Os tradicionais paradoxos matemáticos e os paradoxos da filosofia da diferença de Gilles Deleuze: impactos na (Educação) Matemática

The traditional mathematical paradoxes and the paradoxes of the philosophy of difference by Gilles Deleuze: the possible impacts (in the education) of Mathematics

Roberta Labres Flugseder[1]
Suelen Assunção Santos[2]

Resumo: Desde a antiguidade, os paradoxos desafiam o senso comum e a lógica e são caracterizados como algo incompreensível, sem sentido e de difícil explicação. Desse modo, este artigo visa abordar os significados e as origens históricas de alguns dos paradoxos matemáticos mais conhecidos, que são: os paradoxos de Zenão, de Cantor, de Russell e de Burali-Forti, e fazer um avizinhamento com os paradoxos da filosofia da diferença de cunho deleuzeano. Por conseguinte, são apontados os possíveis impactos deles na história da Matemática. Conclui-se que os paradoxos foram responsáveis por inspirarem muitas reflexões acerca de teorias e conceitos de diversas áreas, especialmente, da Matemática e Filosofia, nos permitindo pensar de modo diferente, criando soluções (im)possíveis para tais contradições.

Palavras-chave: Paradoxo. Matemática. Filosofia da Diferença.

Abstract: Since the ancient times, paradoxes challenge common sense and logic and are characterized as something incomprehensible, without meaning and hard to explain. Therefore, this article tries to describe the meanings and historical origins of some of the most known mathematical paradoxes, which are: Zeno's paradoxes, Cantor's paradox, Russell's paradox and Burali-Forti paradox, and to make an approximation with the deleuzian paradoxes of the philosophy of difference. Consequently, their possible impacts in Mathematics history are highlighted. In conclusion, the paradoxes were responsible for inspiring many insights about theories and concepts of various areas, specially of Mathematics and Philosophy, allowing us to think differently and creating (in)possible solutions for these contradictions.

Keywords: Paradox. Mathematics. Philosophy of Difference.

1 Introdução

Significado de Paradoxo[3]
Substantivo masculino
Contradição ou oposição aparente: falo melhor quando emudeço.
[Gramática] Junção de palavras com sentidos opostos que, usadas na mesma frase, têm o intuito de expressar ou causar uma contradição: "alegria triste" é um exemplo de paradoxo.
Opinião contrária ao senso comum: sua vitória como presidente foi um paradoxo político.
Ausência de nexo; falta de lógica: a vida é uma morte.
Ideia bem fundamentada ou apresentada de forma coerente, mas que possui subentendidos contraditórios à sua própria estrutura.
[Filosofia] Contradição que chega, em certos casos, a se opor às razões do pensamento humano ou nega o que a maioria tende a acreditar.
Etimologia (origem da palavra ***paradoxo***). A palavra paradoxo deriva do grego "parádoksos,os,on", que significa estranho; pelo latim "paradoxon,i".

[1] Centro de Ensino Médio Pastor Dohms – Unidade de Ensino Tramandaí • Imbé, RS — Brasil • ✉ rflugseder@gmail.com • ORCID https://orcid.org/0000-0001-8382-7756
[2] Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Campus Litoral • Porto Alegre, RS — Brasil • ✉ suelen.santos@ufrgs.br • ORCID https://orcid.org/0000-0001-7658-8670
[3] Fonte: Dicio – Dicionário online de português. Disponível em: https://www.dicio.com.br/paradoxo/

ISSN 2764-3158

Sinônimos de Paradoxo
Paradoxo é sinônimo de: contradição, oposição, antagonismo, incoerência, incompatibilidade, incongruência

Definição de Paradoxo
Classe gramatical: **substantivo masculino**
Flexão do verbo paradoxar na: 1ª pessoa do singular do presente do indicativo
Separação silábica: **pa-ra-do-xo**
Plural: **paradoxos**

Paradoxo[4]
"O que é contrário à opinião geralmente admitida, à previsão ou à verossimilhança" (p. 788).
Paradoxo[5]
"O que é contrário à "opinião da maioria", ou seja, ao sistema de crenças comuns a que se fez referência, ou contrário a princípios considerados sólidos ou a proposições científicas. Aristóteles, em Refutações sofísticas (cap.12), considera a redução de um discurso a uma opinião paradoxal como o segundo fim da sofística (o primeiro é a refutação, ou seja, provar a falsidade da asserção do adversário)" (p. 864).

Os paradoxos nos remetem a algo incompreensível ou que podem nos levar a certas contradições difíceis de explicar. Talvez ao tentar explicar o significado de um determinado paradoxo, realizamos um movimento em nosso pensamento que nos permite criar situações ainda não imaginadas que possam elucidar tal situação, visto que "[...] para além de todas suas contribuições matemáticas os paradoxos podem ser excelentes exercícios ao pensamento ou um convite a pensarmos de modo diferente" (Monteiro, 2016, p. 240).

Desse modo, existem paradoxos de diversas áreas do conhecimento, tais como: da lógica, da matemática, da filosofia, da gramática, etc. Desde o início da humanidade, muitos foram os paradoxos que despertaram a curiosidade e fizeram pessoas se debruçarem tentando chegar a uma solução para tal contradição.

Historicamente, a Matemática acumulou diversos paradoxos originários de formulações, reformulações, debates, controvérsias elaboradas por filósofos e matemáticos em diferentes épocas. Por esse motivo, Balieiro Filho & Oliveira (2022, p. 22) afirmam "[...] que os paradoxos tiveram um impacto significativo no desenvolvimento da Matemática por meio do refinamento e reformulação de conceitos, ampliação de teorias existentes e o surgimento de outras novas".

Muitos matemáticos se depararam com paradoxos em sua busca por provar alguma teoria ou afirmação dessa disciplina que é culturalmente definida como imutável, exata, pronta e acabada. E, por isso, no ímpeto de buscar um método capaz de provar todas as afirmações matemáticas, alguns matemáticos acreditavam que, ao se deparar com contradições e erros, estes se tratavam de descuidos dos próprios humanos e não se tratavam de paradoxos (Coury, 2016).

