UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS

KEVYN FRAGA COSTA

OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS BASEADAS EM ETFS ATRAVÉS DOS MODELOS DE MARKOWITZ E BLACK-LITTERMAN

Porto Alegre
2024

KEVYN FRAGA COSTA

OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS BASEADAS EM ETFS ATRAVÉS DOS MODELOS DE MARKOWITZ E BLACK-LITTERMAN

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Ciências Econômicas da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título Bacharel em Economia.
Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Schönerwald da Silva

Porto Alegre

2024

CIP - Catalogação na Publicação

Costa, Kevyn Fraga
OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS BASEADAS EM ETFS ATRAVÉS DOS MODELOS DE MARKOWITZ E BLACK-LITTERMAN / Kevyn Fraga Costa. -- 2024.
63 f.
Orientador: Carlos Eduardo Schönerwald da Silva.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas, Curso de Ciências Econômicas, Porto Alegre, BR-RS, 2024.

1. Carteiras de investimento. 2. Otimização de portifolio. 3. Markowitz. 4. Black Litterman. 5. ETFs. I. Schönerwald da Silva, Carlos Eduardo, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

KEVYN FRAGA COSTA

OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS BASEADAS EM ETFS ATRAVÉS DOS MODELOS DE MARKOWITZ E BLACK-LITTERMAN

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Ciências Econômicas da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título Bacharel em Economia.

Aprovada em: Porto Alegre, 19 de dezembro de 2024.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Carlos Eduardo Schönerwald da Silva – Orientador

UFRGS

Prof. Dr. Antônio Ernani Martins Lima

UFRGS

Profa. Dra. Letícia de Oliveira

UFRGS

RESUMO

Este estudo busca avaliar a eficácia dos modelos de Markowitz e Black-Litterman na otimização de carteiras de investimentos com ETFs no mercado brasileiro. A pesquisa compara os dois modelos para identificar qual apresentou melhor performance ajustada ao risco. O modelo de Markowitz, baseado na teoria moderna de portfólio, usa a média e a variância dos retornos para otimizar as carteiras, enquanto o Black-Litterman combina dados históricos com expectativas de mercado, usando o teorema de Bayes. Foram escolhidos ETFs de alta liquidez e baixa correlação para garantir boa diversificação. Os dados, coletados na plataforma Economatica desde 2014, foram analisados com a ajuda de algoritmos em Python. Os resultados indicam que o modelo de Markowitz teve uma performance mais estável, com melhores retornos ajustados ao risco, enquanto o Black-Litterman mostrou maior volatilidade e retornos inferiores, já que as expectativas de mercado nem sempre se concretizaram.

Palavras-chave: Otimização. Carteiras de Investimentos. ETFs. Markowitz. Black-Litterman

ABSTRACT

This study aims to evaluate the effectiveness of the Markowitz and Black-Litterman models in optimizing investment portfolios composed of ETFs in the Brazilian market. The research compares the two models to identify which one delivered better risk-adjusted performance. The Markowitz model, based on modern portfolio theory, uses the mean and variance of returns to optimize portfolios, while the Black-Litterman model combines historical data with market expectations using Bayes' theorem. High-liquidity and low-correlation ETFs were selected to ensure good diversification. The data, collected from the Economatica platform since 2014, was analyzed using Python algorithms. The results show that the Markowitz model had more stable performance, with better risk-adjusted returns, while the Black-Litterman model exhibited higher volatility and lower returns, as market expectations did not always materialize.
Keywords: Optimization. Investment portfolios. ETFs. Markowitz. Black-Litterman

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Tido como um tema central na teoria financeira moderna, a otimização de carteiras de investimentos possui uma gama de metodologias e modelos para maximizar o retorno ajustado ao risco. Entre os trabalhos mais famosos, destacam-se a Teoria Moderna de Portfólio, de Harry Markowitz, e o modelo Black-Litterman, por suas abordagens distintas e aplicabilidades práticas. Este trabalho se propõe a analisar a eficácia dessas duas metodologias na construção de carteiras otimizadas de ETFs (*Exchange Traded Funds*), a fim de entender se os modelos são eficientes em construir portfólios equilibrados e com bom potencial de retorno.

Os ETFs foram uma das inovações do mercado financeiro nos anos 1990. O primeiro ETF foi lançado nos Estados Unidos em 1993, sob o nome SPDR S&P 500 ETF Trust, também conhecido pelo *ticker* SPY. O ETF foi projetado para replicar o índice S&P 500 e, com isso, marcou o início de uma nova era de investimento passivo (Poterba; Shoven, 2002). Desde então, os ETFs se tornaram extremamente populares entre investidores por sua flexibilidade, transparência e baixos custos. Em 2020, o mercado global de ETFs atingiu um valor de ativos sob gestão de mais de 7 trilhões de dólares, demonstrando seu crescimento robusto e aceitação no mercado financeiro (ICI, 2021).

Essa tendência de crescimento não se limita aos Estados Unidos. O mercado de ETFs está se expandindo rapidamente em outras regiões do mundo, incluindo a Europa, Ásia e América Latina. No Brasil, o mercado de ETFs também tem mostrado um crescimento significativo. Em 2024, o número de ETFs de renda variável listados na B3 (Bolsa de Valores do Brasil) chegou a 88 (B3, 2024), mostrando a tendência de crescimento e foco das instituições nesse tipo de produto. A expansão global desses fundos é impulsionada por sua capacidade de oferecer uma exposição diversificada a mercados internacionais e setores específicos, além de facilitar a implementação de estratégias de investimento sofisticadas de maneira acessível. No contexto brasileiro, esse crescimento reflete a busca por alternativas mais eficientes e acessíveis em um ambiente de investimentos cada vez mais competitivo, destacando a importância de entender quais modelos de otimização oferecem os melhores resultados para esses instrumentos. A crescente popularidade dos ETFs em diversas regiões reforça a relevância do presente estudo, que busca avaliar a eficácia de modelos de otimização de carteiras aplicados a esses instrumentos financeiros. Esse crescimento reflete uma demanda crescente por produtos de investimento eficientes, tornando essencial a aplicação de modelos robustos de otimização de carteiras.

A otimização de carteiras é um processo crucial na gestão de investimentos, cujo objetivo é construir um portfólio que maximize o retorno esperado para um dado nível de risco ou, alternativamente, minimize o risco para um dado nível de retorno esperado. Harry Markowitz introduziu a TMP (Teoria Moderna de Portifólio) em 1952, que revolucionou a forma como os investidores abordam a seleção de ativos. Markowitz demonstrou que, ao combinar ativos com diferentes níveis de correlação, é possível reduzir a variância total do portfólio, criando uma "fronteira eficiente" de carteiras ótimas (Markowitz, 1952).

O modelo Black-Litterman, desenvolvido por Fischer Black e Robert Litterman em 1990, surgiu como uma evolução da TMP, incorporando expectativas de mercado e opiniões de investidores. Este modelo resolve algumas das limitações da TMP tradicional ao combinar dados históricos com as visões subjetivas dos investidores, permitindo uma abordagem mais flexível e prática na otimização de carteiras (Litterman, 2003).

Além de preencher uma lacuna na pesquisa existente, ao aplicar e comparar esses modelos especificamente com ETFs brasileiros, o estudo apresenta uma abordagem prática que pode ser utilizada por profissionais do mercado financeiro. Os resultados obtidos fornecerão uma base para a tomada de decisões de investimento, auxiliando investidores a escolherem o modelo de otimização mais adequado para maximizar retornos e minimizar riscos em suas carteiras. Assim, estudos como este se tornam relevantes tanto para a academia quanto para o mercado, promovendo um melhor entendimento e utilização dos ETFs como veículos de investimento eficientes.

Dada a crescente popularidade dos ETFs como instrumentos de investimento, é possível construir carteiras de investimentos otimizadas que maximizem o retorno e minimizem o risco, utilizando os modelos de Markowitz e Black-Litterman? Qual dos dois modelos apresenta melhor desempenho ajustado a risco na otimização de carteiras compostas exclusivamente por ETFs no contexto do mercado brasileiro?

Este estudo se justifica pela necessidade de avaliar e comparar a eficácia de dois modelos de otimização de carteiras — a Teoria Moderna de Portfólio (TMP) de Markowitz e o modelo Black-Litterman — aplicados a ETFs no contexto do mercado brasileiro. A crescente popularidade dos ETFs como instrumentos de investimento, tanto globalmente quanto no Brasil, exige uma análise detalhada sobre quais modelos de otimização oferecem melhores resultados em termos de retorno ajustado ao risco. Ao explorar a aplicabilidade desses modelos, este estudo busca contribuir para a literatura acadêmica e oferecer insights práticos para investidores que buscam otimizar suas carteiras de ETFs.

Para atingir o objetivo geral de entender a possibilidade de montar carteiras de investimentos eficientes através de ETFs, aplicando modelos consolidados de seleção de ativos, este estudo se propõe a cumprir os seguintes objetivos específicos, que visam detalhar as etapas necessárias para a análise comparativa dos modelos de otimização de carteiras:

a) descrever a TMP de Markowitz e o modelo Black-Litterman, destacando suas principais características, diferenças e aplicabilidades;
b) aplicar o método de Markowitz na construção de uma carteira de ETFs, analisando os resultados obtidos;
c) aplicar o modelo Black-Litterman na construção de uma carteira de ETFs, incorporando expectativas de mercado e avaliando o desempenho da carteira;
d) comparar os resultados obtidos com cada modelo, analisando o desempenho das carteiras em termos de retorno, risco e outras métricas relevantes.

Ambos os modelos serão abordados nesse trabalho, primeiramente em maiores detalhes no referencial teórico, e posteriormente utilizados como base para os cálculos e algoritmos criados para implementar a otimização das carteiras com base nos ETFs e índices brasileiros disponíveis no momento do desenvolvimento dessa pesquisa.

2. TEORIA MODERNA DE PORTFÓLIO

Essa seção explicará em detalhes as bases utilizadas para a otimização da carteira de investimentos, passando pela TMP, ou otimização por média-variância, de Markowitz, até o modelo de Black-Litterman, que buscou superar os problemas que os investidores institucionais encontraram ao tentar aplicar a TMP na prática.

A TMP revolucionou a forma como investidores selecionam ativos, introduzindo uma abordagem matemática para a construção de carteiras otimizadas. Essa teoria serve como base para modelos mais avançados, como o Black-Litterman, e é amplamente utilizada tanto na academia quanto no mercado financeiro para maximizar o retorno esperado ajustado ao risco. Foi introduzida por Harry Markowitz no artigo *Portfolio Selection* em 1952, trabalho que posteriormente lhe renderia o Prêmio Nobel de Economia. Markowitz introduz no seu artigo de forma matemática o método de seleção de ativos para uma carteira de investimentos de forma a maximizar o seu retorno e minimizar a variância desse retorno.

No trabalho, Markowitz (1952) parte de duas premissas:

1) o investidor busca o portfólio com o maior retorno possível;
2) o investidor busca o portfólio com a menor variância desse retorno possível.

Logo, entre dois portfólios com o mesmo retorno esperado, o investidor escolherá o que possui o menor risco. Da mesma forma, entre dois portfólios com o mesmo risco, o investidor escolherá o que possui maior expectativa de retorno. Há também uma fronteira eficiente, onde o investidor só conseguirá retornos maiores caso aceite também uma maior variância desses retornos, ou só conseguirá reduzir a variância desses retornos reduzindo também a expectativa de rentabilidade da carteira (Markowitz, 1952).

Para fins práticos, é possível adotar como expectativa de rentabilidade de cada ativo a média histórica de rentabilidade que ele apresentou. Já a volatilidade, ou variância, histórica, pode ser usada como medida de risco desse ativo.

O retorno esperado do Portfólio pode ser calculado da seguinte forma:

$$E = \sum_{i=1}^{N} X_i \mu_i \ (1)$$

Onde:

E = Retorno esperado do Portfólio

N = Quantidade de ativos do portfólio

X_i = Peso do ativo i

μ_i = Retorno esperado do ativo i

Da mesma forma, o risco, ou variância, do portfólio, pode ser medido por:

$$V = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} X_i X_j \ (2)$$

Onde:

V = Variância do portfólio

N = Quantidade de ativos do portfólio

σ_{ij} = Covariância entre os ativos i e j

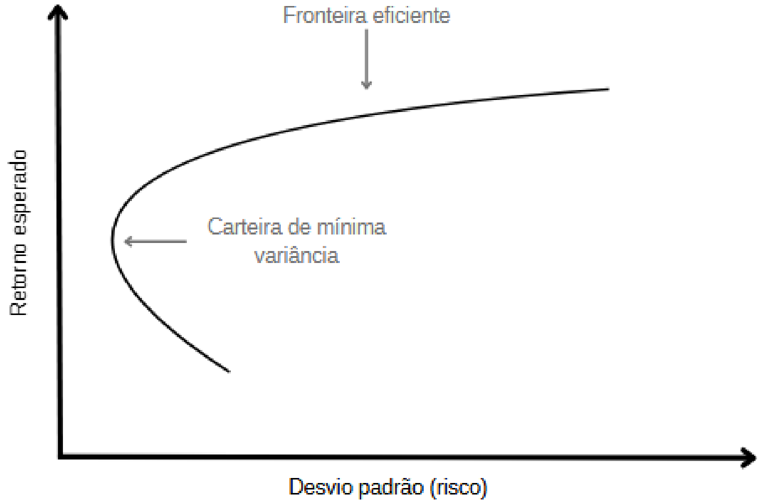
X_i = Peso do ativo i

X_j = Peso do ativo j

A fórmula da variância do portfólio considera as contribuições de cada ativo ao risco total, ponderadas pelos pesos individuais e pelas correlações entre os ativos. Essa abordagem mostra como a diversificação reduz o risco total quando os ativos não se movem de forma perfeitamente sincronizada.

