Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática e Estatística

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Grupoides e Semigrupos Inversos: um estudo em ações parciais e teoria de Galois

Tese de Doutorado

Wesley Gonçalves Lautenschlaeger

Porto Alegre, novembro de 2024.

Tese submetida por Wesley Gonçalves Lautenschlaeger[1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professora Orientadora:
Prof.ª Dr.ª Thaísa Raupp Tamusiunas (PPGMat-UFRGS)

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana (PPGMat-UFRGS)
Prof. Dr. Antonio Paques (UFRGS)
Prof. Dr. Dirceu Bagio (PPGMPA-UFSC)
Prof. Dr. Hector Pinedo (Universidad Industrial de Santander)
Prof. Dr. João Matheus Jury Giraldi (PPGMat-UFRGS)

Data da Apresentação: 19/11/2024

[1]Bolsista do Conselho Nacional de Pesquisas - CNPq.

CIP - Catalogação na Publicação

Lautenschlaeger, Wesley Gonçalves
Grupoides e semigrupos inversos: um estudo em ações parciais e teoria de Galois / Wesley Gonçalves Lautenschlaeger. -- 2024.
139 f.
Orientadora: Thaísa Raupp Tamusiunas.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2024.

1. Ações parciais. 2. Teoria de Galois. 3. Grupoides. 4. Semigrupos Inversos. I. Tamusiunas, Thaísa Raupp, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Nós só podemos ver um pouco do futuro, mas o suficiente para perceber que há muito a fazer.

Alan Turing

Agradecimentos

É impossível iniciar um texto de agradecimentos sem prestar uma homenagem especial à minha mãe, Consuelo Gonçalves. Nem toda criança tem a sorte de contar com uma mãe que responde a todas as suas perguntas incessantes com paciência infinita. Nem todo adolescente *queer* encontra uma mãe que, ao perceber que seu filho vê o mundo de maneira diferente, em vez de tentar mudá-lo, o acolhe e o incentiva. E nem todo jovem adulto recebe o apoio incondicional de uma mãe que o ajuda a preparar brigadeiros para vender, a fim de pagar as passagens de ônibus para a graduação, que acorda mais cedo para compartilhar o café da manhã ou que abdica de suas próprias atividades para apoiar os estudos. Posso afirmar, sem sombra de dúvida, que ninguém teve melhor mãe que eu tive. Sou eternamente grato por tudo.

A jornada matemática de cada um pode começar em momentos distintos. A minha teve início cedo, na escola. Na oitava série, recebi uma medalha de bronze da OBMEP, um reconhecimento que eu mal imaginava que mudaria minha vida. Agradeço a todos os professores e professoras (não só os de matemática!) que passaram pela minha trajetória e contribuíram para minha formação na Escola Municipal de Ensino Médio Santa Rita de Cássia. Acredito que a educação de qualidade deve ser pública e acessível a todos, e vocês sempre proporcionaram isso a mim. Agradeço também às amigas e ao amigo que me acompanharam desde essa época: Alexandra Juliani, Amanda Pacheco, Anita Velozo Teixeira, Cauan Quilici, Gabriela Lemos, Larissa Merlo e Nathalia Melo.

Em 2016, ingressei na graduação em Informática Biomédica na UFCSPA. Nesse espaço, aprendi muito sobre matemática e conheci pessoas incríveis. Um agradecimento especial vai para Gabriela Flores Gonçalves, minha amiga do coração. Foi ali que comecei minha primeira iniciação científica em álgebra com a professora Thaísa Tamusiunas, que se tornaria minha orientadora pelos próximos oito anos. Sou especialmente grato por ela ter reconhecido meu potencial, por sempre me desafiar a superar minhas expectativas e por todos os conselhos. Graças aos seus ensinamentos, percebi que minha verdadeira vocação era, de fato, a álgebra.

Em 2018, ingressei no bacharelado em matemática com ênfase em matemática pura na UFRGS. No meu primeiro dia de aula, ao entrar no campus do Vale, soube que aquele era o meu lugar. Não por acaso, essa aula era do professor Antonio Paques, que foi de extrema importância durante toda minha formação acadêmica e merece uma homenagem especial. Não posso deixar de destacar também o apoio do professor Alveri Sant'Ana, que me acompanhou ao longo de toda a minha trajetória.

Em 2020, dei início ao mestrado, finalmente conquistando o tão esperado acesso às salas de estudo da pós-graduação em matemática. Contudo, a pandemia de COVID-19 fez com que nossas expectativas de um ambiente presencial fossem adiadas por dois anos e, consequentemente, por todo meu período de mestrado. Agradeço aos amigos que estiveram ao meu lado durante essa época, compartilhando discussões matemáticas por meio de câmeras: Alessandra Fabiani, Christian Garcia, Gustav Beier, Juliana Pedrotti e Rafael Haag. Sou grato também aos professores Victor Marín e Wagner Cortes, que fizeram parte da minha banca de defesa de dissertação de mestrado.

A memória da amizade de Jaqueline Souza, que perdemos durante a pandemia, permanece viva em nossos corações; sua presença trouxe alegria e luz às nossas vidas.

Meu doutorado começou em 2022, em um período marcado pelo distanciamento social e cuidados. Gradualmente, conseguimos retornar ao que conhecíamos como normal. Agradeço aos amigos que conheci durante essa fase: André Rickes, Arthur Tauchen, Gabriel Pizzio, Jeremy Ortiz, Marcus Vinícius, Vitória Gomes e William Braucks. Nossas conversas, momentos de descontração e jogos de truco na salinha do café foram verdadeiros respiros em meio à intensidade do doutorado. E por tudo isso e mais ainda, pelos rolês veganos, pela companhia maravilhosa, pelas piadas, pelos choros, pelas caronas, pelas voltas de bicicleta na orla, agradeço minha incrível amiga Luíza de Pizzol. Também agradeço ao professor Lucas Backes, que participou da minha banca de qualificação.

Aos amigos que encontrei nos eventos de álgebra pelo Brasil, Melissa Luiz e Willian Velasco, obrigado por tantas trocas e boas conversas.

Depois de muitas disciplinas, muitos eventos, muitos trabalhos e listas de exercícios, chego ao fim do doutorado, mas durante toda essa jornada repleta de altos e baixos, sempre tive uma constante: Gibran Ayub, meu amor, meu carinho, meu companheiro. Obrigado por me escutar tantas vezes, por me lembrar que as dificuldades não são insuperáveis e por sempre estar ao meu lado. Tua presença me fez valorizar cada momento e enxergar as belezas da vida através da risada e do bom humor. É um prazer imensurável compartilhar meu lar e minha vida contigo.

Não posso esquecer os amigos que fiz fora da matemática pura: Débora Gonçalves, Isabel Lisboa, Mariana Alves, Maria Eduarda Moysés, Marina Gonçalves, Rafael Pochmann e Thais Antonio. Agradeço a todos pelos momentos valiosos que compartilhamos. Também sou grato aos projetos de extensão Cineciência, Leitura em Voz Alta e Matematiqueer, e à Comissão de Diversidade e Inclusão do IME-UFRGS, que me ajudaram a ver o mundo de uma maneira mais humana e empática.

Agradeço também aos outros membros da minha família: meu pai, Joel Lautenschlaeger, e aos meus irmãos Arlon, Milena e Micheli. Agradeço à minha cunhada, Dayane, e aos meus amados sobrinhos Gabryel e Vitória Helena, bem como a tia Wilma. Agradeço aos meus avós Olandy Gonçalves, Ruth Viegas e Herta Lautenschlaeger, que nos deixaram durante meu período de pós-graduação, mas que carrego no meu coração. E, claro, não podia deixar de agradecer as minhas gatas de estimação, Cereja e Amora, por toda companhia e carinho.

Durante a escrita desta tese, Porto Alegre enfrentou uma enchente histórica, um evento que poderia ter sido evitado com políticas adequadas de manutenção e prevenção. Sou imensamente grato ao CNPq pelo apoio financeiro durante meu doutorado e pelas iniciativas que minimizaram os impactos na vida das pessoas que foram, assim como eu, afetadas pela enchente.

Agradeço aos professores Alveri Sant'Ana, Antonio Paques, Dirceu Bagio, Hector Pinedo e João Matheus Jury Giraldi, que gentilmente aceitaram ler meu trabalho e oferecer sugestões valiosas. A contribuição de vocês enriqueceu significativamente minha pesquisa.

Por fim, quero expressar um agradecimento pouco convencional, mas extremamente significativo. Dirijo minhas palavras a todas as pessoas LGBTQIA+ (matemáticas ou não) que vieram antes de mim e que, através de suas trajetórias, mostraram que a matemática (e o mundo!) pode ser um espaço criativo, acolhedor e humano. Muitas vezes, duvidei do meu lugar nesse universo por ser uma pessoa diferente e pensei em seguir outros caminhos. Dedico esta tese a todas as pessoas LGBTQIA+ matemáticas que ainda virão, reafirmando que a matemática é, sim, um lugar de comunidade. Afinal, não existe coletivo sem a soma de suas partes diversas, mas também não há respeito à diversidade sem um coletivo forte e presente.

Resumo

Neste trabalho, definiremos a noção de globalização de ação parcial de grupoide ordenado em um anel, discutindo sua existência e unicidade. Usaremos essa noção para definir a globalização de ação parcial de semigrupo inverso em um anel. Ademais, apresentaremos duas teorias de Galois: uma para grupoides agindo parcialmente sobre anéis comutativos e outra para semigrupos inversos agindo sobre anéis comutativos. Provaremos teoremas de equivalências para extensões galoisianas, teoremas de correspondência e teoremas para estruturas quocientes.

Abstract

In this work, we will define the notion of globalization of a partial action of an ordered groupoid on a ring, discussing its existence and uniqueness. We will use this notion to define the globalization of a partial action of an inverse semigroup on a ring. Furthermore, we will present two Galois theories: one for groupoids partially acting on commutative rings and another for inverse semigroups acting on commutative rings. We will prove equivalence theorems for Galois extensions, correspondence theorems, and theorems for quotient structures.

Sumário

Introdução **1**

1 Ações parciais de grupoides ordenados **5**

1.1 Pré-requisitos . . . 5

1.2 Globalização ordenada . . . 12

1.2.1 Existência . . . 13

1.2.2 Uma condição para a unicidade . . . 26

1.2.3 Aplicação via Teoremas ESN . . . 37

2 Teoria de Galois para ação parcial de grupoide **41**

2.1 Pré-requisitos . . . 41

2.2 Teoria de Galois para ação parcial ortogonal de grupoide . . . 45

2.3 Ortogonalização . . . 60

2.3.1 Teoria de Galois geral . . . 61

2.3.2 Aplicação para o skew-anel parcial de grupoide . . . 70

3 Teoria de Galois para ação de semigrupo inverso **73**

3.1 Pré-requisitos . . . 74

3.2 Aplicação traço e subanel dos invariantes . . . 79

3.3 Extensões galoisianas . . . 84

3.4 Correspondência de Galois . . . 94

3.5 Caso geral . . . 110

3.6 Semigrupos inversos com zero . . . 111

Referências Bibliográficas **126**

Introdução

S. U. Chase, D. K. Harrison e A. Rosenberg desenvolveram, em 1965, uma Teoria de Galois para grupos finitos agindo em extensões de anéis comutativos $B \subseteq A$, onde exibiram uma generalização do Teorema Fundamental da Teoria de Galois [14], baseada na noção de extensão galoisiana de anéis comutativos apresentada por M. Auslander e O. Goldman em [3]. Essa correspondência relaciona todos os subgrupos do grupo G de B-automorfismos de A com todas as B-subálgebras separáveis e G-fortes de A. No caso em que os únicos idempotentes de A e B são 0 e 1, toda B-subálgebra de A é G-forte, então toda B-subálgebra separável de A aparece na correspondência.

Em 1966, O. E. Villamayor e D. Zelinsky [51] generalizaram essa última construção de [14] para extensões comutativas $B \subseteq A$ tais que A e B possuem um número finito de idempotentes. Com suas hipóteses, a B-álgebra A foi decomposta como uma soma direta $\bigoplus_{i \in I} A_i$, onde cada A_i era uma B-subálgebra de A com apenas dois idempotentes (0 e 1_{A_i}), e $A_i \simeq A_j$, para todos $i, j \in I$. Mais ainda, eles construíram um grupoide com os isomorfismos entre as componentes A_i, e, embora não tenham definido explicitamente ações de grupoide, foi precisamente esse objeto com o qual trabalharam. Essa foi a primeira vez em que grupoides apareceram em um contexto de Teoria de Galois.

Villamayor e Zelinski também trabalharam com uma Teoria de Galois para anéis comutativos com um número arbitrário de idempotentes em [52]. Nesse caso, grupoides não foram usados como ferramenta intermediária. As técnicas utilizadas envolveram Teoria Fraca de Galois e métodos topológicos que fogem da abordagem que usaremos nessa tese.

Os resultados apresentados em [51] e [52] deram origem ao desenvolvimento de uma nova correspondência de Galois envolvendo grupoides. Em 1971, A. R. Magid generalizou em [38] o trabalho de Villamayor e Zelinski [52] e de T. Nagahara [42]. Para isso, o autor supôs que $B \subseteq A$ é uma extensão de Galois localmente fraca, obtendo uma correspondência entre todas as B-subálgebras localmente separáveis de A e alguns subgrupoides do espectro Booleano de $A \otimes A$. Na sequência, Magid apresenta em [39] uma correspondência para o caso em que A é uma cobertura quasi-Galois de B. Nesse contexto, os objetos que aparecem na correspondência são as coberturas quasi-separáveis de B em A e os subgrupoides fechados do espectro Booleano de $A \otimes A$. Esse trabalho aparece em uma forma mais geral no livro [40], também escrito por Magid, em que o autor aborda o problema via Teoria Categórica de Galois.

Ainda em um contexto categórico, tomando como ponto inicial a Teoria de Galois-Grothendieck de 1960 [29], devemos citar o trabalho de G. Janelidze em [31], de Janelidze e W. Tholen em [32] e também de A. Paques e T. Tamusiunas em [45], onde outras correspondências galoisianas foram desenvolvidas.

Finalmente, uma lista de equivalências de extensões galoisianas e um teorema de correspondência foram estendidos para um contexto de ações globais de grupoides em anéis em [8] por D. Bagio e Paques e em [46] por Paques e Tamusiunas usando técnicas similares às de [14]. Em [8, Theorem 5.3], um teorema de equivalências de extensões galoisianas foi provado, generalizando e melhorando [14, Theorem 3.1]. No caso comutativo, esse teorema apresenta dez equivalências para determinada extensão ser de Galois, uma delas sendo A ser gerador da categoria de B-módulos. Em [46], se $B \subseteq A$ é uma extensão galoisiana comutativa com grupoide de Galois finito $\mathcal{G}$, foi provado uma correspondência biunívoca entre os subgrupoides amplos de $\mathcal{G}$ e as B-subálgebras de A que são separáveis e β-fortes, onde β é uma ação global ortogonal de $\mathcal{G}$ em A. A relação que Villamayor e Zelinsky usaram em seu artigo precedeu [46], entretanto, em [46] a decomposição de A em $\bigoplus_{i\in I} A_i$ não exige que os A_i's sejam dois a dois isomorfos e não faz referência ao número de idempotentes em cada A_i. Em [51], a correspondência entre todos os subgrupoides amplos de $\mathcal{G}$ e todas as B-subálgebras separáveis de A foi usada para provar o principal teorema de seu artigo: uma correspondência de Galois entre todos os subgrupos "gordos" (sic) de G e todas as B-subálgebras separáveis de A. Assim, podemos entender a construção intermediária de [51] como um caso particular de [46], pois as condições impostas no anel A em [51] e na ação global ortogonal implícita β são suficientes para garantir que toda B-subálgebra separável de A seja β-forte.

O estudo de ações parciais de grupos é recente em termos matemáticos e seu primeiro objetivo foi classificar C^*-álgebras. Em 1998, R. Exel, em [20], mostrou que existe uma relação biunívoca entre ações parciais de grupos e ações (globais) de semigrupos inversos. Já em [18], publicado em 2005, M. Dokuchaev e Exel discutiram quando o produto cruzado parcial de uma álgebra por um grupo é associativo, trabalhando pela primeira vez com a teoria de forma puramente algébrica. Seguindo essa linha, W. G. Lautenschlaeger e Tamusiunas mostraram em [35] (e mais detalhadamente na dissertação [34]) que existe uma correspondência de um para um entre ações parciais de um grupoide $\mathcal{G}$ e ações de um determinado semigrupoide inverso construído a partir de $\mathcal{G}$.

Considerando ainda o caso de grupoides, em 2010, Bagio, D. Flôres e Paques em [7] apresentam a teoria de ações parciais de grupoides ordenados em anéis. Em [9], de 2020, Bagio, Paques e H. Pinedo relacionam uma classe de ações parciais de grupoide, as chamadas ações parciais de tipo-grupo, com a classe de ações parciais de grupo. Além disso, diversas teorias de Galois parciais aparecem na literatura. Alguns exemplos são a teoria de Galois para ações parciais de grupo que aparece em [19], construída por Dokuchaev, M. Ferrero e Paques, a teoria de Galois para ações parciais tipo-grupo de grupoides sobre anéis comutativos que aparece no artigo [11] de Bagio, A. Sant'Ana e Tamusiunas, e uma caracterização de extensões de Galois de grupoides usando isomorfismos parciais apresentada por W. Cortes e Tamusiunas em [15]. No primeiro artigo, os autores relacionam todos os subgrupos de um grupo G que age parcialmente em um anel A via ação parcial α com as A^{α}-subálgebras B que são α-fortes e separáveis de A em que G_B é um subgrupo de B. Embora os autores não tenham provado o resultado clássico que envolve ação do grupo quociente, em [6], Bagio, A. Cañas, V. Marín, Paques e Pinedo apresentam esse resultado para o caso parcial de grupos. Outros trabalhos que envolvem ações de grupoides que devem ser citados são [48], onde J. Pedrotti e Tamusiunas consideram a aplicação de Galois para o caso de grupoides agindo em anéis não comutativos, [23], onde C. Garcia e Tamusiunas apresentam uma aplicação de Galois para a classe de K_{β}-anéis (também não comutativos) e [16], onde S. Della Flora, Flôres, A. Morgado e Tamusiunas consideram ações de grupoides em conjuntos.

Dentro do contexto acima discutido, visando contribuir com a expansão e aprofundamento do estudo de ações parciais e teoria de Galois, podemos dissertar sobre o que será apresentado nesta tese. No primeiro capítulo, introduziremos o conceito de globalização ordenada para ações parciais de grupoides ordenados em anéis. Mostraremos no Teorema 1.2.5 que toda ação parcial ordenada unitária possui uma globalização ordenada, mas a unicidade dessa globalização não é garantida, diferentemente do caso não ordenado. Assim, precisaremos definir o conceito de globalização ordenada minimal e, para este tipo de globalização, apresentaremos no Teorema 1.2.15 uma condição necessária e suficiente para garantir a sua unicidade. Como aplicação, construiremos um método de globalização para ações parciais de semigrupos inversos, e essa globalização será provada única. Embora N. D. Gilbert, em [25], tenha apresentado um método para globalização de ações parciais de grupoides ordenados em conjuntos, a ação global construída não é necessariamente uma ação global ordenada. Esse problema foi resolvido por P. Nystedt em [43], mas ainda para ações sobre conjuntos. Pretendemos aprimorar o resultado de Gilbert para o caso de anéis, e por isso chamaremos nossa globalização de globalização ordenada. Ações parciais de outras estruturas que generalizam semigrupos inversos e grupoides ordenados foram estudadas por V. Gould e C. Hollings em [26], [27], por Gould e T. Stokes em [28], por Hollings em [30] e por W. Velasco em [50].

Já no segundo capítulo, mostraremos uma correspondência de Galois para o caso de grupoides agindo em anéis comutativos via ações parciais ortogonais (Teorema 2.2.8), bem como apresentaremos uma resolução do problema do quociente para ações parciais ortogonais de grupoides considerando subgrupoides estritamente normais (Teorema 2.2.12). Até então, toda generalização do Teorema de correspondência de Galois para ações de grupoide exigiu alguma forma de ortogonalidade nas ações, como podemos ver, por exemplo, em [8], [11] e [46]. Esta condição pede uma decomposição específica do anel em termos dos ideais associados à ação do grupoide, e se faz suficiente para garantir a invariância de uma aplicação de fundamental relevância na construção da Teoria de Galois, chamada de aplicação traço. Embora esta classe de ações seja bastante abrangente, ela não recobre todos os casos possíveis de ações de grupoides. Por essa razão, investigamos quais implicações poderíamos deduzir dentro da Teoria de Galois para ações parciais de grupoide ao retirarmos a condição de ortogonalidade. Com a finalidade de mostrar estas conclusões, apresentaremos o conceito de ortogonalização de uma ação parcial de grupoide, e mostraremos que toda ação parcial pré-unitária admite uma única ortogonalização. Fazendo uso desta ferramenta, mostraremos quais aspectos da Teoria de Galois para ações parciais gerais conseguimos recuperar através das ações parciais ortogonais. A partir dessas informações, construiremos um teorema de correspondência de Galois para extensões fortemente Galois para ações parciais (não necessariamente ortogonais) de grupoide em anéis comutativos (Teorema 2.3.12) e um teorema de correspondência de Galois para ações globais (não necessariamente ortogonais) de grupoide em anéis comutativos (Teorema 2.3.17).

O terceiro capítulo é dedicado à teoria de Galois para ações de semigrupos inversos. Semigrupos inversos estão intrinsecamente relacionados com uma classe de grupoides ordenados via o Teorema Ehresmann-Schein-Nambooripad (Teorema ESN), que aparece no livro [37], escrito por M. V. Lawson. Generalizações do Teorema ESN também foram estudadas por Gould e Hollings, bem como por D. Dewolf e D. Pronk em [17] e por S. Wang em [53] e [54]. Esse teorema também foi usado em [36] por Lautenschlaeger e Tamusiunas para provar uma correspondência de Galois para ações globais ortogonais de semigrupos inversos em anéis comutativos. Entretanto, esse não é o caso mais interessante possível, pois a ortogonalidade da ação anula muitos ideais associados a elementos não maximais com respeito a ordem parcial natural de um semigrupo inverso. Neste contexto, destaca-se ainda mais a limitação da condição de ortogonalidade sobre as ações. Em vista disto, o objetivo do terceiro capítulo dessa tese é construir uma teoria de Galois para ações de semigrupos inversos em anéis comutativos sem nenhuma hipótese sobre a ação. Para esse fim, trabalharemos inicialmente com o caso de semigrupos inversos (resp. semigrupos inversos com zero) E-unitários (resp. 0-E-unitários) e posteriormente provaremos que podemos estender esse caso para uma teoria geral. Apresentaremos teoremas de equivalências para extensões galoisianas no caso de semigrupos inversos sem e com zero (Teoremas 3.3.7 e 3.6.18, respectivamente), teoremas de Correspondência de Galois (Teorema 3.5.4 e Teorema 3.6.24) e ainda um teorema envolvendo semigrupos inversos quocientes (Teorema 3.4.14).

Ademais, todos os anéis que considerarmos nesse trabalho serão associativos, a menos que explicitamente indicado o contrário.

Capítulo 1

Ações parciais de grupoides ordenados

Meus métodos são na verdade métodos de trabalhar e pensar; esse é o motivo pelo qual eles aparecem em todos os lugares anonimamente.

Emmy Noether

Neste capítulo apresentaremos o conceito de globalização ordenada de ação parcial de grupoide ordenado, bem como uma caracterização de existência e unicidade de globalizações ordenadas. Além disso, utilizaremos o Teorema ESN para traduzir a teoria desenvolvida para o caso de semigrupos inversos, obtendo um teorema de globalização para ações parciais dessa estrutura.

1.1 Pré-requisitos

Inicialmente, relembraremos a leitora e o leitor da definição de grupoide ordenado e algumas de suas propriedades. Para um estudo mais detalhado da teoria de grupoides, recomendamos [4], [5], [12], [37] e [46].

Relembramos que um *grupoide* $\mathcal{G}$ é uma categoria pequena onde todo morfismo é um isomorfismo. Denotamos por $\mathcal{G}_0$ o conjunto de objetos de $\mathcal{G}$. Observe que $\mathrm{id} : \mathcal{G}_0 \to \mathcal{G}$, dada por $\mathrm{id}(x) = \mathrm{id}_x$, é uma aplicação injetiva, de onde podemos identificar $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}$. Dado $g \in \mathcal{G}$, o *domínio* e a *imagem* de g serão denotados por $d(g)$ e $r(g)$, respectivamente. Logo, $d(g) = g^{-1}g$ e $r(g) = gg^{-1}$. Denotamos por $\mathcal{G}_2 = \{(g,h) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} : gh \text{ está definido } \} = \{(g,h) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} : d(g) = r(h)\}$. Claramente temos que $d(g^{-1}) = r(g)$ e $r(g^{-1}) = d(g)$, para todo $g \in \mathcal{G}$.

Definição 1.1.1. [37, p. 108] Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Dizemos que $\mathcal{G}$ é um grupoide ordenado se existe uma ordem parcial $\leq$ em $\mathcal{G}$ tal que

(OG1) Se $x \leq y$ então $x^{-1} \leq y^{-1}$;

(OG2) Para todos $x, y, u, v \in \mathcal{G}$ tais que $x \leq y$, $u \leq v$, $(x, u) \in \mathcal{G}_2$ e $(y, v) \in \mathcal{G}_2$, vale que $xu \leq yv$;

(OG3) Seja $x \in \mathcal{G}$ e $e \in \mathcal{G}_0$ tal que $e \leq d(x)$. Então existe e é único $(x|e) \in \mathcal{G}$ satisfazendo $(x|e) \leq x$ e $d(x|e) = e$.

(OG3*) Seja $x \in \mathcal{G}$ e $e \in \mathcal{G}_0$ tal que $e \leq r(x)$. Então existe e é único $(e|x) \in \mathcal{G}$ satisfazendo $(e|x) \leq x$ e $r(e|x) = e$.

Note que se a *restrição* $(x|e)$ está definida, então a *correstrição* $(e|x^{-1})$ também está e $(x|e)^{-1} = (e|x^{-1})$.

Seja $\mathcal{G}$ um grupoide ordenado. Dados $e, f, i \in \mathcal{G}_0$, dizemos que i é o *ínfimo* entre e e f se $i \leq e$, $i \leq f$ e se $j \leq e$, $j \leq f$ então $j \leq i$. Neste caso, denotamos $i = e \wedge f$. Um conjunto parcialmente ordenado onde todo par de elementos possui ínfimo é dito um semirreticulado inferior. Dizemos que $\mathcal{G}$ é um *grupoide indutivo* se $\mathcal{G}_0$ é um semirreticulado inferior com respeito a ordem parcial de $\mathcal{G}$.

Definição 1.1.2. [37, p. 111] Seja $\mathcal{G}$ um grupoide ordenado. Dizemos que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ é um *subgrupoide ordenado* de $\mathcal{G}$ se $\mathcal{H}$ é um subgrupoide de $\mathcal{G}$ e vale que se $x \in \mathcal{H}$ e $e \in \mathcal{H}_0$ são tais que $e \leq d(x)$, então $(x|e) \in \mathcal{H}$. Neste caso, escrevemos $\mathcal{H} \preceq \mathcal{G}$. Dizemos que $\mathcal{H}$ é *amplo* se $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{H}$.

Lema 1.1.3. *[37, Proposition 4.1.3(3,4)] Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide ordenado, $x, y \in \mathcal{G}$, $e \in \mathcal{G}_0$ tais que $(x, y) \in \mathcal{G}_2$ e $e \leq d(y)$. Então*

$$(xy|e) = (x|r(y|e))(y|e).$$

Analogamente, se $f \leq r(x)$, então

$$(f|xy) = (f|x)(d(f|x)|y).$$

Lema 1.1.4. *[37, Proposition 4.1.3(7)] Seja $\mathcal{G}$ um grupoide ordenado. Então $\mathcal{G}_0$ é um ideal de ordem, isto é, se $g \leq e$, onde $e \in \mathcal{G}_0$, então $g \in \mathcal{G}_0$.*

Exemplo 1.1.5. Seja X um conjunto. Denotamos por $\mathcal{S}(X)$ o grupoide de simetrias parciais de X, isto é,

$$\mathcal{S}(X) = \{f : A \to B : A, B \subseteq X, f \text{ é uma bijeção}\}.$$

Dados $f : A \to B$, $g : C \to D \in \mathcal{S}(X)$, definimos o produto parcial

$$fg = \begin{cases} f \circ g, & \text{se } A = D, \\ \text{indefinido, caso contrário.} \end{cases}$$

Desta forma, temos que $\mathcal{S}(X)$ é um grupoide ordenado com ordem parcial dada pelas restrições, isto é, $f \leq g$ se, e somente se, $\mathrm{dom} f \subseteq \mathrm{dom} g$ e $f = g|_{\mathrm{dom} f}$. Além disso, segue de [22, Theorem 2.5.1] que se X é finito e possui n elementos, então

$$|\mathcal{S}(X)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 k!.$$

Dado um grupoide ordenado $\mathcal{G}$, definimos o *pseudoproduto* $*$ como

$$g * h = \begin{cases} (g|d(g) \wedge r(h))(d(g) \wedge r(h)|h), & \text{se existir } d(g) \wedge r(h), \\ \text{indefinido, caso contrário.} \end{cases}$$

Note que em grupoides indutivos o pseudoproduto está definido em toda parte.

Definição 1.1.6. Seja S um conjunto munido de uma operação totalmente definida denotada por concatenação. Dizemos que S é um *semigrupo* se sua operação é associativa. Se para todo $s \in S$ existe $s^* \in S$ tal que $ss^*s = s$, então S é dito um *semigrupo regular*. Dizemos que o elemento s^* é um *inverso* de s. Um *semigrupo inverso* é um semigrupo regular S onde cada elemento possui um único inverso.

