

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

MATEUS ZELMANOWICZ SANVITTO
- 00262411

**ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS PARA
PREDIÇÃO DE ESTRUTURA A TERMO
DA TAXA DE JUROS**

Porto Alegre
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

MATEUS ZELMANOWICZ SANVITTO
- 00262411

**ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS PARA
PREDIÇÃO DE ESTRUTURA A TERMO
DA TAXA DE JUROS**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à
COMGRAD/CCA da UFRGS como parte dos requi-
sitos para a obtenção do título de *Bacharel em Enge-
nharia de Controle e Automação*.

Orientadora:
Prof. Dra. Lucíola Campestrini

Porto Alegre
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

MATEUS ZELMANOWICZ SANVITTO
- 00262411

**ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS PARA
PREDIÇÃO DE ESTRUTURA A TERMO
DA TAXA DE JUROS**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para a obtenção dos créditos da Atividade de *Trabalho de Conclusão de Curso CCA - II* e aprovado em sua forma final pela Orientadora e Banca Examinadora abaixo.

Orientadora:

Prof. Dra. Lucíola Campestrini , UFRGS

(Doutora pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil)

Banca Examinadora:

Prof. Dra. Lucíola Campestrini , UFRGS

(Doutora pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil)

Prof. Dr. Diego Eckhard, UFRGS

(Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil))

Prof. Dr. Pedro Rafael Bolognese Fernandes, UFRGS

(Doutor pela Universidade de Dortmund – Dortmund, Alemanha)

Alceu Heinke Frigeri
Coordenador de Curso
Eng. de Controle e Automação

Porto Alegre
Dezembro - 2024

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a todos aqueles que tiveram a coragem de aprender algo que não lhes era intuitivo. Qualquer um desenvolve algo naquilo em que é bom, ou que tem facilidade. Somente os bravos se aventuram em aprender as coisas que não lhes fazem sentido.

Aos Poetas que escrevem equações e aos Matemáticos que recitam versos, este trabalho é para vocês.

AGRADECIMENTOS

Seria inverdadeiro da minha parte atribuir este trabalho ao esforço de uma única pessoa. Como todas as coisas que valem a pena, estas páginas não foram feitas por apenas um.

Diversas pessoas estiveram comigo nesta árdua jornada por feitiçaria. O maior agradecimento foi ter percebido ao longo da estrada o quão profunda é a minha admiração pelas pessoas que estiveram comigo. Me sinto agradecido por pode-las citar aqui.

Meu profundo agradecimento e admiração aos meus pais, ambos professores, expoentes acadêmicos, mas que principalmente vivem seus valores com amor incondicional.

Meu profundo agradecimento e admiração ao meu irmão por ter sido um exemplo de conduta e realização.

Meu profundo agradecimento e admiração à minha orientadora, Lucíola, gênio dos sinais e brava mulher que forçou sua inteligência goela abaixo de seus colegas tão atrasados intelectualmente.

Meu profundo agradecimento e admiração ao Diguinho e ao seu irmão. Nos momentos mais difíceis eu nunca estive sozinho e sempre pude contar com sua sabedoria pinacular. Se o mundo fosse como vocês o mundo seria um lugar bom.

Meu profundo agradecimento e admiração ao Faro-Fino, grande admirador da beleza da simplicidade da vida, que esteve comigo na jornada desde o início e que desvendou comigo os mais obscuros mistérios da vida. Seremos sempre uma dupla, por mais longínqua e profunda que seja a nossa distância.

Meu profundo agradecimento e admiração à Bateria, por tantas dores e alegrias, fracassos e conquistas, por ter feito de mim a pessoa que me orgulho de ser hoje. Sem ela não teria conseguido. Por todos aqueles que tocaram ao meu lado e cresceram como pessoas ao som de um samba honesto e genuíno, agradeço profundamente por toda a alegria transbordante compartilhada.

Meu profundo agradecimento e admiração aos meus colegas de curso, que tanto batalham e sofrem diariamente com os horrores irracionais a que homens tolos nos submetem. Tenham fé. Vocês são mais fortes do que imaginam. Nunca hesitem em seguir seus caminhos em busca da felicidade, seja lá quais eles sejam.

Meu profundo agradecimento e admiração à Rai, ao Sequela, ao Lúcio, à Sibeli, à Venuto, à Liana, ao Igor que me botou nessa enrascada, ao Alex, ao Davi, ao Rapha, ao Dani Malta, à Luv ao Drex, à Lomis e a todas as pessoas que amei com força durante a jornada, inclusive o Pedrão

Meu agradecimento cordial a Mãe UFRGS que proveu um ambiente enormemente enriquecedor e formador de caráter que transforma de forma franca, mas não gratuita, a vida de milhares de pessoas todos os anos. Espero do fundo do meu coração que um dia a Escola de Engenharia provenha ensino de qualidade, não apenas um filtro aos menos brilhantes.

Por fim, obrigado Lucas.

RESUMO

Este trabalho investiga a modelagem paramétrica da Estrutura a Termo das Taxas de Juros (ETTJ) com ênfase nos modelos de Nelson-Siegel e Svensson, aplicando-os a dados reais de derivativos de juros brasileiros. São inicialmente analisados métodos de estimação não linear ressaltando-se o impacto das estimativas iniciais e propondo-se um modelo híbrido que combina mínimos quadrados com *Interior Point*. Descreve-se o tratamento dos dados de contratos DI Futuro, contemplando estratégias de interpolação para lidar com intervalos de maturidade irregulares. Define-se classes de estimação que variam conforme a forma de obtenção dos dados e a extensão do horizonte de maturidade, bem como a quantidade de amostras históricas. Por fim, introduz-se uma abordagem de predição baseada em funções de aproximação, na qual os parâmetros são estimados individualmente, e compara-se a acurácia dessas projeções contra um *benchmark* de *Random Walk*, evidenciando a eficácia relativa de cada estratégia.

Palavras-chave: Estimação de Parâmetros, Estrutura a Termo das Taxas de Juros, Identificação de Sistemas, Predição da ETTJ

ABSTRACT

This work investigates the parametric modeling of the Term Structure of Interest Rates (ETTJ) with an emphasis on the Nelson-Siegel and Svensson models, applying them to real data from Brazilian interest rate derivatives. Initially, non-linear estimation methods are analyzed, highlighting the impact of the initial estimates and proposing a hybrid approach that combines least squares with the Interior Point algorithm. The treatment of DI Futuro contract data is then described, including interpolation strategies to address irregular maturity intervals. Different estimation classes are defined according to how the data are obtained and the length of the maturity horizon, as well as the amount of historical samples considered. Finally, a forecasting approach based on approximation functions is introduced, in which parameters are estimated individually, and the accuracy of these projections is compared against a Random Walk benchmark, demonstrating the relative effectiveness of each strategy.

Palavras-chave: Parameter Estimation, System Identification, Yield Curve, Yield Curve Prediction

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Períodos de Vigência de Taxas <i>Forward</i> e <i>Spot</i>	20
2	Estrutura a Termo das Taxas <i>Spot</i> , $r_d(t, t + m)$ (linha sólida) e <i>Forward</i> , $f(t, t + m)$ (linha tracejada)	22
3	Curvas de Juros de Títulos Corporativos de 1930 até 1982.....	23
4	Componentes da Curva da Taxa <i>Forward</i>	26
5	Decomposição dos Termos do Modelo de Svensson	27
6	Comparação de Dados dos Vértices frente a Modelo Estimado por Interior Point com Diferentes Valores Iniciais	33
7	Comparação de Dados dos Vértices frente a Modelo Estimado por Mínimos Quadrados + Interior Point com Diferentes Valores Iniciais.....	33
8	Cotações de contratos DI Futuro de diferentes datas futuras de negociação ao longo de 50 dias úteis	36
9	Estimação por Partes da Classe PP para Dados de Contratos DI Futuro com Vencimentos de até 10 anos.....	39
10	Estimação por Partes da Classe PP para Dados de Contratos DI Futuro com Vencimentos de até 5 anos.....	39
11	Beta2 para o Intervalo de 40 Dias.....	40
12	Tau1 para o Intervalo de 40 Dias	41
13	Erro Quadrático Médio para Estimação de Todas Classes em Todas as Amostras para Dados de Contratos DI Futuro de Maturidades de até 10 Anos	44
14	Erro Quadrático Médio para Estimação de Todas Classes em Todas as Amostras para Dados de Contratos DI Futuro de Maturidades de até 5 Anos	44
15	Diferentes Funções de Ajuste para β_2 com Amostras de 5 Dias	47
16	Diferentes Funções de Ajuste para β_2 com Amostras de 40 Dias	48
17	Comparação das Curvas Preditas Baseadas em Funções de Aproximação Provenientes de Diferentes Tamanhos de Amostras	49
18	MSE de Previsões de Todas as Classes de Estimação para Dados de Maturidades de até 10 anos.....	50
19	MSE de Previsões das Classes de Estimação Mais Relevantes para Dados de Maturidades de até 10 anos	51
20	MSE de Previsões de Todas as Classes de Estimação para Dados de Maturidades de até 5 anos.....	52

LISTA DE TABELAS

1	Parâmetros Fornecidos pela ANBIMA	31
2	Vértices ANBIMA	32
3	Comparação do MSE dos Métodos Abordados para Diferentes Grupos de Condições Iniciais.	34
4	Parâmetros Estimados para Cada Intervalo para Amostras de até 10 Anos	38
5	Valores de MSE para Diferentes Classes de Estimação (Maturidades de até 5 anos)	45
6	Funções de Ajuste e MSE para Estimativa de β_2 de 5 Amostras	46
7	Funções de Ajuste e MSE para Estimativa de β_2 de 40 Amostras	46
8	Valores de MSE para Predições 2M Funções de Aproximação com Diferentes Períodos de Dias	47
9	Valores de MSE para Diferentes Predições com Dados de Maturidades de até 10 Anos	50
10	Valores de MSE para Diferentes Predições com Dados de Maturidades de até 5 Anos	51

LISTA DE ABREVIATURAS

ANBIMA	Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais
ETTJ	Estrutura a Termo das Taxas de Juros
SQP	Sequential Quadratic Programming
MSE	<i>Mean Square Error</i>
MQ	<i>Mínimos Quadrados</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	ESTADO DA ARTE	15
3	ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS.....	17
3.1	Juro e Equilíbrio Geral.....	17
3.1.1	Capitalização Contínua.....	17
3.2	ETTJ	18
3.2.1	Vértices e DI Futuro	19
3.3	Taxas <i>Spot</i> e <i>Forward</i>	19
3.3.1	Taxa <i>Spot</i>	20
3.3.2	Taxa <i>Forward</i>	20
3.4	Formato da Curva.....	21
3.5	Modelos Paramétricos.....	24
3.5.1	Modelo de Nelson-Siegel.....	25
3.5.2	Modelo de Svensson	25
4	ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS	28
4.1	Modelagem e Identificação de Sistema.....	28
4.2	Métodos de Estimação de Parâmetros	28
4.2.1	Estimador por Mínimos Quadrados	29
4.2.2	Estimação de Modelo Não-Linear	30
4.3	Avaliação dos Métodos de Estimação	31
4.3.1	Análise dos Modelos Estimados a Partir de Dados dos Vértices.....	31
4.3.2	Interior Point com Estimativas Iniciais Provenientes de Mínimos Quadrados	34
5	METODOLOGIA	35
5.1	Dados	35
5.1.1	Dados Contratos DI Futuro.....	35
5.1.2	Dados Interpolados	36
5.2	Estimação de Parâmetros.....	37
5.2.1	Método <i>Interior Point</i> com Valores Iniciais Provenientes de Mínimos Quadrados	37
5.2.2	Classes de Estimação	37
5.2.2.1	Classes 1M, 2M e 3M	37
5.2.2.2	Classe PP	38

5.3	Predição	38
5.3.1	Predição por Funções de Aproximação dos Parâmetros.....	40
5.3.2	<i>Random Walk</i>	41
6	RESULTADOS.....	43
6.1	Estimação.....	43
6.2	Predição	43
6.2.1	Funções de Aproximação	46
7	CONCLUSÃO	53
	REFERÊNCIAS	55

1 INTRODUÇÃO

As relações de interesse e utilidade são interações econômicas que pautam praticamente todos os comportamentos de indivíduos e agentes dentro de uma sociedade. Essas relações podem ser avaliadas de forma quantitativa e mensuradas a fim de obter-se conclusões e explicações acerca de como se dão as interações entre agentes dentro de um sistema dito econômico (NICHOLSON; SNYDER, 2012). Dentro dessas relações, o juro, definido como o valor atribuído à compensação paga pelo uso do capital, é uma das mais fundamentais na sociedade moderna (FISHER, 1930). Diferentes tipos de juros podem ser utilizados, seguindo a mesma relação de remuneração por empréstimo de capital, para diferentes relações entre agentes econômicos (DE FARO, 2006), retratando bem os diversos fenômenos econômicos da sociedade.

Um comportamento importante é a relação do valor de juros em relação ao tempo. Nomeia-se este comportamento de Estrutura a Termo das Taxas de Juros (ETTJ), onde traça-se uma curva da taxa de juros com diferentes vencimentos, chamados também de maturidades (JAMES; WEBBER, 2000). Para desenvolver esse comportamento são definidos os conceitos de taxa *Spot*, que representa uma taxa de juros cujo período de vigência inicia-se no instante da contratação e de taxa *Forward*, cujo início do período de vigência inicia-se em um instante futuro (SHILLER; MCCULLOCH, 1990). A ETTJ vem tendo seu comportamento monitorado a várias décadas, e a partir dele diferentes formatos de curva podem ser percebidos (WOOD, 1983; DURAND; WINN, 1947).

A partir das relações entre taxas à vista e a termo e dos formatos percebidos ao longo do anos, propôs-se a modelagem da ETTJ (também chamada de curva de juros) em duas classes de modelos diferentes, os paramétricos e os não paramétricos (JAMES; WEBBER, 2000; KUNZLER, 2019). Em primeiro momento foi proposto um modelo paramétrico de 4 parâmetros, associado à solução de uma equação diferencial de raízes iguais, que descrevia bem as relações entre taxas à vista e a termo e os possíveis comportamentos da curva de juros (NELSON; SIEGEL, 1987). Posteriormente, uma extensão desse modelo foi desenvolvida utilizando-se 6 parâmetros para descrever o comportamento da ETTJ, mostrando-se ainda mais acurado que o modelo anterior (SVENSSON, 1994).

Este trabalho pretende realizar a estimação de parâmetros da ETTJ utilizando-se de dados reais de derivativos de títulos públicos (DI Futuro), pois ainda que possam descrever bem os comportamentos da ETTJ, os modelos paramétricos possuem parâmetros não definidos, justamente para abranger diferentes formatos de curva. Visa-se utilizar de métodos de estimação para identificar os parâmetros do modelo que traduzam a realidade do juro de um sistema econômico (tal qual um país ou um bloco econômico) para que o mesmo possa ser utilizado para a tomada de decisões de políticas econômicas que são interferidas diretamente pelas oscilações de juros (CAO, 2016). Para tal utiliza-se destes instrumentos financeiros (como derivativos de títulos públicos de maturidades variadas) para levantar dados acerca dos valores reais das taxas de juros de um país, visto que estes fornecem uma significativa quantidade de pontos para a utilização de um método

de identificação. Assim, utilizando-se de valores reais, procura-se estimar parâmetros que tracem com acurácia valores estimados de taxas de juros para instantes em que não existe a maturação de títulos públicos ou outros instrumentos financeiros, fornecendo uma curva de juros contínua.

Escolhendo-se o algoritmo de estimação mais apropriado, este será implementado utilizando-se de dados reais passados, relativos aos contratos DI Futuros negociados pela B3, os quais representam consideravelmente satisfatória o comportamento da curva de juros em instantes pontuais. Sendo os dados reais espaçados de forma desigual, uma interpolação é proposta para então realizar-se uma amostragem de diferentes intervalos. Define-se diferentes classes de estimações baseadas em diferentes composições dos dados, sendo eles variando entre espaçamento de amostragem, ou, ainda, horizonte de vencimento dos contratos. Partindo-se das implementações do modelo de estimação de diferentes classes, são estimados os grupos de parâmetros do modelo para instantes passados.

Destas estimações serão traçadas curvas de aproximação do comportamento de cada parâmetro individualmente, utilizando-se diferentes tamanhos de amostra de instantes passados (5, 10, 20 e 40 dias) para definir-se o tamanho ótimo de amostras para os dados disponíveis. Partindo das curvas traçadas com o número de amostras ótimo, busca-se então utiliza-las para prever o comportamento da curva de juros em instantes futuros.

Com os parâmetros de instantes futuros definidos para certo intervalo são traçadas curvas de juros de instantes futuros para suas datas respectivas. As curvas de predição de tempo futuro são então analisadas em termos de sua precisão em relação aos dados relativos a suas datas em questão.

Uma conclusão é apresentada relativa a serventia e aplicabilidade da metodologia proposta e sua capacidade de extensão a dados maiores: Avalia-se a funcionalidade das implementações das estimações de diferentes classes aqui propostas, comparando-as entre si em termos do erro quadrático médio respectivo; Avalia-se as predições provenientes dessas classes de estimação também, não só entre si, mas em relação também a uma predição por caminhada aleatória, que serve como *benchmark* de avaliação da qualidade das predições. Por fim considera-se a eficácia da metodologia apresentada nesse trabalho, levando em consideração o impacto do montante de dados nos resultados de predição.

2 ESTADO DA ARTE

Em se tratando de modelagem da ETTJ, em (VASICEK, 1977) se observa um dos primeiros modelos estocásticos desenvolvidos para descrever a evolução das taxas de juros de curto prazo, introduzindo a ideia de que essas taxas tendem a retornar a um nível médio de longo prazo, o que reforça o conceito de reversão à média no mercado financeiro. Posteriormente, (HULL; WHITE, 1990) aprimora o modelo de Vasicek ao permitir que a média de longo prazo varie no tempo, tornando-o mais flexível e adequado aos dados de mercado. Avançando nessa mesma linha, (JUCHEM NETO, 2007) explora extensões do modelo de Hull-White com volatilidade estocástica, por meio de técnicas de aproximações perturbativas, evidenciando como tal complexidade adicional traz maior realismo e robustez à precificação de instrumentos em ambientes de alta incerteza.

