

# Imunização de carteira de crédito: Otimização com restrições de liquidez e número de contratos de DI futuros

Boris Mar Barcelos<sup>†</sup>

Tiago Pascoal Filomena<sup>‡</sup>

Eduardo Horta<sup>\*</sup>

**Resumo** Este artigo aborda a importância da proteção de ativos de carteiras de crédito bancárias contra a volatilidade do mercado, com foco no risco de mercado associado à curva de juros. A estratégia utilizada para mitigar esse risco é o *Asset and Liability Management* (ALM), com destaque para a imunização de carteiras, como forma de proteger contra oscilações nas taxas de juros. Propõe-se um modelo de otimização matemática para resolver o problema de imunização de carteiras de renda fixa, considerando restrições de liquidez e de contratos, além de avaliar a sua eficácia em diferentes cenários a partir de testes com dados reais.

**Palavras-chave:** ALM; *Hedge*; Otimização.

**Código JEL:** G11, G21, G32, C61.

## 1. Introdução

A proteção de ativos de carteira de crédito bancária visa evitar a perda de valor para a volatilidade ocasionada por movimentos do mercado (Almeida e Lund, 2014). O risco de mercado associado à curva de juros é motivo de supervisão constante dos gestores nas mesas de operações de instituições financeiras. Há diversas possibilidades de mitigação desse risco e, no presente trabalho, o foco será nos modelos de gestão de ativos e passivos, conhecido como *Asset and Liability Management*, ALM. Uma estratégia amplamente conhecida e aplicada por bancos é a imunização de carteira, sendo a otimização matemática uma das formas com que é calculada o ponto ideal entre ativos e passivos (Kunzler, 2019).

Para Choudhry e Carter (2007), a principal função da mesa de ALM é a administração os riscos de liquidez e de mercado, não esquecendo também dos riscos e política de crédito do banco. A forma como atua deve buscar

---

Submitted on June 9, 2024. Accepted on July 8, 2024. Published online in September 2024. Editor in charge: Bruno Giovannetti.

<sup>†</sup>Sicredi, Brasil: [borisbarcelosbr@hotmail.com](mailto:borisbarcelosbr@hotmail.com)

<sup>‡</sup>Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil: [tpfilomena@ea.ufrgs.br](mailto:tpfilomena@ea.ufrgs.br)

<sup>\*</sup>Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil: [eduardo.horta@ufrgs.br](mailto:eduardo.horta@ufrgs.br)

ajustar descasamentos entre os passivos e ativos do banco, com instrumentos financeiros e processos adequados para tal tarefa. Muito embora a indústria bancária exista há centenas de anos (Adam, 2008), a implementação de ALM em bancos veio na esteira de crises em que a subida de taxas de juros provocou graves insolvências nos setores de hipoteca nos anos de 1980 nas associações de poupança e empréstimo.

O risco de mercado em carteiras de crédito está associado, principalmente, à curva de juros praticada pelo mercado financeiro na precificação de ativos e passivos. Já o risco de liquidez reflete a capacidade da instituição de cumprir com as suas obrigações financeiras. Diversas instituições financeiras que têm a necessidade de adequar o seu balanço, fazem uso de ALM para gerenciamento de risco, demonstrando a grande abrangência do assunto (Martellini et al., 2005).

Dentro do assunto de gestão de ativos e passivos, diversas técnicas são empregadas para cumprir com o objetivo de proteção ao risco da carteira, sendo a abordagem de Imunização de carteiras uma das mais conhecidas. A ideia básica da imunização é proteger a carteira de oscilações nas taxas de juros. O precursor dessa abordagem foi o artigo escrito por Redington (1952), cunhando o termo "imunização" para descrever um portfólio que, de certa forma, não sofresse com uma alteração nas taxas de juros, sendo reforçado por Fisher e Weil (1971).

Litterman e Scheinkman (1991) elaboram estudo de proteção contra choques não paralelos, além de expor o possível comportamento da curva dividido, em basicamente, três tipos, nível, inclinação e curvatura. Outra forma de proteção contra risco de mercado é o chamado *Cash flow matching* (Farahvash, 2020), consistindo em acertar todos os fluxos de caixas positivos, um negativo em igual tamanho, evitando, assim, qualquer possibilidade de uma variação em juros afetar o valor da carteira.

Outro tópico importante é o problema de liquidez de instrumentos financeiros (Vieira e Filomena, 2020), que pode ser muito prejudicial para a correta imunização da carteira. Caso não haja possibilidade de compra ou venda de algum contrato desejado ou necessário para proteção, o gestor poderá ficar incapacitado de ter a melhor efetividade contra oscilações no mercado. Por exemplo, Tonin et al. (2009) elaboraram estudo que avalia a efetividade de um *hedge* no mercado de milho no Brasil e apresentaram resultados insatisfatórios na proteção contra a oscilação, provavelmente, devido à baixa liquidez dos futuros de milho.

Sobre as ferramentas para resolução desses problemas, uma das ferramentas matemáticas mais utilizadas é a otimização. São chamadas de otimização

matemática as operações feitas para encontrar resultados máximos ou mínimos em uma função. Se o problema não envolve variáveis com potência diferente de um, o problema é dito linear, caso contrário, será categorizado como não-linear. O campo de otimização não-linear é vasto e muitos problemas propostos não têm fácil solução, isso quando possuem solução viável. No campo financeiro, modelos de otimização vêm sendo utilizados há décadas, vide o modelo de Média-Variância na seleção de portfólio (Markowitz, 1952).

No presente artigo se aborda um modelo para resolver o problema de imunização de carteiras de renda fixa. Diversos trabalhos abordam o tema de *hedge* usando o método de análise de componentes principais para obter a carteira passiva (Kunzler, 2019). Tais trabalhos, normalmente, resolvem o problema com três ou menos contratos derivativos de *hedge*. A vantagem que esse modelo proporcionará está na proteção de carteiras maiores e mais complicadas, sempre considerando a restrição da natureza do mercado, a liquidez. Somando-se a isso, também há o maior controle por parte do operador, podendo-se determinar quais e quantos contratos usar no seu *hedge*.

O diferencial da abordagem ora proposta está num modelo de otimização que tenta ser eclético nas restrições para defender a carteira de problemas enfrentados na realidade de ALM. Com limites de liquidez e de contratos, resolve-se um problema usando a teoria de imunização com igualdade de *duration* e convexidade. Dessa forma, pode-se determinar a quantidade de contratos que se deseja usar. Outro diferencial está na formação da carteira de renda fixa, com número longo de maturidades, carteiras com até cinco anos.

## 2. Referencial teórico

### 2.1 *Asset and Liability Management*

O gerenciamento de ativos e passivos deve respeitar uma estratégia definida para a proteção da instituição financeira. O fato se dá, primordialmente, pela atividade bancária ter a sua captação de valores normalmente em curto prazo e pós-fixada e empréstimos em prazo mais longo com a sua maioria na forma pré-fixada. Beutler et al. (2020) fazem um estudo sobre o quanto as mudanças nas taxas de juros podem afetar a capacidade de emprestar dos bancos, sugerindo um aumento de sensibilidade caso os juros aumentem.

O artigo de Drechsler et al. (2021) faz uma observação interessante. Segundo os autores, tomar emprestado em curto prazo e emprestar em longo prazo não expõe os bancos ao risco de taxa de juros, o que é uma visão diferente do convencional. Tratando de risco tomado por instituições ao emprestar, Aramonte et al. (2022) apontam que as instituições não bancárias se expõem a

mais riscos do que bancos na hora de emprestar o seu dinheiro.

Além disso, o ALM é o responsável pela tomada de decisão no cotidiano de bancos, dados os movimentos no mercado financeiro. Um banco que tem a sua carteira de ativos sendo uma carteira creditícia, deve zelar, primordialmente, pela proteção do *spread* gerado pela diferença entre o valor tomado e emprestado, entrando em cena o ALM. Nas instituições financeiras de depósitos, os bancos, o principal motivador para a criação de estratégias de ALM é a proteção do *spread* bancário, ou seja, é feito o *hedge* da carteira para prevenção contra perda de valor em risco de mercado, sem esquecer-se do risco de liquidez (Kunzler, 2019).

Ao analisar bancos em um mercado emergente, Owusu e Alhassan (2021), fazem uma ligação entre o uso de ALM e lucratividade, demonstrando a sua relação, além de que o uso de ALM tem forte impacto positivo na performance geral de um banco. Vuilleme (2019) aponta que muitos bancos não fazem proteção contra risco de taxa de juros e que parte dos bancos usa derivativos para se expor ainda mais à subida de juros.