Através das diversas combinações possível entre E e V, Markowitz (1952) introduz o conceito da fronteira eficiente, composta por combinações ótimas entre o retorno esperado (E) e a variância (V) dos portfólios possíveis.

Figura 1 - Fronteira Eficiente

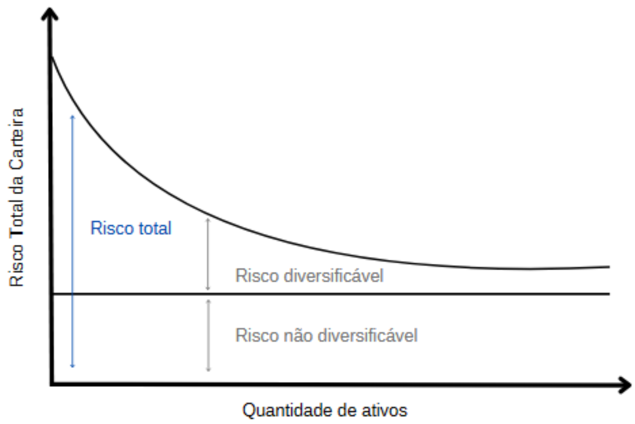


Fonte: Markowitz, 1952

A Figura 1 ilustra a fronteira eficiente, que representa o conjunto de combinações de portfólios que oferecem o maior retorno esperado para um dado nível de risco. Qualquer portfólio abaixo dessa fronteira é considerado ineficiente, pois é possível obter maior retorno com o mesmo nível de risco.

Como resultado desse trabalho, seria factível ao investidor minimizar o risco do portfólio e maximizar o seu retorno otimizando a sua carteira através da escolha de ativos pouco correlacionados, buscando encontrar as melhores combinações possíveis dentro da fronteira eficiente.

Figura 2 - Risco diversificável e não diversificável



Fonte: Ross et al. (2013)

A Figura 2 destaca a diferença entre risco diversificável, que pode ser eliminado através da diversificação do portfólio, e risco não diversificável, que é inerente ao mercado e afeta todos os ativos. Segundo Ross *et al*. (2013), existe um nível de risco mínimo que não pode ser eliminado com a diversificação do portfólio, chamado de risco não diversificável. Diferentemente do risco diversificável, que diz respeito a cada ativo em si e pode ser reduzido com o aumento da diversificação da carteira, o risco não diversificável, também chamado de risco sistemático, diz respeito a acontecimentos que afetam o mercado como um todo e não podem ser previstos, como crises globais ou pandemias. A diversificação é possível devido à correlação reduzida entre os ativos. Quando dois ativos possuem uma baixa correlação, seus movimentos de preços tendem a se compensar, reduzindo a volatilidade do portfólio. Por isso, a seleção de ativos pouco correlacionados é um componente essencial na construção de carteiras eficientes.

2.1 CAPM

Desenvolvido por William Sharpe (1964), o Capital Asset Pricing Model (CAPM) é um modelo de precificação de ativos financeiros que busca medir a relação entre o risco e o retorno de um ativo ou de uma carteira de ativos, a fim de embasar melhores decisões de investimentos. Partindo do pressuposto de que os investidores são racionais, o modelo busca encontrar e entender as chamadas carteiras eficientes, carteiras cujo risco-retorno fica posicionado na fronteira eficiente.

O CAPM pode ser expresso através da seguinte fórmula:

$$ER_i = R_f + \beta_i(ER_m - R_f) \quad (3)$$

Onde:

ERi = Retorno esperado do investimento

Rf = Taxa livre de risco

βi = Beta do investimento

(ERm – Rf) = Prêmio de risco do mercado

Através dessa fórmula, é possível calcular o retorno esperado do investimento, levando em consideração a taxa livre de risco do mercado, o beta do investimento e o prêmio de risco do mercado. Essa métrica fornece uma base teórica sólida para avaliar se um investimento oferece um retorno adequado ao risco assumido, permitindo aos investidores identificar oportunidades que estejam alinhadas com seus objetivos de rentabilidade e tolerância ao risco.

2.2 BETA

O beta, representado pelo símbolo grego β, é utilizado para medir o risco sistemático de um ativo ou de uma carteira de ativos, em relação a um ativo médio ou à média de mercado (Ross *et al.,* 2013). Ativos com betas maiores são ativos com um risco sistemático maior, e, portanto, devem apresentar um retorno esperado também maior.

Um coeficiente beta, ou simplesmente beta, diz-nos quanto risco sistemático determinado ativo tem em relação a um ativo médio. Por definição, um ativo médio tem um beta de 1,0 em relação a ele mesmo. Um ativo com um beta 0,50, portanto, tem metade do risco sistemático de um ativo médio. Já um ativo com beta 2,0 tem o dobro de risco. (Ross *et al.* 2013, p 439). Para ETFs, o beta indica o quanto o retorno do fundo acompanha os movimentos do mercado de referência. Por exemplo, um ETF que replica o índice S&P 500, com beta igual a 1,0, tende a seguir exatamente as oscilações do mercado. Já um ETF setorial de tecnologia pode ter um beta maior, indicando maior volatilidade e maior sensibilidade aos movimentos do mercado. Essa característica é crucial para os investidores ao compor carteiras otimizadas, pois permite ajustar o nível de risco sistemático de acordo com seus objetivos de investimento. Para calcular o beta de um ativo, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$\beta = \frac{cov(r_a, r_m)}{\sigma r_m} \quad (4)$$

Onde:

β = Beta

cov = covariância

ra = retorno do ativo

rm = retorno do mercado

σ = variância

Para calcular o beta de uma carteira de ativos, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$\beta c = \sum_{i=1}^{n} X_i \beta_i \ (5)$$

Onde:

βc = Beta da carteira

Xi = Peso do ativo i

Bi = Beta do ativo i

O beta de uma carteira de investimentos diverge do beta dos seus ativos individualmente. Ao invés disso, ele é composto pelo somatório do beta de cada ativo multiplicado pelo peso do ativo dentro da carteira. Assim, é possível construir carteiras diferentes, com melhor risco-retorno, através da composição com diferentes ativos.

2.3 ÍNDICE DE SHARPE

Criado por William Sharpe em 1966, o Índice de Sharpe busca medir a relação de risco-retorno de um determinado ativo ou carteira (Ross *et al.*, 2013). Ele é calculado utilizando o retorno histórico da carteira em excesso à taxa livre de risco, dividido pela sua variância:

$$IS = \frac{Rc - Rf}{\sigma c} \; (6)$$

Onde:

IS = Índice de Sharpe

Rc = Retorno da carteira

Rf = Retorno do ativo livre de risco

σc = Variância da carteira

Quanto maior o resultado do Índice de Sharpe, maior retorno ajustado ao risco determinado ativo ou carteira entregou em relação à taxa livre de risco. Por ser capaz de sintetizar essas informações, é muito utilizado no mercado financeiro como medida de performance de fundos de investimentos ou de carteiras de ações.

2.4 CRTÍTICAS AO MODELO DE MARKOWITZ

De acordo com Bjerknes e Vukovic (2017), no trabalho *Automated Advice: A portfolio Management Perspective on Robo-Advisors*, o modelo de média-variância proposto por Markowitz (1952) possui algumas limitações, sendo elas: erro de aproximação, entrada estática, erro de estimativa e horizonte temporal.

2.4.1 ERRO DE APROXIMAÇÃO

Bjerknes e Vukovic (2017) definem que, para encontrar o portfólio ótimo para dado nível de risco, o modelo de média-variância depende de preceitos que, caso se verifiquem na realidade, são adequados para maximizar a utilidade esperada. O primeiro preceito é de que os retornos de mercado seguem uma distribuição normal. Entretanto, a assumpção de normalidade acaba não contabilizando movimentos extremos de mercado (Swensen, 2009). De acordo com dois estudos feitos pelo economista americano William Nordhaus (2011) e pela Morningstar (2011), mostraram que os retornos de mercado não seguem a distribuição normal, sendo muito mais extremos do que o previsto.

O segundo preceito é que os investidores têm utilidade quadrática, definida pela seguinte fórmula:

$$E(U) = \mu - \lambda\sigma^2 \ (7)$$

Onde:

μ = retorno esperado do portfólio

λ = aversão a risco

σ^2 = variância do portfólio

Essa equação pressupõe que os investidores são racionais e tomam decisões baseadas em uma análise matemática que equilibra o retorno esperado (μ) e o risco (σ^2), penalizando este último conforme seu grau de aversão ao risco (λ).

Entretando, citando Bjerknes e Vukovic (2017, p. 19, tradução própria):

> A utilidade quadrática implica que riscos são simétricos; que investidores são indiferentes a variações positivas ou negativas (Adler; Kritzman, 2007). Entretando essa suposição entra em contraste com os achados de economistas comportamentais como Kahnemann e Tversky (1979), sugerindo que investidores são aversos ao risco nos ganhos e buscam risco nas perdas. A tendência dos investidores a fortemente preferir evitar perdas do que obter ganhos é um fenômeno conhecido como aversão à perda.

Ou seja, o modelo de média-variância, apesar de sua relevância teórica, apresenta limitações significativas ao tentar capturar a complexidade dos mercados financeiros e o comportamento dos investidores. A suposição de normalidade dos retornos ignora eventos extremos que podem impactar drasticamente os portfólios, enquanto a hipótese de utilidade quadrática não reflete a aversão à perda, uma característica comportamental amplamente documentada.

2.4.2 ENTRADA ESTÁTICA

A entrada estática é uma limitação amplamente reconhecida no modelo de média-variância, que depende de correlações fixas entre ativos para estimar o portfólio ideal. No entanto, como argumentam Bjerknes e Vukovic (2017), as condições de mercado são dinâmicas, o que torna inadequado assumir que as correlações permanecem constantes ao longo do tempo. Swensen (2009) reforça esse ponto ao destacar que, durante períodos de estresse de mercado, como crises financeiras, as correlações entre ativos tendem a aumentar, reduzindo a eficácia das estratégias de diversificação baseadas em correlações de longo prazo.

Durante períodos de crise financeira, como destacado por Sandoval e França (2012), as correlações entre ativos aumentam de forma significativa, comprometendo os benefícios da diversificação e ampliando a exposição ao risco sistêmico do portfólio. O modelo de média-variância, que utiliza entradas estáticas, não consegue capturar essas mudanças dinâmicas, o que pode levar a escolhas subótimas de alocação de ativos. Além disso, conforme destacado por Siegel (2014), embora as correlações de curto prazo sejam voláteis, no longo prazo elas tendem a se estabilizar em níveis mais baixos, o que possibilita aos investidores mitigar os impactos negativos dessas variações ao considerar um horizonte temporal mais amplo para suas carteiras.

Ou seja, a limitação da entrada estática no modelo de média-variância subestima as variações dinâmicas das correlações dos ativos, especialmente em períodos de estresse de mercado. Para superar esse desafio, é recomendável que os investidores ampliem seus horizontes temporais, alinhando suas estratégias às condições dinâmicas do mercado. Essa abordagem permite uma maior resiliência frente às oscilações de curto prazo e contribui para a construção de portfólios mais robustos e diversificados.

2.4.3 ERRO DE ESTIMATIVA

Os portfólios montados através do método de Média-Variância acabam sendo ineficientes devido ao erro de estimativa, ocasionado ao usar valores esperados como parâmetros de entrada, ao invés de valores reais (Bjerknes; Vukovic, 2017). O uso de valores esperados faz com que a fronteira eficiente real de rendimentos da carteira esteja sempre abaixo da fronteira eficiente esperada.

Como a rentabilidade esperada de uma classe de ativos é um dos parâmetros principais na construção de uma carteira de investimentos (Chopra, 1993), o erro de estimativa pode causar grandes impactos no peso de cada ativo em um determinado portifólio. Críticos também argumentam que isso causa uma maximização do erro de estimativa, aumentando o peso em ativos com retornos esperados altos, correlações negativas e baixa variância, e diminuindo o peso em ativos com retornos esperados pequenos, correlação positiva e alta variância (Michaud, 1989).

Há algumas opções para limitar o efeito do erro de estimativa em um portfólio. Swensen (2009), propõe limites entre 5% e 25% para cada classe de ativos dentro de uma mesma carteira. Outra solução é a oferecida pelo modelo Black-Litterman, que abordarei neste trabalho.

2.4.4 HORIZONTE TEMPORAL

O modelo de Média-Variância é um modelo de período único, comumente empregado em um horizonte de tempo de apenas um ano (Bjerknes; Vukovic, 2017). Para uma carteira de investimentos, entretanto, geralmente pensaremos em objetivos de longo prazo, com duração de vários anos ou algumas décadas. Essa diferença de horizonte temporal pode levar a decisões de investimentos ineficientes utilizando como base apenas o modelo de Média-Variância (Swensen, 2009).

Apesar de tratarmos os retornos dos ativos como completamente independentes de retornos passados, alguns investimentos, como ações, exibem a tendência de apresentar um comportamento de reversão à média, com períodos de baixa rentabilidade sendo seguidos de períodos de alta rentabilidade e vice-versa (Poterba; Summers, 1988).

Goetzmann e Edwards (1994) simularam resultados de longo-prazo incorporando auto-correlação entre os retornos, e concluíram que diferentes horizontes temporais geram diferentes fronteiras eficientes. O horizonte temporal de cada investidor deve, então, ser claramente definido, para que seja possível otimizar a carteira da melhor forma possível (Bjerknes; Vukovic, 2017).