A análise de dados funcionais surge em (FERRATY; MAS; VIEU, 2007), que propõe métodos não paramétricos para lidar com dados contínuos, permitindo mais flexibilidade ao se tratar de séries temporais complexas, como a ETTJ. Complementando essa abordagem, (HAYS; SHEN; HUANG, 2012) apresenta modelos dinâmicos de fatores funcionais, integrando análise funcional com fatores latentes, o que proporciona previsões mais acuradas da curva de juros. No caso brasileiro, (RUAS, 2014) mostra como as técnicas de análise funcional não paramétrica podem estimar a ETTJ de maneira mais flexível, entregando previsões mais robustas mesmo diante das variações típicas do mercado local.

Em se tratando de modelos paramétricos, (NELSON; SIEGEL, 1987) introduz um modelo parcimonioso para representar a forma da ETTJ a partir de poucos parâmetros-chave. Depois, (SVENSSON, 1994) expande esse arcabouço com um segundo fator de curvatura, o que possibilita ajustar curvas de juros com estruturas mais complexas. Na mesma direção, (DIEBOLD; LI, 2006) incorpora dinâmica temporal ao reinterpretar os fatores como variáveis estocásticas, viabilizando ajuste e predição da curva de juros ao longo do tempo. Já no contexto brasileiro, (SARTORI, 2014) aplica o modelo Diebold-Li ao mercado de títulos públicos para investigar seu desempenho na ETTJ local, ressaltando sua robustez às peculiaridades do mercado interno e sua habilidade em capturar variações econômicas para projeções futuras.

Seguindo essa evolução, (SARTORI; ECKHARD, 2017) aprimora o modelo de Diebold-Li ao tratar de forma dinâmica o fator de decaimento exponencial, ajustando-o computacionalmente para minimizar erros na curva de juros brasileira. Esse aprimoramento permite capturar, com maior precisão, oscilações futuras das taxas de juros, superando em eficiência os modelos que mantêm esse parâmetro fixo.

Em (TESSER, 2013), verifica-se uma análise comparativa de diferentes modelos de fatores latentes no cenário brasileiro. Conclui-se que o modelo de (SVENSSON, 1994) apresenta melhor ajuste estrutural da ETTJ, enquanto o modelo de (DIEBOLD; LI, 2006), por incorporar dinâmica temporal, oferece previsões mais eficientes. Por fim, (SZMIDT NETO, 2018) investiga como a curva de juros nacional se relaciona com co-movimentos

de títulos públicos internacionais, evidenciando o grau de influência dos fatores externos sobre a dinâmica das taxas de juros no Brasil.

Por fim, aborda-se uma avaliação de metodologia, onde utiliza-se modelos paramétricos para estimação, como proposto inicialmente por (NELSON; SIEGEL, 1987). Trata-se e compara-se diferentes classes de predição, tal qual sugerido por (SARTORI, 2014), porém com outra estratégia de predição e outro modelo paramétrico, como sugerido por (TESSER, 2013). A avaliação da acurácia da predição é então realizada pela comparação com *Random Walk* tal qual descrito em (FAMA, 1970).

3 ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS

3.1 JURO E EQUILÍBRIO GERAL

O conceito de equilíbrio geral na economia refere-se a um estado hipotético onde todos os mercados estão em equilíbrio de oferta e demanda, incluindo os mercados de bens, serviços, trabalho e capital. Neste contexto, todos os agentes econômicos estão plenamente satisfeitos com suas decisões, sem excedentes ou insuficiências de oferta e demanda (NICHOLSON; SNYDER, 2012). Este equilíbrio é dinâmico e considera a interação dos agentes ao longo do tempo, levando em conta suas expectativas racionais sobre o futuro e a utilização eficiente das informações disponíveis.

A taxa de juros desempenha um papel crucial nesse equilíbrio, pois ajusta a quantidade de capital poupada com a quantidade de capital investida. Ela pode ser entendida como o custo do "aluguel" do capital, refletindo a recompensa para o credor e o custo para o devedor (FISHER, 1930). As taxas de juros podem ser nominais ou reais, sendo as últimas ajustadas pela inflação, o que permite um entendimento mais preciso das decisões de poupança e investimento em termos de poder de compra (FISHER, 1930).

Além disso, há diferentes regimes de capitalização de juros: o juro simples, que é calculado apenas sobre o capital inicial, e o juro composto, onde os juros são capitalizados, rendendo também juros sobre juros acumulados. Este último é mais comum em aplicações financeiras devido ao efeito cumulativo ao longo do tempo, que potencializa o montante final (DE FARO, 2006). A escolha entre esses regimes depende do contexto econômico e das preferências temporais dos agentes quanto ao consumo presente versus futuro.

3.1.1 Capitalização Contínua

A Capitalização Contínua é um conceito que deve ser abordado para a explicação da composição de taxas *Spot* e *Forward* que serão descritas nas próximas seções deste trabalho e que são de suma importância para a compreensão da ETTJ. Entende-se o regime de capitalização como o processo de formação de juro e a maneira com que estes são incorporados ao capital (DE FARO, 2006).

Medindo-se o tempo em certa unidade e contando-o a partir de uma data de origem pode-se definir C_t como o total de capital em um instante de tempo t . O juro, pode ser definido como o acréscimo que C_t sofre entre os instantes t e $t + \Delta t$. Por hora, para essa explicação, define-se o juro como ΔC_t .

Aborda-se agora um caso onde o intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$ tende a zero, ou seja, considera-se um dt infinitesimalmente pequeno. Analogamente substitui-se o acréscimo ΔC_t pela notação diferencial dC_t . A taxa de juros nesse período infinitesimal é chamada de Taxa Instantânea de Juros, δ_t , e ela diz respeito à taxa de retorno em um

intervalo de tempo que tende a zero. Na prática, esta seria a taxa de juros de um dia para o outro, também chamada de taxa *overnight* (DE FARO, 2006; BOLDER; STRÉLISKI, 1999). Pode-se definir δ_t sob a forma unitária e por unidade de tempo como:

$$\delta_t = (dC_t/C_t)/dt, \quad (1)$$

e assim descrever a evolução do capital ao longo do tempo como:

$$dC_t = \delta_t \cdot C_t \cdot dt. \quad (2)$$

A interpretação financeira da expressão (2) denota que, em termos aproximados, o juro dC_t , pode ser admitido como sendo diretamente proporcional ao capital considerado C_t , e ao intervalo infinitesimal de tempo dt em que o capital foi utilizado, com o fator de proporcionalidade sendo a taxa instantânea de juros δ_t (DE FARO, 2006).

Aplicando-se um capital inicial C_0 na data de origem e integrando os dois lados da equação (1) no intervalo de integração de 0 até T tem-se:

$$\int_0^T \frac{dC_t}{C_t} = \int_0^T \delta_t \cdot dt \quad (3)$$

ou

$$\ln(C_T/C_0) = \int_0^T \delta_t \cdot dt \quad (4)$$

aplicando a exponencial dos dois lados tem-se:

$$C_T = C_0 \cdot e^{\int_0^T \delta_t \cdot dt} = C_0 \cdot e^{\delta T} \quad (5)$$

no caso que será abordado, onde $\delta_t = \delta$ é uma constante, calcula-se uma taxa de juros equivalente para capitalização contínua rearranjando os termos da equação (5):

$$\delta = \frac{1}{T} \cdot \ln\left(\frac{C_T}{C_0}\right) \quad (6)$$

A taxa δ pode ser interpretada como a taxa instantânea de crescimento do capital em qualquer ponto no tempo. Diferentemente da capitalização composta, onde os juros são calculados em intervalos discretos, na capitalização contínua, os juros são compostos a todo momento, e a taxa δ reflete esse acúmulo contínuo.

3.2 ETTJ

A ETTJ representa fundamentalmente a relação entre taxas de juros de mesmo risco de crédito, ou seja, mesma capacidade de que os devedores cumpram suas obrigações financeiras, mas diferentes maturidades. Ela é uma ferramenta essencial para que títulos públicos e derivativos sejam precificados, visto que ela é uma predição do que espera-se das taxas de juros futuras. Além disso com a previsão acurada da ETTJ, riscos de mercado, como a exposição na taxa de juros, podem ser geridos com mais facilidade. No âmbito governamental, a previsão da ETTJ orienta as decisões de política monetária de bancos centrais oferecendo *insights* sobre as expectativas do mercado em relação às futuras ações de política (JAMES; WEBBER, 2000).

A estrutura a termo da taxa de juros varia significativamente de um país para outro. A política monetária e fiscal muda o formato da curva de juros de acordo com as

abordagens e condições econômicas do país em questão. De forma semelhante, a expectativa de inflação reflete diretamente a inclinação da curva. Ainda, o risco de crédito soberano, ou seja, o caso de inadimplência do governo, altera os níveis da curva de juros, visto que investidores exigirão um retorno mais avantajado em investimentos que tem maior chance de não serem quitados. A modelagem e predição da ETTJ, portanto, é essencial para a antecipação de movimentos de mercado, avaliação e tomada de decisão de política econômica e precificação de produtos financeiros.

3.2.1 Vértices e DI Futuro

A estrutura temporal da curva de juros não é diretamente observável no mercado financeiro brasileiro, uma vez que não há títulos negociados para todos os prazos, necessitando tratamento dos dados para conseguir calcular a taxa de juros para todo e qualquer prazo existente e negociado. Normalmente, a construção dessa estrutura dá-se a partir da coleta de taxas de juros embutidas nos títulos. Dessa forma, para os prazos em que há vencimento concomitante de títulos, a taxa pode ser obtida facilmente, e esses pontos serão denominados vértices da curva de juros, sendo o ponto de referência para diversos métodos de previsão da curva (KUNZLER, 2019). Para estimar-se a estrutura de taxas de juros a termo, utiliza-se a relação *Spot Rate X Forward Rate*, que relaciona contratos de juros à vista (taxa *Spot*) com contratações que tem o início de seu prazo de rentabilidade em uma data futura (taxa *Forward*).

Para a obtenção de dados além dos vértices será considerada a utilização dos preços de fechamento das taxas dos contratos de DI Futuro, sendo o preço de fechamento o valor da última negociação do pregão da Bolsa B3 de um dia. O contrato DI Futuro está diretamente relacionado com a taxa de juro, pois é um derivativo financeiro que reflete as expectativas do mercado em relação à taxa de juro no Brasil, especificamente à taxa DI (Depósito Interfinanceiro) sendo esta a média das taxas de juros que os bancos cobram entre si em empréstimos de curto prazo, geralmente de um dia. Essa taxa DI, por sua vez, é fortemente influenciada pela Selic, que é a taxa básica de juros da economia brasileira. Serão utilizados os valores de contratos DI Futuros de maturidades mensais de 1 a 120 meses, ou seja, 10 anos, seguindo a métrica de dias úteis (21 dias por mês).

Os valores dos preços de fechamento das taxas dos contratos DI Futuros estão disponíveis no endereço da web da B3 (https://www.b3.com.br/pt_br/produtos-e-servicos/negociacao/juros/futuro-de-taxa-media-de-depositos-interfinanceiros-de-um-dia.htm)

Títulos públicos somados com derivativos de juros de diferentes vencimentos representarão uma estrutura de dados que será utilizada para estimar o modelo da Estrutura a Termo da Taxa de Juros, representando diversos pontos amostrados com a finalidade de gerar uma curva, sendo este o objetivo deste trabalho.

3.3 TAXAS SPOT E FORWARD

A relação e a compreensão das taxas *Spot* e *Forward* são um ponto crucial para o entendimento da formação da ETTJ. Serão deduzidas as características principais e como elas estão relacionadas, para assim nortear os passos futuros necessários para a modelagem da ETTJ. Tal relação é fundamental para utilizar-se de pontos reais de títulos públicos para estimar a realidade da curva de juros futuros. Na Figura 2 estão dispostas as duas curvas e através da relação delas pode-se fazer inferências a certa da ETTJ.

3.3.1 Taxa Spot

A Taxa *Spot*, também chamada de taxa de juros à vista, é a taxa de juros acumulada do instante t até a maturidade do contrato T . Esses contratos de juros podem ser feitos com cupom, que é um pagamento periódico prévio ao instante de maturidade de contrato, ou pode ser feito apenas com o pagamento de juros e do capital inicial no vencimento do contrato. Este segundo caso é chamado de Zero Cupom ou *Bullet Bond* e a análise feita aqui englobará apenas estes, visto que mensurações de taxas futuras de contratos com cupom demandam um esforço algébrico significativamente maior e não apresentam ganhos de acurácia em suas previsões (SVENSSON, 1994; SHILLER; MCCULLOCH, 1990).

A dedução da taxa *Spot* pode ser advinda da teoria de taxas de juros à capitalização contínua. Utilizando a equação (6) substituímos o período T por um período de vigência de contrato $T - t$, onde t é o instante de acordo do contrato e T é o instante de vencimento do mesmo (onde $T \geq t$). A seguir, expressa-se a relação de C_T/C_0 como uma função de pagamento $p_d(t, T)$ ou seja, uma função dependente dos instantes t e T , visto que o período de vigência de contrato influenciará diretamente o pagamento do mesmo. Além disso, ao contrário da relação C_T/C_0 onde geralmente o valor final de C_T é maior que o valor de capital inicial C_0 , gerando um valor maior que 1, a função de pagamento $p_d(t, T)$ atinge o valor de 1 no momento de vencimento do contrato $t = T$. Para tal altera-se a relação logarítmica de $\ln(C_T/C_0) = -\ln(p_d(t, T))$ mantendo-se a consistência algébrica da relação. Obtém-se assim a seguinte relação para taxa *Spot*:

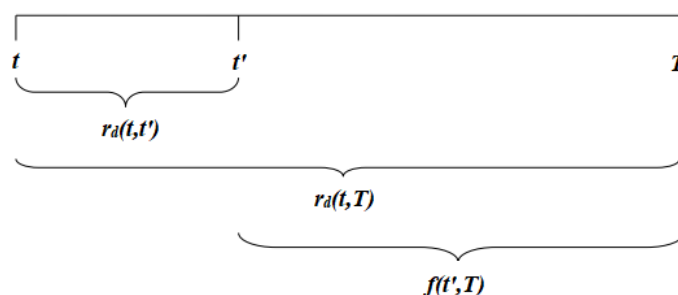
$$r_d(t, T) = -\ln(p_d(t, T)) \cdot \frac{1}{(T - t)} \quad (7)$$

onde $r_d(t, T)$ é a taxa de juros à vista. O subscrito d denota *Discount* que relaciona a nomenclatura de função de desconto também comumente utilizada para a dedução de taxas *Spot*.

3.3.2 Taxa Forward

A taxa *Forward*, também chamada de taxa a termo, é a taxa implícita equivalente de um contrato acordado na data atual t , iniciado sua vigência no tempo t' e vencendo no instante T , onde $t < t' < T$. Na Figura 1, pode-se ver a forma diagramada dos períodos de dois contratos com taxa *Spot*, $r_d(t, t')$ e $r_d(t, T)$. Na mesma Figura percebe-se o período de vigência da taxa *Forward* $f(t', T)$.

Figura 1: Períodos de Vigência de Taxas *Forward* e *Spot*



Fonte: (KUNZLER, 2019), Adaptado

O cálculo da taxa *Forward* implícita pode parecer simples a primeiro momento, visto que um contrato *Forward* com um momento de acordo t' e um instante de maturidade T pode ser calculado a partir de uma compra e uma venda de taxas *Spot* a zero cupom. No caso comprar-se-ia um contrato à vista de maturidade T e venderia-se um contrato de maturidade t' , ambos com o mesmo instante inicial t (SVENSSON, 1994). Essa relação é dada por:

$$f(t, t', T) = \frac{(T - t) \cdot r_d(t, T) - (t' - t) \cdot r_d(t, t')}{T - t'} \quad (8)$$

Pode-se agora introduzir-se o conceito de *Forward* Instantânea, que representa o retorno de um contrato cujo período de vigência é infinitesimalmente pequeno, ou seja, que t' tende a T . Para tal, calcula-se o limite de $f(t, t', T)$ nessas condições e define-se a seguinte equação:

$$f(t, t', T)_{inst} = \lim_{t' \rightarrow T} f(t, t', T). \quad (9)$$

Estendendo essa dedução, calcula-se o limite da equação (8), que deixa explícita a relação da *Forward* com a *Spot*, para obter-se a relação entre a taxa *Forward* instantânea e a taxa *Spot*. Assim é obtida a expressão:

$$f(t, t', T)_{inst} = r_d(t, T) + (T - t) \cdot \frac{\delta r_d(t, T)}{\delta T} \quad (10)$$

Agora, tendo-se a taxa *Forward* instantânea, pode-se utilizá-la para encontrar uma taxa *Forward* de maturidade finita, integrando todos os seus valores com os limites de integração de início de vigência e instante de maturidade e dividindo pelo período de vigência de contrato, tendo assim a média simples da taxa *Forward* no período finito:

$$f(t, t', T) = \frac{1}{T - t'} \int_{t'}^T f(t, \tau, T)_{inst} d\tau, \quad (11)$$

onde τ é um operador temporal que define qualquer instante de tempo entre t' e T .

Assume-se, então, que a taxa *Forward* instantânea representa o acréscimo marginal de retorno devido a um acréscimo marginal no período de vigência do contrato. Assim, pode-se igualar a taxa à vista com a média simples das taxas *Forward* instantâneas no período de t até T (SVENSSON, 1994; SHILLER; MCCULLOCH, 1990):

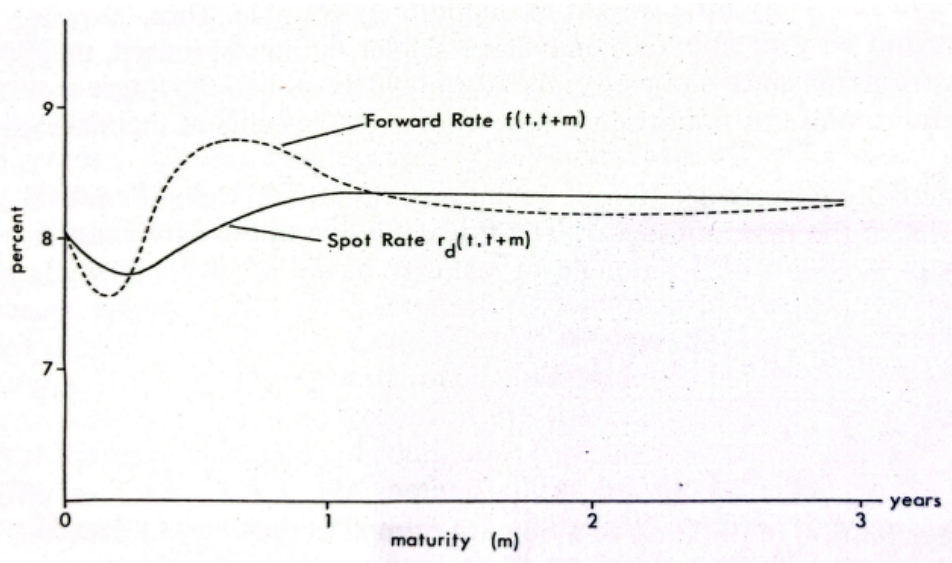
$$r_d(t, T) = \frac{1}{(T - t)} \cdot \int_t^T f(t, \tau, T)_{inst} d\tau \quad (12)$$

3.4 FORMATO DA CURVA

A curva de juros vem tendo seu comportamento observado a várias décadas, formando uma base de dados sólida para seus possíveis padrões e formatos (WOOD, 1983; DURAND; WINN, 1947).

