

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

GUILHERME MARTINS CABRAL - 00262546

**IDENTIFICAÇÃO RECURSIVA DE
PROCESSO DE NÍVEL COM VARIAÇÃO
NÃO-LINEAR DE PARÂMETROS**

Porto Alegre
2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

GUILHERME MARTINS CABRAL - 00262546

**IDENTIFICAÇÃO RECURSIVA DE
PROCESSO DE NÍVEL COM VARIAÇÃO
NÃO-LINEAR DE PARÂMETROS**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à
COMGRAD/CCA da UFRGS como parte dos requi-
sitos para a obtenção do título de *Bacharel em Enge-
nharia de Controle e Automação*.

Orientadora:
Profa. Dra. Lucíola Campestrini

Porto Alegre
2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

GUILHERME MARTINS CABRAL - 00262546

**IDENTIFICAÇÃO RECURSIVA DE
PROCESSO DE NÍVEL COM VARIAÇÃO
NÃO-LINEAR DE PARÂMETROS**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para a obtenção dos créditos da Atividade de *Trabalho de Conclusão de Curso CCA - II* e aprovado em sua forma final pela Orientadora e Banca Examinadora abaixo.

Orientadora:

Profa. Dra. Lucíola Campestrini, UFRGS

Doutora pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul –
Porto Alegre, Brasil

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Lucíola Campestrini, UFRGS

Doutora pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Prof. Dr Diego Eckhard, UFRGS

Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Prof. Dr. Pedro Rafael Bolognese Fernandes, UFRGS

Doutor pela Universidade de Dortmund – Dortmund, Alemanha

Alceu Heinke Frigeri

Coordenador de Curso

Eng. de Controle e Automação

Porto Alegre
Janeiro - 2025

DEDICATÓRIA

A todos os amigos que fiz nesta longa e árdua jornada.

AGRADECIMENTOS

À Bateria Minotrago, pela descontração e pelos sambas que alegraram os fins de semana, tornando esta caminhada mais leve.

À minha família, em especial à minha mãe, Patrícia Martins da Silva, por seu apoio incondicional e inspiração constante.

E ao meu amor, Lara Fonseca Flôr, por seu carinho e apoio em todos os momentos.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre a implementação de técnicas de identificação recursiva para a atualização contínua, em tempo real, de modelos de processos de nível em tanques. A metodologia combina identificação paramétrica a partir de dados experimentais com uma abordagem analítica fundamentada em leis físicas, resultando em uma identificação do tipo caixa-cinza. A construção e validação do modelo, tanto em cenários simulados quanto em aplicações reais, são realizadas a partir dos modelos polinomiais do tipo NARX. Embora modelos ARX e NARX tenham sido avaliados, o NARX demonstrou maior adequação para capturar as não-linearidades do sistema. Para lidar com ruídos, perturbações e variações de parâmetros ao longo do tempo, emprega-se um estimador não-linear de mínimos quadrados recursivo em conjunto com o modelo NARX, garantindo adaptação dinâmica às condições operacionais mutáveis. Experimentos realizados em uma planta-piloto e em um sistema real de abastecimento de água ilustram a relevância e robustez da metodologia proposta em cenários industriais dinâmicos e não-estacionários.

Palavras-chave: Identificação de sistemas, Mínimos quadrados, NARX, Processo de nível, Sistemas não-lineares, Variação não-linear de parâmetros

ABSTRACT

This work presents a study on the implementation of recursive identification techniques for the continuous, real-time updating of models for level processes in tanks. The methodology combines parametric identification based on experimental data with an analytical approach grounded in physical laws, resulting in a gray-box identification. Model construction and validation, both in simulated scenarios and real applications, are carried out using a polynomial NARX model. Although ARX and NARX models were evaluated, the NARX model demonstrated greater suitability for capturing the system's nonlinearities. To handle noise, disturbances, and parameter variations over time, a recursive nonlinear least squares estimator is employed in conjunction with the NARX model, ensuring dynamic adaptation to changing operational conditions. Experiments conducted in a pilot plant and in a real water supply system illustrate the relevance and robustness of the proposed methodology in dynamic and non-stationary industrial scenarios.

Palavras-chave: Least square, Level process, NARX, Nonlinear parameter varying, Nonlinear systems, System identification

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	MODELOS POLINOMIAIS E ESTIMADORES	13
2.1	Modelos polinomiais	13
2.1.1	Modelo ARX	13
2.1.2	Modelo NARX	13
2.2	Estimadores	15
2.2.1	Estimador de mínimos quadrados	15
2.2.2	Estimador de mínimos quadrados recursivo	16
2.2.3	Polarização	17
3	IDENTIFICAÇÃO DE UM PROCESSO DE NÍVEL	19
3.1	Modelagem do tanque	19
3.2	Linearização do modelo	20
3.3	Discretização do modelo	21
3.4	Período de amostragem	21
3.5	Resultados simulados	22
3.5.1	Sistema utilizado	22
3.5.2	Identificação utilizando o modelo ARX	23
3.5.3	Identificação utilizando o modelo NARX	24
3.5.3.1	Impacto de variações nos parâmetros do sistema	26
3.5.3.2	Impacto do ruído nos dados observados	27
3.5.3.3	Impacto de distúrbios na entrada do processo	28
3.5.3.4	Necessidade de mecanismos adaptativos	30
3.5.4	Identificação utilizando o modelo NARX recursivo	30
3.6	Resultados experimentais	36
3.6.1	Sistema utilizado	36
3.7	Resultados em uma aplicação real	39
4	CONCLUSÃO	42
	REFERÊNCIAS	43

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Sistema de nível de um tanque.....	19
2	Simulação do sinal de experimento.	23
3	Simulação do sinal de validação.....	23
4	Resposta do modelo ARX ao sinal de experimento.....	24
5	Resposta do modelo ARX ao sinal de validação.	24
6	Resposta do modelo NARX ao sinal de experimento.	25
7	Resposta do modelo NARX ao sinal de validação.....	25
8	Resposta do modelo NARX, estimado a partir dos dados obtidos em um experimento onde o coeficiente K foi alterado em $t = 2000$ s, ao sinal de entrada utilizado durante o experimento.	26
9	Resposta do modelo NARX, estimado a partir do experimento com variação do coeficiente K , ao sinal de validação sem perturbação.....	27
10	Resposta do modelo NARX, estimado a partir de dados obtidos em um experimento com saída contendo ruído branco, ao mesmo sinal de entrada utilizado no experimento.....	28
11	Resposta do modelo NARX, estimado a partir dos dados do experimento com saída contendo ruído branco, ao sinal de validação.....	28
12	Resposta do modelo NARX, estimado a partir de dados obtidos em um experimento com distúrbio na entrada do processo, ao mesmo sinal de entrada utilizado no experimento.....	29
13	Resposta do modelo NARX, estimado a partir de dados obtidos em um experimento com distúrbio na entrada do processo, ao mesmo sinal de entrada utilizado no experimento.....	29
14	Resposta do modelo NARX, estimado a partir de dados obtidos em um experimento com distúrbio na entrada do processo, ao sinal de validação sem perturbação.....	29
15	Resposta e variação de $\hat{\theta}$ do modelo NARX recursivo com $\lambda = 0,98$, estimado a partir dos dados obtidos em um experimento onde o coeficiente K é alterado em $t = 2000$ s, ao mesmo sinal de entrada utilizado durante o experimento.....	31
16	Resposta e variação de $\hat{\theta}$ do modelo NARX recursivo com $\lambda = 0,98$, estimado a partir de dados obtidos em um experimento com saída contendo ruído branco, ao mesmo sinal de entrada utilizado durante o experimento.	32
17	Resposta e variação de $\hat{\theta}$ do modelo NARX recursivo com $\lambda = 0,98$, estimado a partir de dados obtidos em um experimento com saída contendo ruído branco, ao mesmo sinal de entrada utilizado durante o experimento, que se mantém constante a partir do instante $t = 4750$ s.	33

18	Resposta e variação de $\hat{\theta}$ do modelo NARX recursivo com $\lambda = 0,88$, estimado a partir de dados obtidos em um experimento com saída contendo ruído branco, ao mesmo sinal de entrada utilizado durante o experimento, que se mantém constante a partir do instante $t = 4750$ s.	34
19	Resposta e variação de $\hat{\theta}$ do modelo NARX recursivo com $\lambda = 0,98$, estimado a partir de dados obtidos em um experimento com um distúrbio constante na entrada do processo no intervalo $1000 \text{ s} \leq t \leq 3000 \text{ s}$, ao mesmo sinal de entrada utilizado durante o experimento.	35
20	Visão geral do sistema de controle de nível com tanque cilíndrico, reservatório, bombas e válvulas.	36
21	Sinal de experimento da válvula V_1	37
22	Sinal de validação da válvula V_1	37
23	Resposta do modelo NARX, estimado a partir de dados obtidos em um experimento com distúrbio na entrada do processo, ao mesmo sinal de entrada utilizado no experimento	38
24	Resposta do modelo NARX, estimado a partir de dados obtidos em um experimento com distúrbio na entrada do processo, ao sinal de validação sem perturbação.	38
25	Resposta e variação de $\hat{\theta}$ do modelo NARX recursivo com $\lambda = 0,98$, estimado a partir de dados obtidos em um experimento com um distúrbio constante na entrada do processo no intervalo $1900 \text{ s} \leq t \leq 4100 \text{ s}$, ao mesmo sinal de entrada utilizado durante o experimento.	39
26	Sinal de experimento.	40
27	Resposta do modelo NARX ao sinal de experimento.	40
28	Resposta do modelo NARX recursivo com $\lambda = 0,98$ ao sinal de experimento.	41

1 INTRODUÇÃO

A crescente complexidade dos processos industriais, aliada à necessidade de manter padrões elevados de segurança, eficiência e qualidade, torna o monitoramento e o controle de sistemas dinâmicos tarefas desafiadoras. Em ambientes industriais, frequentemente as condições operacionais mudam devido a fatores como variações de carga, flutuações na demanda, degradação de componentes, perturbações externas e falhas incipientes em atuadores ou sensores. Nesse contexto, modelos capazes de representar adequadamente a dinâmica do processo são fundamentais para o sucesso de estratégias de controle, monitoramento e detecção de falhas (MILJKOVIĆ, 2011).

A vertente de controle tolerante a falhas e o monitoramento de desempenho têm ganhado relevância, uma vez que tais abordagens buscam manter o sistema operando de forma satisfatória mesmo na presença de falhas parciais ou degradação de componentes. Nesses casos, possuir um modelo fidedigno e atualizado do processo é essencial, pois permite a adaptação do controlador, a detecção precoce de anomalias e a manutenção do desempenho desejado (DONG, 2019). Nesse sentido, a identificação de sistemas e a atualização recursiva de parâmetros surgem como ferramentas importantes, garantindo que o modelo possa acompanhar as condições reais de operação.

Historicamente, modelos lineares simples, como o ARX (do inglês *AutoRegressive with eXogenous inputs*), foram amplamente empregados devido à sua facilidade de estimação e boa representação da dinâmica ao redor de um ponto de operação (LJUNG, 1999). Entretanto, processos com dinâmicas não-lineares e sujeitos a variações de parâmetros ao longo do tempo demandam abordagens mais sofisticadas. O modelo NARX (do inglês *Nonlinear AutoRegressive with eXogenous inputs*) emerge como uma alternativa capaz de capturar relações não-lineares complexas entre as variáveis do sistema (BILLINGS, 2013; SJÖBERG et al., 1995; LIMA, 2023). Além disso, a implementação recursiva desses modelos possibilita a atualização contínua dos parâmetros, permitindo acompanhar mudanças rápidas na dinâmica do processo (NARENDRA; MUKHOPADHYAY, 1997; GOODWIN; SIN, 1984).

Em paralelo, modelos com parâmetros variantes no tempo, como LPV (do inglês *Linear Parameter Varying*) e NLPV (do inglês *Nonlinear Parameter Varying*), permitem que o modelo transite entre diferentes regimes operacionais (PREVIDI; LOVERA, 2003; TÓTH, 2010). Além disso, a análise de identificabilidade e a aplicação de métodos de erro de predição têm sido conduzidas com sucesso em sistemas não-lineares complexos, tais como biorreatores em batelada (CAMPESTRINI et al., 2014), ressaltando a importância de um estudo cuidadoso das condições iniciais e parâmetros do modelo.

O avanço do poder computacional e a difusão de técnicas de aprendizado de máquina impulsionaram ainda mais a área. A aplicação de redes neurais artificiais, incluindo arquiteturas MLP (do inglês *Multilayer Perceptron*), permite uma aproximação não paramétrica de não-linearidades sem a necessidade de conhecimento detalhado da estrutura interna do sistema (GOODWIN; SIN, 1984). Ao combinar redes neurais com estruturas NARX,

obtem-se um ferramental poderoso para modelagem de sistemas complexos, unindo a flexibilidade dos métodos baseados em dados com a rigidez matemática dos modelos clássicos. Além disso, metodologias baseadas em subespaços e identificação recursiva podem ser empregadas para detectar e compensar falhas incipientes, contribuindo para o controle tolerante a falhas e garantindo o desempenho do sistema (DONG, 2019).

Por fim, a identificação orientada a dados auxilia também no monitoramento de desempenho de controladores. Com base em dados de malha fechada, é possível analisar índices de desempenho, como o IAE (Integral do Erro Absoluto), e empregar testes estatísticos para reajustar controladores PID (Proporcional Integral Derivativo), sem exigir conhecimento do método de projeto original (MUNARO et al., 2023). Essa abordagem mantém o desempenho do controlador em níveis desejáveis, mesmo na presença de ruído, incertezas e variações operacionais.

Diante desse panorama, este trabalho dedica-se à implementação de técnicas de identificação recursiva para atualização contínua dos parâmetros de um modelo aplicado a um sistema de nível em tanque. A metodologia proposta combina identificação paramétrica fundamentada em dados com conhecimento físico do processo, caracterizando assim uma identificação caixa-cinza, empregando um modelo NARX em conjunto com um estimador de mínimos quadrados recursivo. Dessa forma, busca-se uma adaptação dinâmica do modelo às condições operacionais mutáveis, robusta a ruídos, perturbações e variações de parâmetros, evidenciando a relevância e a aplicabilidade dessa estratégia em cenários industriais.

A organização deste trabalho está estruturada da seguinte forma: no Capítulo 2, apresentam-se os modelos polinomiais e estimadores utilizados, fornecendo a base teórica necessária para a identificação. No Capítulo 3, discute-se a identificação do processo de nível, abordando desde cenários simulados até aplicações reais, evidenciando a robustez e a aplicabilidade da metodologia proposta. Por fim, o Capítulo 4 encerra o trabalho com conclusões e sugestões para pesquisas futuras.