2.4.5 BLACK-LITTERMAN

O modelo Black-Litterman é uma forma de integrar os dados quantitativos e históricos de mercado com as opiniões do investidor, trazendo uma nova abordagem ao modelo totalmente quantitativo apresentado por Markowitz (1952), ao possibilitar a um gestor de investimentos, utilizar as suas visões de mercado em conjunto com os dados históricos e retorno de equilíbrio de mercado, mesclando as abordagens quantitativa e qualitativa em um modelo único. Na ausência de avaliações do indivíduo, permanece o retorno de equilíbrio de mercado, como no modelo CAPM (Lichtman, 2019). Assim, é utilizada a opinião do investidor, agregada da informação do mercado, para gerar uma distribuição do retorno esperado. O modelo combina os retornos de equilíbrio com as visões do investidor usando o teorema de Bayes (Satchell; Scowcroft, 2000).

No modelo Black-Litterman, o conceito de retorno de equilíbrio refere-se aos retornos esperados com base em um portfólio de mercado ponderado por valor, ou *market cap*, representando o equilíbrio do mercado. Esses retornos podem ser calculados a partir de teorias como o modelo de precificação de ativos de capital (CAPM), ou a partir da oferta prevalente de ativos ponderados por valor. Dessa forma, o retorno de equilíbrio é entendido como o retorno implícito do mercado em um portfólio, denominados na moeda local, que serve como base quantitativa no modelo, sendo ajustado conforme as visões específicas do gestor de investimentos (Satchell; Scowcroft, 2000).

O Teorema de Bayes é a base da abordagem Bayesiana e descreve como atualizar nossas crenças (probabilidades) sobre um evento à luz de novas evidências. Ele é expresso da seguinte forma:

$$P(A|B) = \frac{[P(B|A) * P(A)]}{P(B)} \quad (8)$$

Onde:

- *P(A|B)* é a probabilidade de um evento A ocorrer dado que o evento B ocorreu (probabilidade posterior).
- *P(B|A)* é a probabilidade do evento B ocorrer dado que o evento A ocorreu (verossimilhança).
- *P(A)* é a probabilidade inicial do evento A ocorrer (probabilidade anterior).
- *P(B)* é a probabilidade do evento B ocorrer (evidência).

O resultado da incorporação do teorema de Bayes é um novo vetor de retornos esperados que incorpora as visões do investidor, ponderadas por sua confiança:

$$E(R) = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P)]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P^T\Omega^{-1}Q]$$

Onde:

E(R) = Retorno esperado

τ = Nível de significância na distribuição do CAPM

Σ = Matriz de covariância

Ω = Incerteza das estimativas imputadas

π = Retorno implícito de equilíbrio de mercado

P = matriz de visões do investidor

Q = Retorno esperado do portfólio através da matriz P

Através do modelo Black-Litterman, a distribuição de retornos esperados do portfólio segue um padrão mais intuitivo de acordo com as percepções do usuário, sem necessidade de otimizações adicionais (Litterman, 2003). Como exemplo, é possível imaginar um gestor que acredita que os setores de tecnologia e saúde terão um desempenho superior ao mercado no próximo ano, com 70% de confiança nessa previsão. Usando o modelo Black-Litterman, ele pode ajustar os retornos esperados de ETFs setoriais de tecnologia e saúde, ponderando essas convicções com os retornos de equilíbrio do mercado. O modelo gera uma distribuição ajustada de retornos esperados, que orienta a alocação da carteira de forma alinhada às visões do gestor. Em suma, o modelo Black-Litterman oferece uma estrutura flexível e intuitiva para incorporar as visões de mercado de um investidor em um portfólio otimizado, combinando o rigor quantitativo com a subjetividade das expectativas individuais. Ao ajustar os retornos esperados de equilíbrio com base nas visões do investidor e sua confiança, o modelo permite a criação de portfólios que refletem as convicções do investidor, ao mesmo tempo em que se baseiam em dados históricos e modelos financeiros sólidos.

3 EVOLUÇÃO RECENTE DOS ETFs E ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para a realização deste trabalho, será desenvolvido um método próprio para a seleção dos ativos utilizados na construção das carteiras de investimentos, priorizando aqueles mais utilizados e reconhecidos pelo mercado, com alta liquidez e solidez metodológica. A partir dessa seleção, será extraída uma base de dados histórica abrangendo os preços dos ETFs e os índices de referência, que servirão de insumo para o desenvolvimento do algoritmo de otimização das carteiras.

Após a seleção dos ETFs e a compilação da base de dados, o próximo passo será a implementação do algoritmo de otimização. A carteira será montada a partir de 2015 até o último dado disponível de 2024, tendo como base os dados dos ativos a partir de 2014. Inicialmente, será aplicado o modelo de Markowitz (1952) para otimizar a carteira com base nos ativos utilizados. Em seguida, será utilizado o modelo Black-Litterman, que incorpora expectativas de mercado e opiniões subjetivas, com o objetivo de ajustar as alocações. O estudo buscará analisar e comparar os pontos fortes e fracos de ambos os modelos, avaliando qual deles oferece um melhor retorno ajustado ao risco. Isso permitirá uma compreensão aprofundada da consistência e eficácia de cada abordagem na otimização de carteiras de investimentos.

A evolução dos ETFs reflete tendências globais e locais que reforçam sua relevância como instrumento financeiro. Globalmente, os ETFs se destacaram por sua capacidade de democratizar o acesso a investimentos diversificados e líquidos. Nos Estados Unidos, por exemplo, os ETFs representavam, em 2020, US$ 5,4 trilhões em ativos líquidos, correspondendo a cerca de 18% do mercado total de fundos abertos regulados (ICI, 2021). Este crescimento é impulsionado pela busca de custos mais baixos, maior transparência e flexibilidade nos investimentos.

No Brasil, o cenário de ETFs também é promissor. Desde o lançamento do primeiro ETF em 2004, o mercado vem experimentando um crescimento consistente. A quantidade de investidores individuais atingiu 511 mil em 2024 (Frabasile, 2024), enquanto o montante investido ultrapassou os R$ 44 bilhões (Kikuchi; Mota, 2024). Esse crescimento é reforçado pela expansão dos fundos temáticos e pelo aumento de opções focadas em critérios ESG (ambientais, sociais e de governança), alinhando-se às demandas contemporâneas dos investidores.

O crescimento do mercado brasileiro e internacional demonstra que a escolha de ETFs como base para o desenvolvimento de algoritmos de otimização oferece não apenas robustez metodológica, mas também uma aderência prática ao cenário atual do mercado financeiro.

3.1 SELEÇÃO DOS ETFS

Para a construção das carteiras otimizadas, foram selecionados ETFs que representam diferentes classes de ativos, buscando maximizar a diversificação e reduzir a correlação entre os ativos. A escolha dos ETFs foi baseada nos seguintes critérios:

a) liquidez: Foram selecionados ETFs com alta liquidez para garantir que as operações de compra e venda possam ser realizadas sem impactos significativos no preço;
b) custos: ETFs com menores taxas de administração foram preferidos para reduzir os custos totais da carteira;
c) diversificação: Foram incluídos ETFs que cobrem diferentes setores e regiões geográficas para aumentar a diversificação;
d) representatividade: Foi dada preferência por ETFs amplamente utilizados e reconhecidos no mercado para garantir a representatividade dos resultados.

Para os ETFs de renda variável, foi dada preferência a ETFs com maior volume de negociação diária entre os ETFs disponíveis referentes ao mesmo índice. No início do período selecionado, o mercado de ETFs ainda não possuia uma grande variedade de opções para investir, com ainda menos opções com liquidez adequada para garantir a execução de ordens, caso o investimento fosse feito na prática. Esse motivo fez com que a escolha dos ETFs de renda variável se limitasse aos ETFs mais amplos de mercado e com maior representatividade naquele momento. Também foram selecionados ETFs com menores custos com taxa de administração. Os ETFs selecionados foram os seguintes:

Quadro 1: Lista de ETFs de renda variável

Código	Classe	Setor	Custo (% a.a.)
DIVO11	Ações Brasil	Dividendos	0,50% a.a.
SMAL11	Ações Brasil	Small Caps	0,50% a.a.
BRAX11	Ações Brasil	Amplo	0,20% a.a.
IVVB11	Ações EUA	Amplo	0,23% a.a.

Fonte: Elaborado pelo autor

Para a renda fixa, devido à indisponibilidade de ETFs com histórico de rentabilidade superior a 10 anos no mercado brasileiro, a análise foi conduzida com base nos índices subjacentes produzidos pela ANBIMA, que hoje servem como índices base para os ETFs de renda fixa existentes. Esses índices, amplamente utilizados como benchmarks, representam o desempenho de carteiras teóricas de títulos públicos de diferentes classes e são referência para os ETFs disponíveis atualmente. Os ETFs de renda fixa no Brasil replicam índices como o IMA-B, que acompanha o desempenho de NTN-Bs (Tesouro IPCA+), e o IMA-S, que reflete o retorno das LFTs (Tesouro Selic). Apesar de possibilitarem exposição direta a essas classes de ativos, a limitação de histórico compromete análises de longo prazo. Por essa razão, serão utilizados os índices subjacentes da ANBIMA, que são calculados com base em um método consolidado e transparente, incorporando dados históricos mais abrangentes, proporcionando maior consistência à análise.

Quadro 2 - Lista de índices de renda fixa

Índice	**Tipo**	**Especificidade**
IMA-B 5 P2	Renda fixa	Carteira de NTN-Bs com vencimentos abaixo de 5 anos
IMA-B 5+	Renda fixa	Carteira de NTN-Bs com vencimentos acima de 5 anos
IMA-S	Renda fixa	Carteira de LFTs
IRFM P2	Renda fixa	Carteira de LTNs e NTN-Fs

Fonte: Elaborado pelo autor

Através dessas opções, é possível montar uma carteira exposta a diversos cenários diferentes, especialmente na renda fixa, ficando exposta à inflação curta (abaixo de 5 anos de duração), inflação longa (acima de 5 anos de duração), taxa Selic e Tesouro Prefixado.

A Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (ANBIMA) é a entidade representativa do mercado financeiro e de capitais no Brasil, responsável por estabelecer normas, promover a autorregulação, e fomentar o desenvolvimento e a transparência do setor. Ela reúne bancos, gestoras de recursos, corretoras, distribuidoras, e demais instituições financeiras, oferecendo diretrizes e certificações, além de atuar na educação financeira e na defesa dos interesses de seus associados junto aos órgãos reguladores e ao público em geral.

Para compreender melhor os índices de renda fixa criados pela ANBIMA, é importante conhecer os títulos do Tesouro Nacional, que são títulos de dívida emitidos pelo governo para financiar a dívida interna. Esses títulos são considerados ativos livres de risco devido ao risco soberano e incluem diversas séries, cada uma com características próprias:

NTN-B: Notas do Tesouro Nacional – Série B, também conhecidas como Tesouro IPCA+ com Juros semestrais;

LFT: Letras Financeiras do Tesouro, também conhecidas como Tesouro Selic;

LTN: Letras do Tesouro Nacional, também conhecidas como Tesouro Prefixado;

NTN-F: Notas do Tesouro Nacional – Série F, também conhecidas como Tesouro Prefixado com Juros Semestrais.

Desde 2002, com a democratização do acesso ao mercado, os investidores podem acessar e investir em títulos públicos através do Tesouro Direto, com aplicações a partir de 30 reais. (Tesouro Direto, 2024).

3.1.2 TIPOS DE INVESTIMENTO NO TESOURO DIRETO

Os títulos públicos disponíveis no Tesouro Direto podem ser classificados em três categorias principais, cada uma adequada a diferentes perfis de investidores e cenários econômicos:

a) prefixados: Esses títulos têm uma taxa de rentabilidade fixa, definida no momento da compra. Permite ao investidor saber exatamente o valor que receberá no vencimento. Exemplos incluem a LTN e a NTN-F;

b) pós-fixados: Atrelados à taxa Selic, esses títulos oferecem rendimentos variáveis de acordo com as oscilações da taxa de juros básica da economia. São as LFTs;

c) atrelados à inflação (IPCA+): Esses títulos combinam uma taxa fixa com a variação do IPCA, garantindo proteção contra a inflação. Mantêm o poder de compra do investidor ao longo do tempo, e são chamados de NTN-Bs.

Com essas opções, o Tesouro Direto proporciona ferramentas acessíveis e diversificadas para diferentes estratégias de investimento, permitindo a combinação de segurança, previsibilidade e retorno ajustado ao perfil de risco de cada investidor.

Apesar da ampla disponibilidade e atratividade dos títulos do Tesouro Direto, a caderneta de poupança permanece como o investimento mais utilizado pelos brasileiros. De acordo com a 7ª edição do Raio X do Investidor Brasileiro, realizada pela ANBIMA e Datafolha, 25% da população utilizou a poupança como forma de aplicação financeira em 2023, sendo especialmente popular entre os *boomers* (31%) e a geração X (29%). Esse comportamento está associado à acessibilidade, segurança e isenção de taxas de administração da poupança, embora sua rentabilidade frequentemente fique abaixo de outros produtos financeiros (ANBIMA, 2023).

Historicamente, o destaque da poupança no cenário financeiro brasileiro reflete uma baixa educação financeira e um acesso limitado a alternativas de investimento. Entretanto, observa-se uma mudança gradual nesse comportamento. Entre 2021 e 2023, o percentual de brasileiros que não conhecem produtos financeiros caiu de 72% para 59%, enquanto cresceu o interesse por opções como títulos públicos, moedas digitais e fundos de investimento, especialmente entre as gerações mais jovens e a classe A/B (ANBIMA, 2023). Essa evolução sugere uma tendência de maior diversificação no futuro, com possível redução na preferência pela poupança e aumento no uso de instrumentos como Tesouro Direto e ações.