A curva de juros é tipicamente ascendente devido ao prêmio de risco associado a maturidades mais longas. Isso ocorre porque os investidores exigem uma compensação maior para emprestar dinheiro por períodos mais longos, o que reflete a incerteza sobre as condições econômicas futuras. No entanto, a forma da curva de juros pode variar consideravelmente. A Figura 3 mostra diferentes curvas de juros de títulos corporativos

Figura 2: Estrutura a Termo das Taxas Spot, $r_d(t, t + m)$ (linha sólida) e Forward, $f(t, t + m)$ (linha tracejada)



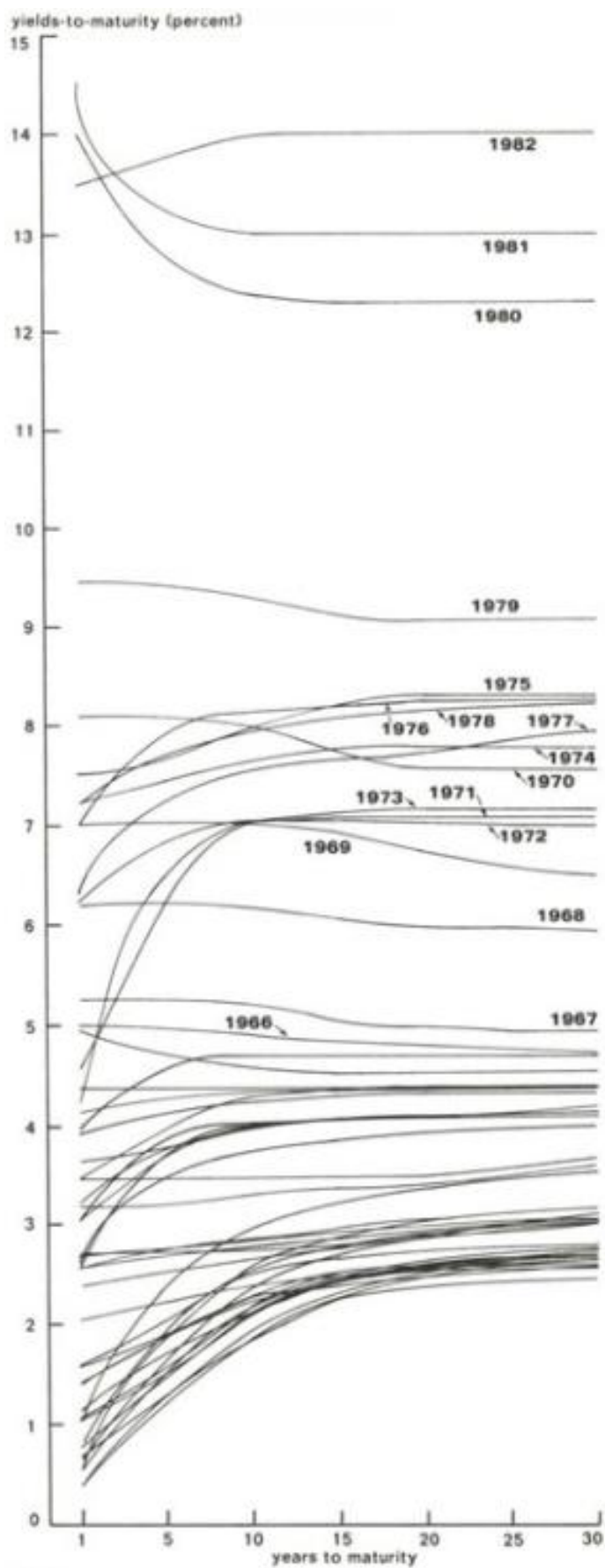
Fonte: (SHILLER; MCCULLOCH, 1990)

indexados à taxa de juros dos EUA. Nela pode-se perceber os muitos comportamentos que a curva pode tomar de acordo com as expectativas e condições econômicas de certo período.

Quanto ao formato e comportamento da curva, descreve-se como monotônica (leia-se contínua e consistente) além de possuir uma tendência ascendente, descendente ou plana. O comportamento ascendente da curva é o formato mais comum da curva de juros e geralmente indica expectativas de crescimento econômico e aumento da inflação. Os investidores exigem uma compensação maior para emprestar dinheiro por períodos mais longos devido à incerteza sobre as condições econômicas futuras. Quando as taxas de curto prazo são mais altas do que as de longo prazo percebe-se o comportamento descendente da curva de juros, frequentemente indicando um prenúncio de recessão. Indica que os investidores esperam que as taxas de juros diminuam no futuro, possivelmente devido a uma desaceleração econômica ou deflação. Uma curva plana sugere períodos de incerteza ou transição, em que os investidores não têm uma visão clara sobre as futuras condições econômicas ou quando as políticas monetárias estão mudando (JAMES; WEBBER, 2000).

Ademais, as curvas de juros podem ser caracterizadas por formatos específicos como picos, vales e formatos em S, cada uma delas tendo interpretações diferentes acerca de prováveis comportamentos econômicos. Os formatos mais comumente destacados na bibliografia (NELSON; SIEGEL, 1987; SVENSSON, 1994; FABOZZI, 2008) são:

- **Curva em Corcunda (*Humped*):** Uma curva em corcunda inicialmente ascende, atinge um pico e subsequentemente desce, refletindo expectativas do mercado sobre a evolução das taxas de juros. Esse formato indica um aumento esperado nas taxas de juros no curto prazo, seguido por uma diminuição. Tal comportamento pode ser interpretado como uma resposta a políticas monetárias de aperto para conter a inflação, seguida por estabilização ou afrouxamento. Adicionalmente, pode indicar um ciclo econômico onde há crescimento e aumento da inflação inicialmente, com desaceleração esperada no médio prazo.

Figura 3: *Curvas de Juros de Títulos Corporativos de 1930 até 1982*

Fonte: (WOOD, 1983)

- **Curva em Forma de U (*U-Shaped*):** Uma curva em forma de U começa com taxas de juros elevadas, desce até um ponto mínimo e depois volta a subir. A descida inicial indica expectativas de redução das taxas no curto prazo, possivelmente devido a políticas de afrouxamento monetário ou condições econômicas adversas. O ponto mínimo representa o nível mais baixo das taxas de juros, refletindo o período de maior estímulo monetário. A subida subsequente sugere uma recuperação econômica ou aperto monetário no longo prazo, antecipando aumento na inflação ou crescimento econômico robusto.
- **Curva em Forma de S (*S-Shaped*):** A curva em forma de S é caracterizada por duas inflexões ao longo do prazo de vencimento, uma subida inicial, seguida por um pico, descida para um vale, e uma nova ascensão. Este formato complexo sugere expectativas diferenciadas sobre as taxas de juros ao longo do tempo. Inicialmente, pode haver um aumento nas taxas devido a pressões inflacionárias ou crescimento econômico. Posteriormente, a curva desce, indicando políticas de estímulo ou redução na inflação, e ascende novamente no longo prazo devido a uma recuperação econômica esperada ou novas pressões inflacionárias.

A partir dessas considerações acerca dos formatos inicia-se o processo de modelar matematicamente a curva de juros, ou seja, utilizar os valores reais dos títulos públicos e de seus derivativos para obter-se uma previsão do comportamento futuro de juros. Visto que a ETTJ não é diretamente observável em todos os prazos, para encontrar a taxa em determinado vencimento que não tenha negociação de títulos, é necessário, a realização de um modelo de ajuste. Em relação a esta modelagem, divide-se em duas classes, os modelos paramétricos e os modelos não-paramétricos. Os modelos não paramétricos não assumem nenhuma forma funcional para a taxa de juros, e têm como foco o perfeito ajuste da estrutura a termo aos vértices observados, ou seja, nos vértices em que houver negociação, o modelo assume uma condição de não arbitragem e a taxa interpolada é exatamente igual à observada. Assim, são considerados modelos mais flexíveis de ajuste à curva (KUNZLER, 2019). Os modelos paramétricos, ao contrário dos não-paramétricos, possuem uma forma funcional e parâmetros que podem ser estimados para fins de predição. Esta segunda classe de modelos será abordada.

3.5 MODELOS PARAMÉTRICOS

Tendo-se analisado historicamente os diferentes possíveis formatos da curva de juros e definindo equações que relacionam a taxa *Forward* instantânea com a taxa à vista, pode-se propor funções de valores específicos que as variações nas taxas de juros dependam dos fatores que compõe o modelo. Uma classe de funções que engloba com versatilidade os diferentes formatos apresentados pelas curvas de juros e enquadra-se nos comportamentos das taxas *Spot* e *Forward* é a classe polinômios associados à solução de equações diferenciais e de diferenças (NELSON; SIEGEL, 1987).

A motivação inicial para este método de modelagem foi a necessidade de desenvolver um modelo parcimonioso da estrutura a termo das taxas de juros, capaz de representar a variedade de formas geralmente observadas nas curvas de juros (e assim utilizar-se de dados reais para estimar uma curva futura condizente com a realidade): uma forma monotônica, picos e vales em diferentes pontos da curva e formas em S. Esta é uma das várias formas funcionais possíveis que podem ser utilizadas para ajustar uma estrutura a termo.

Serão apresentados os modelos desenvolvidos por Nelson e Siegel, de 4 parâmetros, e sua extensão, o modelo de Svensson, de 6 parâmetros.

3.5.1 Modelo de Nelson-Siegel

Baseando-se na hipótese de que se taxas *Spot* são geradas por uma equação diferencial, então as taxas *Forward*, sendo previsões, seriam a solução dessa equação diferencial (NELSON; SIEGEL, 1987). Seja a taxa *Forward* instantânea com maturidade m , onde m é uma variável temporal com relação com t e T equivalente a $t + m = T$, denotada $f(m)$, pode-se escrevê-la como a solução de uma equação diferencial de segunda ordem com raízes reais e iguais:

$$f(m, \theta) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{m}{\tau}} + \beta_2 \frac{m}{\tau} e^{-\frac{m}{\tau}} \quad (13)$$

onde $\theta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau)$ é o vetor dos parâmetros do modelo.

Esta equação gera uma curva monotônica, com corcunda, formato em U, ou com formato de S dependendo dos valores de β_1 e β_2 , ainda gerando a assíntota em β_0 . O comportamento dos componentes pode ser percebido na Figura 4.

A seguir utiliza-se a relação presente na equação (12) para obter-se a taxa *Spot* $r_d(m)$ a partir da sua relação com taxa *Forward* $f(m)$ descrita anteriormente. Dessa forma, simplificando o termo $r_d(m)$ como simplesmente $r(m)$, tem-se:

$$r(m, \theta) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - e^{-\frac{m}{\tau}}}{\frac{m}{\tau}} \right) + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\frac{m}{\tau}}}{\frac{m}{\tau}} - e^{-\frac{m}{\tau}} \right) \quad (14)$$

e, utilizando a equação (7) pode-se definir uma função de pagamento $p_d(t, T)$, que a partir de agora será chamada de função de desconto $disc(m)$, que definirá o valor do contrato a ser estimado pela curva de juros:

$$disc(m) = e^{-r(m)m} \quad (15)$$

3.5.2 Modelo de Svensson

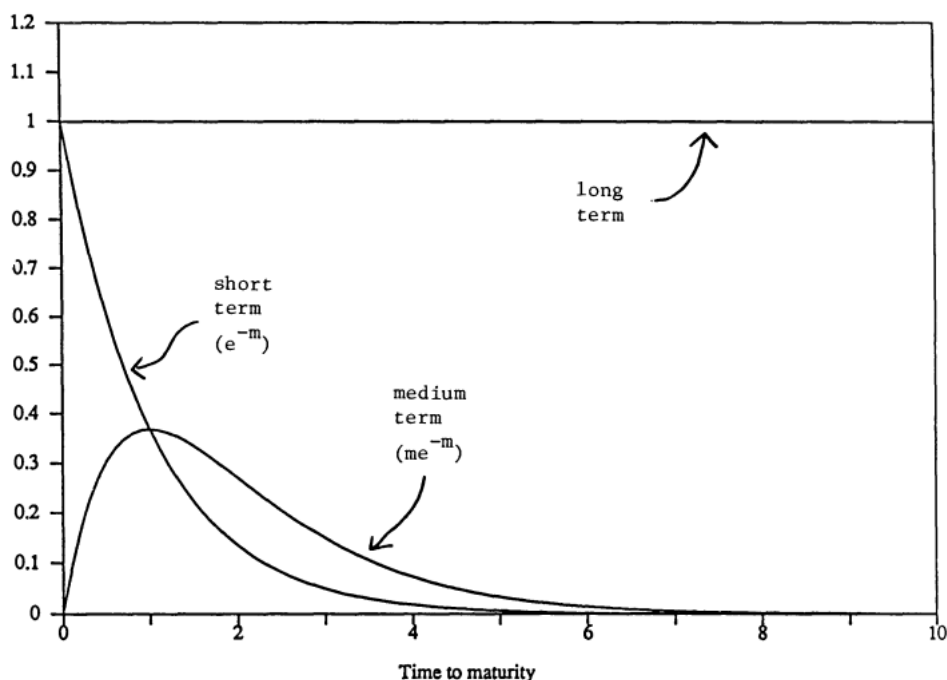
Analogamente ao modelo apresentado por Nelson-Siegel, o modelo de Svensson propõe uma função paramétrica que enquadra-se nos comportamentos observados da curva de juros e das funções de relação das taxas *Spot* e *Forward*.

É proposto neste modelo um aprimoramento adicionando-se 2 parâmetros à solução da equação diferencial apresentada em (13), para melhorar a flexibilidade do enquadramento adicionando a possibilidade de um segundo pico ou vale (forma de corcunda ou de U). Dessa forma o modelo proposto para a taxa *Forward* instantânea é dado por:

$$f(m, b) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{m}{\tau_1}} + \beta_2 \frac{m}{\tau_1} e^{-\frac{m}{\tau_1}} + \beta_3 \frac{m}{\tau_2} e^{-\frac{m}{\tau_2}}. \quad (16)$$

Seguindo a mesma procedimento do modelo anterior pode-se obter a taxa *Spot*, que nesse caso será denotada por $s(m)$:

Figura 4: Componentes da Curva da Taxa Forward



Fonte: (NELSON; SIEGEL, 1987)

$$s(m, b) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - e^{-\frac{m}{\tau_1}}}{\frac{m}{\tau_1}} \right) + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\frac{m}{\tau_1}}}{\frac{m}{\tau_1}} - e^{-\frac{m}{\tau_1}} \right) + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{-\frac{m}{\tau_2}}}{\frac{m}{\tau_2}} - e^{-\frac{m}{\tau_2}} \right) \quad (17)$$

e conseqüentemente:

$$disc(m) = e^{-s(m)m} \quad (18)$$

a função de desconto pode então servir de entrada para computar valores de contratos e realizar sua precificação adequada, a depender dos parâmetros definidos pela metodologia de estimação, podendo-se utilizar algoritmos com entradas tanto de preços como de taxas (SVENSSON, 1994).

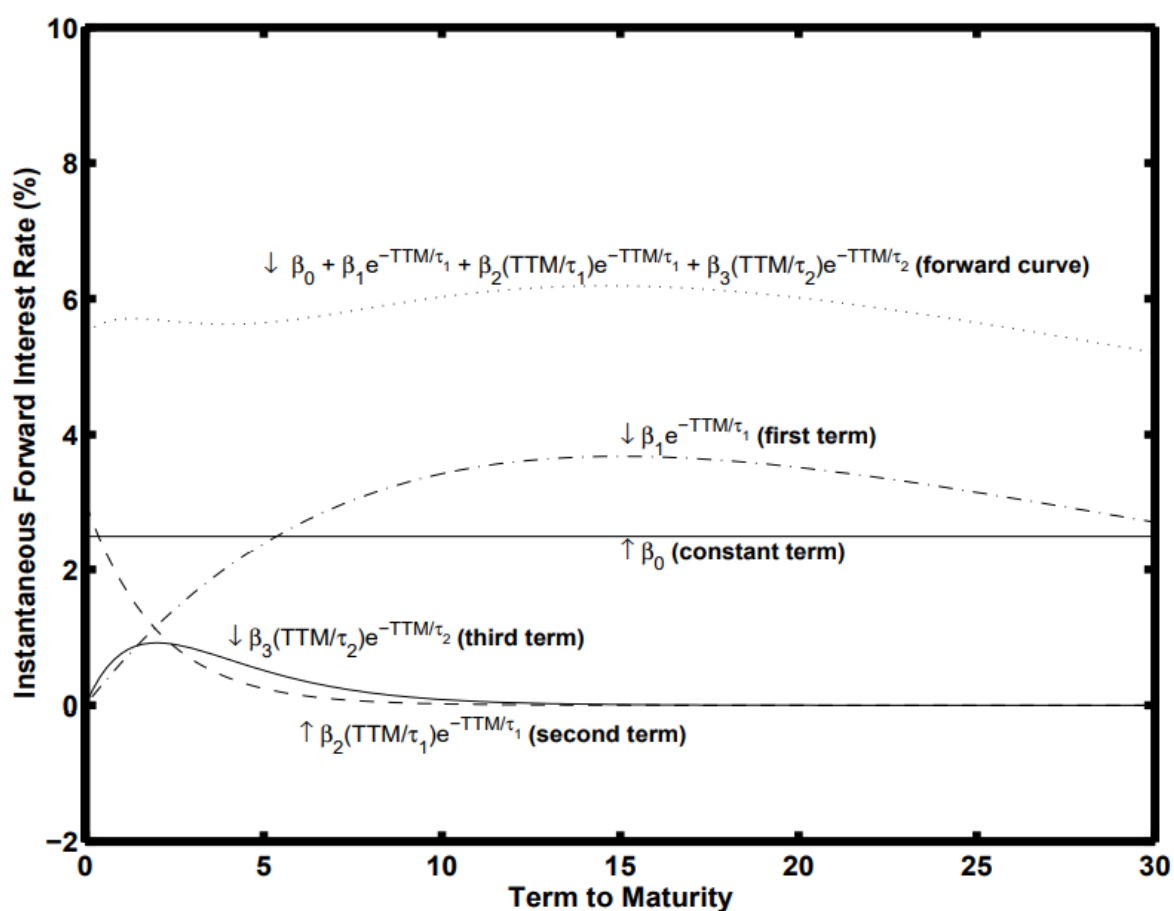
Os parâmetros do modelo, $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1$ e τ_2 identificam as curvaturas diferentes percebidos na análise histórica (WOOD, 1983), que são combinados para produzir a curva *Forward* instantânea de Svensson. O impacto desses parâmetros na forma da curva a termo pode ser descrito da seguinte forma (BOLDER; STRÉLISKI, 1999):

- β_0 = Este parâmetro, que precisa ser positivo, é o valor assintótico da $f(m)$, a curva tenderá a sua assíntota conforme m tende ao infinito.
- β_1 = Este parâmetro define o valor inicial (ou curto prazo) da curva em termos distintos da assíntota. Ele também define a velocidade básica em que a curva tenderá a seu comportamento de longo prazo. A curva terá uma inclinação negativa caso este parâmetro seja positivo e vice-versa. Pode-se notar também que a soma de $\beta_0 + \beta_1$ é o intercepto vertical.
- β_2 = Este parâmetro define a magnitude e direção do primeiro pico. Caso seja positivo será, de fato, um pico, em caso negativo será um vale.