2 MODELOS POLINOMIAIS E ESTIMADORES

2.1 MODELOS POLINOMIAIS

2.1.1 Modelo ARX

O modelo ARX (do inglês *autoregressive with exogenous inputs*) é um modelo polinomial que descreve a relação entre a saída atual do sistema e as saídas (*autoregressive*) e as entradas (*exogenous inputs*) passadas. Um sistema descrito pelo modelo ARX é representado pela relação linear

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n_a} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-n_k-i) + e(k), \quad (1)$$

onde $y(k)$ é a saída do sistema; $u(k)$ é a entrada exógena; a_i e b_i são os parâmetros do modelo; n_a e n_b indicam o número de termos considerados nas somas de saídas e entradas passadas; n_k é o tempo de atraso na entrada; e $e(k)$ representa um ruído branco (LJUNG, 1999).

A estimativa da saída do modelo ARX pode ser representada como

$$\hat{y}(k) = \phi(k)^T \theta, \quad (2)$$

onde $\hat{y}(k)$ é a estimativa da saída no tempo k , $\phi(k)$ é o vetor de regressores e θ é o vetor de parâmetros do modelo.

O vetor de regressores $\phi(k)$ é definido como

$$\phi(k) \triangleq \begin{bmatrix} y(k-1) \\ y(k-2) \\ \vdots \\ y(k-n_a) \\ u(k-n_k-1) \\ u(k-n_k-2) \\ \vdots \\ u(k-n_k-n_b) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \theta \triangleq \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n_a} \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n_b} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

2.1.2 Modelo NARX

O modelo NARX (do inglês *Nonlinear Autoregressive with exogenous inputs*) é uma extensão não linear do ARX. Assim como o ARX, ele relaciona a saída do sistema

em função de saídas e entradas passadas, mas possibilita capturar relações não-lineares por meio de funções apropriadas. Embora o NARX aceite diferentes estruturas para esses termos não lineares (por exemplo, polinômios, funções de base radial, redes neurais, entre outras), neste trabalho emprega-se uma formulação polinomial que considera o atraso de entrada e inclui um termo de erro gaussiano.

O modelo NARX é definido como

$$y(k) = F[y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n_a), \\ u(k-d), u(k-d-1), \dots, u(k-d-n_b)] + e(k),$$

onde $y(k)$ é a saída do sistema, $u(k)$ é a entrada do sistema e $e(k)$ é um erro gaussiano; n_a e n_b são os atrasos máximos da entrada e da saída, respectivamente; d é o atraso do sinal de entrada; $F[\cdot]$ é uma função não-linear do sistema (BILLINGS, 2013). A escolha de n_y , n_u e d geralmente se baseia no conhecimento prévio do sistema ou na análise preliminar de dados, como a análise de autocorrelação e correlação cruzada para os atrasos, como sugerido por Box, Jenkins e Reinsel (2015).

A escolha da função $F[\cdot]$ é crítica e deve ser feita com base na natureza do sistema e na complexidade dos dados. Polinômios, redes neurais e funções de base radial são opções comuns. Billings (2013) discute a aplicabilidade de diferentes tipos de funções não-lineares em modelos NARX, ressaltando que a escolha deve equilibrar a capacidade de capturar a não-linearidade do sistema com a praticidade e a complexidade computacional.

Neste trabalho, a função $F[\cdot]$ é escolhida de tal forma que simplifique a construção do modelo NARX para o processo de nível estudado, como será descrito na Seção 3.5.3. A função resultante representa o sistema da seguinte forma:

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n_a} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-d-i) \\ + \sum_{i=1}^{n_c} c_i f_i(y(k-i)) + \sum_{i=1}^{n_d} d_i g_i(u(k-d-i)) + e(k), \quad (4)$$

onde a_i, b_i, c_i e $d_i \in \mathbb{R}$, n_a, n_b, n_c e $n_d \in \mathbb{Z}$ são coeficientes que definem a estrutura do modelo e os termos $f_i(y(k-i)), g_i(u(k-d-i)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções não-lineares da saída e da entrada, respectivamente. O regressor e os parâmetros são definidos, respectivamente,

como

$$\phi(k) \triangleq \begin{bmatrix} y(k-1) \\ y(k-2) \\ \vdots \\ y(k-n_a) \\ u(k-d-1) \\ u(k-d-2) \\ \vdots \\ u(k-d-n_b) \\ f_1(y(k-1)) \\ f_2(y(k-2)) \\ \vdots \\ f_{n_c}(y(k-n_c)) \\ g_1(u(k-d-1)) \\ g_2(u(k-d-2)) \\ \vdots \\ g_{n_d}(u(k-d-n_d)) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \theta \triangleq \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n_a} \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n_b} \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n_c} \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n_d} \end{bmatrix}.$$

2.2 ESTIMADORES

2.2.1 Estimador de mínimos quadrados

Amplamente utilizado na área de identificação de sistemas, o método dos mínimos quadrados tem como objetivo encontrar os parâmetros de um modelo que melhor se ajustam a um conjunto de dados observados. Considere que o modelo que se aproxima do sistema real seja representado por

$$y(k) = \phi^T(k)\theta + e(k), \quad (5)$$

onde $\hat{\theta}$ é o vetor de parâmetros a serem estimados. O que se deseja é que o valor de saída predito se aproxime o máximo possível do valor de saída observado do sistema. O ponto de partida para isso é a definição da função de custo $J(\theta)$, que mede o erro entre os dados observados e os preditos pelo modelo:

$$J(\theta) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k))^2,$$

onde $y(k)$ são os valores de saída observados do sistema e N é o número total de amostras coletadas. Minimizar esta função de custo nos leva aos parâmetros do modelo que melhor se ajustam aos dados observados. O objetivo é então estimar o conjunto de parâmetros $\hat{\theta}$ que minimiza $J(\theta)$, o que pode ser expresso matematicamente como

$$\theta \triangleq \arg \min_{\theta} J(\theta).$$

Esta expressão define $\hat{\theta}$ como os parâmetros que resultam no menor erro quadrático médio, e pode ser resolvida na forma matricial através da equação

$$\theta = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y, \quad (6)$$

onde Φ é a matriz contendo todos os regressores $\phi(k)$, e Y é o vetor das saídas observadas (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

Em resumo, o método dos mínimos quadrados na identificação de sistemas se baseia na minimização do erro quadrático médio entre as saídas reais e estimadas. Para modelos lineares nos parâmetros, como o ARX e o NARX, isso resulta em um problema de otimização linear.

2.2.2 Estimador de mínimos quadrados recursivo

O estimador de mínimos quadrados apresentado anteriormente pressupõe que todos os dados estão disponíveis previamente à estimação dos parâmetros. Essa situação é comum quando os dados do sistema são coletados antecipadamente e utilizados posteriormente para obter um modelo. No entanto, em muitas aplicações práticas, os dados do sistema são obtidos sequencialmente, permitindo que novas informações sejam incorporadas ao modelo a cada amostra. Neste contexto, é vantajoso atualizar os parâmetros do modelo à medida que novas observações são obtidas, em um procedimento conhecido como *estimação recursiva* (AGUIRRE, 2004).

É importante ressaltar a diferença entre estimação recursiva e estimação em tempo real (*on-line*), bem como entre estimação em batelada e estimação *off-line*. Os termos recursivo e batelada se referem ao modo como o algoritmo processa os dados: se toda a base é utilizada de uma única vez (batelada) ou se é incorporada de forma sequencial (recursivo). Já o termo *on-line* implica que o processamento — seja ele recursivo ou em batelada — ocorre com rapidez suficiente para que as estimativas obtidas possam atuar diretamente no monitoramento ou controle do processo em andamento. Vale destacar que, em tese, algoritmos recursivos não precisam, necessariamente, operar em tempo real, assim como algoritmos em batelada podem ser executados *on-line*, desde que o processamento seja ágil.

Considere o mesmo sistema descrito em (5), sendo $E[e(k)] = 0$, onde $E[\cdot]$ denota o valor esperado. Para atualizar os parâmetros de forma recursiva, emprega-se um esquema de atualização que incorpora a nova informação trazida pela observação atual. Inicialmente, considera-se uma expressão geral para a atualização:

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + K_k [y(k) - \phi_k^T \hat{\theta}_{k-1}], \quad (7)$$

onde K_k é o vetor de ganho no instante k e o termo $[y(k) - \phi_k^T \hat{\theta}_{k-1}]$ é denominado *inovação*, representando a discrepância entre a observação atual e a predição baseada nos parâmetros estimados anteriormente.

Para determinar o vetor de ganho, considera-se a matriz de covariância dos erros de estimativa P_k . Essa matriz descreve o grau de incerteza a respeito dos parâmetros estimados em cada iteração, isto é, quantifica o quanto se espera que a estimativa atual possa variar em torno do valor real dos parâmetros. Com base nisso, o vetor de ganho é calculado de modo a minimizar a variância do erro de estimativa dos parâmetros.

Considerando a matriz de covariância dos erros de estimativa na iteração anterior, P_{k-1} , o vetor de ganho é determinado por:

$$K_k = \frac{P_{k-1} \phi_k}{\phi_k^T P_{k-1} \phi_k + \lambda},$$

onde λ é o fator de esquecimento, com $0 < \lambda \leq 1$. O fator de esquecimento controla a influência dos dados passados na estimativa atual dos parâmetros. Valores de λ próximos

a 1 indicam que os dados passados têm maior influência, enquanto valores menores dão mais peso às observações recentes:

- $\lambda = 1$: Todos os dados têm igual peso na estimativa dos parâmetros, ou seja, não há esquecimento. Isso é adequado quando a dinâmica do sistema é estacionária.
- $\lambda < 1$: Os dados mais recentes têm maior peso, enquanto a influência dos dados mais antigos é gradualmente reduzida. Isso é fundamental em sistemas com parâmetros variantes no tempo, permitindo uma adaptação rápida às mudanças. Valores de λ próximos a 1 (por exemplo, 0,98 ou 0,99) permitem uma adaptação gradual, enquanto valores menores promovem uma adaptação mais rápida, porém com maior sensibilidade ao ruído.

O uso de um fator de esquecimento adequado permite ao modelo recursivo ajustar-se de forma dinâmica e eficiente a mudanças nos parâmetros do sistema, mantendo a precisão da estimativa mesmo em ambientes com variações frequentes.

A matriz de covariância P_k é atualizada a cada iteração, refletindo a incerteza associada aos parâmetros estimados:

$$P_k = \frac{1}{\lambda} (P_{k-1} - K_k \phi_k^T P_{k-1}).$$

Assim, o algoritmo de mínimos quadrados recursivo é composto pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} K_k = \frac{P_{k-1} \phi_k}{\phi_k^T P_{k-1} \phi_k + \lambda} \\ \hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + K_k [y(k) - \phi_k^T \hat{\theta}_{k-1}] \\ P_k = \frac{1}{\lambda} (P_{k-1} - K_k \phi_k^T P_{k-1}), \end{cases} \quad (8)$$

onde, como visto anteriormente, K_k é o vetor de ganho, que determina o peso dado à inovação na atualização dos parâmetros; $\hat{\theta}_k$ é a estimativa atualizada dos parâmetros; P_k é a matriz de covariância do erro de estimativa; ϕ_k é o vetor de regressores no instante k ; λ é o fator de esquecimento. A escolha dos valores iniciais para a matriz de covariância P_0 e para os parâmetros $\hat{\theta}_0$ pode influenciar o comportamento inicial do algoritmo. Valores iniciais de P_0 grandes indicam alta incerteza nos parâmetros iniciais, permitindo uma adaptação mais rápida.

2.2.3 Polarização

A polarização (do inglês *bias*) de um estimador é uma medida da diferença entre o valor esperado da estimativa e o valor real do parâmetro que se deseja estimar. Seja θ um vetor de parâmetros e $\hat{\theta}$ a estimação de seus valores, a polarização b é definida como:

$$b = E[\hat{\theta}] - \theta. \quad (9)$$

$\hat{\theta}$ é uma variável aleatória devido à presença de ruído ou incerteza nos dados, enquanto θ é considerado um valor determinístico desconhecido. Como a diferença $\hat{\theta} - \theta$ também é uma variável aleatória, utiliza-se o valor esperado para quantificar a polarização. Em situações práticas, quando não é possível calcular o valor esperado diretamente, pode-se estimá-lo

utilizando a média das estimativas obtidas a partir de uma amostra de dados. Se essa amostra for coletada ao longo do tempo, assume-se que o processo é ergódico para que a média temporal das observações seja equivalente ao valor esperado estatístico (AGUIRRE, 2004).

Considere novamente o sistema descrito em (5), que é linear em relação aos parâmetros $\hat{\theta}$. A estimativa dos parâmetros pode ser expressa como

$$\hat{\theta} = Ay, \quad (10)$$

onde A é uma matriz que depende dos regressores e y é o vetor das saídas observadas. Aplicando a Equação (5) na Equação (10), obtém-se:

$$\hat{\theta} = A(\Phi\theta + e) = A\Phi\theta + Ae.$$

Calculando a polarização a partir da Equação (9), tem-se:

$$b = E[\hat{\theta}] - \theta = (E[A\Phi] - I)\theta + E[Ae], \quad (11)$$

onde I é a matriz identidade. Para que o estimador seja não polarizado (ou seja, $b = 0$), é possível afirmar, a partir da Equação (11), que as seguintes condições devem ser satisfeitas:

1. $E[A\Phi] = I$: isto implica que, em média, a matriz A deve ser tal que $A\Phi$ seja igual à identidade. Essa condição está relacionada às propriedades do estimador escolhido.
2. $E[Ae] = 0$: para que esta condição seja atendida, o estimador A e o termo de erro e devem ser estatisticamente independentes. Isso depende da estrutura do modelo e da natureza dos dados.
3. $E[e] = 0$: o termo de erro deve ter média zero, o que é uma suposição comum em muitos modelos estatísticos.

A primeira condição está diretamente relacionada ao estimador em si, enquanto as outras duas condições estão associadas às propriedades do modelo e dos dados utilizados. A segunda condição, em particular, indica que o modelo é capaz de capturar todas as relações presentes nos dados; ou seja, não há correlação entre os regressores e o termo de erro que não seja explicada pelo modelo.

No caso deste estimador, conforme definido na Equação (6), a matriz A é tal que

$$A = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T.$$

Pode-se verificar que a primeira condição para ausência de polarização ($E[A\Phi] = I$) é satisfeita, já que

$$A\Phi = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T\Phi = I.$$

A terceira condição ($E[e] = 0$) geralmente é assumida em modelos de regressão. Caso o termo de erro não tenha média zero, é possível incluir um termo constante nos regressores para estimar essa média juntamente com os demais parâmetros, ajustando o modelo para atender a esta condição. Para que a segunda condição ($E[Ae] = 0$) seja válida, é necessário que o termo de erro e seja não correlacionado com os regressores $\phi(k)$, o que pode não ser verdadeiro em todas as situações.