A escolha por diversificar entre renda fixa e variável, considerando ativos como os do Tesouro Direto, é essencial para maximizar os retornos e mitigar os riscos associados aos investimentos. Isso estabelece uma base sólida para a construção de carteiras otimizadas, alinhadas às dinâmicas e demandas do mercado financeiro contemporâneo.

3.1.3 CUSTOS DE TRANSAÇÃO

Os custos de transação serão diferentes a depender da corretora utilizada para a montagem da carteira. Entretanto, existem os custos com taxas de administração dos ETFs, de acordo com o quadro 3.

Quadro 3: Taxa de administração de cada ETF

Código	Classe	Setor	Custo (% a.a.)
DIVO11	Ações Brasil	Dividendos	0,50% a.a.
SMAL11	Ações Brasil	Small Caps	0,50% a.a.
BRAX11	Ações Brasil	Amplo	0,20% a.a.
IVVB11	Ações EUA	Amplo	0,23% a.a.
B5P211	Renda fixa	NTN-B	0,20% a.a.
IMA-B 5+	Renda fixa	NTN-B	0,25% a.a.
LFTS11	Renda fixa	LFT	0,19% a.a.
IRFM11	Renda fixa	LTNs e NTN-Fs	0,20% a.a.

Fonte: Elaborado pelo autor

Nos ETFs, assim como em fundos de investimento, a taxa de administração é descontada diretamente do valor da cota. Isso significa que a rentabilidade apresentada por um ETF já é líquida dessa taxa, refletindo o retorno efetivo para o investidor. É fundamental considerar esse custo, uma vez que ele pode impactar significativamente a rentabilidade acumulada de uma carteira ao longo de muitos anos.

Na seleção dos ETFs para este trabalho, a taxa de administração foi cuidadosamente analisada, priorizando os produtos com menor custo dentro de cada índice desejado para a composição da carteira. Além da taxa de administração, outro custo relevante para o investidor é o Imposto de Renda incidente sobre os lucros obtidos na venda de ETFs. Contudo, para simplificar a análise, este custo será desconsiderado neste estudo, permitindo um foco mais direto na comparação e eficiência dos ETFs escolhidos.

3.2 BASE DE DADOS

Os dados históricos de rentabilidade utilizados neste trabalho foram extraídos da plataforma Economatica, com início em 20/04/2014. Este dia marca o primeiro registro de negociação do ETF IVVB11, utilizado como base para as análises. Como o modelos de Markowitz e Black-Litterman exigem informações históricas consistentes para os cálculos necessários para a montagem das carteiras, foi necessário coletar dados a partir do momento em que o IVVB11 começou a ser negociado no mercado.

O início da análise em 2015 é justificado pela limitação no cálculo de rentabilidade acumulada e anualizada. Como o modelo depende de uma série de dados históricos para estimar corretamente os parâmetros necessários, o primeiro ano completo de rentabilidade só pode ser obtido em 2015. Antes disso, os dados disponíveis de 2014 servem exclusivamente para a construção das métricas de base.

Além disso, a inexistência de dados anteriores a 2014 para o IVVB11 dificulta a análise em períodos anteriores a esse. Caso houvesse a necessidade de uma análise anterior, seria obrigatório recorrer a cálculos diários das variações do índice S&P500, ajustados pela taxa de câmbio do dólar, o que adicionaria um nível significativo de complexidade e possíveis inconsistências na construção da base de dados.

Assim, o corte temporal adotado — de 2014 para a coleta de dados e de 2015 para o início da análise — garante que as métricas empregadas no modelo inicial sejam robustas e fiéis à realidade do mercado brasileiro de ETFs.

3.2.1 TRATAMENTO DOS DADOS

Devido à menor liquidez do mercado em 2014, e menor foco em ETFs no mercado como um todo, alguns dos ativos apresentam dias sem negociação. Para suprir essa falta de informações, foi feita a cópia do preço de fechamento do primeiro dia anterior onde houve alguma negociação. Como os ETFs devem seguir os índices base, esse ajuste nas informações não deve acarretar em mudanças em relação à volatilidade e covariância dos ETFs.

3.3 ALGORITMO

A construção do algoritmo de otimização das carteiras foi realizada utilizando a linguagem de programação *Python*, que oferece uma ampla gama de bibliotecas e ferramentas para análise financeira e otimização. O primeiro passo é a implementação do modelo de Markowitz (1952). Esse modelo foi utilizado para calcular a fronteira eficiente das carteiras, maximizando o retorno esperado para um dado nível de risco. O algoritmo foi construído com algumas restrições padrão, como a soma das alocações ser 100% e a proibição de vendas a descoberto.

Após a implementação do modelo de Markowitz, foi construído o algoritmo para a implementação do modelo de Black-Litterman. As visões de mercado foram incorporadas à expectativa de retorno de equilíbrio do mercado, podendo refletir expectativas específicas sobre o desempenho de determinados ativos ou classes de ativos. O algoritmo então recalcula as alocações ideais dos ativos na carteira, buscando equilibrar o retorno esperado com o risco ajustado. Esta abordagem permite uma comparação detalhada entre os portfólios otimizados pelos dois modelos, destacando as diferenças nos resultados e a robustez de cada modelo sob diferentes condições de mercado.

Para a construção do algoritmo, foram utilizadas diversas bibliotecas do ecossistema *Python*. O *Pandas* foi utilizado para manipulação e análise de dados, enquanto o *NumPy* auxiliou no cálculo de operações matemáticas e vetoriais. A biblioteca *Matplotlib* foi utilizada para visualização gráfica dos resultados e retornos, e o *SciPy* foi empregada para realizar a otimização da carteira, através do módulo *minimize* para encontrar a composição ideal dos portfólios. Para o modelo Black-Litterman, utilizamos o pacote *PyPortfolioOpt*, que fornece ferramentas para a implementação direta do modelo, incluindo a incorporação de visões de mercado, simplificando o processo de ajuste dos retornos esperados de acordo com as expectativas subjetivas sobre o mercado.

4 APLICAÇÃO DO MODELO DE MARKOWITZ E BLACK-LITTERMAN

Essa seção se dedicará a explorar a aplicação da otimização da carteira através dos modelos de Markowitz e Black-Litterman, bem como os resultados obtidos através de cada otimização.

4.1 MATRIZ DE CORRELAÇÃO DOS ATIVOS

Uma matriz de correlação entre ativos é uma ferramenta estatística que apresenta, de forma estruturada, as relações de correlação entre diferentes ativos em um portfólio. Cada elemento da matriz representa o coeficiente de correlação entre dois ativos, variando de -1 a 1. Valores próximos a 1 indicam uma relação positiva forte, ou seja, os ativos tendem a se movimentar na mesma direção. Valores próximos a -1 indicam uma relação negativa forte, onde os ativos tendem a se mover em direções opostas. Já valores próximos a 0 refletem uma baixa correlação, sugerindo que os movimentos dos ativos são, em grande parte, independentes. Essa matriz é amplamente utilizada em finanças para avaliar a diversificação de um portfólio, pois combina ativos com baixas ou negativas correlações pode reduzir o risco total do investimento, contribuindo para a otimização da carteira.

Figura 3: Matriz de correlação

	BRAX11	IVVB11	SMAL11	DIVO11	IMA-B 5	IMA-B 5+	IMA-S	IRF-M
BRAX11	1,000000	0,083413	0,789282	0,802798	0,445827	0,503923	0,000060	0,498468
IVVB11	0,083413	1,000000	0,035074	0,002094	-0,139318	-0,149929	-0,017308	-0,204763
SMAL11	0,789282	0,035074	1,000000	0,790297	0,487742	0,558182	-0,008954	0,553116
DIVO11	0,802798	0,002094	0,790297	1,000000	0,456598	0,534425	0,004496	0,520142
IMA-B 5	0,445827	-0,139318	0,487742	0,456598	1,000000	0,812864	0,060674	0,850150
IMA-B 5+	0,503923	-0,149929	0,558182	0,534425	0,812864	1,000000	0,024823	0,852992
IMA-S	0,000060	-0,017308	-0,008954	0,004496	0,060674	0,024823	1,000000	0,071651
IRF-M	0,498468	-0,204763	0,553116	0,520142	0,850150	0,852992	0,071651	1,000000

Fonte: Elaborado pelo autor

A matriz de correlação entre os ativos selecionados para a carteira revela que dois deles possuem a menor correlação com os demais: o IVVB11, ETF que acompanha o índice S&P500, e o IMA-S, que segue a variação diária da taxa Selic.

A inclusão de ativos descorrelacionados é essencial para manter a estabilidade da carteira, especialmente durante períodos de alta volatilidade nos ativos de risco. Uma baixa correlação entre ativos significa que, mesmo em momentos de crise, a carteira sempre contará com componentes que não estão enfrentando dificuldades significativas.

4.2 ANÁLISE DE RESULTADOS

Nesta seção, serão apresentados e discutidos os resultados obtidos a partir da aplicação dos métodos desenvolvidos para a construção das carteiras de investimento. O objetivo é avaliar o desempenho dos portfólios otimizados, considerando métricas como volatilidade, retorno total e índice Sharpe, visando entender qual dos modelos de otimização foi capaz de entregar a carteira com o melhor Risco-Retorno.

4.2.1 MODELO DE MARKOWITZ

A função de otimização baseia-se na teoria moderna de portfólio, onde o retorno esperado da carteira é calculado como a média ponderada dos retornos dos ativos, enquanto a volatilidade é calculada com base na covariância dos retornos. O Índice de Sharpe é então maximizado utilizando a função minimize da biblioteca *SciPy*, com a restrição de que a soma dos pesos dos ativos deve ser igual a 1 e os pesos de cada ativo são limitados entre 0 e 1 (ou seja, sem permitir vendas a descoberto).

O processo de otimização é iterado anualmente, treinando o modelo até o ano anterior com os dados históricos e aplicando os pesos otimizados ao ano subsequente para testar o desempenho da carteira. Em cada iteração, o algoritmo calcula o retorno esperado, a volatilidade e o Índice de Sharpe da carteira. Além disso, os retornos anuais são comparados com os benchmarks CDI e IBOV, de modo a avaliar o desempenho relativo da carteira otimizada.

Tabela 1: Peso dos ativos na carteira ano a ano - Markowitz

	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
BRAX11:	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
IVVB11:	62,91%	23,19%	24,10%	6,14%	10,61%	11,10%	12,48%	14,44%	6,31%	4,70%
SMAL11:	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
DIVO11:	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
IMA-B 5	0,00%	76,81%	56,09%	8,90%	22,08%	49,65%	83,44%	85,56%	45,01%	32,03%
IMA-B 5+	37,09%	0,00%	19,81%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
IMA-S:	0,00%	0,00%	0,00%	64,69%	27,33%	12,62%	0,00%	0,00%	48,68%	63,27%
IRF-M:	0,00%	0,00%	0,00%	20,27%	39,98%	26,63%	4,09%	0,00%	0,00%	0,00%

Fonte: Elaborado pelo autor

A carteira inicia com uma maior concentração no índice S&P500, por meio do ETF IVVB11, que possui um peso de 62,91% no início de 2015. À medida que o modelo incorpora mais dados, o peso desse ativo começa a diminuir gradualmente, cedendo espaço para o IMA-B 5, um índice que mede o desempenho dos títulos do Tesouro Nacional vinculados à inflação de curto prazo. Essa mudança na alocação reflete a análise do modelo, que identifica nesses títulos uma melhor relação risco-retorno ao longo do tempo, considerando o cenário em termos de rentabilidade e volatilidade históricas dos ativos analisados.

Os ativos atrelados à bolsa brasileira, BRAX11, SMAL11 e DIVO11, não foram selecionados pelo modelo em nenhum dos anos de composição da carteira. Isso pode indicar que, com base no histórico de volatilidade e rentabilidade desses ativos, eles não foram considerados as melhores opções para uma carteira cujo objetivo é maximizar a relação risco-retorno.

