1972.
- [15] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2022.

## Apêndice A

A conservação do tensor energia-momentum é dada por:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1)$$

Considera-se a derivada covariante de um tensor,

$$\nabla_\beta V^{\mu\nu} = \partial_\beta V^{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu V^{\mu\alpha} \quad (2)$$

a expressão para os símbolos de Christoffel,

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{db} - \partial_d g_{bc}) \quad (3)$$

e a propriedade  $\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{cd}^a$ , para expandir a equação (3) [12].

$$\begin{aligned} \nabla_\nu T^{\mu\nu} &= \partial_\nu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} \\ &= \partial_\nu T^{\mu\nu} + \frac{1}{2} T^{\lambda\nu} g^{\mu\gamma} (\partial_\lambda g_{\gamma\nu} + \partial_\nu g_{\gamma\lambda} - \partial_\gamma g_{\nu\lambda}) + \frac{1}{2} T^{\mu\lambda} g^{\nu\delta} (\partial_\lambda g_{\delta\nu} + \partial_\nu g_{\delta\lambda} - \partial_\delta g_{\nu\lambda}) \end{aligned} \quad (4)$$

Escolhendo  $\mu = r$ , temos

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \partial_\nu T^{r\nu} + \frac{1}{2} T^{\lambda\nu} g^{r\gamma} (\partial_\lambda g_{\gamma\nu} + \partial_\nu g_{\gamma\lambda} - \partial_\gamma g_{\nu\lambda}) + \frac{1}{2} T^{r\lambda} g^{\nu\delta} (\partial_\lambda g_{\delta\nu} + \partial_\nu g_{\delta\lambda} - \partial_\delta g_{\nu\lambda}). \quad (5)$$

e considerando que a métrica é representada por uma matriz diagonal, consideramos  $\gamma = r$  e  $\delta = \nu$  nos segundo e terceiro termos do lado direito da equação, respectivamente, a fim de eliminar os termos nulos.

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \partial_\nu T^{r\nu} + \frac{1}{2} T^{\lambda\nu} g^{rr} (\partial_\lambda g_{r\nu} + \partial_\nu g_{r\lambda} - \partial_r g_{\nu\lambda}) + \frac{1}{2} T^{r\lambda} g^{\nu\nu} (\partial_\lambda g_{\nu\nu} + \partial_\nu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\nu\lambda}) \quad (6)$$

Como  $T^{\mu\nu}$  também é representado por uma matriz diagonal, eliminamos novamente os termos nulos da soma sobre  $\nu$  no primeiro termo, sobre  $\lambda$  no segundo - considerando  $\lambda = \nu$  e sobre  $\lambda$  no terceiro - considerando  $\lambda = r$ .

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \partial_r T^{rr} + \frac{1}{2} T^{\nu\nu} g^{rr} (\partial_\nu g_{r\nu} + \partial_\nu g_{r\nu} - \partial_r g_{\nu\nu}) + \frac{1}{2} T^{rr} g^{\nu\nu} (\partial_r g_{\nu\nu} + \partial_\nu g_{\nu r} - \partial_\nu g_{\nu r}) \quad (7)$$

Simplificando, encontramos

$$\partial_r T^{rr} + T^{rr} g^{rr} (\partial_r g^{rr}) - \frac{1}{2} T^{\nu\nu} g^{rr} (\partial_r g_{\nu\nu}) + \frac{1}{2} T^{rr} g^{\nu\nu} (\partial_r g_{\nu\nu}) = 0. \quad (8)$$

Como o objetivo é encontrar as componentes do tensor misto dado por  $T_\nu^\mu$  e a expressão está em termos de tensores contravariantes, considera-se a contração

$$T^{rr} = g^{r\alpha} T_\alpha^r = g^{rr} T_r^r \quad (9)$$

$$g^{r\alpha} g_{\alpha r} = g^{rr} g_{rr} = 1 \rightarrow g^{rr} = (g_{rr})^{-1} \quad (10)$$

de forma que o primeiro termo de (8) é modificado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\partial_r T^{rr} &= \partial_r (g^{rr} T_r^r) \\
&= T_r^r \partial_r g^{rr} + g^{rr} \partial_r T_r^r \\
&= T_r^r \partial_r \left( \frac{1}{g_{rr}} \right) + g^{rr} \partial_r T_r^r \\
&= -\frac{1}{(g_{rr})^2} T_r^r \partial_r g_{rr} + g^{rr} \partial_r T_r^r
\end{aligned} \tag{11}$$

Substituindo o resultado acima na equação (8) e multiplicando todos os termos por  $g_{rr}$ , temos

$$g^{rr} T_r^r \partial_r g_{rr} + \partial_r T_r^r + T^{rr} \partial_r g_{rr} - \frac{1}{2} T^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} + \frac{1}{2} T_r^r g^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} = 0. \tag{12}$$

Manipulando o terceiro termo do lado esquerdo da equação acima utilizando a relação (9), o mesmo cancela com o primeiro termo e resta

$$\partial_r T_r^r - \frac{1}{2} T^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} + \frac{1}{2} T_r^r g^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} = 0. \tag{13}$$

Aplicando (11) no segundo termo da equação

$$\partial_r T_r^r = -\frac{1}{2} g^{\nu\nu} \partial_r g_{\nu\nu} (T_r^r - T_\nu^\nu) \tag{14}$$

e realizando a soma em  $\nu$ , encontramos

$$\partial_r T_r^r = -\frac{1}{2} g^{00} \partial_r g_{00} (T_r^r - T_0^0) - \frac{1}{2} g^{\vartheta\vartheta} \partial_r g_{\vartheta\vartheta} (T_r^r - T_\vartheta^\vartheta) - \frac{1}{2} g^{\phi\phi} \partial_r g_{\phi\phi} (T_r^r - T_\phi^\phi). \tag{15}$$