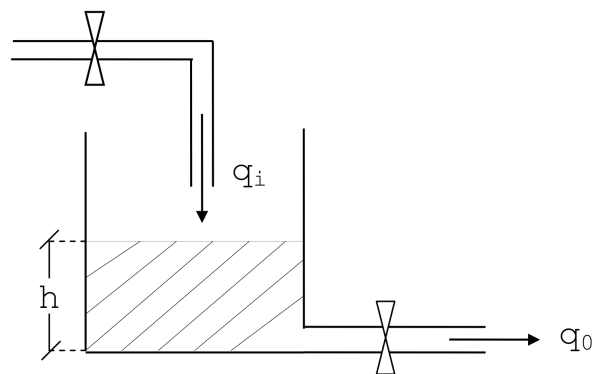
3 IDENTIFICAÇÃO DE UM PROCESSO DE NÍVEL

Neste capítulo, é apresentado um exemplo de identificação de um processo de nível, utilizado para demonstrar as características variantes e não-lineares do sistema, além de evidenciar a relevância de se utilizar um modelo não-linear e recursivo na identificação de tais sistemas. A escolha deste exemplo se deve à disponibilidade de dados reais desse tipo de processo, o que permitirá uma validação mais precisa das técnicas aplicadas. É importante destacar que, embora o foco deste estudo seja um processo de nível, a técnica de identificação paramétrica não-linear recursiva estudada e empregada possui aplicabilidade a uma variedade de outros processos industriais que enfrentam variações no modelo decorrentes de fatores como desgastes, falhas em atuadores, sensores ou mudanças nas propriedades dinâmicas do sistema. Tais situações reforçam a necessidade de abordagens que combinem robustez e adaptabilidade.

3.1 MODELAGEM DO TANQUE

Considere o sistema de nível ilustrado na Figura 1, no qual q_i representa a vazão volumétrica de entrada, q_o a vazão volumétrica de saída e h o nível do líquido no tanque. Assume-se que o líquido seja incompressível e que as perdas de carga no duto de saída sejam desprezíveis.

Figura 1: Sistema de nível de um tanque.



Fonte: Bazanella (2005).

Através do princípio de balanço de massa do sistema, obtém-se a relação

$$A\dot{h}(t) = q_i(t) - q_o(t), \quad (12)$$

onde A representa a área da seção transversal do tanque. A vazão de saída $q_o(t)$, considerando um escoamento turbulento, pode ser descrita como

$$q_o(t) = K\sqrt{\Delta P(t)},$$

em que K é um coeficiente relacionado à resistência da válvula localizada na saída do tanque e $\Delta P(t)$ representa a diferença de pressão hidrostática entre suas extremidades (BAZANELLA, 2005). Conforme visto em Ogata (2010), a vazão de saída $q_o(t)$ pode ser aproximada por

$$q_o(t) \approx K\sqrt{h(t)},$$

e, portanto, pode-se reescrever o balanço de massa representado pela Equação (12) para descrever a dinâmica do nível do líquido na forma

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{A}(q_i(t) - K\sqrt{h(t)}). \quad (13)$$

3.2 LINEARIZAÇÃO DO MODELO

A linearização do modelo em torno de um ponto de operação estabelecido (q_{i0}, h_0) pode ser obtida através da aplicação da série de Taylor, considerando pequenas variações em torno desse ponto. Assim, tem-se

$$f(q_i, h) \approx f(q_{i0}, h_0) + \left. \frac{\partial f(q_i, h)}{\partial h} \right|_{h=h_0} \Delta h + \left. \frac{\partial f(q_i, h)}{\partial q_i} \right|_{q_i=q_{i0}} \Delta q_i,$$

onde $\Delta h \triangleq h - h_0$ e $\Delta q_i \triangleq q_i - q_{i0}$ são as variações das variáveis em torno de seus valores em regime permanente. Considerando que $f(q_i, h)$ representa a Equação (13), as derivadas parciais da série de Taylor se tornam

$$\left. \frac{\partial f(q_i, h)}{\partial h} \right|_{h=h_0} = \frac{-K}{2A\sqrt{h_0}} \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial f(q_i, h)}{\partial q_i} \right|_{q_i=q_{i0}} = \frac{1}{A},$$

o que resulta em

$$f(q_i, h) \approx \frac{1}{A} \left(\Delta q_i - \frac{K}{2\sqrt{h_0}} \Delta h + q_{i0} - K\sqrt{h_0} \right). \quad (14)$$

Observa-se que o ponto de operação (q_{i0}, h_0) é o ponto no qual o sistema opera em regime permanente, ou seja, quando

$$\left. \frac{df(q_i, h)}{dt} \right|_{\substack{q_i=q_{i0} \\ h=h_0}} = \frac{1}{A}(q_{i0} - K\sqrt{h_0}) = 0.$$

Isso implica em dizer que os dois últimos termos da Equação (14) se anulam e que é possível calcular o valor de K a partir de

$$K = \frac{q_{i0}}{\sqrt{h_0}}. \quad (15)$$

Note também que, sendo h_0 uma constante, $\dot{h} = \Delta \dot{h}$.

Pode-se então obter o modelo linearizado do processo de nível como

$$\Delta \dot{h} = \frac{1}{A} \left(\Delta q_i - \frac{K}{2\sqrt{h_0}} \Delta h \right). \quad (16)$$

3.3 DISCRETIZAÇÃO DO MODELO

Um modelo contínuo descreve a dinâmica do sistema em qualquer instante de tempo. Por outro lado, um modelo discreto descreve a dinâmica do sistema apenas em instantes de tempo previamente definidos e igualmente espaçados. Para implementar os algoritmos de identificação em ambiente digital, é necessário discretizar o modelo contínuo do processo de nível. Existem vários métodos para a discretização de modelos contínuos, entre eles o método de Euler, o método de Tustin (ou bilinear), e o método de ZOH (*Zero-Order Hold*). Neste trabalho, é utilizado o método de Euler, que é uma técnica de aproximação numérica simples e amplamente utilizada. Este método calcula a próxima posição de uma função com base na sua inclinação atual, sendo representado por:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t \cdot \dot{x}(t).$$

O erro de truncamento local desta aproximação é da ordem do tamanho do passo (ECKHARD; CAMPESTRINI, 2016).

Discretizando pelo método de Euler o modelo contínuo do processo de nível descrito pela Equação (13), obtém-se

$$h(k + 1) = h(k) + \frac{\Delta t}{A} \left(q_i(k) - K\sqrt{h(k)} \right), \quad (17)$$

onde k representa os instantes de tempo amostrados t_0, t_1, \dots, t_k em que $t_k = k\Delta t$. De forma análoga, o modelo discreto do processo de nível linearizado representado pela Equação (16) é tal que

$$\Delta h(k + 1) = \Delta h(k) + \frac{\Delta t}{A} \left(\Delta q_i(k) - \frac{K}{2\sqrt{h_0}} \Delta h(k) \right). \quad (18)$$

3.4 PERÍODO DE AMOSTRAGEM

Para garantir a preservação das características essenciais de um sinal contínuo no tempo após sua conversão para o domínio discreto, é fundamental que o período de amostragem seja suficientemente pequeno. Isso porque, se as amostras forem coletadas com intervalos muito longos, haverá perda significativa de informação, comprometendo a reconstrução do sinal original. O Teorema de Amostragem de Nyquist-Shannon estabelece que a taxa de amostragem deve ser, no mínimo, o dobro da maior frequência presente no sinal para prevenir o fenômeno de *aliasing*, que pode distorcer a representação do sinal amostrado (HAYKIN; VEEN, 2012).

Em contrapartida, se o sistema for amostrado com intervalos muito curtos, podem ocorrer problemas numéricos devido ao elevado nível de redundância entre duas amostras consecutivas, ou seja, quando $T_s \rightarrow 0$, $y((k - 1)T_s) \approx y((k - 2)T_s)$. Essa proximidade entre as amostras faz com que as colunas da matriz de regressores tendam a se tornar linearmente dependentes, tornando a estimação de parâmetros mal-condicionada. Portanto, em aplicações práticas, a taxa de amostragem é frequentemente escolhida com valores de cinco a dez vezes maiores que a maior frequência do sinal, evitando assim o efeito de *aliasing* e o mal condicionamento numérico (AGUIRRE, 2004).

3.5 RESULTADOS SIMULADOS

3.5.1 Sistema utilizado

O conjunto de dados utilizado para a identificação dos modelos é obtido a partir da Equação (17), na qual devem ser definidos o período de amostragem Δt , o fluxo de entrada $u(k)$, o ponto de operação (u_0, y_0) , a área da seção transversal A e o coeficiente da válvula K . Os valores da área e do ponto de operação empregados nas simulações são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros do processo

Parâmetro	Valor
A [m ²]	0,07
u_0 [m ³ /s]	$1,5 \cdot 10^{-3}$
y_0 [m]	0,5

Fonte: Adaptado de Roffel e Betlem (2007)

O parâmetro K é determinado por meio da Equação (15) utilizando os valores do ponto de operação apresentados na Tabela 1. O período de amostragem é definido conforme descrito na Seção 3.4, o que requer a identificação da frequência do modelo, ou da constante de tempo. Esta constante pode ser obtida aplicando a transformada de Laplace à Equação (16), resultando em

$$G(s) = \frac{A^{-1}}{s + \frac{K}{2A\sqrt{y_0}}},$$

a partir da qual a constante de tempo τ do sistema é identificada como

$$\tau = \frac{2A\sqrt{y_0}}{K} \approx 46,67 \text{ s.}$$

Dessa forma, o período de amostragem deve estar contido no intervalo

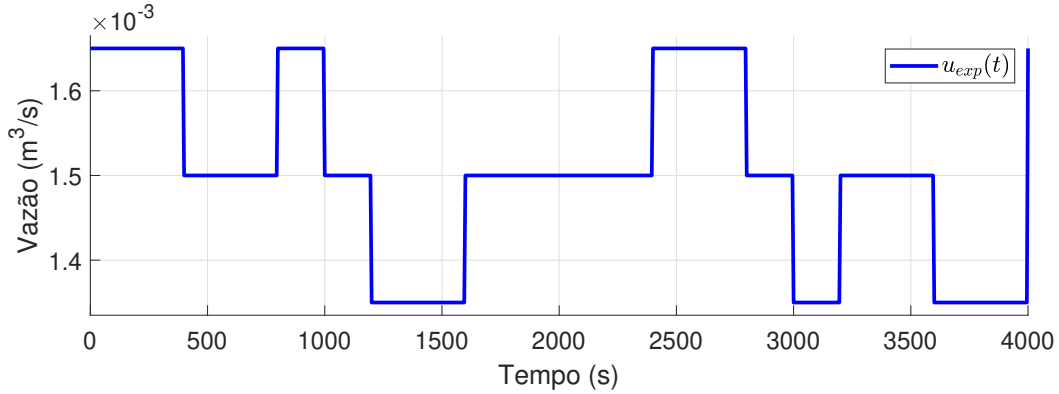
$$4,67 \text{ s} = \frac{\tau}{10} \leq \Delta t \leq \frac{\tau}{5} = 9,33 \text{ s.}$$

Com base nisso, opta-se por utilizar $\Delta t = 5 \text{ s}$ como período de amostragem nas simulações.

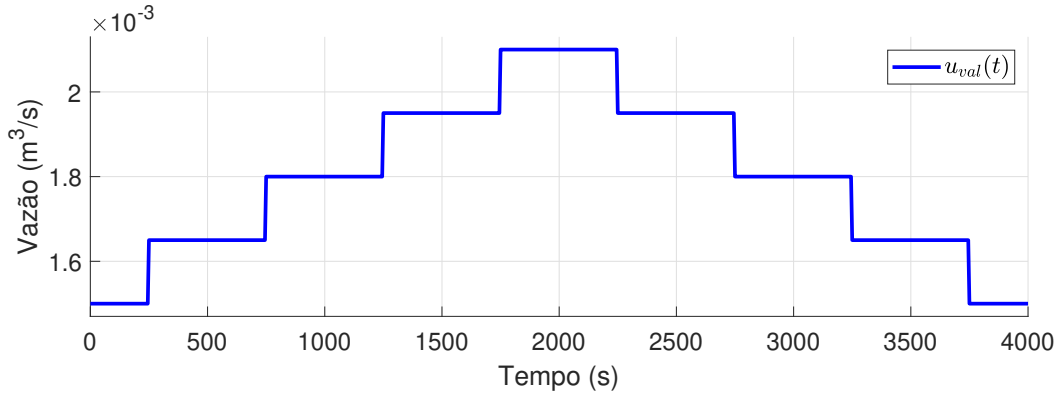
Os sinais utilizados como fluxo de entrada nas simulações são os mesmos utilizados em Lima (2023), onde o sinal de entrada de experimento aplicado consiste em uma soma de ondas quadradas a partir do ponto de operação:

$$u(t) = u_0 - 7,5 \cdot 10^{-5} \left(S\left(\frac{\pi t}{400}\right) + S\left(\frac{\pi t}{1000}\right) \right),$$

em que $S(2\pi t/T)$ é um operador que representa uma onda quadrada de período T . Já o sinal de entrada utilizado como sinal de validação é uma sequência de degraus que se afastam e retornam ao ponto de operação. As Figuras 2 e 3 ilustram, respectivamente, os sinais de experimento e de validação.

Figura 2: Simulação do sinal de experimento.

Fonte: O autor.

Figura 3: Simulação do sinal de validação.

Fonte: O autor.

Portanto, com todos os parâmetros da equação de nível do tanque discretizado estabelecidos, é possível gerar dados discretizados, que simulam a medição do sinal de saída, e utilizá-los na identificação dos modelos.