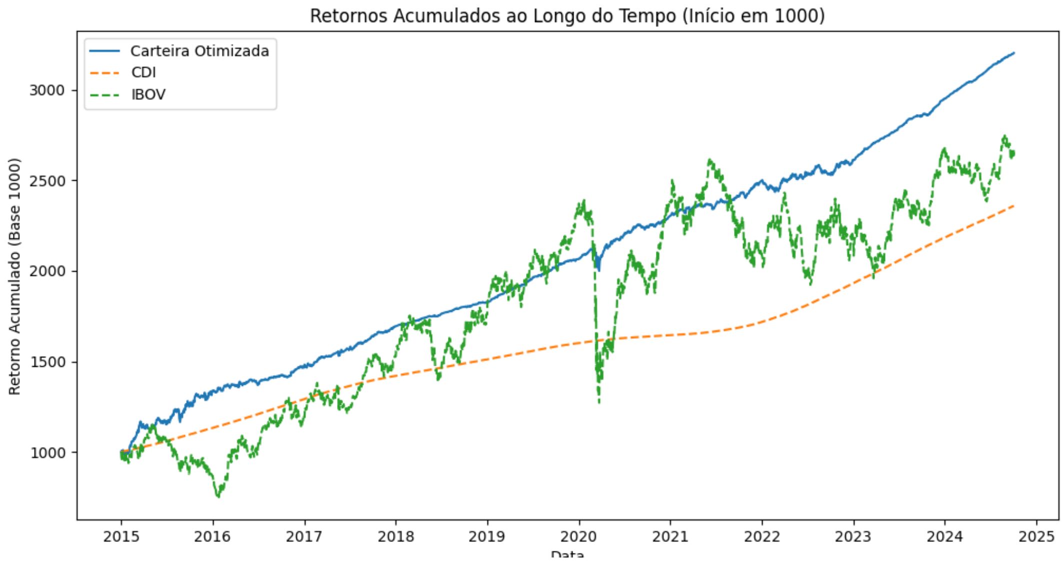
Tabela 2: Rentabilidade ano a ano - Markowitz

Ano	CDI	IBOV	Markowitz
2015	13,24%	-13,31%	32,38%
2016	14,00%	38,94%	9,24%
2017	9,93%	26,86%	15,05%
2018	6,42%	15,03%	7,64%
2019	5,96%	31,58%	12,47%
2020	2,76%	2,92%	11,15%
2021	4,42%	-11,93%	8,04%
2022	12,39%	4,69%	4,49%
2023	13,04%	22,28%	12,48%
2024	8,12%	-1,87%	11,00%
Total Acumulado	**135,85%**	**163,31%**	**220,19%**
Volatilidade anual	**0,25%**	**23,77%**	**4,98%**
CAGR	**8,86%**	**10,06%**	**12,21%**

Fonte: Elaborado pelo autor

A tabela 2 apresenta o desempenho anual da carteira otimizada utilizando o método de Markowitz (1952), juntamente com a performance dos dois principais índices de comparação. Observa-se que a carteira alcança uma volatilidade significativamente reduzida, sem comprometer o potencial de rentabilidade. Durante o período analisado, a carteira registrou um retorno total de 220,19%, com uma Taxa de Crescimento Anual Composta (*Compound Anual Growth Rate*, CAGR) de 12,21%, representando a rentabilidade média da carteira ano a ano, e uma volatilidade de 4,98%, calculada como o desvio padrão da carteira em relação à sua própria média ao longo dos anos. O CDI e o IBOV, índices de mercado utilizados como base de comparação de rentabilidade, apresentaram retornos de 135% e 163%, respectivamente.

Figura 4 - Rentabilidade acumulada - Markowitz



Fonte: Elaborado pelo autor.

Analisando o gráfico de rentabilidade acumulada da carteira, é possível perceber que ela apresentou um bom desempenho em períodos de instabilidade na bolsa brasileira, mas teve um desempenho inferior durante momentos de otimismo no Ibovespa. No entanto, devido à ausência de desvalorizações significativas, a carteira foi capaz de superar o índice ao longo do tempo, mostrando uma performance acumulada superior.

4.2.2 MODELO DE BLACK-LITTERMAN

Para a aplicação do modelo Black-Litterman na otimização do portfólio, foram utilizados os mesmos dados históricos empregados no modelo de Markowitz. Para calcular o retorno de equilíbrio de mercado, considerando que estamos lidando com ETFs, é mais eficiente utilizar a metodologia CAPM. Isso se deve ao fato de que, para aplicar o modelo com base na capitalização de mercado, seria necessário somar a capitalização de todos os ativos contidos nos ETFs, o que tornaria o processo excessivamente complexo. No cálculo pelo CAPM, o primeiro passo é a definição da taxa livre de risco. Em 2015, a Selic estava em 11,75%, portanto, essa será a taxa utilizada. Após a definição da taxa livre de risco, calcula-se o beta dos ativos em relação ao Ibovespa, permitindo, então, o cálculo do retorno esperado desses ativos.

Após o cálculo do retorno de equilíbrio de mercado, foi incorporada a matriz de visões do investidor, ajustando os pesos dos ativos na carteira de forma a refletir essas visões.

A implementação da Matriz de Visão do Investidor incluiu o desenvolvimento de um mecanismo que permite ao investidor ajustar suas expectativas ao longo dos anos. Para testar essa funcionalidade, foi realizada uma composição de carteira utilizando um modelo que incorpora as visões expressas por investidores profissionais.

Para refletir as visões desses profissionais, foram coletadas informações de portais de notícias, especialmente em matérias publicadas no final do ano, que resumiam as perspectivas de gestores de importantes casas de análise para cada ativo (Exame, 2017; Borges, 2015; Dana; Del Giglio, 2015; D'Ávila, 2016; Época Negócios, 2014; Pires, 2015; Rivas, 2020; Sene, 2021, 2023, 2023; Takar, 2018; Valle, 2019). Quando os gestores demonstraram pessimismo em relação à bolsa, projetou-se um retorno 2% inferior ao retorno de equilíbrio de mercado para todos os ativos da bolsa brasileira na matriz de visão. Da mesma forma, quando o otimismo prevaleceu, foi projetado um retorno 2% superior ao retorno de equilíbrio de mercado. Essa abordagem também foi aplicada a outros ativos na matriz de visão dos investidores, garantindo que as visões de mercado fossem incorporadas de forma consistente em toda a carteira.

Figura 5 - Matriz de visão dos investidores profissionais

	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
BRAX11:	Pessimista	Pessimista	Pessimista	Otimista	Otimista	Otimista	Otimista	Pessimista	Pessimista	Neutro
IVVB11:	Otimista	Pessimista	Pessimista	Otimista	Pessimista	Pessimista	Pessimista	Otimista	Pessimista	Pessimista
SMAL11:	Pessimista	Pessimista	Pessimista	Otimista	Otimista	Otimista	Otimista	Pessimista	Pessimista	Neutro
DIVO11:	Pessimista	Pessimista	Pessimista	Otimista	Otimista	Otimista	Otimista	Pessimista	Pessimista	Neutro
IMA-B 5	Neutro	Neutro	Otimista	Neutro	Neutro	Pessimista	Neutro	Otimista	Otimista	Neutro
IMA-B 5+	Neutro	Neutro	Otimista	Neutro	Neutro	Pessimista	Neutro	Otimista	Otimista	Neutro
IMA-S:	Otimista	Otimista	Otimista	Neutro	Neutro	Pessimista	Neutro	Otimista	Otimista	Neutro
IRF-M:	Neutro	Otimista	Otimista	Neutro	Neutro	Pessimista	Neutro	Pessimista	Pessimista	Neutro

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com a definição da matriz de visões dos investidores concluída, procedeu-se à execução do script responsável por calcular, ano a ano, a composição ideal da carteira para o período subsequente. Esse cálculo foi realizado com base no modelo CAPM ajustado, que incorporou as expectativas expressas pelos investidores na matriz de visões. Dessa forma, o script gerou uma alocação de ativos ajustada para refletir as visões de mercado, proporcionando uma estratégia otimizada para o próximo ano, alinhada às perspectivas de risco e retorno estabelecidas no modelo.

Tabela 3: Peso dos ativos na carteira ano a ano - Black-Litterman

	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
BRAX11:	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	20,00%	23,45%	0,00%	0,00%	0,00%
IVVB11:	100,00%	100,00%	77,44%	80,22%	0,00%	0,00%	0,00%	75,92%	73,44%	0,00%
SMAL11:	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	8,76%	0,27%	0,00%	0,00%	0,00%
DIVO11:	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	86,32%	53,47%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
IMA-B 5	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	59,11%	0,00%	0,00%	20,18%
IMA-B 5+	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	42,71%
IMA-S:	0,00%	0,00%	22,56%	19,78%	13,68%	15,43%	14,52%	24,08%	26,56%	12,80%
IRF-M:	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	2,33%	2,64%	0,00%	0,00%	24,31%

Fonte: Elaborado pelo autor

Observa-se que, em determinados anos, as visões dos investidores não foram incorporadas à composição da carteira devido ao elevado peso atribuído a certos ativos pelo modelo CAPM. Esse comportamento ocorreu porque a expectativa de retorno dos ativos não foi suficiente para justificar uma alteração na alocação do portfólio. Embora existam formas de mitigar essa questão — como, por exemplo, estabelecendo um limite máximo de peso para cada ativo na carteira —, essas modificações não foram implementadas, uma vez que o objetivo deste estudo é comparar os modelos em suas formas originais, sem ajustes que desviem da abordagem proposta.

Tabela 8: Rentabilidade ano a ano – Black-Litterman

Tabela 4: Rentabilidade ano a ano - Black-Litterman

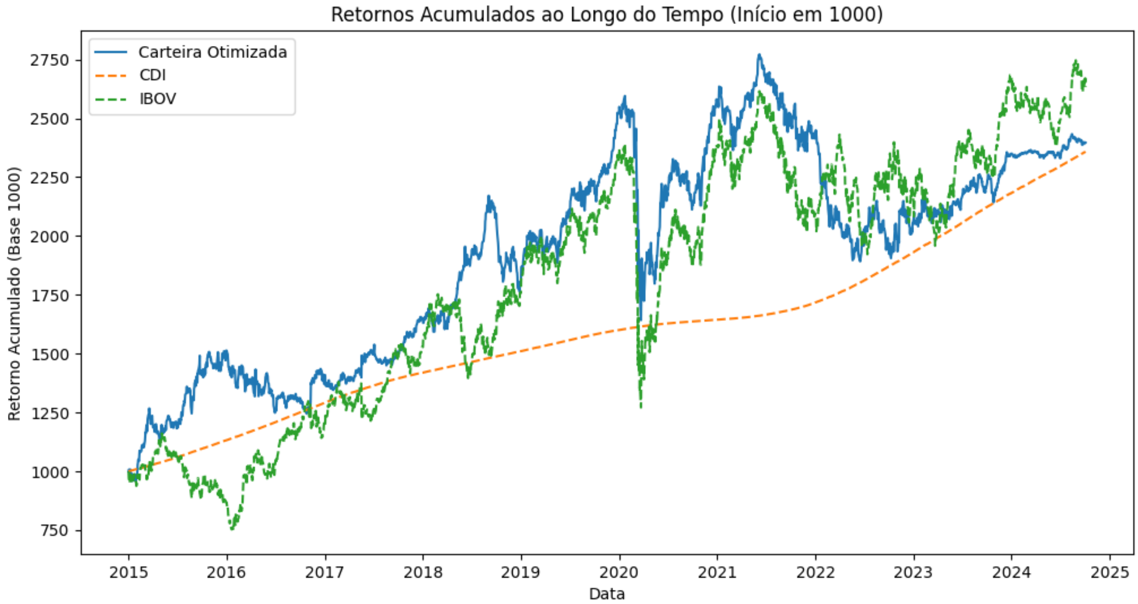
Ano	CDI	IBOV	Black-Litterman
2015	13,24%	-13,31%	51,29%
2016	14,00%	38,94%	-9,36%
2017	9,93%	26,86%	20,36%
2018	6,42%	15,03%	9,44%
2019	5,96%	31,58%	39,48%
2020	2,76%	2,92%	2,10%
2021	4,42%	-11,93%	-5,63%
2022	12,39%	4,69%	-15,43%

2023	13,04%	22,28%	14,41%
2024	8,12%	-1,87%	2,05%
Total Acumulado	**135,85%**	**163,31%**	**139,71%**
Volatilidade anual	**0,25%**	**23,77%**	**17,78%**
CAGR	**8,86%**	**10,06%**	**9,04%**

Fonte: Elaborado pelo autor

A análise dos resultados revela que a carteira otimizada pelo modelo Black-Litterman apresentou um retorno total inferior ao Ibovespa, porém superior ao CDI. Esse desempenho pode ser atribuído, em grande parte, à performance observada nos últimos anos, a partir de 2021, quando as visões dos gestores se tornaram mais pessimistas em relação aos ativos de risco, especialmente à bolsa brasileira, a partir de 2022. A cautela dos gestores em relação a esses ativos impactou diretamente a composição da carteira e, consequentemente, seus resultados.

Figura 6: Rentabilidade acumulada - Black-Litterman



Fonte: Elaborado pelo autor

O gráfico de rentabilidade permite observar o comportamento da carteira ao longo do tempo, que apresentou uma volatilidade significativamente maior e um desempenho mais errático, com menor consistência nos resultados ano a ano. Embora o desempenho da carteira tenha ficado abaixo do Ibovespa durante o período analisado, foi superior ao CDI.

4.3 COMPARATIVO DOS MODELOS

Para garantir uma comparação justa entre os modelos, foi realizada uma análise ano a ano dos resultados, permitindo identificar os modelos que apresentaram melhor desempenho de forma consistente ao longo do tempo. Essa abordagem possibilitou não apenas compreender a performance anual, mas também avaliar a rentabilidade total acumulada e a volatilidade média anual de cada carteira.

Os principais critérios de comparação utilizados foram a rentabilidade total, a volatilidade anual e o CAGR (Compound Annual Growth Rate), que representa o retorno composto médio anual das carteiras ao longo do período analisado. Além disso, foi calculado o índice de Sharpe, uma métrica amplamente utilizada em finanças para medir o retorno ajustado ao risco. O índice de Sharpe considera a relação entre o retorno excedente ao ativo livre de risco e a volatilidade do portfólio, permitindo avaliar a eficiência da carteira em gerar retorno por unidade de risco assumido. Esses indicadores, em conjunto, fornecem uma visão abrangente da qualidade e consistência dos modelos analisados, sendo fundamentais para identificar as estratégias de otimização mais robustas.