## 2.2 Imunização de carteiras

O apreçamento de ativos e passivos de instituições financeiras é feito pela estrutura a termo, sendo de grande importância a proteção contra variações não previstas nas taxas de juros. A teoria de imunização de carteiras tem como objetivo a construção de uma carteira de *hedge*, de forma a proteger a carteira principal contra tais variações (Almeida e Lund, 2014).

Tal teoria começa a ser construída com Redington (1952) e ganha tração com Fisher e Weil (1971), demonstrando a imunização por *duration*. Conforme o trabalho, a imunização por *duration* protege contra choques de nível na curva de juros. Bierwag (1977) e Bierwag et al. (1983) descrevem o desenvolvimento da métrica *duration* e o seu uso em estratégias de imunização. A estratégia de *duration* tem a qualidade de ser barata para implementação, mas o defeito de não proteger adequadamente contra os variados movimentos da estrutura a termo de curva de juros (ETTJ). Um estudo feito por Neto (2018) pontua tal facilidade. Kolb e Gay (1982) destacam a imunização com uso de futuros.

Fong e Vasicek (1984) apresentaram uma nova medida, M-Quadrado, que busca expressar a exposição ao risco de uma carteira às variações na ETTJ. Litterman e Scheinkman (1991) fazem um estudo indicando que três fatores correspondem pela maioria da variação dos retornos em ativos de renda fixa, sendo eles nível, inclinação e curvatura. Eles argumentam que apenas uma proteção com *duration* não é totalmente efetiva para proteção. É proposto, então, um modo com análise de componentes principais (ACP) para identificar

e compor a carteira de *hedge*.

Díaz et al. (2008) discorrem sobre a imunização com *bonds*, testando quatro métodos de proteção, concluindo que a diversificação de posições ajuda na diluição do risco. Com particionamento da carteira para medição de *Key Rate Durations* (KRD), Ho (1992) tenta assimilar os choques diferentes ao choque de nível e proteger a carteira de renda fixa e Golub e Tilman (1997) aprofundam o estudo sobre KRD. A diluição do *hedge* em mais contratos vai ao encontro à teoria das carteiras para a diminuição de riscos.

Acrescenta-se, ainda, a estratégia chamada de *Cash flow matching*, em que todos os fluxos de caixa ativos ou passivos são igualados por outro fluxo de igual proporção, mas sentidos opostos (Farahvash, 2020). Esse método de imunização enfrenta grande dificuldade de aplicação na prática, dado o seu alto custo e falta de instrumentos financeiros adequados.

Em um estudo buscando identificar quem está sujeito ao risco de taxa de juros em bancos europeus, Hoffmann et al. (2018) dispõem, entre outras conclusões, que *hedge* com *swaps* minimiza cerca de 25% de exposição em balanço.

Gomez et al. (2021), Adam et al. (2020) e Beutler et al. (2020) abordam o tema de risco de juros em bancos. Deguest et al. (2018) demonstram e aplicam um modelo de otimização para seleção de portfólio baseado em *duration*. Lapshin (2019) usa abordagem não paramétrica para imunização de portfólio de títulos. Zhu et al. (2018) fazem uso de convexidade de títulos e carteiras para imunização de portfólio. Simões et al. (2021) investigam estratégias de imunização em carteiras de múltiplos passivos. No Brasil, Almeida e Lund (2014) aplicam fundamentos de Litterman e Scheinkman (1991) para construir um *hedge* de carteira de renda fixa. Meirelles e Fernandes (2018) comparam a estratégia de análise de componentes principais contra *hedge* por *duration*. Varga e Valli (2001) também aplicam ideias de ACP para imunizar carteira de renda fixa após avaliar movimentos da estrutura a termo brasileira. Kunzler (2019) também faz uma comparação, mas em uma carteira de renda fixa semelhante à uma carteira bancária. Grande parte dos trabalhos citados, quando comparam os métodos de *duration* contra métodos de ACP, fazem uso de carteiras de ativos de renda fixa com poucos fluxos.

### 2.3 Métricas de instrumentos de renda fixa

Para avaliar e comparar diferentes tipos de instrumentos, sejam títulos ou derivativos, é lançado mão de diferentes métricas e indicadores que foram sendo criados e aperfeiçoados ao longo dos anos. Em uma renda fixa, a *duration* de um título foi uma das primeiras formas de indicador criado. Será

utilizada também nesse trabalho a convexidade de títulos e ativos de renda fixa. Se completará com a liquidez, que não é uma medida derivada diretamente de um ativo específico, mas de qualquer tipo de instrumento financeiro, que é possível de ser negociado. A liquidez de um ativo se conceitua, basicamente, na sua facilidade de negociação.

A medida de liquidez, de acordo com [Demsetz \(1968\)](#), pode ser determinada por um apanhado de fatores: preço da ação, tamanho da empresa em questão, volatilidade, volume financeiro transacionado e número de negócios. [Amihud e Mendelson \(1986\)](#) se baseiam em preço, no *bid-ask spread* para observar qual a relação entre a liquidez do ativo e seu retorno. [Marsh e Rock \(1986\)](#) propõem uma razão de liquidez utilizando o número de transações. [Gabrielsen et al. \(2011\)](#) abordam o tema com índice baseado em volume financeiro negociado e [Baker e Los \(2014\)](#) complementam analisando inúmeras formas de cálculo de liquidez com simulações.

A forma de mensuração de liquidez baseada em número de negócios realizados é mais adequada ao tema ora estudado, dado que os instrumentos financeiros abordados são de uma mesma classe, mas possuem estrutura temporal diferente, levando à uma precificação diferente e, conseqüentemente, a um volume financeiro negociado diferente.

No Brasil, instrumentos de *hedge*, como o derivativo citado anteriormente e parte central do presente artigo, futuro de DI, não apresenta negociação relevante em todos os vértices da curva de juros, impossibilitando, assim, a aplicação de uma estratégia como *Cash flow matching*, por exemplo. Negociações relevantes do futuro de DI se mostram presentes basicamente em meses de janeiro e juntamente com meses de vencimentos de títulos públicos federais. Dessa forma, a possibilidade de um operador de mercado não conseguir uma boa precificação, seja na compra ou na venda, de um contrato fora do escopo citado, aumenta. [Silva e Holland \(2013\)](#) ressaltam que, no Brasil, há uma singularidade na formação de preço, dada a liquidez maior para contratos futuros do que para títulos públicos.

Como descrito, essa métrica é uma peça-chave na problemática estudada e restrição obrigatória para uma correta resolução do problema de *hedge* bancário. Em uma pesquisa conduzida no mercado futuro de milho, [Da Silva et al. \(2017\)](#) apontam a falta de liquidez em contratos que não tem vencimento próximo. [Vieira e Filomena \(2020\)](#) abordam o tema com restrição de liquidez em um problema de carteira e em [Vieira et al. \(2021\)](#) evoluem o tema. [Pan e Xiao \(2017\)](#) debatem sobre a restrição de liquidez em ALM.

## 2.4 Modelos de otimização em Finanças

A otimização matemática pode ser conceituada como uma ferramenta matemática em que se procura os melhores elementos dados critérios e restrições. Usualmente, os problemas de otimização são dados por uma função principal a ser minimizada, a função objetivo, e um conjunto de restrições. Os valores resultantes desse problema podem ser chamados de pontos de ótimo local ou global. Dado que funções matemáticas têm as mais variadas características, problemas de otimização podem ter diversas formas, sendo as mais comuns: programação convexa, dividida em linear e quadrática, programação inteira e programação estocástica (Cornuéjols et al., 2018).

Os problemas em finanças, normalmente, têm a característica de não serem lineares, além de, muitas vezes, necessitarem de solução discreta. Dessa forma, é comum observar modelagem de problemas categorizados como quadráticos e inteiros.

A programação quadrática se refere ao fato de que a função objetivo tem elementos elevados na segunda potência. Tais problemas, de maior dificuldade de resolução, podem ser solucionados com algoritmos conhecidos, caso atendam a algumas propriedades, sendo a principal a convexidade da função objetivo. Jensen e Bard (2002) afirmam que na programação não linear quadrática, as condições necessárias para atingir ponto de ótimo global são dadas pela função objetivo sendo de ser duas vezes continuamente derivável, ser convexa ou estritamente convexa, além do gradiente ser zero em tal ponto. Continuando, para tal função ser convexa (estritamente convexa), a sua matriz hessiana deve ser positiva semi-definida (positiva definida). Tratando-se de otimização não há como não citar Markowitz (1952) com o modelo de média-variância para seleção de portfólio, talvez sendo o mais conhecido modelo em finanças.