Nesse sentido, este texto apresenta alguns dos paradoxos que comporão a tese de doutorado que está em fase de pesquisa e escrita que se intitulará *Problemas do tipo Paradoxo e a Educação Matemática: Contribuições das Filosofias da Diferença* junto ao Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências (PPgECi) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS. A pesquisa de doutorado tem a intenção de investigar que Problemas do tipo Paradoxo podem proporcionar para a Educação Matemática, contribuições pautadas na perspectiva das filosofias da diferença. No entanto, este artigo tem por objetivo mostrar um recorte específico da pesquisa e realizar uma exposição dos significados e das origens

[4] Fonte: Lalande, André. (1999). *Vocabulário técnico e crítico da filosofia.* São Paulo, SP: Martins Fontes.
[5] Fonte: Abbagnano, Nicola. (2012). *Dicionário De Filosofia.* São Paulo, SP: WMF Martins Fontes.

ISSN 2764-3158

históricas dos tradicionais e famosos paradoxos matemáticos e dos paradoxos das filosofias da diferença e apontar os possíveis impactos na história da Matemática.

E, para uma melhor inteligibilidade, este artigo está dividido em cinco seções. A primeira seção é a *1 Introdução* em que apresenta uma visão geral dos principais aspectos a serem abordados neste artigo. A segunda seção é *2 Os tradicionais e famosos paradoxos matemáticos*, que apresenta as características principais de um paradoxo e um breve apanhado dos paradoxos que estão descritos nas subseções: *2.1 Os paradoxos de Zenão*; *2.2 O paradoxo de Cantor*; *2.3 O paradoxo de Russell;* e, *2.4 O paradoxo de Burali-Forti*. Já a seção *3 Os paradoxos das filosofias da Diferença* versa sobre os paradoxos de acordo com a perspectiva filosófica pós-estruturalista de Gilles Deleuze. Na sequência, a seção *4 Possíveis impactos dos paradoxos na história da Matemática e da Filosofia* desenvolve as consequências que os paradoxos matemáticos e das filosofias da diferença trouxeram para a Matemática. Por fim, são tecidas na seção, *5 Considerações Finais,* os resultados conquistados e considerados importantes ao término do estudo empreendido.

2 Os tradicionais e famosos paradoxos matemáticos

A matemática considerada como verdade absoluta, data da época de Euclides, em que muitos matemáticos e filósofos consideravam a geometria Euclidiana como verdade plena, tendo a maior parte da ciência exata, até meados do século XIX, como um campo seguro que parecia capaz de sustentar um raciocínio que não poderia ser negado e não gerasse contradições (Coury, 2016).

Porém os paradoxos podem surgir quando há uma contradição entre fatos, teorias, ideias ou conceitos, que foram muito importantes na história da Matemática, pois a partir deles novos conhecimentos surgiram. Por isso, muitos matemáticos se dedicaram a decifrá-los e assim, na busca de sua solução, desenvolveu-se uma formalização de conceitos, o que induziu a uma rigorosa construção da teoria da Matemática. De acordo com Carvalho (2023, p. 34), “[...] podemos dizer que os paradoxos são caracterizados pela sua falta de coerência com a estrutura lógica que forma a conexão de ideias e raciocínios, levando a inconsistências lógicas, resultados falsos e sem fundamentação”.

Desde a antiguidade até os nossos dias, estudiosos da lógica sempre se intrigaram com a questão dos paradoxos, visto que, historicamente, os paradoxos se constituíram como uma série de problemas investidos de rigor lógico, que desafiam muitos matemáticos e filósofos, além de ser considerado como um obstáculo intransponível (Tassara, Moraes & Abbud, 2018). Zenão de Eléia (490-430 a.C.) é um desses lógicos da antiguidade grega conhecido como o criador de paradoxos que desafiam o senso comum e a lógica, além de seus paradoxos serem ótimos exemplos de como a filosofia pode nos levar a refletir sobre questões complexas relacionadas ao movimento, espaço e tempo.

Por outro lado, iniciada por Aristóteles (384 – 322 a.C.), a sistematização da lógica dos argumentos, cuja questão central não é mais sobre a verdade das proposições ou conclusões em debate, mas sim passa a ser as proposições estudadas como as consequências lógicas dos axiomas do sistema, era tida pelos matemáticos como instrumento seguro que justificava suas afirmações e os fazia levar à verdade. Mortari (2001) reflete que a lógica pode ser vista como o estudo das diferentes maneiras que se pode estudar e aplicar as leis gerais do pensamento na investigação da verdade. Desse modo, na “ciência” dos argumentos, de modo geral, começa-se pelas hipóteses iniciais que são operadas até se chegar a uma conclusão final.

ISSN 2764-3158

Nesse sentido, conforme Coury (2016), para que se infira sobre um paradoxo, é necessário partir-se da verificação de três princípios básicos da lógica que, obrigatoriamente, devem ser satisfeitos para quaisquer regras do raciocínio dedutivo. Assim:

> 1 – *Princípio da identidade:* Qualquer objeto ou proposição é igual a si mesmo: $(\forall x, x = x)$.
> 2 – *Princípio da não contradição:* uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa: $\neg(A \wedge \neg A)$.
> 3 – *Princípio do terceiro excluído:* uma proposição é verdadeira ou falsa e não existe uma terceira opção: $(A \vee \neg A)$ (Coury, 2016, p. 140, grifos do autor).

Tendo o "princípio da não contradição" não satisfeito, há desse modo, a situação de um paradoxo, visto que é possível provar uma sentença e sua negação em um mesmo sistema (Coury, 2016).

Além disso, na história da Matemática, a partir do fim do século XIX e início do século XX, iniciou-se o período chamado de "aritmetização da análise" idealizado, principalmente, por Dedekind, Weirstrauss e Cantor, cujo objetivo era alcançar os fundamentos do número/grandeza irracional, como por exemplo, a construção de números a partir de séries infinitas, conjunto dos números reais de Dedekind, teorias apoiadas na análise, na teoria de conjuntos e na aritmética (Arstein, 2014 *apud* Coury, 2016).

Gottlob Frege (1848-1925) e Bertrand Russell (1872-1970) ocuparam um bom tempo de seus estudos com a busca pela verdade matemática e ambos tiveram suas teorias abaladas por paradoxos. Os dois matemáticos "[...] acreditavam que a lógica oferecia as ferramentas necessárias para a construção de uma base para a aritmética, em que toda afirmação verdadeira pudesse ser demonstrada, encaixando-a em um formato lógico" (Guillen, 1983 *apud* Coury, 2016, p. 136).