3.5.2 Identificação utilizando o modelo ARX

A escolha da ordem do modelo ARX consiste em definir os coeficientes n_a , n_b e n_k do polinômio descrito na Equação (1). Fica evidente a partir da Equação (18) a escolha de $n_a = n_b = n_k = 1$, resultando em

$$y(k) = a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1),$$

onde $y(k)$ corresponde ao nível do tanque e $u(k)$ à vazão de entrada. Utilizando o estimador de mínimos quadrados, tal qual definido na Seção 2.2.1, com os vetores de regressão e de parâmetros, respectivamente,

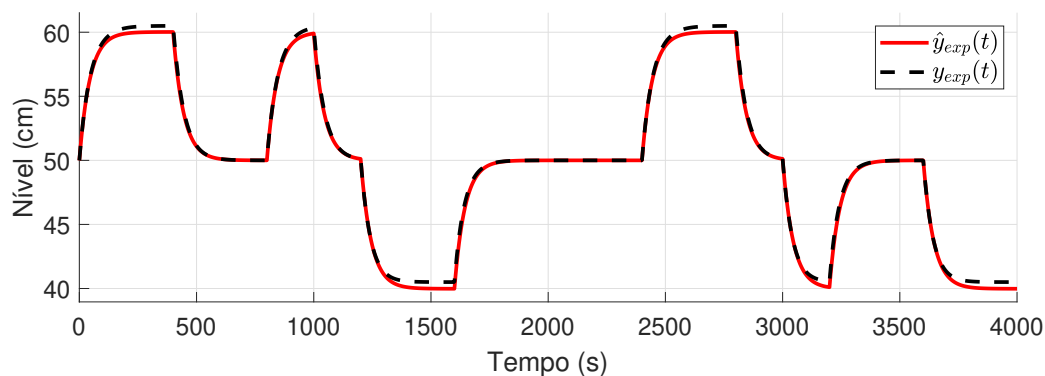
$$\phi(k) \triangleq [y(k-1) \quad u(k-1)]^T \quad \text{e} \quad \theta_{ARX} \triangleq [a_1 \quad b_1]^T.$$

e estimando os parâmetros através da Equação (6), obtém-se

$$\hat{\theta}_{ARX} = [0,8948 \quad 70,2542]^T.$$

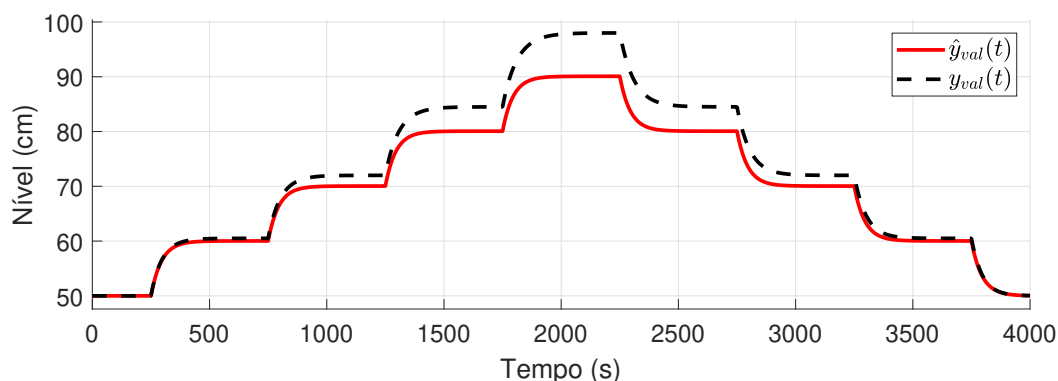
Os resultados das simulações utilizando os sinais de experimento e de validação podem ser vistos, respectivamente, através das Figuras 4 e 5. Com isso, é possível notar que o modelo é capaz de representar de forma satisfatória a dinâmica do processo próximo ao ponto de operação, mas, conforme se afasta desse ponto, a representação começa a se tornar cada vez pior.

Figura 4: Resposta do modelo ARX ao sinal de experimento.



Fonte: O autor.

Figura 5: Resposta do modelo ARX ao sinal de validação.



Fonte: O autor.

Uma forma de contornar este problema é utilizando o modelo NARX, que leva em consideração as não-linearidades do sistema.

3.5.3 Identificação utilizando o modelo NARX

O modelo NARX, diferentemente do modelo ARX, permite uma relação não-linear na identificação dos parâmetros do sistema. A escolha deste modelo, no escopo deste trabalho, consiste em definir os coeficientes n_a , n_b , n_c e n_k da Equação (4) e as funções f_i contidas em seu terceiro termo. Tomando como base a Equação (17), escolhe-se $n_a = n_b = n_c = n_k = 1$ e $f_1(y(k-1)) = \sqrt{y(k-1)}$, resultando em

$$y(k) = a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1) + c_1 \sqrt{y(k-1)}, \quad (19)$$

onde $y(k)$ corresponde ao nível do tanque e $u(k)$ à vazão de entrada. Os vetores de regressão e de parâmetros são definidos, respectivamente, como

$$\phi(k) \triangleq [y(k-1) \quad u(k-1) \quad \sqrt{y(k-1)}] \quad \text{e} \quad \theta_{NARX} \triangleq [a_1 \quad b_1 \quad c_1].$$

Estimando os parâmetros através da Equação (6), obtém-se

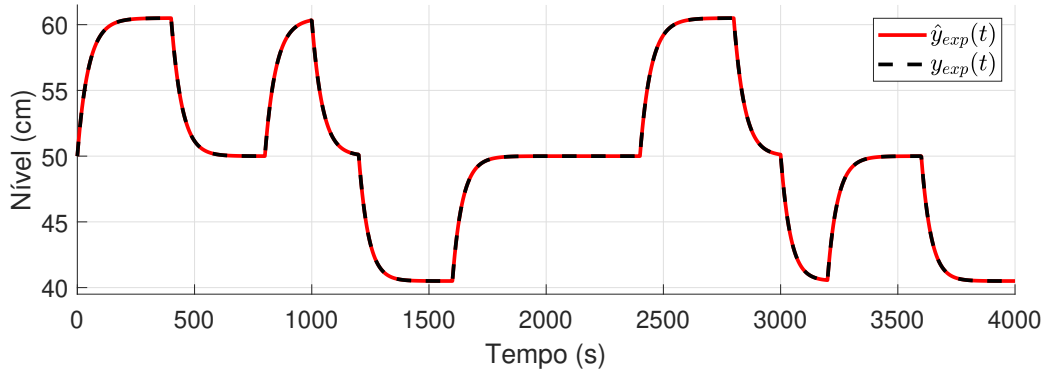
$$\hat{\theta}_{NARX} = [1,0000 \quad 71,4286 \quad -0,1515]. \quad (20)$$

É possível verificar que os parâmetros estimados estão corretos ao comparar as Equações (17) e (19) e utilizar os valores da Tabela 1:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = \frac{\Delta t}{A} = \frac{5}{0,07} \approx 71,4286 \\ c_1 = -\frac{\Delta t}{A}K = -\frac{5}{0,07} \frac{1,5 \times 10^{-3}}{\sqrt{0,5}} \approx -0,1515 \end{cases}$$

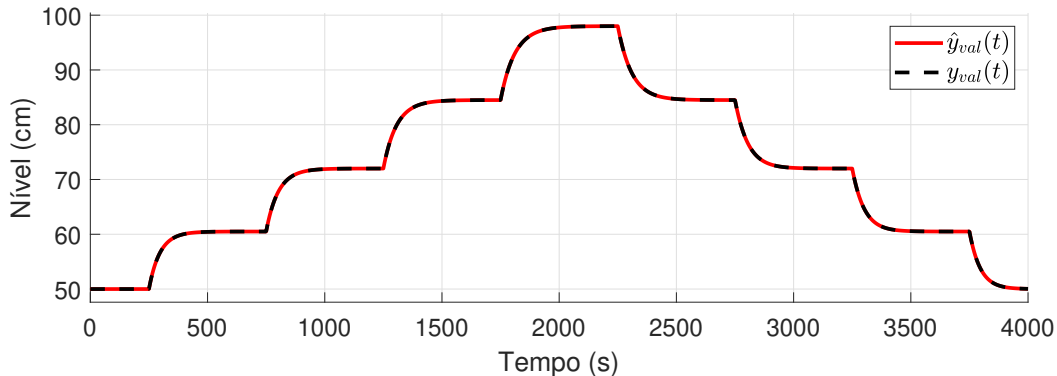
Os resultados das simulações com os sinais de experimento e de validação estão ilustrados, respectivamente, nas Figuras 6 e 7. Observa-se que o modelo representa de maneira satisfatória a dinâmica do processo, mesmo em condições afastadas do ponto de operação, capturando com fidelidade a não-linearidade do sistema.

Figura 6: Resposta do modelo NARX ao sinal de experimento.



Fonte: O autor.

Figura 7: Resposta do modelo NARX ao sinal de validação.



Fonte: O autor.

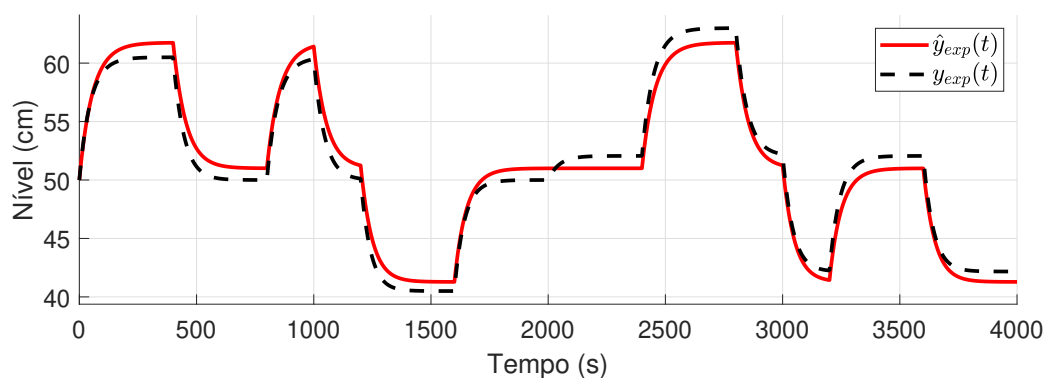
No entanto, para a correta estimação dos parâmetros, assume-se que a dinâmica do sistema permaneça constante durante todo o processo de estimação e que os dados estejam livres de ruído significativo. Quando essas condições não são atendidas, a estimação dos parâmetros pode ser comprometida devido à polarização introduzida por fatores como variações nos parâmetros do sistema ou ruído nos dados observados.

3.5.3.1 Impacto de variações nos parâmetros do sistema

Se os dados de saída são coletados durante um período em que há uma alteração na dinâmica do sistema, como por exemplo uma mudança no coeficiente K devido à válvula de saída sendo parcialmente aberta ou fechada, o estimador tenta ajustar os parâmetros do modelo NARX para compensar a discrepância causada por essa mudança. Como o modelo NARX convencional não possui mecanismos para se adaptar a variações nos parâmetros do sistema, isso resulta em uma estimação inadequada dos parâmetros, que não refletem corretamente as propriedades reais do sistema sob a nova condição dinâmica.

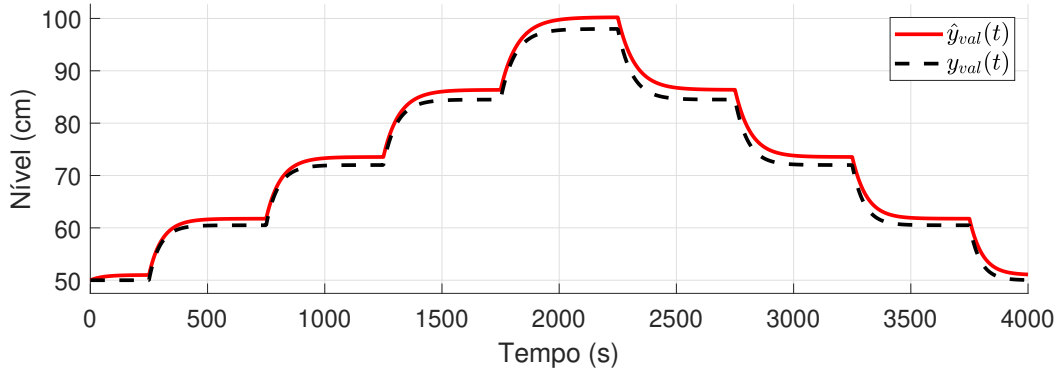
A Figura 8 exemplifica esta situação, onde o sistema sofre uma alteração no coeficiente K no instante $t = 2000$ s, reduzindo seu valor para $0,98K$, representando a válvula sendo parcialmente fechada. Já a Figura 9 apresenta a resposta do modelo NARX, com os parâmetros estimados incorretamente, ao sinal de validação.

Figura 8: Resposta do modelo NARX, estimado a partir dos dados obtidos em um experimento onde o coeficiente K foi alterado em $t = 2000$ s, ao sinal de entrada utilizado durante o experimento.



Fonte: O autor.

Figura 9: Resposta do modelo NARX, estimado a partir do experimento com variação do coeficiente K , ao sinal de validação sem perturbação.



Fonte: O autor.

3.5.3.2 Impacto do ruído nos dados observados

A estimação dos parâmetros do modelo também é prejudicada caso haja ruído nos dados de saída observados. Em situações práticas, os dados medidos estão frequentemente contaminados por ruído, o que pode levar à polarização das estimativas de parâmetros. Conforme discutido na Seção 2.2, para que o estimador de mínimos quadrados seja não polarizado, é necessário que o termo de erro $e(k)$ seja não correlacionado com os regressores $\phi(k)$. Entretanto, quando há ruído presente nos dados de saída, o erro de medição pode estar correlacionado com os regressores, violando esta condição e resultando em estimativas polarizadas.

Considere que o vetor de saídas observadas seja na verdade $y^r(k) = y(k) + v(k)$, onde $v(k)$ representa o ruído presente nas medições de saída. Ao utilizar $y^r(k)$ na formação do vetor de regressores, o ruído $v(k)$ é propagado para os regressores, tornando-os correlacionados com o termo de erro $e(k)$. Isso resulta em uma polarização das estimativas dos parâmetros.

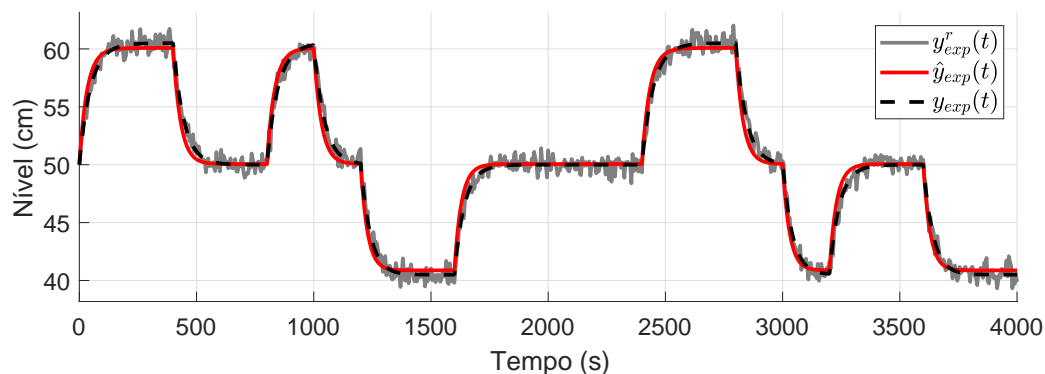
O efeito do ruído na estimação de parâmetros pode ser observado na Figura 10, onde é aplicado um ruído branco gaussiano ao sinal de saída. Neste caso, o ruído é um processo aleatório cujos valores seguem uma distribuição normal com média $\mu = 0$ e desvio $\sigma = 6 \times 10^{-3}$.

Os parâmetros estimados neste cenário são:

$$\hat{\theta}_{NARX} = [0,9332 \quad 201,9013 \quad -0,3807],$$

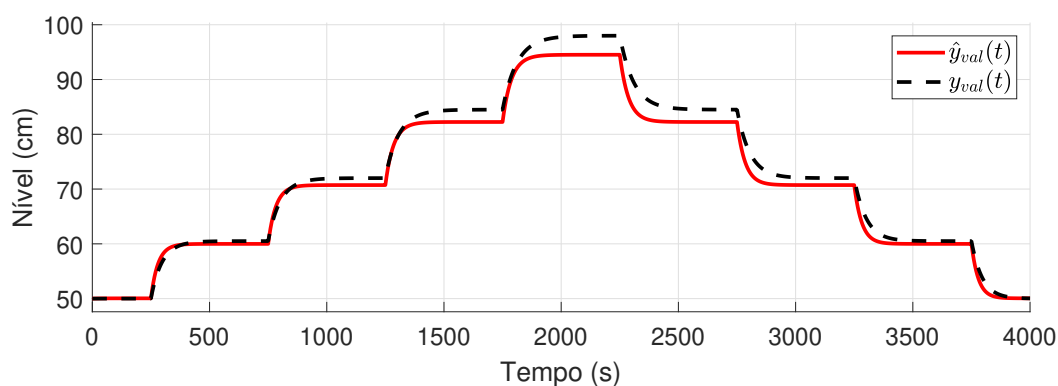
que diferem significativamente dos valores esperados, evidenciando a polarização causada pelo ruído.