- β_3 = Análogo a β_2 , este parâmetro define a magnitude e direção do segundo pico. Caso seja positivo será, de fato, um pico, em caso negativo será um vale.
- τ_1 = Este parâmetro, que também deve ser positivo, determina a posição do primeiro pico ou vale na curva
- τ_2 = Este parâmetro, que também deve ser positivo, determina a posição do segundo pico ou vale na curva

Na Figura 5, pode-se perceber graficamente o impacto de cada termo do modelo no comportamento geral da ETTJ.

Figura 5: *Decomposição dos Termos do Modelo de Svensson*



Fonte: (BOLDER; STRÉLISKI, 1999)

4 ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

4.1 MODELAGEM E IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMA

Modelagem é um processo essencial para traduzir informações de sistemas reais para uma linguagem científica acessível, geralmente por meio de expressões matemáticas (FISHWICK, 2007). Existem várias abordagens para modelar sistemas. A modelagem "caixa branca" utiliza conhecimentos físicos e operacionais para formular equações matemáticas que descrevem o comportamento do sistema, exigindo um alto nível de conhecimento e tempo, e gerando modelos cujos parâmetros estão diretamente relacionados às características físicas do sistema (GARNIER; WANG; YOUNG, 2008; AGUIRRE, 2014; LJUNG, 1999). Este método pode ser inviável para sistemas complexos ou onde conceitos físicos não aplicam-se diretamente.

Como alternativa, a modelagem "caixa preta" baseia-se em dados operacionais para ajustar modelos, sem necessidade de conhecimento prévio das leis físicas que governam o sistema (AGUIRRE, 2014). Os parâmetros dos modelos resultantes não precisam corresponder diretamente às grandezas físicas (LJUNG, 1999). Existe também uma abordagem intermediária, conhecida como modelagem "caixa cinza", que combina conhecimento teórico do sistema com dados empíricos para desenvolver modelos que capturam as principais características do sistema (LJUNG, 1999).

A identificação de sistemas é um campo específico da modelagem matemática focado em desenvolver modelos matemáticos para sistemas dinâmicos a partir de dados coletados. Este processo envolve várias etapas: planejamento experimental e coleta de dados, escolha da estrutura e representação matemática do modelo, estimação de parâmetros através de minimização de funções de custo, e validação do modelo para verificar sua adequação ao uso previsto (AGUIRRE, 2014; LJUNG, 1999; GARNIER; WANG; YOUNG, 2008; HJALMARSSON, 2021). Essa metodologia é aplicável em diversas áreas, incluindo o projeto de sistemas de controle, algoritmos de predição e simulação de sistemas com parâmetros desconhecidos (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

4.2 MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

A estimação de parâmetros corresponde ao método para determinar os parâmetros do modelo a partir dos dados coletados experimentalmente (ECKHARD; CAMPESTRINI, 2016). A estimação visa encontrar os valores de parâmetros que melhor ajustam a saída do modelo escolhido aos dados coletados. Isso é realizado através da minimização de uma função de custo e um elemento importante dessa etapa é a escolha do algoritmo utilizado. Estimadores de mínimos quadrados, por exemplo, são bastante versáteis, podendo ser

aplicados a modelos lineares e não lineares (AGUIRRE, 2014). A estimação é realizada através de um problema de otimização conforme:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} J(\theta) \quad (19)$$

onde $\hat{\theta}$ é o vetor de parâmetros estimado que soluciona o problema de otimização sendo $J(\theta)$ obtido pelo erro quadrático de predição dado por:

$$J(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (s(k) - \hat{s}(k, \theta))^2 \quad (20)$$

onde N é o total de amostras, $s(k)$ é o valor do dado adquirido, $\hat{s}(k, \theta)$ equivale ao valor de saída estimada do modelo em função do valor de θ e k é uma variável de tempo discreta.

4.2.1 Estimador por Mínimos Quadrados

Uma abordagem adotada pela ANBIMA é fixar os valores de τ_1 e τ_2 a fim de construir apenas um intervalo indicativo. Dessa forma reduz-se a complexidade do problema de estimação para um problema de regressão linear múltipla, facilitando a aplicação de métodos de estimação bem compreendidos. Portanto, o modelo permanece não linear em relação ao tempo, mas linear em relação aos parâmetros β , permitindo uma estimação direta dos parâmetros usando o método dos mínimos quadrados. Expressa-se a equação (17) como:

$$s(m) = \beta_0 + \beta_1 \phi_1(m) + \beta_2 \phi_2(m) + \beta_3 \phi_3(m) \quad (21)$$

onde:

$$\begin{aligned} \phi_1(m) &= \frac{1 - (e^{-\frac{m}{\tau_1}})}{\frac{m}{\tau_1}} \\ \phi_2(m) &= \frac{1 - (e^{-\frac{m}{\tau_1}})}{\frac{m}{\tau_1}} - e^{-\frac{m}{\tau_1}} \\ \phi_3(m) &= \frac{1 - (e^{-\frac{m}{\tau_2}})}{\frac{m}{\tau_2}} - e^{-\frac{m}{\tau_2}} \end{aligned} \quad (22)$$

Define-se então um vetor θ relativo aos parâmetros β a serem estimados e um vetor de regressão ϕ :

$$\begin{aligned} \theta &= [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3] \\ \phi &= \left[1 \quad \frac{1 - (e^{-\frac{m}{\tau_1}})}{\frac{m}{\tau_1}} \quad \frac{1 - (e^{-\frac{m}{\tau_1}})}{\frac{m}{\tau_1}} - e^{-\frac{m}{\tau_1}} \quad \frac{1 - (e^{-\frac{m}{\tau_2}})}{\frac{m}{\tau_2}} - e^{-\frac{m}{\tau_2}} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

A partir dessas definições podemos adotar S como um vetor de saídas para um número N de 20 amostras:

$$S = \begin{bmatrix} s(1) \\ s(2) \\ \vdots \\ s(N) \end{bmatrix} \quad (24)$$

assim como definir uma matriz Φ para os diferentes ϕ 's com todo o espectro de amostras:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \phi_1(1) & \phi_1(2) & \dots & \phi_1(N) \\ \phi_2(1) & \phi_2(2) & \dots & \phi_2(N) \\ \phi_3(1) & \phi_3(2) & \dots & \phi_3(N) \end{bmatrix} \quad (25)$$

expressa-se, então, a equação (21) como:

$$S = \theta\Phi^T \quad (26)$$

e utilizar um método de regressão linear para estimar θ :

$$\hat{\theta} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T S \quad (27)$$

Os valores das taxas de juros futuros fornecidos pela ANBIMA, obtidos por meio de um modelo de estimação baseado em algoritmo genético (GIMENO; NAVE, 2006), bem como os parâmetros β e τ estimados pela associação, são empregados neste trabalho. Em particular, fixam-se os valores de τ advindos da ANBIMA e descreve-se a forma da equação (26) em um código de programação em *Python*. Em seguida, traça-se a curva de juros futuros $s(k)$ com base nos parâmetros β e, posteriormente, aplica-se a minimização da função objetivo (27) para ajustar o modelo aos dados observados.

4.2.2 Estimação de Modelo Não-Linear

Propõe-se também uma abordagem de estimação de parâmetros de modelo não-linear com algoritmos de otimização diversos. É necessário selecionar-se algoritmos que permitam resolver problemas de otimização com restrições (OLIVEIRA, 2022), o que será muito importante devido as características econômicas intrínsecas associadas a cada parâmetro do modelo (GIMENO; NAVE, 2006). Foram impostas as seguintes restrições.

$$\begin{aligned} \beta_0 &> 0 \\ \beta_0 + \beta_1 &> 0 \\ \tau_1 &> 0 \\ \tau_2 &> 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Três algoritmos foram selecionados neste trabalho:

- *Interior-Point*. O método Interior-Point é uma técnica robusta para a resolução de problemas de programação não linear, baseada em métodos de pontos interiores. Este algoritmo reformula o problema de otimização como uma sequência de problemas de programação não linear mais simples. A abordagem central é a solução iterativa de um sistema de equações lineares que aproxima a solução ótima. Ele manipula as variáveis de decisão para satisfazer simultaneamente as restrições e minimizar a função objetivo, lidando tanto com restrições de desigualdade quanto de igualdade (BYRD; GILBERT; NOCEDAL, 2000; WALTZ et al., 2006).
- *SQP*. O algoritmo Sequential Quadratic Programming (SQP) resolve problemas de otimização não linear por meio da reformulação do problema em uma série de

problemas quadráticos sequenciais. A cada iteração, SQP resolve um problema de otimização quadrática que é uma aproximação do problema original, utilizando modelos quadráticos da função objetivo e linearizações das restrições. O método ajusta iterativamente as variáveis de decisão com base em informações de primeira e segunda ordens sobre a função objetivo e as restrições, refinando a solução até a convergência com relação à solução ótima do problema original (SPELLUCCI, 1998).

- *Active-Set*. O método Active-Set para otimização lida com problemas de programação não linear por meio de uma abordagem iterativa que utiliza um conjunto de restrições ativas. Inicialmente, um subconjunto de restrições é selecionado como relevante para a solução do problema. O algoritmo resolve o problema de otimização com base nesse conjunto de restrições e ajusta o conjunto ativo conforme necessário durante o processo iterativo. As restrições são adicionadas ou removidas do conjunto ativo à medida que a solução desenvolve-se, permitindo que o método adapte-se dinamicamente às condições do problema e encontre a solução ótima (HAN, 1977; POWELL, 2006).

Tais algoritmos foram implementados e geraram respostas diferentes, ainda que os três tenham demonstrado acurácia significativa em minimizar a diferença entre a curva do modelo estimado e os dados coletados.

4.3 AVALIAÇÃO DOS MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO

Inicialmente são utilizados os parâmetros fornecidos pela ANBIMA relativos ao dia 01/07/2024 (<https://www.anbima.com.br/informacoes/est-termo/CZ.asp> e presentes na Tabela 1) para traçar-se definir-se uma estimativa inicial. Nesta seção os dados amostrados serão provenientes também de informações provenientes da ANBIMA, obtidas no mesmo endereço da web. Esses dados, chamados vértices, contudo, são apenas um conjunto de 21 pontos disponibilizados em datas relativas ao final e ao meio do ano, visando emular a maturidade de títulos públicos e apresentar taxas realistas de um intervalo de 10 anos para o futuro. Os dados podem ser observados na Tabela 2 e procura-se verificar qual método obteve a curva estimada com maior similaridade aos vértices.

Como segunda abordagem avalia-se valores iniciais com variações de 10% e 50% negativa e será realizada a comparação de cada método com os valores fornecidos pela ANBIMA. Os diferentes métodos de estimação de parâmetros foram então implementados na linguagem de programação *Python* com o intuito de obter-se uma análise prévia da eficácia dos modelos de estimação.

Tabela 1: Parâmetros Fornecidos pela ANBIMA

β_0	β_1	β_2	β_3	τ_1	τ_2
0.1160	-0.0170	0.0384	0.0285	1.8678	0.3290

4.3.1 Análise dos Modelos Estimados a Partir de Dados dos Vértices

Nesta seção, define-se uma função com base nos parâmetros fornecidos pela ANBIMA para gerar amostras hipotéticas sobre o comportamento da ETTJ. A partir delas, são

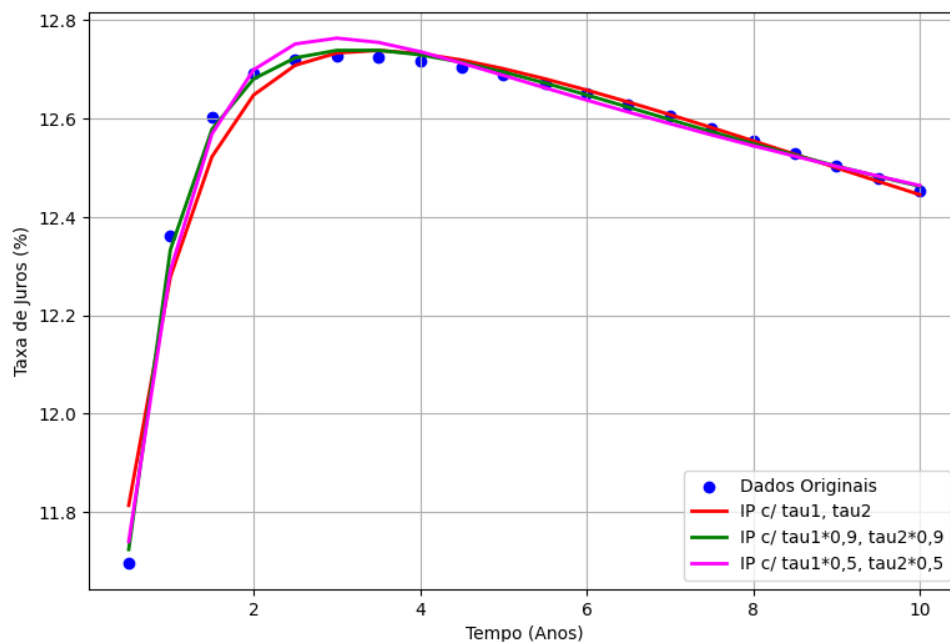
amostrados pontos da curva e aplicados métodos de estimação para aproximar a curva estimada aos pontos. Assim, obtêm-se parâmetros estimados que são comparados aos fornecidos para avaliar a acurácia, utilizando também o erro quadrático médio (MSE).

Tabela 2: *Vértices ANBIMA*

Dias	Vértices
126	11,697
252	12,3621
378	12,6041
504	12,6908
630	12,7201
756	12,7273
882	12,7248
1008	12,7166
1134	12,7045
1260	12,6891
1386	12,6709
1512	12,6505
1638	12,6284
1764	12,6048
1890	12,5803
2016	12,5553
2142	12,5299
2268	12,5045
2394	12,4792
2520	12,4543

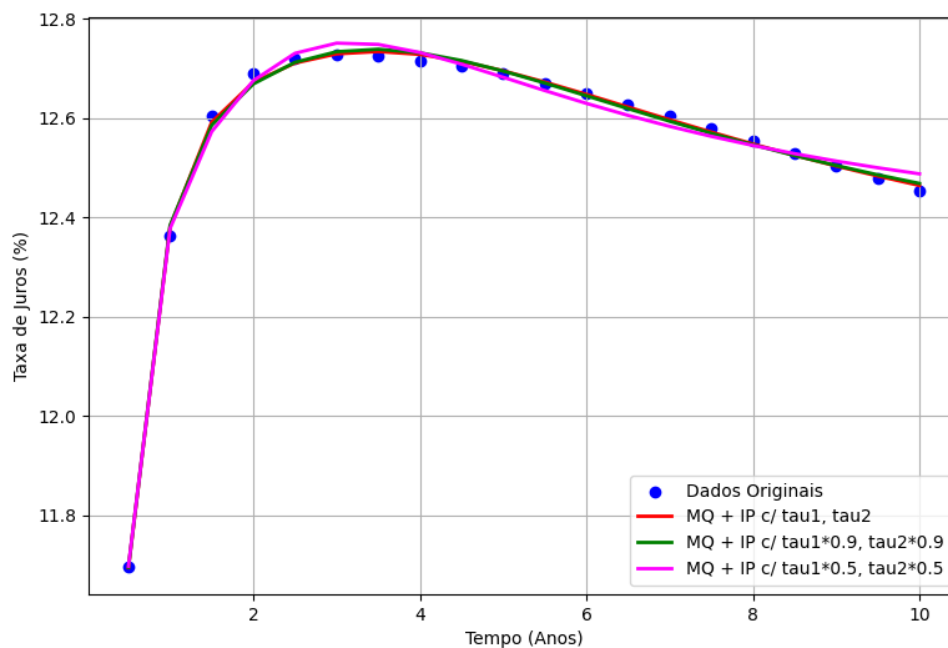
Utiliza-se os dados da Tabela 2 e os algoritmos descritos na seção 4.2.2 para gerar os parâmetros da equação (17). Além disso, considera-se 3 grupos de condições iniciais para os algoritmos propostos, considerando-os idênticos aos fornecidos, 10% menores e 50% menores. Os dados de MSE das implementações abordadas são então dispostos na Tabela 3 e curvas são geradas para todos os métodos. O modelo por mínimos quadrados, fixando τ_1 e τ_2 , apresentou resultados de MSE razoáveis, naturalmente baixos quando idênticos aos parâmetros fornecidos. Com variações de 10% e 50%, notam-se maiores desvios da curva amostrada, ainda que apresentando um MSE relativamente baixo se comparado com os outros métodos. Para o modelo por SQP, os resultados foram menos satisfatórios. Um aumento expressivo do MSE conforme a estimativa inicial se afasta dos valores fornecidos pela ANBIMA. O método Active-Set apresenta-se como o menos eficaz, gerando o maior erro quadrático médio entre todas as estimações. Ainda que tenha indicado certa robustez em manter o MSE na mesma ordem de grandeza conforme o afastamento do valor dos parâmetros iniciais dos valores fornecido, seus valores ainda mostram-se muito superiores a todas as outras estimações. Na estimação não-linear pelo método Interior Point, os resultados mostraram boa aproximação com os dados dos vértices, como pode ser percebido na Figura 6, com variações negativas de 10% e 50% significativamente baixas, destacando este método como o mais apropriado para uma modelagem que prevê uma incerteza na estimativa inicial de parâmetros. Todas estas considerações estão evidenciadas na Tabela 3 e a implementação numérica das otimizações contou com um critério de parada de 1000 iterações

Figura 6: Comparação de Dados dos Vértices frente a Modelo Estimado por Interior Point com Diferentes Valores Iniciais



Fonte: o autor

Figura 7: Comparação de Dados dos Vértices frente a Modelo Estimado por Mínimos Quadrados + Interior Point com Diferentes Valores Iniciais



Fonte: o autor

Tabela 3: Comparação do MSE dos Métodos Abordados para Diferentes Grupos de Condições Iniciais

	MQ	Interior Point	SQP	Active Set	MQ + Interior Point
0%	8.576e-5	1.522e-4	2.200e-6	2.446e-2	2.457e-5
10%	1.351e-4	1.617e-4	2.659e-5	2.625e-2	3.880e-5
50%	6.252e-4	2.721e-4	6.815e-3	3.130e-2	1.270e-4

Por fim, o método Active-Set foi o menos eficaz, sendo incapaz de gerar curvas para variações de 50% e apresentando problemas mesmo com valores menores, conforme observado na Tabela 3. Embora tenha gerado curvas próximas com parâmetros iniciais menores, o método mostrou limitações no processo de estimação.