Tabela 5: Rentabilidade ano a ano - comparativo

Ano	CDI	IBOV	Black-Litterman	Markowitz
2015	13,24%	-13,31%	51,29%	32,38%
2016	14,00%	38,94%	-9,36%	9,24%
2017	9,93%	26,86%	20,36%	15,05%
2018	6,42%	15,03%	9,44%	7,64%
2019	5,96%	31,58%	39,48%	12,47%
2020	2,76%	2,92%	2,10%	11,15%
2021	4,42%	-11,93%	-5,63%	8,04%
2022	12,39%	4,69%	-15,43%	4,49%
2023	13,04%	22,28%	14,41%	12,48%
2024	8,12%	-1,87%	2,05%	11,00%
Total Acumulado	**135,85%**	**163,31%**	**139,71%**	**220,19%**
Volatilidade anual	**0,25%**	**23,77%**	**17,78%**	**4,98%**
CAGR	**8,86%**	**10,06%**	**9,04%**	**12,21%**

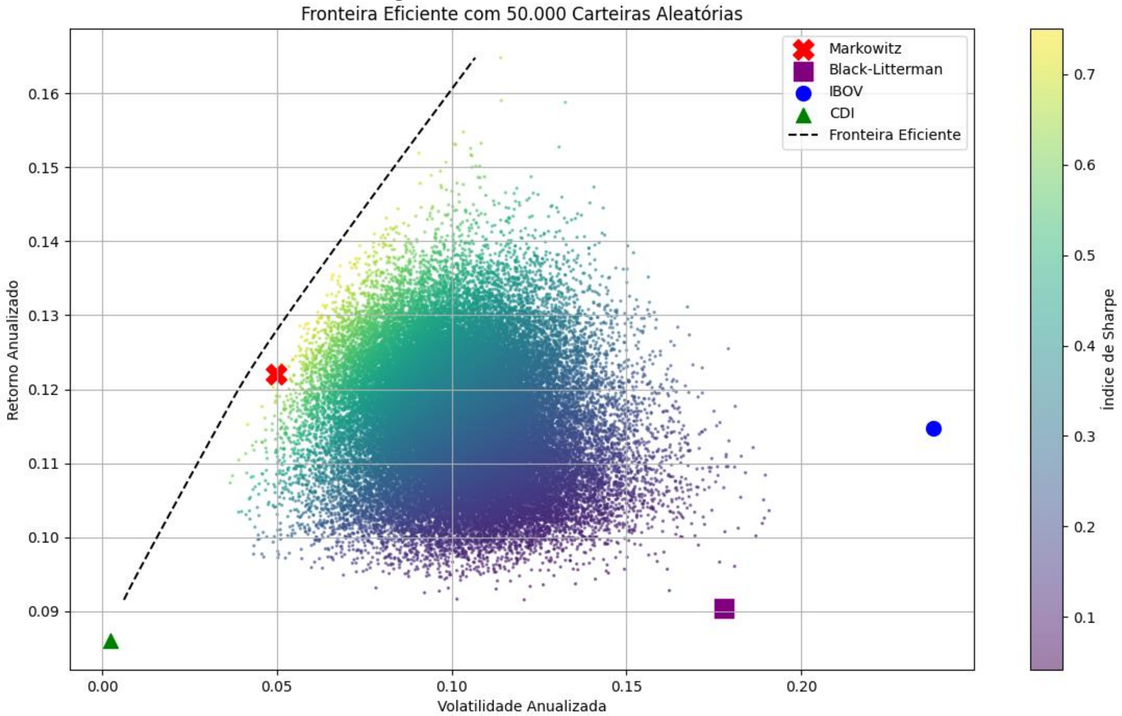
Fonte: Elaborado pelo autor

A análise da tabela 5 revela que, embora o modelo de Markowitz não tenha apresentado muitos períodos de rentabilidade excepcional, ele conseguiu entregar um retorno superior ao longo do tempo. Esse resultado pode ser atribuído à sua consistência, uma vez que o modelo não registrou nenhum ano com resultados negativos e manteve retornos razoáveis em praticamente todos os períodos analisados. Além disso, o índice Sharpe do modelo foi significativamente maior, totalizando 0,67 no período, em contraste com os -0,11 registrados pelo modelo Black-Litterman, demonstrando uma melhor relação entre risco e retorno na otimização por Markowitz.

Esse desempenho superior do modelo de Markowitz pode ser explicado pela ausência de vieses comportamentais, já que o modelo baseia suas decisões na relação estritamente matemática entre risco e retorno, evitando subjetividades ou ajustes baseados em expectativas de mercado. Por outro lado, o modelo Black-Litterman, ao incorporar opiniões de mercado e projeções subjetivas, pode ser mais sensível a erros nas estimativas, especialmente em cenários de alta volatilidade ou de eventos inesperados que desviam dos padrões históricos.

No entanto, o modelo Black-Litterman demonstrou certa vantagem em anos específicos, nos quais projeções de mercado ajustadas refletiram movimentos reais dos ativos, resultando em retornos positivos mesmo em condições adversas. Isso sugere que sua eficácia está condicionada à qualidade das expectativas de mercado incorporadas e à precisão dos ajustes subjetivos realizados.

Figura 7: Fronteira Eficiente



Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 7 apresenta a fronteira eficiente gerada com base em 50.000 carteiras aleatórias, destacando a performance dos modelos de Markowitz e Black-Litterman em relação aos principais benchmarks: IBOV e CDI. Os pontos no gráfico representam carteiras com diferentes combinações de ativos, enquanto a linha pontilhada delimita a fronteira eficiente, composta pelas carteiras que maximizam o retorno esperado para cada nível de risco.

O modelo de Markowitz, indicado pelo marcador vermelho, destaca-se por estar mais próximo da fronteira eficiente, com uma combinação de volatilidade e retorno que reflete uma relação risco-retorno favorável. Isso confirma os resultados da tabela 5, onde o modelo demonstrou maior consistência e um índice de Sharpe superior.

Esse desempenho reforça a capacidade do modelo de identificar alocações eficientes sem depender de ajustes subjetivos ou visões de mercado.

Por outro lado, o modelo Black-Litterman, representado pelo marcador roxo, encontra-se abaixo da linha da fronteira eficiente, indicando uma performance inferior. Esse resultado está alinhado com a maior volatilidade e menor retorno ajustado ao risco observado ao longo do período analisado. A dependência do modelo em relação às expectativas subjetivas de mercado pode explicar sua posição menos favorável, especialmente em cenários onde as visões de mercado não se concretizaram.

Os benchmarks IBOV e CDI apresentam desempenhos contrastantes. O IBOV, representado pelo marcador azul, exibe alto retorno anualizado, mas com elevada volatilidade, destacando sua natureza de maior risco. Já o CDI, indicado pelo triângulo verde, apresenta o menor risco dentre os pontos analisados, mas com retorno significativamente inferior.

A análise confirma que, enquanto o modelo de Markowitz proporciona uma abordagem robusta para a otimização de carteiras, o modelo Black-Litterman pode ser mais vulnerável a erros de estimativa e projeções de mercado, resultando em uma menor eficiência na relação risco-retorno.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo principal avaliar a eficácia e as diferenças entre os modelos de otimização de carteiras de Markowitz e Black-Litterman, utilizando ETFs como ativos base no contexto do mercado brasileiro. A análise realizada ao longo do estudo permitiu observar as características distintas de cada modelo, bem como suas vantagens e limitações em termos de retorno absoluto e relação risco-retorno. A utilização de dados históricos e algoritmos desenvolvidos em Python proporcionou uma base para a construção e comparação das carteiras otimizadas, contribuindo para a análise.

O modelo de Markowitz destacou-se por sua consistência ao longo do tempo, entregando retornos regulares e sem apresentar resultados negativos em nenhum dos anos analisados. Essa característica refletiu-se em um índice Sharpe superior, evidenciando que o modelo é particularmente eficaz em proporcionar uma relação risco-retorno favorável. Além disso, sua abordagem matemática e objetiva, baseada exclusivamente em dados históricos, elimina vieses subjetivos, tornando-o uma ferramenta confiável para investidores que buscam maior previsibilidade e menor exposição a riscos desnecessários.

Por outro lado, o modelo Black-Litterman apresentou um diferencial importante ao incorporar as visões subjetivas de mercado de gestores e investidores profissionais. Essa flexibilidade permite ajustar a composição da carteira de acordo com expectativas específicas, o que pode ser especialmente valioso em contextos específicos ou quando existem insights relevantes sobre o desempenho de determinados ativos. No entanto, o estudo também evidenciou a vulnerabilidade do modelo às incertezas inerentes às projeções de mercado. Durante os últimos anos analisados, as expectativas pessimistas em relação à bolsa brasileira impactaram negativamente os resultados, resultando em um desempenho inferior ao do modelo de Markowitz em termos de retorno acumulado e estabilidade.

Um aspecto relevante deste trabalho foi a utilização do CAPM para calcular o retorno de equilíbrio de mercado no modelo Black-Litterman. Essa abordagem foi adotada para simplificar a implementação, uma vez que a aplicação padrão do modelo requer os dados de capitalização de mercado de cada ativo presente nos ETFs, o que demandaria um processo mais complexo e de difícil acesso. A escolha pelo CAPM mostrou-se adequada para os objetivos do estudo, oferecendo um equilíbrio entre praticidade e robustez nos resultados.

A principal limitação enfrentada foi a ausência dos dados completos de capitalização de mercado (market cap) dos ativos que compõem os ETFs analisados. Esses dados são fundamentais para a implementação padrão do modelo Black-Litterman, que pondera os retornos implícitos de equilíbrio de acordo com a participação de mercado de cada ativo. A adaptação para o CAPM, embora eficiente, pode ter introduzido diferenças em relação ao comportamento do modelo original. Essa limitação destaca a importância de futuras pesquisas que viabilizem a aplicação integral do modelo, incluindo o acesso às informações necessárias para sua implementação completa.

Este trabalho buscou contribuir para a literatura acadêmica e para a prática do mercado financeiro comparando de maneira sistemática e detalhada dois modelos de otimização amplamente utilizados. Ele reforça a importância de métodos matemáticos e quantitativos para a construção de carteiras otimizadas, ao mesmo tempo que destaca as potencialidades e limitações das abordagens que incorporam expectativas de mercado. Através da análise feita, foi possível constatar que o modelo de Markowitz foi muito mais eficiente em entregar retorno e risco controlado na carteira de investimentos. Através dessa análise, é possível perceber o quanto as perspectivas individuais e projeções de mercado podem distorcer e piorar o retorno de uma carteira de investimentos quando o mercado não age da forma prevista. É importante, então, sempre utilizar a matemática e dados históricos a fim de simplificar e otimizar um portfolio de investimentos.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

2018: é melhor se conformar com retorno baixo ou assumir risco? **Exame**, 14 dez. 2017. Revista Exame. Disponível em: https://exame.com/revista-exame/seu-dinheiro-e-a-economia/. Acesso em 22 de outubro de 2024.

ADLER, T.; KRITZMAN, M. Mean–variance versus full-scale optimization: In and out of sample. **Journal of Asset Management**, United Kingdom, v. 7, n. 5, p. 302-311, jan. 2007. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1057/palgrave.jam.2250042. Acesso em 22 ago. 2024.

ANBIMA. Raio x do investidor brasileiro, ed. 7. **Anbima**, 2023. Disponível em: https://www.anbima.com.br/pt_br/especial/raio-x-do-investidor-brasileiro.htm. Acesso em 22 nov. 2024.

BJERKNES, L.; VUKOVIC, A. Automated advice: a portfolio management perspective on robo-advisors. **Norwegian University of Science and Technology**, Norway, jun. 2017. Disponível em: https://ntnuopen.ntnu.no/ntnu-xmlui/bitstream/handle/11250/2473732/17822_FULLTEXT.pdf?sequence=1. Acesso em 22 ago. 2024.

BLACK, F.; LITTERMAN, R. Global portfolio optimization. **Financial Analysts Journal,** United Kingdom, v. 48, n. 5, p. 28-43, sep. 1992. Disponível em: Black_Litterman_Global_Portfolio_Optimization_1992.pdf. Acesso em: 22 jul. 2024.

BORGES, Diego. Gestora de R$ 3 bilhões mostra como escolhe as melhores ações. **Infomoney**, 1 out. 2015. Onde Investir. Disponível em: https://www.infomoney.com.br/onde-investir/gestora-de-r-3-bilhoes-mostra-como-escolhe-as-melhores-acoes/. Acesso em 22 out. 2024.

CHOPRA, V. K. Improving optimization. **Journal of Investing**, United States, v. 2, n. 3, p. 51-59, 31 aug.1993. Disponível em: https://www.pm-research.com/content/iijinvest/2/3/51. Acesso em 23 ago. 2024.

DANA, S.; DEL GIGLIO, A. Onde investir R$ 200 mil para ter um bom rendimento mensal? **Exame**, 3 nov. 2015. Minhas finanças. Disponível em: https://exame.com/invest/minhas-financas/onde-investir-r-200-mil-para-ter-um-bom-rendimento-mensal/. Acesso em 22 de outubro de 2024.

D’ÁVILA, Mariana. Tenho 25 anos e quero alcançar a independência financeira aos 40; como devo investir?. **Infomoney**, Brasil, 18 nov. 2016. Onde Investir. Disponível em: https://www.infomoney.com.br/onde-investir/tenho-25-anos-e-quero-alcancar-a-independencia-financeira-aos-40-como-devo-investir/. Acesso em 22 out. 2024.

ESPECIALISTAS veem cenário difícil para a bolsa de valores em 2015. **Época Negócios,** Brasil, 26 dez. 2014. Disponível em: https://epocanegocios.globo.com/Informacao/Visao/noticia/2014/12/especialistas-veem-cenario-dificil-para-bolsa-de-valores-em-2015.html. Acesso em 22 out. 2024.

ETFs Listados. **B3**, Brasil, 2024. Disponível em: https://www.b3.com.br/pt_br/produtos-e-servicos/negociacao/renda-variavel/etf/renda-variavel/etfs-listados/. Acesso em: 18 jul. 2024.