De acordo com Coury (2016) mais de 20 anos das pesquisas de Frege foram pautadas na construção de uma linguagem e um sistema capaz de deduzir e expressar as verdades aritméticas. Já Russell escreveu uma carta para Frege em 1902, informando-o sobre um paradoxo que poderia ser gerado dentro de seu sistema. Mais tarde esse paradoxo tornou-se conhecido como *paradoxo de Russell*.

Outros matemáticos que também tiveram suas teorias abaladas por paradoxos foram Georg Cantor (1845-1918) e Cesare Burali-Forti (1861-1931). As pesquisas de Cantor eram ligadas a aritmetização da análise, esse fato o fez ser popularmente conhecido como o "pai da teoria de conjuntos". Todavia, a intenção de Cantor era de investigar os números cardinais e apresentar os números transfinitos e não construir uma teoria de conjuntos.

O matemático italiano Cesare Burali-Forti identificou em 1897, a partir das teorias de Cantor, um paradoxo relativo à teoria dos números ordinais, o chamado *paradoxo de Burali-Forti*. Em 1899, o denominado *paradoxo de Cantor*, foi um paradoxo relativo a teoria dos números cardinais. Segundo Coury (2016), no fim do século XIX, com uma insustentabilidade dos fundamentos matemáticos e dos paradoxos de Burali-Forti foi iniciado um período mais conhecido como a crise dos fundamentos, momento em que três escolas filosóficas da época – o logicismo, o intuicismo e o formalismo – lutaram para que os fundamentos da matemática fossem reestabelecidos, o que não foi alcançado na época.

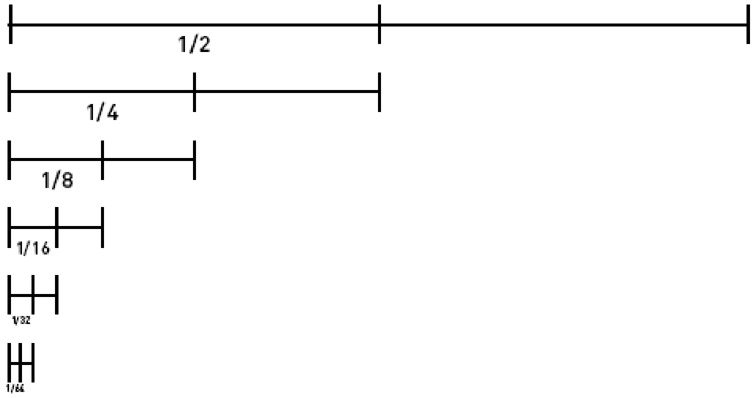
Na sequência do texto serão apresentados os paradoxos de Zenão, de Cantor, de Russell e Burali-Forti.

2.1 Os paradoxos de Zenão

Conhecido como um dos maiores lógicos que já existiram, Zenão de Eléia, considerado discípulo de Parmênides (metade do século V a.C.), tinha como seu principal objetivo ao propor os paradoxos, defender suas ideias e de seu Mestre, ou seja, "[...] crer que há uma identidade entre o ser e o pensamento, o que nos leva a pensar no ser como algo imóvel, e o movimento como negação do ser" (Legrand, 1991 *apud* Monteiro, 2016, p. 226).

Nesse sentido, Zenão formulou quatro argumentos (suposições) sobre o movimento. O primeiro paradoxo chamado de *Paradoxo da Dicotomia,* tem sob argumento que *Se o Espaço é infinitamente divisível, então o Tempo não seria*. O paradoxo tem como eixo gerador a discussão do espaço (infinitamente divisível) *versus* tempo (não infinitamente divisível). Esse paradoxo pode ser representado tomando, por exemplo, o caminho que uma pessoa deverá percorrer entre os pontos que podem ser chamados de P e Q. "[...] Entretanto, antes de atingir o ponto Q, ela deverá ultrapassar o ponto médio entre P e Q, que seria o ponto médio M. Mas, antes de atingir o ponto M, ela deveria passar pelo ponto N médio entre P e M, e assim sucessiva e infinitamente" (Tassara, Moraes e Abbud, 2018, p. 6). Na Figura 1 é apresentada uma ilustração do caminho a ser percorrido por uma pessoa e suas divisões infinitas.

Figura 1: Paradoxo da Dicotomia



Fonte: Problemas Filosóficos[6]

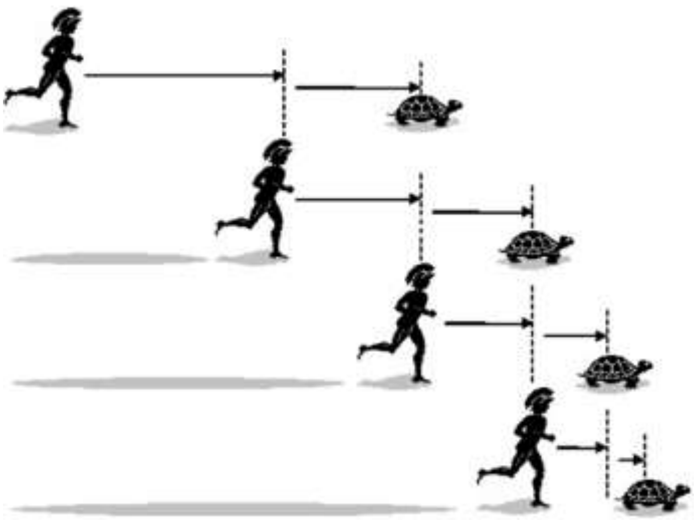
Dessa forma, a pessoa não poderá atingir o ponto Q num tempo finito, visto que o espaço entre P e Q é composto por um número infinito de pontos, ou seja, entre o tempo finito e a infinitude da divisibilidade do espaço há uma incompatibilidade, o que gera um absurdo. De acordo com Tassara, Moraes & Abbud (2018, p. 6) o argumento que Zenão acreditava é que da maneira como concebemos o "[...] movimento linear é uma ilusão, em função da inferência de que o mundo era estático, tal como acreditava Parmênides".