Um elemento e em um semigrupo S é dito um *idempotente* se $e^2 = e$, e denotamos por $E(S)$ o conjunto de idempotentes de S. Se S é inverso, segue de [37, Proposition 1.4.8] que $E(S)$ é um semirreticulado inferior com respeito à ordem parcial natural, com $e \wedge f = ef$, para todos $e, f \in E(S)$.

Para enunciar o próximo resultado, precisaremos da noção de morfismos e premorfismos de grupoides ordenados e de semigrupos inversos. Para tanto, usaremos os trabalhos de Gilbert [25, p. 184], que define premorfismo de grupoides indutivos, e de Gould e Hollings [27, Definition 3.6], que definem premorfismos entre estruturas chamadas de constelações ordenadas, especificando algumas consequências para o caso particular de grupoides ordenados. Escolhemos essa definição em detrimento à de premorfismo apresentada por Lawson em [37] porque a definição de Gilbert modela o caso de ação parcial de grupoide ordenado e, após uma aplicação de um teorema ESN [30, Theorem 6.1], a de ação parcial de semigrupo inverso, que é nosso principal objeto de estudo. Lawson também apresenta em [37] um tipo de premorfismo que modela ação parcial de semigrupo inverso, o qual intitulou *premorfismo dual*, porém sem grande aprofundamento. Esse tipo de premorfismo acabou sendo estudado de forma mais detalhada por Hollings em [30]. Essa diferenciação aparece pela primeira vez em um artigo de McAlister e Reilly [41], onde os autores definem $\vee$-premorfismos (que são os premorfismos de Lawson) e $\wedge$-premorfismos (que são os premorfismos duais de Lawson e os equivalentes aos premorfismos que definiremos) para o caso de semigrupos inversos. A definição adaptada será apresentada a seguir.

Definição 1.1.7. (a) [37, p. 108] Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ grupoides ordenados. Uma aplicação $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ é dita um *homomorfismo de grupoides ordenados* se for um homomorfismo de grupoides que preserva ordens, ou seja, se $g, h \in \mathcal{G}$ são tais que $g \leq h$, então $\varphi(g) \leq \varphi(h)$ em $\mathcal{H}$.

(b) [25, p. 184] Sejam agora $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ grupoides indutivos. Uma aplicação $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ é dita um *premorfismo de grupoides indutivos* se

(i) $\psi(g) * \psi(h) \leq \psi(gh)$, para todo $(g, h) \in \mathcal{G}_2$;

(ii) $\psi(g)^{-1} = \psi(g^{-1})$, para todo $g \in \mathcal{G}$;

(iii) ψ preserva ordens.

Observação 1.1.8. Note que todo premorfismo de grupoides indutivos satisfaz $\psi(g) * \psi(h) = \psi(gh) * d(\psi(h))$, para todos $(g, h) \in \mathcal{G}_2$ por [27, Definition 2.6]

Por [25, Lemma 4.2(b)] temos que sempre vale $d(\psi(g)) \leq \psi(d(g))$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Além disso, em todo premorfismo de grupoides indutivos temos que se $e \in \mathcal{G}_0$, $g \in \mathcal{G}$ são tais que $e \leq d(g)$, então $d(\psi(g|e)) = \psi(e) \wedge d(\psi(g))$ por [27, Definition 2.6]. Analogamente podemos ver que $r(\psi(e|g)) = \psi(e) \wedge r(\psi(g))$, para todos $g \in \mathcal{G}$, $e \in \mathcal{G}_0$ com $e \leq r(g)$.

Todo semigrupo inverso S possui uma ordem parcial natural $\preceq_S$ dada por $s \preceq_S t$ se, e somente se, existe um idempotente $e \in E(S)$ tal que $s = te$. Por abuso de notação, para qualquer semigrupo inverso abandonaremos o subíndice e usaremos o símbolo $\preceq$ para denotar a ordem parcial natural.

Definição 1.1.9. Sejam S e T semigrupos inversos.

(a) [37, p. 30] Dizemos que uma aplicação $\varphi : S \to T$ é um *homomorfismo de semigrupos inversos* se $\varphi(st) = \varphi(s)\varphi(t)$, para todos $s, t \in S$.

(b) [30, p. 19] Uma aplicação $\psi : S \to T$ é dita um *premorfismo de semigrupos inversos* se valem, para todos $s, t \in S$,

(i) $\psi(s)\psi(t) \preceq \psi(st)$;

(ii) $\psi(s)^{-1} = \psi(s^{-1})$;

(iii) Se $s \preceq t$, então $\psi(s) \preceq \psi(t)$.

O Teorema Ehresmann-Schein-Nambooripad [37, Theorem 4.1.8] prova que a categoria de grupoides indutivos e morfismos de grupoides indutivos e a categoria de semigrupos inversos e morfismos de semigrupos inversos são isomorfas. Daqui em diante, nos referiremos a esse teorema como Teorema ESN. Embora Lawson enuncie um Teorema ESN para o que ele chama de premorfismos de semigrupos inversos, lembramos a leitora e o leitor de que o conceito aqui apresentado de premorfismo de semigrupos inversos equivale ao conceito de $\wedge$-premorfismo ordenado de Hollings [30] para que possamos modelar ações parciais de semigrupo inverso. Portanto, o segundo item do nosso Teorema ESN é precisamente a generalização do Teorema ESN que Hollings provou.

Teorema 1.1.10 (ESN). *(i) [37, Theorem 4.1.8] A categoria de grupoides indutivos e homomorfismos indutivos e a categoria de semigrupos inversos e homomorfismos são isomorfas.*

(ii) [30, Theorem 6.1] A categoria de grupoides indutivos e premorfismos e a categoria de semigrupos inversos e premorfismos são isomorfas.

Outras classes de grupoides ordenados se relacionam naturalmente com diversas outras estruturas via teoremas do tipo ESN. Um exemplo pode ser encontrado em [27, Theorem 5.6], para semigrupos de restrição unilaterais - semigrupos sem noção de inverso, mas com uma noção de identidades laterais - e constelações indutivas - estruturas que generalizam categorias de forma unilateral. Outra generalização do Teorema ESN aparece em [17, Theorem 3.16, Corollary 3.18], para o caso de semigrupoides inversos - estrutura que generaliza semigrupos inversos para o caso de operação binária parcialmente definida ao invés da operação totalmente definida - e grupoides localmente indutivos, isto é, grupoides ordenados onde $\mathcal{G}_0$ é uma união disjunta de semirreticulados inferiores.

Vamos ainda lembrar o leitor e a leitora da definição de ação parcial de grupoide ordenado em um anel.

Definição 1.1.11. Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide ordenado e A um anel. Dizemos que $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g\in\mathcal{G}}$ é uma *ação parcial* de $\mathcal{G}$ em A se $A_g \lhd A_{r(g)} \lhd A$, $\alpha_g : A_{g^{-1}} \to A_g$ é um isomorfismo de anéis e

(P1) $\alpha_e = \mathrm{Id}_{A_e}$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$, e $A = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} A_e$;

(P2) $\alpha_h^{-1}(A_{g^{-1}} \cap A_h) \subset A_{(gh)^{-1}}$, para todo $(g,h) \in \mathcal{G}_2$;

(P3) $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$, para todos $(g,h) \in \mathcal{G}_2, x \in \alpha_h^{-1}(A_{g^{-1}} \cap A_h)$.

Naturalmente, uma ação parcial é dita *global* se $A_g = A_{r(g)}$, para todo $g \in \mathcal{G}$.

Observação 1.1.12. Note que a condição (P1) pede que $A = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} A_e$, que não foi exigida na definição de ação parcial de grupoide originalmente apresentada em [8], mas sem ela não podemos dizer que a definição de ação parcial de grupoide generaliza a definição de ação parcial de grupo. De fato, dado um grupo G e um anel A, dizemos que G age parcialmente em A via $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g\in G}$ se, para todo $g \in G$, $A_g \lhd A$, $\alpha_g : A_{g^{-1}} \to A_g$ é um isomorfismo de anéis e

(P1') $A_{1_G} = A$ e $\alpha_{1_G} = \mathrm{Id}_A$;

(P2') $\alpha_h^{-1}(A_{g^{-1}} \cap A_h) \subset A_{(gh)^{-1}}$, para todos $g,h \in G$;

(P3') $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$, para todos $g, h \in G$, $x \in \alpha_h^{-1}(A_{g^{-1}} \cap A_h)$.

Neste caso, a condição (P1) generaliza a condição (P1').

Proposição 1.1.13. *[8, Lemma 1.1] Seja $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g \in \mathcal{G}}$ uma ação parcial do grupoide ordenado $\mathcal{G}$ em um anel A. Então valem:*

(i) $\alpha_g^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$, para todo $g \in \mathcal{G}$;

(ii) $\alpha_g(A_{g^{-1}} \cap A_h) = A_g \cap A_{gh}$, para todos $(g, h) \in \mathcal{G}_2$.

Seja $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g \in \mathcal{G}}$ uma ação parcial do grupoide ordenado $\mathcal{G}$ num anel A. Dizemos que α é *pré-unitária* se todo A_e for um anel unitário com identidade 1_e central e idempotente, de forma que $A_e = A1_e = 1_eA$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$. Dizemos que α é *unitária* se A_g for um anel unitário com identidade 1_g central e idempotente, para todo $g \in \mathcal{G}$.

Um anel A possui *unidades locais* se existe um subconjunto $E \subseteq A$ de idempotentes centrais tal que para todo $a \in A$ existe $e \in E$ tal que $ea = a$. Note que a condição (P1) implica que se existe uma ação parcial pré-unitária de $\mathcal{G}$ em A, então A possui unidades locais, mas não é necessariamente unitário a menos que $\mathcal{G}_0$ seja um conjunto finito.

Dizemos que α é *ortogonal* [36, Definition 2.7] se valer

(PO) $A = \prod_{e \in \mathcal{G}_0} A_e$.

A definição de ação parcial ortogonal também já apareceu em [10] como ação parcial *cheia*.

Dizemos que α é uma *ação parcial ordenada* [7, Proposition 2.1] se vale

(PW) Se $g \leq h$, então $A_g \subseteq A_h$ e $\alpha_g = \alpha_h|_{A_g}$.

Seja $\mathcal{G}$ um grupoide ordenado. Sejam $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g \in \mathcal{G}}$, $\alpha' = (A'_g, \alpha'_g)_{g \in \mathcal{G}}$ duas ações parciais de $\mathcal{G}$ nos anéis A e A', respectivamente. Um *morfismo* $\psi : \alpha \to \alpha'$ é um conjunto de homomorfismos de anéis $\psi = \{\psi_e : A_e \to A'_e\}_{e \in \mathcal{G}_0}$ tais que, para todo $g \in \mathcal{G}$,

(i) $\psi_{r(g)}(A_g) \subseteq A'_g$;

(ii) $\alpha'_g(\psi_{d(g)}(a)) = \psi_{r(g)}(\alpha_g(a))$, para todo $a \in A_{g^{-1}}$.

Denotamos por $\mathsf{Par}_{\mathcal{G}}$ a categoria cujos objetos são ações parciais de $\mathcal{G}$ em anéis e os morfismos são morfismos de ações parciais, como acima definido. Denotamos por $\mathsf{ParO}_{\mathcal{G}}$ a subcategoria de $\mathsf{Par}_{\mathcal{G}}$ cujos objetos são ações parciais ordenadas de $\mathcal{G}$ em anéis e os morfismos são morfismos de ações parciais que também satisfazem

(iii) Se $e, f \in \mathcal{G}_0$ são tais que $e \leq f$, então $\psi_e(A_e) \subseteq \psi_f(A_f)$.

Dizemos que duas ações parciais $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g\in\mathcal{G}}$ e $\alpha' = (A'_g, \alpha'_g)_{g\in\mathcal{G}}$ (ordenadas) são *equivalentes* se existe um morfismo de ações parciais (ordenadas) $\psi : \alpha \to \alpha'$ tal que ψ_e é um isomorfismo de anéis, para todo $g \in \mathcal{G}$.

A condição (iii) está sendo introduzida nesta tese, e garante o bom comportamento de um morfismo em relação à ordem parcial. As condições (i) e (ii) não levam em consideração a ordem parcial, de forma que se consegue obter uma equivalência entre uma ação parcial ordenada e uma ação parcial não ordenada, simplesmente ignorando a ordem, mas esta equivalência não seria de ações parciais ordenadas, apenas de ações parciais. Vejamos um exemplo abaixo:

Exemplo 1.1.14. Seja $\mathcal{G} = \{x, y, z\} = \mathcal{G}_0$ um grupoide trivial de três identidades com a ordem parcial $x \leq y$. Considere R um anel comutativo e $A = Re_1 \oplus Re_2 \oplus Re_3$, onde e_1, e_2 e e_3 são idempotentes dois a dois ortogonais tais que $e_1 + e_2 + e_3 = 1_A$. Definimos as ações $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g\in\mathcal{G}}$, $\beta = (B_g, \beta_g)_{g\in\mathcal{G}}$ por

$$\begin{aligned} A_x &= Re_1, & A_y &= Re_1 \oplus Re_2, & A_z &= Re_3, \\ B_x &= Re_3, & B_y &= Re_1 \oplus Re_2, & B_z &= Re_3, \end{aligned}$$

$\alpha_g = \mathrm{id}_{A_g}$ e $\beta_g = \mathrm{id}_{B_g}$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Considere $\varphi = \{\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z\}$, onde $\varphi_x : A_x \to B_x$ é o isomorfismo definido por $re_1 \mapsto re_3$, $\varphi_y : A_y \to B_y$ é tal que $\varphi_y = \mathrm{id}_{Re_1\oplus Re_2}$ e $\varphi_z = \mathrm{id}_{Re_3}$. Claramente φ é uma equivalência de ações, mas α é uma ação ordenada enquanto β não o é. Isso se deve ao fato de que $\varphi_x(A_x) \nsubseteq \varphi_y(A_y)$.

Definição 1.1.15. Um morfismo que satisfaz as condições (i)-(iii) acima descritas será dito um *morfismo de ações parciais ordenadas.*

Como definido anteriormente, uma ação global de $\mathcal{G}$ em A é uma ação parcial tal que $A_g = A_{r(g)}$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Analogamente, definimos ações globais ordenadas.

Dada uma categoria $\mathcal{C}$, dizemos que uma subcategoria $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ é *cheia* se dados A, B objetos de D quaisquer, temos que $\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(A, B) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, ou seja, os morfismos entre A e B em $\mathcal{D}$ são precisamente os morfismos entre A e B em $\mathcal{C}$. Denotaremos por $\mathsf{A}_{\mathcal{G}}$ a subcategoria cheia de $\mathsf{Par}_{\mathcal{G}}$ onde os objetos são ações globais de $\mathcal{G}$ em A, que é cheia pois a diferença entre morfismo de ação global e morfismo de ação parcial reside apenas nos objetos domínio e contradomínio. Além disso, $\mathsf{AO}_{\mathcal{G}}$ denotará a subcategoria cheia de $\mathsf{ParO}_{\mathcal{G}}$ cujos objetos são ações globais ordenadas de $\mathcal{G}$ em A e os morfismos são morfismos de ações parciais ordenadas.

Definição 1.1.16. [7, p. 509] Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide ordenado e $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g\in\mathcal{G}}$ um ação parcial ordenada de $\mathcal{G}$ em um anel A. Definimos o *skew-anel parcial de grupoide* $A \star_\alpha \mathcal{G}$

por

$$A \star_\alpha \mathcal{G} = \left\{ \sum_{g \in \mathcal{G}}^{\text{finita}} a_g \delta_g : a_g \in A_g \right\} = \bigoplus_{g \in \mathcal{G}} A_g \delta_g,$$

onde cada δ_g é um símbolo. Podemos considerar a adição componente a componente usual e a multiplicação

$$(a_g \delta_g)(b_h \delta_h) = \begin{cases} \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g) b_h) \delta_{gh}, & \text{se } (g, h) \in \mathcal{G}_2, \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{cases}$$

estendida linearmente.

Temos que $A \star_\alpha \mathcal{G}$ é um anel não necessariamente associativo nem unitário. Pela discussão em [7, Propostion 3.3], se $\mathcal{G}_0$ é finito e α é pré-unitária, então $A \star_\alpha \mathcal{G}$ é unitário com unidade

$$1_{A \star_\alpha \mathcal{G}} = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} 1_e.$$

Além disso, também em [7, Propostion 3.1] foi provado que $A \star_\alpha \mathcal{G}$ é associativo sempre que cada ideal A_g é (L, R)-associativo. Por [18, Proposition 2.6], se A é um anel semiprimo, então $A \star_\alpha \mathcal{G}$ é associativo.

Definição 1.1.17. [34, Definição 1.2.17] Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide ordenado e $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g \in \mathcal{G}}$ uma ação parcial ordenada de $\mathcal{G}$ em um anel A tal que $A \star_\alpha \mathcal{G}$ é associativo. Definimos o ideal N de $A \star_\alpha \mathcal{G}$ como

$$N = \langle a\delta_g - a\delta_h : g \leq h, a \in A_g \subseteq A_h \rangle.$$

Definimos, então, o *skew-anel grupoide ordenado parcial* $A \star_\alpha^o \mathcal{G}$ como

$$A \star_\alpha^o \mathcal{G} = \frac{A \star_\alpha \mathcal{G}}{N}.$$

1.2 Globalização ordenada

Nesta seção, começaremos a apresentar os resultados originais desenvolvidos nessa tese. Inicialmente, mostraremos condições para a existência de uma globalização ordenada de uma ação parcial ordenada de um grupoide ordenado em um anel comutativo. A principal diferença entre globalização e globalização ordenada é que a primeira não necessariamente é uma ação ordenada, enquanto a segunda o é. Entretanto, essa construção não garante a unicidade da globalização ordenada. Como essa é uma propriedade importante no estudo de ações parciais, trabalharemos para obter uma condição para a unicidade dessa globalização ordenada. Finalmente, para encerrar a seção, aplicaremos os resultados obtidos para o caso de semigrupos inversos via o Teorema ESN.

1.2.1 Existência

Seja $\beta = (B_g, \beta_g)_{g \in \mathcal{G}}$ uma ação global ordenada de um grupoide ordenado $\mathcal{G}$ em um anel B. Seja A um ideal de B. Vamos construir uma ação parcial ordenada α de $\mathcal{G}$ em A a partir de β. Considere, para todo $e \in \mathcal{G}_0$, $A_e = A \cap B_e$, que é um ideal de A e de B. Para todo $g \in \mathcal{G}$, defina

$$A_g = A_{r(g)} \cap \beta_g(A_{d(g)}),$$

que é um ideal de $A_{r(g)}$, e

$$\alpha_g = \beta_g|_{A_{g^{-1}}},$$

que é um isomorfismo de anéis.

Note que se $e \leq f$ são elementos de $\mathcal{G}_0$, então $B_e \subseteq B_f$, o que implica $A_e = A \cap B_e \subseteq A \cap B_f = A_f$. Agora, se $g \leq h$, então

$$\begin{aligned} A_g &= A_{r(g)} \cap \beta_g(A_{d(g)}) \\ &\subseteq A_{r(h)} \cap \beta_g(A_{d(g)}), && \text{pois } r(g) \leq r(h) \\ &= A_{r(h)} \cap \beta_h(A_{d(g)}), && \text{pois } \beta_g = \beta_h|_{B_{g^{-1}}} \text{ e } A_{d(g)} \subseteq B_{g^{-1}} \\ &\subseteq A_{r(h)} \cap \beta_h(A_{d(h)}), && \text{pois } d(g) \leq d(h) \\ &= A_h, \end{aligned}$$

e dado $a \in A_{g^{-1}}$ arbitrário,

$$\alpha_h(a) = \beta_h(a) = \beta_h|_{B_{g^{-1}}}(a) = \beta_g(a) = \alpha_g(a),$$

de forma que $\alpha_g = \alpha_h|_{A_{g^{-1}}}$.

Portanto, $\alpha = (A_g, \alpha_g)$ é uma ação parcial ordenada de $\mathcal{G}$ em A. Dizemos que α é a *restrição padrão* de β ao ideal A.

Exemplo 1.2.1. Seja $\mathcal{G} = \{s, s^{-1}, r(s), d(s), e\}$ com $\mathcal{G}_0 = \{r(s), d(s), e\}$, $e \leq s$, $e \leq s^{-1}$, $e \leq r(s)$, $e \leq d(s)$.

Sejam R um anel e $B = Re_1 \oplus Re_2 \oplus Re_3$, onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é um conjunto de idempotentes dois a dois ortogonais cuja soma é 1_B e que comutam com os elementos de R.

Defina

$$B_{d(s)} = B_{s^{-1}} = Re_1 \oplus Re_2, \quad B_{r(s)} = B_s = Re_2 \oplus Re_3, \quad B_e = Re_2$$

e $\beta_g = Id_{B_g}$, para todo $g \in \mathcal{G}_0$,

$$\beta_s(ae_1 + be_2) = be_2 + ae_3,$$

e $\beta_{s^{-1}} = \beta_s^{-1}$.

Seja $A = Re_2 \oplus Re_3$. Vamos construir a restrição padrão da ação global ordenada $\beta = (B_g, \beta_g)_{g\in\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$ em B ao ideal A. Temos que

$$A_{r(s)} = A \cap B_{r(s)} = Re_2 \oplus Re_3, \quad A_{d(s)} = A \cap B_{d(s)} = Re_2, \quad A_e = A \cap B_e = Re_2,$$

$$\begin{aligned} A_s &= A_{r(s)} \cap \beta_s(A_{d(s)}) = (Re_2 \oplus Re_3) \cap Re_2 = Re_2, \\ A_{s^{-1}} &= A_{d(s)} \cap \beta_{s^{-1}}(A_{r(s)}) = Re_2 \cap (Re_1 \oplus Re_2) = Re_2, \end{aligned}$$

e

$$\alpha_g = \beta_g|_{A_{g^{-1}}} = Id_{A_{g^{-1}}}, \text{ para todo } g \in \mathcal{G}.$$

Portanto, $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g\in\mathcal{G}}$ é uma ação parcial ordenada de $\mathcal{G}$ em A.

Observação 1.2.2. Toda ação parcial ordenada $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g\in\mathcal{G}}$ de um grupoide ordenado $\mathcal{G}$ em um anel A obtida através de uma restrição padrão de uma ação ordenada $\beta = (B_g, \beta_g)_{g\in\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$ em um anel B, onde A é ideal de B, satisfaz a seguinte condição: se $e \leq r(g)$, então $A_{(e|g)} = A_e \cap A_g$. De fato,

$$\begin{aligned} A_e \cap A_g &= A_e \cap A_{r(g)} \cap \beta_g(A_{d(g)}) \\ &= A_e \cap \beta_g(A_{d(g)}), && \text{pois } e \leq r(g) \\ &= \beta_g(\beta_{g^{-1}}(A_e)) \cap \beta_g(A_{d(g)}) \\ &= \beta_g(A_{d(g)} \cap \beta_{g^{-1}}(A_e)), && \text{pois } \beta_g \text{ é isomorfismo} \\ &= \beta_g(A_{d(g)} \cap \beta_{(g^{-1}|e)}(A_e)), && \text{pois } \beta_{(g^{-1}|e)} = \beta_{g^{-1}}|_{B_e} \text{ e } A_e \subseteq B_e \\ &= \beta_g(A_{d(g)} \cap B_{r(g^{-1}|e)} \cap \beta_{(g^{-1}|e)}(A_e)), && \text{pois } \beta_{(g^{-1}|e)}(B_e) \subseteq B_{r(g^{-1}|e)} \\ &= \beta_g(A_{d(g)} \cap B_{d(e|g)} \cap \beta_{(g^{-1}|e)}(A_e)), && \text{pois } (g^{-1}|e)^{-1} = (e|g) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \beta_g(A \cap B_{d(g)} \cap B_{d(e|g)} \cap \beta_{(g^{-1}|e)}(A_e)) \\
&= \beta_g(A \cap B_{d(e|g)} \cap \beta_{(g^{-1}|e)}(A_e)), && \text{pois } d(e|g) \leq d(g) \Rightarrow B_{d(e|g)} \subseteq B_{d(g)} \\
&= \beta_g(A_{d(e|g)} \cap \beta_{(g^{-1}|e)}(A_e)) \\
&= \beta_{(e|g)}(A_{d(e|g)} \cap \beta_{(g^{-1}|e)}(A_e)), && \text{pois } \beta_{(e|g)} = \beta_g|_{B_{d(e|g)}} \text{ e } A_{d(e|g)} \subseteq B_{d(e|g)} \\
&= A_e \cap \beta_{(e|g)}(A_{d(e|g)}), && \text{pois } \beta_{(e|g)} \text{ é isomorfismo} \\
&= A_{(e|g)}.
\end{aligned}
$$

Definição 1.2.3. Seja $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g\in\mathcal{G}}$ uma ação parcial ordenada de um grupoide ordenado $\mathcal{G}$ em um anel A. Dizemos que α é uma ação parcial ordenada *forte* se $A_{(e|g)} = A_e \cap A_g$, para todos $g \in \mathcal{G}$, $e \leq r(g)$.

Seja novamente $\beta = (B_g, \beta_g)_{g\in\mathcal{G}}$ uma ação global ordenada de um grupoide ordenado $\mathcal{G}$ em um anel B. Podemos generalizar a construção anterior ao exemplo da seguinte forma: para cada $e \in \mathcal{G}_0$, considere $A_e \subseteq B_e$ um ideal de B, de forma que a inclusão $A_e \subseteq A_f$ seja válida se $e \leq f$ em $\mathcal{G}_0$. Então $A_g = A_{r(g)} \cap \beta_g(A_{d(g)})$ é um ideal de $A_{r(g)}$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Defina agora $\alpha_g = \beta_g|_{A_{g^{-1}}}$, para todo $g \in \mathcal{G}$.

Considere

$$A = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} A_e,$$

que é um ideal de B. De forma completamente análoga ao caso acima, provamos que $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g\in\mathcal{G}}$ é uma ação parcial ordenada de $\mathcal{G}$ em A. Dizemos que α é uma *restrição* de β ao anel A.

Suponha agora que A_e é um ideal de B_e que não necessariamente é um ideal de B. Considere o ideal C_g de B_g dado por

$$C_g = \sum_{r(h)\leq r(g)} \beta_h(A_{d(h)}).$$

Definindo $\gamma_g = \beta_g|_{C_{g^{-1}}}$, temos que $\gamma = (C_g, \gamma_g)_{g\in\mathcal{G}}$ é uma ação global de $\mathcal{G}$ em

$$C = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} C_e,$$

desde que C_e seja um ideal de C, para todo $e \in \mathcal{G}_0$. Neste caso, a restrição de γ ao anel A coincide com α.

Toda restrição padrão é uma restrição, mas a recíproca não é verdadeira. De fato, apresentaremos uma restrição que não é padrão no Exemplo 1.2.6.

Sempre é possível construir várias ações parciais ordenadas a partir de uma dada ação global ordenada usando os algoritmos que vimos acima. A questão que gostaríamos de responder é quando podemos, a partir de uma ação parcial ordenada, construir uma ação global ordenada de forma que a restrição coincida (a menos de equivalências) com a ação parcial ordenada original. Chamamos uma ação global ordenada que satisfaz essas condições de *globalização ordenada*. Embora C_e como na construção acima nem sempre seja um ideal de C, as restrições das globalizações ordenadas que construiremos nos Teoremas 1.2.5 e 1.2.15 sempre satisfarão essa condição, pois coincidirão com a ação parcial ordenada original. Mais formalmente, temos a seguinte definição.

Definição 1.2.4. Seja $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g\in\mathcal{G}}$ uma ação parcial ordenada de um grupoide ordenado $\mathcal{G}$ num anel A. Uma ação global ordenada $\beta = (B_g, \beta_g)_{g\in\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$ em um anel B é dita uma *globalização ordenada* de α se, para todo $e \in \mathcal{G}_0$, existe $\varphi_e : A_e \to B_e$ monomorfismo de anéis tal que

(i) $\varphi_e(A_e)$ é um ideal de B_e;

(ii) $\varphi_{r(g)}(A_g) = \varphi_{r(g)}(A_{r(g)}) \cap \beta_g(\varphi_{d(g)}(A_{d(g)}))$;

(iii) $\beta_g \circ \varphi_{d(g)}(a) = \varphi_{r(g)} \circ \alpha_g(a)$, para todo $a \in A_{g^{-1}}$;

(iv) $B_g = \sum_{r(h)\leq r(g)} \beta_h\left(\varphi_{d(h)}(A_{d(h)})\right)$.

Agora classificaremos as ações parciais pré-unitárias ordenadas globalizáveis, mostrando que são precisamente as ações parciais ordenadas unitárias. A demonstração desse teorema consistirá em construir um anel e uma ação global ordenada a partir da nossa ação parcial ordenada unitária inicial e mostrar que essa ação global é a globalização ordenada desejada.

Teorema 1.2.5. *Seja $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g\in\mathcal{G}}$ uma ação parcial ordenada pré-unitária de um grupoide ordenado $\mathcal{G}$ num anel A. Então α admite globalização ordenada β se, e somente se, α for uma ação parcial ordenada unitária.*

Demonstração. ($\Rightarrow$): Segue diretamente de que

$$\varphi_{r(g)}(A_g) = \varphi_{r(g)}(A_{r(g)}) \cap \beta_g(\varphi_{d(g)}(A_{d(g)})),$$

pois $A_{r(g)}$ e $A_{d(g)}$ são anéis unitários, β_g é um isomorfismo e $\varphi_{r(g)}$ e $\varphi_{d(g)}$ são monomorfismos.

($\Leftarrow$): Assuma que cada A_g é um anel unitário com unidade 1_g central e idempotente. Seja $\mathcal{F} := \mathcal{F}(\mathcal{G}, A)$ o anel de todas as aplicações $\mathcal{G} \to A$ e considere

$$\mathcal{G}_g = \{h \in \mathcal{G} : r(h) \leq r(g)\}.$$

Defina $F_g = \{f \in \mathcal{F} : f(h) = 0, \text{ para todo } h \notin \mathcal{G}_g\}$. Como $\mathcal{G}_g = \mathcal{G}_{r(g)}$, segue que $F_g = F_{r(g)}$. Se $h \leq g$, então $r(h) \leq r(g)$, de onde segue que $F_h \subseteq F_g$.