Sabe-se que devido à simetria do problema  $T_\vartheta^\vartheta = T_\phi^\phi$ , então é preciso definir a relação entre a componente  $g_{\vartheta\vartheta} = r^2$  e  $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \vartheta$ . Sendo  $g_{\phi\phi} = g_{\vartheta\vartheta} \sin^2 \vartheta$  e  $g^{\phi\phi} = \frac{g^{\vartheta\vartheta}}{\sin^2 \vartheta}$ , tem-se a relação

$$g^{\phi\phi} \partial_r g_{\phi\phi} = \frac{g^{\vartheta\vartheta}}{\sin^2 \vartheta} \partial_r (r^2 \sin^2 \vartheta) = g^{\vartheta\vartheta} \partial_r g_{\vartheta\vartheta} \tag{16}$$

que é substituída em (11), resultando em

$$\partial_r T_r^r = -\frac{1}{2} g^{00} \partial_r g_{00} (T_r^r - T_0^0) - g^{\vartheta\vartheta} \partial_r g_{\vartheta\vartheta} (T_r^r - T_\vartheta^\vartheta). \tag{17}$$

A propriedade da métrica de Schwarzschild  $g_{00} = -(g_{rr})^{-1}$  implica na correspondência entre as componentes de  $T_\nu^\mu$ , de forma que  $T_r^r = T_0^0 = -\rho_\theta$ . O primeiro termo do lado direito da equação é nulo e determina-se a componente  $\vartheta$  do tensor como  $T_\vartheta^\vartheta = -\frac{r}{2} \partial_r \rho_\theta$ .

## Apêndice B

A equação

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = J^\nu. \quad (18)$$

pode ser separada em duas partes:  $\nu = 0$  e  $\nu = r, \vartheta, \phi$ .

A primeira fornece

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}F^{\mu 0}) = \rho_e \quad (19)$$

$$\partial_r(\sqrt{-g}F^{r0}) = \rho \quad (20)$$

$$\sqrt{-g}\partial_r E(r) - E(r)\partial_r(\sqrt{-g}) = \rho\sqrt{-g} \quad (21)$$

Considerando a simetria esférica, a métrica pode ser escrita como

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-f(r), f(r)^{-1}, r^2, r^2 \sin \vartheta), \quad (22)$$

de forma que o determinante da métrica é  $g = -r^4 \sin \vartheta$  e a equação se torna

$$\frac{dE(r)}{dr} + \frac{2}{r}E(r) = -\rho_e. \quad (23)$$

A equação diferencial acima pode ser resolvida através do método do fator integrante. Escrevendo-a da forma

$$E(r)' + P(r)E(r) = Q(r), \quad (24)$$

onde  $P(r) = \frac{2}{r}$  e  $Q(r) = -\rho_e$ , o fator integrante é definido como:

$$u(r) = e^{\int P(r)dr} = e^{\int \frac{2}{r}dr} = e^{2\ln r} = r^2. \quad (25)$$

Multiplicando a equação toda pelo fator integrante, obtêm-se:

$$r^2 \frac{dE}{dr} + 2rE(r) = -r^2 \rho_e \quad (26)$$

O lado esquerdo da equação pode ser escrito como a derivada em  $r$  da função  $r^2 E(r)$

$$\frac{d}{dr}(r^2 E(r)) = -r^2 \rho_e \quad (27)$$

de forma que podemos integrar os dois lados da equação em  $r$ .

$$\int_0^r \frac{d}{dr}(r^2 E(r))dr = \int -r^2 \rho_e dr \quad (28)$$

$$r^2 E(r) = \int -r^2 \rho_e dr \quad (29)$$

Agora podemos reescrever a integral do direito da equação de uma forma diferente.

$$I = \int_0^r -r^2 \rho_e dr = - \int_0^r r^2 \frac{e}{(4\pi\theta)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\theta}\right). \quad (30)$$

Sendo  $a = -\frac{e}{(4\pi\theta)^{\frac{3}{2}}}$  e  $b = \frac{1}{4\pi}$ , temos:

$$I = a \int_0^r r^2 e^{-br^2}. \quad (31)$$

Fazendo uma nova mudança de variáveis  $t = br^2$ , a integral se torna:

$$I = \frac{a}{b^{\frac{3}{2}}} \int_0^{br^2} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt = -\frac{e}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\frac{r^2}{4\theta}} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt, \quad (32)$$

que pode ser escrita em termos da função gamma incompleta:

$$I = -\frac{e}{\pi^{\frac{3}{2}}} \gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r^2}{4\theta}\right). \quad (33)$$

Retornando à equação, temos que:

$$E(r) = -\frac{e}{\pi^{\frac{3}{2}} r^2} \gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r^2}{4\theta}\right) \quad (34)$$

Definido  $Q = -\frac{e}{2\pi}$  por motivos de simplificação, encontra-se a expressão pro campo elétrico.

$$E(r) = \frac{2Q}{\sqrt{\pi} r^2} \gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r^2}{4\theta}\right) \quad (35)$$

Agora, retornando à segunda parte, notamos que as equações para  $\nu = \vartheta, \phi$  fornecem a identidade trivial, enquanto que a equação para  $\nu = r$  fornece:

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}F^{\mu r}) = 0 \quad (36)$$

$$\partial_0(\sqrt{-g}F^{0r}) = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{-g}F^{0r}) = 0 \quad (38)$$

Por fim, a equação somente retorna a estaticidade da distribuição:

$$\frac{dE(r)}{dt} = 0. \quad (39)$$