FRABASILE D. 20 anos após 1º ETF brasileiro, mercado de fundos de índice segue em crescimento. **Bora Investir,** 2 mai. 2024, B3. Disponível em: https://borainvestir.b3.com.br/tipos-de-investimentos/renda-variavel/etfs/20-anos-apos-criacao-do-primeiro-etf-brasileiro-mercado-de-fundos-de-indice-segue-em-crescimento/. Acesso em 1 nov. 2024

GOETZMANN, W.; EDWARDS, F. Short-horizon inputs and long-horizon portfolio choice. **Journal of Portfolio Management**, New York, v. 20, n. 4, p. 76-81, 1994. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/247905588_Short-Horizon_Inputs_and_Long-Horizon_Portfolio_Choice. Acesso em 27 ago. 2024.

INVESTMENT COMPANY INSTITUTE - ICI. **2021 Investment Company Fact Book.** Washington: ICI, 2021. Disponível em: https://www.ici.org/system/files/2021-05/2021_factbook.pdf. Acesso em: 19 jul. 2024.

KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. Prospect theory: an analysis of decision under risk. **Econometrica**, United States, v. 47, n. 2, p. 263-292, mar. 1979. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/i332789. Acesso em 27 ago. 2024.

KIKUCHI A.; MOTA P; Os ETFs estão engolindo o mercado – e o Brasil está entrando na onda. **Brazil Journal**, 15 out. 2024. Disponível em: https://braziljournal.com/opiniao-os-etfs-estao-engolindo-o-mercado-e-o-brasil-esta-entrando-na-onda/. Acesso em 1 nov. 2024.

LITTERMAN, R. **Modern investment management:** an equilibrium approach. New York: Wiley Finance, 2003.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **The Journal of Finance**, United States, v. 7, n. 1, p. 77-91, mar. 1952. Disponível em: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x. Acesso em 27 ago. 2024.

MICHAUD, R. O. The markowitz optimization enigma: is ‘optimized’ optimal? **Financial Analysts Journal**, United Kingdom, v. 45, n. 1, p. 31-42, jan. 1989. Disponível em: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2387669. Acesso em 2a7 ago. 2024.

MORNINGSTAR. Asset allocation optimization methodology. **Morningstar**, United States, 12 dec. 2011.Disponível em: https://morningstardirect.morningstar.com/clientcomm/Morningstar-Asset-Allocation-Optimization-Methodology.pdf. Acesso em 27 ago. 2024.

NORDHAUS, W. The economics of tail events with an application to climate change. **Review of Environmental Economics and Policy,** United States, v. 5, n. 2, p. 240-257, 02 mai. 2011.

PIRES, Uller. A hora da renda fixa: veja as melhores aplicações para você ganhar muito. **Infomoney**, 21 out, 2015. Onde Investir. Disponível em: https://www.infomoney.com.br/onde-investir/a-hora-da-renda-fixa-veja-as-melhores-aplicacoes-para-voce-ganhar-muito/. Acesso em 22 de outubro de 2024.

POTERBA, J. M.; SHOVEN, J. B. Exchange-traded funds: A new investment option for taxable investors. **American Economic Review**, United States, v. 92, n. 2, p. 422-427, may 2002. Disponível em: https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/000282802320191732. Acesso em 23 jul. 2024.

POTERBA, J. M.; SUMMERS, L. H. Mean reversion in stock prices: Evidence and implications. **Journal of Financial Economics**, Netherlands, v. 22, n. 1, p. 27-59, oct. 1988. Disponível em: https://ideas.repec.org/a/eee/jfinec/v22y1988i1p27-59.html. Acesso em 23 jul. 2024.

RIVAS, Katherine. Onde investir seu dinheiro em 2021? 5 casas de análise respondem. **Investnews**, 23 dez. 2020, Finanças. Disponível em: https://investnews.com.br/financas/onde-investir-seu-dinheiro-em-2021-conheca-a-visao-de-5-casas-de-analise/. Acesso em 22 out. 2024.

ROSS, S.; WESTERFIELD, R.; JORDAN, B.; LAMB, R.; **Fundamentos de administração financeira**. 9 ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

SANDOVAL L.; FRANCA I. Correlation of financial markets in times of crisis. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications,** Netherlands, v. 391, n. 1-2, p. 187-208, 1 jan. 2012. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S037843711100570X. Acesso em 22 set. 2024.

SATCHELL, S.; SCOWCROFT, A. **A demystification of the Black–Litterman model:** managing quantitative and traditional portfolio construction. **Journal of Asset Management**, United Kingdom, v. 1, n. 2, p. 138-150, sep. 2000. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/31962785_A_demystification_of_the_Black-Litterman_model_Managing_quantitative_and_traditional_portfolio_construction. Acesso em 19 jul. 2024.

SENE, Bruna. Onde investir em 2022: os desafios financeiros de uma família moderna. **Riconnect**, 1 dez. 2021. Disponível em: https://riconnect.rico.com.vc/analises/onde-investir-em-2022/. Acesso em: 22 out. 2024.

SENE, Bruna. Onde investir em 2023. **Riconnect,** 02 jan, 2023. Disponível em: https://riconnect.rico.com.vc/analises/onde-investir-em-2023/. Acesso em 22 de outubro de 2024.

SENE, Bruna. Onde investir em 2024. **Riconnect**, 29 dez. 2023. Disponível em: https://riconnect.rico.com.vc/analises/onde-investir-em-2024/. Acesso em 22 de outubro de 2024.

SHARPE, W. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. **The Journal of Finance**, United States, v. 19, n. 3, p. 425-442, Sept. 1964. Disponível em: https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x. Acesso em: 18 out. 2024.

SWENSEN, D. F. **Pioneering portfolio management:** an unconventional approach to institutional investment. New York: Free Press, 2009.

SIEGEL J. **Stocks for the long run:** the definitive guide to financial market returns and long-term investment strategies, ed. 5. New York: McGraw Hill, 7 jan. 2014.

TAKAR, Téo. Investimento de 2019 é a Bolsa, via ações ou fundos, recomendam analistas, **UOL,** 29 dez. 2018, Finanças Pessoais. Disponível em: https://economia.uol.com.br/financas-pessoais/noticias/redacao/2018/12/29/investimento-de-2019-e-a-bolsa-via-acoes-ou-fundos-recomendam-analistas.htm. Acesso em 22 de outubro de 2024.

TESOURO DIRETO. Tudo o que você precisa saber sobre o tesouro. **Tesouro Direto**, [2024]*. Disponível em: https://www.tesourodireto.com.br/conheca/conheca-o-tesouro-direto.htm. Acesso em 1 nov. 2024.

VALLE, Patrícia. Com juros baixos, investimento em Bolsa e fundos imobiliários são as apostas para 2020, **O Globo**, 30 dez. 2019, Economia. Disponível em: https://oglobo.globo.com/economia/com-juros-baixos-investimento-em-bolsa-fundos-imobiliarios-sao-as-apostas-para-2020-24164048. Acesso em 22 de outubro de 2024.

APÊNDICE A – ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO POR MARKOWITZ

O algoritmo também pode ser encontrado no seguinte link: https://github.com/kevyncosta/python-mark-black-litterman.

```
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import minimize
import os

data_path = os.path.join('dados', 'base_dados.xlsx')
df = pd.read_excel(data_path, sheet_name='Resumo')
df['Data'] = pd.to_datetime(df['Data'])
df.set_index('Data', inplace=True)

# Lista de ativos
ativos = ['BRAX11', 'IVVB11', 'SMAL11', 'DIVO11', 'IMA-B 5', 'IMA-B 5+', 'IMA-S', 'IRF-
M']
referencias = ['CDI', 'IBOV']

retornos = df[ativos + referencias].pct_change().dropna()
def calcular_portfolio(pesos, retornos, rf):
   retornos_portfolio = np.dot(retornos.mean(), pesos) * 252  # Retorno médio
anualizado
   volatilidade = np.sqrt(np.dot(pesos.T, np.dot(retornos.cov() * 252, pesos)))  #
Volatilidade anualizada
   sharpe_ratio = (retornos_portfolio - rf) / volatilidade
   return retornos_portfolio, volatilidade, sharpe_ratio

def objetivo_sharpe(pesos, retornos, rf):
   retorno, volatilidade, sharpe_ratio = calcular_portfolio(pesos, retornos, rf)
   return -sharpe_ratio  # Negativo porque o otimizador minimiza
```

```
def restricao_soma_pesos(pesos):
    return np.sum(pesos) - 1

limites = tuple((0, 1) for ativo in ativos)
restricoes = {'type': 'eq', 'fun': restricao_soma_pesos}

anos = sorted(retornos.index.year.unique())
anos = [ano for ano in anos if ano >= 2015]

pesos_carteira = {}
retornos_anuais_carteira = pd.Series(dtype=float)
retornos_anuais_CDI = pd.Series(dtype=float)
retornos_anuais_IBOV = pd.Series(dtype=float)

valor_inicial = 1000
valor_acumulado = valor_inicial
retornos_acumulados = pd.DataFrame()
retornos_diarios_carteira = pd.Series(dtype=float)
retorno_ano_a_ano = {'Ano': [], 'Carteira Otimizada (%)': [], 'CDI (%)': [], 'IBOV (%)':
[]}

for ano in anos:
    dados_treinamento = retornos[retornos.index.year < ano][ativos + ['CDI']]
    dados_teste = retornos[retornos.index.year == ano]
    if dados_treinamento.empty or dados_teste.empty:
        print(f"Dados insuficientes para o ano {ano}. Pulando para o próximo ano.")
        continue
    rf = dados_treinamento['CDI'].mean() * 252
    dados_treinamento_ativos = dados_treinamento[ativos]
    pesos_iniciais = np.array(len(ativos) * [1 / len(ativos)])
    resultado = minimize(objetivo_sharpe, pesos_iniciais,
args=(dados_treinamento_ativos, rf),
                    method='SLSQP', bounds=limites, constraints=restricoes)
```

```
    if not resultado.success:
        print(f"Otimização falhou para o ano {ano}. Mensagem: {resultado.message}")
        continue
    pesos_otimizados = resultado.x
    pesos_carteira[ano] = pesos_otimizados
    retornos_portfolio_diario = dados_teste[ativos].dot(pesos_otimizados)
    retornos_diarios_carteira = pd.concat([retornos_diarios_carteira,
retornos_portfolio_diario])
    acumulado_atual = (1 + retornos_portfolio_diario).cumprod() * valor_acumulado
    valor_acumulado = acumulado_atual.iloc[-1]
    retornos_acumulados = pd.concat([retornos_acumulados,
acumulado_atual.to_frame('Carteira Otimizada')], axis=0)

    rentabilidade_total_anual_carteira = (1 + retornos_portfolio_diario).prod() - 1
    rentabilidade_total_anual_CDI = (1 + dados_teste['CDI']).prod() - 1
    rentabilidade_total_anual_IBOV = (1 + dados_teste['IBOV']).prod() - 1

    N_dias_uteis_ano = retornos_portfolio_diario.shape[0]
    N_anos_ano_atual = N_dias_uteis_ano / 252

    retorno_anual_carteira = (1 + rentabilidade_total_anual_carteira) ** (1 /
N_anos_ano_atual) - 1
    retorno_anual_CDI = (1 + rentabilidade_total_anual_CDI) ** (1 /
N_anos_ano_atual) - 1
    retorno_anual_IBOV = (1 + rentabilidade_total_anual_IBOV) ** (1 /
N_anos_ano_atual) - 1

    retornos_anuais_carteira[ano] = retorno_anual_carteira
    retornos_anuais_CDI[ano] = retorno_anual_CDI
    retornos_anuais_IBOV[ano] = retorno_anual_IBOV

    retorno_ano_a_ano['Ano'].append(ano)
    retorno_ano_a_ano['Carteira Otimizada (%)'].append(retorno_anual_carteira *
100)
```

```
    retorno_ano_a_ano['CDI (%)'].append(retorno_anual_CDI * 100)
    retorno_ano_a_ano['IBOV (%)'].append(retorno_anual_IBOV * 100)

    print(f'\nComposição da carteira para {ano}:')
    for ativo, peso in zip(ativos, pesos_otimizados):
        print(f'{ativo}: {peso:.2%}')

    retorno_esperado, volatilidade_anual, sharpe_ratio =
calcular_portfolio(pesos_otimizados, dados_treinamento_ativos, rf)
    print(f'Retorno Esperado Anualizado: {retorno_esperado:.2%}')
    print(f'Volatilidade Anualizada: {volatilidade_anual:.2%}')
    print(f'Índice de Sharpe: {sharpe_ratio:.2f}')


rentabilidade_total_carteira = (1 + retornos_diarios_carteira).prod() - 1
rentabilidade_total_CDI = (1 + retornos.loc[retornos_acumulados.index, 'CDI']).prod()
- 1
rentabilidade_total_IBOV = (1 + retornos.loc[retornos_acumulados.index,
'IBOV']).prod() - 1
N_dias_uteis_total = retornos_diarios_carteira.shape[0]
N_anos = N_dias_uteis_total / 252

retorno_medio_anual_carteira = (1 + rentabilidade_total_carteira) ** (1 / N_anos) - 1
retorno_medio_anual_CDI = (1 + rentabilidade_total_CDI) ** (1 / N_anos) - 1
retorno_medio_anual_IBOV = (1 + rentabilidade_total_IBOV) ** (1 / N_anos) - 1

volatilidade_carteira = retornos_diarios_carteira.std() * np.sqrt(252)
volatilidade_CDI = retornos['CDI'].std() * np.sqrt(252)
volatilidade_IBOV = retornos['IBOV'].std() * np.sqrt(252)


rf_historico = retorno_medio_anual_CDI # Usamos o retorno médio anualizado do
CDI como taxa livre de risco
sharpe_carteira = (retorno_medio_anual_carteira - rf_historico) / volatilidade_carteira
```

```
print(f'\nRentabilidade total da Carteira Otimizada: {rentabilidade_total_carteira:.2%}')
print(f'Volatilidade Anualizada da Carteira Otimizada: {volatilidade_carteira:.2%}')
print(f'Índice de Sharpe da Carteira Otimizada: {sharpe_carteira:.2f}')
print(f'Retorno Médio Anualizado da Carteira Otimizada (CAGR):
{retorno_medio_anual_carteira:.2%}')

print(f'\nRentabilidade total do CDI: {rentabilidade_total_CDI:.2%}')
print(f'Volatilidade Anualizada do CDI: {volatilidade_CDI:.2%}')
print(f'Retorno Médio Anualizado do CDI (CAGR): {retorno_medio_anual_CDI:.2%}')

print(f'\nRentabilidade total do IBOV: {rentabilidade_total_IBOV:.2%}')
print(f'Volatilidade Anualizada do IBOV: {volatilidade_IBOV:.2%}')
print(f'Retorno Médio Anualizado do IBOV (CAGR):
{retorno_medio_anual_IBOV:.2%}')
tabela_retornos = pd.DataFrame(retorno_ano_a_ano)
print('\nTabela de Retornos Ano a Ano:')
print(tabela_retornos)

# Plotar gráfico
plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(retornos_acumulados.index, retornos_acumulados, label='Carteira
Otimizada')
plt.plot(retornos_acumulados.index, (1 + retornos.loc[retornos_acumulados.index,
'CDI']).cumprod() * valor_inicial,
        label='CDI', linestyle='--')
plt.plot(retornos_acumulados.index, (1 + retornos.loc[retornos_acumulados.index,
'IBOV']).cumprod() * valor_inicial,
        label='IBOV', linestyle='--')

plt.legend()
plt.title('Retornos Acumulados ao Longo do Tempo (Início em 1000)')
plt.xlabel('Data')
```

```
plt.ylabel('Retorno Acumulado (Base 1000)')
plt.show()
```