Obviamente a função nula 0 é um elemento de F_g, para todo $g \in \mathcal{G}$. Se $f_1, f_2 \in F_g$, então

$$(f_1 + f_2)(h) = f_1(h) + f_2(h) = 0 + 0 = 0,$$

para todo $h \notin \mathcal{G}_g$, isto é, $f_1 + f_2 \in F_g$. Se $f \in F_g$ e $p \in \mathcal{F}$, então

$$(fp)(h) = f(h)p(h) = 0p(h) = 0$$

e analogamente vemos que $(pf)(h) = 0$, para todo $h \notin \mathcal{G}_g$. Assim provamos que F_g é de fato um ideal de $\mathcal{F}$.

Daqui em diante, dados $f \in \mathcal{F}$ e $h \in \mathcal{G}$, denotaremos $f(h) := f|_h$.

Para $g \in \mathcal{G}$ e $f \in F_{g^{-1}}$, defina $\gamma_g : F_{g^{-1}} \to F_g$ por

$$\gamma_g(f)|_h = \begin{cases} f((g^{-1}|r(h))h), & \text{se } h \in \mathcal{G}_g, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que se $h \in \mathcal{G}_g$, então $r(h) \leq r(g) = d(g^{-1})$, e portanto a restrição $(g^{-1}|r(h))$ está definida, bem como o produto $(g^{-1}|r(h))h$. Além disso, $r((g^{-1}|r(h))h) = r(g^{-1}|r(h)) \leq r(g^{-1})$, de forma que γ_g está bem definida, pois $\gamma_g(f) \in F_g$. É fácil provar que γ_g é homomorfismo de anéis.

Para $g \in \mathcal{G}$, $f \in F_{g^{-1}}$ e $h \in \mathcal{G}_{g^{-1}}$, temos

$$\begin{aligned}
\gamma_{g^{-1}} \circ \gamma_g(f)|_h &= \gamma_g(f)|_{(g|r(h))h} \\
&= f((g^{-1}|r(g|r(h)))(g|r(h))h) \\
&= f((g^{-1}g|r(h))h), && \text{pelo Lema 1.1.3} \\
&= f((d(g)|r(h))h) \\
&= f(r(h)h) = f(h), && \text{pois } r(h) \leq d(g)
\end{aligned}$$

e similarmente $\gamma_g \circ \gamma_{g^{-1}}(f)|_h = f(h)$. Assim, temos que γ_g é um isomorfismo de anéis.

Note que $\gamma_e = I_{F_e}$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$ e

$$\begin{aligned}
\gamma_{gh}(f)|_k &= f((h^{-1}g^{-1}|r(k))k) \\
&= f((h^{-1}|r(g^{-1}|r(k)))(g^{-1}|r(k))k), && \text{pelo Lema 1.1.3} \\
&= \gamma_g \circ \gamma_h(f)|_k,
\end{aligned}$$

para todos $f \in F_{h^{-1}}$, $k \in \mathcal{G}_g$ e $(g, h) \in \mathcal{G}_2$. Isso prova que $\gamma = (F_g, \gamma_g)_{g \in \mathcal{G}}$ é uma ação global de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{F}$.

Para vermos que γ é uma ação ordenada, note que se $h \leq g$ em $\mathcal{G}$ e $f \in F_{h^{-1}}$, então

$$\gamma_g(f)|_k = f((g^{-1}|r(k))k) \overset{(*)}{=} f((h^{-1}|r(k))k) = \gamma_h(f)|_k,$$

isto é, $\gamma_h = \gamma_g|_{F_{h^{-1}}}$. A igualdade $(*)$ segue da unicidade das restrições, pois $(h^{-1}|r(k)) \leq h^{-1} \leq g^{-1}$ e $d(h^{-1}|r(k)) = r(k)$. Logo, γ é de fato uma ação global ordenada de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{F}$.

Agora, para todo $e \in \mathcal{G}_0$, defina $\varphi_e : A_e \to F_e$ por

$$\varphi_e(a)|_h = \begin{cases} \alpha_{h^{-1}}(a1_h), \text{ se } r(h) = e, \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases}$$

para todo $a \in A_e, h \in \mathcal{G}$. Temos que $\varphi_e(a)|_e = \alpha_e(a1_e) = a$, de onde concluímos que φ_e é um monomorfismo, para todo $e \in \mathcal{G}_0$.

Seja B_g o subanel de F_g gerado por

$$\bigcup_{r(h) \leq r(g)} \gamma_h(\varphi_{d(h)}(A_{d(h)})),$$

para todo $g \in \mathcal{G}$. Note que $\varphi_{d(g)}(A_{d(g)}) \subseteq B_{d(g)}$, para todo $g \in \mathcal{G}$, e que $B_g \subseteq F_g$.

Considere, então,

$$B = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} B_e.$$

Vamos definir, para todo $g \in \mathcal{G}$,

$$\beta_g := \gamma_g|_{B_{g^{-1}}}.$$

Por construção, $\beta = (B_g, \beta_g)_{g \in \mathcal{G}}$ é uma ação global ordenada de $\mathcal{G}$ em B. O próximo passo será mostrar que β é uma globalização ordenada de α.

Começaremos verificando o item (iii). Sejam $g \in \mathcal{G}$, $a \in A_{g^{-1}}$ e $h \in \mathcal{G}$. Se $r(h) = r(g)$, então

$$\varphi_{r(g)}(\alpha_g(a))|_h = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)1_h)$$

e

$$\beta_g(\varphi_{d(g)}(a))|_h = \varphi_{d(g)}(a)|_{g^{-1}h} = \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h}).$$

Como $a \in A_{g^{-1}}$,

$$\begin{aligned}
\beta_g(\varphi_{d(g)}(a)) &= \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h}) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}h}1_{g^{-1}})), && \text{pois } a1_{g^{-1}h} \in A_{g^{-1}} \cap A_{g^{-1}h} \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}})\alpha_g(1_{g^{-1}h}1_{g^{-1}})), && \text{pois } \alpha_g \text{ é isomorfismo} \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}})1_g1_h), && \text{pelo item (ii) da Proposição 1.1.13} \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}})1_h).
\end{aligned}$$

No segundo caso, se $r(g) \neq r(h)$, temos que

$$\varphi_{r(g)}(\alpha_g(a))|_h = 0.$$

Por outro lado, se $r(h) < r(g)$,

$$\beta_g(\varphi_{d(g)}(a))|_h = \varphi_{d(g)}(a)|_{(g^{-1}|r(h))h} = \begin{cases} \alpha_{h^{-1}(r(h)|g)}(a1_{(g^{-1}|r(h))h}), & \text{se } r(g^{-1}|r(h)) = d(g), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que se $r(g^{-1}|r(h)) = d(g)$, então como $g^{-1} \leq g^{-1}$ e $r(g^{-1}) = d(g)$, pela unicidade das correstrições temos que $g^{-1} = (d(g)|g^{-1}) = (d(g)|(g^{-1}|r(h))) = (g^{-1}|r(h))$. Mas isso implicaria que $r(g) = d(g^{-1}) = d(g^{-1}|r(h)) = r(h)$, uma contradição. Portanto, $d(g^{-1}|r(h)) < d(g^{-1})$. Logo,

$$\beta_g(\varphi_{d(g)}(a))|_h = 0.$$

Claramente quando $r(g) < r(h)$ ou $r(g)$ e $r(h)$ são incomparáveis, a igualdade acima também vale, encerrando a verificação de (iii).

O próximo passo é provar (ii). Sejam $g \in \mathcal{G}$ e $c \in \varphi_{r(g)}(A_{r(g)}) \cap \beta_g(\varphi_{d(g)}(A_{d(g)}))$. Então existem $a \in A_{r(g)}$, $b \in A_{d(g)}$ tais que

$$c = \varphi_{r(g)}(a) = \beta_g(\varphi_{d(g)}(b)).$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
a = a1_{r(g)} = \alpha_{r(g)^{-1}}(a1_{r(g)}) = \varphi_{r(g)}(a)|_{r(g)} &= \beta_g(\varphi_{d(g)}(b))|_{r(g)} \\
&= \varphi_{d(g)}(b)|_{g^{-1}} = \alpha_g(b1_{g^{-1}}) \in A_g,
\end{aligned}$$

de forma que

$$c = \varphi_{r(g)}(a) \in \varphi_{r(g)}(A_g).$$

Reciprocamente, se $c \in \varphi_{r(g)}(A_g)$, então $c = \varphi_{r(g)}(a)$, para algum $a \in A_g$. Tomando $b = \alpha_{g^{-1}}(a) \in A_{g^{-1}}$, temos

$$\beta_g(\varphi_{d(g)}(b)) \overset{\text{(iii)}}{=} \varphi_{r(g)}(\alpha_g(b)) = \varphi_{r(g)}(a).$$

Logo, $c \in \varphi_{r(g)}(A_g) \cap \beta_g(\varphi_{d(g)}(A_{g^{-1}})) \subseteq \varphi_{r(g)}(A_{r(g)}) \cap \beta_g(\varphi_{d(g)}(A_{d(g)}))$, como gostaríamos.

Resta-nos provar que $\varphi_e(A_e)$ é um ideal de B_e, para todo $e \in \mathcal{G}_0$. Para isso, é suficiente provarmos que

$$\varphi_e(b)\beta_h(\varphi_{d(h)}(a)), \beta_h(\varphi_{d(h)}(a))\varphi_e(b) \in \varphi_e(A_e),$$

para todos $h \in \mathcal{G}_e, a \in A_{d(h)}$ e $b \in A_e$. Dado $k \in \mathcal{G}$, temos duas possibilidades a considerar:
Caso (1): $r(k) \leq r(h) \leq e$.

Note inicialmente que

$$\beta_h(\varphi_{d(h)}(a))\varphi_e(b)|_k = \beta_h(\varphi_{d(h)}(a))|_k\varphi_e(b)|_k = \varphi_{d(h)}(a)|_{(h^{-1}|_{r(k)})k}\varphi_e(b)|_k.$$

Temos que

$$\varphi_e(b)|_k = \begin{cases} \alpha_{k^{-1}}(b1_k), \text{ se } r(k) = e, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Como $r(k) = e$ e $r(k) \leq r(h) \leq e$ implicam $r(k) = r(h) = e$, temos que

$$\begin{aligned}
\beta_h(\varphi_{d(h)}(a))\varphi_e(b)|_k &= \begin{cases} \alpha_{k^{-1}h}(a1_{h^{-1}k})\alpha_{k^{-1}}(b1_k), \text{ se } r(k) = r(h) = e, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \alpha_{k^{-1}h}(a1_{h^{-1}k})1_{k^{-1}h}1_{k^{-1}}\alpha_{k^{-1}}(b1_k), \text{ se } r(k) = r(h) = e, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases} \\
&\overset{(*)}{=} \begin{cases} \alpha_{k^{-1}h}(a1_{h^{-1}k})\alpha_{k^{-1}h}(1_{h^{-1}k}1_{h^{-1}})\alpha_{k^{-1}}(b1_k), \text{ se } r(k) = r(h) = e, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \alpha_{k^{-1}h}(a1_{h^{-1}}1_{h^{-1}k})\alpha_{k^{-1}}(b1_k), \text{ se } r(k) = r(h) = e, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \alpha_{k^{-1}}(\alpha_h(a1_{h^{-1}})b1_k), \text{ se } r(k) = r(h) = e, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases} \\
&= \varphi_e(\alpha_h(a1_{h^{-1}})b)|_k,
\end{aligned}$$

onde $(*)$ vale pois item (ii) da Proposição 1.1.13 implica que $\alpha_{k^{-1}h}(A_{h^{-1}k} \cap A_{h^{-1}}) = A_{k^{-1}h} \cap A_{k^{-1}}$.

Caso (2): $r(h) \leq r(k) \leq e$ ou $r(k)$ e $r(h)$ incomparáveis.

Neste caso,

$$\beta_h(\varphi_{d(h)}(a))\varphi_e(b)|_k = \beta_h(\varphi_{d(h)}(a))|_k\varphi_e(b)|_k = 0 \cdot \varphi_e(b)|_k = 0,$$

diretamente da definição de β.

A verificação de que $\varphi_e(b)\beta_h(\varphi_{d(h)}(a)) \in \varphi_e(A_e)$ é feita de forma completamente análoga, garantindo finalmente que $\varphi_e(A_e)$ é um ideal de B_e.

Uma vez que vale (i), a condição (iv) é automaticamente satisfeita pela construção dos ideais B_g, $g \in \mathcal{G}$.

Portanto, β é de fato uma globalização ordenada para a ação parcial ordenada α, finalizando a demonstração. $\square$

Exemplo 1.2.6. Seja $\mathcal{G} = \{m_0, m_1, n_0, n_1\}$, onde $\mathcal{G}_0 = \{m_0, n_0\}$, $m_1^2 = m_0$, $n_1^2 = n_0$, $m_0 \leq n_0$ e $m_1 \leq n_1$. Considere R um anel unitário e $A = Re_1 \oplus Re_2 \oplus Re_3 \oplus Re_4$, onde os e_i's são idempotentes dois a dois ortogonais que comutam com os elementos de R e cuja soma é 1_A. Defina

$$A_{m_0} = A_{n_1} = A_{n_0} = A, \qquad A_{m_1} = Re_1 \oplus Re_3,$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_{n_1}(ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4) &= ce_1 + de_2 + ae_3 + be_4, \\ \alpha_{m_1}(ae_1 + ce_3) &= ce_1 + ae_3, \\ \alpha_e &= I_{A_e}, \text{ para todo } e \in \mathcal{G}_0, \end{aligned}$$

para todos $a, b, c, d \in R$.

Então $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g \in \mathcal{G}}$ é uma ação parcial ordenada unitária de $\mathcal{G}$ no anel A. Vamos construir uma globalização ordenada para α seguindo o algoritmo do teorema acima.

Considere o anel $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{G}, A)$. Temos que $\mathcal{F} \simeq A^4$ via

$$f \in \mathcal{F} \mapsto (f(m_0), f(m_1), f(n_0), f(n_1)).$$

Já que

$$\mathcal{G}_{n_0} = \mathcal{G}_{n_1} = \mathcal{G} \text{ e } \mathcal{G}_{m_0} = \mathcal{G}_{m_1} = \{m_0, m_1\},$$

podemos afirmar que

$$\begin{aligned} F_{n_i} &= \{f \in \mathcal{F} : f(g) = 0, \text{ para todo } g \notin \mathcal{G}_{n_i}\} \simeq \mathcal{F}, \\ F_{m_i} &= \{f \in \mathcal{F} : f(g) = 0, \text{ para todo } g \notin \mathcal{G}_{m_i}\} \simeq A \times A \times 0 \times 0, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$. Assim,

$$\begin{aligned} \gamma_{n_1}(a, b, c, d) &= (b, a, d, c), \\ \gamma_{m_1}(a, b, 0, 0) &= (b, a, 0, 0), \end{aligned}$$

e $\gamma_e = I_{F_e}$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$.

Seja $u = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 \in A$, onde $a, b, c, d \in R$. Temos que

$$\begin{aligned} \varphi_{n_0}(u) &= (0, 0, \alpha_{n_0}(u1_{n_0}), \alpha_{n_1}(u1_{n_1})) \\ &= (0, 0, u, ce_1 + de_2 + ae_3 + be_4) \end{aligned}$$

e analogamente

$$\varphi_{m_0}(u) = (u, ce_1 + ae_3, 0, 0).$$

Sejam agora $u = \sum u_i e_i$, $v = \sum v_i e_i$, $w = \sum w_i e_i$ e $z = \sum z_i e_i$ elementos de A, com $u_i, v_i, w_i, z_i \in R$, para todo $1 \le i \le 4$. Como

$$\begin{aligned} &\gamma_{m_0} \circ \varphi_{m_0}(u) + \gamma_{m_1} \circ \varphi_{m_0}(v) + \gamma_{n_0} \circ \varphi_{n_0}(w) + \gamma_{n_1} \circ \varphi_{n_0}(z) \\ &= \gamma_{m_0}(u, u_3e_1 + u_1e_3, 0, 0) + \gamma_{m_1}(v, v_3e_1 + v_1e_3, 0, 0) \\ &+ \gamma_{n_0}(0, 0, w, w_3e_1 + w_4e_2 + w_1e_3 + w_2e_4) + \gamma_{n_1}(0, 0, z, z_3e_1 + z_4e_2 + z_1e_3 + z_2e_4) \\ &= (u, u_3e_1 + u_1e_3, 0, 0) + (v_3e_1 + v_1e_3, v, 0, 0) \\ &+ (0, 0, w, w_3e_1 + w_4e_2 + w_1e_3 + w_2e_4) + (0, 0, z_3e_1 + z_4e_2 + z_1e_3 + z_2e_4, z) \\ &= ((u_1 + v_3)e_1 + u_2e_2 + (u_3 + v_1)e_3 + u_4e_4, (v_1 + u_3)e_1 + v_2e_2 + (v_3 + u_1)e_3 + v_4e_4, \\ &(w_1 + z_3)e_1 + (w_2 + z_4)e_2 + (w_3 + z_1)e_3 + (w_4 + z_2)e_4, \\ &(w_3 + z_1)e_1 + (w_4 + z_2)e_2 + (w_1 + z_3)e_3 + (w_2 + z_4)e_4), \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} B_{n_0} = \{(&r_1e_1 + r_2e_2 + r_3e_3 + r_4e_4, r_3e_1 + r_5e_2 + r_1e_3 + r_6e_4, \\ &r_7e_1 + r_8e_2 + r_9e_3 + r_{10}e_4, r_9e_1 + r_{10}e_2 + r_7e_3 + r_8e_4) \\ &: r_i \in R, 1 \le i \le 10\}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$B_{m_0} = \{(r_1e_1 + r_2e_2 + r_3e_3 + r_4e_4, r_3e_1 + r_5e_2 + r_1e_3 + r_6e_4) : r_i \in R, 1 \leq i \leq 6\}.$$

Portanto, definindo $\beta_g = \gamma_g|_{B_{g^{-1}}}$, para todo $g \in \mathcal{G}$, obtemos que $\beta = (B_g, \beta_g)_{g\in\mathcal{G}}$ é uma globalização ordenada de α.

Note que α é um exemplo de restrição que não é uma restrição padrão, pois se fosse deveríamos ter $A_{m_1} = A_{m_0} \cap A_{n_1}$, pela Observação 1.2.2. Mas isso não ocorre, pois $A_{m_0} \cap A_{n_1} = A_{m_0} \supsetneq A_{m_1}$.

Exemplo 1.2.7. Sejam $\mathcal{G}$, R, B e A como no Exemplo 1.2.1. Vamos aplicar o algoritmo de globalização em α. Considere o anel $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{G}, A)$. Temos que $\mathcal{F} \simeq A^5$ via

$$f \in \mathcal{F} \mapsto (f(s), f(s^{-1}), f(r(s)), f(d(s)), f(e)).$$

Como

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_s = \mathcal{G}_{r(s)} &= \{s, r(s), e\}, \\ \mathcal{G}_{s^{-1}} = \mathcal{G}_{d(s)} &= \{s^{-1}, d(s), e\}, \\ \mathcal{G}_e &= \{e\}, \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} F_s &= \{f \in \mathcal{F} : f(g) = 0, \text{ para todo } g \notin \mathcal{G}_s\} \simeq A \times 0 \times A \times 0 \times A, \\ F_{s^{-1}} &= \{f \in \mathcal{F} : f(g) = 0, \text{ para todo } g \notin \mathcal{G}_{s^{-1}}\} \simeq 0 \times A \times 0 \times A \times A, \\ F_e &= \{f \in \mathcal{F} : f(g) = 0, \text{ para todo } g \notin \mathcal{G}_e\} \simeq 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times A. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \gamma_s(0, a, 0, b, c) &= (b, 0, a, 0, c) \\ \gamma_{s^{-1}}(a, 0, b, 0, c) &= (0, b, 0, a, c) \end{aligned}$$

e $\gamma_g = Id_{F_g}$, para todo $g \in \mathcal{G}_0$.

Além disso, observe que

$$\begin{aligned} \varphi_{r(s)}(ae_2 + be_3) &= (ae_2, 0, ae_2 + be_3, 0, 0), \\ \varphi_{d(s)}(ae_2) &= (0, ae_2, 0, ae_2, 0), \end{aligned}$$

e

$$\varphi_e(ae_2) = (0, 0, 0, 0, ae_2).$$

Dados $ae_2 + be_3 \in A_{r(s)}$, $ce_2 \in A_{d(s)}$, $de_2 \in A_e$, temos que

$$\begin{aligned}
&\gamma_{r(s)}(\varphi_{r(s)}(ae_2 + be_3)) + \gamma_s(\varphi_{d(s)}(ce_2)) + \gamma_e(\varphi_e(de_2)) \\
&= \gamma_{r(s)}(ae_2, 0, ae_2 + be_3, 0, 0) + \gamma_s(0, ce_2, 0, ce_2, 0) + \gamma_e(0, 0, 0, 0, de_2) \\
&= (ae_2, 0, ae_2 + be_3, 0, 0) + (ce_2, 0, ce_2, 0, 0) + (0, 0, 0, 0, de_2) \\
&= ((a + c)e_2, 0, (a + c)e_2 + be_3, 0, de_2),
\end{aligned}$$

de forma que

$$B'_s = \{(ae_2, 0, ae_2 + be_3, 0, ce_2) : a, b, c \in R\}.$$

Analogamente verificamos que

$$B'_{s^{-1}} = \{(0, ae_2 + be_3, 0, ae_2, 0, ce_2) : a, b, c \in R\}.$$

e

$$B'_e = Re_2(0, 0, 0, 0, 1),$$

de forma que

$$B' = B'_s + B'_{s^{-1}} + B'_e = \{(ae_2, be_2 + ce_3, ae_2 + de_3, be_2, fe_3) : a, b, c, d, f \in R\}.$$

Finalmente, obtemos uma globalização ordenada $\beta' = (B'_g, \beta'_g)_{g \in \mathcal{G}}$ de α. Note que β também é uma globalização ordenada, tomando $\varphi_g = \iota_g : A_g \to B_g$ como a inclusão natural $A_g \mapsto A \cap B_g$, para todo $g \in \mathcal{G}_0$. Entretanto, $\beta' \not\simeq \beta$, pois

$$B_s \simeq R^2 \not\simeq R^3 \simeq B'_s.$$

Dessa forma, temos que a globalização ordenada construída no Teorema 1.2.5 não é necessariamente única a menos de equivalências. Essa não é uma característica comum na literatura, e gostaríamos de explorar em que casos podemos garantir a unicidade de globalizações ordenadas. Na próxima subseção, trabalharemos exatamente com essa questão.

Antes disso, queremos fazer uma nota rápida sobre como os skew-anéis parciais de grupoide ordenado da ação parcial ordenada α e da sua globalização β estão fortemente relacionados. Note que ambos skew-anéis parciais de grupoide ordenado são quocientes e seus elementos são, portanto, classes de equivalência. Por esse motivo utilizaremos a notação $\overline{\sum_{g \in \mathcal{G}} a_g \delta_g}$ para representar a classe de equivalência do elemento $\sum_{g \in \mathcal{G}} a_g \delta_g$. Além disso, para simplificar a notação nos próximos resultados, vamos assumir que $\varphi_e = \iota_e$:

$A_e \to B_e$ é a inclusão usual, de forma que A_e é um ideal de B_e, para todo $e \in \mathcal{G}_0$.

Proposição 1.2.8. *Sejam $\alpha = (A_g, \delta_g)_{g\in\mathcal{G}}$ uma ação parcial ordenada unitária do grupoide ordenado $\mathcal{G}$ em um anel A e $\beta = (B_g, \beta_g)_{g\in\mathcal{G}}$ uma globalização ordenada de α em um anel B. Denotaremos por $R = A \star^o_\alpha \mathcal{G}$ e $T = B \star^o_\beta \mathcal{G}$. Se $\mathcal{G}_0$ é finito,*

(i) $T1_R = \bigoplus_{g\in\mathcal{G}} \overline{\beta_g(A_{d(g)})\delta_g}$;

(ii) $1_R T = \bigoplus_{g\in\mathcal{G}} \overline{A_{r(g)}\delta_{d(g)}}$;

(iii) $1_R T 1_R = R$;

(iv) $T1_R T = T$.

Demonstração. Note inicialmente que os skew-anéis parciais de grupoide ordenado $A \star_\alpha \mathcal{G}$ e $B \star_\beta \mathcal{G}$ são associativos por [7, Proposition 3.1] e [18, Proposition 2.6], pois cada um dos A_g's e B_g's possui unidades locais e é, portanto, idempotente. Desta forma, R e T estão definidos de acordo com a Definição 1.1.17. As demonstrações de (i)-(iii) são análogas ao caso não ordenado [8, Proposition 3.1]. Para provar (iv), basta mostrar que $T \subseteq 1_R T 1_R$. Como, para todo $h \in \mathcal{G}$, temos que

$$B_h = \sum_{r(g)\leq r(h)} \beta_g(A_{d(g)}),$$

o resultado segue de

$$\overline{\beta_g(a)\delta_h} = \overline{\beta_g(a)\delta_{(r(g)|h)}} = \overline{\beta_g(a)\delta_g} \cdot \overline{1_{r(g^{-1}(r(g)|h))}\delta_{g^{-1}(r(g)|h)}} \in (T1_R)(1_R T) = T1_R T,$$

para todo $a \in A_{d(g)}$. $\square$

Seja R um anel idempotente (*não necessariamente unitário*), isto é, um anel tal que $R^2 = R$. Dizemos que um R-módulo à esquerda M é *unitário* se $RM = M$. Além disso, M é dito *livre de torção* quando $Rm = 0$ implica $m = 0$ para qualquer $m \in M$ (c.f. [24]). A definição para R-módulos à direita é análoga. Vamos denotar por R-mod (resp. mod-R) a categoria dos R-módulos à esquerda (resp. à direita) unitários e livres de torção.

De acordo com [24], um *contexto de Morita* é uma sêxtupla $(R, R', M, M', \varphi, \varphi')$, onde R, R' são anéis idempotentes, M é um (R, R')-bimódulo, M' é (R', R)-bimódulo e $\varphi : M \otimes_{R'} M' \to R$ e $\varphi' : M' \otimes_R M \to R'$ são homomorfismos de bimódulos tais que:

(i) $\varphi(x \otimes x')y = x\varphi'(x' \otimes y)$, para todos $x, y \in M$ e $x' \in M'$,

(ii) $\varphi'(x' \otimes x)y' = x'\varphi(x \otimes y')$, para todos $x', y' \in M'$ e $x \in M$.

Por [24, Proposition 2.6], se ${}_RM$, M'_R, $M_{R'}$ e ${}_{R'}M'$ são módulos unitários e φ e φ' são sobrejetivas, então as categorias R-mod e R'-mod (resp. mod-R e mod-R') são equivalentes e os anéis R e R' são ditos *Morita equivalentes*.

Teorema 1.2.9. *Os anéis R e T como acima são Morita equivalentes.*

Demonstração. Note inicialmente que R é unitário, pois α é unitária e $\mathcal{G}_0$ é finito. Em particular, R é idempotente. Como B possui unidades locais e $\mathcal{G}_0$ é finito, também temos que T possui unidades locais e portanto é idempotente.

Considere $M = 1_R T$ e $N = T1_R$. Claramente M é um (R, T)-bimódulo e N é um (T, R)-bimódulo. Definindo as aplicações $\varphi : M \otimes_T N \to R$ e $\varphi' : N \otimes_R M \to T$ por $\varphi(m \otimes n) = mn$ e $\varphi'(n \otimes m) = nm$, temos que essas aplicações são sobrejetivas e $(R, T, M, N, \varphi, \varphi')$ é um contexto de Morita pela Proposição 1.2.8. Além disso, é fácil ver que $M_T, {}_R M, N_R$, e ${}_TN$ são módulos unitários pois R e T são anéis idempotentes e a ação do módulo é dada por multiplicação. $\square$

1.2.2 Uma condição para a unicidade

Nessa subseção, apresentaremos uma condição suficiente para uma ação parcial ordenada possuir uma única globalização (a menos de equivalências). Para atingir esse objetivo, definiremos a noção de globalização minimal.

Definição 1.2.10. Seja $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g\in\mathcal{G}}$ uma ação parcial ordenada de $\mathcal{G}$ em um anel A e $\beta = (B_g, \beta_g)_{g\in\mathcal{G}}$ uma globalização ordenada de α em um anel B. Dizemos que β é uma *globalização ordenada minimal* se vale

(iv') $B_g = \sum_{r(h)=r(g)} \beta_h(\varphi_{d(h)}(A_{d(h)}))$, para todo $g \in \mathcal{G}$.

Mais adiante nos Exemplos 1.2.17 e 1.2.18 veremos alguns exemplos de globalizações ordenadas minimais em contraste com globalizações ordenadas. Antes disso, precisaremos estudar algumas propriedades de ações parciais ordenadas fortes (Definição 1.2.3).

Lema 1.2.11. *Seja $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g\in\mathcal{G}}$ uma ação parcial ordenada forte de um grupoide ordenado $\mathcal{G}$ em um anel A. Então vale*

(PS) $\alpha_g \circ \alpha_h = \alpha_{g*h} \circ Id_{A_{h^{-1}}}$, *para todos $g, h \in \mathcal{G}$ tais que $g * h$ está definido.*

Reciprocamente, se α é uma ação parcial que satisfaz (PS), então α é forte.