Em uma abordagem usando programação linear, Shiu (1988) descreve uma solução com a abordagem de *duration hedge* proposta por Redington (1952). Ortobelli et al. (2018) desenvolvem um portfólio com otimização em dois estágios para máxima performance e com imunização constante. Freitas (2011) e Weiskopf (2003) apresentam modelos de otimização em imunização de carteiras de renda fixa. de Oliveira et al. (2017) aprofundam no tema de otimização estocástica para problema de ALM em fundos de pensão. No seu artigo, Chi e Chi (2007) apresentam um modelo de otimização para ALM, considerando o casamento de *duration* dos passivos e ativos. Shen et al. (2018) adicionam movimento browniano à média-variância para resolução de um problema de ALM e a contribuição principal desse artigo é estender o modelo para incorporar regimes de mudança não-markovianos. Stern et al. (2020) demonstram exemplos de modelos de otimização estocástica para *hedge*.

### 3. Procedimentos metodológicos

#### 3.1 Modelo de otimização

No ponto principal do artigo, está a teoria levantada por Redington (1952) e Fisher e Weil (1971), em que a imunização de uma carteira se dá ao igualar valores presentes de ativos e passivos, igualando também *duration*, e por fim, convexidade podendo ser igual ou maior na parte dos ativos. Para buscar tal solução, se formula um modelo para suprir essas demandas.

O propósito do modelo é ser viável e utilizável na prática, além de apresentar resultados satisfatórios para problemas de maior dificuldade de resolução e maior escala. Para tal, para maior aderência à realidade, principalmente a local, buscou-se uma forma na qual se reconhecesse todas as possíveis restrições que o mercado brasileiro apresenta.

É comum nas tesourarias de bancos o uso de diversos tipos de instrumentos para *hedge*. Um dos mais diretos para prevenção do risco de mercado em juros é o contrato futuro de DI, que foi escolhido para ser utilizado nesse modelo. Porém, como já citado, problemas de liquidez afetam a maioria dos vértices desse contrato, impossibilitando o livre uso.

Outro ponto importante é a quantidade de contratos em que o *trader* opera. Mesmo que, em teoria, uma maior presença de contratos espalhados pela curva deva proteger melhor a carteira, operar e cuidar de muitos instrumentos não é tarefa fácil. Soma-se a isso, ainda, o eventual custo de transação de inúmeros contratos abertos. Para tal dificuldade, inclui-se a restrição de números de contratos utilizados.

Valores de fluxo de caixa negativos e positivos podem ser vistos na realidade, sendo assim, a possibilidade de compra ou venda de contratos de DI é de utilidade na prática. Agregando ao modelo de otimização essas restrições, se está melhor aderindo à realidade de ALM. A função objetivo do modelo ampara tal situação, porém, no presente artigo, será possibilitada apenas a opção de compra de contratos, ficando para futuros trabalhos a liberdade total de compra e venda.

Na apresentação do modelo abaixo, temos a função objetivo quadrática com restrições lineares, como visto anteriormente, sendo classificada como um Problema de Programação Quadrática.

Função Objetivo:

$$\min \sum_{m=1}^M \left( V_m - \sum_{i \in I} F_{im} \cdot x_{im} \right)^2 \quad (1)$$

Sujeito a:

$$D_a = D_p \quad (2)$$

$$C_a \geq C_p \quad (3)$$

$$Q_{\min} \leq \sum_{i \in I} z_i \leq Q_{\max} \quad (4)$$

$$\sum_{m \in M} x_{im} \leq L_i, \quad \forall i \in I \quad (5)$$

$$\sum_{m \in M} x_{im} \geq z_i, \quad \forall i \in I \quad (6)$$

$$\sum_{m \in M} x_{im} \leq P \cdot z_i, \quad \forall i \in I \quad (7)$$

$$x_{im} \geq 0, \quad \forall i \in I, m \in M \quad (8)$$

$$z_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I \quad (9)$$

em que  $M$  representa o conjunto de maturidades da carteira;  $I$  denota o conjunto de contratos;  $x_{im}$  é a quantidade de compra de cada contrato futuro de DI, variável de decisão;  $z_i$  é a quantidade de contratos futuro de DI a ser utilizado, variável auxiliar. Os parâmetros do problema de otimização, por sua vez, são  $V_m$ , o valor presente carteira de crédito em cada maturidade;  $F_{im}$ , denotando o valor presente do contrato futuro de DI, sendo igual a VP DI caso o contrato esteja disponível para *hedge no bucket* e igual a zero caso contrário;  $D_p$ , a *duration* modificada da carteira de passivos;  $D_a$ , a *duration* modificada da carteira de ativos;  $C_p$ , a convexidade da carteira de passivos;  $C_a$ , a convexidade da carteira de ativos;  $L_i$ , limitante de liquidez máxima a ser utilizada de cada contrato;  $P$ , o valor arbitrário de ordem de grandeza superior para restrição;  $Q_{\min}$ , a quantidade mínima de tipos de contratos diferentes utilizados, e;  $Q_{\max}$ , a quantidade máxima de tipos de contratos diferentes utilizados.

A função objetivo (1) procura minimizar a diferença entre o valor presente da carteira de crédito e a carteira de *hedge*. Nota-se que o problema será resolvido com variáveis contínuas, porém, na realidade, só existem contratos inteiros. Esse relaxamento se dará pois os custos de se arredondar o número de contratos para o inteiro mais próximo são baixos, dado os valores altos das carteiras e pelo alto custo de tempo que seria necessário para resolução de um problema inteiro. As restrições (2) e (3) são necessárias para respeitar a teoria de imunização de carteira, sendo a equivalência de *duration* e convexidade, respectivamente. A restrição de liquidez (5), sendo uma das mais importantes no modelo, permite a alocação em contratos respeitando os limites de liquidez

viáveis na realidade do mercado local. As restrições em (4) dão aos limites de tipos contratos possíveis de alocação, além disso, (6) e (7) auxiliam matematicamente as condições anteriores. Finalmente, (8) e (9) permitem um espaço de soluções para as variáveis  $x_{im}$  em valores não-negativos e  $z_i$  em valor binário.

O particionamento da carteira pode ser utilizado para melhorar a visualização e resultado de um *hedge*, dada a diluição da alocação. Tal ação se dá na entrada de dados na função objetivo, podendo ser determinado quais contratos defenderam quais *bucket*. Somando-se a isso, há também a ideia de usar contratos (vértices) com menor correlação entre si, para, teoricamente, melhorar a eficiência do *hedge*. No presente artigo se optou por não aplicar a partição de carteira.

Para confirmar que um problema quadrático possui solução, uma garantia é dada caso o modelo seja ao menos convexo. Dessa forma, como a função objetivo em (1) é quadrática, faz-se necessária uma prova de que a matriz resultante do modelo algébrico descrito seja ao menos positiva semidefinida, conforme Jensen e Bard (2002). A obtenção da forma matricial da função objetivo se dá pela multiplicação de um vetor pelo seu transposto, ou seja, semelhante à forma de obtenção de uma matriz de covariâncias. Matematicamente, é possível provar que o resultado dessa multiplicação é sempre uma matriz positiva semidefinida, sendo, dessa maneira, a função objetivo do modelo convexa e garantida a obtenção de convergência para uma solução. De fato, para qualquer  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , a matriz  $X^T X$  é positiva semidefinida, isto é, dado qualquer vetor  $z \in \mathbb{R}^n$ , tem-se  $z^T (X^T X) z = (Xz)^T (Xz) = \|Xz\|_2^2$

### 3.2 Efetividade da carteira de *hedge*

Será calculada a efetividade do *hedge*, conforme apresentado em seção anterior, respeitando a normativa do Banco Central do Brasil.

$$\text{Eficiencia}(\%) = \left( \frac{\Delta \text{Valor de mercado hedge}}{\Delta \text{Valor de mercado carteira}} \right) \times 100\% \quad (10)$$

A efetividade será calculada no último dia útil de cada mês e comparada para descrição da utilidade do modelo. Também será calculado o R-quadrado e a correlação entre os valores presentes das carteiras finais de cada período. A busca pela eficiência é a motriz principal do modelo proposto, sendo a maior contribuição para o meio que se pode alcançar com ele.

### 3.3 Fonte de dados

Para a resolução do problema, foi necessária, principalmente, a utilização de dados de contratos futuros de DI, que são disponibilizados pela B3. A partir

de tais dados são geradas as ETTJ pela B3, além do qual serão utilizados valores de PU, número de negócios realizados e ajuste diário de PU. A Estrutura a Termo de Taxas de Juros utilizada é fornecida e já interpolada também pela B3. Todos dados são encontrados de forma livre na *webpage* da B3.

### 3.4 Amostra

Foi selecionado o período entre dezembro de 2014 até dezembro de 2021 para testes e análises, resultando em 85 períodos para análise. Tal período foi escolhido por apresentar ciclos de alta e baixa de juros moderados a fortes.