4.3.2 Interior Point com Estimativas Iniciais Provenientes de Mínimos Quadrados

Tendo sido feita a análise dos métodos de estimação propostos opta-se por utilizar uma abordagem híbrida entre o método dos pontos interiores e o método dos mínimos quadrados. Sendo os valores de τ_1 e τ_2 parâmetros com baixa variação absoluta ao longo da série histórica (BOLDER; STRÉLISKI, 1999) é factível apresentar valores de estimativas iniciais que enquadrem-se dentro do variação de erro inicial de parâmetros verificada neste capítulo. Ainda que não possua os menores erros quadráticos médios entre os métodos apresentados, o método dos mínimos quadrados apresentou uma aproximação dos parâmetros β para com os parâmetros fornecidos pela ANBIMA admitidos como hipoteticamente reais. Assim, os parâmetros resultantes da estimação por mínimos quadrados serão utilizados como ponto de partida para uma nova estimação, definido eles como os valores de estimativas iniciais, a fim de aumentar a robustez da segunda.

Dos métodos de estimação não-linear aqui apresentados o mais robusto para o caso analisado foi o Interior Point, tendo apresentado pouca variação do MSE conforme os parâmetros de estimativas iniciais se afastavam dos valores fornecidos pela ANBIMA.

Em vista destas considerações opta-se por utilizar o método Interior Point com estimativas iniciais advindas de uma estimação por mínimos quadrados com parâmetros τ truncados. A abordagem híbrida é então comparada com outros algoritmos e disposta na Figura 7, onde pode-se perceber uma alta aderência das curvas aos dados, comportamento que também pode ser percebido quantitativamente na Tabela 3.

A partir deste ponto inicia-se a aplicação dos métodos a valores reais amostrados, para construir um estudo de caso onde seja possível aprofundar o problema da predição da ETTJ, desenvolver-se soluções mais avançadas e tomar-se conclusões para um cenário específico que será analisado.

5 METODOLOGIA

A metodologia deste trabalho emprega, como ponto de partida, métodos de estimação discutidos no capítulo anterior, aplicando-os a dados reais. Para isso, inicia-se com uma breve discussão sobre o tratamento dos dados disponíveis, destacando as particularidades das amostras utilizadas e o motivo de selecionar intervalos diferenciados. Em seguida, define-se como dá-se o procedimento de estimação, descrevendo o método de otimização adotado e as diferentes classes de estimação consideradas. Posteriormente, propõe-se uma forma de predição baseada em funções de aproximação, obtidas a partir dos parâmetros estimados. Por fim, estabelece-se o critério para avaliar o desempenho dessas predições em comparação com uma abordagem de *Random Walk* em diferentes grupos de dados

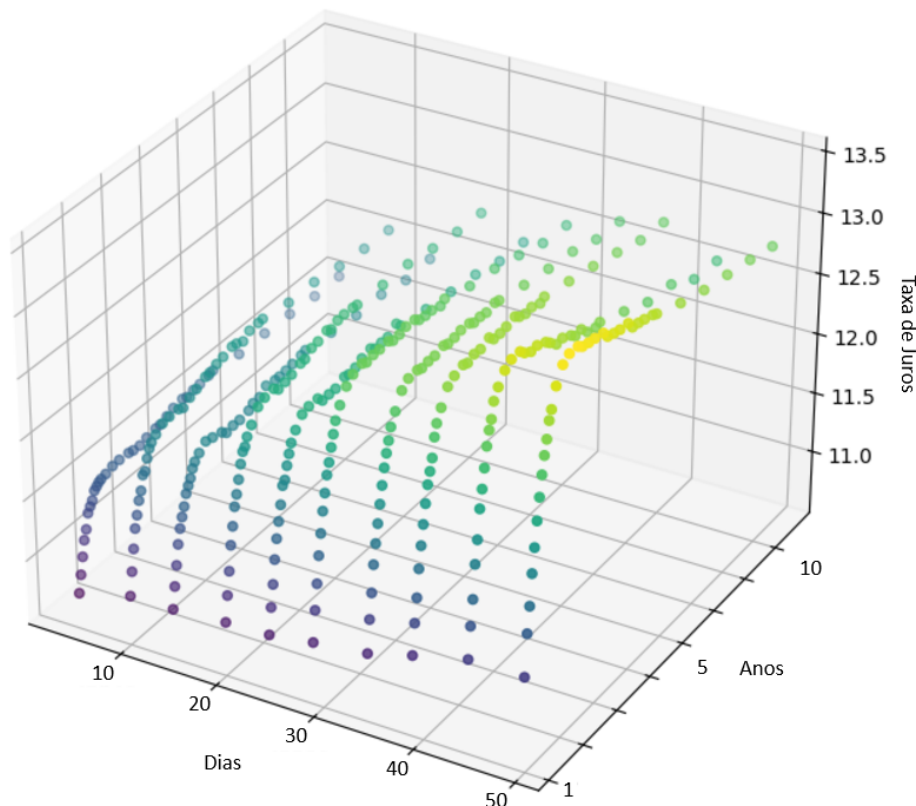
5.1 DADOS

Nesta etapa, são apresentados os dados reais referentes a contratos DI Futuro de diferentes vencimentos, negociados na bolsa brasileira (B3). Esses contratos expressam o consenso do mercado a respeito da taxa de juros futura, em função de prazos distintos. O conjunto de valores disponíveis é naturalmente distribuído de forma desigual ao longo do tempo, fato que motivou a utilização de distintos grupos de dados e de técnicas de interpolação, com o objetivo de obter amostras mais uniformes. A ideia principal é avaliar se a densidade de pontos e a forma como estão alocados ao longo do horizonte de maturidade afetam o desempenho do processo de estimação e de predição, visto que o perfil e a qualidade dos dados são tão significativos para a estimação do modelo e para a predição do mesmo (SARTORI, 2014). Por fim, tanto os dados originais quanto os tratados por interpolação são empregados em diferentes classes de estimação, viabilizando análises comparativas.

5.1.1 Dados Contratos DI Futuro

Para a etapa de estimação, utilizam-se cotações de contratos DI Futuro listados pela B3, que refletem a taxa de juros que o mercado considera adequada para cada data de liquidação. Exemplificando, o contrato DI1F25 representa a expectativa de juros para janeiro de 2025, ao passo que o contrato DI1V27 contempla o valor de juros esperado para novembro de 2027. Tais contratos fornecem uma quantidade relevante de pontos de maturidade, embora espaçados de forma desigual. As séries de preços coletadas abrangem 50 dias de negociação, compreendendo o período de 12 de setembro a 21 de novembro de 2024. Dentre esses 50 dias, os primeiros 40 dias são empregados para realizar as estimativas e os últimos 10 dias são reservados para avaliar o desempenho preditivo. A Figura 8 ilustra o comportamento de alguns desses contratos, evidenciando a variação de cada um ao longo do tempo e a natureza irregular do espaçamento em suas maturidades.

Figura 8: Cotações de contratos DI Futuro de diferentes datas futuras de negociação ao longo de 50 dias úteis



Fonte: o autor

5.1.2 Dados Interpolados

Visando-se obter resultados mais acurados procura-se tratar os dados disponíveis para facilitar o procedimento de estimação. A interpolação linear é uma técnica fundamental em análise numérica para preencher lacunas em dados discretos ou para aumentar a resolução temporal de uma série de dados. Utiliza-se uma interpolação linear para estimar valores intermediários com intervalos de 1 mês para os períodos de 2 a 10 anos no conjunto de dados disposto, visto que não há contratos DI Futuros com maturidades mensais neste período.

A interpolação consiste em estimar um valor $f(x)$ de uma função desconhecida f , baseado em dois pontos conhecidos $(x_i, f(x_i))$ e $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. O valor interpolado para um ponto x tal que $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ é dado pela equação da reta que conecta esses dois pontos.

Matematicamente, a interpolação linear é expressa como:

$$f(x) \approx f_i(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x - x_i) \quad (29)$$

onde x_i e x_{i+1} são os pontos imediatamente anterior e posterior ao ponto x onde a interpolação será realizada, com $x_i \leq x \leq x_{i+1}$; $f(x_i)$ e $f(x_{i+1})$ são os valores conhecidos da função nos pontos x_i e x_{i+1} ; a fração $\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$ representa a inclinação da reta que conecta esses dois pontos.

Ao final da implementação da interpolação obtém-se um conjunto de dados igualmente espaçados em 1 mês para todo o período, representando maturidades intermediárias entre as maturidades comercializadas no mercado brasileiro. Dessa forma possibilita-se a implementação de classes de estimação com dados espaçados entre 1, 2 e 3 meses.

5.2 ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

O procedimento de estimação deste trabalho consiste em definir o método de otimização e, então, aplicá-lo a diferentes composições de dados, a fim de verificar o impacto de cada conjunto na qualidade do ajuste. Para isso, estabelecem-se quatro classes principais de estimação. A primeira, denominada PP (por partes), utiliza os dados no formato original, sem interpolação, mas emprega um procedimento mais elaborado ao subdividir o horizonte de maturidade em intervalos distintos. As demais classes, designadas 1M, 2M e 3M, trabalham com dados resultantes de uma interpolação linear, com amostras igualmente espaçadas em 1, 2 e 3 meses, respectivamente. Além disso, para contemplar horizontes diferentes, empregam-se essas quatro classes tanto em dados de até 10 anos de maturidade quanto em dados de até 5 anos, permitindo a análise de sua eficácia em cenários de médio e longo prazo.

5.2.1 Método Interior Point com Valores Iniciais Provenientes de Mínimos Quadrados

O método de otimização adotado é realizado em duas etapas. Primeiro, aplica-se o método dos mínimos quadrados para estimar os parâmetros do modelo de Svensson (17), fixando provisoriamente os valores de τ_1 e τ_2 . Esses valores iniciais são escolhidos com base em aproximações e arredondamentos de dados históricos da ANBIMA, sendo eles 1,5 e 0,5 respectivamente, enquanto as componentes β são ajustadas por regressão linear. Ao final dessa etapa, obtêm-se valores iniciais para os parâmetros que minimizam o erro dentro dessa condição de τ fixo. Em seguida, faz-se uso do algoritmo *Interior Point* para refinar a estimação de todos os parâmetros de modo conjunto, incluindo τ_1 e τ_2 . Essa segunda fase é iterativa e busca reduzir ainda mais o erro, obedecendo a um limite de 10.000 iterações, definido após testes que mostraram não haver ganhos significativos ao extrapolar esse número. Assim, garante-se maior estabilidade ao processo, pois parte-se de estimativas já razoáveis, diminuindo a chance de convergência para mínimos locais inapropriados.

5.2.2 Classes de Estimação

São propostas para este trabalho diferentes classes de estimação visando-se comparar diferentes composições dos dados. Nas classes 1M, 2M, e 3M utiliza-se dos dados interpolados com intervalos de amostragem diferentes, ao passo que na classe PP utiliza-se dos dados puros não tratados, mas com um procedimento de implementação do algoritmo de otimização por partes.

5.2.2.1 Classes 1M, 2M e 3M

As classes 1M, 2M e 3M são provenientes de uma interpolação linear simples. Uma vez interpolados os dados conforme a seção 4.1.2 utiliza-se dos mesmos para amostrar

valores com intervalos diferentes. A classe 1M requer a interpolação de todos os períodos de amostras, visto que nos horizontes futuros de 2 a 5 anos só dispõe-se de dados espaçados trimestralmente e nos horizontes de 6 a 10 anos espaçados anualmente. A classe 2M, pelo mesmo motivo necessita de interpolação nos mesmos dois períodos, ao passo que a classe 3M requer apenas a interpolação dos dados a partir de 6 anos e o descarte dos dados iniciais do primeiro ano do horizonte futuro que é amostrado mensalmente.

5.2.2.2 Classe PP

Na classe PP, os dados são usados sem qualquer tipo de regularização, mas, como há diferenças consideráveis no espaçamento dos contratos, adota-se uma segmentação em três períodos. No primeiro ano, em que dispõe-se de maior quantidade de pontos mensais, realiza-se uma estimação local. Do segundo ao quinto ano, quando as observações são trimestrais, faz-se outra estimação local. Por fim, do sexto ao décimo ano, com dados anuais, efetua-se uma terceira estimação. Em cada caso, aplicam-se o método dos mínimos quadrados e, depois, o algoritmo *Interior Point* para ajustar o modelo de Svensson (17) aos dados daquele intervalo. Uma vez obtidas as três curvas parciais, procede-se a uma otimização geral, consolidando as partes em uma única curva que represente todo o horizonte de 10 anos. Os parâmetros do modelo encontrados em cada intervalo estão dispostos na Tabela 4. O mesmo procedimento repete-se para o horizonte de 5 anos, respeitando as divisões temporais adequadas a esse intervalo. A Figura 9 exhibe o resultado do ajuste por partes no caso dos 10 anos, ao passo que a Figura 10 apresenta o mesmo processo para o período de 5 anos.

Tabela 4: *Parâmetros Estimados para Cada Intervalo para Amostras de até 10 Anos*

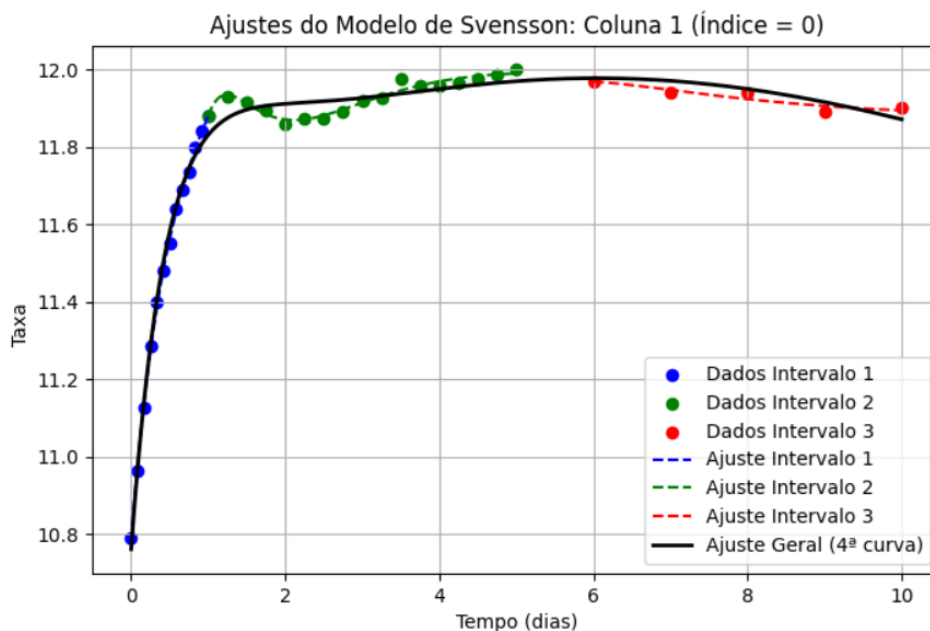
Intervalo	β_0	β_1	β_2	β_3	τ_1	τ_2
Curva 1 (Intervalo 1)	17.179	-6.397	-12.324	6.884	1.104	0.657
Curva 2 (Intervalo 2)	14.858	-13.911	6.487	28.963	1.109	0.316
Curva 3 (Intervalo 3)	11.894	42.350	-12.232	-121.315	1.735	0.433
Curva 4 (Intervalo Completo)	8.563	2.198	6.884	2.557	6.740	0.535

5.3 PREDIÇÃO

A predição do comportamento futuro da curva de juros é desenvolvida a partir de funções de aproximação que descrevem a evolução temporal dos parâmetros estimados. Para cada dia, registra-se um vetor de parâmetros do modelo de Svensson. Conforme esse vetor varia no tempo, é possível ajustar modelos matemáticos, tais como funções lineares, polinomiais ou senoidais, que capturem a tendência de cada parâmetro β e τ . Uma vez que essas funções são definidas, basta extrapolá-las para instantes futuros, fornecendo estimativas dos parâmetros em datas posteriores às observações.