Demonstração. Note que dados $(g,h) \in \mathcal{G}_2$, temos que

$$\begin{aligned}
\alpha_g \circ \alpha_h &= \alpha_g \circ \alpha_h|_{\alpha_{h^{-1}}(A_{g^{-1}} \cap A_h)}, && \text{por definição de } \circ \\
&= \alpha_g \circ \alpha_h|_{A_{h^{-1}} \cap A_{(gh)^{-1}}}, && \text{pela Proposição 1.1.13(ii)} \\
&= \alpha_g \circ \alpha_h \circ \mathrm{Id}_{A_{(gh)^{-1}} \cap A_{h^{-1}}}, && \text{por definição de } \circ \\
&= \alpha_{gh} \circ \mathrm{Id}_{A_{(gh)^{-1}} \cap A_{h^{-1}}}, && \text{por (P3))} \\
&= \alpha_{gh} \circ \mathrm{Id}_{A_{(gh)^{-1}}} \circ \mathrm{Id}_{A_{h^{-1}}}, && \text{pois } \alpha \text{ é forte} \\
&= \alpha_{gh} \circ \mathrm{Id}_{A_{h^{-1}}}, && \text{pois } \mathrm{dom}(\alpha_{gh}) = A_{(gh)^{-1}}.
\end{aligned}$$

Agora, sejam $g, h \in \mathcal{G}$ tais que o pseudoproduto $g * h$ está definido, isto é, tais que o ínfimo $e := d(g) \wedge r(h)$ está definido. Então temos que

$$\alpha_g \circ \alpha_h = \alpha_g|_{A_h \cap A_{g^{-1}}} \circ \alpha_h|_{\alpha_{h^{-1}}(A_h \cap A_{g^{-1}})}.$$

Como $A_{g^{-1}} \cap A_h \subseteq A_{d(g)} \cap A_{r(h)} = A_e$, pois α é forte, temos que

$$\begin{aligned}
A_h \cap A_{g^{-1}} &= A_h \cap A_{g^{-1}} \cap A_e \\
&= A_h \cap A_e \cap A_{g^{-1}} \cap A_e \\
&= A_{(e|h)} \cap A_{(e|g^{-1})}, && \text{pois } \alpha \text{ é forte} \\
&= A_{(e|h)} \cap A_{(g|e)^{-1}}, && \text{pois } (e|g^{-1}) = (g^{-1}|e).
\end{aligned}$$

Assim, como $\alpha_{(g|e)} = \alpha_g|_{A_{(g|e)^{-1}}}$ e $\alpha_{(e|h)} = \alpha_h|_{A_{(e|h)^{-1}}}$, temos que

$$\begin{aligned}
\alpha_g \circ \alpha_h &= \alpha_g|_{A_{(e|h)} \cap A_{(g|e)^{-1}}} \circ \alpha_h|_{\alpha_{(e|h)^{-1}}(A_{(e|h)} \cap A_{(g|e)^{-1}})} \\
&= \alpha_{(g|e)}|_{A_{(e|h)} \cap A_{(g|e)^{-1}}} \circ \alpha_{(e|h)}|_{\alpha_{(e|h)^{-1}}(A_{(e|h)} \cap A_{(g|e)^{-1}})}, && \text{pois } \alpha \text{ é ordenada} \\
&= \alpha_{(g|e)} \circ \alpha_{(e|h)}, && \text{por definição de } \circ \\
&= \alpha_{(g|e)(e|h)} \circ \mathrm{Id}_{A_{(e|h)^{-1}}}, && \text{pois } ((g|e),(e|h)) \in \mathcal{G}_2 \\
&= \alpha_{g*h} \circ \mathrm{Id}_{A_{(e|h)^{-1}}}, && \text{por definição de } * \\
&= \alpha_{g*h} \circ \mathrm{Id}_{A_{(h^{-1}|e)}}, && \text{pois } (h^{-1}|e) = (e|h)^{-1}.
\end{aligned}$$

Note que pela unicidade das correstrições temos que $(h^{-1}|e) = (r(h^{-1}|e)|h^{-1})$. Assim, $A_{(h^{-1}|e)} = A_{(r(h^{-1}|e)|h^{-1})} = A_{r(h^{-1}|e)} \cap A_{h^{-1}}$, pois α é forte. Agora, $r(h^{-1}|e) = r((e|h)^{-1}) = d(e|h)$. Portanto, $A_{(h^{-1}|e)} = A_{d(e|h)} \cap A_{h^{-1}}$. Mas $d(g * h) = d(e|h)$, de onde $A_{(g*h)^{-1}} \subseteq$

$A_{d(e|h)}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\alpha_g \circ \alpha_h &= \alpha_{g*h} \circ \mathrm{Id}_{A_{d(e|h)}} \circ \mathrm{Id}_{A_{h^{-1}}}, && \text{pelo que foi visto acima}\\
&= \alpha_{g*h} \circ \mathrm{Id}_{A_{(g*h)^{-1}}} \circ \mathrm{Id}_{A_{d(e|h)}} \circ \mathrm{Id}_{A_{h^{-1}}}, && \text{pois } \mathrm{dom}(\alpha_{g*h}) = A_{(g*h)^{-1}}\\
&= \alpha_{g*h} \circ \mathrm{Id}_{A_{(g*h)^{-1}}} \circ \mathrm{Id}_{A_{h^{-1}}}, && \text{pois } A_{(g*h)^{-1}} \subseteq A_{d(e|h)}\\
&= \alpha_{g*h} \circ \mathrm{Id}_{A_{h^{-1}}}, && \text{pois } \mathrm{dom}(\alpha_{g*h}) = A_{(g*h)^{-1}},
\end{aligned}$$

que é precisamente (PS).

Para a recíproca, basta notar que se $e \leq r(g)$, então

$$\begin{aligned}
\alpha_e \circ \alpha_g &= \alpha_{e*g} \circ \mathrm{Id}_{A_{g^{-1}}}, && \text{por (PS)}\\
&= \alpha_{(e|g)} \circ \mathrm{Id}_{A_{g^{-1}}}, && \text{pois } e * g = (e|g)\\
&= \alpha_{(e|g)}, && \text{pois } (e|g)^{-1} \leq g^{-1} \Rightarrow A_{(e|g)^{-1}} \subseteq A_{g^{-1}}.
\end{aligned}$$

Agora, $A_{(e|g)} = \mathrm{Im}(\alpha_{(e|g)}) = \mathrm{Im}(\alpha_e \circ \alpha_g) = \alpha_e(A_e \cap A_g) = A_e \cap A_g$, mostrando que α é forte. $\square$

Ações parciais ordenadas fortes se comportam bem com restrições e correstrições, como veremos a seguir.

Lema 1.2.12. *Seja $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g\in\mathcal{G}}$ uma ação parcial ordenada forte de $\mathcal{G}$ em um anel A. Valem:*

(i) Se $e \leq d(g)$, então $A_{(g|e)} = A_g \cap A_{r(g|e)}$.

(ii) Se $e, f \in \mathcal{G}_0$, então $A_{e\wedge f} = A_e \cap A_f$.

(iii) Se $d(g) \wedge r(h)$ estiver definido, então $\alpha_g(A_{g^{-1}} \cap A_h) = A_g \cap A_{g*h}$.

(iv) Se $d(g) \leq r(h)$, então $\alpha_g(A_{g^{-1}} \cap A_h) = A_g \cap A_{g(d(g)|h)}$.

(iv') Se $r(h) \leq d(g)$, então $\alpha_g(A_{g^{-1}} \cap A_h) = A_g \cap A_{(g|r(h))h}$.

Demonstração. (i): Basta notar que $(g|e) = (r(g|e)|g)$ pela unicidade das restrições. Assim,

$$A_{(g|e)} = A_{(r(g|e)|g)} = A_g \cap A_{r(g|e)}.$$

(ii): Segue de (PS) que $\alpha_e \circ \alpha_f = \alpha_{e*f} \circ \alpha_f = \alpha_{e\wedge f} \circ \alpha_f = \alpha_{e\wedge f}$. Logo, $A_{e\wedge f} = \mathrm{Im}(\alpha_{e\wedge f}) = \mathrm{Im}(\alpha_e \circ \alpha_f) = \alpha_e(A_e \cap A_f) = A_e \cap A_f$.

(iii): Denote por $e = d(g) \wedge r(h)$. Observe que

$$\begin{aligned}
\alpha_g(A_{g^{-1}} \cap A_h) &= \alpha_g(A_{g^{-1}} \cap A_{d(g)} \cap A_{r(h)} \cap A_h) \\
&= \alpha_g(A_{g^{-1}} \cap A_e \cap A_h), && \text{por (ii)} \\
&= \alpha_g(A_{(e|g^{-1})} \cap A_{(e|h)}), && \text{pois } \alpha \text{ é forte} \\
&= \alpha_{(g|e)}(A_{(e|g^{-1})} \cap A_{(e|h)}), && \text{pois } \alpha \text{ é ordenada} \\
&= A_{(g|e} \cap A_{g*h}, && \text{pelo item (ii) da Proposição 1.1.13} \\
&= A_g \cap A_{r(g|e)} \cap A_{g*h}, && \text{pois } \alpha \text{ é forte} \\
&= A_g \cap A_{g*h}, && \text{pois } r(g*h) = r(g|e).
\end{aligned}$$

Para provar (iv) e (iv'), simplesmente note que

$$g * h = \begin{cases} (g|r(h))h, & \text{se } r(h) \leq d(g), \\ g(d(g)|h), & \text{se } d(g) \leq r(h). \end{cases}$$

□

Definição 1.2.13. Seja $\mathcal{G}$ um grupoide ordenado. Dizemos que $\mathcal{G}$ é um grupoide *pseudo-associativo* se $(g*h)*k$ está definido $\iff$ $g*(h*k)$ está definido, para todos $g, h, k \in \mathcal{G}$.

Observação 1.2.14. (i) No caso em que $(g*h)*k$ e $g*(h*k)$ estão definidos, temos por [37, Lemma 4.1.6] que esses pseudoprodutos coincidem.

(ii) Grupoides indutivos são sempre pseudoassociativos.

Agora temos todas as ferramentas necessárias para caracterizar a unicidade de globalizações ordenadas.

Teorema 1.2.15. *Seja $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g \in \mathcal{G}}$ uma ação parcial ordenada pré-unitária forte de um grupoide pseudoassociativo $\mathcal{G}$ em um anel A. Então α admite uma globalização ordenada minimal se, e somente se, α é unitária. Mais ainda, a globalização ordenada minimal é única a menos de equivalências.*

Demonstração. Seja, como na demonstração do Teorema 1.2.5, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{G}, A)$ o anel das funções de $\mathcal{G}$ em A. Dado $g \in \mathcal{G}$, defina

$$\mathcal{E}_g = \{h \in \mathcal{G} : g^{-1} * h \text{ está definido}\},$$

note que $\mathcal{E}_g$ nunca é vazio, pois sempre temos que $g \in \mathcal{E}_g$.

Considere

$$F_g = \{f \in \mathcal{F} : f(h) = 0, \text{ para todo } h \notin \mathcal{E}_g\}.$$

Claramente $F_g = F_{r(g)}$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Considere agora

$$\begin{aligned}\gamma_g : F_{g^{-1}} &\to F_g \\ f &\mapsto \gamma_g(f),\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\gamma_g(f) : \mathcal{G} &\to A \\ h &\mapsto \gamma_g(f)|_h = \begin{cases} f(g^{-1} * h), & \text{se } h \in \mathcal{E}_g, \\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}\end{aligned}$$

É fácil ver que γ_g é um homomorfismo bem definido de anéis, para todo $g \in \mathcal{G}$. Se $(g,h) \in \mathcal{G}_2$, $f \in F_{h^{-1}}$ e $k \in \mathcal{E}_g$, então

$$\begin{aligned}\gamma_{gh}(f)|_k &= f((gh)^{-1} * k) \\ &= f((h^{-1}g^{-1}) * k) \\ &= f((h^{-1} * g^{-1}) * k), && \text{pois } * \text{ coincide com } \cdot \text{ quando } \cdot \text{ está definido} \\ &= f(h^{-1} * (g^{-1} * k)), && \text{pois } * \text{ é associativa} \\ &= \gamma_h(f)|_{g^{-1} * k} \\ &= \gamma_g \circ \gamma_h(f)|_k.\end{aligned}$$

Caso $k \notin \mathcal{E}_g$, então $\gamma_{gh}(f)|_k = 0 = \gamma_g \circ \gamma_h(f)|_k$, de onde segue que $\gamma_{gh} = \gamma_g \circ \gamma_h$.

Agora, para todo $e \in \mathcal{G}_0$, defina $\psi_e : A_e \to F_e$ por

$$\psi_e(a)|_h = \begin{cases} \alpha_{h^{-1}}(a1_h), & \text{se } h \in \mathcal{E}_e, \\ 0, & \text{caso contrário,}\end{cases}$$

para todos $a \in A_e, h \in \mathcal{G}$. Temos que $\psi_e(a)|_e = \alpha_e(a1_e) = a$, para todo $a \in A_e$. Portanto ψ_e é um monomorfismo, para todo $e \in \mathcal{G}_0$.

Seja B_g o subanel de F_g gerado por

$$\bigcup_{r(h)=r(g)} \gamma_h(\psi_{d(h)}(A_{d(h)})),$$

para todo $g \in \mathcal{G}$. Considere, então,

$$B = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} B_e.$$

Vamos definir, para todo $g \in \mathcal{G}$, $\beta_g := \gamma_g|_{B_{g^{-1}}}$.

Nosso objetivo inicial é provar que $\beta = (B_g, \beta_g)_{g\in\mathcal{G}}$ é uma ação global ordenada de $\mathcal{G}$ em B. Dado $e \in \mathcal{G}_0$, $g \in \mathcal{G}$ com $r(g) = e$ e $a \in A_{d(g)}$, temos que

$$\begin{aligned}\beta_e \circ \beta_g(\psi_{d(g)}(a)) &= \gamma_e \circ \gamma_g(\psi_{d(g)}(a))\\ &= \gamma_{eg}(\psi_{d(g)}(a))\\ &= \gamma_g(\psi_{d(g)}(a))\\ &= \beta_g(\psi_{d(g)}(a)),\end{aligned}$$

de onde segue que $\beta_e = \mathrm{Id}_{B_e}$. Como $\gamma_g \circ \gamma_h = \gamma_{gh}$, para todo $(g,h) \in \mathcal{G}_2$, então claramente $\beta_g \circ \beta_h = \beta_{gh}$, para todo $(g,h) \in \mathcal{G}_2$.

Agora provaremos que β satisfaz (PS). De fato, pois dados $g, h, k, \ell \in \mathcal{G}$ tais que $h \in \mathcal{E}_g$, $r(k) = d(h)$ e $a \in A_{d(k)}$, temos que

$$\begin{aligned}\beta_g \circ \beta_h(\beta_k(\psi_{d(k)}(a)))|_\ell &= \begin{cases}\beta_h(\beta_k(\psi_{d(k)}(a)))|_{g^{-1}*\ell}, \text{ se } \ell \in \mathcal{E}_g,\\ 0, \text{ caso contrário}\end{cases}\\ &= \begin{cases}\beta_k(\psi_{d(k)}(a))|_{h^{-1}*(g^{-1}*\ell)}, \text{ se } \ell \in \mathcal{E}_g,\\ 0, \text{ caso contrário}\end{cases}\\ &= \begin{cases}\beta_k(\psi_{d(k)}(a))|_{(h^{-1}*g^{-1})*\ell}, \text{ se } \ell \in \mathcal{E}_g,\\ 0, \text{ caso contrário}\end{cases}\\ &= \begin{cases}\beta_k(\psi_{d(k)}(a))|_{((d(h)*h^{-1})*g^{-1})*\ell}, \text{ se } \ell \in \mathcal{E}_g,\\ 0, \text{ caso contrário}\end{cases}\\ &= \begin{cases}\beta_k(\psi_{d(k)}(a))|_{d(h)*(h^{-1}*g^{-1})*\ell}, \text{ se } \ell \in \mathcal{E}_g,\\ 0, \text{ caso contrário}\end{cases}\\ &= \begin{cases}\beta_{d(h)}(\beta_k(\psi_{d(k)}(a)))|_{(h^{-1}*g^{-1})*\ell}, \text{ se } \ell \in \mathcal{E}_g,\\ 0, \text{ caso contrário}\end{cases}\\ &= \beta_{g*h} \circ \beta_{d(h)}(\beta_k(\psi_{d(k)}(a)))|_\ell,\end{aligned}$$

como gostaríamos. Para finalizar a prova, mostraremos que β satisfaz as condições (i)-(iii) da definição de globalização, pois a condição (iv') será satisfeita por definição após a prova de (i).

(iii): Sejam $g, h \in \mathcal{G}$ e $a \in A_{g^{-1}}$. Então

$$\psi_{r(g)} \circ \alpha_g(a)|_h = \begin{cases}\alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)1_h), \text{ se } h \in \mathcal{E}_g,\\ 0, \text{ caso contrário}\end{cases}$$

e

$$\beta_g \circ \psi_{d(g)}(a)|_h = \begin{cases} \psi_{d(g)}(a)|_{g^{-1}*h}, \text{ se } h \in \mathcal{E}_g, \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \alpha_{h^{-1}*g}(a1_{g^{-1}*h}), \text{ se } h \in \mathcal{E}_g, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, podemos focar no caso em que o ínfimo $e := r(g) \wedge r(h)$ está definido. Como $a \in A_{g^{-1}}$, temos que $a1_{g^{-1}*h} \in A_{g^{-1}} \cap A_{g^{-1}*h} = A_{(e|g^{-1})} \cap A_{g^{-1}*h}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\beta_g(\psi_{d(g)}(a))|_h &= \alpha_{h^{-1}*g}(a1_{g^{-1}*h}) \\
&= \alpha_{(h^{-1}|e)} \circ \alpha_{(e|g)}(a1_{g^{-1}*h}), && \text{por (P3)} \\
&= \alpha_{(h^{-1}|e)}(\alpha_{(e|g)}(a1_{(g^{-1}|e)})1_{(e|h)}) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{(g^{-1}|e)})1_{(e|h)}), && \text{pois } \alpha \text{ é ordenada} \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)\alpha_g(1_{g^{-1}}1_{(g^{-1}|e)})1_{(e|h)}) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)\alpha_{(e|g)}(1_{(g^{-1}|e)})1_{(e|h)}), && \text{pois } (e|g) \leq g \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)1_{(e|g)}1_{(e|h)}) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)1_e 1_g 1_h), && \text{pois } \alpha \text{ é forte} \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)1_{r(g)}1_{r(h)}1_g 1_h), && \text{pelo item (iii) do Lema 1.2.12} \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)1_g 1_h), && \text{pois } A_k \subseteq A_{r(k)}, \text{ para todo } k \in \mathcal{G} \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)1_h).
\end{aligned}$$

Portanto $\beta_g \circ \psi_{d(g)}(a) = \psi_{r(g)} \circ \alpha_g(a)$.

(ii): Sejam $g \in \mathcal{G}$ e $c \in \psi_{r(g)}(A_{r(g)}) \cap \beta_g(\psi_{d(g)}(A_{d(g)}))$. Então existem $a \in A_{r(g)}, b \in A_{d(g)}$ tais que

$$c = \psi_{r(g)}(a) = \beta_g(\psi_{d(g)}(b)).$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
a = a1_{r(g)} = \alpha_{r(g)}(a1_{r(g)}) = \alpha_{r(g)^{-1}}(a1_{r(g)}) = \psi_{r(g)}(a)|_{r(g)} \\
= \beta_g(\psi_{d(g)}(b))|_{r(g)} = \psi_{d(g)}(b)|_{g^{-1}} = \alpha_g(b1_{g^{-1}}) \in A_g,
\end{aligned}$$

de forma que $c = \psi_{r(g)}(a) \in \psi_{r(g)}(A_g)$.

Reciprocamente, se $c \in \psi_{r(g)}(A_g)$, então $c = \psi_{r(g)}(a)$, para algum $a \in A_g$. Tomando $b = \alpha_{g^{-1}}(a) \in A_{g^{-1}}$, temos de (iii) que

$$\beta_g(\psi_{d(g)}(b)) = \psi_{r(g)}(\alpha_g(b)) = \psi_{r(g)}(a) = c.$$

Logo, $c \in \psi_{r(g)}(A_g) \cap \beta_g(\psi_{d(g)}(A_{g^{-1}})) \subseteq \psi_{r(g)}(A_{r(g)}) \cap \beta_g(\psi_{d(g)}(A_{d(g)}))$, como gostaríamos.

(i): Sejam $e \in \mathcal{G}_0$, $h \in \mathcal{G}$ tal que $r(h) = e$, $a \in A_{d(h)}$ e $b \in A_e$. Basta provarmos que

$$\psi_e(b)\beta_h(\psi_{d(h)}(a)), \beta_h(\psi_{d(h)}(a))\psi_e(b) \in \psi_e(A_e).$$

Para isso, considere $k \in \mathcal{G}$ qualquer. Temos que

$$\beta_h(\psi_{d(h)}(a))\psi_e(b)|_k = \beta_h(\psi_{d(h)}(a))|_k\psi_e(b)|_k.$$

Por um lado,

$$\psi_e(b)|_k = \begin{cases} \alpha_{k^{-1}}(b1_k), \text{ se } k \in \mathcal{E}_e, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \beta_h(\psi_{d(h)}(a))|_k &= \begin{cases} \psi_{d(h)}(a)|_{h^{-1}*k}, \text{ se } k \in \mathcal{E}_h = \mathcal{E}_e, \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha_{k^{-1}*h}(a1_{h^{-1}*k}), \text{ se } k \in \mathcal{E}_e, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos então nos concentrar no caso em que $k \in \mathcal{E}_e$. Assim, denotando por $f = r(k) \wedge r(h)$,

$$\begin{aligned} \beta_h(\psi_{d(h)}(a))\psi_e(b)|_k &= \alpha_{k^{-1}*h}(a1_{h^{-1}*k})\alpha_{k^{-1}}(b1_k) \\ &= \alpha_{(k^{-1}|f)(f|h)}(a1_{(h^{-1}|f)(f|k)})\alpha_{k^{-1}}(b1_k) \\ &= \alpha_{(k^{-1}|f)(f|h)}(a1_{(h^{-1}|f)(f|k)})1_{(k^{-1}|f)(f|h)}1_{k^{-1}}\alpha_{k^{-1}}(b1_k) \\ &= \alpha_{(k^{-1}|f)(f|h)}(a1_{(h^{-1}|f)(f|k)})1_{(k^{-1}|f)(f|h)}1_{r(k^{-1}|f)}1_{k^{-1}}\alpha_{k^{-1}}(b1_k). \end{aligned}$$

Pelo item (ii) do Lema 1.2.12, temos que $A_{(k^{-1}|f)} = A_{k^{-1}} \cap A_{r(k^{-1}|f)}$, de onde segue que $1_{(k^{-1}|f)} = 1_{k^{-1}}1_{r(k^{-1}|f)}$. Portanto,

$$\beta_h(\psi_{d(h)}(a))\psi_e(b)|_k = \alpha_{(k^{-1}|f)(f|h)}(a1_{(h^{-1}|f)(f|k)})1_{(k^{-1}|f)(f|h)}1_{(k^{-1}|f)}\alpha_{k^{-1}}(b1_k).$$

Agora, pelo item (ii) da Proposição 1.1.13, temos que

$$A_{(k^{-1}|f)(f|h)} \cap A_{(k^{-1}|f)} = \alpha_{(k^{-1}|f)(f|h)}(A_{(h^{-1}|f)(f|k)} \cap A_{(h^{-1}|f)}),$$

de onde segue que $1_{(k^{-1}|f)(f|h)}1_{(k^{-1}|f)} = \alpha_{(k^{-1}|f)(f|h)}(1_{(h^{-1}|f)(f|k)}1_{(h^{-1}|f)})$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\beta_h(\psi_{d(h)}(a))\psi_e(b)|_k &= \alpha_{(k^{-1}|f)(f|h)}(a1_{(h^{-1}|f)(f|k)})\alpha_{(k^{-1}|f)(f|h)}(1_{(h^{-1}|f)(f|k)}1_{(h^{-1}|f)})\alpha_{k^{-1}}(b1_k)\\
&= \alpha_{(k^{-1}|f)(f|h)}(a1_{(h^{-1}|f)(f|k)}1_{(h^{-1}|f)})\alpha_{k^{-1}}(b1_k)\\
&= \alpha_{(k^{-1}|f)}(\alpha_{(f|h)}(a1_{(h^{-1}|f)})1_{(f|k)})\alpha_{k^{-1}}(b1_k)\\
&= \alpha_{k^{-1}}(\alpha_{(f|h)}(a1_{(h^{-1}|f)})1_{(f|k)})\alpha_{k^{-1}}(b1_k)\\
&= \alpha_{k^{-1}}(\alpha_{(f|h)}(a1_{(h^{-1}|f)})1_{(f|k)}b1_k) = \alpha_{k^{-1}}(\alpha_{(f|h)}(a1_{(h^{-1}|f)})1_f1_kb1_k)\\
&= \alpha_{k^{-1}}(\alpha_{(f|h)}(a1_{(h^{-1}|f)})b1_k) = \psi_e(\alpha_{(f|h)}(a1_{(h^{-1}|f)})b)|_k.
\end{aligned}$$

Note que $b \in A_e$ implica que $\alpha_{(f|h)}(a1_{(h^{-1}|f)})b \in A_e$, pois A_e é um ideal de A. Analogamente provamos que $\psi_e(b)\beta_h(\psi_{d(h)}) \in \psi_e(A_e)$.

A afirmação sobre a unicidade agora segue de [8, Theorem 2.1], tendo em vista que vale (iv'). □

Observação 1.2.16. Note que no caso do Teorema 1.2.15, a coleção $\psi = \{\psi_e : e \in \mathcal{G}_0\}$ é um monomorfismo de ações parciais ordenadas, e não apenas de ações parciais como a coleção $\varphi = \{\varphi_e : e \in \mathcal{G}_0\}$ que aparecia no Teorema 1.2.5.

Exemplo 1.2.17. Retomando o Exemplo 1.2.7 e aplicando a construção do Teorema 1.2.15, obtemos

$$\mathcal{E}_g = \mathcal{G}, \text{ para todo } g \in \mathcal{G},$$

de onde

$$F_g = \mathcal{F}, \text{ para todo } g \in \mathcal{G}.$$

Desta forma,

$$\gamma_s(a,b,c,d,f) = (d,c,b,a,f) = \gamma_{s^{-1}}(a,b,c,d,f)$$

e $\gamma_g = Id_{\mathcal{F}}$, para todo $f \in \mathcal{G}_0$.

Além disso, observe que

$$\begin{aligned}
\psi_{r(s)}(ae_2 + be_3) &= (ae_2, ae_2, ae_2 + be_3, ae_2, ae_2),\\
\psi_{d(s)}(ae_2) = \psi_e(ae_2) &= (ae_2, ae_2, ae_2, ae_2, ae_2).
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} B'_s &= \{(ae_2, ae_2, ae_2 + be_3, ae_2, ae_2) : a, b \in R\}, \\ B'_{s^{-1}} &= \{(ae_2, ae_2 + be_3, ae_2, ae_2, ae_2) : a, b \in R\}, \\ B'_e &= \{(ae_2, ae_2, ae_2, ae_2, ae_2) : a \in R\}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$B' = B'_s + B'_{s^{-1}} + B'_e = \{(ae_2, ae_2 + be_3, ae_2 + ce_3, ae_2, ae_2) : a, b, c \in R\},$$

de forma que obtemos que $B' \simeq B$ e $B'_g \simeq B_g$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Desta forma, $\beta' = (B'_g, \beta'_g)_{g \in \mathcal{G}}$ é uma ação global ordenada equivalente a $\beta = (B_g, \beta_g)_{g \in \mathcal{G}}$.

Exemplo 1.2.18. Considere o grupoide ordenado pseudoassociativo $\mathcal{G} = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$, onde $\mathcal{H}_1 = \{g, g^{-1}, d(g), r(g)\}$ e $\mathcal{H}_2 = \{a_{ij} : i, j \in \{1, 2, 3, 4\}\}$. O produto é dado por $(a_{ij}, a_{k\ell}) \in \mathcal{G}_2 \iff \ell = i$ e neste caso $a_{ij} a_{k\ell} = a_{kj}$ e $(h_1, h_2), (h_2, h_1) \notin \mathcal{G}_2$, para todos $h_1 \in \mathcal{H}_1, h_2 \in \mathcal{H}_2$. As relações de ordem são geradas por $a_{13} \leq g$ e $a_{24} \leq g$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_g &= \{g, r(g), a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43}, a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44}\}, \\ \mathcal{E}_{g^{-1}} &= \{g^{-1}, d(g), a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41}, a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42}\}, \\ \mathcal{E}_{a_{11}} &= \{g^{-1}, d(g), a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41}\}, \\ \mathcal{E}_{a_{22}} &= \{g^{-1}, d(g), a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42}\}, \\ \mathcal{E}_{a_{33}} &= \{g, r(g), a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43}\}, \\ \mathcal{E}_{a_{44}} &= \{g, r(g), a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44}\}. \end{aligned}$$

Note que $\mathcal{G}$ é um exemplo de grupoide pseudoassociativo que não é localmente indutivo.