#### 3.4.1 Carteira de crédito

Na construção da carteira de crédito do problema foram implementados métodos para tentar refletir melhor as condições reais de um banco. Os critérios utilizados na formação das carteiras são, basicamente, valores nominais e maturidades, sendo relacionados de forma a criar vários diferentes desenhos de carteira de crédito.

No primeiro método foi estipulado um valor nominal de dez milhões de Reais, que foi distribuído de forma homogênea ao longo de 60 maturidades, criando carteira do tipo *ladder*. Também foram criadas carteiras de 60 períodos, partindo de valor nominal de cinco milhões de Reais até 15 milhões, e outra oposta, indo de 15 até cinco milhões de Reais, ambas com coeficientes lineares. No segundo método para replicar uma carteira *barbell*, foram selecionadas duas maturidades nos períodos 15 e 45 com valor nominal de 100 milhões em cada vértice. Não foi criada uma carteira *bullet*, dada a simplicidade dessa carteira.

Após a criação, os fluxos de caixa das carteiras são trazidos a valor presente para utilização dentro do modelo de otimização, além disso, são feitos os cálculos de *duration* e convexidade. Como mencionado, a curva utilizada para cálculos é disponibilizada pela B3 e eventuais maturidades que não estiverem dispostas, são calculadas com *cubic spline*. O estudo considerou a criação das carteiras a cada primeiro dia útil de cada mês, não acumulando valores para os próximos meses.

#### 3.4.2 Carteira de *hedge*

A formação da carteira de *hedge* se dará pela otimização matemática, sendo a saída do modelo representada pela quantidade e tipo de contratos futuros de DI a serem negociados em cada um dos testes. Os valores utilizados são os de fechamento do dia anterior.

Os parâmetros de maior importância utilizados para determinar o espaço de soluções possível são dois, liquidez máxima de cada contrato e números, máximo e mínimo, de contratos a serem utilizados. Desses parâmetros, há uma combinação entre si para buscar compor as melhores, ou piores, formas de criar a carteira de passivos.

Usualmente, denomina-se a forma de *hedge* entre estático e dinâmico. Há a forma estática, em que a carteira de passivos é formada e permanece igual até a sua análise e dinâmico, em que há o rebalanceamento dos pesos e contratos, conforme se tem necessidade. No presente artigo é feito um *hedge* estático, em que a carteira é formada apenas uma vez e não rebalanceada até a sua análise.

### 3.4.3 Liquidez, *duration*, convexidade e quantidade de contratos

Na criação da restrição de liquidez aplicada ao modelo, é levada em consideração a quantidade de negócios realizados em cada um dos contratos de DI. Dessa forma, busca-se evitar desvios possíveis de serem causados pelo PU do contrato derivativo, caso se utilizasse valores financeiros.

Analisados os dados, será utilizado um ponto de corte de 0,4% do total negociado do mês anterior, como máximo de liquidez a ser usado na otimização. Tal valor tem como base a ideia de que um único participante não pode operar percentuais muito elevados no mercado e levando em consideração o tamanho da carteira hipotética versus o mercado de crédito brasileiro, inferiu-se que o valor 0,4% seria aceitável. Esse percentual, aplicado a cada contrato, será limitador do cálculo da carteira de passivos. Aqui não será considerada a dinâmica intra-diária dos contratos, sendo assim, será considerado que terá *book* de ofertas para tal demanda.

No ponto inferior, também serão feitos testes descartando contratos que têm liquidez muito baixa, usando como ponto de corte a média dos contratos oferecidos a cada teste. Tal ação aumentou a velocidade de resolução dos problemas de otimização, pois diminuiu o número de variáveis de decisão sem prejuízo para a solução. Há a possibilidade de adicionar restrição semelhante a 5, mas oposta em sinal, necessitou de uma alocação mínima em determinados contratos. Pode-se observar que, eventualmente, é positivo e até necessário a diluição do *hedge* em mais contratos, de forma a ficar menos exposto a variações de curvatura e inclinação da curva, assemelhando-se a um *Cash flow matching*.

A *duration* será calculada na forma modificada, conforme Fisher e Weil (1971), para o uso como restrição do problema. Para tanto, será utilizada também a convexidade como parâmetro de restrição. No modelo de imunização de carteira se busca a igualdade de *duration* entre as carteiras de passivos e

ativos, além de uma convexidade maior ou igual dos ativos.

O número de contratos estipulados utilizados não segue nenhuma norma ou padrão, convencionando-se então no uso de 3, 5 ou 7 contratos para estabelecer a carteira de passivos.

Estudos e modelos já foram criados, buscando-se limitar a quantidade de contratos utilizados em uma carteira (Sant'anna et al., 2014) e (Sant'Anna et al., 2017).

### 3.5 Benchmarking

Os resultados obtidos com o modelo serão comparados com resultados de *hedge* usando o método ACP, como nos trabalhos de Almeida e Lund (2014), Caldeira et al. (2016) e Varga e Valli (2001), que foram baseados no método de Litterman e Scheinkman (1991). A ideia é visualizar os pontos fortes e fracos do modelo.

### 3.6 Solver

Para a resolução do problema, são necessários diversos procedimentos, desde obtenção e manipulação de dados, até cálculos para solução do problema de otimização. Dessa forma, foi utilizada a linguagem *python* em todos os processos e inserido a isso, se emprega um *software* específico para encontrar os resultados na otimização, chamado também de *solver*, usou-se o programa de código aberto *Bonmin*. Tal *solver* utiliza métodos de pontos interiores para encontrar a solução matemática do problema, porém esse assunto não é escopo deste artigo. O *hardware* principal usado foi um AMD Ryzen 9 5950X com 64GB de memória disponível e sistema operacional Windows.

## 4. Resultados

### 4.1 Testes

Para melhor visualização dos resultados do modelo, os testes foram feitos em três diferentes cenários, adicionando restrições ao modelo de otimização. No primeiro momento, foram testadas as carteiras com o modelo sem restrições de liquidez e número de contratos, após, foi adicionada a restrição de liquidez e, então, as restrições de número de contratos. Abaixo será expresso e explicado o equacionamento principal. As funções secundárias e auxiliares foram suprimidas nessa parte, já tendo sido apresentadas na seção anterior.

O equacionamento do cenário inicial, exposto abaixo, terá o intuito de formar uma base de resultados. É formado pela função objetivo (11), minimi-

zando a distância entre os valores presentes da carteira de ativos e passivos. A liberdade de escolha dos contratos, na variável de decisão  $x_{im}$ , é contínua, não correspondendo com a realidade de valores discretos. A escolha de produzir resultados do modelo dessa forma e após isso arredondar para o inteiro mais próximo foi tomada pelo ganho de velocidade na obtenção de resultados do *solver*, dado que a perda econômica para o resultado final é baixo.

Os testes serão restritos por (12) e (13), que são as restrições de *duration* e convexidade das carteiras. A restrição 12 corresponde ao igualamento de *duration* das carteiras de ativos e passivos. Tal restrição "dura" de igualdade acaba por não trazer dificuldades de obtenção de resultados, pois há liberdade nas variáveis de decisão contínuas na função objetivo. A restrição 13 demonstra uma convexidade maior ou igual para a parte dos ativos (Cornuéjols et al., 2018).

Função Objetivo:

$$\min \sum_{m=1}^M \left( V_m - \sum_{i \in I} F_{im} \cdot x_{im} \right)^2 \tag{11}$$

Sujeito a (cenário 1):

$$D_a = D_p \tag{12}$$

$$C_a \geq C_p \tag{13}$$

Para o seguinte cenário de testes, será adicionado ao equacionamento anterior a restrição de liquidez (14), que é ponto central do artigo. Tal restrição é limitante na realidade de mercado brasileira. Basicamente, o objetivo dessa restrição é entender como se desdobrará o resultado da carteira de passivos, se a alocação preencherá o limite ou se haverá a divisão entre outros contratos.

Sujeito a (cenário 2):

$$\sum_{m \in M} x_{im} \leq L_i, \quad \forall i \in I \tag{14}$$

No terceiro e último cenário de testes, as restrições de quantidade de alocação em espécies de contratos diferentes são adicionadas, ditando as quantidades mínima e máxima para solução do modelo, conforme (15). O racional de tais restrições invoca uma necessidade realista de administração e dispêndio de operação. Dado ser matematicamente possível a resolução do problema fora desses limites, porém tal solução pode não ser viável pelo seu custo elevado. Seja em uma situação em que operar muitos contratos não é ideal, ou talvez se tenha um alto *spread* cobrado pelo mercado na compra ou venda por causa da necessidade de operar poucos contratos. De toda forma, há a opção de escolha para o aplicador do modelo com tais restrições.