O segundo paradoxo é conhecido como *Paradoxo da Corrida entre Aquiles e a Tartaruga.* Nele, Zenão utiliza o argumento *Se o Tempo é infinitamente divisível então o Espaço não seria* e, propõe que, em uma corrida entre Aquiles e uma tartaruga, Aquiles nunca conseguirá ultrapassar a tartaruga, mesmo sendo mais rápido. Isso ocorre devido à divisão infinita da distância entre eles. Ilustra-se esse paradoxo na Figura 2.

[6] Disponível em: http://problemasfilosoficos.blogspot.com/2013/04/paradoxo-da-dicotomia-zenao.html

ISSN 2764-3158

Figura 2: Paradoxo da Corrida entre Aquiles e a Tartaruga



Fonte: Ela está em tudo[7]

Assim, segundo Monteiro (2016, p. 233), nesse paradoxo o filósofo grego "[...] está dividindo o tempo em partes cada vez menores, gerando um conjunto infinito de frações e, se de fato o tempo pode ser dividido infinitamente, Aquiles sempre está um tempo infinitamente pequeno atrás da tartaruga".

O terceiro é o conhecido *Paradoxo da Flecha Disparada,* escrito sob o argumento *Espaço e Tempo seriam ambos infinitamente divisíveis*, e sugere que o movimento é uma ilusão, já que em qualquer momento específico no tempo, a flecha está imóvel, sendo impossível distinguir seu movimento. Monteiro (2016, p. 234) apresenta esse paradoxo assim:

> Um arqueiro jamais atingiria o alvo com a sua flecha, pois toda flecha, no ar, se encontra em repouso, uma vez que uma coisa está sempre em repouso quando ocupa um lugar idêntico. Ou seja, a flecha ocupará a cada instante um lugar idêntico a si mesma, estando – a cada instante – em repouso.

Na Figura 3, demonstra-se esse paradoxo:

Figura 3: O paradoxo da Flecha disparada

Fonte: Sobre o movimento e o Paradoxo de Zenão[8]

[7] Disponível em: https://elaestaemtudo.ime.usp.br/?portfolio=new-mobile-app-2
[8] Disponível em: http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/mce13/textos/zenao.htm

Ao observar a Figura 3, supõe-se que um ponto A está onde se encontra o Arqueiro e em um ponto B está a flecha fixa em cada instante. Desse modo, Zenão considera que ao ser disparada, uma flecha "[...] fica imóvel a cada instante, pois, em cada instante ela ocupa um espaço igual a suas dimensões, do contrário ela ocuparia várias posições num só instante, o que é impossível.

Por fim, o *Paradoxo dos corpos no estádio* é o quarto paradoxo apresentado sob o argumento *É impossível transpor um número infinito de intervalos em um tempo finito.* Nesse sentido, considera-se que o tempo é subdivisível até o elemento fundamental, que seria o menor intervalo possível, denominado de instante (Tassara, Moraes & Abbud, 2018). Nesse paradoxo, Zenão questiona se uma série infinita de divisões de espaço pode ser percorrida em um tempo finito. Aquiles nunca alcançará o estádio, pois cada segmento infinitesimal que ele percorre é dividido novamente em partes.

Portanto, os paradoxos de Zenão desafiam a nossa compreensão intuitiva do movimento, espaço e tempo. Eles são usados para ilustrar questões filosóficas sobre a natureza da realidade e a possibilidade da divisibilidade infinita.

2.2 O paradoxo de Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor desenvolveu várias pesquisas que revolucionaram a matemática, de maneira especial, a Teoria dos Conjuntos a partir dos conceitos de infinitos (Carvalho, 2023). Antes de Cantor, a noção do infinito era apenas um tópico filosófico. Foi o matemático que demonstrou que há infinitos de diversos "tamanhos", como, por exemplo, ao mostrar que o infinito dos números naturais é "menor" que o infinito dos inteiros que, por sua vez, tem o mesmo "tamanho" dos números racionais (Ferreira, 2013).

Em seu trabalho publicado originalmente em 1895, Cantor formulou a seguinte noção de conjunto: "*Por uma "variedade" ou "conjunto" eu entendo geralmente toda multiplicidade que pode ser pensada como uma, isto é, qualquer totalidade de elementos definidos que por meio de uma lei podem ser unidos num todo"* (Cantor *apud* Vilela (2001) *apud* Coury, p. 140). Por se tratar de uma definição muito ampla e vaga ela se tornou a origem de muitos paradoxos. O *paradoxo de Cantor*, identificado em 1899, parte da noção de número cardinal de um conjunto, que é enunciado assim:

> O número cardinal $\overline{\overline{y}}$ de um conjunto y é definido como o conjunto de todos os conjuntos x que são equipotentes a y. Ou seja, $\overline{\overline{y}}$ é o conjunto de todos os conjuntos que possuem uma correspondência biunívoca com y. Por definição, se $\overline{\overline{y}} \leq \overline{\overline{z}}$, então y é equipotente a um subconjunto de z. Diz que $\overline{\overline{y}} < \overline{\overline{z}}$, se $\overline{\overline{y}} \leq \overline{\overline{z}}$ e $\overline{\overline{y}} \neq \overline{\overline{z}}$ (Coury, 2016, p. 141).

Segundo Coury (2016, p. 141) Cantor partiu dessas noções para demonstrar o seguinte teorema: "*Se $P(y)$ é o conjunto de todos os subconjuntos de y, então $\overline{\overline{y}} < \overline{\overline{P(y)}}$".* Portanto, quando se considera o conjunto universal U surge o *paradoxo de Cantor*. Assim:

> Seja U o conjunto universal, então $P(U)$ é um subconjunto de U e $\overline{\overline{P(U)}} \leq \overline{\overline{U}}$, já que qualquer conjunto considerado deve ser membro do conjunto universal. Em contrapartida, pelo teorema de Cantor, $\overline{\overline{U}} < \overline{\overline{P(U)}}$ e, portanto, $\overline{\overline{U}} \leq \overline{\overline{P(U)}}$. Utilizando

ISSN 2764-3158

o teorema Bernstein[9], $\overline{\overline{U}} = \overline{\overline{P(U)}}$, contradizendo o teorema de Cantor (Coury, 2016, p. 141).

E a contradição se apresenta nesse ponto, pois dito de outro modo o paradoxo é o seguinte:

> Seja o conjunto $P(U)$ de todos os subconjuntos do conjunto universal U. A quantidade de elementos do conjunto U deve ser maior do que qualquer outro conjunto e, por isso, maior que o número de elementos de $P(U)$. Entretanto, pelo teorema de Cantor, $P(U)$ possui mais elementos do que U (Coury, 2016, p. 141-142).