Seja $A = \bigoplus_{i=0}^{4} Re_i$, onde R é um anel e os e_i's são idempotentes dois a dois ortogonais cuja soma é 1_A. Defina

$$\begin{aligned} A_{d(g)} &= Re_0 \oplus Re_1 \oplus Re_2, & A_g^{-1} &= Re_1 \oplus Re_2, \\ A_g = A_{r(g)} &= Re_3 \oplus Re_4 & A_{a_{ii}} &= Re_i = A_{a_{ji}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_g(be_1 + ce_2) &= be_3 + ce_4, & \alpha_{g^{-1}} &= \alpha_g^{-1}, \\ \alpha_{a_{ij}}(be_i) &= be_j, & &\text{para todos } 1 \leq i, j \leq 4, \\ \alpha_e &= \mathrm{Id}_{A_e}, & &\text{para todo } e \in \mathcal{G}_0. \end{aligned}$$

Identificando $f \in \mathcal{F}(\mathcal{G}, A)$ com $\prod_{g\in\mathcal{G}} A \simeq A^{20}$ via

$$\begin{aligned} f \leftrightarrow (&f(r(g)), f(d(g)), f(g), f(g^{-1}), f(a_{11}), f(a_{21}), f(a_{31}), f(a_{41}), \\ &f(a_{12}), f(a_{22}), f(a_{32}), f(a_{42}), f(a_{13}), f(a_{23}), f(a_{33}), f(a_{43}), \\ &f(a_{14}), f(a_{24}), f(a_{34}), f(a_{44})), \end{aligned}$$

temos que, usando a notação $0^{(i)} = (0, 0, \ldots, 0)$ (i vezes),

$$\begin{aligned} \gamma_g(b, 0, c, 0, 0^{(8)}, d, e, f, g, h, i, j, k) &= (0, c, 0, b, d, e, f, g, h, i, j, k, 0^{(8)}) \\ \gamma_{g^{-1}}(0, b, 0, c, d, e, f, g, h, i, j, k, 0^{(8)}) &= (c, 0, b, 0, 0^{(8)}, d, e, f, g, h, i, j, k) \\ \gamma_{a_{21}}(0, b, 0, c, 0^{(4)}, d, e, f, g, 0^{(8)}) &= (c, 0, b, 0, d, e, f, g, 0^{(12)}) \\ \gamma_{a_{31}}(0, b, 0, c, 0^{(8)}, d, e, f, g, 0^{(4)}) &= (c, 0, b, 0, d, e, f, g, 0^{(12)}) \\ \gamma_{a_{41}}(0, b, 0, c, 0^{(12)}, d, e, f, g) &= (c, 0, b, 0, d, e, f, g, 0^{(12)}) \\ \gamma_{a_{12}}(0, b, 0, c, d, e, f, g, 0^{(12)}) &= (c, 0, b, 0, 0^{(4)}, d, e, f, g, 0^{(8)}) \\ \gamma_{a_{32}}(0, b, 0, c, 0^{(8)}, d, e, f, g, 0^{(4)}) &= (c, 0, b, 0, 0^{(4)}, d, e, f, g, 0^{(8)}) \\ \gamma_{a_{42}}(0, b, 0, c, 0^{(12)}, d, e, f, g) &= (c, 0, b, 0, 0^{(4)}, d, e, f, g, 0^{(8)}) \\ \gamma_{a_{13}}(b, 0, c, 0, d, e, f, g, 0^{(12)}) &= (0, c, 0, b, 0^{(8)}, d, e, f, g, 0^{(4)}) \\ \gamma_{a_{23}}(b, 0, c, 0, 0^{(4)}, d, e, f, g, 0^{(8)}) &= (0, c, 0, b, 0^{(8)}, d, e, f, g, 0^{(4)}) \\ \gamma_{a_{43}}(b, 0, c, 0, 0^{(12)}, d, e, f, g) &= (0, c, 0, b, 0^{(8)}, d, e, f, g, 0^{(4)}) \\ \gamma_{a_{14}}(b, 0, c, 0, d, e, f, g, 0^{(12)}) &= (0, c, 0, b, 0^{(12)}, d, e, f, g) \\ \gamma_{a_{24}}(b, 0, c, 0, 0^{(4)}, d, e, f, g, 0^{(8)}) &= (0, c, 0, b, 0^{(12)}, d, e, f, g) \\ \gamma_{a_{34}}(b, 0, c, 0, 0^{(8)}, d, e, f, g, 0^{(4)}) &= (0, c, 0, b, 0^{(12)}, d, e, f, g) \\ \gamma_e &= \mathrm{Id}_{F_e}, \text{ para todo } e \in \mathcal{G}_0. \end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \psi_{r(g)}(A_{r(g)}) &= \{(be_3 + ce_4, 0, be_1 + ce_2, 0^{(9)}, be_1, be_2, be_3, be_4, ce_1, ce_2, ce_3, ce_4) : b, c \in R\} \\ \psi_{d(g)}(A_{d(g)}) &= \{(0, be_0 + ce_1 + de_2, 0, ce_3 + de_4, ce_1, ce_2, ce_3, ce_4, de_1, de_2, de_3, de_4, 0^{(8)}) \\ &\quad : b, c, d \in R\} \\ \psi_{a_{11}}(A_{a_{11}}) &= \{(0, be_1, 0, be_3, be_1, be_2, be_3, be_4, 0^{(12)}) : b \in R\} \\ \psi_{a_{22}}(A_{a_{22}}) &= \{(0, be_2, 0, be_4, 0^{(4)}, be_1, be_2, be_3, be_4, 0^{(8)}) : b \in R\} \\ \psi_{a_{33}}(A_{a_{33}}) &= \{be_3, 0, be_1, 0, 0^{(8)}, be_1, be_2, be_3, be_4, 0^{(4)}) : b \in R\} \\ \psi_{a_{44}}(A_{a_{44}}) &= \{(be_4, 0, be_2, 0, 0^{(12)}, be_1, be_2, be_3, be_4)\}, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}
B_g &= \{(be_3+ce_4, 0, de_0+be_1+ce_2, 0^{(9)}, be_1, be_2, be_3, be_4, ce_1, ce_2, ce_3, ce_4) : b,c,d \in R\}\\
B_{g^{-1}} &= \{(0, be_0+ce_1+de_2, 0, ce_3+de_4, ce_1, ce_2, ce_3, ce_4, de_1, de_2, de_3, de_4, 0^{(8)})\\
&\quad : b,c,d \in R\}\\
B_{a_{ii}} &= \psi_{a_{ii}}(A_{a_{ii}}), \text{ para todo } 1 \leq i \leq 4.
\end{aligned}$$

Logo, a menos de equivalências, temos que $\beta = (B_g, \beta_g)_{g\in\mathcal{G}}$ é uma ação global ordenada minimal do grupoide ordenado $\mathcal{G}$ no anel $B = \bigoplus_{i=0}^{5} Re_i$, onde

$$\begin{gathered}
B_g = Re_0 \oplus Re_1 \oplus Re_2, \qquad B_{g^{-1}} = Re_3 \oplus Re_4 \oplus Re_5,\\
B_{a_{ii}} = Re_i, \text{ para todo } 1 \leq i \leq 4,\\
\beta_g(be_0+ce_1+de_2) = ce_3+de_4+be_5,\\
\beta_{g^{-1}} = \beta_g^{-1}, \qquad \beta_{a_{ij}}(be_i) = be_j, \text{ para todos } 1 \leq i,j \leq 4.
\end{gathered}$$

1.2.3 Aplicação via Teoremas ESN

Começaremos essa subseção enunciando as definições de ação parcial de semigrupo inverso em anel, bem como de globalização nesse contexto.

Definição 1.2.19. [13, Definition 2.1] Sejam S um semigrupo inverso e A um anel. Dizemos que $\alpha = (A_s, \alpha_s)_{s\in S}$ é uma *ação parcial* de S em A se $A_s \lhd A_{ss^{-1}} \lhd A$, $\alpha_s : A_{s^{-1}} \to A_s$ é um isomorfismo de anéis e

(P1) $\alpha_e = \mathrm{Id}_{A_e}$, para todo $e \in E(S)$, e $A = \sum_{e\in E(S)} A_e$;

(P2) $\alpha_t^{-1}(A_{s^{-1}} \cap A_t) \subset A_{(st)^{-1}}$, para todos $s,t \in S$;

(P3) $\alpha_s \circ \alpha_t(x) = \alpha_{st}(x)$, para todos $s,t \in S, x \in \alpha_t^{-1}(A_{s^{-1}} \cap A_t)$.

Analogamente ao caso de grupoide, definimos ações parciais pré-unitárias e ações parciais unitárias de semigrupo inverso. Podemos também enunciar, nessas notações, o que significa uma globalização de ação parcial de semigrupo inverso em anel.

Definição 1.2.20. Seja $\alpha = (A_s, \alpha_s)_{s\in S}$ uma ação parcial de um semigrupo inverso S num anel A. Uma ação global $\beta = (B_s, \beta_s)_{s\in S}$ de S em um anel B é dita uma *globalização* de α se, para todo $e \in E(S)$, existe $\varphi_e : A_e \to B_e$ monomorfismo de anéis tal que

(i) $\varphi_e(A_e)$ é um ideal de B_e;

(ii) $\varphi_{ss^{-1}}(A_s) = \varphi_{ss^{-1}}(A_{ss^{-1}}) \cap \beta_s(\varphi_{s^{-1}s}(A_{s^{-1}s}))$;

(iii) $\beta_s \circ \varphi_{s^{-1}s}(a) = \varphi_{ss^{-1}} \circ \alpha_s(a)$, para todo $a \in A_{s^{-1}}$;

(iv) B_s é o ideal gerado por $\bigcup_{tt^{-1}=ss^{-1}} \beta_t\left(\varphi_{t^{-1}t}(A_{t^{-1}t})\right)$.

Observação 1.2.21. Note que dessa vez exigimos a condição de igualdade imediatamente no índice da união em (iv), em contraposição com a desigualdade no índice da união no item (iv) da Definição 1.2.4. Isso ocorre em detrimento do Teorema ESN 1.1.10(ii), onde temos que premorfismos (e, portanto, ações parciais) de semigrupo inverso estão relacionadas com premorfismos (e, portanto, ações parciais fortes) de grupoide indutivo. Logo, como todo grupoide indutivo é pseudoassociativo por definição, temos que partindo de uma ação parcial de semigrupo inverso já satisfazemos naturalmente as hipóteses do Teorema 1.2.15 após uma aplicação do Teorema ESN. Assim, temos uma primeira indicação de que toda ação parcial de semigrupo inverso que é globalizável possui automaticamente globalização minimal (e única). Veremos mais detalhes sobre essa última afirmação no que segue.

Unindo a definição de ação parcial de semigrupo inverso com o Teorema ESN 1.1.10, podemos traduzir toda a teoria feita até aqui para o caso de semigrupos inversos. Entretanto, precisamos de alguns resultados técnicos envolvendo a estrutura de conjunto do anel A.

Denotaremos por Set a categoria cujos objetos são conjuntos e os morfismos são funções entre conjuntos e Ring a categorias cujos objetos são anéis e os morfismos são homomorfismos de anéis. Dados A, B em $\mathrm{Obj}(\mathsf{Ring})$ e $\varphi : A \to B$ em $\mathrm{Mor}(\mathsf{Ring})$, podemos definir o *funtor esquecimento* $F : \mathsf{Ring} \to \mathsf{Set}$ por $F(A)$ sendo o conjunto idêntico a A como conjunto, mas desconsiderando sua estrutura de anel, e $F(\varphi) : F(A) \to F(B)$ como uma função que coincide com $\varphi : A \to B$ em cada ponto, porém desconsiderando a estrutura de homomorfismo. Usaremos dessa notação ao longo da subseção.

Retomando a nossa notação das seções anteriores, seja A um anel. Definimos $\mathcal{I}(A) := \mathcal{I}(F(A)) = \{f : I \to J : I, J \subseteq A, f \text{ é bijeção}\}$, ou seja, $\mathcal{I}(A)$ é o conjunto das bijeções entre subconjuntos do conjunto $F(A)$. Com a composição usual de funções (isto é, a composição é definida no maior domínio onde fizer sentido), temos que $\mathcal{I}(A)$ é um semigrupo inverso (Definição 1.1.6).

Seja S um semigrupo inverso e considere a ação parcial $\alpha = (A_s, \alpha_s)_{s\in S}$ de S em um anel A.

Lema 1.2.22. *A ação parcial α induz um premorfismo $\gamma_\alpha : S \to \mathcal{I}(A)$ (Definição 1.1.9), onde $\gamma_\alpha(s)$ é uma bijeção entre os subconjuntos $dom(\gamma_\alpha(s)) = F(A_{s^{-1}})$ e $Im(\gamma_\alpha(s)) = F(A_s)$ de $F(A)$ definida como $\gamma_\alpha(s)(a) = \alpha_s(a)$, para todo $a \in F(A_{s^{-1}})$.*

Demonstração. A condição (i) de premorfismo segue de (P2) e (P3) da definição de ação parcial. A condição (ii) de premorfismo segue analogamente ao item (i) da Proposição 1.1.13 para o caso de semigrupos inversos (ou de [13, Proposition 2.2(c)], por exemplo). Por fim, o item (iii) de premorfismo é decorrente de (PW). $\square$

Do Lema 1.2.22 e do Teorema 1.2.15, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.2.23. *Seja α uma ação parcial pré-unitária do semigrupo inverso S em um anel A. Então α possui globalização β se, e somente se, α é unitária. Além disso, β é única a menos de equivalências.*

Demonstração. Seja α uma ação parcial pré-unitária do semigrupo inverso S em um anel A. Seja γ_α o premorfismo de semigrupos inversos de S para $\mathcal{I}(A)$ definido no Lema 1.2.22. Considere $\mathbb{G}(\gamma_\alpha) : \mathbb{G}(S) \to \mathbb{G}(\mathcal{I}(A))$ o premorfismo do grupoide indutivo $\mathbb{G}(S)$ para o grupoide indutivo $\mathbb{G}(\mathcal{I}(A))$ associado a γ_α via o Teorema 1.1.10(ii). Pelo que foi considerado na Observação 1.2.14(ii), temos que $\mathbb{G}(S)$ é um grupoide pseudoassociativo.

Note que a transição via o funtor $\mathbb{G}$ é tal que $F(S) = F(\mathbb{G}(S))$ e $F(\gamma_\alpha) = F(\mathbb{G}(\gamma_\alpha))$. Portanto, as bijeções $\mathbb{G}(\gamma_\alpha)(s)$ indexadas pelos elementos do grupoide indutivo seguem inalteradas em relação as bijeções $\gamma_\alpha(s)$ indexadas pelos elementos do semigrupo inverso, de onde podemos considerar $\mathrm{dom}(\mathbb{G}(\gamma_\alpha)(s)) = F(A_{s^{-1}})$ e $\mathrm{Im}(\mathbb{G}(\gamma_\alpha)(s)) = F(A_s)$. Portanto, definindo $\omega = (A_s, \omega_s)_{s\in\mathbb{G}(S)}$ por $\omega_s : A_{s^{-1}} \to A_s$, com $\omega_s(a) = \mathbb{G}(\gamma_\alpha)(s)(a) = \alpha_s(a)$, para todos $a \in A_{s^{-1}}$, $s \in \mathbb{G}(S)$, retomamos as estruturas de ideais e de isomorfismos e obtemos que ω é uma ação parcial forte pré-unitária do grupoide indutivo $\mathbb{G}(S)$ sobre o anel A. De fato, as condições (P2) e (P3) equivalem à condição (i) de premorfismo. A condição (PW) equivale à condição (iii) de premorfismo. A condição (ii) de premorfismo equivale ao item (i) da Proposição 1.1.13. Por fim, a Observação 1.1.8 garante que vale (PS), pois todo premorfismo ψ de grupoides indutivos satisfaz $r(\psi(e|g)) = \psi(e) \wedge r(\psi(g))$, e essa é precisamente a condição exigida para uma ação parcial ordenada ser forte (e equivale a (PS) pelo Lema 1.2.11), o que não ocorre em ações parciais ordenadas quaisquer, como vemos no Exemplo 1.2.6.

Portanto, estamos na hipótese do Teorema 1.2.15. Logo, as condições da Definição 1.2.4 em ω, mais a condição de minimalidade em ω, e da Definição 1.2.20 em α, são exatamente as mesmas.

Assim, como α é unitária se, e somente se, ω é unitária, podemos usar o Teorema 1.2.15 para verificar que α possui globalização se, e somente se, ω possui globalização minimal. Neste caso, obtemos uma ação global $\eta = (B_s, \eta_s)_{s\in\mathbb{G}(S)}$ de $\mathbb{G}(S)$ em um anel B que globaliza ω de forma minimal. Agora construímos, de forma análoga à construção de γ_α, um premorfismo de grupoides indutivos $\rho_\eta : \mathbb{G}(S) \to \mathbb{G}(\mathcal{I}(A))$ de forma que a função $\rho_\eta(s) : F(B_{s^{-1}}) \to F(B_s)$ é definida por $\rho_\eta(s)(b) = \eta_s(b)$, para todo $b \in F(B_{s^{-1}})$. Note que ρ_η é, na verdade, um homomorfismo de grupoides indutivos, pois o fato de que η é uma ação global implica que $B_{r(s)} = B_s$, para todo $s \in \mathbb{G}(S)$, de onde $\rho_\eta(s)\rho_\eta(t) = \rho_\eta(st)$, para todo $(s,t) \in \mathbb{G}(S)_2$.

Aplicando o funtor inverso $\mathbb{S}$ de $\mathbb{G}$ pelo Teorema ESN, obtemos um homomorfismo de semigrupos inversos $\mathbb{S}(\rho_\eta) : S \to \mathcal{I}(A)$. Definindo $\beta = (B_s, \beta_s)_{s\in S}$ por $\beta_s : B_{s^{-1}} \to B_s$ com $\beta_s(b) = \mathbb{S}(\rho_\eta)(s)(b) = \eta_s(b)$, para todos $b \in B_{s^{-1}}$, $s \in S$, temos que η ser globalização minimal de ω implica que β é a globalização de α desejada. Note que a unicidade de β é garantida pelo Teorema 1.2.15, pois a ação η construída já é minimal pelo argumentado acima. $\square$

Variações do Teorema ESN para semigrupoides inversos e categorias inversas foram provadas por DeWolf e Pronk em [17]. Os premorfismos dessas estruturas também são compatíveis, no sentido de que os premorfismos de semigrupoides inversos (resp. categorias inversas) estão relacionados via o Teorema ESN com os premorfismos de grupoides localmente indutivos (resp. completamente localmente indutivos) - que também são automaticamente pseudoassociativos - e portanto o Teorema 1.2.15 também garante a unicidade da globalização de ações parciais dessas estruturas de forma análoga ao que discutimos acima.

A definição de skew-anel de semigrupo inverso é análoga ao caso de skew-anel de grupoide ordenado (Definição 1.1.17) usando a ordem parcial natural $\preceq$ de um semigrupo inverso S, dada por $s \preceq t$ se existe $e \in E(S)$ tal que $s = te$. Mais precisamente, de acordo com [13, p. 3], temos que $A \star_\alpha S = \mathcal{L}/\mathcal{N}$, onde α é uma ação parcial de um semigrupo inverso S em um anel A, $\mathcal{L} = \bigoplus_{s \in S} A_s \delta_s$ com soma componente a componente e produto dado por $(a_s\delta_s)(b_t\delta_t) = \alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(a_s)b_t)\delta_{st}$ e $\mathcal{N} = \langle a_s\delta_s - a_s\delta_t : s \leq t \text{ e } a_s \in A_s \rangle$ é um ideal de $\mathcal{L}$. Argumentos completamente similares aos do Teorema 1.2.9 também provam o seguinte resultado.

Teorema 1.2.24. *Seja α uma ação parcial unitária de um semigrupo inverso S em um anel A. Suponha que $E(S)$ é finito. Seja β a globalização de α, que é uma ação global de S em um anel B. Então $A \star_\alpha S$ e $B \star_\beta S$ são Morita equivalentes.*

Capítulo 2

Teoria de Galois para ação parcial de grupoide

> Beleza é o primeiro teste: não existe espaço permanente no mundo para matemática feia.
>
> G. H. Hardy

Nesse capítulo, daremos continuidade ao trabalho apresentado em [8] por Bagio e Paques, onde foi definido um teorema de equivalências para extensões de anéis definidas por ações parciais ortogonais de grupoides serem galoisianas. Embora em [46] Paques e Tamusiunas provaram um teorema de correspondência de Galois para ação global ortogonal de grupoide em anéis comutativos e em [11] Bagio, Sant'Anna e Tamusiunas provaram um teorema de correspondência de Galois para ação parcial ortogonal tipo-grupo de grupoide em anéis comutativos, ainda não havia uma generalização dessa correspondência para a classe inteira de ações parciais ortogonais. O nosso objetivo, então, é apresentar um teorema de correspondência de Galois para ações parciais ortogonais de grupoides em anéis comutativos. Além disso, provaremos um teorema envolvendo extensões de Galois e grupoides quocientes, generalizando o trabalho de Bagio, Cañas, Marín, Paques e Pinedo em [6]. Por fim, apresentaremos o conceito de ortogonalização para obter algumas correspondências de Galois para o caso de ações parciais não ortogonais de grupoides.

2.1 Pré-requisitos

Neste capítulo, consideraremos que $\mathcal{G}$ é um grupoide finito (*não ordenado*) e α é uma ação parcial unitária de $\mathcal{G}$ em A. Note que isso implica que A é unitário pela condição (P1) de ação parcial. É interessante que o leitor e a leitora tenham afinidade com a Teoria de Galois para ações parciais de grupoide de [8]. Nessa seção citaremos as principais definições e os principais resultados que precisaremos no decorrer do capítulo.

Definição 2.1.1. [8, p. 3668] Seja $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g\in\mathcal{G}}$ uma ação parcial unitária de um grupoide $\mathcal{G}$ em um anel A. Definimos

$$A^\alpha = \{a \in A : \alpha_g(a1_{g^{-1}}) = a1_g, \text{ para todo } g \in \mathcal{G}\},$$

o *subanel dos invariantes* de A pela ação parcial α.

Definição 2.1.2. [8, p. 3668] A *aplicação traço* é definida como a aplicação $\mathrm{tr}_\alpha : A \to A$ dada por

$$\mathrm{tr}_\alpha(a) = \sum_{g\in\mathcal{G}} \alpha_g(a1_{g^{-1}}),$$

para todo $a \in A$.

O subanel dos invariantes A^α e a aplicação traço possuem uma importante relação.

Lema 2.1.3. *[8, Lemma 4.2] A aplicação tr_α é um homomorfismo de (A^α, A^α)-bimódulos e*

(i) $tr_\alpha(A) \subseteq A^\alpha$*;*

(ii) $tr_\alpha(\alpha_g(a)) = tr_\alpha(a)$*, para todo* $a \in A_{g^{-1}}$*,* $g \in \mathcal{G}$*.*

O fato da imagem da aplicação traço estar contida no subanel dos invariantes é crucial para o desenvolvimento da Teoria de Galois. Isto é o que está por trás da construção das diversas equivalências da definição de extensão de Galois.

Definição 2.1.4. [8, p. 3671] Dizemos que A é uma *extensão de Galois α-parcial* de A^α se existem $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n \in A$ tais que

$$\sum_{i=1}^n x_i\alpha_g(y_i1_{g^{-1}}) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g}1_e,$$

para todo $g \in \mathcal{G}$. Nesse caso, dizemos que o conjunto $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$ é um *sistema de coordenadas galoisianas α-parciais* de A sobre A^α.

Seja α uma ação parcial ortogonal unitária de $\mathcal{G}$ em um anel A. Para facilitar notações, vamos considerar sua globalização β, ação global de $\mathcal{G}$ em um anel B, de forma que $A_e \subseteq B_e$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$, isto é, de forma que os monomorfismos $\varphi_e : A_e \to B_e$, $e \in \mathcal{G}_0$, que aparecem na definição de globalização sejam inclusões.

Sejam $e, f \in \mathcal{G}_0$. Definimos os conjuntos $\mathcal{G}(e, f) = \{g \in \mathcal{G} : d(g) = e, r(g) = f\}$ e $\mathcal{G}(e) := \mathcal{G}(e, e)$. É fácil ver que $\mathcal{G}(e)$ é um grupo para todo $e \in \mathcal{G}_0$, chamado de *grupo de isotropia associado a e*. Considere também $\mathcal{G}(-, e) = \{g \in \mathcal{G} : r(g) = e\}$.

Podemos enumerar esse conjunto da seguinte forma: $\mathcal{G}(-,e) = \{e = g_{1,e}, g_{2,e} \dots, g_{n_e,e}\}$, onde $n_e = |\mathcal{G}(-,e)|$. Usaremos essa notação no resultado a seguir.

Lema 2.1.5. *[8, Theorem 5.1] Seja α uma ação parcial ortogonal unitária de um grupoide finito $\mathcal{G}$ em um anel A. Considere β globalização de α, ação global de $\mathcal{G}$ em um anel B. São equivalentes:*

(i) Se B é uma extensão β-Galois de B^β, então A é uma extensão de Galois α-parcial de A^α.

(ii) Se A é uma extensão de Galois α-parcial de A^α e para todo $g \in \mathcal{G}$, $g_{r(g),i}^{-1} g g_{d(g),i} \in \mathcal{G}_0 \Rightarrow g \in \mathcal{G}_0$, para todo $1 \leq i \leq n_{r(g)} = n_{d(g)}$, então B é uma extensão β-Galois de B^β.

Podemos relacionar o anel dos invariantes A^α e o skew-anel de grupoide parcial $A \star_\alpha \mathcal{G}$ via um contexto de Morita que envolve a aplicação traço. De fato, temos que A é um $(A^\alpha, A \star_\alpha \mathcal{G})$-bimódulo (respectivamente $(A \star_\alpha \mathcal{G}, A^\alpha)$-bimódulo) com ações à esquerda e à direita de A^α via multiplicação e ação à direita (respectivamente à esquerda) de $A \star_\alpha \mathcal{G}$ em A dada por

$$a \cdot b_g \delta_g = \alpha_{g^{-1}}(a b_g),$$

e respectivamente

$$b_g \delta_g \cdot a = b_g \alpha_g(a 1_{g^{-1}}),$$

para todos $g \in \mathcal{G}$, $b_g \in A_g$ e $a \in A$ e estendidas linearmente [8, p. 3669].

Observe agora que a aplicação

$$\begin{aligned} T : A \times A &\to A^\alpha \\ (a,b) &\mapsto \mathrm{tr}_\alpha(ab) \end{aligned}$$

é $A \star_\alpha \mathcal{G}$-balanceada e a aplicação

$$\begin{aligned} T' : A \times A &\to A \star_\alpha \mathcal{G} \\ (a,b) &\mapsto \sum_{g \in \mathcal{G}} a \alpha_g(b 1_{g^{-1}}) \delta_g \end{aligned}$$

é A^α-balanceada.

Portanto, podemos considerar as aplicações

$$\begin{aligned} \tau : A \otimes_{A \star_\alpha \mathcal{G}} A &\to A^\alpha \\ a \otimes b &\mapsto \mathrm{tr}_\alpha(ab) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\tau' : A \otimes_{A^\alpha} A &\to A \star_\alpha \mathcal{G}\\ a \otimes b &\mapsto \sum_{g \in \mathcal{G}} a\alpha_g(b1_{g^{-1}})\delta_g.\end{aligned}$$

Assim, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 2.1.6. *[8, Proposition 4.4] A sêxtupla $(A \star_\alpha \mathcal{G}, A^\alpha, A, A, \tau, \tau')$ é um contexto de Morita. A aplicação τ é sobrejetiva se, e somente se, existe $a \in A$ tal que $tr_\alpha(a) = 1_A$.*

Note que nesse caso ambos os anéis são unitários, então não precisamos falar sobre módulos unitários ou livres de torção, e podemos seguir a teoria de Morita clássica apresentada em [49, Theorems 4.1.4, 4.1.17].

Denotaremos por $j : A \star_\alpha \mathcal{G} \to \mathrm{End}(A)_{A^\alpha}$ a aplicação definida por

$$j\left(\sum_{g \in \mathcal{G}} a_g\delta_g\right)(a) = \sum_{g \in \mathcal{G}} a_g\alpha_g(a1_{g^{-1}}),$$

para todo $a \in A$. Temos que j é um homomorfismo de A-módulos e de anéis.

Além disso, para todo $A \star_\alpha \mathcal{G}$-módulo M, denotaremos por $M^{\mathcal{G}}$ o conjunto

$$M^{\mathcal{G}} = \{m \in M : (1_g\delta_g) \cdot m = 1_g \cdot m, \text{ para todo } g \in \mathcal{G}\},$$

o conjunto dos invariantes de M por $\mathcal{G}$.

Com isso, temos as definições suficientes para enunciar o Teorema de equivalências para extensões galoisianas no contexto de ações parciais ortogonais de grupoides.

Teorema 2.1.7. *[8, Theorem 5.3] Seja $\mathcal{G}$ um grupoide finito agindo parcialmente em um anel A via ação parcial ortogonal e unitária $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g \in \mathcal{G}}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A é uma extensão α-Galois de A^α;

(ii) A é um A^α-módulo projetivo finitamente gerado e j é um isomorfismo de A-módulos à esquerda e de anéis.

(iii) Para todo $A \star_\alpha \mathcal{G}$-módulo à esquerda M a aplicação $\mu : A \otimes M^{\mathcal{G}} \to M$ dada por $\mu(a \otimes m) = am$ é um isomorfismo de A-módulos à esquerda.

(iv) A aplicação $\psi : A \otimes_{A^\alpha} A \to \prod_{g \in \mathcal{G}} A_g$ definida por $\psi(a \otimes b) = (a\alpha_g(b1_{g^{-1}}))_{g \in \mathcal{G}}$ é um isomorfismo de A-módulos à esquerda.

(v) $AtA = A \star_\alpha \mathcal{G}$, onde $t = \sum_{g \in \mathcal{G}} 1_g\delta_g$.

(vi) A aplicação τ' é sobrejetiva.

(vii) A é um gerador para a categoria de $A \star_\alpha \mathcal{G}$-módulos à esquerda.

Mais ainda, se pelo menos uma das condições acima for verdadeira, então as seguintes afirmações são equivalentes:

(viii) $tr_\alpha(A) = A^\alpha$.

(ix) A é um gerador para a categoria de A^α-módulos à direita.

(x) O contexto de Morita $(A \star_\alpha \mathcal{G}, A^\alpha, A, A, \tau, \tau')$ é estrito.

Definição 2.1.8. Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide, $(A_g, \alpha_g)_{g\in\mathcal{G}}$ uma ação parcial de $\mathcal{G}$ em um anel A e $\mathcal{H}$ um subgrupoide de $\mathcal{G}$. Defina a restrição de α a $\mathcal{H}$ como

$$\alpha|_{\mathcal{H}} = (A_h, \alpha_h)_{h\in\mathcal{H}}.$$

O resultado abaixo nos diz que no caso comutativo todas as dez condições do Teorema 2.1.7 são equivalentes.