Figura 10: Resposta do modelo NARX, estimado a partir de dados obtidos em um experimento com saída contendo ruído branco, ao mesmo sinal de entrada utilizado no experimento.



Fonte: O autor.

Figura 11: Resposta do modelo NARX, estimado a partir dos dados do experimento com saída contendo ruído branco, ao sinal de validação.



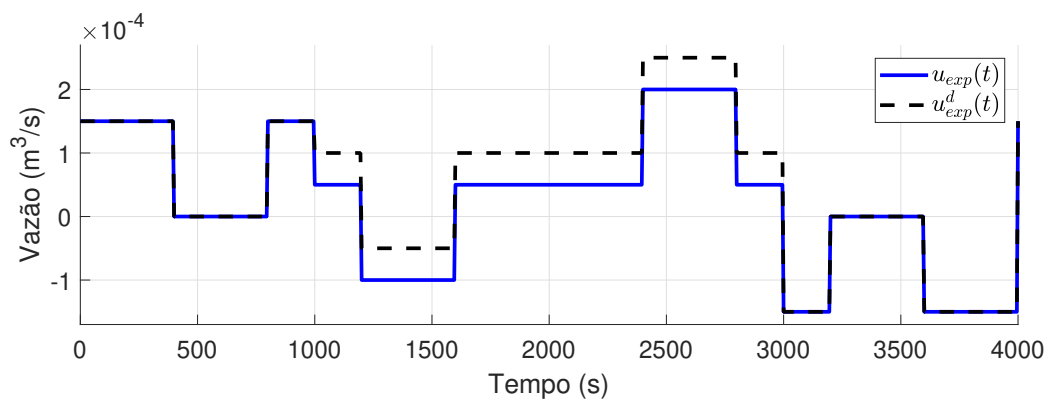
Fonte: O autor.

3.5.3.3 Impacto de distúrbios na entrada do processo

Outro problema que pode ocorrer na estimação de parâmetros é a presença de distúrbios não modelados na entrada ou na saída do processo. Quando o sistema é sujeito a perturbações externas que não são consideradas no modelo, o estimador pode tentar ajustar os parâmetros para explicar essas perturbações, resultando em estimativas polarizadas que não refletem a dinâmica real do sistema.

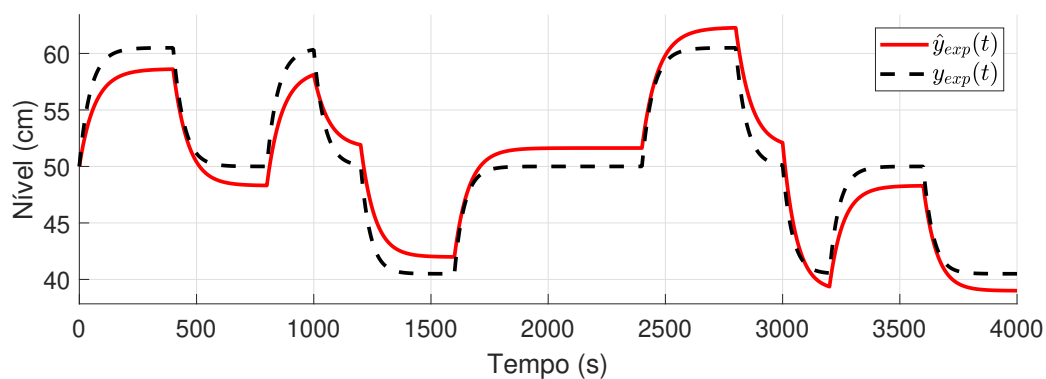
A Figura 12 ilustra este cenário, onde um distúrbio é introduzido na entrada do processo durante o experimento de estimação. Como o modelo NARX não possui termos para representar este distúrbio, a estimação dos parâmetros é afetada, levando a um modelo que não consegue prever corretamente o comportamento do sistema, como evidenciado nas Figuras 13 e 14.

Figura 12: Resposta do modelo NARX, estimado a partir de dados obtidos em um experimento com distúrbio na entrada do processo, ao mesmo sinal de entrada utilizado no experimento.



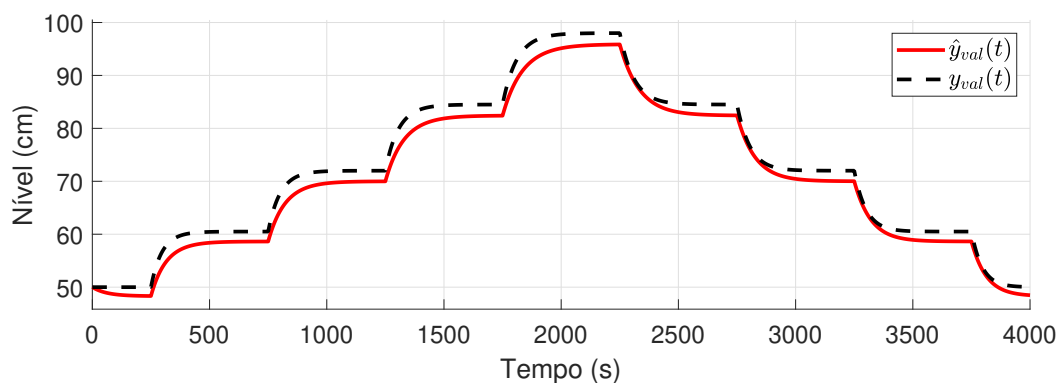
Fonte: O autor.

Figura 13: Resposta do modelo NARX, estimado a partir de dados obtidos em um experimento com distúrbio na entrada do processo, ao mesmo sinal de entrada utilizado no experimento.



Fonte: O autor.

Figura 14: Resposta do modelo NARX, estimado a partir de dados obtidos em um experimento com distúrbio na entrada do processo, ao sinal de validação sem perturbação.



Fonte: O autor.

3.5.3.4 Necessidade de mecanismos adaptativos

Os exemplos apresentados evidenciam a necessidade de incorporar mecanismos de adaptação ou reestimação dos parâmetros quando ocorrem mudanças nos parâmetros do sistema, ou distúrbios. Sem tais adaptações, o modelo apresenta respostas imprecisas, comprometendo a fidelidade das previsões. Uma possível solução para este problema é utilizar um modelo que seja capaz de se adaptar a variações na dinâmica do sistema e de lidar de uma melhor forma com ruídos nos dados, como o modelo NARX recursivo.

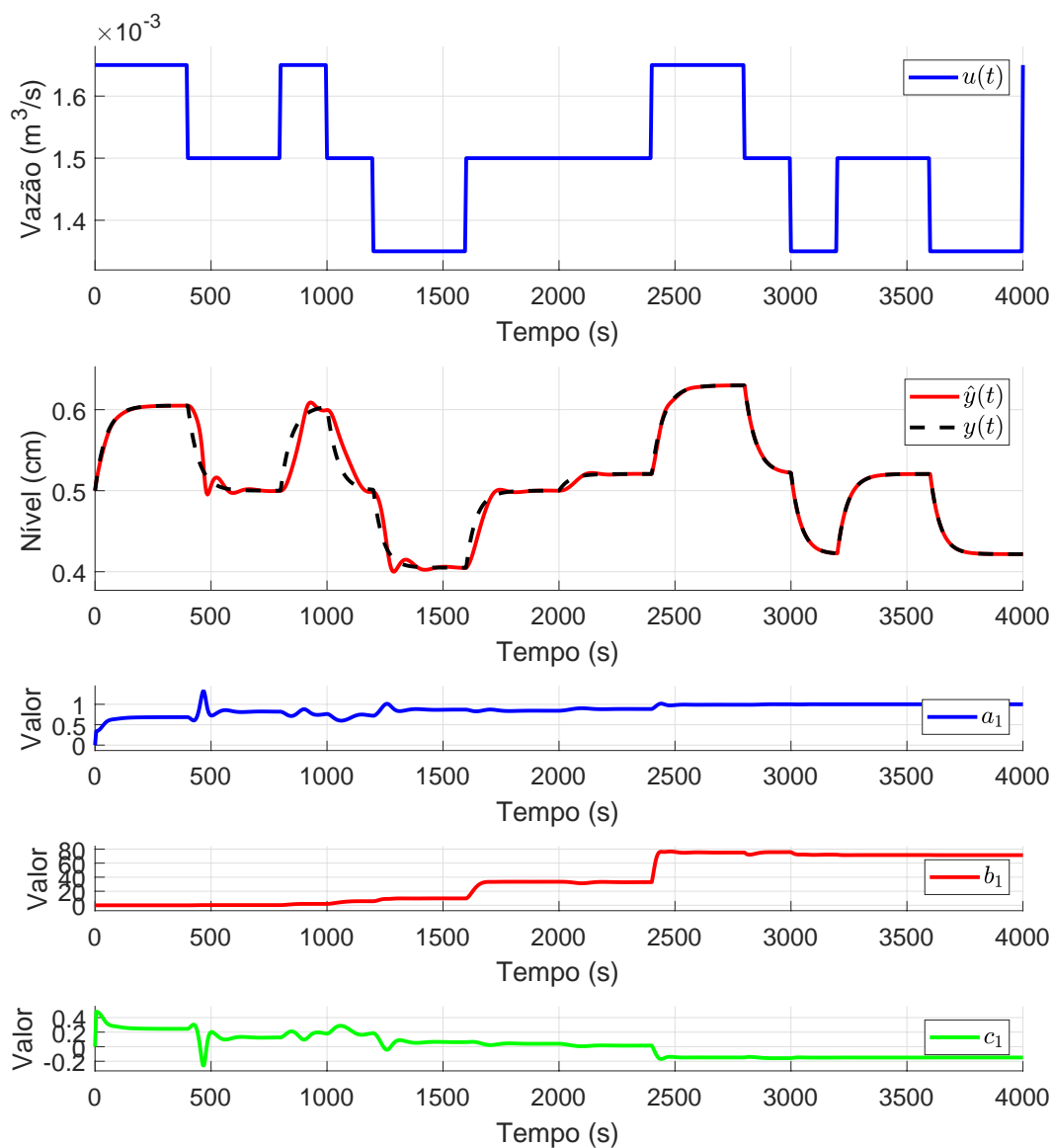
3.5.4 Identificação utilizando o modelo NARX recursivo

O modelo NARX recursivo é uma extensão do modelo NARX apresentado na Seção 3.5.3, que integra sua estrutura não-linear com a adaptabilidade do estimador de mínimos quadrados recursivo, conforme descrito na Seção 2.2.2. Essa integração permite que o modelo ajuste seus parâmetros em tempo real, respondendo a variações nas condições operacionais do processo (LJUNG, 1999; ÅSTRÖM; WITTENMARK, 2008). Assim, o modelo NARX recursivo se mostra particularmente adequado para sistemas com parâmetros variantes no tempo.

Para iniciar o processo de estimação recursiva a partir do sistema de equações obtido em (8), é necessária uma estimativa inicial do vetor de parâmetros $\hat{\theta}_k$ e da matriz de covariância P_k . Os valores de $\hat{\theta}_0$ podem ser definidos a partir dos parâmetros estimados pelo modelo NARX convencional na Seção 3.5.3, e a matriz de covariância P_0 pode ser definida como uma matriz diagonal com valores altos, indicando alta incerteza inicial nos parâmetros (GOODWIN; SIN, 1984).

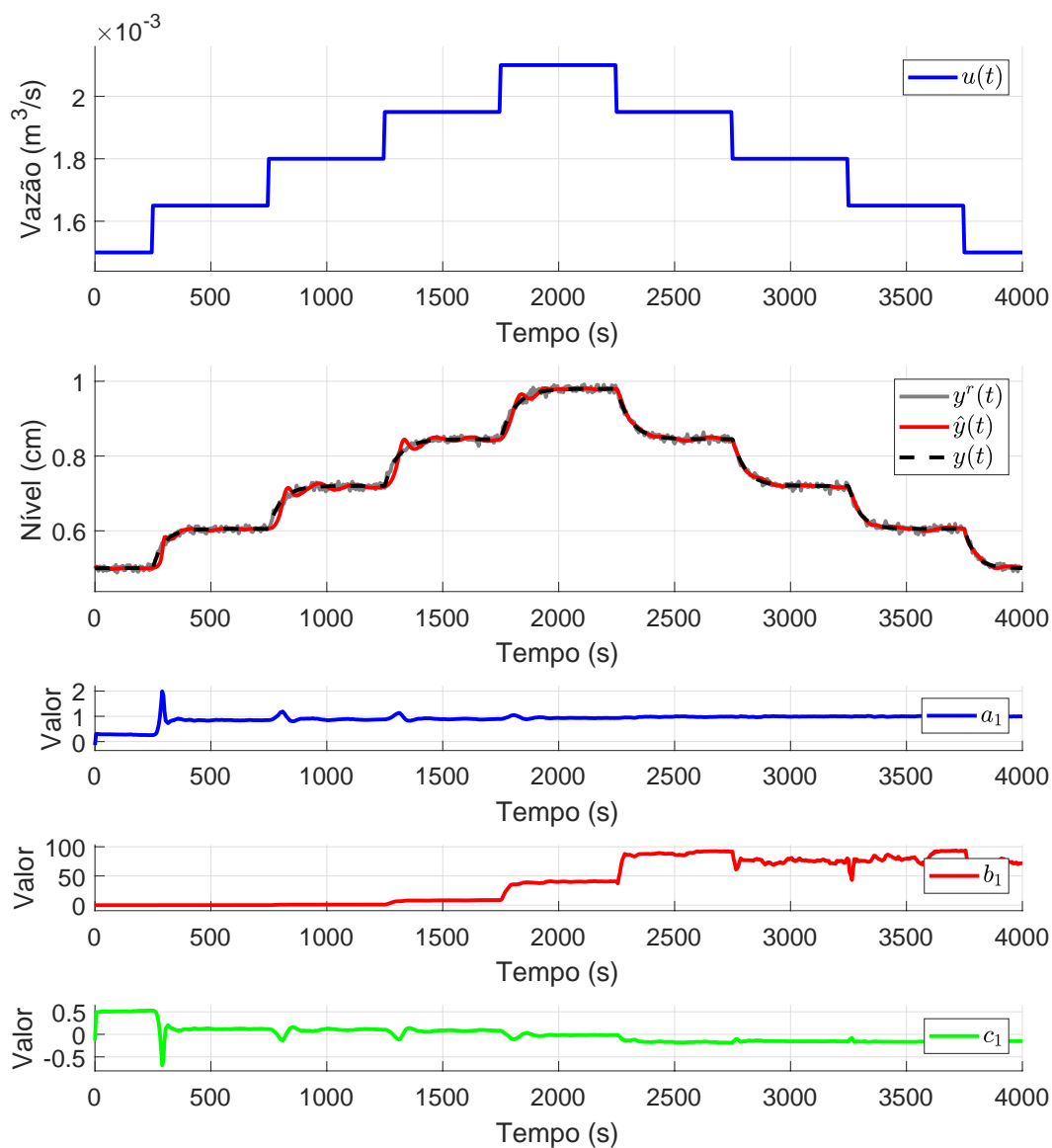
A Figura 15 apresenta a resposta do modelo NARX recursivo com fator de esquecimento $\lambda = 0,98$, estimado a partir dos dados obtidos em um experimento onde o coeficiente K é alterado em $t = 2000$ s, ao mesmo sinal de entrada utilizado durante o experimento. Observa-se que, ao contrário do modelo NARX estimado por meio do estimador de mínimos quadrados não recursivo, o modelo recursivo ajusta seus parâmetros em tempo real, acompanhando eficientemente a mudança na dinâmica do sistema. Este comportamento evidencia a capacidade adaptativa do modelo NARX recursivo em responder a variações operacionais, mantendo a precisão na previsão da saída do sistema mesmo após a alteração do coeficiente K . A Figura 15 também ilustra a evolução dos parâmetros estimados $\hat{\theta}$ ao longo do tempo durante o experimento. Nota-se que, após a mudança no coeficiente K , os parâmetros se ajustam rapidamente para refletir a nova condição do sistema.