**Tabela 1**  
**Valor presente das carteiras (R\$milhões)**

Carteiras	média	máximo	mínimo	mediana
ladder_5_15	463,67	527,85	390,89	465,74
ladder_10_10	482,90	540,40	417,99	485,24
ladder_15_5	502,14	552,95	445,08	504,63
barbell_100_100	161,47	180,97	139,44	162,34

Sujeito a (cenário 3):

$$Q_{\min} \leq \sum_{i \in I} z_i \leq Q_{\max} \quad (15)$$

Ao total, foram feitos 20 tipos de testes diferentes, dadas as combinações de carteiras em 85 períodos, totalizando 1700 testes de *hedge*. Para visualizar a variação de valores das carteiras de ativos, nas Tabelas 1, 2 e 3 estão expostos os valores de média, máximo, mínimo e mediana para dados de valor presente, *duration* e convexidade. As carteiras *ladder* e *barbell* se diferem nos quesitos tamanho nominal e forma, então, uma cautela é necessária ao compará-las. A constituição do nome se dá pela forma da carteira (*ladder* ou *barbell*), valores nominais iniciais e finais (conforme descrito na seção anterior) e nível de restrição dos testes (livre, liquidez, contratos e ACP).

Na Tabela 1 se pode notar que os valores presentes descontados usando a curva de juros tiveram um valor médio de 482,90 milhões nas carteiras *ladder* e 161,47 milhões nas *barbell*. O país vivenciou diversos ciclos monetários no período escolhido, ciclos de aperto ou afrouxamento de taxas de juros, levando a curva de juros a se mover conforme as expectativas do mercado financeiro. Pode-se perceber nos valores presentes das carteiras essa expectativa, apresentando as maiores taxas de desconto entre meados de 2015 e meados de 2016. Há também o outro lado, as menores taxas ao longo de 2020 até início de 2021, período que marcou a menor taxa básica de juros do Brasil. Como já pontuado, tais condições afetam os cálculos de valor presente, *duration* e convexidade dos instrumentos financeiros abordados no presente artigo.

Sobre os valores de *duration*, Tabela 2, as carteiras *barbell* apresentaram uma média de 2,14, e as carteiras *ladder* tiveram os seus valores mínimos e máximos, respectivamente, 1,57 e 2,72.

Com a tabela 3, nota-se que a diferença de valores entre carteiras é mais acentuada, dada a forma de cálculo da convexidade. Isso exemplifica a importância para aproximar melhor o resultado entre *hedge* e ativos.

**Tabela 2**  
**Duration modificada das carteiras**

Carteiras	média	máximo	mínimo	mediana
ladder_5_15	2,53	2,72	2,27	2,53
ladder_10_10	2,13	2,32	1,90	2,13
ladder_15_5	1,77	1,93	1,57	1,77
barbell_100_100	2,14	2,30	1,93	2,14

**Tabela 3**  
**Convexidade das carteiras**

Carteiras	média	máximo	mínimo	mediana
ladder_5_15	11,28	12,25	9,97	11,26
ladder_10_10	8,96	9,84	7,79	8,93
ladder_15_5	6,82	7,54	5,88	6,80
barbell_100_100	8,53	9,26	7,54	8,51

#### 4.2 Modelo sem restrições de liquidez e contratos

O propósito inicial dessa forma de teste, Cenário 1, é analisar o quanto a restrição de liquidez é capaz de influenciar no resultado, ou seja, caso os resultados sejam muito superiores nessa situação, poderia inferir-se que a liquidez é realmente um problema que deve ser contornado. O oposto talvez não possa ser confirmado, pois há a possibilidade de o modelo alocar em outros contratos disponíveis com mais liquidez e os resultados do modelo restrito serem tão bons quanto.

Na Tabela 4 estão demonstrados os percentuais de carteiras com solução para o modelo e quantidades eficientes. Há solução para todos os cenários, dado que estes testes são os de menor nível restritivo.

Na Tabela 5 são observados alguns resultados descritivos sobre as eficiências calculadas a cada período de *hedge*. Cabe pontuar certa divergência nos valores de média e desvio padrão, demonstrando que quando os resultados saem da banda, o fazem com grande intensidade, já os valores de mediana

**Tabela 4**  
**Modelo sem restrições de liquidez e contratos: Resultados de soluções**

Carteiras	Total solucionado	Percentual eficiente dos solucionados	Quantidade de carteiras eficientes
barbell_100_100_livre	100%	75%	64
ladder_5_15_livre	100%	79%	67
ladder_10_10_livre	100%	75%	64
ladder_15_5_livre	100%	76%	65

**Tabela 5**  
**Modelo sem restrições de liquidez e contratos: Resultados de eficiências**

Carteiras	Média resultados de eficiência	Mediana resultados de eficiência	Desvio padrão resultados de eficiência
barbell_100_100_livre	102%	102%	63%
ladder_5_15_livre	127%	100%	207%
ladder_10_10_livre	93%	100%	80%
ladder_15_5_livre	75%	100%	175%

**Tabela 6**  
**Modelo com restrições de liquidez e sem de contratos: Resultados de soluções**

Carteiras	Total solucionado	Percentual eficiente dos solucionados	Quantidade de carteiras eficientes
barbell_100_100_liquidez	100%	76%	65
ladder_5_15_liquidez	100%	82%	70
ladder_10_10_liquidez	100%	79%	67
ladder_15_5_liquidez	100%	81%	69

estão próximos o valor ideal de 100%.

Os resultados apresentam bastante aderência entre os valores presentes finais da carteira e do *hedge* de cada período, sendo os todos valores de R-quadrado e correlação acima de 0,999.

### 4.3 Modelo com restrições de liquidez

A seguir são apresentados os resultados do cenário 2, adicionando ao modelo as restrições de liquidez de contratos de DI. A Tabela 6 expõe que todos os testes foram completados com alguma solução e, do total, tem-se uma eficiência maior que 76% em todos os cenários.

Como não há restrição de número de contratos ainda, o universo de solução em quantidades de contratos se dá pelo conjunto disponível a cada teste. A quantidade de contratos variou entre 6 e 10 em todas a carteiras, com um desvio padrão de praticamente 1 contrato. Uma possível explicação para os números semelhantes nas carteiras é que no *solver*, a busca pelo ótimo se estabeleceu na combinação dos mesmos contratos.

A média de eficiências (Tabela 7) apresentou semelhança na ordem de valores do modelo sem restrições de liquidez ou contratos, um indicador de que as carteiras formadas podem ser semelhantes nos dois tipos de teste. O pior resultado ficou com a carteira *ladder\_5\_15*, com uma média de 130% de eficiência, valor acima da banda exigida. Porém, com valores de desvio

**Tabela 7**  
**Modelo com restrições de liquidez e sem de contratos: Resultados de eficiências**

Carteiras	Média resultados de eficiência	Mediana resultados de eficiência	Desvio padrão resultados de eficiência
barbell_100_100_liquidez	95%	101%	66%
ladder_5_15_liquidez	130%	100%	203%
ladder_10_10_liquidez	91%	99%	69%
ladder_15_5_liquidez	89%	99%	120%

padrão alto, a análise da mediana se torna necessária e todos os resultados estão coerentes com a faixa buscada.

Novamente, a aderência entre os valores presente das carteiras de *hedge* e de crédito ao final de cada período é alta, com valores acima de 0,999.

#### 4.4 Modelo com todas restrições

Por fim, com o modelo demonstrando a capacidade de restrições de número de contratos utilizados para o *hedge*, tem-se a apresentação dos testes do Cenário 3. Foram testados os quatro tipos de carteiras com limites de liquidez e contratos fixados em 3, 5, 7. Se poderia executar tal restrição com liberdade de  $Q_{\min} < Q_{\max}$ , porém, como mencionado, foi-se fixado o valor, tornando  $Q_{\min} = Q_{\max}$ . Isso poderia resultar em problemas inviáveis na busca por soluções, porém, nota-se na Tabela 8 que só se apresentou pequenas dificuldades em solução com uso de 7 contratos, quando se obteve resultado em 96% das carteiras nessa quantidade.

Nos resultados de eficiência dos problemas solucionados, tem-se como menor valor 76% das carteiras e o maior 81%. Como detalhe para a coluna de Quantidade de carteiras eficientes, apresentando o número absoluto de testes que foram eficientes de um universo de 85 testes por carteira, conseguiu-se, no mínimo, 64, indo até 69.

Na Tabela 9, são apresentados os resultados médios de eficiência, que variam entre 81% e 130%, ficando a média fora da banda em três testes, todos sendo a carteira *ladder* com *duration* mais alongado. Tais carteiras com grande peso de fluxos de caixa em períodos mais distantes podem estar sendo comprometidas pela falta de liquidez em contratos mais longos. Isso poderia ser resolvido utilizando uma das qualidades do modelo, em que se filtra na entrada quais contratos poderão ser utilizados em determinados períodos, fazendo com que se obrigue o uso dos contratos selecionados.