Corolário 2.1.9. *[8, Corollary 5.4] Suponha que pelo menos uma das condições a seguir é válida:*

(i) A é um anel comutativo.

(ii) $tr_\alpha(1_A)$ é invertível em A.

(iii) $|\mathcal{G}(e)|1_e$ é invertível em A_e e $tr_\alpha|_{A_e} = tr_{\alpha|_{\mathcal{G}(e)}}$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$.

Então A é uma extensão de Galois α-parcial de A^α se, e somente se, o contexto de Morita $(A \star_\alpha \mathcal{G}, A^\alpha, A, A, \tau, \tau')$ é estrito.

2.2 Teoria de Galois para ação parcial ortogonal de grupoide

Um grupoide $\mathcal{G}$ é dito *conexo* se para todos $e, f \in \mathcal{G}$, $\mathcal{G}(e, f) \neq \emptyset$. É fácil ver que todo grupoide é uma união disjunta de subgrupoides conexos. De fato, definimos a seguinte relação de equivalência em $\mathcal{G}_0$: para todos $e, f \in \mathcal{G}_0$,

$$e \sim f \text{ se, e somente se, } \mathcal{G}(e, f) \neq \emptyset.$$

Toda classe de equivalência $\bar{e} \in \mathcal{G}_0/\!\sim$ determina um subgrupoide conexo $\mathcal{G}_{\bar{e}}$ de $\mathcal{G}$, cujo conjunto de identidades é $\bar{e}$. O subgrupoide $\mathcal{G}_{\bar{e}}$ é chamado de *a componente conexa de $\mathcal{G}$ associada a e*. É claro que $\mathcal{G} = \dot{\bigcup}_{\bar{e}\in\mathcal{G}_0/\sim}\mathcal{G}_{\bar{e}}$.

Dado um conjunto não vazio S, relembramos a leitora e o leitor de que o *grupoide grosseiro* associado a S é o grupoide $S^2 = S \times S$, onde $(s,t)(u,v)$ está definido se, e somente se, $s = v$ e nesse caso $(s,t)(u,v) = (u,t)$. Se $\mathcal{G}$ é um grupoide conexo, [37, Proposition 3.3.6] mostra que existe uma forte relação entre $\mathcal{G}$ e seus grupos de isotropia. Nessa condição, temos que $\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}_0^2 \times \mathcal{G}(e)$, e esse isomorfismo não depende da escolha de $e \in \mathcal{G}_0$, isto é, se $\mathcal{G}$ é conexo, então $\mathcal{G}(e) \simeq \mathcal{G}(f)$ como grupos, para todos $e, f \in \mathcal{G}_0$.

Note que quaisquer dois grupoides grosseiros finitos com o mesmo número de identidades são isomorfos. Logo, vamos apenas denotar por $\mathcal{A}_n$ o grupoide grosseiro com n identidades. Logo, se $\mathcal{G}$ é um grupoide finito conexo com $|\mathcal{G}_0| = n$ e $e \in \mathcal{G}_0$, temos que $\mathcal{G} \simeq \mathcal{A}_n \times \mathcal{G}(e)$.

Lembre-se que nesse capítulo estamos considerando α uma ação parcial ortogonal unitária do grupoide $\mathcal{G}$ no anel A e β sua globalização, ação ortogonal do grupoide $\mathcal{G}$ no anel B, de forma que $A_e \subseteq B_e$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$. O nosso primeiro resultado aprimora o Lema 2.1.5.

Lema 2.2.1. *Seja α uma ação parcial ortogonal unitária de um grupoide finito $\mathcal{G}$ em um anel $A = \bigoplus_{e \in \mathcal{G}_0} A_e$. Considere β globalização de α, ação global de $\mathcal{G}$ em um anel B. São equivalentes:*

(i) A é uma extensão de Galois α-parcial de A^α.

(ii) B é uma extensão β-Galois de B^β.

Demonstração. (ii) $\Rightarrow$ (i) segue do Lema 2.1.5.

(i) $\Rightarrow$ (ii): No Lema 2.1.5 foi provado que (i) $\Rightarrow$ (ii) quando vale a seguinte condição: Para todo $g \in \mathcal{G}$, $g_{r(g),i}^{-1} g g_{d(g),i} \in \mathcal{G}_0 \Rightarrow g \in \mathcal{G}_0$, para todo $1 \leq i \leq n_{r(g)} = n_{d(g)}$. Vamos provar que sempre podemos obter uma enumeração de forma que essa condição seja satisfeita. Para isso, suponha que $\mathcal{G}$ é conexo. Para o caso não conexo, basta obter essa enumeração para cada componente conexa.

Como $\mathcal{G}$ é conexo e finito, $\mathcal{G}$ é isomorfo ao grupoide $\mathcal{A}_n \times G$, onde $\mathcal{A}_n$ é o grupoide grosseiro com n identidades e G é um grupo finito, digamos com m elementos. Enumere G da seguinte forma: $G = \{1_G = g_0, \ldots, g_{m-1}\}$. Considere ainda $\sigma \in \mathbb{S}_n$ definida por $\sigma(i) = i - 1$, para todo $1 < i \leq n$ e $\sigma(1) = n$, um elemento do grupo de permutações de n elementos (rotação). Assim, dado $1 \leq j \leq mn$, temos que existem únicos $0 \leq q \leq m-1$ e $0 \leq r \leq n-1$ tais que $j = qn + r + 1$. Definimos, então,

$$g_{e_i,j} = (e_{\sigma^r(i)}, e_i, g_q).$$

Note que com essa enumeração $g_{e_i,1} = (e_{\sigma^0(i)}, e_i, g_0) = (e_i, e_i, 1_G) = e_i$ e dados $\ell =$

$(e_i, e_j, g_k) \in \mathcal{G}$, $1 \leq u = qn + r \leq mn$, temos que

$$\begin{aligned} g_{r(\ell),u}^{-1} \ell g_{d(\ell),u} &= g_{e_j,u}^{-1} \ell g_{e_i,u} \\ &= (e_{\sigma^r(j)}, e_j, g_q)^{-1}(e_i, e_j, g_k)(e_{\sigma^r(i)}, e_i, g_q) \\ &= (e_j, e_{\sigma^r(j)}, g_q^{-1})(e_i, e_j, g_k)(e_{\sigma^r(i)}, e_i, g_q) \\ &= (e_{\sigma^r(i)}, e_{\sigma^r(j)}, g_q^{-1} g_k g_q). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} g_{r(\ell),u}^{-1} \ell g_{d(\ell),u} \in \mathcal{G}_0 &\Leftrightarrow \sigma^r(i) = \sigma^r(j) \text{ e } g_q^{-1} g_k g_q = 1_G \\ &\Leftrightarrow i = j \text{ e } g_k = g_q g_q^{-1} = 1_G \\ &\Leftrightarrow \ell \in \mathcal{G}_0, \end{aligned}$$

o que encerra a demonstração. $\square$

Com esse resultado, temos as ferramentas necessárias para provar o Teorema de Correspondência de Galois. A partir de agora, A sempre denotará um anel comutativo. Para facilidade de compreensão, dividiremos o resultado principal em alguns subresultados.

Definição 2.2.2. Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide, $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g \in \mathcal{G}}$ uma ação parcial de $\mathcal{G}$ em um anel A e C uma A^α-subálgebra de A. Definimos

$$\mathcal{G}_C = \{g \in \mathcal{G} : \alpha_g(a 1_{g^{-1}}) = a 1_g, \text{ para todo } a \in C\},$$

o *subgrupoide que fixa* C.

É fácil ver que $\mathcal{G}_C$ sempre é tal que $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}_C$. Entretanto, $\mathcal{G}_C$ nem sempre é um subgrupoide de $\mathcal{G}$, nem mesmo quando $\mathcal{G}$ é um grupo. Um exemplo desse fenômeno pode ser encontrado em [19, Example 6.3].

Definição 2.2.3. Seja C uma A^α-subálgebra de A, onde α é uma ação parcial de um grupoide $\mathcal{G}$ em A. Dizemos que C é

(i) A^α-*separável* se C é um $(C \otimes_{A^\alpha} C^{op})$-módulo projetivo [14, p. 3].

(ii) α-*forte* se para todos $g, h \in \mathcal{G}$, com $r(g) = r(h)$ e $g^{-1}h \notin \mathcal{G}_C$, e para todo idempotente não nulo $e \in A_g \cup A_h$ existe um elemento $a \in C$ tal que $\alpha_g(a 1_{g^{-1}})e \neq \alpha_h(a 1_{h^{-1}})e$ [11, Proposition 5.5].

Observação 2.2.4. Quanto a B ser A^α-separável, temos a seguinte definição equivalente em [33, Thèoréme III.1.4]: Existe $e = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in B \otimes B$ idempotente tal que

(i) $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 1_B$.

(ii) $e(1_B \otimes x - x \otimes 1_B) = 0$, para todo $x \in B$.

Dizemos que e é um *idempotente de separabilidade* da extensão $B|_{A^\alpha}$.

A intuição por trás das demonstrações dos resultados a seguir é levar os problemas que temos no caso parcial para o caso global através da globalização. A Teoria de Galois para ações ortogonais de grupoide já foi construída em [46], de forma que podemos usá-la para trabalhar no caso global. Uma vez resolvidos os problemas no caso global, trazemos de volta para o caso parcial, realizando as adequações necessárias.

Teorema 2.2.5. *Seja A uma extensão de Galois α-parcial de A^α e $\mathcal{H}$ um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$. Então $\alpha|_{\mathcal{H}}$ é uma ação parcial de $\mathcal{H}$ em A e A é uma extensão de Galois $\alpha|_{\mathcal{H}}$-parcial de $C = A^{\alpha|_{\mathcal{H}}}$. Além disso, C é A^α-separável, α-forte e $\mathcal{G}_C = \mathcal{H}$.*

Demonstração. É fácil ver que $\alpha|_{\mathcal{H}}$ é uma ação parcial de $\mathcal{H}$ em A e que A é uma extensão de Galois $\alpha|_{\mathcal{H}}$-parcial de C com o mesmo sistema de coordenadas galoisianas parciais de A sobre A^α.

Considere β a globalização de α, ação global de $\mathcal{G}$ em um anel B. Definindo $B'_g = \sum_{\substack{h\in\mathcal{H}\\ r(h)=r(g)}} \beta_h(A_{d(h)})$ e $\beta'_g = \beta_g|_{B'_{g^{-1}}}$, temos que existe uma ação global β' de $\mathcal{H}$ em $B' = \bigoplus_{e\in\mathcal{H}_0} B'_e$. De fato,

$$\begin{aligned}
\beta'_h(B'_{h^{-1}}) &= \beta'_h\left(\sum_{\substack{k\in\mathcal{H}\\ r(k)=d(h)}} \beta_k(A_{d(k)})\right)\\
&= \sum_{\substack{k\in\mathcal{H}\\ r(k)=d(h)}} \beta_h(\beta_k(A_{d(k)}))\\
&= \sum_{\substack{k\in\mathcal{H}\\ r(k)=d(h)}} \beta_{hk}(A_{d(k)})\\
&= \sum_{\substack{\ell\in\mathcal{H}\\ r(\ell)=r(h)}} \beta_\ell(A_{d(\ell)}) = B'_h.
\end{aligned}$$

Como β_h é isomorfismo, para todo $h \in \mathcal{H}$, segue que β'_h também o é sobre sua imagem, pois é apenas uma restrição. Agora, claramente $\beta'_e = \beta_e|_{B'_e} = \mathrm{Id}_{B_e}|_{B'_e} = \mathrm{Id}_{B'_e}$, para todo $e \in \mathcal{H}_0$, e dados $(h,k) \in \mathcal{H}_2$, $\beta'_h \circ \beta'_k = \beta_h|_{B'_{d(h)}} \circ \beta_k|_{B'_{d(k)}} = \beta_h|_{B'_{r(k)}} \circ \beta_k|_{B'_{d(k)}} = \beta_h \circ \beta_k|_{B'_{d(k)}} = \beta_{hk}|_{B'_{d(hk)}} = \beta'_{hk}$.

Mais ainda, β' é a globalização de $\alpha|_{\mathcal{H}}$. De fato, A_e é um ideal de B'_e por definição, para todo $e \in \mathcal{H}_0$. Mais ainda, $A_h = A_{r(h)} \cap \beta_h(A_{d(h)})$, para todo $h \in \mathcal{H}$. Em particular, como $A_{d(h)} \subseteq B'_{d(h)}$, segue que $\beta_h(A_{d(h)}) = \beta'_h(A_{d(h)})$, de onde $A_h = A_{r(h)} \cap \beta'_h(A_{d(h)})$, para todo $h \in \mathcal{H}$. Pela mesma razão segue que $\beta'_h(a) = \alpha_h(a)$, para todos $a \in A_{h^{-1}}, h \in \mathcal{H}$. Finalmente, a condição (iv) de globalização segue diretamente da definição de B_h, para todo $h \in \mathcal{H}$.

A ação β de $\mathcal{G}$ em B induz uma ação parcial γ de $\mathcal{G}$ em B' via restrição padrão, e β é a globalização de γ. Portanto, a demonstração de [8, Theorem 4.6] implica que $B^{\beta}1_{B'} = (B')^{\gamma}$ e $B^{\beta}1_A = A^{\alpha}$. Consequentemente, $(B')^{\gamma}1_A = B^{\beta}1_{B'}1_A = B^{\beta}1_A = A^{\alpha}$. Além disso, $(B')^{\beta'}1_A = A^{\alpha|_{\mathcal{H}}}$.

Por outro lado, $B = B1_{B'} \oplus B(1_B - 1_{B'}) = B' \oplus B(1_B - 1_{B'})$. Temos que

$$\beta_h(B(1_B - 1_{B'})1'_{h^{-1}}) \subseteq B(1_B - 1_{B'}),$$

para todo $h \in \mathcal{H}$, pois

$$\begin{aligned}
\beta_h(b(1_B - 1'_B)1'_{h^{-1}}) &= \beta_h(b1'_{h^{-1}}) - \beta_h(b1_{B'}1'_{h^{-1}}) \\
&= \beta_h(b1'_{h^{-1}}) - \beta_h(b1'_{h^{-1}})\beta_h(1_{B'}1'_{h^{-1}}) \\
&= \beta_h(b1'_{h^{-1}}) - \beta_h(b1'_{h^{-1}})\beta'_h(1''_{h^{-1}}) \\
&= \beta_h(b1'_{h^{-1}}) - \beta_h(b1'_{h^{-1}})1''_h \\
&= \beta_h(b1'_{h^{-1}})1_B - \beta_h(b1'_{h^{-1}})1_{B'} \\
&= \beta_h(b1'_{h^{-1}})(1_B - 1_{B'}).
\end{aligned}$$

Assim, $B^{\beta|_{\mathcal{H}}} = (B')^{\beta|_{\mathcal{H}}} \oplus (B(1_B - 1_{B'}))^{\beta|_{\mathcal{H}}}$ e $B^{\beta|_{\mathcal{H}}}1_{B'} = (B')^{\beta|_{\mathcal{H}}}1_{B'} = (B')^{\beta|_{\mathcal{H}}} = (B')^{\beta'}$. Logo, $C = A^{\alpha|_{\mathcal{H}}} = (B')^{\beta'}1_A = B^{\beta|_{\mathcal{H}}}1_{B'}1_A = B^{\beta|_{\mathcal{H}}}1_A$.

Pelo Lema 2.2.1, temos que B é uma extensão β-Galois de B^{β}. Logo, por [46, Theorem 4.1], a B^{β}-subálgebra $B^{\beta|_{\mathcal{H}}}$ é separável, β-forte e $\mathcal{H} = \mathcal{G}_{B^{\beta|_{\mathcal{H}}}}$. Se $e' \in B^{\beta|_{\mathcal{H}}} \otimes_{B^{\beta}} B^{\beta|_{\mathcal{H}}}$ é o idempotente de separabilidade de $B^{\beta|_{\mathcal{H}}}$ sobre B^{β}, então $e = e'(1_A \otimes 1_A) \in B^{\beta|_{\mathcal{H}}}1_A \otimes_{B^{\beta}1_A} B^{\beta|_{\mathcal{H}}}1_A = A^{\alpha|_{\mathcal{H}}} \otimes_{A^{\alpha}} A^{\alpha|_{\mathcal{H}}} = C \otimes_{A^{\alpha}} C$ é o idempotente de separabilidade de C sobre A^{α}.

Vamos agora provar que C é α-forte. Sejam $g, h \in \mathcal{G}$ tais que $(g^{-1}, h) \in \mathcal{G}_2$, $g^{-1}h \notin \mathcal{G}_C$ e $e \in A_g \cup A_h$ um idempotente não nulo. Como $B^{\beta|_{\mathcal{H}}}$ é β-forte e $g^{-1}h \notin \mathcal{G}_C \supseteq \mathcal{H} = \mathcal{G}_{B^{\beta|_{\mathcal{H}}}}$, se $e1_g1_h \neq 0$, segue que existe $b \in B^{\beta|_{\mathcal{H}}}$ tal que $\beta_g(b1'_{g^{-1}})e1_g1_h \neq \beta_h(b1'_{h^{-1}})e1_g1_h$. Consequentemente $b1_A \in B^{\beta|_{\mathcal{H}}}1_A = C$ e $\alpha_g(b1_A1_{g^{-1}})e1_g1_h = \alpha_g(b1_{g^{-1}})e1_g1_h = \beta_g(b1'_{g^{-1}})e1_g1_h \neq \beta_h(b1'_{h^{-1}})e1_g1_h = \alpha_h(b1_{h^{-1}})e1_g1_h = \alpha_h(b1_A1_{h^{-1}})e1_g1_h$, de onde podemos concluir que $\alpha_g(b1_A1_{g^{-1}})e \neq \alpha_h(b1_A1_{h^{-1}})e$. Se $e1_g1_h = 0$ e $e \in A_g$, então $\alpha_g(1_A1_{g^{-1}})e = 1_ge = e \neq 0 = e1_g1_h = e1_h = \alpha_h(1_A1_{h^{-1}})e$. O caso em que $e \in A_h$ é similar.

Finalmente, resta-nos provar que $\mathcal{G}_C \subseteq \mathcal{H}$, pois já temos que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}_C$. Suponha, por contradição, que existe $g \in \mathcal{G}_C \setminus \mathcal{H}$. Como $B^{\beta|_{\mathcal{H}}}$ é β-forte, existe $b \in B^{\beta|_{\mathcal{H}}}$ tal que $\beta_g(b1'_{g^{-1}})1_g \neq \beta_{r(g)}(b1'_{r(g)})1_g = b1_g$. Logo, $\alpha_g(b1_A1'_{g^{-1}}) = \beta_g(b1'_{g^{-1}})1_g \neq b1_g = b1_A1_g$, que é uma contradição, pois $g \in \mathcal{G}_C$ e $b1_A \in B^{\beta|_{\mathcal{H}}}1_A = C$. Logo, $\mathcal{H}$ precisa coincidir com $\mathcal{G}_C$, finalizando a demonstração. $\square$

Esse resultado prova metade do Teorema da Correspondência de Galois. Antes de provarmos a outra metade, precisaremos de um lema técnico.

Lema 2.2.6. *Seja A uma extensão de Galois α-parcial de A^{α} e C uma A^{α}-subálgebra* *separável e α-forte de A. Então existem $x_i, y_i \in C$, $1 \leq i \leq n$, tais que $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1_A$ e $\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_g(y_i 1_{g^{-1}}) = 0$, para todo $g \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_C$.*

Demonstração. Seja $e = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in C \otimes_{A^\alpha} C$ o idempotente de separabilidade de C sobre A^α. Por definição temos que $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1_A$. Seja $g \in \mathcal{G}$ e defina agora $e_g = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_g(y_i 1_{g^{-1}}) \in A_g$, que é um idempotente pois $e_g = \mu(\theta_g(e))$, onde $\theta_g : C \otimes C \to C \otimes A_g := (C \otimes A)(1 \otimes 1_g)$ é o homomorfismo de C-álgebras dado por $\theta_g \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i \alpha_g(b_i 1_{g^{-1}})$ e $\mu : C \otimes C \to C$ é a aplicação multiplicação, que é um homomorfismo pois C é comutativo.

Note agora que $a e_g = \alpha_g(a 1_{g^{-1}}) e_g$, para todo $a \in C$. De fato,

$$
\begin{aligned}
a e_g &= a e_g 1_g = a\mu(\theta_g(e)) 1_g \\
&= a\mu((\mathrm{Id}_C \otimes \alpha_g(-1_{g^{-1}}))(e)) 1_g \\
&= a\mu((\mathrm{Id}_C \otimes \alpha_g(-1_{g^{-1}}))(e)) 1_g \\
&= (a \otimes 1_g) \cdot \mu((\mathrm{Id}_C \otimes \alpha_g(-1_{g^{-1}}))(e)) \\
&= \mu((a \otimes 1_g) \cdot (\mathrm{Id}_C \otimes \alpha_g(-1_{g^{-1}}))(e)) \\
&= \mu((\mathrm{Id}_C \otimes \alpha_g(-1_{g^{-1}}))(a \otimes 1_A) \cdot (\mathrm{Id}_C \otimes \alpha_g(-1_{g^{-1}}))(e)) \\
&= \mu((\mathrm{Id}_C \otimes \alpha_g(-1_{g^{-1}}))((a \otimes 1_A) \cdot e)) \\
&= \mu((\mathrm{Id}_C \otimes \alpha_g(-1_{g^{-1}}))((1_A \otimes a) \cdot e)) \\
&= \mu((\mathrm{Id}_C \otimes \alpha_g(-1_{g^{-1}}))(1_A \otimes a) \cdot (\mathrm{Id}_C \otimes \alpha_g(-1_{g^{-1}}))(e)) \\
&= \mu((1_A \otimes \alpha_g(a 1_{g^{-1}}) \cdot (\mathrm{Id}_C \otimes \alpha_g(-1_{g^{-1}}))(e)) \\
&= (1_A \otimes \alpha_g(a 1_{g^{-1}}) \cdot \mu((\mathrm{Id}_C \otimes \alpha_g(-1_{g^{-1}}))(e)) \\
&= \alpha_g(a 1_{g^{-1}}) \mu((\mathrm{Id}_C \otimes \alpha_g(-1_{g^{-1}}))(e)) \\
&= \alpha_g(a 1_{g^{-1}}) e_g.
\end{aligned}
$$

Como C é α-forte, segue que $e_g = 0$ a menos que $g \in \mathcal{G}_C$, de onde segue o resultado. □

Teorema 2.2.7. *Seja A uma extensão de Galois α-parcial de A^α e C uma A^α-subálgebra A^α-separável e α-forte de A tal que $\mathcal{G}_C$ é um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$. Então $A^{\alpha|_{\mathcal{G}_C}} = C$.*

Demonstração. Sempre vale que $C \subseteq A^{\alpha|_{\mathcal{G}_C}}$. Provaremos a inclusão reversa. Seja β a globalização de α, ação global de $\mathcal{G}$ em um anel B. Consideramos ainda a subálgebra

$$B' = \bigoplus_{e \in \mathcal{G}_0} \left(\sum_{\substack{g \in \mathcal{G}_C \\ r(g) = e}} \beta_g(A_{d(g)}) \right),$$

onde $\mathcal{G}_C$ age via β' como na demonstração do Teorema 2.2.5 e β' é a globalização da ação parcial $\alpha|_{\mathcal{G}_C}$ de $\mathcal{G}_C$ em A.

Pelo Teorema 4.6 de [8], existe um homomorfismo de anéis $\psi_{\mathcal{G}_C} : A \to B'$ tal que $\psi_{\mathcal{G}_C}|_{A^{\alpha|\mathcal{G}_C}} : A^{\alpha|\mathcal{G}_C} \to (B')^{\beta'}$ é um isomorfismo de anéis e $\psi_{\mathcal{G}_C}(a)1_A = a$, para todo $a \in A^{\alpha|\mathcal{G}_C}$. Seja $C' = \psi_{\mathcal{G}_C}(C)$.

Afirmação 1: Existem elementos $x_i', y_i' \in C'$, $1 \leq i \leq n$, tais que $\sum_{i=1}^n x_i'y_i' = 1_{B'}$ e $\sum_{i=1}^n x_i'\beta_g'(y_i'1_{g^{-1}}') = 0$, para todo $g \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_C$.

De fato, considere $x_i, y_i \in C$, $i \leq i \leq n$, tais que $\sum_{i=1}^n x_iy_i = 1_A$ e $\sum_{i=1}^n x_i\alpha_g(y_i1_{g^{-1}}) = 0$, para todo $g \in \mathcal{G}\setminus\mathcal{G}_C$, que existem pois C é A^α-separável e α-forte. Como $x_i, y_i \in C \subseteq A$, dado $g \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_C$, temos que

$$\sum_{i=1}^n x_i\beta_g(y_i1_{g^{-1}}') = \sum_{i=1}^n x_i\beta_g(y_i1_A1_{g^{-1}}') = \sum_{i=1}^n x_i\beta_g(y_i1_{g^{-1}}) = \sum_{i=1}^n x_i\alpha_g(y_i1_{g^{-1}}) = 0.$$

Sejam $x_i' = \psi_{\mathcal{G}_C}(x_i)$ e $y_i' = \psi_{\mathcal{G}_C}(y_i)$. Inicialmente, temos que

$$\sum_{i=1}^n x_i'y_i' = \psi_{\mathcal{G}_C}\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right) = \psi_{\mathcal{G}_C}(1_A) = 1_{B'}.$$

Sejam agora $e \in \mathcal{G}_0$ e $\{h_{1,e} = e, h_{2,e}, \ldots, h_{m_e,e}\} = \mathcal{G}_C(-,e) = \{g \in \mathcal{G}_C : r(g) = e\}$, onde $m_e > 0$. Lembre que $1_e' = v_{1,e} + \cdots + v_{m_e,e}$, onde $v_{1,e} = 1_e$ e $v_{j,e} = (1_e' - 1_e)(1_e' - \beta_{h_{2,e}}(1_{d(h_{2,e})}))\cdots(1_e' - \beta_{h_{j-1,e}}(1_{d(h_{j-1,e})}))\beta_{h_{j,e}}(1_{d(h_{j,e})})$.

Definindo $\psi_e : A \to B'$ como

$$\psi_e(a) = \sum_{j=1}^{m_e} \beta_{h_{j,e}}(a_{d(h_{j,e})}1_{h_{j,e}^{-1}}')v_{j,e},$$

temos que $\psi_{\mathcal{G}_C} = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \psi_e$.

Dessa forma, para todo $g \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_C$, temos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n x_i'\beta_g(y_i'1_{g^{-1}}')\\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \sum_{1\leq j,k\leq m_e} \beta_{h_{j,e}}((x_i)_{d(h_{j,e})}1_{h_{j,e}^{-1}}')v_{j,e}\beta_g(\beta_{h_{k,e}}((y_i)_{d(h_{k,e})}1_{h_{k,e}^{-1}}')v_{k,e}1_{g^{-1}}')\\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{1\leq j,k\leq m_{r(g)}} \beta_{h_{j,r(g)}}((x_i)_{d(h_{j,r(g)})}1_{h_{j,r(g)}^{-1}}')v_{j,r(g)}\beta_g(\beta_{h_{k,d(g)}}((y_i)_{d(h_{k,d(g)})}1_{h_{k,d(g)}^{-1}}')v_{k,d(g)})\\
&= \sum_{1\leq j,k\leq m_{r(g)}} v_{j,r(g)}\beta_g(v_{k,d(g)})\beta_{h_{j,r(g)}}\left(\sum_{i=1}^n (x_i)_{d(h_{j,r(g)})}\beta_{h_{j,r(g)}^{-1}gh_{k,d(g)}}((y_i)_{d(h_{k,d(g)})}1_{h_{k,d(g)}^{-1}}')\right)\\
&= \sum_{1\leq j,k\leq m_{r(g)}} v_{j,r(g)}\beta_g(v_{k,d(g)})\beta_{h_{j,r(g)}}\left(\sum_{i=1}^n x_i\beta_{h_{j,r(g)}^{-1}gh_{k,d(g)}}(y_i1_{h_{k,d(g)}^{-1}}')\right)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois se $h_{j,r(g)}^{-1}gh_{k,d(g)} \in \mathcal{G}_C$, então existe $h \in \mathcal{G}_C$ tal que $h_{j,r(g)}^{-1}gh_{k,d(g)} = h$. Mas então $g = h_{j,r(g)}hh_{k,d(g)}^{-1}$, de onde segue que $g \in \mathcal{G}_C$, uma contradição. Isso completa a demonstração da Afirmação 1.

Agora, como $\mathcal{G}_C \subseteq \mathcal{G}_{C'}$ e os elementos $x'_i, y'_i \in C'$, temos, em particular, que $\mathcal{G}_{C'} = \mathcal{G}_C$.

Considere novamente a restrição γ de β a B', ação parcial de $\mathcal{G}$ em B' cuja globalização é β. Segue de [8, Theorem 4.6] que existe um isomorfismo de anéis $B^\beta \to (B')^\gamma$ dado por $x \mapsto x1_{B'}$. Além disso, $x \mapsto x1_A$ é um isomorfismo de B^β em A^α. Logo, existe um isomorfismo $(B')^\gamma \to A^\alpha$ dado por $x1_{B'} \mapsto x1_A$, cuja inversa é $\psi_{\mathcal{G}_C}|_{A^\alpha}$. Logo, $\psi_{\mathcal{G}_C}(A^\alpha) = (B')^\gamma$ e consequentemente $C' = \psi_{\mathcal{G}_C}(C)$ é separável sobre $(B')^\gamma$.