Figura 15: Resposta e variação de $\hat{\theta}$ do modelo NARX recursivo com $\lambda = 0,98$, estimado a partir dos dados obtidos em um experimento onde o coeficiente K é alterado em $t = 2000$ s, ao mesmo sinal de entrada utilizado durante o experimento.



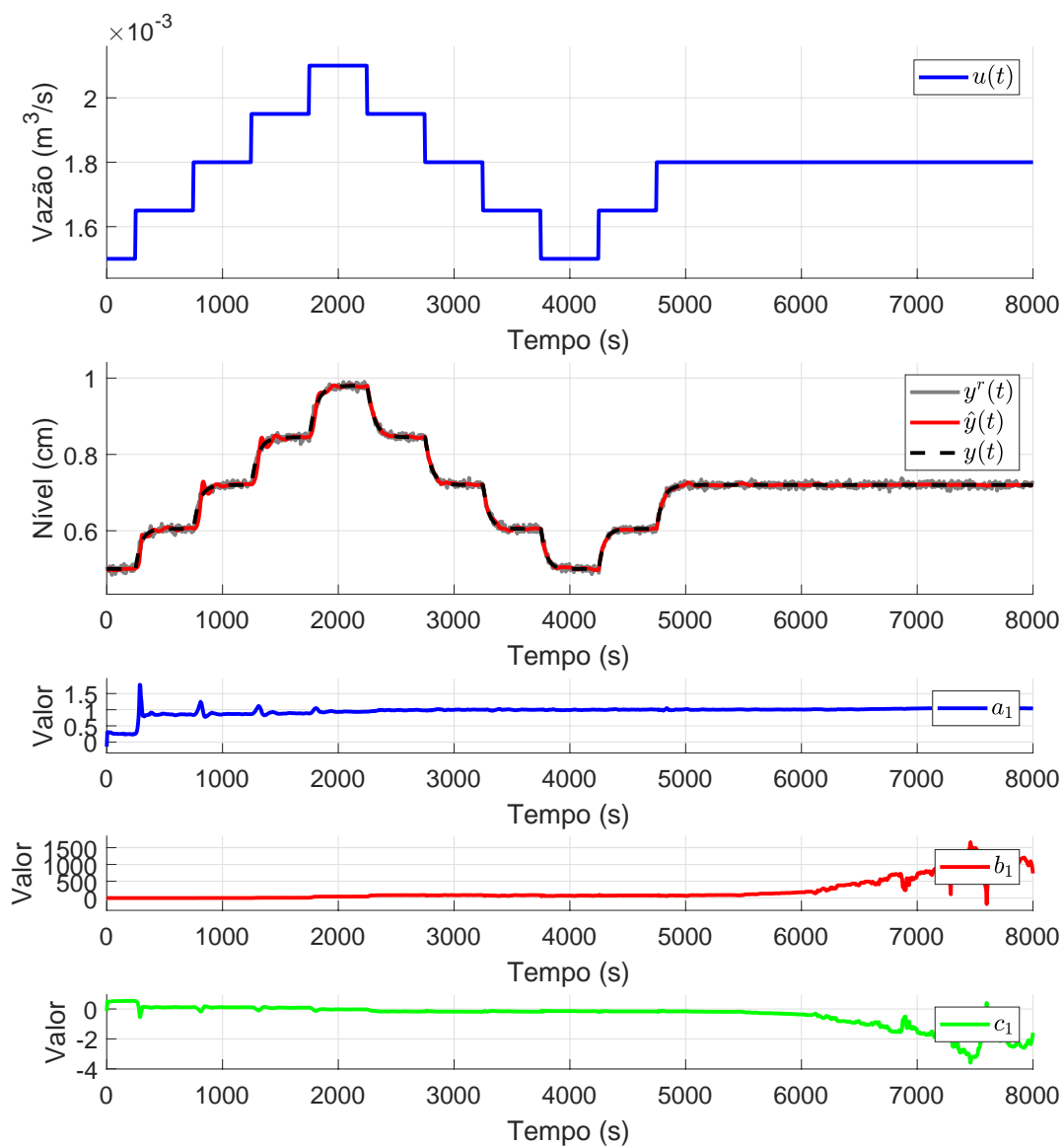
Em outro experimento, foi introduzido um ruído branco gaussiano de média $\mu = 0$ e desvio $\sigma = 6 \times 10^{-3}$ na saída do sistema para avaliar a robustez do modelo NARX recursivo frente a ruídos nos dados observados. A Figura 16 demonstra que o modelo mantém um desempenho consistente na estimação da saída, mesmo com a presença de ruído. Também mostra a variação dos parâmetros $\hat{\theta}$ durante esse experimento, onde pequenas oscilações nos parâmetros são observadas devido ao ruído, mas sem comprometer a estabilidade e a precisão do modelo.

Figura 16: Resposta e variação de $\hat{\theta}$ do modelo NARX recursivo com $\lambda = 0,98$, estimado a partir de dados obtidos em um experimento com saída contendo ruído branco, ao mesmo sinal de entrada utilizado durante o experimento.



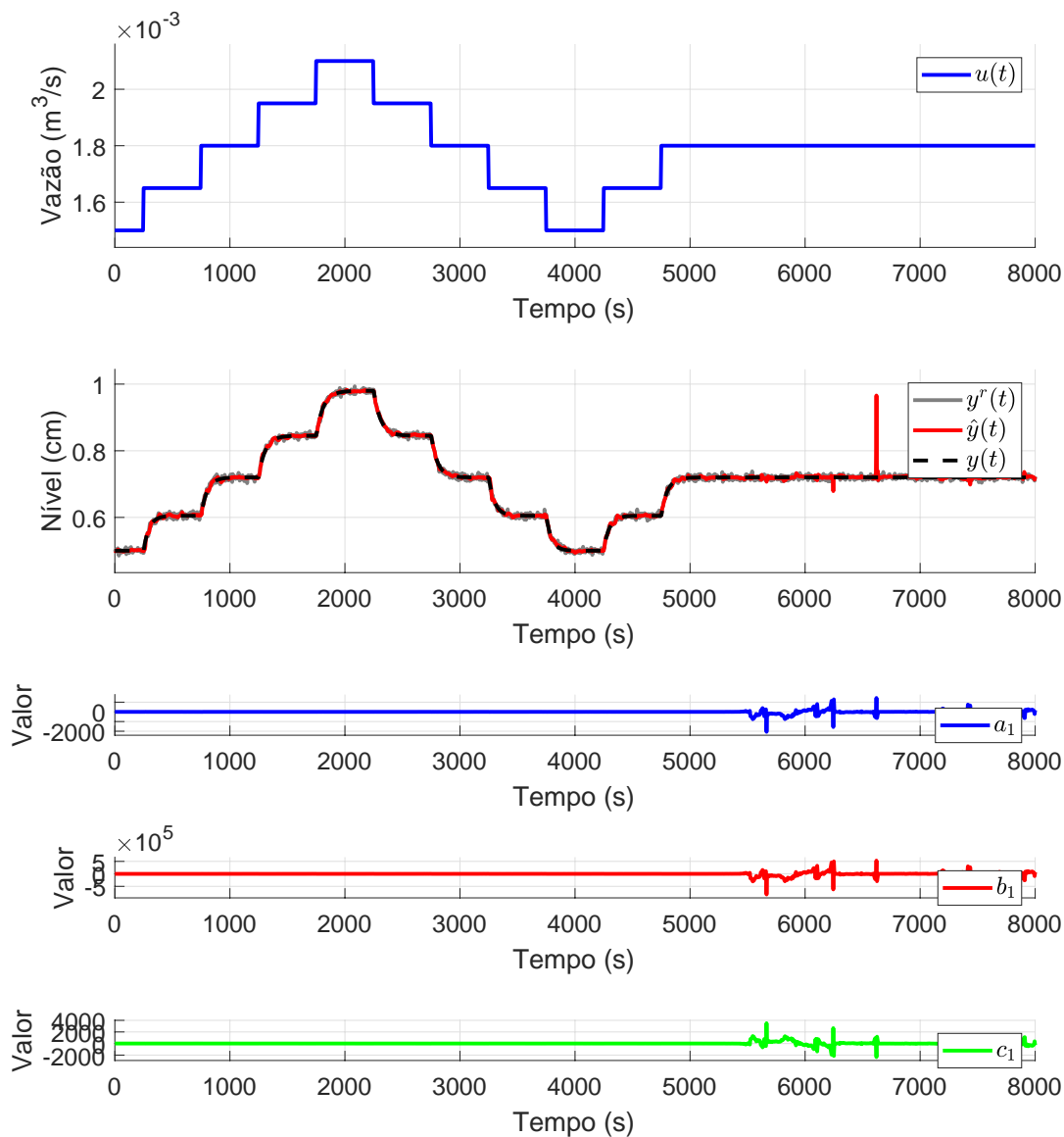
Caso o sinal de entrada seja mantido constante a partir de algum momento, conforme ilustrado na Figura 17, a ausência de excitação no sistema resulta em uma maior sensibilidade dos parâmetros estimados ao ruído presente nos dados. A figura ainda evidencia que, sob essa condição, os parâmetros $\hat{\theta}$ exibem oscilações mais pronunciadas, refletindo a influência direta do ruído devido à falta de novos dados informativos que promovam a estabilização dos parâmetros.

Figura 17: Resposta e variação de $\hat{\theta}$ do modelo NARX recursivo com $\lambda = 0,98$, estimado a partir de dados obtidos em um experimento com saída contendo ruído branco, ao mesmo sinal de entrada utilizado durante o experimento, que se mantém constante a partir do instante $t = 4750$ s.



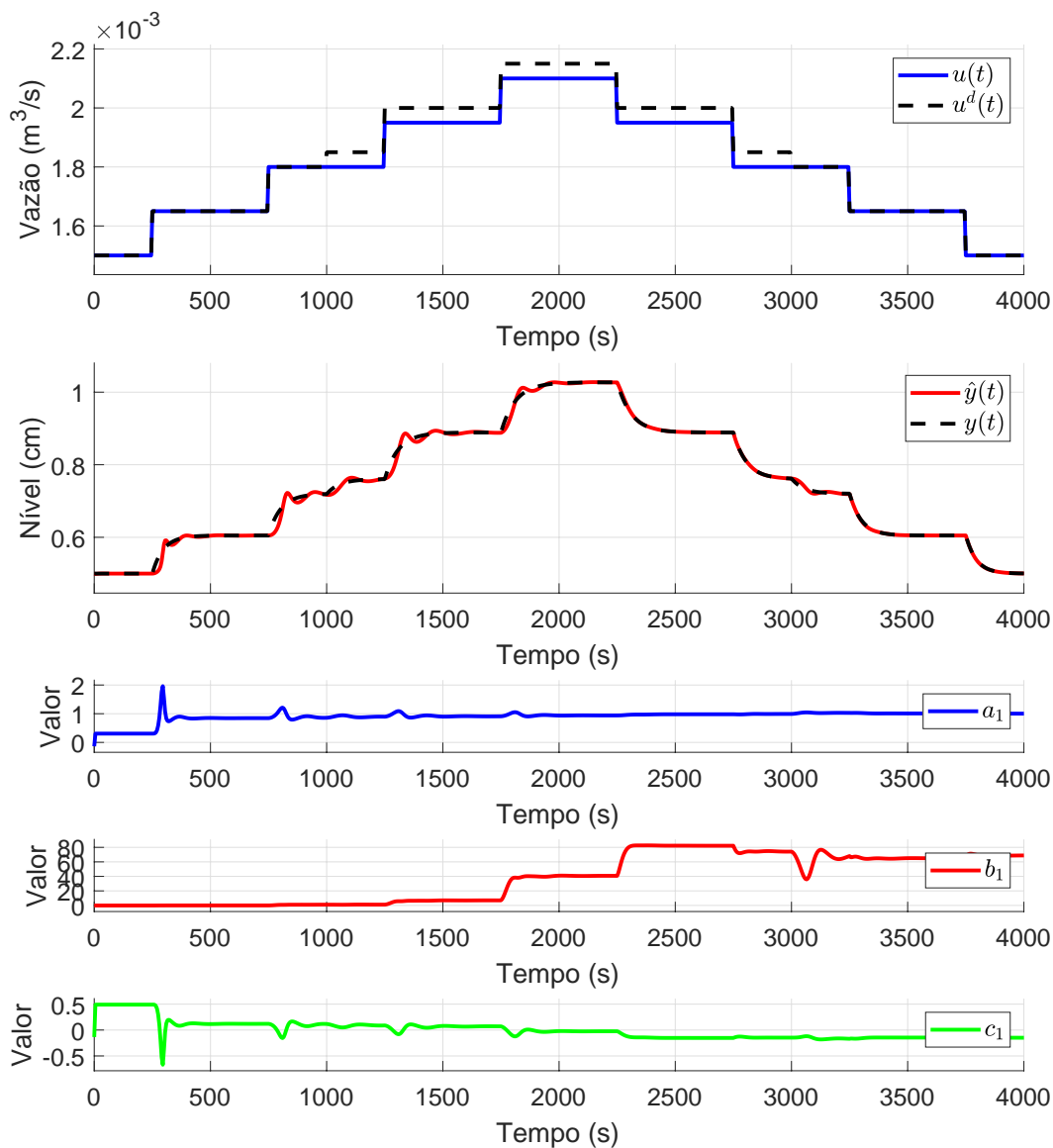
A redução do fator de esquecimento para $\lambda = 0,88$, conforme ilustrado na Figura 18, aumenta a responsividade do modelo NARX recursivo às novas observações, porém também o torna mais suscetível ao ruído. A figura também demonstra que, com $\lambda = 0,88$, os parâmetros $\hat{\theta}$ apresentam oscilações mais intensas, indicando uma maior sensibilidade às flutuações nos dados devido ao menor peso atribuído às observações passadas.