As correlações e R-quadrados são exibidas na Tabela 10, novamente com assimilação total entre os valores das carteiras de *hedge* e ativos.

**Tabela 8**  
**Modelo com todas restrições: Resultados de soluções**

Carteiras	Total solucionado	Percentual eficiente dos solucionados	Quantidade de carteiras eficientes
barbell_100_100_liquidez_contratos_3	100%	80%	68
ladder_5_15_liquidez_contratos_3	100%	79%	67
ladder_10_10_liquidez_contratos_3	100%	78%	66
ladder_15_5_liquidez_contratos_3	100%	78%	66
barbell_100_100_liquidez_contratos_5	100%	79%	67
ladder_5_15_liquidez_contratos_5	100%	81%	69
ladder_10_10_liquidez_contratos_5	100%	78%	66
ladder_15_5_liquidez_contratos_5	100%	76%	65
barbell_100_100_liquidez_contratos_7	96%	78%	64
ladder_5_15_liquidez_contratos_7	96%	79%	65
ladder_10_10_liquidez_contratos_7	96%	80%	66
ladder_15_5_liquidez_contratos_7	96%	80%	66

**Tabela 9**  
**Modelo com todas restrições: Resultados de eficiências**

Carteiras	Média resultados de eficiência	Mediana resultados de eficiência	Desvio padrão resultados de eficiência
barbell_100_100_liquidez_contratos_3	95%	101%	66%
ladder_5_15_liquidez_contratos_3	130%	100%	203%
ladder_10_10_liquidez_contratos_3	91%	99%	69%
ladder_15_5_liquidez_contratos_3	89%	99%	120%
barbell_100_100_liquidez_contratos_5	100%	101%	61%
ladder_5_15_liquidez_contratos_5	130%	101%	221%
ladder_10_10_liquidez_contratos_5	101%	99%	57%
ladder_15_5_liquidez_contratos_5	81%	99%	118%
barbell_100_100_liquidez_contratos_7	102%	102%	64%
ladder_5_15_liquidez_contratos_7	127%	100%	219%
ladder_10_10_liquidez_contratos_7	98%	100%	56%
ladder_15_5_liquidez_contratos_7	83%	100%	122%

**Tabela 10**  
**Modelo com restrições de liquidez e sem de contratos: Resultados de correlação e R-quadrado**

Carteiras	R-quadrado valores de carteiras	Correlação valores de carteiras
barbell_100_100_liquidez_contratos_3	0,9991	0,9995
ladder_5_15_liquidez_contratos_3	0,9990	0,9995
ladder_10_10_liquidez_contratos_3	0,9991	0,9995
ladder_15_5_liquidez_contratos_3	0,9990	0,9995
barbell_100_100_liquidez_contratos_5	0,9992	0,9996
ladder_5_15_liquidez_contratos_5	0,9991	0,9995
ladder_10_10_liquidez_contratos_5	0,9991	0,9996
ladder_15_5_liquidez_contratos_5	0,9993	0,9997
barbell_100_100_liquidez_contratos_7	0,9992	0,9996
ladder_5_15_liquidez_contratos_7	0,9991	0,9995
ladder_10_10_liquidez_contratos_7	0,9992	0,9996
ladder_15_5_liquidez_contratos_7	0,9993	0,9996

#### 4.5 Testes com Análise de Componentes Principais

Nesta seção, para o *benchmarking*, serão expostos os resultados usando o método de análise de componentes principais (ACP), em que Litterman e Scheinkman (1991) foram precursores. Dada as análises da curva à termo, tal estudo demonstrou que três componentes principais respondem por grande parte dos movimentos, sendo nomeadas de nível, inclinação e curvatura.

Para se criar a carteira de *hedge* usando essa abordagem, são utilizados três contratos, um para cada componente. Deve-se usar a *duration* da carteira de crédito para escolher a posição do primeiro contrato e os outros dois de forma mais equidistante possível, para frente e para trás do contrato medial, sendo alocado valores iguais em cada um.

São apresentados os resultados de soluções na Tabela 11 e foram solucionados todos os testes, porém em percentual de eficiência, nenhuma situação se conseguiu mais de 70%.

Ao analisar o Tabela 12, é preciso que se saliente que o valor de 8% em média de eficiência na carteira *ladder* com *duration* mais elevado é acompanhado de valor de um desvio padrão alto. Mesmo sendo resultante de um resultado extremamente fora do padrão, não se fez exceção e o número foi mantido. Assim, em dois testes, a média fica fora da banda ideal de resultados.

Por fim, nos resultados de R-quadrado e correlações, todos resultados os também apresentaram grande aderência entre carteiras, apresentando valores acima de 0,998.

**Tabela 11**  
**Modelo de Análise de Componentes Principais: Resultados de soluções**

Carteiras	Total solucionado	Percentual eficiente dos solucionados	Quantidade de carteiras eficientes
barbell_100_100_ACP	100%	65%	55
ladder_5_15_ACP	100%	68%	58
ladder_10_10_ACP	100%	69%	59
ladder_15_5_ACP	100%	65%	55

**Tabela 12**  
**Modelo de Análise de Componentes Principais: Resultados de eficiências**

Carteiras	Média resultados de eficiência	Mediana resultados de eficiência	Desvio padrão resultados de eficiência
barbell_100_100_ACP	115%	102%	165%
ladder_5_15_ACP	8%	99%	901%
ladder_10_10_ACP	78%	103%	250%
ladder_15_5_ACP	113%	100%	106%

#### 4.6 Revisão de resultados

Os testes de otimização foram resolvidos num total de cinco horas, demorando 03h15 nas 1020 carteiras testadas com restrição de contratos (11,47 segundos em média por teste), e 40 minutos nos 640 testes livres e com apenas restrição de liquidez (3,75 segundos em média por teste). A diferença para o total, cerca de 40 testes não obtiveram solução pelo *solver*.

Na formação de carteiras dos testes livres ou com liquidez, a quantidade de contratos utilizadas permaneceu a mesma em todos os meses, exceto nos dois primeiros. Nos oito testes que não tinham restrição de contratos, apenas nos meses de dezembro de 2014 e janeiro de 2015 não foi achado como resultado uma carteira de *hedge* com quantidade idêntica de contratos.

Houve meses nos testes em que todos os resultados ficaram fora da banda ideal de *hedge*, com meses de forte volatilidade, o que não inviabiliza o modelo, mas penaliza essa forma de fazer *hedge* utilizada. O *hedge* estático, sem ativamente alterar a carteira em caso de oscilação forte na curva de juros, talvez não seja a forma mais eficiente.

Mesmo quando os valores de média e desvio padrão se mostrarem dispersos nas tabelas de Resultados de eficiências (Tabelas 5, 7 e 9), a taxa de carteiras de *hedge* efetivas foi sempre superior a 75%, mesmo em uma abordagem passiva, em que não se mexeu na carteira de defesa ao longo de todo mês.

Os resultados de desvios padrão altos podem ser explicados por *outliers*

**Tabela 13**  
**Modelo com todas restrições e liquidez diminuída: Resultados de soluções**

Carteiras	Total solucionado	Percentual eficiente dos solucionados	Quantidade de carteiras eficientes
barbell_100_100_liquidez_contratos_3_0,1	100%	104%	76
barbell_100_100_liquidez_contratos_3_0,2	100%	104%	78
barbell_100_100_liquidez_contratos_3_0,3	103%	104%	84

nos resultados, em que valores de eficiência atingiram números bem acima ou abaixo da média. Eventualmente tais resultados *outliers* apresentaram variação nominal baixa em comparação ao tamanho das carteiras, mesmo que percentualmente valores altos, esclarecendo os desvios padrões elevados.

Nos testes livres sem as restrições de liquidez, no cenário 1, em muitos casos, foram alocadas quantidades de contratos acima do limite estipulado, ou seja, tais carteiras não poderiam ser executadas na prática, pois não se teria liquidez suficiente para tal. Já nos testes em que a restrição de liquidez esteve presente, apenas em uma vez um contrato bateu no limite de liquidez disponível. Uma situação como esse acontecimento não impossibilita um resultado ótimo no modelo, pois dado que o problema tem por característica ser originário de uma matriz positiva semi-definida, ele apresenta mais de uma solução ótima, buscando, assim, povoar a carteira de *hedge* com outros contratos que tenham liquidez disponível.

As carteiras *ladder* com maior *duration* apresentaram pior desempenho, no geral. O que pode explicar tal fato é a possibilidade de baixa liquidez de contratos de DI futuros em períodos mais alongados no Brasil. Como foi comentado anteriormente, tem-se a possibilidade de partição da carteira de ativos na entrada do modelo e isolamento do uso de contratos de *hedge* para contornar tal problema. Essa técnica pode ser uma motivação para trabalhos futuros.