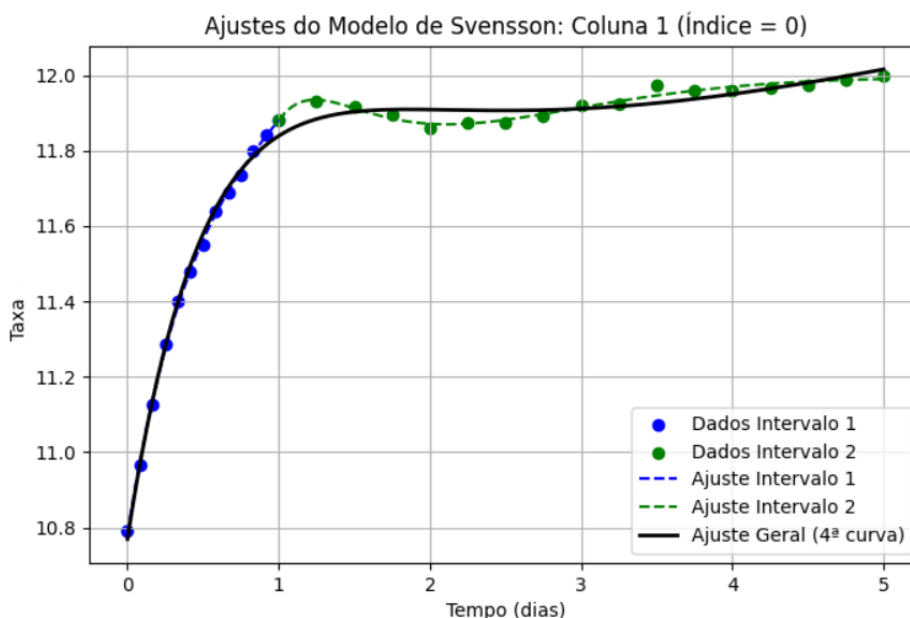
Na análise, considera-se ainda a influência do tamanho da amostra histórica. Assim, o procedimento é testado com diferentes quantidades de dias passados, como 5, 10, 20 e 40, para verificar o efeito da extensão da base de estimação sobre a acurácia preditiva. Além disso, implementa-se um modelo de *Random Walk* que toma simplesmente o valor

Figura 9: *Estimação por Partes da Classe PP para Dados de Contratos DI Futuro com Vencimentos de até 10 anos*



Fonte: o autor

Figura 10: *Estimação por Partes da Classe PP para Dados de Contratos DI Futuro com Vencimentos de até 5 anos*



Fonte: o autor

mais recente de cada parâmetro como previsão para o dia seguinte. Esse método funciona como um *benchmark*, permitindo avaliar se as funções de aproximação propostas de fato superam a estratégia trivial de manter os parâmetros inalterados.

As oscilações observadas nos 40 dias iniciais de dados são significativas, tanto no nível das taxas quanto na forma da curva ao longo dos vencimentos. Tal comportamento sugere a necessidade de tratar cada parâmetro separadamente. Por isso, os valores de β e τ

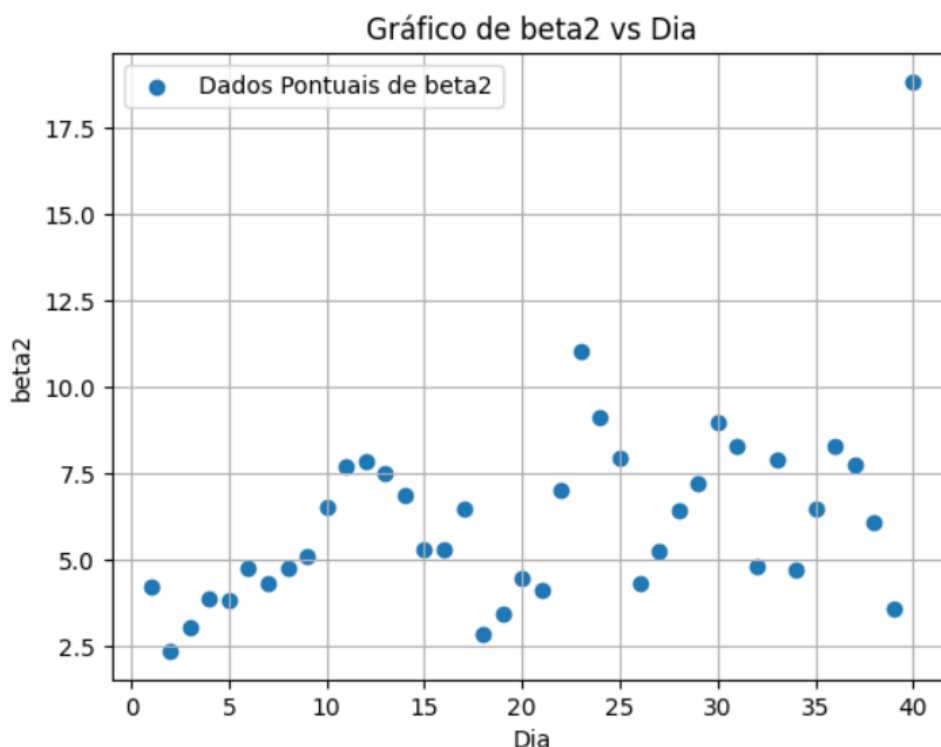
são analisados como séries temporais. Cada série, por sua vez, é aproximada por diferentes modelos e aquele que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos é escolhido para a projeção. Em seguida, gera-se a curva de juros correspondente, com base nas projeções desses parâmetros.

A qualidade das previsões é aferida comparando-se as curvas projetadas com os dados efetivamente registrados nos 10 dias seguintes. Nesse processo, são calculadas medidas como o erro quadrático médio, possibilitando investigar se a abordagem proposta oferece vantagens em relação ao *Random Walk*. Por fim, efetua-se uma comparação entre as previsões para os cenários de 5 e 10 anos, avaliando se o horizonte de maturidade afeta significativamente o desempenho do método.

5.3.1 Predição por Funções de Aproximação dos Parâmetros

Ao plotar os parâmetros β e τ ao longo do intervalo de estimação pode-se perceber que os parâmetros apresentam uma relevante variação ao longo do tempo. Nas Figuras 13 e 14 estão dispostos os parâmetros β_2 e τ_1 para a classe de estimação 1M no intervalo de 40 dias. Nelas é possível perceber o comportamento significativamente variável de cada parâmetro respectivo assim como a independência de variação entre eles.

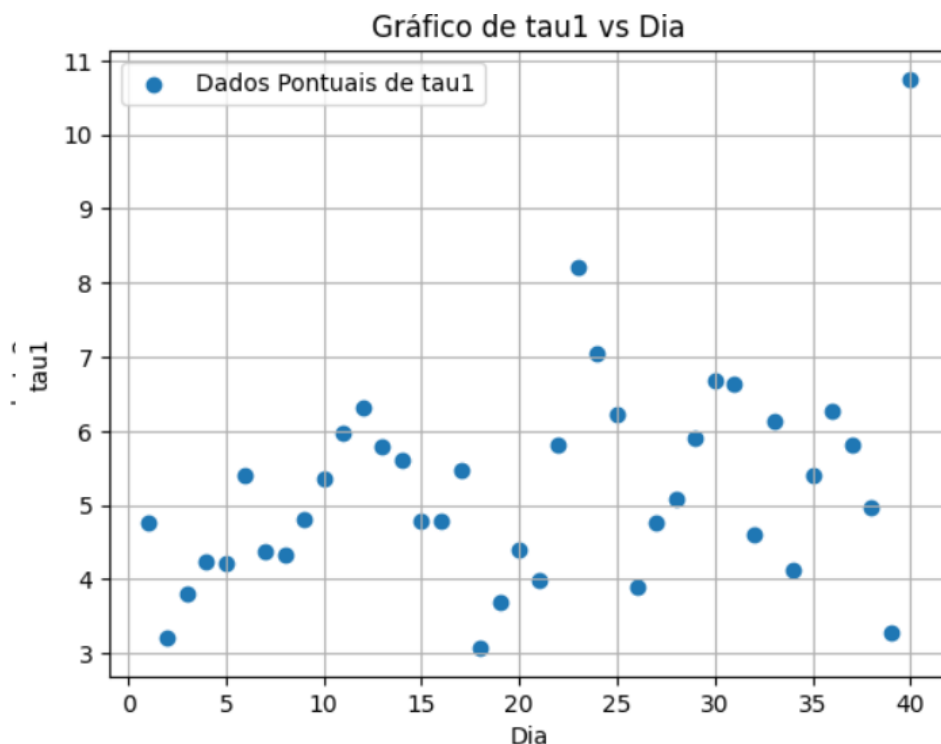
Figura 11: Beta2 para o Intervalo de 40 Dias



Fonte: o autor

Procura-se então identificar tendências claras como faixas de valores limítrofes ou funções de tendência aproximadamente definidas. Em desenvolvendo tal análise é de interesse utilizar destas informações para modelar o comportamento futuro dos parâmetros isoladamente, ao invés de utilizar-se de um método de estimação para calcular toda a curva baseado em dados relativos as taxas de juros, visto que, naturalmente, não dispõe-se

Figura 12: *Tau1 para o Intervalo de 40 Dias*



Fonte: o autor

de amostras de cotações de Contratos DI Futuros de instantes futuros (ainda que o nome possa sugerir o contrário).

Visa-se, dessa forma, desenvolver um algoritmo que selecione uma função de comportamento suficientemente aproximada dos parâmetros correspondentes aos valores reais da curva de juros. O método de seleção de função de aproximação para realizar a predição analisa a evolução temporal dos parâmetros β e τ , ajustando modelos matemáticos aos dados observados diariamente. Utiliza-se dos modelos linear, polinomial de segunda ordem e terceira ordem, além de uma função senoidal, para capturar tendências lineares, não lineares e possíveis periodicidades nos dados. A estimação é realizada minimizando a soma dos quadrados dos resíduos (LEVENBERG, 1944):

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2. \quad (30)$$

onde y_i são os valores observados, $f(x_i)$ é o modelo ajustado e n é o número de observações. Ao iterar sobre cada função de ajuste, o código calcula o erro quadrático associado e seleciona o modelo que minimiza este erro, garantindo o melhor ajuste estatístico possível aos dados observados.

A partir dessas funções relativas aos parâmetros, então, podem ser traçadas curvas de juros para instantes futuros.

5.3.2 *Random Walk*

O modelo de *Random Walk* oferece uma abordagem simples e robusta para previsão de séries temporais, sendo especialmente relevante como referência para a eficiência preditiva

de modelos mais complexos. Ele consiste em simplesmente utilizar um valor anterior como valor de predição para um instante futuro. Esse modelo é comumente utilizado como *benchmark* em avaliações de desempenho de modelos preditivos. Sua simplicidade permite comparar se modelos mais sofisticados oferecem ganhos significativos de precisão (FAMA, 1970). No caso deste trabalho utiliza-se simplesmente os parâmetros da última estimação para traçar uma curva futura, a fim de compará-la com as predições provenientes de outras classes de estimações, servindo como balizador para as predições. A classe relativa ao procedimento de *Random Walk* será chamada de RW.

6 RESULTADOS

Neste capítulo são implementadas as metodologias abordadas no capítulo anterior buscando-se resultados que tragam conclusões acerca das melhores estratégias para estimar e prever a ETTJ dentre as classes aqui abordadas.

São desenvolvidos os procedimentos de estimação e predição para todas as classes propostas e para os dados de contratos DI Futuro de vencimentos de 5 e 10 anos, procurando-se assim mapear o comportamento das classes de estimação de acordo com o interesse, seja ele predição ou estimação, curto e médio ou longo prazo.

Por fim os resultados são discutidos a fim de trazer clareza para toda implementação proposta.

6.1 ESTIMAÇÃO

Foram realizadas estimacões conforme definido na seção 5.2 e seus resultados respectivos podem ser observados nas Figuras 13 e 14. Os procedimentos de estimacão foram aplicados para todas as classes para tomar-se conclusões acerca dos seus comportamentos ao longo das amostras de cada um dos 40 dias. Percebe-se, de maneira geral que as classes de estimacão apresentaram valores de erro quadrático médio muito semelhante entre si, tanto para o grupo de dados de maturidades de até 5 anos quanto para o de até 10 anos. Tais valores podem ser vistos na Tabela 5.

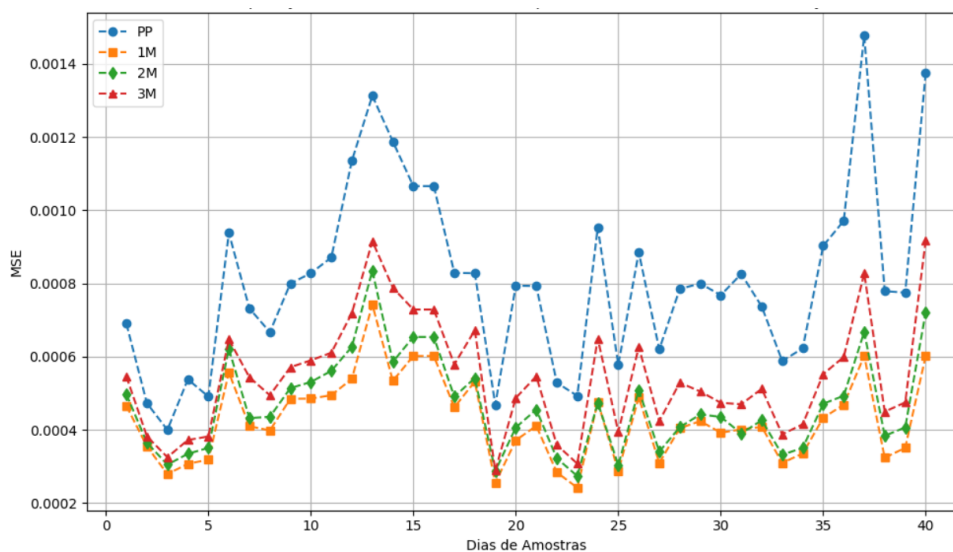
Na Figura 13, ainda, nota-se que a classe PP apresentou uma acurácia de estimacão acentuadamente inferior em relação as outras classes. Pode-se perceber também uma tendência sólida de melhora na estimacão conforme aumenta-se a frequência de amostragem, tendo a classe 1M apresentado valores de erro quadrático médio menores que a 2M em todo o período de dados. Tal comportamento é replicado de forma muito semelhante da classe 2M para a 3M.

Além disso, analisando também a Figura 14, pode-se perceber que as classes de estimacão atingiram níveis de erro quadrático médio muito semelhantes para os grupos de dados de vencimentos de até 5 e 10 anos, ressaltando a classe PP que apresenta uma melhora significativa na estimativa quando aplicada a dados de vencimentos de até 5 anos.

6.2 PREDIÇÃO

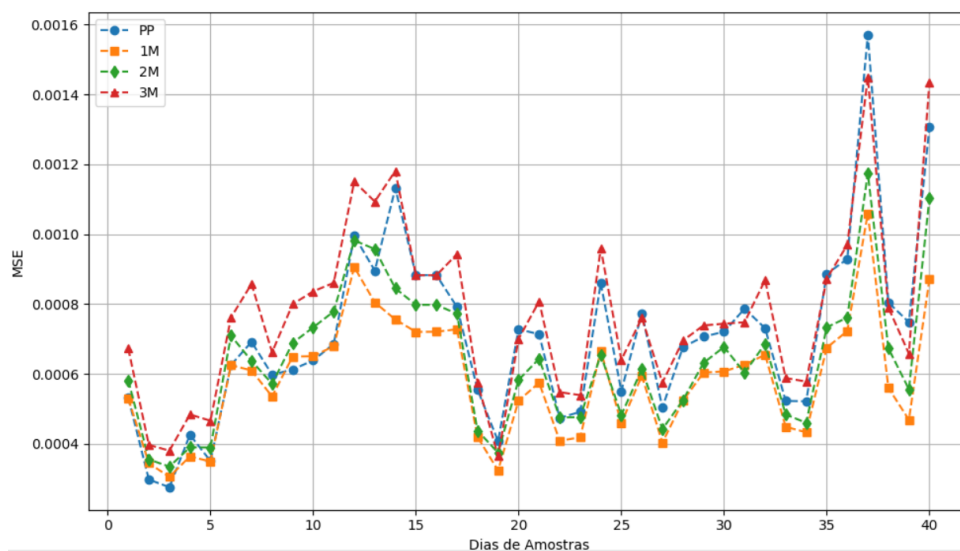
Foram feitas estimativas para todos os classes definidas, para dados com diferentes maturidades, para todos os dias de amostras disponíveis e para cada parâmetro, como descrito na seção 5.2. A partir dessas estimacões aplica-se a metodologia proposta na seção 5.3.1 para definir funções de aproximação apropriadas em termos de tamanho de amostra

Figura 13: Erro Quadrático Médio para Estimação de Todas Classes em Todas as Amostras para Dados de Contratos DI Futuro de Maturidades de até 10 Anos



Fonte: o autor

Figura 14: Erro Quadrático Médio para Estimação de Todas Classes em Todas as Amostras para Dados de Contratos DI Futuro de Maturidades de até 5 Anos



Fonte: o autor

utilizado. Tendo-se definida uma função de aproximação para cada parâmetro e para cada classe, utiliza-se delas para gerar curvas para instantes futuros para cada classe e avalia-se a sua eficácia respectiva em comparação com o *Random Walk* conforme definido na seção 5.3.2

Tabela 5: Valores de MSE para Diferentes Classes de Estimação (Maturidades de até 5 anos)