Note que $B^{\beta|_{\mathcal{G}_C}} = B^{\beta|_{\mathcal{G}_C}} 1_{B'} \oplus B^{\beta|_{\mathcal{G}_C}}(1_B - 1_{B'}) = (B1_{B'})^{\beta|_{\mathcal{G}_C}} \oplus B^{\beta|_{\mathcal{G}_C}}(1_B - 1_{B'}) = (B')^{\beta|_{\mathcal{G}_C}} \oplus B^{\beta|_{\mathcal{G}_C}}(1_B - 1_{B'}) = (B')^{\beta'} \oplus B^{\beta|_{\mathcal{G}_C}}(1_B - 1_{B'})$. Em particular, $B^{\beta|_{\mathcal{G}_C}} 1_A = (B')^{\beta'} 1_A = A^{\alpha|_{\mathcal{G}_C}}$. Considere a subálgebra $\bar{C} = C' \oplus B^{\beta|_{\mathcal{G}_C}}(1_B - 1_{B'})$ de $B^{\beta|_{\mathcal{G}_c}}$.

Afirmação 2: $\bar{C}$ é B^β-separável e β-forte.

De fato, $B^{\beta|_{\mathcal{G}_C}}$ é separável sobre B^β por [46, Theorem 4.1(ii)], de onde segue que $B^{\beta|_{\mathcal{G}_C}}(1_B - 1_{B'})$ é separável sobre $B^\beta(1_B - 1_{B'})$. Como C' é $(B')^\gamma$-separável e $(B')^\gamma = B^\beta 1_{B'}$, segue que $\bar{C}$ é separável sobre $(B')^\gamma \oplus B^\beta(1_B - 1_{B'}) = B^\beta$.

Para provar que $\bar{C}$ é β-forte, suponha que $g \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_C$, que $e \in B_g$ é um idempotente e que $\beta_g((x+y)1'_{g^{-1}})e = (x+y)e$, para todo $x \in C'$ e $y \in B^{\beta|_{\mathcal{G}_C}}(1_B - 1_{B'})$.

Escreva $e = e_1 + e_2$, onde $e_1 = e1_{B'}$ e $e_2 = e(1_B - 1'_B)$. Note que $e_1, e_2 \in B_g$. Então multiplicando $\beta_g((x+y)1'_{g^{-1}})e = (x+y)e$ por $1_{B'}$, obtemos $\beta_g((x+y)1_{g^{-1}})e_1 = (x+y)e_1 = xe_1$, para todo $x \in C'$ e $y \in B^{\beta|_{\mathcal{G}_C}}(1_B - 1_{B'})$. Em particular, tomando $y = 0$, temos que $\beta_g(x1'_{g^{-1}})e_1 = xe_1$, para todo $x \in C'$.

Pela primeira afirmação, existem $x'_i, y'_i \in C'$, $1 \leq i \leq n$, tais que $\sum_{i=1}^n x'_i y'_i = 1_{B'}$ e $\sum_{i=1}^n x'_i \beta_g(y'_i 1'_{g^{-1}}) = 0$, para todo $g \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_C$. Logo, $0 = \sum_{i=1}^n x'_i \beta_g(y'_i 1'_{g^{-1}})e_1 = \sum_{i=1}^n x'_i y'_i e_1 = 1_{B'} e_1 = e_1$.

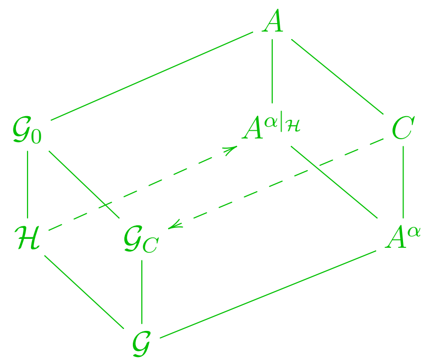
Assim, concluímos que $e = e_2$ e $\beta_g((x+y)1'_{g^{-1}})e_2 = (x+y)e_2 = ye_2$, para todo $x \in C'$ e $y \in B^{\beta|_{\mathcal{G}_C}}(1_B - 1_{B'})$. Tomando $x = 0$, obtemos $\beta_g(y1'_{g^{-1}})e_2 = ye_2$, para todo $y \in B^{\beta|_{\mathcal{G}_C}}(1_B - 1_{B'})$. Como $B^{\beta|_{\mathcal{G}_C}}$ é β-forte e separável sobre B^β, segue que existem $u_j, v_j \in B^{\beta|_{\mathcal{G}_C}}$, $1 \leq j \leq m$, tais que $\sum_{j=1}^m u_j v_j = 1_B$ e $\sum_{j=1}^m u_j \beta_g(v_j 1'_{g^{-1}}) = 0$, para todo $g \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_C$. Consequentemente, $0 = \sum_{j=1}^m u_j \beta_g(v_j(1_B - 1_{B'})1'_{g^{-1}})e_2 = \sum_{j=1}^m u_j v_j \beta_g((1_B - 1_{B'})1'_{g^{-1}})e_2 = 1_B(1'_g - 1''_g)e_2 = (1_B - 1_{B'})e_2 = e_2$, de onde segue que $e = 0$, ou seja, que vale a Afirmação 2.

Agora podemos provar o teorema. Pela Afirmação 2 e [46, Theorem 4.5] $\bar{C} = B^{\beta|_{\mathcal{G}'_{\bar{C}}}}$, onde $\mathcal{G}'_{\bar{C}} = \{g \in \mathcal{G} : \beta_h(x1'_{h^{-1}}) = x1'_h, \text{ para todo } x \in \bar{C}\}$. Além disso, pela definição de $\bar{C}$, $g \in \mathcal{G}$ está em $\mathcal{G}_{\bar{C}} = \mathcal{G}'_{\bar{C}}$ se, e somente se, $g \in \mathcal{G}_{C'} = \mathcal{G}_C$, de onde $\mathcal{G}_C = \mathcal{G}_{\bar{C}}$. Segue que $\bar{C} = B^{\beta|_{\mathcal{G}_C}}$ e $A^{\alpha|_{\mathcal{G}_C}} = (B')^{\beta'} 1_A = B^{\beta|_{\mathcal{G}_C}} 1_{B'} 1_A = B^{\beta|_{\mathcal{G}_C}} 1_A = \bar{C} 1_A = C' 1_A = C$. □

Os Teoremas 2.2.5 e 2.2.7 provam o principal resultado dessa seção.

Teorema 2.2.8 (Teorema Fundamental da Teoria de Galois para Ações Parciais de Grupoide)**.** *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide finito agindo parcialmente em um anel A via ação parcial ortogonal e unitária $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g \in \mathcal{G}}$ tal que $A_g \neq 0$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Suponha que A é* *uma extensão de Galois α-parcial sobre A^α. Então existe uma correspondência biunívoca entre os subgrupoides amplos $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ e as A^α-subálgebras A^α-separáveis e α-fortes B de A tais que $\mathcal{G}_B$ é um subgrupoide de $\mathcal{G}$, dada por $\mathcal{H} \mapsto A^{\beta|_\mathcal{H}}$ com inversa $B \mapsto \mathcal{G}_B$.*

Abaixo, uma representação gráfica do Teorema 2.2.8:



Queremos, agora, provar uma correspondência envolvendo quocientes. Para isso, relembraremos algumas definições e resultados.

Definição 2.2.9. Seja $\mathcal{G}$ um grupoide e $\mathcal{H}$ um subgrupoide de $\mathcal{G}$. Dizemos que $\mathcal{H}$ é um subgrupoide *estritamente normal* de $\mathcal{G}$ se

(i) $\mathcal{H}$ é um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$;

(ii) $d(h) = r(h)$, para todo $h \in \mathcal{H}$;

(iii) $g^{-1}\mathcal{H}_{r(g)}g = \mathcal{H}_{d(g)}$, para todo $g \in \mathcal{G}$.

Definição 2.2.10. Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide e $\mathcal{H}$ um subgrupoide estritamente normal de $\mathcal{G}$. Definimos a relação $\equiv_\mathcal{H}$ em $\mathcal{G}$ por, dados $a, b \in \mathcal{G}$

$$a \equiv_\mathcal{H} b \iff (b^{-1}, a) \in \mathcal{G}_2 \text{ e } b^{-1}a \in \mathcal{H}.$$

Em outras palavras, $a \equiv_\mathcal{H} b$ se, e somente se, existe $h \in \mathcal{H}$ tal que $(b, h) \in \mathcal{G}_2$ e $a = bh$. Por esse motivo denotaremos a $\equiv_\mathcal{H}$-classe do elemento $g \in \mathcal{G}$ por $g\mathcal{H}$.

Lema 2.2.11. *[46, Lemmas 3.8, 3.12] A relação $\equiv_\mathcal{H}$ definida acima é uma relação de equivalência e uma congruência. O conjunto $\mathcal{G}/\mathcal{H} := \mathcal{G}/\equiv_\mathcal{H}$ é um grupoide cuja operação parcial é dada por*

$$g\mathcal{H} \cdot h\mathcal{H} \text{ está definido} \iff (g, h) \in \mathcal{G}_2$$

e neste caso

$$g\mathcal{H} \cdot h\mathcal{H} = gh\mathcal{H}.$$

Podemos, então, enunciar o teorema desejado.

Teorema 2.2.12. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide finito agindo parcialmente em um anel A via ação parcial ortogonal e unitária $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g\in\mathcal{G}}$. Suponha que A é uma extensão de Galois α-parcial sobre A^α. Seja $\mathcal{H}$ um subgrupoide estritamente normal de $\mathcal{G}$. Então α induz uma ação parcial ε de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ em $A^{\alpha|_\mathcal{H}}$ tal que $A^{\alpha|_\mathcal{H}}$ é uma extensão de Galois ε-parcial de A^α e $(A^{\alpha|_\mathcal{H}})^\varepsilon = A^\alpha$.*

Terminaremos essa seção provando o teorema acima. Para isso, precisaremos relembrar algumas aplicações construídas em [8] e provar alguns resultados auxiliares que serão inspirados na construção da seção 3 de [6]. Novamente, a intuição por trás das demonstrações será levar nossos problemas do contexto parcial para o contexto global através da globalização. Como já temos uma Teoria de Galois para quociente por grupoides estritamente normais em [46], bastará construir a ação global do grupoide quociente e restringi-la para o subanel desejado. Embora a ideia por trás da demonstração pareça simples, os próximos resultados apresentam diversas tecnicalidades.

Relembramos a leitora e o leitor de que estamos considerando α uma ação parcial ortogonal e unitária de um grupoide finito (não ordenado) $\mathcal{G}$ em um anel comutativo A, β é a globalização de α, ação global de $\mathcal{G}$ em um anel B, de forma que $A_e \subseteq B_e$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$. Considere 1_g a unidade do ideal A_g e $1'_g$ a unidade do ideal B_g. No Teorema 2.2.7 usamos uma aplicação sem defini-la explicitamente, mas agora essa definição será necessária.

Definição 2.2.13. Seja $\mathcal{H}$ um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$ que é uma união disjunta de grupos. Seja $e \in \mathcal{G}_0$ e escreva $\mathcal{H}_e = \{h_{1,e} = e, h_{2,e}, \dots, h_{n_e,e}\}$. Definimos $\psi_{\mathcal{H}_e} : B \to B_e$ por

$$\psi_{\mathcal{H}_e}(b) = \sum_{1\le k\le n_e} \sum_{i_1\le\cdots\le i_k} (-1)^{k+1}\beta_{h_{i_1,e}}(1_e)\cdots\beta_{h_{i_{k-1},e}}(1_e)\beta_{h_{i_k,e}}(b_e),$$

onde $b = \sum_{f\in\mathcal{G}_0} b_f \in B$, com $b_f \in B_f$, para todo $f \in \mathcal{G}_0$. Podemos também escrever

$$\psi_{\mathcal{H}_e}(b) = \sum_{i=1}^{n_e} \beta_{h_{i,e}}(b_e)v_{i,e},$$

onde $v_{1,e} = 1_e$ e

$$v_{i,e} = (1'_e - 1_e)(1'_e - \beta_{h_{2,e}}(1_e))\cdots(1'_e - \beta_{h_{i-1,e}}(1_e))\beta_{h_{i,e}}(1_e).$$

Definimos, então, a aplicação $\psi_\mathcal{H} : B \to B$ dada por

$$\psi_\mathcal{H}(b) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \psi_{\mathcal{H}_e}(b).$$

A próxima proposição reúne alguns resultados do final da seção 4 de [8].

Proposição 2.2.14. *Nas notações acima:*

(i) $\psi_{\mathcal{H}}$ *é um homomorfismo de anéis.*

(ii) A restrição $\psi_{\mathcal{H}}|_{A^{\alpha|_{\mathcal{H}}}}$ *é um isomorfismo entre* $A^{\alpha|_{\mathcal{H}}}$ *e* $B^{\beta|_{\mathcal{H}}}\psi_{\mathcal{H}}(1_A)$*, com inversa dada pela multiplicação à direita por* 1_A*, em particular,* $B^{\beta|_{\mathcal{H}}}1_A = A^{\alpha|_{\mathcal{H}}}$*.*

Podemos, então, partir para a prova dos resultados auxiliares do Teorema 2.2.12.

Por [46, Theorem 4.1], existe uma ação global ortogonal $\theta = (B_{g\mathcal{H}}, \theta_{g\mathcal{H}})_{g\mathcal{H}\in\mathcal{G}/\mathcal{H}}$ do grupoide $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ em $B^{\beta|_{\mathcal{H}}}$ de forma que $B^{\beta|_{\mathcal{H}}}$ é θ-Galois sobre $(B^{\beta|_{\mathcal{H}}})^{\theta} = B^{\beta}$. A ação θ é tal que

$$\begin{aligned} B_{g\mathcal{H}} &= B_g \cap B^{\beta|_{\mathcal{H}}}, \\ \theta_{g\mathcal{H}} &= \beta_g|_{B_{g^{-1}\mathcal{H}}}, \end{aligned}$$

para todo $g\mathcal{H} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$.

Definindo $u_{\mathcal{H}_e} = \psi_{\mathcal{H}_e}(1_A)$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$, e $u_{\mathcal{H}} = \psi_{\mathcal{H}}(1_A)$, temos que $B' = B^{\beta|_{\mathcal{H}}}u_{\mathcal{H}}$ é um ideal de $B^{\beta|_{\mathcal{H}}}$, pois $u_{\mathcal{H}}$ é um idempotente central de $B^{\beta|_{\mathcal{H}}}$. Então a ação θ de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ em $B^{\beta|_{\mathcal{H}}}$ induz, via restrição padrão, uma ação parcial γ de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ em B', isto é, $\gamma = (B'_{g\mathcal{H}}, \gamma_{g\mathcal{H}})_{g\mathcal{H}\in\mathcal{G}/\mathcal{H}}$ é dada por

$$\begin{aligned} B'_{e\mathcal{H}} &= B_{e\mathcal{H}} \cap B' = B_{e\mathcal{H}}u_{\mathcal{H}} = B^{\beta|_{\mathcal{H}}}u_{\mathcal{H}_e}, \\ B'_{g\mathcal{H}} &= B'_{r(g)\mathcal{H}} \cap \beta_g(B'_{d(g)\mathcal{H}}) = B_{g\mathcal{H}}u_{g\mathcal{H}} = B^{\beta|_{\mathcal{H}}}u_{g\mathcal{H}}, \text{ onde } u_{g\mathcal{H}} := u_{\mathcal{H}_{r(g)}}\beta_g(u_{\mathcal{H}_{d(g)}}), \\ \gamma_{g\mathcal{H}} &= \beta_g|_{B_{g^{-1}\mathcal{H}}}, \end{aligned}$$

para todos $e\mathcal{H} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$ e $g\mathcal{H} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Temos que γ é uma ação parcial ortogonal de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ em B', pois $u_{\mathcal{H}} = \psi_{\mathcal{H}}(1_A) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0}\psi_{\mathcal{H}_e}(1_A) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0}u_{\mathcal{H}_e}$. Assim, obtemos a seguinte proposição.

Proposição 2.2.15. *A ação* θ *de* $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ *em* $B^{\beta|_{\mathcal{H}}}$ *é a globalização da ação parcial* γ *de* $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ *em* B'*.*

Demonstração. Os três primeiros itens da definição de globalização valem por definição. Verificaremos agora o item (iv). Seja $e\mathcal{H} \in (\mathcal{G}/\mathcal{H})_0$. Considere $\mathcal{L}$ um sistema de $\equiv_{\mathcal{H}}$-representantes de $\mathcal{G}$ e $\mathcal{K}_e = \mathcal{L} \cap X_e = \{g_{1,e} = e, g_{2,e}, \ldots, g_{n_e,e}\}$, onde $X_e = \{h \in \mathcal{G} : r(h) = e\}$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$. Assim, se denotarmos $\mathcal{H}_f = \{h_{1,f} = f, h_{2,f}, \ldots, h_{m_f,f}\}$, para todo $f \in \mathcal{G}_0 = \mathcal{H}_0$, temos que

$$\begin{aligned} X_e = \{&e, h_{2,e}, \ldots, h_{m_e,e}, g_{2,e}, g_{2,e}h_{2,d(g_{2,e})}, g_{2,e}h_{3,d(g_{2,e})}, \ldots, g_{2,e}h_{m_{d(g_{2,e})},d(g_{2,e})}, \ldots, \\ &g_{n_e,e}, g_{n_e,e}h_{2,d(g_{n_e,e})}, \ldots, g_{n_e,e}h_{m_{d(g_{n_e,e})},d(g_{n_e,e})}\}. \end{aligned}$$

Vamos provar que $\beta_g(B^{\beta|_\mathcal{H}}1'_{g^{-1}}) = B^{\beta|_\mathcal{H}}1'_g$, para todo $g \in \mathcal{G}$. De fato, se $a \in B^{\beta|_\mathcal{H}}$, $g \in \mathcal{G}$ e $h \in \mathcal{H}$, então

$$\begin{aligned}
\beta_h(\beta_g(a1'_{g^{-1}})1'_{h^{-1}}) &= \begin{cases} \beta_{hg}(a1'_{g^{-1}}), \text{ se } d(h) = r(g), \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \beta_{gh'}(a1'_{g^{-1}}), \text{ se } d(h) = r(g), \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \beta_g(\beta_{h'}(a1'_{(h')^{-1}})1'_{g^{-1}}), \text{ se } d(h) = r(g), \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \beta_g(a1'_{g^{-1}}), \text{ se } d(h) = r(g), \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \\
&= \beta_g(a1'_{g^{-1}})1'_h,
\end{aligned}$$

isto é, $\beta_g(a1'_{g^{-1}}) \in B^{\beta|_\mathcal{H}}$. Como $\beta_g(a1'_{g^{-1}}) \in B_g$, segue que $\beta_g(a1'_{g^{-1}}) \in B^{\beta|_\mathcal{H}} \cap B_g = B^{\beta|_\mathcal{H}}1'_g$. A inclusão reversa segue por simetria.

Defina então o conjunto $I_e = \sum_{i=1}^{n_e} \beta_{g_{i,e}}(B^{\beta|_\mathcal{H}} u_{\mathcal{H}_{d(g_{i,e})}} 1'_{d(g_{i,e})}) = \sum_{i=1}^{n_e} B^{\beta|_\mathcal{H}} \beta_{g_i}(u_{\mathcal{H}_{d(g_{i,e})}})$, que é um ideal de $B^{\beta|_\mathcal{H}}$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$. Note que $I_e \subseteq B'_{e\mathcal{H}}$. Queremos provar a inclusão contrária. Para isso, mostraremos que $1'_e \in I_e$. Isso finalizará a demonstração.

Para todo $f \in \mathcal{G}_0$, considere

$$w_{\mathcal{H}_f} = \prod_{j=1}^{m_f} (1'_f - \beta_{h_j,f}(1_f)).$$

Claramente $w_{\mathcal{H}_f} \in B^{\beta|_\mathcal{H}}$, para todo $f \in \mathcal{G}_0$, de onde $\beta_g(w_{\mathcal{H}_f}1'_{g^{-1}}) \in B^{\beta_\mathcal{H}}$, para todo $g \in \mathcal{G}$.

Defina agora, para todo $f \in \mathcal{G}_0$,

$$\begin{aligned}
v_{i,j,f} = \prod_{1 \le k \le i-1} \beta_{g_{k,f}}(w_{\mathcal{H}_{d(g_{k,f})}})(1'_f - \beta_{g_{i,f}h_{1,d(g_{i,f})}}(1_{d(g_{i,f})})) \cdots \\
\cdots (1'_f - \beta_{g_{i,f}h_{j-1,d(g_{i,f})}}(1_{d(g_{i,f})}))\beta_{g_{i,f}h_{j,d(g_{i,f})}}(1_{d(g_{i,f})}).
\end{aligned}$$

Note que

$$v_{1,j,f} = (1'_f - \beta_{h_{1,f}}(1_f)) \cdots (1'_f - \beta_{h_{j-1,f}}(1_f))\beta_{h_{j,f}}(1_f),$$

de onde

$$v_{i,j,f} = \prod_{1 \le k \le i-1} \beta_{g_{k,f}}(w_{\mathcal{H}_{d(g_{k,f})}})\beta_{g_{i,f}}(v_{1,i,d(g_{i,f})}).$$

Como $u_{\mathcal{H}_f} = \sum_{j=1}^{m_f} v_{1,j,f}$, para todo $f \in \mathcal{G}_0$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m_e} v_{i,j,f} &= \sum_{j=1}^{m_e} \left(\prod_{1\leq k\leq i-1} \beta_{g_{k,e}}(w_{\mathcal{H}_{d(g_{k,e})}}) \right) \beta_{g_{i,e}}(v_{1,j,d(g_{i,e})}) \\
&= \left(\prod_{1\leq k\leq i-1} \beta_{g_{k,e}}(w_{\mathcal{H}_{d(g_{k,e})}}) \right) \sum_{j=1}^{m_e} \beta_{g_{i,e}}(v_{1,j,d(g_{i,e})}) \\
&= \left(\prod_{1\leq k\leq i-1} \beta_{g_{k,e}}(w_{\mathcal{H}_{d(g_{k,e})}}) \right) \beta_{g_{i,e}} \left(\sum_{j=1}^{m_e} v_{1,j,d(g_{i,e})} \right) \\
&= \left(\prod_{1\leq k\leq i-1} \beta_{g_{k,e}}(w_{\mathcal{H}_{d(g_{k,e})}}) \right) \beta_{g_{i,e}} \left(u_{\mathcal{H}_{d(g_{i,e})}} \right) \\
&\in I_e \cdot B^{\beta|_{\mathcal{H}}} 1'_e \subseteq I_e.
\end{aligned}$$

Mas disto segue que

$$1'_e = \sum_{i=1}^{n_e} \sum_{i=1}^{m_e} v_{i,j,e} \in I_e,$$

como gostaríamos. $\square$

Podemos então considerar a aplicação $\psi_{\mathcal{G}/\mathcal{H}} : B^{\beta|_{\mathcal{H}}} \to B^{\beta|_{\mathcal{H}}}$ dada por

$$\psi_{\mathcal{G}/\mathcal{H}}(b) = \sum_{1\leq k\leq m} \sum_{i_1<\cdots<i_k} (-1)^{k+1} \beta_{g_{i_1}}(u_{\mathcal{H}_{d(g_{i_1})}}) \cdots \beta_{g_{i_k}}(u_{\mathcal{H}_{d(g_{i_k})}}) \beta_{g_{i_k}}(b1'_{g_{i_k}^{-1}}),$$

onde $\mathcal{G}/\mathcal{H} = \{g_1\mathcal{H}, \ldots, g_m\mathcal{H}\}$.

Corolário 2.2.16. *Seja γ a ação parcial de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ em $B^{\beta|_{\mathcal{H}}}$ como acima. Considere $R = (B^{\beta|_{\mathcal{H}}} u_{\mathcal{H}})^{\gamma}$. Então valem as seguintes afirmações:*

(i) $\psi_{\mathcal{G}/\mathcal{H}}$ é um homomorfismo de B^{β}-álgebras cuja restrição para $B^{\beta|_{\mathcal{H}}} u_{\mathcal{H}}$ é injetivo e $\psi_{\mathcal{G}/\mathcal{H}}(u_{\mathcal{H}}) = 1_B = \psi_{\mathcal{G}}(1_A)$.

(ii) $\psi_{\mathcal{G}/\mathcal{H}}(R) \subseteq (B^{\beta|_{\mathcal{H}}})^{\theta} = B^{\beta}$.

(iii) A restrição de $\psi_{\mathcal{G}/\mathcal{H}}$ a R é um isomorfismo de anéis de R em $B^{\beta} = (B^{\beta|_{\mathcal{H}}})^{\theta}$ com inversa dada pela multiplicação $u_{\mathcal{H}}$. Em particular, $B^{\beta} u_{\mathcal{H}} = R$.

(iv) $B^{\beta|_{\mathcal{H}}} u_{\mathcal{H}}$ é uma extensão de Galois γ-parcial de R se, e somente se, $B^{\beta|_{\mathcal{H}}}$ é uma extensão θ-Galois de $B^{\beta} = (B^{\beta|_{\mathcal{H}}})^{\theta}$.

Demonstração. Segue da Proposição 2.2.14 e do Lema 2.2.1. $\square$

Vamos agora construir a ação parcial ε de $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ em $A^{\alpha|_\mathcal{H}}$ usando a ação parcial γ. Definimos

$$\begin{aligned}
1_{g\mathcal{H}} &:= u_{g\mathcal{H}}1_A = u_{\mathcal{H}_{d(g)}}\beta_g(u_{\mathcal{H}_{d(g)}})1_A,\\
A_{g\mathcal{H}} &:= B'_{g\mathcal{H}}1_A = B^{\beta|_\mathcal{H}}u_{g\mathcal{H}}1_A = A^{\alpha|_\mathcal{H}}1_{g\mathcal{H}},\\
\varepsilon_{g\mathcal{H}} &:= (m_{1_A}\circ\gamma_{g\mathcal{H}}\circ\psi_\mathcal{H})|_{A_{g^{-1}\mathcal{H}}},
\end{aligned}$$

onde $m_{1_A} : B^{\beta|_\mathcal{H}}u_\mathcal{H} \to A^{\alpha|_\mathcal{H}}$ é a multiplicação por 1_A. Note que dados $a \in A^{\alpha|_\mathcal{H}}$ e $g\mathcal{H} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$, temos que

$$\varepsilon_{g\mathcal{H}}(a1_{g^{-1}\mathcal{H}}) = \beta_g(\psi_\mathcal{H}(a))1_{g\mathcal{H}} = \beta_g(\psi_\mathcal{H}(a))1_A.$$

Teorema 2.2.17. *Nas notações acima, valem as seguintes afirmações:*

(i) ε *é uma ação parcial de* $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ *em* $A^{\alpha|_\mathcal{H}}$.

(ii) $(A^{\alpha|_\mathcal{H}})^\varepsilon = A^\alpha$.

(iii) θ *é a globalização de* ε.

Demonstração. (i): É fácil ver que $1_{g\mathcal{H}}$ é idempotente central de B, para todo $g \in \mathcal{G}$. Vamos mostrar que $1_{g\mathcal{H}} \in A^{\alpha|_\mathcal{H}}$.

Como $\mathcal{H}$ é estritamente normal em $\mathcal{G}$, para todo $h \in \mathcal{H}_{r(g)}$, existe $h' \in \mathcal{H}_{d(g)}$ tal que $hg = gh'$. Então

$$\begin{aligned}
\alpha_h(1_{g\mathcal{H}}1_{h^{-1}}) &= \alpha_h(\beta_g(u_{\mathcal{H}_{d(g)}})1_{h^{-1}}) = \beta_{hg}(u_{\mathcal{H}_{d(g)}})1_h\\
&= \beta_{gh'}(u_{\mathcal{H}_{d(g)}})1_h = \beta_g(\beta_{h'}(u_{\mathcal{H}_{d(g)}}))1_h\\
&= \beta_g(u_{\mathcal{H}_{d(g)}})1_h = 1_{g\mathcal{H}}1_h,
\end{aligned}$$

de onde segue que $1_{g\mathcal{H}} \in A^{\alpha|_\mathcal{H}}$. Dessa forma garantimos que $A_{g\mathcal{H}}$ é um ideal de $A^{\alpha|_\mathcal{H}}$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Agora,

$$\psi_\mathcal{H}(A^{\alpha|_\mathcal{H}}1_{g^{-1}\mathcal{H}}) = \psi_\mathcal{H}(A^{\alpha|_\mathcal{H}})u_{g^{-1}\mathcal{H}} = \psi_\mathcal{H}(A^{\alpha|_\mathcal{H}})\beta_{g^{-1}}(u_{\mathcal{H}_{r(g)}})u_{\mathcal{H}_{d(g)}} = B^{\beta|_\mathcal{H}}u_{g^{-1}\mathcal{H}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(A_{g^{-1}\mathcal{H}}) &= (m_{1_A}\circ\gamma_{g\mathcal{H}})(B^{\beta|_\mathcal{H}}u_{g^{-1}\mathcal{H}}) = B^{\beta|_\mathcal{H}}u_{g\mathcal{H}}1_A\\
&= A^{\alpha|_\mathcal{H}}u_{g\mathcal{H}}1_A = A^{\alpha|_\mathcal{H}}1_{g\mathcal{H}} = A_{g\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Portanto $\varepsilon_{g\mathcal{H}} : A_{g^{-1}\mathcal{H}} \to A_{g\mathcal{H}}$ é um isomorfismo bem definido de anéis.