A carteira *barbell* foi escolhida para evoluir em testes com limite de liquidez menor, ou seja, abaixo do ponto de corte de 0,4%. Foram usados os valores 0,1%, 0,2% e 0,3% para testes de eficiência do *hedge*.

A Tabela 13 apresenta os resultados de soluções e percentual eficiente dos solucionados, os resultados não foram afetados pela menor disponibilidade de liquidez.

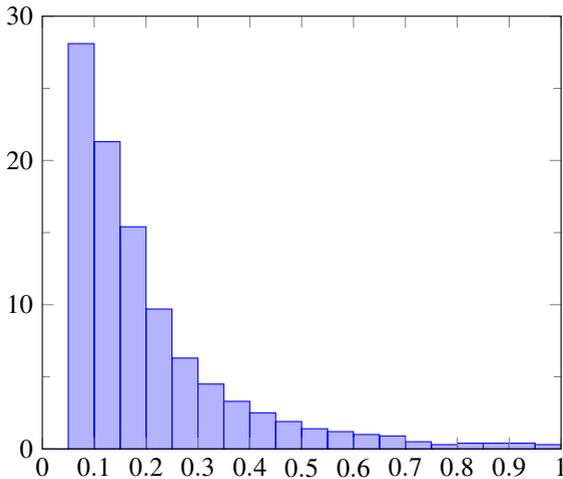
Na Tabela 14 são apresentados os resultados de eficiências dos *hedges*, expondo também que o corte na liquidez não afetou os resultados.

A Figura 1 apresenta um histograma em que o eixo das abcissas representa o percentual utilizado do limite de contratos utilizados. No eixo das ordenadas,

**Tabela 14**  
**Modelo com todas restrições e liquidez diminuída: Resultados de eficiências**

Carteiras	Média resultados de eficiência	Mediana resultados de eficiência	Desvio padrão resultados de eficiência
barbell_100_100_liquidez_contratos_3_0,1	115%	102%	165%
barbell_100_100_liquidez_contratos_3_0,2	8%	99%	901%
barbell_100_100_liquidez_contratos_3_0,3	78%	103%	250%

**Figura 1**  
**Histograma de percentual de limite utilizado**



há a quantidade em percentual de contratos que atingiram os respectivos percentuais. Essa figura, que abrange apenas as carteiras em que há o limite de liquidez empregado, mostra que cerca de 80% dos contratos utilizados, usa 25% ou menos do limite de liquidez disponível.

A respeito dos testes com o método ACP, dado que são utilizados apenas 3 contratos para o *hedge*, foi feito um cálculo da disponibilidade de utilização de contratos de DI futuro para comparar com o método de otimização, que pode utilizar mais contratos. O resultado se traduz em 78% mais liquidez com todos os contratos de DI futuros ofertados versus os três mais líquidos. O resultado poderia ser pior, dado que talvez os três contratos mais líquidos não cumprissem as exigências do método. Embora o método aparente ser de execução mais simples, tal modelo esbarra, principalmente, na questão da liquidez, pois sempre necessitará usar todo o valor presente da carteira em apenas três contratos. Dessa forma, esse método sempre estará em desvantagem, caso a

carteira seja demasiada grande para a liquidez disponível.

Para uma comparação entre os testes livres, com liquidez, com restrição de contratos e ACP, esses aspectos podem ser observados ao avaliar a média dos valores da coluna "Percentual eficiente dos solucionados", respectivamente, 76%, 80%, 79% e 67%, vindos das Tabelas 4, 6, 8 e 11. Os valores indicam que há mais resultantes eficientes nos testes com modelo de otimização comparado ao ACP.

Por fim, dos 1348 testes com solução nos cenários 2 e 3, com restrição de liquidez e contratos, tem-se uma média de eficiência de 103% contra 79% dos 340 testes de ACP. Aparentemente, esse é outro indicativo de maior consistência nos resultados a favor do modelo de otimização, dado que pode ficar mais próximo do valor ideal de *hedge*, 100%.

## 5. Conclusão

A proteção de ativos em carteiras de crédito bancário visa evitar perdas, devido à volatilidade do mercado, com foco especial no risco de mercado associado às taxas de juros. Isso requer uma gestão cuidadosa de ativos e passivos, conhecida como *Asset and Liability Management* (ALM), que tem entre os seus objetivos, monitorar e ajustar descasamentos de tais ativos e passivos para proteger o *spread* bancário. O risco de mercado, na forma de mudanças nas taxas de juros, advém de mudanças na curva à termo. Movimentos na curva a termo, entre os quais estão mudança de nível, inclinação e curvatura, são influenciados por diversos fatores econômicos e podem afetar o valor de ativos e passivos.

Gerenciar o risco de taxa de juros requer estratégias, como diversificação, correspondência de prazos e o uso de derivativos. Uma estratégia comum é a imunização de carteira, em que a otimização matemática pode ser utilizada para encontrar o equilíbrio ideal entre ativos e passivos, mitigando o risco de forma eficaz. Dentro da gestão de ativos e passivos, a imunização de carteiras é uma técnica bem conhecida para proteger contra oscilações nas taxas de juros. Essa abordagem foi introduzida por Redington (1952) em 1952 e, posteriormente, desenvolvida por Fisher e Weil (1971), em 1971. A imunização visa criar uma carteira que não seja sensível às mudanças nas taxas de juros, proporcionando proteção contra riscos de mercado.

O artigo propõe um modelo de otimização matemática para elaborar uma carteira de *hedge* com o uso de instrumentos derivativos, chamados de contratos futuros de DI, com objetivo de imunizar uma carteira de crédito contra o risco de mercado. O problema resolvido é aderente à realidade brasileira, com limites de liquidez nos instrumentos e quantidade de contratos utilizados. Foi

realizada uma grande variedade de testes para estressar o modelo proposto, a fim de provar a sua eficácia, além de uma comparação com estudos semelhantes que usaram o método de análise de componentes principais (ACP). Uma vantagem do método aqui abordado *vis-à-vis* o método ACP está na liberdade de utilizar mais contratos na atribuição da carteira de *hedge*, dado que o método ACP emprega apenas três contratos. Tal possibilidade representa 78% a mais de liquidez disponível a favor do modelo de otimização.

Os resultados demonstram a capacidade do modelo de otimização de defender o valor da carteira de crédito, principalmente ao analisar a média total de resultados de eficiência de *hedge*. Sendo 100% o valor ideal, o modelo proposto obtém valor de 103%, contra 79% dos testes com ACP. O modelo tem a capacidade de achar soluções em diversos cenários diferentes, mesmo com restrições fortemente limitantes, atribuindo versatilidade na resolução do problema. Mais de 75% dos testes viáveis matematicamente, obtiveram resultados eficientes, dentro da banda ótima de *hedge*. Praticamente a totalidade dos testes obteve altíssima aderência em R-quadrado entre os valores de carteira de ativos e carteira de *hedge*.

Para futuros estudos, pode-se lançar mão de outras técnicas, a fim de melhorar os resultados. Na entrada dos dados, pode-se utilizar contratos de DI com menor correlação entre si. Já na função objetivo há a possibilidade de limitar o uso de contratos em cada *bucket* e se pode atribuir várias carteiras em uma mesma solução. Por fim, na parte de restrições, há a possibilidade de adicionar *key rate durations* ou outra medida de risco, além de necessidades específicas de cada tipo de problema, o que é um ponto positivo para os métodos com modelos de otimização.

## Referências

- Adam, A. (2008). *Handbook of Asset and Liability Management: From Models to Optimal Return Strategies*, The Wiley Finance Series, Wiley.
- Adam, A., Cherrat, H., Houkari, M., Laurent, J.-P. e Prigent, J.-L. (2020). [On the risk management of demand deposits: quadratic hedging of interest rate margins](#), *Annals of Operations Research* pp. 1–37.
- Almeida, C. e Lund, B. (2014). [Immunitization of fixed-income portfolios using an exponential parametric model](#), *Brazilian Review of Econometrics* **34**(2): 155–201.
- Amihud, Y. e Mendelson, H. (1986). [Asset pricing and the bid-ask spread](#), *Journal of Financial Economics* **17**(2): 223–249.