Dia	5 Anos				10 Anos			
	PP	1M	2M	3M	PP	1M	2M	3M
1	0.00053	0.00053	0.00058	0.00067	0.00069	0.00122	0.00050	0.00055
2	0.00030	0.00034	0.00036	0.00040	0.00047	0.00036	0.00037	0.00038
3	0.00028	0.00031	0.00033	0.00038	0.00040	0.00028	0.00031	0.00033
4	0.00043	0.00036	0.00039	0.00048	0.00054	0.00031	0.00033	0.00037
5	0.00035	0.00035	0.00039	0.00047	0.00049	0.00032	0.00035	0.00038
6	0.00063	0.00063	0.00071	0.00076	0.00094	0.00056	0.00062	0.00065
7	0.00069	0.00061	0.00064	0.00086	0.00073	0.00041	0.00043	0.00054
8	0.00060	0.00054	0.00057	0.00066	0.00067	0.00040	0.00044	0.00049
9	0.00061	0.00065	0.00069	0.00080	0.00080	0.00049	0.00051	0.00057
10	0.00064	0.00065	0.00073	0.00084	0.00083	0.00049	0.00053	0.00059
11	0.00069	0.00068	0.00078	0.00086	0.00087	0.00047	0.00056	0.00061
12	0.00100	0.00091	0.00098	0.00115	0.00114	0.00054	0.00063	0.00072
13	0.00090	0.00080	0.00096	0.00109	0.00131	0.00074	0.00083	0.00092
14	0.00113	0.00076	0.00085	0.00118	0.00119	0.00053	0.00059	0.00079
15	0.00088	0.00072	0.00080	0.00088	0.00107	0.00060	0.00177	0.00073
16	0.00088	0.00072	0.00080	0.00088	0.00107	0.00060	0.00065	0.00073
17	0.00079	0.00073	0.00077	0.00094	0.00083	0.00046	0.00049	0.00058
18	0.00056	0.00042	0.00044	0.00058	0.00083	0.00053	0.00054	0.00067
19	0.00041	0.00032	0.00037	0.00037	0.00047	0.00025	0.00029	0.00029
20	0.00073	0.00052	0.00058	0.00070	0.00079	0.00037	0.00041	0.00049
21	0.00071	0.00058	0.00064	0.00081	0.00079	0.00041	0.00046	0.00055
22	0.00047	0.00041	0.00048	0.00055	0.00053	0.00028	0.00032	0.00036
23	0.00049	0.00042	0.00048	0.00054	0.00049	0.00024	0.00027	0.00031
24	0.00086	0.00067	0.00066	0.00096	0.00095	0.00048	0.00048	0.00065
25	0.00055	0.00046	0.00048	0.00064	0.00058	0.00029	0.00030	0.00039
26	0.00077	0.00059	0.00061	0.00076	0.00089	0.00049	0.00051	0.00063
27	0.00050	0.00040	0.00044	0.00058	0.00062	0.00031	0.00034	0.00042
28	0.00068	0.00052	0.00053	0.00070	0.00079	0.00040	0.00041	0.00053
29	0.00071	0.00060	0.00063	0.00074	0.00080	0.00042	0.00044	0.00050
30	0.00072	0.00061	0.00068	0.00074	0.00077	0.00039	0.00044	0.00047
31	0.00079	0.00063	0.00060	0.00075	0.00083	0.00040	0.00039	0.00047
32	0.00073	0.00066	0.00069	0.00087	0.00074	0.00041	0.00043	0.00051
33	0.00052	0.00045	0.00048	0.00059	0.00059	0.00031	0.00033	0.00039
34	0.00052	0.00043	0.00046	0.00058	0.00062	0.00034	0.00035	0.00042
35	0.00089	0.00068	0.00073	0.00087	0.00090	0.00043	0.00047	0.00147
36	0.00093	0.00072	0.00076	0.00097	0.00097	0.00047	0.00049	0.00060
37	0.00157	0.00106	0.00117	0.00145	0.00148	0.00060	0.00067	0.00083
38	0.00081	0.00056	0.00067	0.00079	0.00078	0.00032	0.00038	0.00045
39	0.00075	0.00047	0.00056	0.00066	0.00078	0.00035	0.00041	0.00047
40	0.00131	0.00087	0.00110	0.00143	0.00138	0.00060	0.00072	0.00092

6.2.1 Funções de Aproximação

Aplica-se a metodologia descrita no capítulo anterior ao parâmetro β_2 , considerando estimativas da classe 2M baseadas em 5 e 40 amostras, sempre usando dados de contratos DI Futuro com vencimentos de até 10 anos a fim de avaliar em que medida o tamanho da amostra impacta a qualidade das previsões via funções de aproximação. Como ilustração, são apresentados os resultados para o parâmetro β_2 nas Figuras 15 e 16. Posteriormente, repetiu-se o procedimento para todos os parâmetros e também para estimativas de 10 e 20 amostras, resultando em um conjunto abrangente de funções preditivas capazes de contemplar cada cenário. Ainda nas Figuras 15 e 16 são visualizadas diferentes funções de ajuste e os respectivos erros quadráticos médios, tanto para 5 quanto para 40 amostras, enquanto as Tabelas 6 e 7 exibem as equações aproximadas e os valores estimados para cada caso. Tanto nos outros parâmetros quanto para outros tamanhos de amostra, a função polinomial de terceira ordem apresentou o menor MSE, se mostrando a mais apropriada para aproximação no caso dos dados aqui utilizados. Em seguida, tendo-se aplicado essas funções em todos os parâmetros do modelo, permitiu-se prever valores futuros e analisar seu desempenho. Para tanto, comparam-se as previsões da classe 2M com dados efetivamente observados, calculando-se o erro quadrático médio ao longo de 10 dias úteis, de 11 a 22 de novembro.

Tabela 6: Funções de Ajuste e MSE para Estimativa de β_2 de 5 Amostras

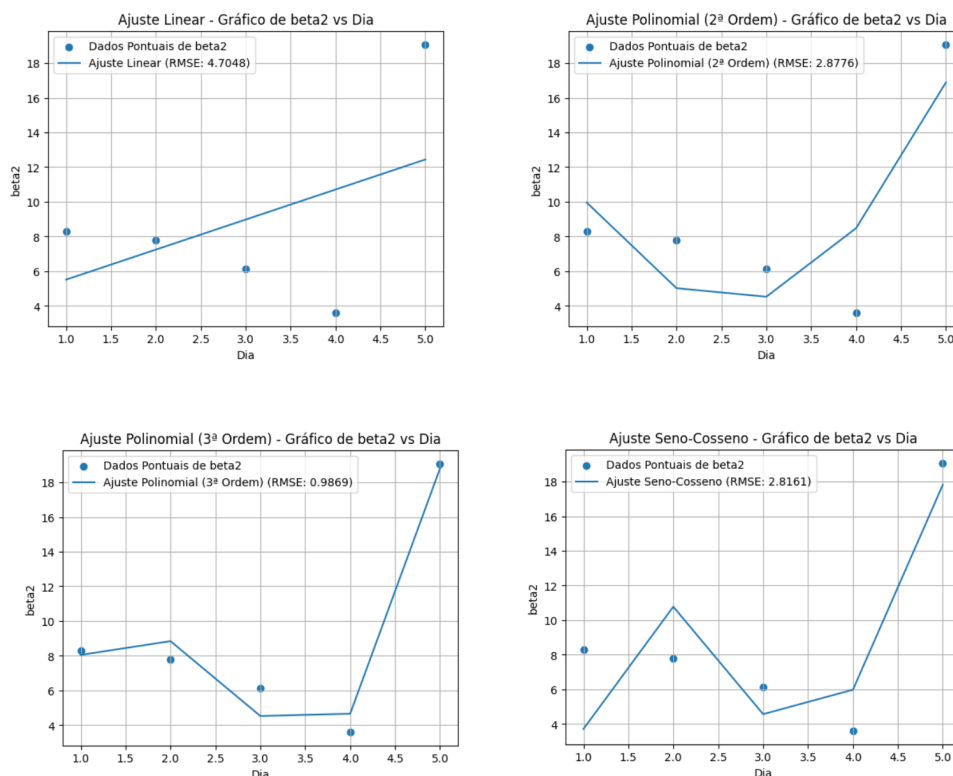
5 amostras	Função	MSE
Linear	$f(x) = 1.73162x + 3.78102$	3,5041
Polinomial 2ª Ordem	$f(x) = 2.22441x^2 - 11.61487x + 19.35194$	2,8776
Polinomial 3ª Ordem	$f(x) = 1.59280x^3 - 12.11082x^2 + 25.97532x - 7.40718$	0,9869
Seno-Cosseno	$f(x) = 1.48213e^3 \sin(1.74922e^{-3}x) - 6.00885 \cos(1.75869x)$	2,8161

Tabela 7: Funções de Ajuste e MSE para Estimativa de β_2 de 40 Amostras

40 amostras	Função	MSE
Linear	$f(x) = 0.11414x + 3.89028$	2,4877
Polinomial 2ª Ordem	$f(x) = 3.99359e^{-4}x^2 + 9.77747e^{-2}x + 4.00489$	2,4872
Polinomial 3ª Ordem	$f(x) = 6.00436e^{-4}x^3 - 3.65274e^{-2}x^2 + 0.71088064x + 1.78190$	2,3798
Seno-Cosseno	$f(x) = 1.12850 \sin(0.85421x) - 0.12959 \cos(0.87914x)$	5.7864S

Os resultados iniciais indicam que ampliar o tamanho da série histórica eleva significativamente a precisão dos modelos, como sintetizado na Tabela 8. No caso de apenas 5 dias de amostras, verificou-se um comportamento inviável do ponto de vista econômico, pois as curvas de juros apresentaram variações abruptas que levaram a incrementos próximos a 500 pontos percentuais em apenas 10 dias. Embora o erro quadrático tenha sido pequeno nas primeiras previsões ele foi pior que a previsão por *Random Walk* em todos os dias do período de predição, atingindo-se valores de MSE finais da ordem de 10^2 , evidenciando falta de robustez. Na Figura 17, esse fenômeno aparece de forma clara, indicando que a amostra de 5 dias não é suficiente para capturar a tendência do mercado. Com 10 dias de dados, houve uma melhora notável, especialmente nos primeiros dias de

Figura 15: Diferentes Funções de Ajuste para β_2 com Amostras de 5 Dias



Fonte: o autor

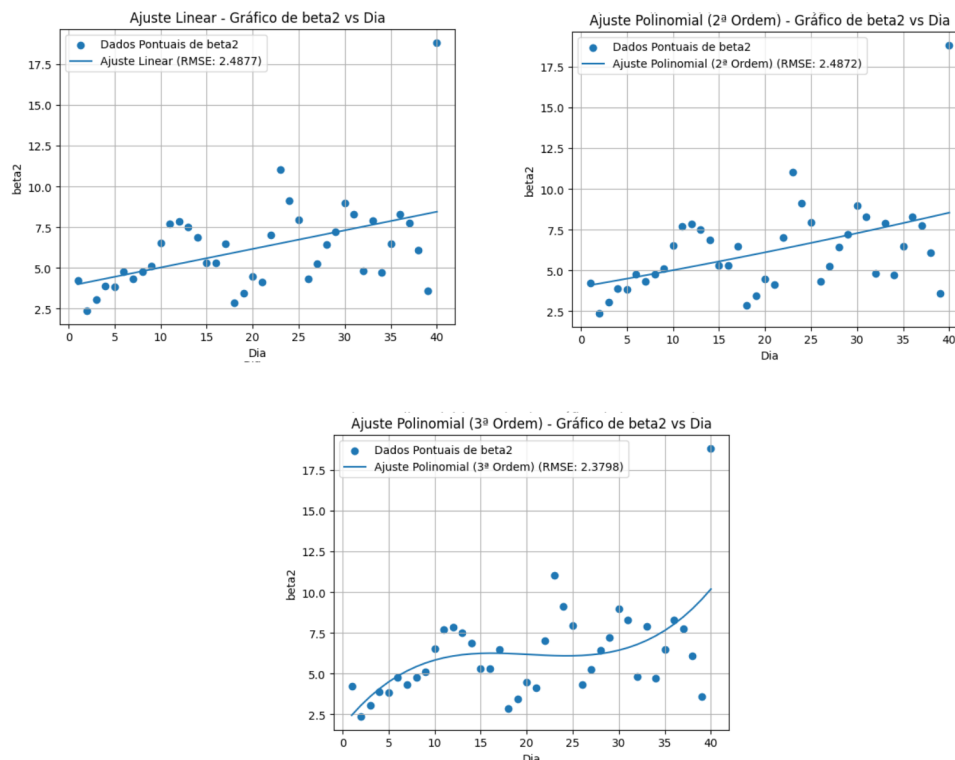
predição; ainda assim, as curvas mantiveram flutuações mais intensas conforme projetavam-se horizontes de prazo maiores, o que sugere limitações do modelo para previsões mais extensas.

Tabela 8: Valores de MSE para Predições 2M Funções de Aproximação com Diferentes Períodos de Dias

Dia	40 dias	20 dias	10 dias	5 dias
1	0.226	0.213	0.260	0.427
2	0.234	0.286	0.602	3.310
3	0.418	0.396	1.318	13.476
4	1.308	0.344	2.566	34.982
5	1.333	0.822	3.069	68.656
6	1.963	1.283	3.665	106.841
7	2.224	2.250	4.637	143.498
8	1.055	5.487	3.900	174.017
9	0.995	8.707	4.491	194.695
10	1.336	11.673	5.683	205.884

Quando passa-se a 20 dias de amostras, ainda observa-se uma melhoria na aproximação das curvas, mas ainda não passam a reproduzir o padrão empírico dos contratos de juros em horizontes mais longos, apesar de apresentar maior estabilidade nos horizontes previstos. Conforme ilustrado na Figura 17, a divergência entre o que foi predito e os valores reais tornou-se menos acentuada, ainda que longe de ser majoritariamente eliminada

Figura 16: Diferentes Funções de Ajuste para β_2 com Amostras de 40 Dias



Fonte: o autor

em horizontes futuros mais longos.

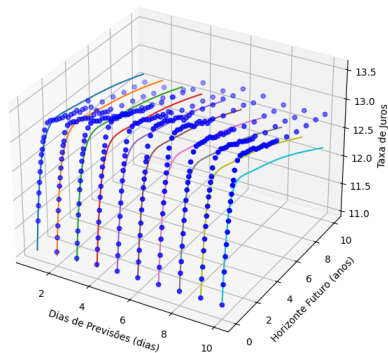
Pode-se perceber na Tabela 8 que o erro quadrático médio da predição utilizando-se de 20 amostras não é inferior à predição utilizando 10 amostras em todos os instantes de previsto, contudo, em horizontes mais curtos de até 7 dias o erro quadrático médio mantém-se solidamente inferior na predição utilizando 20 amostras. Tal fato corrobora com a tendência de diminuição do erro quadrático médio das predições conforme aumenta-se o número de amostras utilizado para traçar as funções de aproximação.

Além disso, a estratégia com 40 dias despontou como a mais consistente em termos de qualidade e estabilidade. As curvas mantiveram-se próximas aos valores observados ao longo de todo o intervalo de predição, com oscilações suaves e coerentes, resultando no menor erro médio acumulado ao longo do período. Essa maior confiabilidade foi reforçada tanto pela análise qualitativa do formato da curva quanto pelos indicadores quantitativos presentes na Tabela 8, visto que ainda que a predição utilizando 40 amostras não tenha obtido os menores erros quadráticos médios em todas os instantes futuros ela não apresenta o caráter explosivo presente nas outras predições.

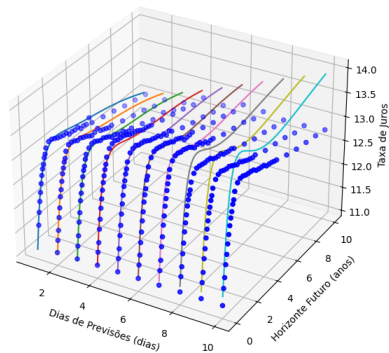
É fundamental reconhecer que o procedimento aqui ilustrado, embora tenha mostrado evoluções significativas ao aumentar-se o tamanho da série para 40 dias, pode e deve ser aplicado a intervalos de dados ainda mais longos, capazes de capturar flutuações de horizonte mais amplo, potenciais sazonalidades ou regimes econômicos distintos. A presente análise tem como objetivo demonstrar a forma de avaliar o desempenho preditivo em função da quantidade de amostras, possibilitando, em aplicações futuras, a investigação de cenários com séries históricas muito maiores. Essa ampliação poderá revelar dinâmicas adicionais da curva de juros e fornecer resultados mais robustos.

Figura 17: Comparação das Curvas Preditas Baseadas em Funções de Aproximação Provenientes de Diferentes Tamanhos de Amostras

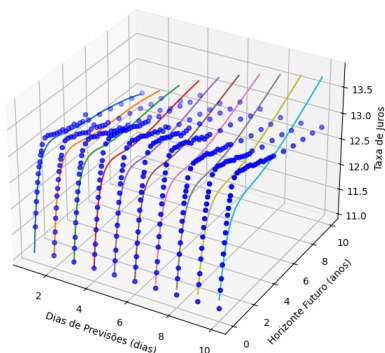
Predição para os Próximos 10 Dias (40 Amostras)



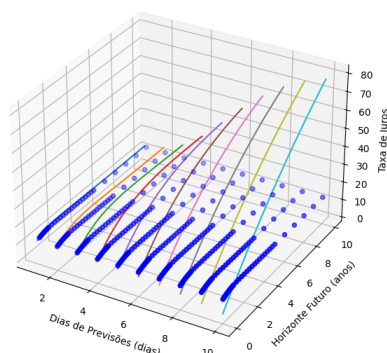
Predição para os Próximos 10 Dias (20 Amostras)



Predição para os Próximos 10 Dias (10 Amostras)



Predição para os Próximos 10 Dias (5 Amostras)



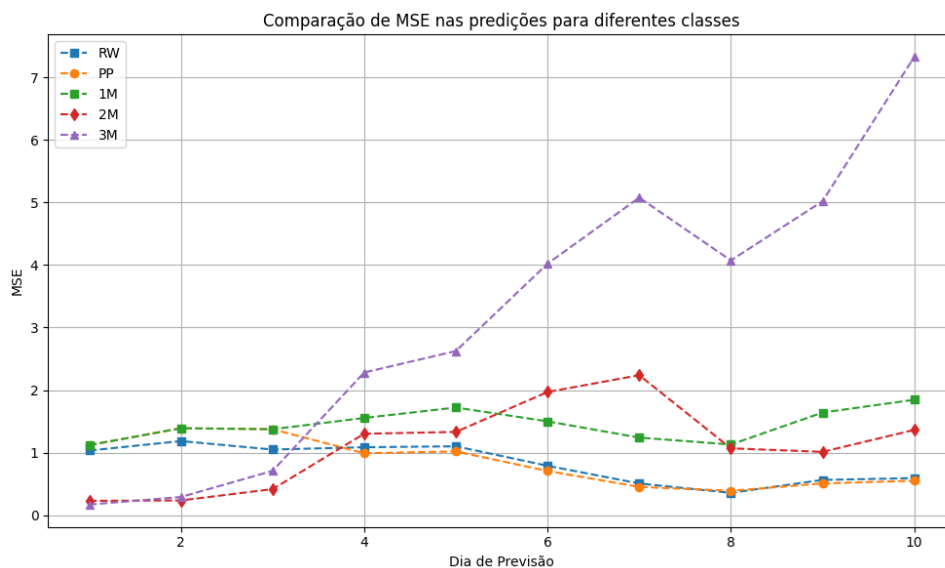
Fonte: o autor

Tendo sido implementadas as previsões para as diferentes classes de estimação, considerando dados com maturidades de até cinco e dez anos, procede-se à comparação dos erros quadráticos médios dessas previsões ao longo de um horizonte de dez dias futuros. Em um primeiro momento, verifica-se que a precisão das previsões não está necessariamente vinculada ao desempenho da classe de estimação. Esse fato confirma a importância tanto da qualidade dos dados utilizados quanto da complexidade do modelo de previsão, evidenciando que bons resultados na estimação não traduzem, de modo automático, em acurácia de longo prazo.