O *paradoxo de Cantor* instiga o senso comum ao considerar que as partes de um conjunto têm mais elementos do que um conjunto, ou seja, o número de elementos do próprio conjunto é menor do que o número do conjunto das partes (Carvalho, 2023).

2.3 O paradoxo de Russell

Bertrand Arthur William Russell enviou uma carta para Frege, em 1902, apontando um paradoxo em sua teoria. Nesse momento Frege se preparava para publicar uma obra, cujo projeto fundamentava toda a aritmética na teoria dos conjuntos.

> O paradoxo que Russell apontou na teoria de Frege é o seguinte: na teoria deste último, conceito admite extensão. Essa extensão do conceito é um objeto. A extensão do conceito é um objeto do qual posso perguntar se ele cai sob o conceito. Pode-se também perguntar se ele cai sob o conceito que lhe deu origem. Foi isso que originou o paradoxo de Russell, visto que, se admitirmos o conceito $x \notin x$, a extensão deste conceito é a classe $y = \{x; (x \notin x)\}$, i.e., a classe de tudo aquilo que não é membro de si próprio. Desde que y é um objeto, podemos perguntar se ele cai ou não sob o conceito $x \notin x$, i.e., $y \in y$ ou $y \notin y$. Mas, se $y \in y$, chegamos à conclusão de que $y \notin y$; e se $y \notin y$, chegamos a $y \in y$. Todavia, ambos os casos são contraditórios. Tal paradoxo põe em risco todo o trabalho de Frege, que, então, passa a buscar uma solução para o problema, porém ele não obteve sucesso (Meneghetti & Trevisani, 2013, p. 152).

Russell buscou evitar a inconsistência na teoria de Frege e deu continuidade ao projeto logicista, apresentando como solução a geração de uma hierarquia de objetos, o que mais tarde ficou conhecido como a teoria dos tipos de Russell (Meneghetti & Trevisani, 2013). De um modo geral, pode-se dizer que o paradoxo surge ao se admitir sem diferenciação dois tipos de conjuntos: os que pertencem a si mesmos e os que não pertencem a si mesmo (Coury, 2016).

Nesse sentido, Ávila (2000, p. 9) questiona o seguinte: “Pode um conjunto ser elemento de si mesmo?”. O autor considera como exemplo o conjunto de todas as ideias abstratas. Então não seria esse conjunto uma ideia abstrata? Pois desse modo ele seria um elemento de si mesmo. Ou ainda outro exemplo apontado pelo autor: “o conjunto de todos os conjuntos que possuem mais de dois elementos é um elemento de si mesmo, pois certamente possui mais de dois elementos” (Ávila, 2000, p. 9).

Por conseguinte, Coury (2016, p. 144) ressalta que,

[9] O teorema determina que se $y \leq z$ e $z \leq y$, então $y = z$.

ISSN 2764-3158

> Russell considerou o conjunto que contém todos os conjuntos que não são membros de si mesmos. Este conjunto pertence a si mesmo? Se pertence, então deve possuir a propriedade que o caracteriza, ou seja, não deve pertencer. Por outro lado, se não pertence, então ele possui a qualidade de não ser membro de si próprio e, portanto, deve pertencer ao conjunto. Daí, conclui-se que este conjunto pertence a si mesmo se, e somente se, este não pertencer a si mesmo.

Utilizando a linguagem matemática o *paradoxo de Russell* pode ser escrito assim:

> Seja R o conjunto dos conjuntos x que não pertencem a si mesmo, $R = \{x \mid x \notin x\}$. Então, a conclusão do paradoxo apresentado por Russell, pode ser escrita como: $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$, o que inflige um dos três princípios da não contradição, gerando assim o paradoxo (Coury, 2016, p. 144).

O *paradoxo de Russell* também é apresentado em versões não técnicas como o famoso *paradoxo do barbeiro*. Esse paradoxo diz o seguinte: Em uma pequena cidade, há uma lei muito rígida em que todos os homens adultos devem fazer a barba diariamente. Nessa mesma cidade, há uma única barbearia cujo barbeiro é do sexo masculino. Cada homem dessa cidade pode se barbear sozinho ou ir até a barbearia. Desse modo, a lei diz que "o barbeiro deverá barbear aqueles homens que optarem por não se barbearem sozinhos". É nesse ponto que surge o paradoxo, visto que o barbeiro não pode se barbear. Porém, se o próprio barbeiro se barbear, isso significaria que ele seria barbeado pelo homem que faz a barba de quem não faz a sua própria barba. Ele não pode ir ao barbeiro, pois significaria que ele se barbearia sozinho, o que não é permitido ao barbeiro (Lages, 2014; Carvalho, 2023). Ao pensarmos em conjuntos, o barbeiro pertence ao conjunto se, e somente se, o barbeiro não pertence ao conjunto. Portanto, estamos diante de um paradoxo (Coury, 2016).

2.4 O Paradoxo de Burali-Forti

Cesare Burali-Forti matemático italiano, era assistente do também matemático Giuseppe Peano, quando notou, em 1887, que se um conjunto dos ordinais é um conjunto bem ordenado, ele próprio devia ter um ordinal (Ferreira, 2013). Seu paradoxo é semelhante ao *paradoxo de Cantor*, porém para números ordinais.

Sendo assim, o matemático, ao publicar o seu paradoxo, partiu da seguinte afirmação: "existe sempre um ordinal maior que um ordinal dado. Entretanto, o número ordinal determinado pelo conjunto de todos os ordinais (On) é o maior ordinal" (Coury, 2016, p. 142). De acordo com Ferreira (2013), a contradição é evidente, pois "[...] um objeto não pode ser simultaneamente elemento de um conjunto e maior que todos os elementos desse conjunto, em particular tal elemento teria que ser maior que ele próprio".

Coury (2016) salienta que o *paradoxo de Burali-Forti* foi praticamente ignorado pela comunidade matemática da época, pelo fato de o matemático italiano não tê-lo enunciado como um paradoxo.