Figura 18: Resposta e variação de $\hat{\theta}$ do modelo NARX recursivo com $\lambda = 0,88$, estimado a partir de dados obtidos em um experimento com saída contendo ruído branco, ao mesmo sinal de entrada utilizado durante o experimento, que se mantém constante a partir do instante $t = 4750$ s.



Em um experimento adicional, foi introduzido um distúrbio constante na entrada do processo durante o intervalo $1000 \text{ s} \leq t \leq 3000 \text{ s}$. A Figura 19 mostra a resposta do modelo NARX recursivo a esse distúrbio, evidenciando a capacidade do modelo em ajustar seus parâmetros para compensar a perturbação externa. Ela também detalha a evolução dos parâmetros $\hat{\theta}$ durante o experimento, demonstrando como o modelo se adapta rapidamente às mudanças introduzidas pelo distúrbio e retorna ao seu estado de equilíbrio após a remoção do distúrbio.

Figura 19: Resposta e variação de $\hat{\theta}$ do modelo NARX recursivo com $\lambda = 0,98$, estimada a partir de dados obtidos em um experimento com um distúrbio constante na entrada do processo no intervalo $1000\text{ s} \leq t \leq 3000\text{ s}$, ao mesmo sinal de entrada utilizado durante o experimento.



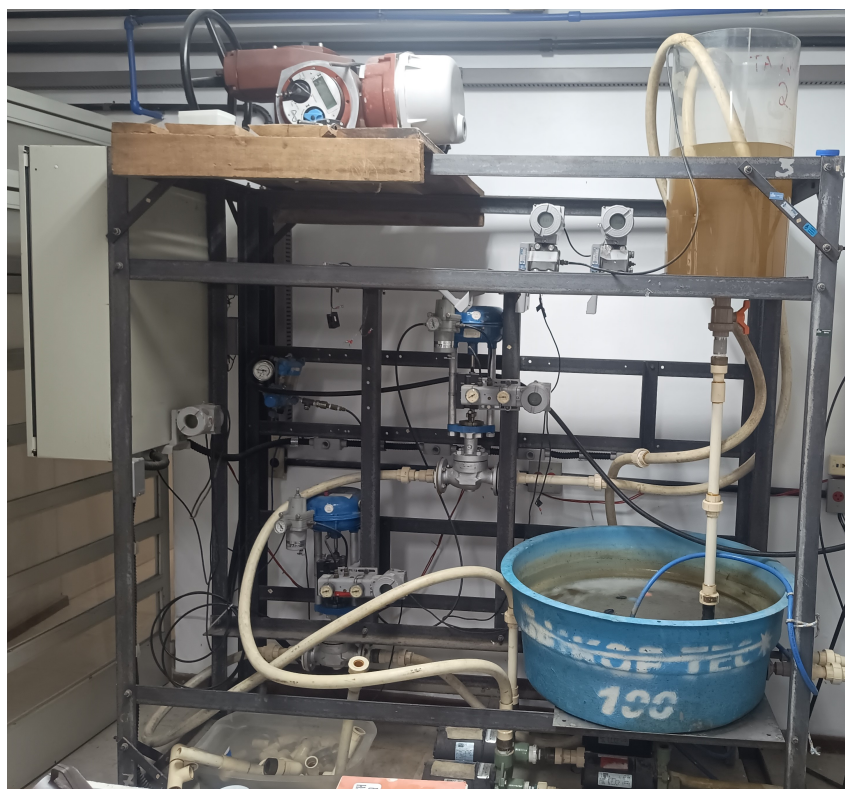
Como visto, até mesmo o modelo recursivo está sujeito a oscilações nos parâmetros caso a entrada não forneça excitação suficiente ou se o ruído for significativo. Uma forma de contornar o problema do ruído consiste em incorporar um critério de histerese no algoritmo de adaptação, de modo que a atualização dos parâmetros só ocorra se a variação da saída ultrapassar um certo limiar mínimo. Assim, evita-se ajustar constantemente o modelo por conta de pequenas flutuações causadas exclusivamente pelo ruído. Além disso, se o sistema estiver em malha fechada com um controlador adequado, eventuais distúrbios são rejeitados e o modelo tende a retornar aos parâmetros corretos com o tempo, ainda que não seja totalmente imune a distúrbios determinísticos.

3.6 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

3.6.1 Sistema utilizado

Para este estudo, foi utilizada uma planta piloto, presente no Laboratório de Sistemas de Automação e Robótica (LASCAR) da UFRGS. O processo é instrumentado por uma rede *Foundation Fieldbus H1*, com duas bombas acionadas por inversores de frequência, duas válvulas pneumáticas (V_1 e V_2) de haste deslizante com controladores PID embutidos, sensores de pressão na base dos tanques para medição do nível e um aerador conectado ao fluxo de saída do tanque, cuja atuação influencia a dinâmica do processo conforme o fluxo de saída varia. O monitoramento, a gestão dos ensaios e o controle do sistema são realizados pelo software supervisor *Eclipse SCADA*, que se comunica via um servidor OPC (do inglês *Open Platform Communications*) com tempo de amostragem $T = 1$ s. A Figura 20 apresenta uma imagem do sistema de controle de nível.

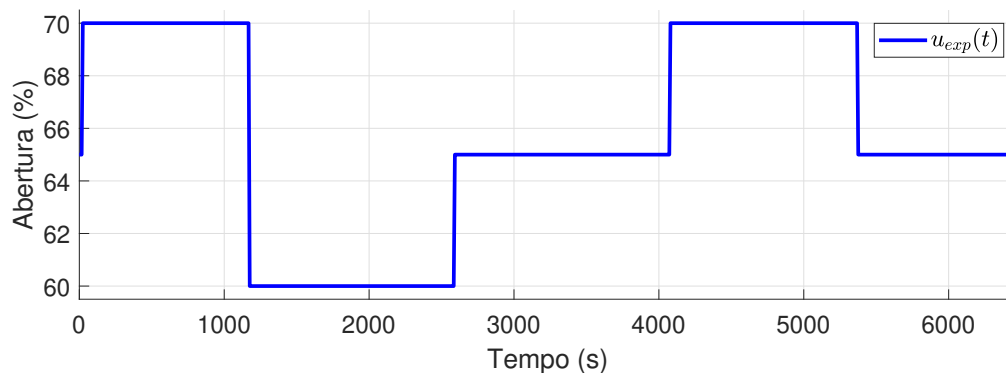
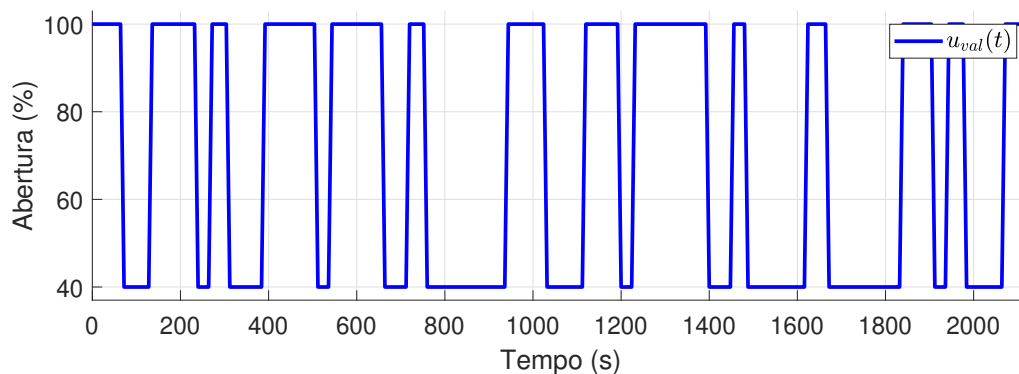
Figura 20: Visão geral do sistema de controle de nível com tanque cilíndrico, reservatório, bombas e válvulas.



Fonte: O autor.

A Figura 21 apresenta o sinal de experimento — correspondente à abertura da válvula V_1 — no qual a válvula V_2 , não representada na figura, é aberta parcialmente no instante $t = 1900$ s e fechada por completo em $t = 4100$ s. Esse distúrbio não modelado afeta a dinâmica do tanque. A Figura 22 mostra o sinal de validação, utilizado para avaliar o modelo fora das condições de estimação.

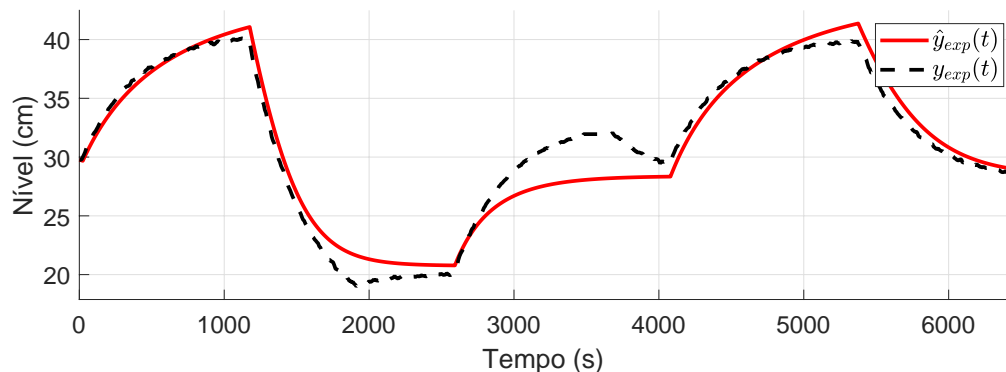
A Figura 21 apresenta o sinal de experimento utilizado. O sinal de controle é a abertura da válvula V_1 . V_2 é aberta parcialmente no instante $t = 1900$ s e é fechada por

Figura 21: Sinal de experimento da válvula V_1 .**Figura 22:** Sinal de validação da válvula V_1 .

completo em $t = 4100$ s. Já a Figura 22 representa o sinal de validação utilizado para validar o modelo.

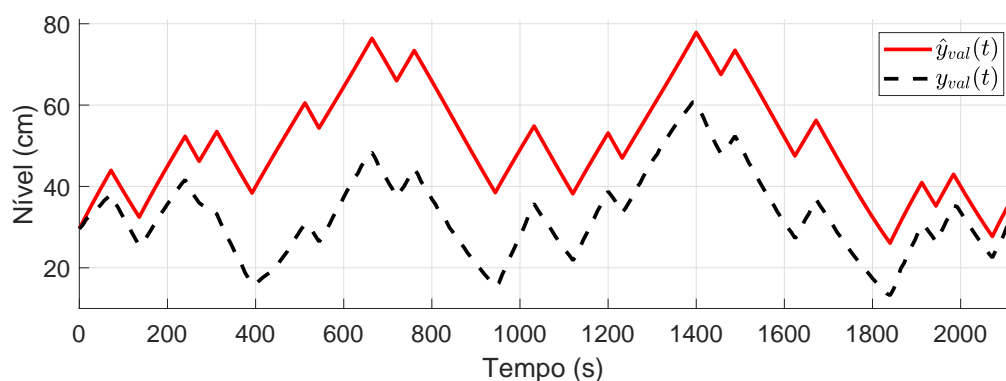
Quando se aplica o modelo NARX, estimado via mínimos quadrados, aos dados obtidos neste ensaio, observa-se que o distúrbio compromete a precisão da estimação, como já visto na Seção 3.5.3.3. A Figura 23 ilustra a resposta do modelo NARX ao sinal de experimento, evidenciando dificuldades em acompanhar corretamente a mudança na dinâmica após o distúrbio. Ao aplicar o sinal de validação (Figura 22), a Figura 24 mostra que o modelo, estimado sob condições de distúrbio, não se ajusta bem a novas condições do sistema.

Figura 23: Resposta do modelo NARX, estimado a partir de dados obtidos em um experimento com distúrbio na entrada do processo, ao mesmo sinal de entrada utilizado no experimento



Após o ensaio de experimento, a válvula de saída do tanque foi aberta mais um pouco. A Figura 24 apresenta a resposta do modelo NARX, estimado a partir de dados obtidos em um experimento com distúrbio na entrada do processo, ao sinal de validação sem perturbação.

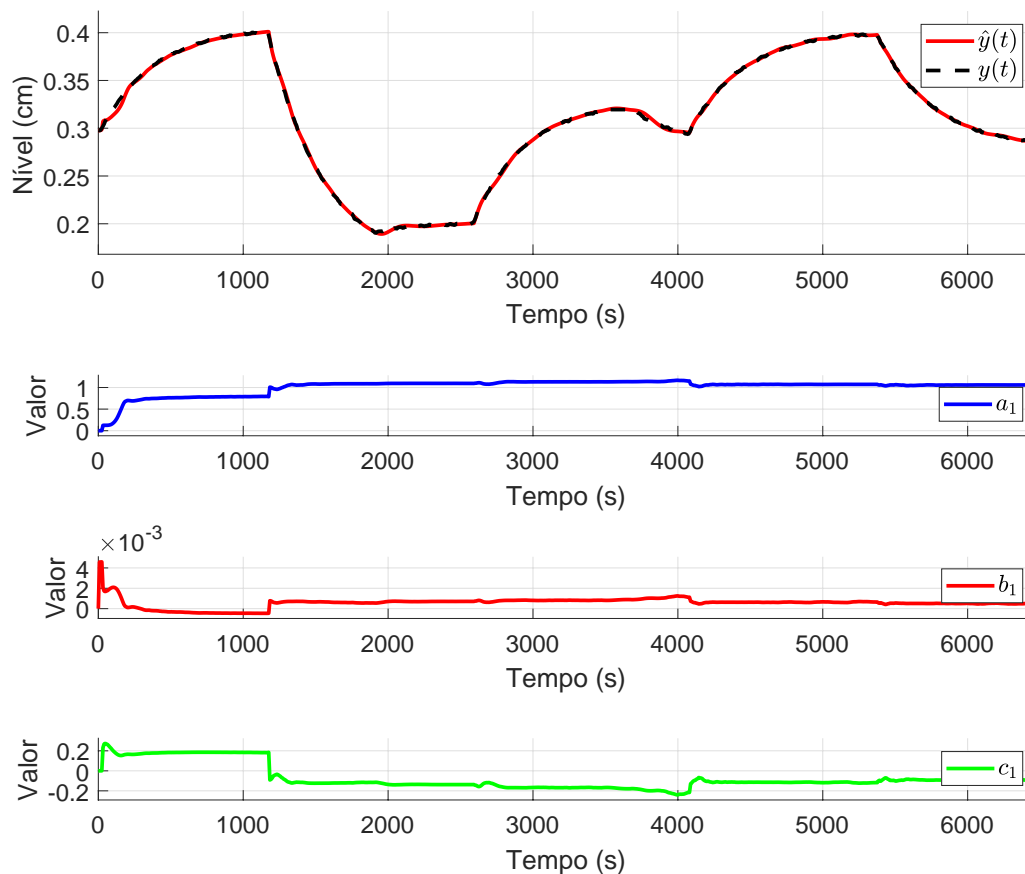
Figura 24: Resposta do modelo NARX, estimado a partir de dados obtidos em um experimento com distúrbio na entrada do processo, ao sinal de validação sem perturbação.