A análise da Figura 18 mostra que a previsão resultante da classe 3M, embora tenha obtido estimativas satisfatórias para ambas as faixas de maturidade, exibe um crescimento acentuado do erro quadrático médio à medida que o prazo de previsão avança. Apesar de alcançar resultados promissores nos três primeiros dias, superando o modelo de *Random Walk* nesse intervalo, suas vantagens dissipam-se gradualmente. Também nota-se, na Figura 19, que a classe 1M, responsável pelas estimativas mais eficazes dentre todas, não consegue superar o *Random Walk* em nenhum dos dez dias futuros quando empregada em dados de maturidade de até dez anos, revelando sua limitação prática nesse cenário específico.

De modo semelhante, a classe 2M, apesar de apresentar erros menores do que o *Random Walk* nos primeiros dias, perde essa vantagem a partir do quarto dia, o que reforça a necessidade de avaliar cada classe em função da extensão temporal da previsão. Por

Figura 18: *MSE de Previsões de Todas as Classes de Estimação para Dados de Maturidades de até 10 anos*



Fonte: o autor

outro lado, merece destaque o fato de a classe PP, que obteve o pior resultado global de estimação para maturidades de até dez anos, alcançar os menores valores acumulados de MSE em boa parte dos dias a partir do quarto dia, superando o *Random Walk* na maior parte desse período. Ainda assim, a diferença não é suficientemente expressiva para caracterizar a classe PP como uma opção recomendável de predição em horizontes futuros maiores, como observa-se na Tabela 9.

Tabela 9: *Valores de MSE para Diferentes Previsões com Dados de Maturidades de até 10 Anos*

Dia	PP	1M	2M	3M	RW
1	1.120	1.120	0.229	0.170	1.033
2	1.390	1.390	0.235	0.290	1.184
3	1.374	1.374	0.416	0.708	1.049
4	0.989	1.554	1.302	2.281	1.086
5	1.019	1.721	1.331	2.624	1.101
6	0.707	1.500	1.969	4.020	0.790
7	0.452	1.240	2.238	5.076	0.507
8	0.389	1.130	1.069	4.072	0.357
9	0.507	1.640	1.012	5.019	0.563
10	0.551	1.845	1.363	7.326	0.593

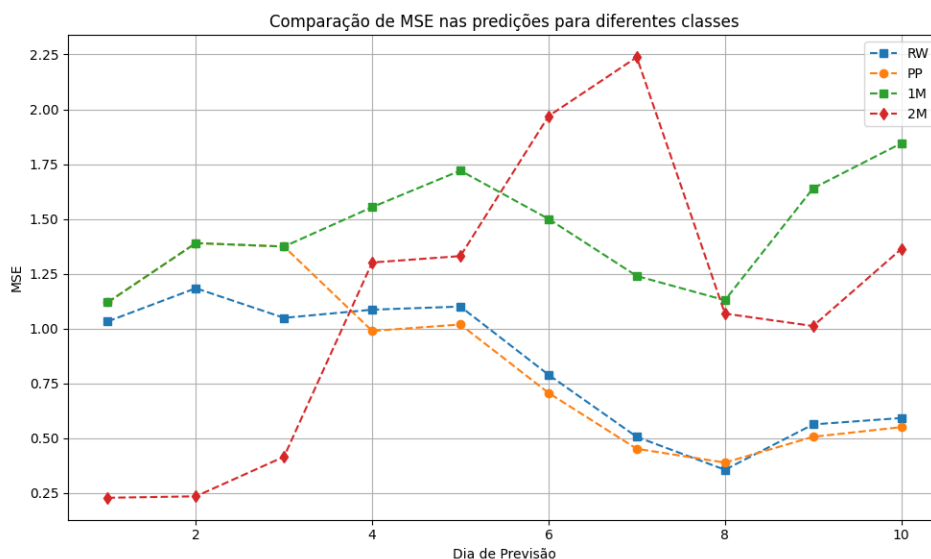
Para os dados de vencimentos de até cinco anos, as conclusões gerais repetem-se na medida em que a eficiência na estimação não determina, por si só, um bom desempenho na predição. A Figura 20 revela que a classe PP, embora tenha apresentado estimativas razoáveis, não consegue manter um comportamento confiável quando prolonga-se o horizonte de previsão, pois exhibe crescimento contínuo do MSE e não supera o *Random Walk* em nenhum momento. Nas outras três classes, há um padrão de erro quadrático médio mais baixo nos primeiros três dias de previsão, superando o *Random Walk*, mas essa vantagem

perde-se a partir do quarto dia na maioria dos casos, com exceção da classe 2M, que mantém resultados superiores até o quinto dia. Essa particularidade faz da 2M a alternativa mais promissora dentre as classes avaliadas, ainda que as melhorias sejam pontuais e dependam do comportamento do mercado no período estudado. Tais resultados podem ser observados na Tabela 10

Tabela 10: Valores de MSE para Diferentes Predições com Dados de Maturidades de até 5 Anos

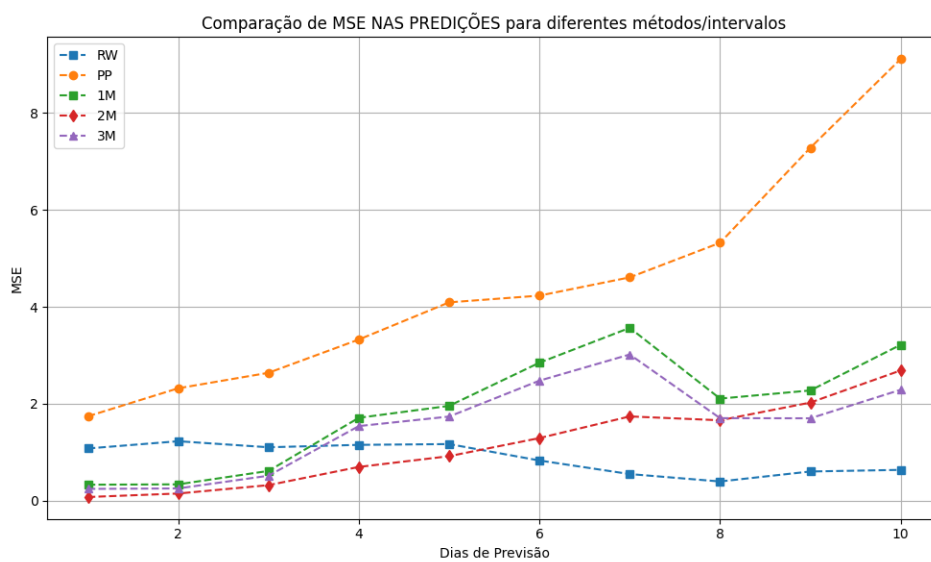
Dia	PP	1M	2M	3M	RW
1	1.741	0.330	0.076	0.243	1.078
2	2.319	0.337	0.148	0.253	1.227
3	2.638	0.614	0.321	0.515	1.102
4	3.325	1.710	0.696	1.539	1.152
5	4.092	1.956	0.918	1.736	1.168
6	4.230	2.846	1.292	2.476	0.829
7	4.607	3.565	1.738	3.016	0.549
8	5.320	2.106	1.659	1.702	0.397
9	7.280	2.274	2.024	1.700	0.602
10	9.111	3.216	2.687	2.288	0.636

Figura 19: MSE de Previsões das Classes de Estimação Mais Relevantes para Dados de Maturidades de até 10 anos



Fonte: o autor

Figura 20: *MSE de Previsões de Todas as Classes de Estimação para Dados de Maturidades de até 5 anos*



Fonte: o autor

7 CONCLUSÃO

Os resultados obtidos neste trabalho evidenciam que o perfil e a qualidade dos dados utilizados têm tanta relevância para a estimação e a predição da Estrutura a Termo das Taxas de Juros quanto a sofisticação ou o refinamento dos modelos de otimização ou de previsão. Essa constatação emergiu tanto no estudo de estimação, em que compararam-se diferentes classes de modelos, quanto no estudo de predição, em que avaliou-se a acurácia de cada abordagem ao projetar o comportamento futuro das taxas de juros.

Em relação à estimação, constatou-se que a classe PP mostrou-se válida, em especial quando aplicada a dados de maturidade de até 5 anos, apresentando resultados mais satisfatórios do que em horizontes de 10 anos. Contudo, em termos gerais, a classe 1M, baseada em interpolação mensal, foi a que obteve o melhor desempenho no conjunto dos testes, ainda que perca certa eficácia conforme o intervalo de amostragem torna-se mais extenso. De modo adicional, observou-se que os valores do erro quadrático médio na estimação não variaram de forma marcante quando utilizou-se dados de maturidades de até 5 anos ou de até 10 anos, indicando certa robustez do processo de estimação à extensão do horizonte.

Ao avaliar-se o tamanho da janela temporal para a modelagem dos parâmetros, verificou-se que, em linhas gerais, quanto mais dados forem utilizados, melhor tende a ser a qualidade do ajuste. Ainda assim, para asseverar-se tal conclusão com maior segurança, seria fundamental ampliar a série histórica de observações para períodos bem mais longos, algo cuja metodologia, proposta aqui, mostrou-se funcional. Essa abordagem de avaliação do tamanho ótimo de amostra fornece um caminho para futuras pesquisas, permitindo dimensionar a quantidade de dados necessária para cada aplicação.

No tocante à predição, nenhuma das classes de modelos, em nenhum horizonte mais extenso de previsão, superou de forma robusta o *Random Walk*, embora tenham surgido exemplos pontuais de desempenho ligeiramente melhor em alguns dias do intervalo projetado. Em particular, a classe PP, que obteve desempenho inferior na estimação para 10 anos, acabou por superar o *Random Walk* em alguns dias mais afastados, ainda que não de maneira suficientemente expressiva para firmar-se como uma abordagem sólida de predição nesse horizonte. De maneira geral, a eficácia de uma dada classe de estimação não implicou que a mesma classe apresentasse boa performance ao projetar o comportamento futuro, evidenciando a diferença substancial entre ajustar dados históricos e prever novos cenários. Além disso, observou-se que a resposta preditiva variou consideravelmente quando compararam-se dados de até 5 anos com dados de até 10 anos, sugerindo que características intrínsecas do mercado em cada faixa de vencimento influenciam diretamente o desempenho do modelo.

Em termos mais específicos, notou-se que as classes 2M e 3M superaram o *Random Walk* apenas nos primeiros dias de previsão em ambos os horizontes de vencimento, ao passo que a 1M conquistou vantagem inicial unicamente para dados de até 5 anos. Por outro lado, a classe PP, apesar de alcançar melhor desempenho para horizontes futuros em

10 anos, mostrou-se altamente inapropriada em dados de 5 anos, sugerindo que não é uma abordagem robusta o suficiente para a generalidade dos cenários testados. Lembrando que foi utilizado neste trabalho um montante de dados significativamente pequeno, onde 40 dias de dados foram utilizados para estimação e 10 dias foram utilizados para avaliação da predição. Em um cenário real deseja-se utilizar uma quantidade de dados muito superior a utilizada aqui, bem como deseja-se prever um horizonte muito mais longínquo. Tal constatação não desmerece a metodologia de avaliação apresentada neste trabalho, mas prejudica a eficácia dos resultados de predição.

Como principal recomendação prática, ressalta-se a importância de empregar a metodologia de avaliação aqui proposta em bases de dados muito maiores, pois os resultados indicam que quanto maior o histórico disponível, maior a probabilidade de refinamento na estimação e na predição. A adoção de estratégias que combinem algoritmos de otimização distintos (inclusive recursivos) e que implementem mecanismos de esquecimento de dados antigos também revela-se promissora, dada a eficiência observada em abordagens híbridas no decorrer do estudo. Além disso, a expansão do conjunto histórico de observações poderá expor o modelo a diferentes regimes de mercado, ampliando sua capacidade de revelar padrões e tendências no comportamento das taxas de juros.

É importante enfatizar que, embora os achados sejam conclusivos para o conjunto de dados utilizado, eles não são determinísticos e não devem ser aplicados de forma irrestrita a outros períodos ou configurações de mercado. Eventos e conjunturas inéditos, bem como dados ainda não investigados, podem resultar em conclusões divergentes das apresentadas aqui. Deste modo, o estudo cumpre o papel de estabelecer uma metodologia de estimação e predição, cujas virtudes confirmaram-se para os dados analisados, mas que ainda demanda adaptações e investigações adicionais para generalizações ou extrapolações mais amplas.

REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. *Introdução à Identificação de Sistemas – Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. [S.l.]: Editora UFMG, 2014. ISBN 9788570415844. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=f9IwE7Ph0fYC>>.
- BOLDER, D. J.; STRÉLISKI, D. Yield curve modelling at the bank of canada. Bank of Canada Technical Report, 1999.
- BYRD, R. H.; GILBERT, J. C.; NOCEDAL, J. A trust region method based on interior point techniques for nonlinear programming. *Mathematical programming*, Springer, v. 89, p. 149–185, 2000.
- CAO, S. *Essays on the term structure of interest rates*. 2016. Tese (Doutorado) – University of Glasgow.
- DE FARO, C. *Princípios E Aplicações Do Calculo Financeiro*. [S.l.]: LTC, 2006. ISBN 9788527703369. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=u3h9wgEACAAJ>>.
- DIEBOLD, F. X.; LI, C. Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of econometrics*, Elsevier, v. 130, n. 2, p. 337–364, 2006.
- DURAND, D.; WINN, W. J. Basic yields of bonds, 1926-1947: their measurement and pattern. In: BASIC Yields of Bonds, 1926-1947: Their Measurement and Pattern. [S.l.]: NBER, 1947. P. 1–45.
- ECKHARD, D.; CAMPESTRINI, L. Análise do uso de modelos discretizados para identificação de modelos de biorreatores anaeróbicos. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 4, n. 1, 2016.
- FABOZZI, F. J. *Fixed income securities*. [S.l.]: John Wiley e Sons, 2008.
- FAMA, E. F. Efficient capital markets. *Journal of finance*, v. 25, n. 2, p. 383–417, 1970.
- FERRATY, F.; MAS, A.; VIEU, P. Nonparametric regression on functional data: inference and practical aspects. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, Wiley Online Library, v. 49, n. 3, p. 267–286, 2007.
- FISHER, I. *The theory of interest*, 1930.
- FISHWICK, P. A. *Handbook of dynamic system modeling*. [S.l.]: CRC Press, 2007.
- GARNIER, H.; WANG, L.; YOUNG, P. C. Direct identification of continuous-time models from sampled data: Issues, basic solutions and relevance. In: IDENTIFICATION of continuous-time models from sampled data. [S.l.]: Springer, 2008. P. 1–29.
- GIMENO, R.; NAVE, J. M. Genetic algorithm estimation of interest rate term structure. *Banco de Espana Research Paper No. WP-0634*, 2006.

- HAN, S.-P. A globally convergent method for nonlinear programming. *Journal of optimization theory and applications*, Springer, v. 22, n. 3, p. 297–309, 1977.
- HAYS, S.; SHEN, H.; HUANG, J. Supplement to. *Functional Dynamic Factor Models with Application to Yield Curve Forecasting*, " Available online at <http://www.unc.edu/~haipeng/publication/FDFMsupplement.pdf>, 2012.
- HJALMARSSON, H. Experiment design and identification for control. In: *ENCYCLOPEDIA of Systems and Control*. [S.l.]: Springer, 2021. P. 735–744.
- HULL, J.; WHITE, A. Pricing interest-rate-derivative securities. *The review of financial studies*, Oxford University Press, v. 3, n. 4, p. 573–592, 1990.
- JAMES, J.; WEBBER, N. *Interest Rate Modelling*. [S.l.]: Wiley, 2000. (Wiley Series in Financial Engineering). ISBN 9780471975236. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=EU22g431-ZkC>>.
- JUCHEM NETO, J. P. Modelo de Hull-White e algumas extensões com volatilidade estocástica: aproximações perturbativas, 2007.
- KUNZLER, M. S. Aplicação da análise de componentes principais na estrutura a termo da taxa de juros, com ênfase em imunização de carteiras de renda fixa, 2019.
- LEVENBERG, K. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *Quarterly of applied mathematics*, v. 2, n. 2, p. 164–168, 1944.
- LJUNG, L. *System Identification: Theory for the User*. [S.l.]: Prentice Hall PTR, 1999. (Prentice Hall information and system sciences series). ISBN 9780136566953. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=nHFoQgAACAAJ>>.
- NELSON, C. R.; SIEGEL, A. F. Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of business*, JSTOR, p. 473–489, 1987.
- NICHOLSON, W.; SNYDER, C. *Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions*. [S.l.]: Cengage Learning, 2012. ISBN 9781111525538. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=ZGNxrLRYLF4C>>.
- OLIVEIRA, C. E. P. D. Identificação de sistemas de guindaste de pórtico, 2022.
- POWELL, M. J. A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations. In: *SPRINGER. NUMERICAL Analysis: Proceedings of the Biennial Conference Held at Dundee, June 28–July 1, 1977*. [S.l.: s.n.], 2006. P. 144–157.
- RUAS, M. C. Estimacão da estrutura a termo da taxa de juros com abordagem de dados funcionais, 2014.
- SARTORI, L. D.; ECKHARD, D. Tratamento do fator de decaimento exponencial para o Modelo Diebold-Li no ajuste da ETTJ brasileira. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 5, n. 1, 2017.
- SARTORI, L. D. Aplicações para o modelo Diebold-Li no ajuste e previsão da ETTJ brasileira, 2014.
- SHILLER, R. J.; MCCULLOCH, J. H. The term structure of interest rates. *Handbook of monetary economics*, Elsevier, v. 1, p. 627–722, 1990.
- SÖDERSTRÖM, T.; STOICA, P. *System Identification*. [S.l.]: Prentice Hall, 1989. (Prentice-Hall international series in systems and control engineering). ISBN 9780131276062. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=BC1VPgAACAAJ>>.

- SPELLUCCI, P. An SQP method for general nonlinear programs using only equality constrained subproblems. *Mathematical programming*, Springer, v. 82, p. 413–448, 1998.
- SVENSSON, L. E. *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994*. [S.l.]: National bureau of economic research Cambridge, Mass., USA, 1994.
- SZMIDT NETO, H. Curva de juros brasileira e sua relação com co-movimentos no mercado de títulos públicos global, 2018.
- TESSER, L. R. Estimação e previsão da estrutura a termo da taxa de juros por modelos de fatores, 2013.
- VASICEK, O. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics*, Elsevier, v. 5, n. 2, p. 177–188, 1977.
- WALTZ, R. A. et al. An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps. *Mathematical programming*, Springer, v. 107, n. 3, p. 391–408, 2006.
- WOOD, J. H. Do yield curves normally slope up? The term structure of interest rates, 1862-1982. *Economic Perspectives*, Federal Reserve Bank of Chicago, p. 17–23, 1983.