3 Os paradoxos das filosofias da diferença

A Filosofia da Diferença foi iniciada por Nietzche seguido de filósofos como Deleuze, Foucault, Derrida entre outros. Basicamente a Filosofia da Diferença pensa o mundo como múltiplo e recusa o Uno. Esses filósofos tiveram suas pesquisas filosóficas mais desenvolvidas a partir da metade do século XX, sendo atualmente chamados de pósestruturalistas. Neste artigo, nos interessa estudar os paradoxos de acordo com a filosofia deleuzeana, que será descrito nas linhas que se seguem.

Gilles Deleuze (1925-1995), professor e filósofo francês elaborou conceitos fundamentais para a filosofia contemporânea que, de acordo com o autor, é uma perspectiva filosófica que tem a intenção de subverter o platonismo (Deleuze, 2018). Para Platão, as imagens ícones existentes no mundo físico são apenas cópias semelhantes a um modelo ideal. Desse modo, chamou de simulacro, aquilo que no mundo físico não se assemelha nem ao modelo. Então, a imagem sem semelhança com o modelo, é a diferença, o devir, é, portanto, o simulacro, "[...] é o ato pelo qual a própria ideia de um modelo ou de uma posição privilegiada é contestada, subvertida" (Deleuze, 2018, p. 99). Deleuze estudou com mais atenção o conceito de simulacro, pois Platão o dispensava de ser analisado[10]. "Assim, a filosofia da diferença em Deleuze, está concentrada naquilo que a cognição não consegue reconhecer de imediato, pois não tem semelhança com nenhum modelo prévio" (Flugseder, 2021, p.47).

Em sua obra *Lógica do sentido*, o filósofo francês apresenta séries de paradoxos que, segundo o autor, formam a teoria do sentido. Segundo Deleuze (2015, p. XV) a teoria do sentido não pode ser separada de paradoxos, pois "[...] o sentido é uma entidade não existente, ele tem mesmo com o não-senso relações muito particulares", e os paradoxos afirmam os dois sentidos simultaneamente desconstruindo, assim, a ideia do sentido único.

> Os paradoxos de sentido são essencialmente a *subdivisão ao infinito* (sempre passado-futuro e jamais presente) e a *distribuição nômade* repartir-se em um espaço aberto ao invés de repartir um espaço fechado). Mas, de qualquer maneira, têm por característica o fato de ir em dois sentidos ao mesmo tempo e tornar impossível uma identificação (...). É que o paradoxo se opõe à *doxa*, aos dois aspectos da *doxa*, bom senso e senso comum. Ora, o bom senso se diz de uma direção: ele é senso único, exprime a existência de uma ordem de acordo com a qual é preciso escolher uma direção e se fixar a ela (Deleuze, 2015, p. 78).

Sendo assim, o paradoxo de cunho deleuzeano é associado a "[...] aquilo que não tem solução, algo confuso, algo contrário ao nosso bom-senso, contrário aos nossos conhecimentos anteriores" (Costa, 2019, p. 2). Deleuze (2015, p. 3) argumenta que um paradoxo é "[...] o que destrói o bom senso como sentido único, mas, em seguida, o que destrói o senso comum como designação de identidades fixas". Para o filósofo, o bom senso tem a função na determinação da significação, visto que ele inicialmente tem um sentido único em geral e, na sequência, possibilita a escolha de uma direção em detrimento da outra. Portanto, "[...] a potência do paradoxo não consiste absolutamente em seguir a outra direção, mas em mostrar que o sentido toma sempre os dois sentidos ao mesmo tempo, as duas direções ao mesmo tempo" (Deleuze, 2015, p. 79).

Monzani (2011) pondera que o paradoxo determina uma ruptura naquilo que é construído pelo bom senso. Desse modo, só é possível designar um sentido único após definir uma determinada direção eleita pelo bom senso como o presente, para assim, ser possível

[10] O simulacro é um conceito central em sua filosofia, pois o apresenta em partes importantes de sua obra *Diferença e Repetição*. "[...] Na primeira parte Deleuze começa criticando Platão por definir o simulacro como declínio da coisa em si. Para Platão o simulacro é uma cópia, uma representação, uma identificação diminuída de uma identidade plena. Para Deleuze não há essa identidade plena como condição para as cópias. Isso leva a uma bem-conhecida divisão de seu pós-estruturalismo: inverter o platonismo. Isso não significa removê-lo, mas negar a primazia do original sobre a cópia, do modelo sobre a imagem" (Williams 2012, p. 109-110). Nas palavras de Deleuze (2018, p. 96), "[...] subverter o platonismo significa o seguinte: recusar o primado de um original sobre a cópia, de um modelo sobre a imagem. Glorificar o reino dos simulacros e dos reflexos".

ISSN 2764-3158

fixar e estabelecer o significado das coisas, uma vez que com base no presente, pode se observar o passado e o seu futuro.

Em seu livro, *Lógica do Sentido,* o filósofo intitula a obra *Alice no país das maravilhas*, de Lewis Carroll como um cômputo maravilhoso de paradoxos. Deleuze (2015, p. XV) pondera que a narrativa de Carrol em *Alice* produz “a primeira grande encenação dos paradoxos do sentido, ora recolhendo-os, ora renovando-os, ora inventando-os, ora preparando-os” e retrata “[...] um jogo do sentido e do não-senso, um caos-cosmo”.

Na Figura 4, apresenta-se um trecho do livro *Alice no país das maravilhas* em que Deleuze (2015) cita alguns dos exemplos de paradoxos.

Figura 4: Trecho do livro *Alice no país das maravilhas* de Lewis Carroll

“[...]
– Que tipo de gente mora aqui por perto?
– Naquela direção – disse o Gato, acenando com a pata direita – mora um Chapeleiro. E naquela – mostrou com a outra pata – mora uma Lebre de Março. Você pode visitar qualquer um dos dois, à sua escolha. Tanto faz. Todos dois são malucos.
– Mas eu não quero me meter com malucos – observou Alice.
– Não dá para evitar – disse o Gato. – Aqui somos todos malucos. Eu sou maluco, você é maluca...
– Como é que você sabe que eu sou maluca?
– Só pode ser – disse o Gato. – Senão, não tinha vindo para cá.
Alice achou que isso não provava nada. Mas prosseguiu:
– E como é que você sabe que é maluco?
– Bom, para começar – explicou o Gato – um cachorro não é maluco. Concorda?
– Acho que sim.
– Pois então... – continuou o Gato. – A gente vê que um cachorro rosna quando está zangado e abana o rabo quando está satisfeito. Mas eu, não. Eu rosno quando estou satisfeito, e abano o rabo quando estou com raiva. Portanto, sou maluco.
– Eu diria que você ronrona, não rosna – disse Alice.
– Pode dizer o que quiser – disse o Gato. – Você vai jogar *croquet* hoje com a rainha?
– Gostaria muito, mas ainda não fui convidada.
– Você me vê lá – disse o Gato e desapareceu.
Alice não se surpreendeu muito, estava se acostumando com as coisas esquisitas que aconteciam [...]” (CARROLL, 2018, p. 66-68).