- Aramonte, S., Lee, S. J. e Stebunovs, V. (2022). [Risk taking and low longer-term interest rates: Evidence from the U.S. syndicated term loan market](#), *Journal of Banking & Finance* **138**.
- Baker, J. e Los, C. A. (2014). [Liquidity and simulation a survey of liquidity measures using traderex](#), *SSRN Electronic Journal* .
- Beutler, T., Bichsel, R., Bruhin, A. e Danton, J. (2020). [The impact of interest rate risk on bank lending](#), *Journal of Banking & Finance* **115**: 105797.
- Bierwag, G. O. (1977). [Immunization, duration, and the term structure of interest rates](#), *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* **12**(5): 725–742.
- Bierwag, G. O., Kaufman, G. G. e Toevs, A. (1983). [Duration: Its development and use in bond portfolio management](#), *Financial Analysts Journal* **39**(4): 15–35.
- Caldeira, J. F., Moura, G. V. e Santos, A. A. (2016). [Bond portfolio optimization using dynamic factor models](#), *Journal of Empirical Finance* **37**: 128–158.
- Chi, G. e Chi, F. (2007). [Optimization model of asset-liability portfolio considering duration perfect matching](#), *2007 IEEE International Conference on Control and Automation* .
- Choudhry, M. e Carter, D. (2007). *Bank Asset and Liability Management: Strategy, Trading, Analysis*, Wiley Finance, Wiley.
- Cornuéjols, G., Peña, J. e Tütüncü, R. (2018). *Optimization Methods in Finance*, Cambridge University Press.
- Da Silva, F. M., Alves, L. S., Botelho Filho, F. B. e Silva, I. S. (2017). [Liquidez dos contratos futuros de milho negociados na BM&FBOVESPA](#), *Revista de Administração e Negócios da Amazônia* **9**(1): 26–44.
- de Oliveira, A. D., Filomena, T. P., Perlin, M. S., Lejeune, M. e de Macedo, G. R. (2017). [A multistage stochastic programming asset-liability management model: An application to the Brazilian pension fund industry](#), *Optimization and Engineering* **18**(2): 349–368.
- Deguest, R., Fabozzi, F., Martellini, L. e Milhau, V. (2018). [Bond portfolio optimization in the presence of duration constraints](#), *The Journal of Fixed Income* **28**(1): 6–26.

- Demsetz, H. (1968). [The cost of transacting](#), *The Quarterly Journal of Economics* **82**(1): 33–53.
- Díaz, A., de la O González, M. e Navarro, E. (2008). Bond portfolio immunization, immunization risk and idiosyncratic risk, *Revista de Economía Financiera* **16**.
- Drechsler, I., Savov, A. e Schnabl, P. (2021). [Banking on deposits: Maturity transformation without interest rate risk](#), *The Journal of Finance* **76**(3): 1091–1143.
- Farahvash, P. (2020). *Asset-Liability and Liquidity Management*, Wiley.
- Fisher, L. e Weil, R. L. (1971). [Coping with the risk of interest-rate fluctuations: Returns to bondholders from naïve and optimal strategies](#), *The Journal of Business* **44**(4): 408–431.
- Fong, H. G. e Vasicek, O. A. (1984). [A risk minimizing strategy for portfolio immunization](#), *Journal of Finance* **39**(5): 1541–46.
- Freitas, M. R. d. (2011). *Carteiras de renda fixa: Imunização, risco de imunização e risco idiossincrático*, Dissertação de Mestrado, Escola de Pós-Graduação em Economia / Fundação Getúlio Vargas.
- Gabrielsen, A., Marzo, M. e Zagaglia, P. (2011). [Measuring market liquidity: An introductory survey](#), *SSRN Electronic Journal* .
- Golub, B. e Tilman, L. (1997). [Measuring yield curve risk using principal components, analysis, value at risk, and key rate durations](#), *The Journal of Portfolio Management* .
- Gomez, M., Landier, A., Sraer, D. e Thesmar, D. (2021). [Banks' exposure to interest rate risk and the transmission of monetary policy](#), *Journal of Monetary Economics* **117**: 543–570.
- Ho, T. S. (1992). [Key rate durations: Measures of interest rate risks](#), *The Journal of Fixed Income* **2**(2): 29–44.
- Hoffmann, P., Langfield, S., Pierobon, F. e Vuillemeys, G. (2018). [Who bears interest rate risk?](#), *The Review of Financial Studies* **32**(8): 2921–2954.
- Jensen, P. e Bard, J. (2002). *Operations Research Models and Methods*, Wiley.
- Kolb, R. W. e Gay, G. D. (1982). [Immunizing bond portfolios with interest rate futures](#), *Financial Management* **11**(2): 81–89.

- Kunzler, M. S. (2019). *Aplicação da análise de componentes principais na estrutura a termo da taxa de juros, com ênfase em imunização de carteiras de renda fixa*, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Economia / Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Lapshin, V. (2019). *A nonparametric approach to bond portfolio immunization*, *Mathematics* **7**(11): 1121.
- Litterman, R. e Scheinkman, J. (1991). *Common factors affecting bond returns*, *Journal of fixed income* **1**(1): 54–61.
- Markowitz, H. (1952). *Portfolio selection*, *The Journal of Finance* **7**(1): 77–91.
- Marsh, T. A. e Rock, K. (1986). Exchange listing and liquidity: A comparison of the American stock exchange with the NASDAQ national market system, *American Stock Exchange Transactions Data Research Project*.
- Martellini, L., Priaulet, P. e Priaulet, S. (2005). *Fixed-Income Securities: Valuation, Risk Management and Portfolio Strategies*, The Wiley Finance Series, Wiley.
- Meirelles, S. K. e Fernandes, M. (2018). *Estratégias de imunização de carteiras de renda fixa no brasil*, *Brazilian Review of Finance* **16**(2): 179–219.
- Neto, J. M. V. (2018). Hedge simultâneo de valor presente e valor futuro, *GV INVEST*.
- Ortobelli, S., Vitali, S., Cassader, M. e Tichý, T. (2018). *Portfolio selection strategy for fixed income markets with immunization on average*, *Annals of Operations Research* **260**(1): 395–415.
- Owusu, F. B. e Alhassan, A. L. (2021). *Asset-liability management and bank profitability: Statistical cost accounting analysis from an emerging market*, *International Journal of Finance & Economics* **26**(1): 1488–1502.
- Pan, J. e Xiao, Q. (2017). *Optimal asset–liability management with liquidity constraints and stochastic interest rates in the expected utility framework*, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **317**: 371–387.
- Redington, F. M. (1952). *Review of the principles of life-office valuations*, *Journal of the Institute of Actuaries (1886-1994)* **78**(3): 286–340.
- Sant’Anna, L. R., Filomena, T. P., Guedes, P. C. e Borenstein, D. (2017). *Index tracking with controlled number of assets using a hybrid heuristic combining genetic algorithm and non-linear programming*, *Annals of Operations Research* **258**(2): 849–867.

- Sant'anna, L. R., Filomena, T. P. e Borenstein, D. (2014). [Index tracking com controle do número de ativos](#), *Revista Brasileira de Finanças* **12**(1).
- Shen, Y., Wei, J. e Zhao, Q. (2018). [Mean–variance asset–liability management problem under non-Markovian regime-switching models](#), *Applied Mathematics & Optimization* **81**: 859–897.
- Shiu, E. S. (1988). [Immunization of multiple liabilities](#), *Insurance: Mathematics and Economics* **7**(4): 219–224.
- Silva, A. L. P. e Holland, M. (2013). Liquidez de mercado, curva de di futuro e a taxa de juros dos títulos públicos prefixados: Evidências para o Brasil, *41º Encontro Nacional de Economia-Anpec*.
- Simões, C., Oliveira, L. e Bravo, J. M. (2021). [Immunization strategies for funding multiple inflation-linked retirement income benefits](#), *Risks* **9**(4): 60.
- Stern, J. M., de Braganca Pereira, C. A., de Oliveira Ribeiro, C., Dunder, C., Nakano, F. e Lauretto, M. (2020). [Otimizacao e processos estocasticos aplicados a economia e finanças](#).
- Tonin, J. M., Braga, M. J. e Coelho, A. B. (2009). [Efetividade de hedge do milho com contratos futuros da BM&F: uma aplicação para a região de Maringá \(PR\)](#), *Revista de Economia* **35**(1).
- Varga, G. e Valli, M. (2001). [Movimentos da estrutura a termo da taxa de juros brasileira e imunização](#), *Economia Aplicada* **5**(1).
- Vieira, E. B. F., Filomena, T. P., Sant'anna, L. R. e Lejeune, M. A. (2021). [Liquidity-constrained index tracking optimization models](#), *Annals of Operations Research* **330**: 1–46.
- Vieira, E. B. F. e Filomena, T. P. (2020). [Liquidity constraints for portfolio selection based on financial volume](#), *Computational Economics* **56**(4): 1055–1077.
- Vuillemeys, G. (2019). [Bank interest rate risk management](#), *Management Science* **65**(12).
- Weiskopf, M. (2003). *Imunização de carteiras de renda fixa*, Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- Zhu, W., Zhang, C.-H., Liu, Q. e Zhu, S.-S. (2018). [Incorporating convexity in bond portfolio immunization using multifactor model: A semidefinite programming approach](#), *Journal of the Operations Research Society of China* **6**(1): 3–23.