A Figura 25 mostra a resposta do modelo NARX recursivo com $\lambda = 0,98$ ao mesmo sinal de experimento, indicando maior fidelidade na representação do sistema mesmo na presença do distúrbio quanto após este ter acabado. Pode-se entender também que o distúrbio simula uma variação na planta, e o algoritmo adapta os parâmetros do modelo para tal mudança, fazendo com que a saída do modelo seja sempre muito próxima à saída real.

Note que, se um controlador é projetado com base em tais parâmetros variantes, a saída será sempre controlada adequadamente, uma vez que as variações do processo são capturadas.

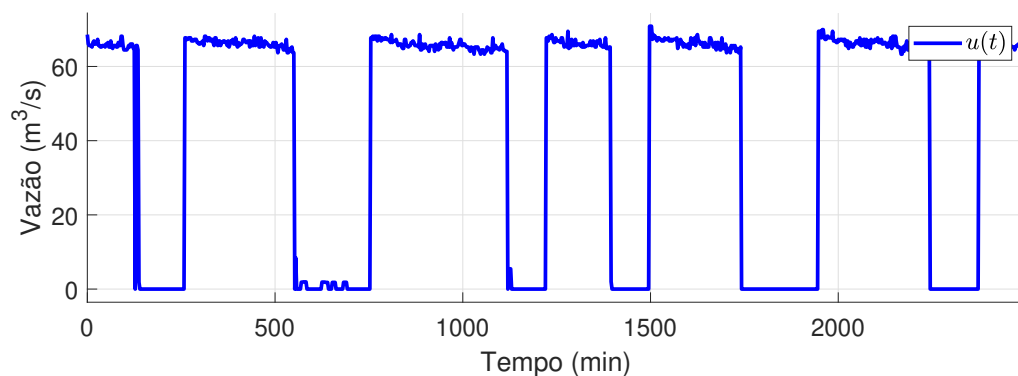
Figura 25: Resposta e variação de $\hat{\theta}$ do modelo NARX recursivo com $\lambda = 0,98$, estimado a partir de dados obtidos em um experimento com um distúrbio constante na entrada do processo no intervalo $1900\text{ s} \leq t \leq 4100\text{ s}$, ao mesmo sinal de entrada utilizado durante o experimento.



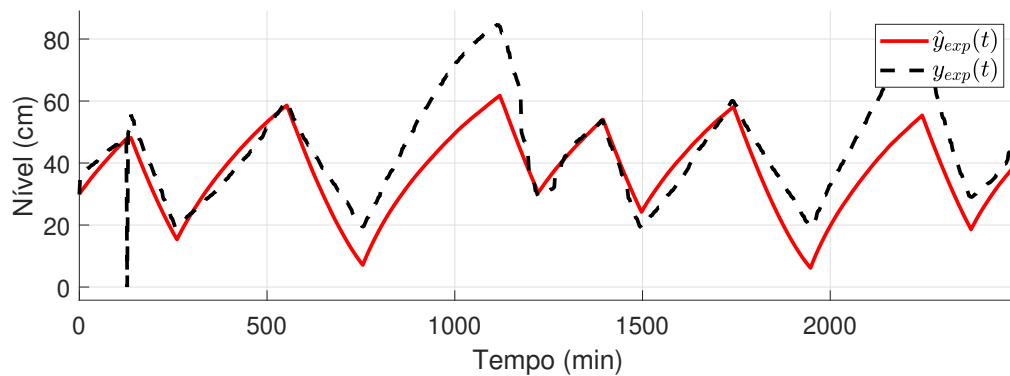
3.7 RESULTADOS EM UMA APLICAÇÃO REAL

Como estudo adicional, aplicou-se a técnica de identificação recursiva em dados obtidos de um tanque de abastecimento de uma estação de tratamento de água. Neste cenário, a dinâmica do sistema é ainda mais complexa, devido a mudanças imprevisíveis na demanda e perturbações externas constantes, como vazamentos na rede de distribuição.

O sinal de entrada utilizado é apresentado na Figura 26. O modelo NARX convencional novamente mostra-se limitado, como demonstrado na Figura 27, apresentando parâmetros polarizados e desempenho insatisfatório. Ao empregar o NARX recursivo com diferentes valores de fator de esquecimento λ , sendo eles 1, 0,99 e 0,98, o valor que melhor se adaptou à dinâmica do tanque foi $\lambda = 0,98$, ilustrado na Figura 28, onde observa-se uma melhora significativa na qualidade da estimação, permitindo acompanhar as variações do sistema em tempo real.

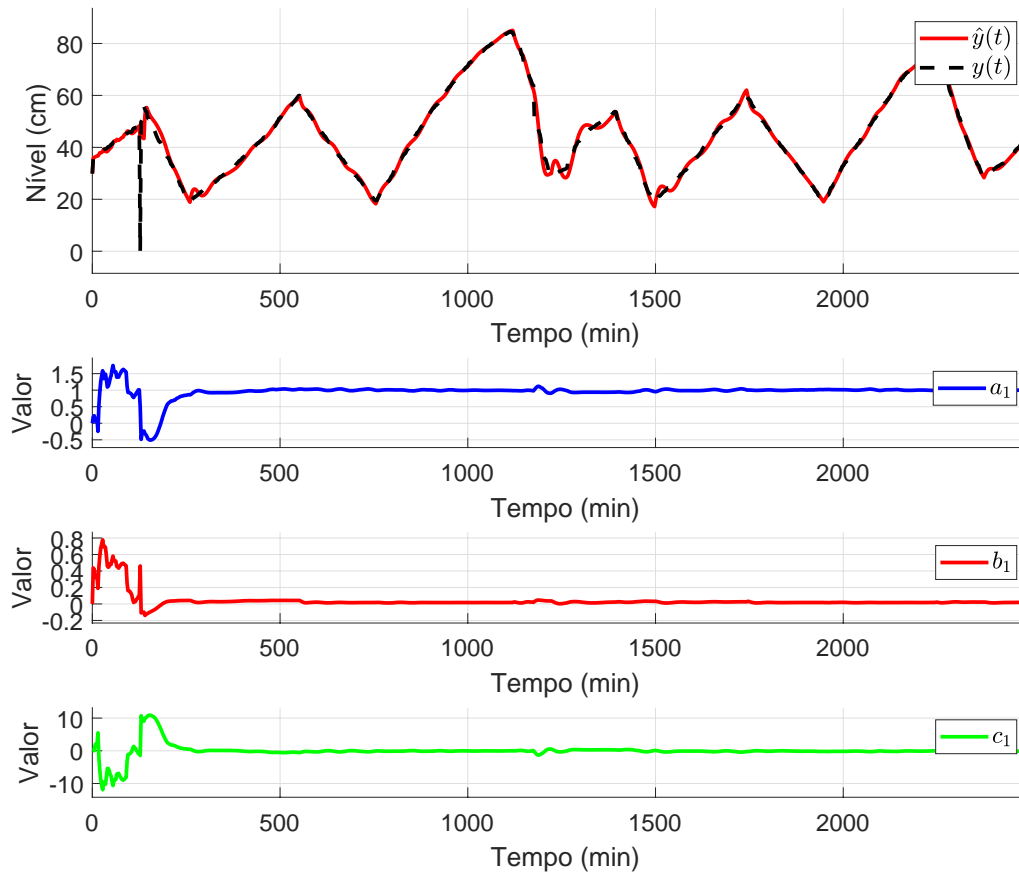
Figura 26: *Sinal de experimento.*

Fonte: O autor.

Figura 27: *Resposta do modelo NARX ao sinal de experimento.*

Fonte: O autor.

Figura 28: Resposta do modelo NARX recursivo com $\lambda = 0,98$ ao sinal de experimento.



Fonte: O autor.

Observa-se, portanto, que a utilização do modelo NARX recursivo com um fator de esquecimento adequado resultou em um melhor acompanhamento das flutuações do tanque, evidenciando a capacidade adaptativa e a robustez da abordagem. Esses resultados corroboram os resultados obtidos nas simulações e na planta-piloto, reforçando o potencial de aplicação da técnica em outros cenários.

4 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou um estudo sobre identificação de sistemas não-lineares sujeitos a variações de parâmetros, ruídos e distúrbios, utilizando diferentes abordagens de modelagem e estimação. Inicialmente, analisou-se o modelo ARX, que, apesar de simples e eficiente para representar a dinâmica em torno de um ponto de operação, mostrou-se insuficiente diante de cenários mais complexos, nos quais a dinâmica do processo se afasta desse ponto ou sofre modificações significativas. A introdução do modelo NARX, incorporando termos não-lineares, contribuiu para melhorar a capacidade de o modelo capturar comportamentos mais ricos e complexos. Entretanto, quando o sistema estava sujeito a ruídos, distúrbios ou mudanças de parâmetros ao longo do tempo, o NARX não-recursivo apresentou estimativas polarizadas e perda de acurácia, evidenciando a necessidade de mecanismos que permitissem uma adaptação contínua.

Nesse contexto, a adoção do estimador de mínimos quadrados recursivo, combinada com o modelo NARX, mostrou-se uma solução promissora. A abordagem recursiva permitiu a atualização em tempo real dos parâmetros, ajustando o modelo às condições operacionais vigentes e assegurando previsões mais robustas mesmo diante de perturbações, ruídos e mudanças abruptas nos parâmetros. Os resultados obtidos tanto em simulações quanto em aplicações experimentais, incluindo uma planta-piloto de nível e um sistema real de abastecimento de água, demonstraram a eficácia dessa estratégia. A adaptabilidade do NARX recursivo garantiu respostas mais precisas e consistentes, tornando-o uma ferramenta útil em ambientes industriais dinâmicos e incertos, nos quais a manutenção de um modelo acurado ao longo do tempo é fundamental.

Ainda assim, alguns desafios práticos permanecem. Em cenários de baixa excitação do sistema — por exemplo, quando a entrada permanece constante por longos períodos — os parâmetros se tornam mais sensíveis ao ruído, podendo oscilar devido à falta de informação nova. Além disso, a seleção do fator de esquecimento é um aspecto crucial: valores muito próximos de 1 tornam a adaptação mais lenta a mudanças, enquanto valores menores aumentam a reatividade, mas também a sensibilidade a ruídos momentâneos. Esses aspectos sugerem a necessidade de estratégias adicionais, como filtragem mais sofisticada, controles de histerese na atualização dos parâmetros ou o uso de algoritmos de otimização que ajustem o fator de esquecimento de forma adaptativa.

No que diz respeito a trabalhos futuros, diversas perspectivas se apresentam. A utilização de redes neurais aprimora a modelagem não-linear, ao permitir que o modelo aprenda e represente as relações entre as variáveis do processo sem a necessidade de especificar previamente essas interações. A aplicação do modelo NARX em conjunto com o estimador recursivo em outros tipos de processos industriais, caracterizados por múltiplas variáveis e interações não-lineares entre elas, permitirá avaliar a generalidade e a escalabilidade da abordagem proposta. Por fim, tornar o método mais robusto a distúrbios determinísticos e explorar mecanismos adicionais de histerese para lidar de uma forma eficaz com ruídos representam caminhos promissores para pesquisas futuras.

REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. A. *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não Lineares*. 4. ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2004.
- ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. *Adaptive Control*. 2. ed. Mineola: Dover Publications, 2008.
- BAZANELLA, A. S. *Sistemas de Controle: princípios e métodos de projeto*. 1. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2005.
- BILLINGS, S. A. *Nonlinear System Identification: NARMAX Methods in the Time, Frequency, and Spatio-Temporal Domains*. 1. ed. Pondicherry: Wiley, 2013.
- BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M.; REINSEL, G. C. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 5. ed. Hoboken: Wiley, 2015.
- CAMPESTRINI, L. et al. Identifiability Analysis and Prediction Error Identification of Anaerobic Batch Bioreactors. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Brazilian Society for Automatics–SBA, v. 25, p. 438–447, 2014. DOI: 10.1007/s40313-014-0129-3.
- DONG, J. Recursive NARX model identification of nonlinear chemical processes with matrix invertibility analysis. *Computers and Chemical Engineering*, v. 121, p. 574–583, 2019. ISSN 0098-1354. DOI: 10.1016/j.compchemeng.2018.11.022.
- ECKHARD, D.; CAMPESTRINI, L. Análise do uso de modelos discretizados para identificação de modelos de biorreatores anaeróbicos. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics*, v. 4, 2016. DOI: 10.5540/03.2016.004.01.0059.
- GOODWIN, G. C.; SIN, K. S. *Adaptive Filtering Prediction and Control*. [S.l.]: Dover Publications, 1984.
- HAYKIN, S.; VEEN, B. V. *Sinais e Sistemas*. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- LIMA, P. *Identificação paramétrica não linear de um servoposicionador hidráulico*. 2023. Faculdade de Engenharia de Controle e Automação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
- LJUNG, L. *System Identification: Theory for the User*. 2. ed. New Jersey: Prentice Hall PTR, 1999.
- MILJKOVIĆ, D. Fault detection methods: A literature survey. In: 2011 Proceedings of the 34th International Convention MIPRO. [S.l.]: IEEE, 2011. P. 750–755.
- MUNARO, C. J. et al. Data driven performance monitoring and retuning using PID controllers. *Computers & Chemical Engineering*, v. 178, p. 108360, 2023. ISSN 0098-1354. DOI: 10.1016/j.compchemeng.2023.108360.

- NARENDRA, K.; MUKHOPADHYAY, S. Adaptive control using neural networks and approximate models. *IEEE Transactions on Neural Networks*, v. 8, n. 3, p. 475–485, 1997. DOI: 10.1109/72.572089.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. ISBN 9788576058106.
- PREVIDI, F.; LOVERA, M. Identification of a class of non-linear parametrically varying models. *International Journal of Adaptive Control and Singal Processing*, v. 17, n. 1, p. 33–50, 2003. DOI: 10.1002/acs.730.
- ROFFEL, B.; BETLEM, B. *Process Dynamics and Control: Modeling for Control and Prediction*. Chichester, England: John Wiley & Sons, Ltd, 2007.
- SJÖBERG, J. et al. Nonlinear black-box modeling in system identification: a unified overview. *Automatica*, v. 31, n. 12, p. 1691–1724, 1995. Trends in System Identification. ISSN 0005-1098. DOI: [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(95\)00120-8](https://doi.org/10.1016/0005-1098(95)00120-8).
- SÖDERSTRÖM, T.; STOICA, P. *System Identification*. Hemel Hempstead: Prentice Hall, 1989. ISBN 9780131276062.
- TÓTH, R. *Modeling and Identification of Linear Parameter-Varying Systems*. Berlin: Springer, 2010.