Fonte: Flugseder (2021, p. 48).

Conforme o pensador francês, há um paradoxo caracterizado no diálogo entre Alice e o Gato, pois existem representações de dois sentidos ao mesmo tempo, ou seja, quando o Gato explica a direção da casa do Chapeleiro e da casa da Lebre de Março, mostra que “[...] cada um habita em uma direção, mas as duas direções são inseparáveis, cada uma se subdivide na outra, tanto que as encontramos ambas em cada uma” (Deleuze, 2015, p. 82). Além disso, quando o Gato explica porque eles são malucos, Deleuze (2018, p. 82), pondera que “[...] é preciso ser dois para ser louco, somos sempre loucos em dupla”.

Portanto, “objetivamente, o paradoxo faz valer o elemento que não se deixa totalizar num conjunto comum, mas também a diferença que não se deixa igualizar ou anular na direção de um bom senso” (Deleuze, 2006, p. 321). De acordo com o pensador francês o pensamento é tido como uma criação, uma experimentação, pensar é sempre o novo, é o que

ISSN 2764-3158

se está fazendo, que ultrapassa o bom senso, o senso comum, extrapola a recognição. Exatamente a função que um paradoxo nos propõe: fazer o pensamento pensar para se colocar a inventar (im)possíveis soluções.

4 Possíveis impactos dos paradoxos na história da Matemática

Nas seções anteriores, foram descritos os *paradoxos de Zenão, paradoxo de Cantor*, *paradoxo de Russel, paradoxo de Burali-Forti*, além dos paradoxos das filosofias da diferença. Como apresentado, pode-se afirmar que todos os paradoxos pesquisados provocaram impactos, pois a partir deles, as áreas da Matemática, da lógica e até mesmo da filosofia se desenvolveram muito, levando muitos estudiosos a repensar e aprofundar seu entendimento sobre conceitos fundamentais para essas áreas.

Outra constatação é que, ao longo da História da Matemática, ao se deparar com as contradições advindas dos paradoxos, os matemáticos foram levados ao aperfeiçoamento de suas conjecturas e definições, ou seja, "os erros e as contradições fazem parte da construção do conhecimento matemático e, portanto, esse aspecto deve ser abordado em qualquer discussão sobre a natureza da Matemática" (Balieiro Filho & Oliveira, 2022, p. 22).

Em relação aos paradoxos matemáticos apresentados nesse artigo, ou seja, *paradoxo de Russell*, o *paradoxo de Cantor* e o *paradoxo de Burali-Forti* têm em sua origem as noções do que chamamos de teoria de conjuntos hoje. "Entretanto, o *paradoxo de Russell* repousava nos passos mais elementares da teoria de conjuntos e abalou a teoria de fundamentação da matemática e da lógica" (Coury, 2016, p. 145). Destaca-se, ademais, que antes de Cantor a noção do infinito era apenas um tópico filosófico, foi a partir de seus estudos que foram demonstrados que há infinitos de números de diversos tamanhos. Assim, a partir de suas teorias chegou-se ao conceito de número transfinito, que inclui os números cardinais e ordinais, desenvolvendo a teoria dos conjuntos que estudamos até hoje. Da mesma forma como Cantor, Burali-Forti contribuiu ao que hoje conhecemos como teoria dos conjuntos. Por sua vez, Russell contribuiu com a introdução à teoria das classes e dos tipos, além de ser um dos fundadores do uso da lógica para resolver problemas filosóficos. Portanto, esses paradoxos inspiraram debates, reflexões e trabalhos adicionais na área, contribuindo para o avanço e aprofundamento da matemática e da lógica. Eles também destacaram a importância da precisão e consistência nos fundamentos matemáticos, impulsionando os matemáticos a buscar soluções mais rigorosas e coerentes em suas teorias.

A partir dos paradoxos de Zenão, matemáticos e filósofos foram influenciados e desafiados a pensar novos conceitos e teorias a fim de contribuírem com o desenvolvimento de diferentes áreas das ciências, principalmente, no que tange as tradicionais concepções relacionadas ao movimento, tempo e espaço. Eles nos instigam a questionarmos e repensarmos sobre nossas concepções e noções pré-concebidas da realidade que nos cerca. Além disso, até hoje os paradoxos de Zenão são usados para ilustrar questões filosóficas da realidade e a possibilidade da divisibilidade infinita.

No que tange os paradoxos da filosofia da diferença de cunho deleuzeano, pode-se afirmar que eles contribuem para forçar o pensamento a pensar, colocar-se a criar, a inventar soluções (im)possíveis, visto que a potência dos paradoxos para a filosofia da diferença está em sempre tomar os dois sentidos ao mesmo tempo, o que destrói a noção de sentido único, o que acaba por estimular o raciocínio matemático de quem se coloca a tentar solucioná-lo.

Portanto, os paradoxos, sejam eles associados à matemática ou à filosofia da diferença, desempenharam um papel crucial na evolução do pensamento, estimulando a criatividade e

ISSN 2764-3158

incentivando o desenvolvimento de novas ideias e abordagens para resolver desafios teóricos considerados complexos.

5 Considerações Finais

Os paradoxos inspiraram debates e reflexões que levaram ao desenvolvimento de novas teorias e conceitos matemáticos, como por exemplo, a teoria dos conjuntos e a teoria dos infinitos. Além disso, eles também influenciaram o pensamento de filósofos e matemáticos ao longo da história o que acabou por ascender e contribuir para o conhecimento de diversas áreas. Outro aspecto importante que os paradoxos nos permitem reconhecer, é que a Matemática não é uma verdade absoluta, sem contradições. Os paradoxos nos apresentam uma Matemática que não está pronta, acabada, imutável e exata. Assim, poderíamos enunciar que, tanto os paradoxos matemáticos quanto os paradoxos da filosofia deleuzianos são indeterminações positivas para o pensamento: forçam a pensar, são produtivas.