APÊNDICE B – ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO POR BLACK-LITTERMAN

O algoritmo também pode ser encontrado no seguinte link: https://github.com/kevyncosta/python-mark-black-litterman.

```
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import minimize
import os

data_path = os.path.join('dados', 'base_dados.xlsx')
df = pd.read_excel(data_path, sheet_name='Resumo')
df['Data'] = pd.to_datetime(df['Data'])
df.set_index('Data', inplace=True)

ativos = ['BRAX11', 'IVVB11', 'SMAL11', 'DIVO11', 'IMA-B 5', 'IMA-B 5+', 'IMA-S', 'IRF-
M']
referencias = ['CDI', 'IBOV']


retornos = df[ativos + referencias].pct_change().dropna()

rf_anual = 0.13
rf_diaria = (1 + rf_anual) ** (1 / 252) - 1


anos = sorted(retornos.index.year.unique())
anos = [ano for ano in anos if ano >= 2015]


pesos_carteira = {}
retornos_anuais_carteira = pd.Series(dtype=float)
retornos_anuais_CDI = pd.Series(dtype=float)
```

```
retornos_anuais_IBOV = pd.Series(dtype=float)

valor_inicial = 1000
valor_acumulado = valor_inicial
retornos_acumulados = pd.DataFrame()


retornos_diarios_carteira = pd.Series(dtype=float)


retorno_ano_a_ano = {'Ano': [], 'Carteira Otimizada (%)': [], 'CDI (%)': [], 'IBOV (%)':
[], 'Sharpe Ratio': []}


tau = 0.025


def calcular_portfolio(pesos, retornos_esperados, cov_matrix, rf):
   retornos_portfolio = np.dot(retornos_esperados, pesos)  # Retorno esperado da
carteira
   volatilidade = np.sqrt(np.dot(pesos.T, np.dot(cov_matrix, pesos)))  # Volatilidade
da carteira
   sharpe_ratio = (retornos_portfolio - rf) / volatilidade
   return retornos_portfolio, volatilidade, sharpe_ratio


def objetivo_sharpe(pesos, retornos_esperados, cov_matrix, rf):
   retorno, volatilidade, sharpe_ratio = calcular_portfolio(pesos, retornos_esperados,
cov_matrix, rf)
   return -sharpe_ratio


def restricao_soma_pesos(pesos):
   return np.sum(pesos) - 1
```

```
def calcular_retorno_anualizado(retornos_diarios):
    retorno_total = (1 + retornos_diarios).prod() - 1
    n_dias = len(retornos_diarios)
    n_anos = n_dias / 252
    retorno_anualizado = (1 + retorno_total) ** (1 / n_anos) - 1
    return retorno_anualizado

def calcular_volatilidade_anual(retornos_diarios):
    volatilidade_diaria = retornos_diarios.std()
    volatilidade_anual = volatilidade_diaria * np.sqrt(252)
    return volatilidade_anual

limites = tuple((0, 1) for ativo in ativos)
restricoes = {'type': 'eq', 'fun': restricao_soma_pesos}



n = len(ativos)



visoes = {}

# Definir as visões do investidor para cada ano
for ano in anos:
    P = np.zeros((8, n))
    P[0, ativos.index('BRAX11')] = 1
    P[1, ativos.index('IVVB11')] = 1
    P[2, ativos.index('SMAL11')] = 1
    P[3, ativos.index('DIVO11')] = 1
    P[4, ativos.index('IMA-B 5')] = 1
    P[5, ativos.index('IMA-B 5+')] = 1
    P[6, ativos.index('IMA-S')] = 1
    P[7, ativos.index('IRF-M')] = 1
```

```
    # Definir Q com base no ano (exemplo)
    if ano == 2015:
        Q = np.array([-0.02, 0.02, -0.02, -0.02, 0, 0, 0.02, 0])
    elif ano == 2016:
        Q = np.array([-0.02, -0.02, -0.02, -0.02, 0, 0, 0.02, 0.02])
    elif ano == 2017:
        Q = np.array([-0.02, -0.02, -0.02, -0.02, 0.02, 0.02, 0.02, 0.02])
    elif ano == 2018:
        Q = np.array([0.02, 0.02, 0.02, 0.02, 0, 0, 0, 0])
    elif ano == 2019:
        Q = np.array([0.02, -0.02, 0.02, 0.02, 0, 0, 0, 0])
    elif ano == 2020:
        Q = np.array([0.02, -0.02, 0.02, 0.02, -0.02, -0.02, -0.02, -0.02])
    elif ano == 2021:
        Q = np.array([0.02, -0.02, 0.02, 0.02, 0, 0, 0, 0])
    elif ano == 2022:
        Q = np.array([-0.02, 0.02, -0.02, -0.02, 0.02, 0.02, 0.02, -0.02])
    elif ano == 2023:
        Q = np.array([-0.02, -0.02, -0.02, -0.02, 0.02, 0.02, 0.02, -0.02])
    elif ano == 2024:
        Q = np.array([0, -0.2, 0, 0, 0, 0, 0, 0])
    else:
        P = np.zeros((0, n))
        Q = np.array([])
    visoes[ano] = {'P': P, 'Q': Q}


for ano in anos:
    dados_treinamento = retornos[retornos.index.year < ano][ativos + ['CDI', 'IBOV']]
    dados_teste = retornos[retornos.index.year == ano]
    if dados_treinamento.empty or dados_teste.empty:
        print(f"Dados insuficientes para o ano {ano}. Pulando para o próximo ano.")
        continue
```

```
    betas = []
    for ativo in ativos:
        cov_matrix_treinamento = np.cov(dados_treinamento[ativo],
dados_treinamento['IBOV'])
        beta = cov_matrix_treinamento[0, 1] / cov_matrix_treinamento[1, 1]
        betas.append(beta)


    retorno_mercado_treinamento = dados_treinamento['IBOV'].mean() * 252
    pi = rf_anual + np.array(betas) * (retorno_mercado_treinamento - rf_anual)
    cov_matrix_treinamento = dados_treinamento[ativos].cov() * 252

    P = visoes[ano]['P']
    Q = visoes[ano]['Q']

    if P.size > 0 and Q.size > 0:
        delta = 0.05
        omega = np.diag(np.full(P.shape[0], delta))

        M_inverse = np.linalg.inv(tau * cov_matrix_treinamento)
        Omega_inverse = np.linalg.inv(omega)
        retornos_ajustados = np.linalg.inv(M_inverse + np.dot(P.T,
np.dot(Omega_inverse, P)))
        retornos_ajustados = np.dot(retornos_ajustados, (np.dot(M_inverse, pi) +
np.dot(P.T, np.dot(Omega_inverse, Q))))
    else:
        retornos_ajustados = pi

    pesos_iniciais = np.array(len(ativos) * [1 / len(ativos)])
    resultado = minimize(objetivo_sharpe, pesos_iniciais, args=(retornos_ajustados,
cov_matrix_treinamento, rf_anual),
                         method='SLSQP', bounds=limites, constraints=restricoes)
    if not resultado.success:
        print(f"Otimização falhou para o ano {ano}. Mensagem: {resultado.message}")
```

```
        continue
    pesos_otimizados = resultado.x
    pesos_carteira[ano] = pesos_otimizados
    retornos_portfolio_diario = dados_teste[ativos].dot(pesos_otimizados)
    retornos_diarios_carteira = pd.concat([retornos_diarios_carteira,
retornos_portfolio_diario])
    acumulado_atual = (1 + retornos_portfolio_diario).cumprod() * valor_acumulado
    valor_acumulado = acumulado_atual.iloc[-1]
    retornos_acumulados = pd.concat([retornos_acumulados,
acumulado_atual.to_frame('Carteira Otimizada')], axis=0)
    rentabilidade_total_anual_carteira = (1 + retornos_portfolio_diario).prod() - 1
    rentabilidade_total_anual_CDI = (1 + dados_teste['CDI']).prod() - 1
    rentabilidade_total_anual_IBOV = (1 + dados_teste['IBOV']).prod() - 1
    excesso_retorno = retornos_portfolio_diario - rf_diaria
    sharpe_ratio_anual = (excesso_retorno.mean() * 252) / (excesso_retorno.std() *
np.sqrt(252))
    retorno_ano_a_ano['Ano'].append(ano)
    retorno_ano_a_ano['Carteira Otimizada
(%)'].append(rentabilidade_total_anual_carteira * 100)
    retorno_ano_a_ano['CDI (%)'].append(rentabilidade_total_anual_CDI * 100)
    retorno_ano_a_ano['IBOV (%)'].append(rentabilidade_total_anual_IBOV * 100)
    retorno_ano_a_ano['Sharpe Ratio'].append(sharpe_ratio_anual)

    print(f'\nComposição da carteira para {ano}:')
    for ativo, peso in zip(ativos, pesos_otimizados):
        print(f'{ativo}: {peso:.2%}')

    print(f'Retorno Anual da Carteira Otimizada: {rentabilidade_total_anual_carteira *
100:.2f}%')
    print(f'Índice de Sharpe Anualizado: {sharpe_ratio_anual:.2f}')


df_retorno_ano_a_ano = pd.DataFrame(retorno_ano_a_ano)
```

```
print("\nRentabilidade Ano a Ano:")
print(df_retorno_ano_a_ano)


retorno_acumulado_carteira = (1 + retornos_diarios_carteira).cumprod()
retorno_acumulado_CDI = (1 +
retornos['CDI'][retornos_diarios_carteira.index]).cumprod()
retorno_acumulado_IBOV = (1 +
retornos['IBOV'][retornos_diarios_carteira.index]).cumprod()
retorno_total_carteira = (retorno_acumulado_carteira.iloc[-1] - 1) * 100
retorno_total_CDI = (retorno_acumulado_CDI.iloc[-1] - 1) * 100
retorno_total_IBOV = (retorno_acumulado_IBOV.iloc[-1] - 1) * 100
print("\nRetorno Total Acumulado no Período:")
print(f"Carteira Otimizada: {retorno_total_carteira:.2f}%")
print(f"CDI: {retorno_total_CDI:.2f}%")
print(f"IBOV: {retorno_total_IBOV:.2f}%")
retorno_anualizado_carteira =
calcular_retorno_anualizado(retornos_diarios_carteira)
print(f'\nRetorno Anualizado da Carteira Otimizada: {retorno_anualizado_carteira *
100:.2f}%')
volatilidade_anual_carteira = calcular_volatilidade_anual(retornos_diarios_carteira)
print(f'Volatilidade Anual da Carteira Otimizada: {volatilidade_anual_carteira *
100:.2f}%')
volatilidade_anual_CDI =
calcular_volatilidade_anual(retornos['CDI'][retornos_diarios_carteira.index])
volatilidade_anual_IBOV =
calcular_volatilidade_anual(retornos['IBOV'][retornos_diarios_carteira.index])
print(f'Volatilidade Anual do CDI: {volatilidade_anual_CDI * 100:.2f}%')
print(f'Volatilidade Anual do IBOV: {volatilidade_anual_IBOV * 100:.2f}%')
#Plotar gráfico
plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(retorno_acumulado_carteira.index, retorno_acumulado_carteira *
valor_inicial, label='Carteira Otimizada')
```

```
plt.plot(retorno_acumulado_CDI.index, retorno_acumulado_CDI * valor_inicial,
label='CDI', linestyle='--')
plt.plot(retorno_acumulado_IBOV.index, retorno_acumulado_IBOV * valor_inicial,
label='IBOV', linestyle='--')
plt.legend()
plt.title('Retornos Acumulados ao Longo do Tempo (Início em 1000)')
plt.xlabel('Data')
plt.ylabel('Retorno Acumulado (Base 1000)')
plt.show()
excesso_retorno_total = retornos_diarios_carteira - rf_diaria
sharpe_ratio_total = (excesso_retorno_total.mean() * 252) /
(excesso_retorno_total.std() * np.sqrt(252))
print(f'\nÍndice de Sharpe Total do Período: {sharpe_ratio_total:.2f}')
```