Os paradoxos de cunho deleuziano nos permitem escapar do rastro do pensamento socrático-platônico, que é fundamentado em um dualismo, em uma máquina binária, tais como os exemplos: verdade x falsidade; ideal x real; objeto x conhecimento; docente x discente; concreto x abstrato (Santos, 2015). Assim como Deleuze, queremos desviar desse rastro de pensamento dual, fugir, portanto, do dualismo certo x errado. “[...] É preciso que o pensamento pense a diferença, o absolutamente diferente do pensamento que, todavia, faz pensar, lhe dá um pensamento” (Deleuze, 2018, p. 303).

A partir dos paradoxos, colocamo-nos no processo de criação de pensamentos, pois de acordo com o filósofo francês, pensar é criar algo novo, e nesse sentido, “aprender nada mais é que pensar; pensar nada mais é que criar (...)” (Santos, 2015, p. 77) e os paradoxos nos fazem pensar.

> [...] Subjetivamente, o paradoxo despedaça o exercício comum e põe cada faculdade diante do seu próprio limite, diante de seu incomparável, o pensamento diante do impensável que, todavia, só ele pode pensar, a memória diante do esquecimento, que é também seu imemorial, a sensibilidade diante do insensível, que se confunde com seu intensivo... (Deleuze, 2018, p. 304).

Além do mais, partindo-se da compreensão de simulacro – que são as imagens sem semelhança com o modelo, o caos, a desordem, a falta de um fio condutor, a negação da semelhança entre matéria e forma, ou seja, a diferença – pode-se chegar a uma contribuição da Filosofia da Diferença de Gilles Deleuze para a (Educação) Matemática, uma vez que os paradoxos de cunho deleuziano, são pura diferença, são “fonte” de uma repetição absoluta. Para Deleuze, a repetição não é a reprodução da coisa, é a diferença.

Por fim, parafraseando Monteiro (2016), os paradoxos nos permitem pensar em possibilidades para serem explorados na matemática escolar, uma vez que podemos criar novos movimentos de pensamentos, dentre os quais os pensamentos paradoxais, experimentais, ilusórios. Acredita-se, portanto, que as contradições dos paradoxos nos permitem perceber que a Matemática que hoje conhecemos, passou por muitas transformações e mesmo assim, ainda não é uma ciência pronta e acabada, ela permite percorrer caminhos outros que escapam ao que os currículos escolares nos (im)põem. Apresentar aos estudantes uma visão da Matemática como criação ao invés de um conjunto de fixo de ideias pode transformar a maneira discente de se relacionar com a disciplina. Ao incorporar diferentes estratégias, pode-se demonstrá-la como um campo dinâmico e inovador, preparando nossos estudantes para pensar de forma criativa e crítica em suas vidas.

Referências

Ávila. G. (2000). Cantor e a Teoria dos Conjuntos. *Revista do Professor de Matemática, 43*, 6-14.

Balieiro Filho, I. F. & Oliveira. E. R. (2022). Os paradoxos no ensino de Matemática: uma perspectiva histórica. *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. 19*(1), 1-24.

Carvalho, M. C. L. (2023). *Infinitos, paradoxos e limite: uma jornada na história da matemática.* 68f. TCC (Licenciatura em Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia. Goiânia, GO.

Costa, E. A. (2019). O paradoxo de Zenão e Progressão Geométrica: Sobre o movimento e o paradoxo de Zenão. *Departamento de Matemática Universidade de Coimbra.* Coimbra, PT.

Coury, A. G. F. (2016). O impacto dos paradoxos na história e desenvolvimento das teorias matemáticas. In: D. S. Vilela, A. Monteiro (Org.). *Paradoxos do infinito e os limites da linguagem*. (1. ed., pp. 129-160). São Paulo, SP: Livraria da Física.

Deleuze, G. (2006). *Foucault.* São Paulo, SP: Brasiliense.

Deleuze, G. (2015) *Lógica do Sentido*. São Paulo, SP: Perspectiva.

Deleuze, G. (2018). *Diferença e Repetição*. (1). Rio de Janeiro, RJ: Paz e Terra.

Ferreira, G. (2015). O conjunto de todos os conjuntos não existe. *Gazeta de Matemática, 176,* 24-28.

Flugseder, R L. (2021) *Resolução de Problemas do tipo Paradoxo: possibilidade de intervenção pedagógica inclusiva para o ensino de matemática.* 131 f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio Grande. Santo Antônio da Patrulha, RS.

Lages, L. (2020). 5 paradoxos da lógica e da matemática. *Revista Super Interessante.* Disponível em: https://super.abril.com.br/coluna/superlistas/5-paradoxos-da-logica-e-da-matematica

Meneghetti, R. C. G. & Trevisani, F. M. (2013). Futuros matemáticos e suas concepções sobre o conhecimento matemático e seu ensino e aprendizagem. *Educação Matemática Pesquisa, 15*(1), 147-178.

Monteiro, A. (2016). Movimentos paradoxais: o pensamento de Zenão de Eléia. In: D. S. Vilela, A. Monteiro (Org.). *Paradoxos do infinito e os limites da linguagem*. (1. ed., pp. 219-243). São Paulo, SP: Livraria da Física.

Monzani, L. H. (2011). Deleuze e Lewis Carroll: aproximações entre filosofia e literatura. *Kínesis – Revista de Estudos dos Pós-Graduandos em Filosofia*. *3*(6), 123-136.

Mortari. C. (2001). *Introdução à Lógica*. São Paulo, SP: Imprensa Oficial do Estado.

Santos, S. A. (2015) *Docen ci/ç ação : do dual ao duplo da docência em matemática*. 197 f. Tese (Doutorado). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, RS.

Tassara, E. T. O; Moraes, L. & Abbud, N. (2018). Paradoxos: Zenão de Eléia e os processos de compreensão da inteligibilidade. *Cognitio-Estudos: Revista Eletrônica de Filosofia*, *15*(1), 1-13.

Williams, J. (2012). *Pós-estruturalismo*. Petrópolis, RJ: Vozes.

ISSN 2764-3158