É fácil de ver que vale (P1). Para (P2), considere $(g\mathcal{H}, k\mathcal{H}) \in (\mathcal{G}/\mathcal{H})_2$. Note que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{g\mathcal{H}}(A_{g^{-1}\mathcal{H}} \cap A_{k\mathcal{H}}) &= (m_{1_A} \circ \gamma_{g\mathcal{H}} \circ \psi_{\mathcal{H}})(A^{\alpha|_{\mathcal{H}}} 1_{g^{-1}\mathcal{H}} 1_{k\mathcal{H}}) \\
&= (m_{1_A} \circ \gamma_{g\mathcal{H}})(B^{\beta|_{\mathcal{H}}} u_{g^{-1}\mathcal{H}} u_{k\mathcal{H}}) \\
&= m_{1_A}(B^{\beta|_{\mathcal{H}}} u_{g\mathcal{H}} u_{gk\mathcal{H}}) \\
&= B^{\beta|_{\mathcal{H}}} 1_A u_{g\mathcal{H}} 1_A B^{\beta|_{\mathcal{H}}} u_{gk\mathcal{H}} 1_A \\
&= A^{\alpha|_{\mathcal{H}}} 1_{g\mathcal{H}} 1_{gk\mathcal{H}} = A_{g\mathcal{H}} \cap A_{gk\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Para verificar (P3), considere $a \in A_{k^{-1}\mathcal{H}} \cap A_{(gk)^{-1}\mathcal{H}}$. Então

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{g\mathcal{H}} \circ \varepsilon_{k\mathcal{H}}(a) &= (m_{1_A} \circ \gamma_{g\mathcal{H}} \circ \psi_{\mathcal{H}}) \circ (m_{1_A} \circ \gamma_{k\mathcal{H}} \circ \psi_{\mathcal{H}})(a) \\
&= (m_{1_A} \circ (\gamma_{g\mathcal{H}} \circ \gamma_{k\mathcal{H}}) \circ \psi_{\mathcal{H}})(a) \\
&= (m_{1_A} \circ \gamma_{gk\mathcal{H}} \circ \psi_{\mathcal{H}})(a) \\
&= \varepsilon_{gk\mathcal{H}}(a).
\end{aligned}$$

(ii): Em (i) vimos que $1_{g\mathcal{H}} \in A^{\alpha|_{\mathcal{H}}}$. Como $\psi_{\mathcal{H}}$ é $B^{\beta|_{\mathcal{H}}}$-linear e $\beta_{g^{-1}}(u_{\mathcal{H}_{d(g)}}) \in B^{\beta|_{\mathcal{H}}}$, segue que $\psi_{\mathcal{H}}(1_{g^{-1}\mathcal{H}}) = \beta_{g^{-1}}(u_{\mathcal{H}_{r(g)}}) u_{\mathcal{H}_{d(g)}} = u_{g^{-1}\mathcal{H}}$. Isso implica que

$$\psi_{\mathcal{H}}((A^{\alpha|_{\mathcal{H}}})^{\varepsilon}) = (\psi_{\mathcal{H}}(A^{\alpha|_{\mathcal{H}}}))^{\gamma}.$$

De fato, se $a \in A^{\alpha|_{\mathcal{H}}}$ é tal que $\psi_{\mathcal{H}}(a) \in (\psi_{\mathcal{H}}(A^{\alpha|_{\mathcal{H}}}))^{\gamma}$, então

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{g\mathcal{H}}(a 1_{g^{-1}\mathcal{H}}) &= \beta_g(\psi_{\mathcal{H}_{d(g)}}(a)) 1_{g\mathcal{H}} = \beta_g(\psi_{\mathcal{H}}(a) u_{g^{-1}\mathcal{H}}) 1_{g\mathcal{H}} \\
&= \gamma_{g\mathcal{H}}(\psi_{\mathcal{H}}(a) u_{g^{-1}\mathcal{H}}) 1_{g\mathcal{H}} = \psi_{\mathcal{H}}(a) u_{g^{-1}\mathcal{H}} 1_{g\mathcal{H}} = \psi_{\mathcal{H}}(a) 1_{g\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

A inclusão reversa é semelhante.

Observe agora que

$$\begin{aligned}
(A^{\alpha|_{\mathcal{H}}})^{\varepsilon} &= \psi_{\mathcal{H}}((A^{\alpha|_{\mathcal{H}}})^{\varepsilon}) 1_A = (\psi_{\mathcal{H}}(A^{\alpha|_{\mathcal{H}}}))^{\gamma} 1_A \\
&= (A^{\alpha|_{\mathcal{H}}} u_{\mathcal{H}})^{\gamma} 1_A = B^{\beta} u_{\mathcal{H}} 1_A \\
&= B^{\beta} 1_A = A^{\alpha}.
\end{aligned}$$

(iii): Temos que $\psi_{\mathcal{H}_e} : A_{e\mathcal{H}} \to B_{e\mathcal{H}}$ é um monomorfismo de anéis tal que $\psi_{\mathcal{H}_e}(A_{e\mathcal{H}}) = B_{e\mathcal{H}} u_{\mathcal{H}_e}$ é um ideal de $B^{e\mathcal{H}}$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$. Isso implica (G1).

Além disso, segue da definição de $u_{g\mathcal{H}}$ que

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathcal{H}_{r(g)}}(A_{g\mathcal{H}}) &= B^{\beta|_{\mathcal{H}}} u_{g\mathcal{H}} \\
&= B^{\beta|_{\mathcal{H}}} u_{\mathcal{H}_{r(g)}} \beta_g(u_{\mathcal{H}_{d(g)}}) \\
&= \psi_{\mathcal{H}_{r(g)}}(A_{r(g)\mathcal{H}}) \cap \beta_g(\psi_{\mathcal{H}_{d(g)}}(A_{d(g)\mathcal{H}})),
\end{aligned}$$

para todo $g \in \mathcal{G}$, de onde segue que vale (G2).

Para demonstrarmos que vale (G3), seja $a \in A^{\alpha|_{\mathcal{H}}}$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathcal{H}_{r(g)}}(\varepsilon_{g\mathcal{H}}(a 1_{g^{-1}\mathcal{H}})) &= \psi_{\mathcal{H}_{r(g)}}(\beta_g(\psi_{\mathcal{H}_{d(g)}}(a)) 1_A) \\
&= \beta_g(\psi_{\mathcal{H}_{d(g)}}(a)) \psi_{\mathcal{H}_{r(g)}}(1_A) \\
&= \beta_g(\psi_{\mathcal{H}_{d(g)}}(a)) u_{\mathcal{H}_{r(g)}} \\
&= \beta_g(\psi_{\mathcal{H}_{d(g)}}(a) 1_{g^{-1}\mathcal{H}}).
\end{aligned}$$

Além disso, (G4) segue diretamente do fato de que θ é globalização de γ. $\square$

Finalmente temos todas as ferramentas para provar o Teorema 2.2.12.

Demonstração. (do Teorema 2.2.12) Segue do fato de que A é uma extensão de Galois α-parcial de A^α implica que B é uma extensão β-Galois de B^β pelo Lema 2.2.1. Agora, B ser uma extensão β-Galois de B^β implica que $B^{\beta|_{\mathcal{H}}}$ é uma extensão θ-Galois de B^β. Mas novamente o Lema 2.2.1 implica que $A^{\alpha|_{\mathcal{H}}}$ é extensão de Galois ε-parcial de $(A^{\alpha|_{\mathcal{H}}})^\varepsilon = A^\alpha$. $\square$

Podemos ilustrar a demonstração do Teorema 2.2.12 da seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
(\beta, \mathcal{G}, B) \arrow[r, dashed] \arrow[dd, dash] & (\theta, \mathcal{G}/\mathcal{H}, B^{\beta|_{\mathcal{H}}}) \arrow[d, dash] \\
 & (\gamma, \mathcal{G}/\mathcal{H}, B^{\beta|_{\mathcal{H}}} \psi_{\mathcal{H}}(1_A)) \arrow[d, dash] \\
(\alpha, \mathcal{G}, A) \arrow[r, dashed] & (\varepsilon, \mathcal{G}/\mathcal{H}, A^{\alpha|_{\mathcal{H}}})
\end{tikzcd}$$

As barras representam globalizações/restrições, enquanto as setas representam a passagem de uma ação (parcial) do grupoide para a ação (parcial) do quociente.

2.3 Ortogonalização

Até então, a Teoria de Galois para ação de grupoide exigiu a ortogonalidade da ação, e a razão disso é que essa é uma hipótese suficiente para manter a aplicação traço invariante. Embora essa condição cubra uma grande classe de ações, ela é de certa forma restritiva. O objetivo dessa seção será desenvolver uma Teoria de Galois para ação parcial de grupoide sem a hipótese da ortogonalidade.

2.3.1 Teoria de Galois geral

Relembramos o leitor e a leitora que duas ações parciais $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g\in\mathcal{G}}$ de um grupoide $\mathcal{G}$ em um anel A e $\omega = (\Omega_g, \omega_g)_{g\in\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$ em um anel Ω são *equivalentes* (denotado por $\alpha \simeq \omega$) se existe um morfismo de ações parciais $\psi : \alpha \to \omega$ tal que ψ_e é um isomorfismo de anéis, para todo $e \in \mathcal{G}_0$. Neste caso, também dizemos que existe uma *equivalência* $\simeq$ entre as duas ações parciais.

Definição 2.3.1. Se uma ação parcial ortogonal ω é equivalente a uma ação parcial α, dizemos que ω é a *ortogonalização* de α.

Observação 2.3.2. Observe que equivalência entre ações parciais é uma relação de equivalência, portanto todas as ortogonalizações de uma dada ação parcial são equivalentes; ou seja, a ortogonalização é única a menos de equivalências. Essa é a razão pela qual usaremos o termo "a" ortogonalização ao invés de "uma" ortogonalização.

Proposição 2.3.3. *Toda ação parcial (em um anel não necessariamente unitário nem associativo) admite ortogonalização.*

Demonstração. Seja $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g\in\mathcal{G}}$ uma ação parcial pré-unitária de um grupoide $\mathcal{G}$ em um anel A. Queremos construir uma ação parcial ortogonal ω de $\mathcal{G}$ em um anel Ω que é equivalente a α. Para isso, considere $\Omega = \prod_{e\in\mathcal{G}_0} A_e$ e seja $\psi_e : A_e \to \Omega$ a inclusão natural dada por $\psi(a) = (a\delta_{e,f})_{f\in\mathcal{G}_0}$. Defina $\Omega_g = \psi_{r(g)}(A_g)$ e $\omega_g = \psi_{r(g)} \circ \alpha_g \circ \psi^{-1}_{d(g)}|_{\Omega_{g^{-1}}}$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Então é fácil ver que $\omega = (\Omega_g, \omega_g)_{g\in\mathcal{G}}$ é uma ação parcial ortogonal de $\mathcal{G}$ em Ω e $\omega \simeq \alpha$ por construção. $\square$

Assim como na seção anterior, dada uma ação parcial unitária α, fixaremos a notação $\beta = (B_g, \beta_g)_{g\in\mathcal{G}}$ para representar sua globalização, que é uma ação global ortogonal em um anel $B = \prod_{e\in\mathcal{G}_0} B_e$ tal que A_e é um ideal de B_e, para todo $e \in \mathcal{G}_0$. Também fixaremos a notação $\omega = (\Omega_g, \omega_g)_{g\in\mathcal{G}}$ para denotar a ortogonalização de α. Relembramos que para a Teoria de Galois estaremos trabalhando com o caso em que A é um anel associativo e unitário. Nosso primeiro resultado nos dirá que ortogonalizações se comportam bem com respeito a globalizações.

Proposição 2.3.4. *Seja α uma ação parcial unitária e β como acima. Então β é também a globalização da ortogonalização ω de α.*

Demonstração. Basta observar que podemos enxergar $\Omega = \prod_{e\in\mathcal{G}_0} A_e$ como um ideal de B e que ω coincide com a restrição padrão de β a Ω como definida no início da seção 1.2, isto é, $\Omega_e = B_e \cap \Omega$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$, $\Omega_g = \Omega_{r(g)} \cap \beta_g(\Omega_{d(g)})$, para todo $g \in \mathcal{G}$, e $\omega_g = \beta_g|_{\Omega_{g^{-1}}}$. $\square$

Algumas propriedades de extensões de Galois parciais também são preservadas por ortogonalizações.

Proposição 2.3.5. *Nas notações acima, suponha que $A|_{A^\alpha}$ é uma extensão de Galois α-parcial. Então $\Omega|_{\Omega^\omega}$ é uma extensão de Galois ω-parcial.*

Demonstração. Seja $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$ um sistema de coordenadas de Galois α-parcial de A sobre A^α, isto é, $x_i, y_i \in A$ são tais que

$$\sum_{i=1}^n x_i \alpha_g(y_i 1_{g^{-1}}) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} 1_e \delta_{e,g},$$

para todo $g \in \mathcal{G}$. Escreva $x_i' = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \psi_e(x_i 1_e) \in \Omega$ e $y_i' = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \psi_e(y_i 1_e) \in \Omega$, para todo $1 \leq i \leq n$. Então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n x_i'\omega_g(y_i'\psi_{d(g)}(1_{g^{-1}})) &= \sum_{i=1}^n \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \sum_{f\in\mathcal{G}_0} \psi_e(x_i 1_e)\omega_g(\psi_f(y_i 1_f)\psi_{d(g)}(1_{g^{-1}})) \\
&= \sum_{i=1}^n \psi_{r(g)}(x_i 1_{r(g)})\omega_g(\psi_{d(g)}(y_i 1_{d(g)})\psi_{d(g)}(1_{g^{-1}})) \\
&= \sum_{i=1}^n \psi_{r(g)}(x_i 1_{r(g)})\psi_{r(g)} \circ \alpha_g \circ \psi_{d(g)}^{-1}(\psi_{d(g)}(y_i 1_{g^{-1}})) \\
&= \sum_{i=1}^n \psi_{r(g)}(x_i \alpha_g(y_i 1_{g^{-1}})1_{r(g)}) = \psi_{r(g)}\left(\sum_{i=1}^n x_i\alpha_g(y_i 1_{g^{-1}})1_{r(g)}\right).
\end{aligned}$$

Temos dois casos para considerar: (1) $g \in \mathcal{G}_0$; ou (2) $g \notin \mathcal{G}_0$. Suponha que vale (1). Então $\psi_{r(g)}\left(\sum_{i=1}^n x_i\alpha_g(y_i 1_{g^{-1}})1_{r(g)}\right) = \psi_{r(g)}(1_{r(g)}) = 1_{\Omega_{r(g)}}$. Agora suponha (2). Neste caso,

$$\psi_{r(g)}\left(\sum_{i=1}^n x_i\alpha_g(y_i 1_{g^{-1}})1_{r(g)}\right) = \psi_{r(g)}(0) = 0.$$

Logo, $\{x_i', y_i'\}_{i=1}^n$ é um sistema de coordenadas de Galois ω-parcial de Ω sobre Ω^ω. $\square$

A recíproca da proposição acima não é verdadeira nem mesmo no caso global, como podemos ver no próximo exemplo.

Exemplo 2.3.6. Sejam $\mathcal{G} = \{g, g^{-1}, r(g), d(g)\}$, $A = Re_1 \oplus Re_2 \oplus Re_3$, onde $R \neq 0$ é um anel comutativo e os e_i's são idempotentes centrais dois a dois ortogonais tais que $e_1 + e_2 + e_3 = 1_A$.

Defina $\beta = (A_s, \beta_s)_{s\in\mathcal{G}}$ como

$$\begin{aligned}
&A_{g^{-1}} = A_{d(g)} = Re_1 \oplus Re_2, \quad A_g = A_{r(g)} = Re_2 \oplus Re_3, \\
&\beta_g(ae_1 + be_2) = be_2 + ae_3, \quad \beta_e = \mathrm{Id}_{A_e}, \text{ para } e \in \mathcal{G}_0, \quad \text{e } \beta_{g^{-1}} = \beta_g^{-1}.
\end{aligned}$$

Assim, $A^\alpha = R(e_1 + e_3) \oplus Re_2$.

Afirmação. A não é β-Galois sobre A^β.

De fato, suponha que A é β-Galois sobre A^β, isto é, existem $x_i = x_{i1}e_1 + x_{i_2}e_2 + x_{i_3}e_3$ e $y_i = y_{i1}e_1 + y_{i_2}e_2 + y_{i_3}e_3$ em A e um inteiro positivo n tais que $\sum_{i=1}^n x_i\beta_s(y_i 1_{s^{-1}}) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0}\delta_{e,s}1_e$, para todo $s \in \mathcal{G}$.

Em particular, para $s = g$, $\sum_{i=1}^n x_i\beta_g(y_i 1_{g^{-1}}) = 0$. Por um lado, temos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n (x_{i1}e_1 + x_{i2}e_2 + x_{i3}e_3)\beta_g(y_{i1}e_1 + y_{i2}e_2) = 0\\
\Longrightarrow\ &\sum_{i=1}^n (x_{i1}e_1 + x_{i2}e_2 + x_{i3}e_3)(y_{i1}e_3 + y_{i2}e_2) = 0\\
\Longrightarrow\ &\sum_{i=1}^n x_{i2}y_{i2}e_2 + x_{i3}y_{i1}e_3 = 0\\
\Longrightarrow\ &\left(\sum_{i=1}^n x_{i2}y_{i2}\right)e_2 + \left(\sum_{i=1}^n x_{i3}y_{i1}\right)e_3 = 0.
\end{aligned}$$

De onde segue que $\sum_{i=1}^n x_{i2}y_{i2} = 0 = \sum_{i=1}^n x_{i3}y_{i1}$. Por outro lado, como vale que $\sum_{i=1}^n x_i\beta_{r(g)}(y_i 1_{g^{-1}}) = e_2 + e_3$, segue que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n (x_{i1}e_1 + x_{i2}e_2 + x_{i3}e_3)\beta_{r(g)}(y_{i2}e_2 + y_{i3}e_3) = e_2 + e_3\\
\Longrightarrow\ &\sum_{i=1}^n (x_{i1}e_1 + x_{i2}e_2 + x_{i3}e_3)(y_{i2}e_2 + y_{i3}e_3) = e_2 + e_3\\
\Longrightarrow\ &\sum_{i=1}^n x_{i2}y_{i2}e_2 + x_{i3}y_{i3}e_3 = e_2 + e_3\\
\Longrightarrow\ &\left(\sum_{i=1}^n x_{i2}y_{i2}\right)e_2 + \left(\sum_{i=1}^n x_{i3}y_{i3}\right)e_3 = e_2 + e_3,
\end{aligned}$$

de onde $\sum_{i=1}^n x_{i2}y_{i2} = 1_R = \sum_{i=1}^n x_{i3}y_{i1}$. Mas então $1_R = 0$, uma contradição.

Considere agora a ortogonalização ω de β construída da seguinte forma: o anel Ω é dado por $\Omega = \prod_{e\in\mathcal{G}_0} A_e = A_{d(g)} \times A_{r(g)} = (Re_1 \oplus Re_2) \times (Re_2 \oplus Re_3)$. Os ideais associados são definidos como $\Omega_{g^{-1}} = \Omega_{d(g)} = (Re_1 \oplus Re_2, 0)$, $\Omega_g = \Omega_{r(g)} = (0, Re_2 \oplus Re_3)$, enquanto os isomorfismos entre eles são dados por $\omega_{r(g)} = \mathrm{Id}_{\Omega_g}$, $\omega_{d(g)} = \mathrm{Id}_{\Omega_{g^{-1}}}$, $\omega_g((ae_1 + be_2, 0)) = (0, ae_2 + be_3)$ e $\omega_{g^{-1}} = \omega_g^{-1}$. Podemos facilmente ver que Ω é ω-Galois sobre $\Omega^\omega = R(e_1, e_2) \oplus R(e_2, e_3)$ com sistema de coordenadas $\{x_1 = y_1 = (e_1, 0), x_2 = y_2 = (e_2, 0), x_3 = y_3 = (0, e_2), x_4 = y_4 = (0, e_3)\}$.

Como um corolário da Proposição 2.3.5 temos o seguinte.

Corolário 2.3.7. *Suponha que α é uma ação parcial unitária (não necessariamente ortogonal). Se A é α-Galois parcial sobre A^α, então B é β-Galois sobre B^β.*

Demonstração. Pela Proposição 2.3.5, $A|_{A^\alpha}$ ser uma extensão de Galois α-parcial implica que $\Omega|_{\Omega^\omega}$ é uma extensão de Galois ω-parcial. Pelo Lema 2.2.1, $\Omega|_{\Omega^\omega}$ ser uma extensão de

Galois ω-parcial implica que $B|_{B^\beta}$ é uma extensão β-Galois, o que conclui a prova. $\square$

Observação 2.3.8. A recíproca do resultado acima não é verdadeira, pois caso contrário teríamos que a recíproca da Proposição 2.3.5 também valeria (o que não é verdade, como vimos no Exemplo 2.3.6).

Mantendo as notações, defina

$$\begin{aligned} \psi : A &\to \Omega \\ a &\mapsto (\psi_e(a1_e))_{e\in\mathcal{G}_0}. \end{aligned}$$

Note que ψ é um monomorfismo de anéis. De fato, $\psi(a) = 0$ se, e somente se, $\psi_e(a1_e) = 0$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$. Mas $\psi_e(a1_e) = 0$ se, e somente se, $a1_e = 0$, pois $\psi_e : A_e \to \Omega_e$ é um monomorfismo. Agora, de (P1) segue que $a = 0$ se, e somente se, $a1_e = 0$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$.

Proposição 2.3.9. *Seja $\mathcal{H}$ um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$. Vale a seguinte afirmação: $\psi(A^{\alpha|_\mathcal{H}}) = \Omega^{\omega|_\mathcal{H}} \cap \psi(A)$.*

Demonstração. Seja $a \in A^{\alpha|_\mathcal{H}}$. Dado $h \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}
\omega_h(\psi(a)\psi_{d(h)}(1_{h^{-1}})) &= \omega_h(\psi_{d(h)}(a1_{d(h)})\psi_{d(h)}(1_{h^{-1}})), && \text{pois } \omega \text{ é ortogonal}\\
&= \omega_h(\psi_{d(h)}(a1_{d(h)}1_{h^{-1}})), && \text{pois } \psi_{d(h)}\text{é homomorfismo}\\
&= \omega_h(\psi_{d(h)}(a1_{h^{-1}})), && \text{pois } A_{h^{-1}} \subseteq A_{d(h)}\\
&= \psi_{r(h)} \circ \alpha_h \circ \psi_{d(h)}^{-1}(\psi_{d(h)}(a1_{h^{-1}})), && \text{pela definição de } \omega_h\\
&= \psi_{r(h)} \circ \alpha_h(a1_{h^{-1}}) && \\
&= \psi_{r(h)}(a1_h), && \text{pois } a \in A^{\alpha|_\mathcal{H}}\\
&= \psi_{r(h)}(a1_{r(h)})\psi_{r(h)}(1_h), && \text{pois } \psi_{r(h)} \text{ é homomorfismo}\\
&= \psi(a)\psi_{r(h)}(1_h), && \text{pois } \omega \text{ é ortogonal.}
\end{aligned}$$

Como escolhemos h arbitrariamente, temos que $\psi(a) \in \Omega^{\omega|_\mathcal{H}}$, provando a primeira inclusão.

Para a inclusão contrária, seja $a \in A$ tal que $\psi(a) \in \Omega^{\omega|_\mathcal{H}}$. Então, dado $h \in \mathcal{H}$, temos que $\omega_h(\psi(a)\psi_{d(h)}(1_{h^{-1}})) = \psi(a)\psi_{r(h)}(1_h)$. Entretanto,

$$\begin{aligned}
\omega_h(\psi(a)\psi_{d(h)}(1_{h^{-1}})) &= \omega_h(\psi_{d(h)}(a1_{d(h)})\psi_{d(h)}(1_{h^{-1}})), && \text{pois } \omega \text{ é ortogonal}\\
&= \omega_h(\psi_{d(h)}(a1_{h^{-1}})), && \text{pois } \psi_{d(h)} \text{ é homomorfismo}\\
&= \psi_{r(h)} \circ \alpha_h(a1_{h^{-1}}), && \text{pela definição de } \omega_h,
\end{aligned}$$

e analogamente $\psi(a)\psi_{r(h)}(1_h) = \psi_{r(h)}(a1_{r(h)})\psi_{r(h)}(1_h) = \psi_r(h)(a1_h)$.

Logo $\psi_{r(h)}(\alpha_h(a1_{h^{-1}})) = \psi_{r(h)}(a1_h)$. Como $\psi_{r(h)}$ é um monomorfismo, segue que $\alpha_h(a1_{h^{-1}}) = a1_h$, para todo $h \in \mathcal{H}$, isto é, $a \in A^{\alpha|_{\mathcal{H}}}$. □

Essa relação entre os anéis invariantes pelas ações parciais associadas aos subgrupoides amplos de $\mathcal{G}$ é a inspiração para a próxima definição.

Definição 2.3.10. Seja α uma ação parcial de um grupoide $\mathcal{G}$ em um anel A. Considere ω a ortogonalização de α no anel Ω como acima. Dizemos que α é uma *ação parcial fortemente Galois* se:

(i) $A_g \neq 0$, para todo $g \in \mathcal{G}_0$;

(ii) A é uma extensão de Galois α-parcial de A^α;

(iii) Para todos subgrupoides amplos $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}_2$ de $\mathcal{G}$, vale que

$$\Omega^{\omega|_{\mathcal{H}_1}} \cap \psi(A) \neq \Omega^{\omega|_{\mathcal{H}_2}} \cap \psi(A).$$

Nesse caso, também dizemos que A é uma *extensão de Galois α-parcial forte sobre* A^α.

Agora temos as ferramentas necessárias para enunciar uma correspondência de Galois para o caso de ações parciais não ortogonais. Primeiramente, denotamos:

$$\begin{aligned} \mathsf{W} &= \{\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} : \mathcal{H} \text{ é um subgrupoide amplo de } \mathcal{G}\}, \\ \mathsf{A} &= \{C \subseteq A : C = \psi^{-1}(\Omega^{\omega|_{\mathcal{H}}} \cap \psi(A)), \text{ para algum } \mathcal{H} \in \mathsf{W}\}. \end{aligned}$$

Proposição 2.3.11. *Suponha que $A|_{A^\alpha}$ é uma extensão de Galois α-parcial. Se $C \in \mathsf{A}$, então $A|_C$ é uma extensão de Galois $\alpha|_{\mathcal{H}}$-parcial para algum subgrupoide $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$.*

Demonstração. Se $C \in \mathsf{A}$, então $C = \psi^{-1}(\Omega^{\omega|_{\mathcal{H}}} \cap \psi(A))$, para algum $\mathcal{H} \in \mathsf{W}$. Pela Proposição 2.3.9, $C = \psi^{-1}(\psi(A^{\alpha|_{\mathcal{H}}})) = A^{\alpha|_{\mathcal{H}}}$. Agora, considere $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$ um sistema de coordenadas de Galois α-parciais para A sobre A^α, isto é,

$$\sum_{i=1}^n x_i \alpha_g(y_i 1_{g^{-1}}) = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} \delta_{e,g} 1_e,$$

para todo $g \in \mathcal{G}$. Então segue que

$$\sum_{i=1}^n x_i \alpha_h(y_i 1_{h^{-1}}) = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} \delta_{e,h} 1_e,$$

para todo $h \in \mathcal{H}$, isto é, A é uma extensão de Galois $\alpha|_{\mathcal{H}}$-parcial de $A^{\alpha|_{\mathcal{H}}} = C$. □

Agora podemos provar a primeira correspondência de Galois dessa seção.

Teorema 2.3.12 (Correspondência de Galois para Ações Parciais Fortemente Galois de Grupoides)**.** *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide finito agindo parcialmente em um anel comutativo A via ação parcial unitária fortemente Galois α. Então existe uma correspondência de um para um entre os conjuntos W e A dada por $\mathsf{W} \ni \mathcal{H} \mapsto A^{\alpha|_{\mathcal{H}}}$ com inversa $\mathsf{A} \ni C \mapsto \mathcal{G}_{\psi(C)}$.*

Demonstração. Primeiramente aplicamos o Teorema 2.2.8 na ortogonalização ω de α, de forma que obtemos uma correspondência de Galois entre os subgrupoides amplos de $\mathcal{G}$ e as Ω^{ω}-subálgebras ω-fortes e separáveis T de Ω tais quais $\mathcal{G}_T$ é um subgrupoide amplo. Pela Proposição 2.3.9 e a hipótese de α ser fortemente Galois, existe uma correspondência biunívoca entre essas subálgebras T e as A^{α}-subálgebras C que aparecem no conjunto A, dada por $T \leftrightarrow T \cap \psi(A) = \psi(C) \leftrightarrow C$. Compondo essas duas correspondências obtemos a correspondência enunciada no teorema, encerrando a demonstração. $\square$

Na Definição 2.3.10, claramente se $\mathcal{G}$ é um grupo ou se α já é ortogonal, a condição (iii) é automaticamente satisfeita. Mas esses não são os únicos casos de ações parciais que satisfazem (i)-(iii). De fato, o próximo exemplo ilustrará uma correspondência forte de Galois para o caso de um grupoide agindo de forma não ortogonal em um anel comutativo.

Exemplo 2.3.13. Seja $G = \{1_G, g, h, gh\}$ um subgrupo de $\mathbb{S}_8$, o grupo de simetrias de oito elementos, onde

$$g = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 2\,1\,4\,3\,6\,5\,8\,7 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 3\,4\,1\,2\,7\,8\,5\,6 \end{pmatrix}, \quad gh = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 4\,3\,2\,1\,8\,7\,6\,5 \end{pmatrix}.$$

Considere $\mathcal{G} = \mathcal{A}_2 \times G$ com $\mathcal{G}_0 = \{f_1, f_2\}$, isto é, $\mathcal{G} = \{(f_1, f_1, 1_G), (f_1, f_1, g), (f_1, f_1, h), (f_1, f_1, gh), (f_1, f_2, 1_G), (f_1, f_2, g), (f_1, f_2, h), (f_1, f_2, gh), (f_2, f_1, 1_G), (f_2, f_1, g), (f_2, f_1, h), (f_2, f_1, gh), (f_2, f_2, 1_G), (f_2, f_2, g), (f_2, f_2, h), (f_2, f_2, gh)\}$. Escrevendo um elemento $k \in \mathcal{G}$ como $k = (i, j, \ell)$ com $i, j \in \{f_1, f_2\}$, $\ell \in G$, definimos $\partial_k = \ell$.

Considere um anel comutativo R e a R-álgebra $A = \bigoplus_{i=1}^{12} Re_i$, onde $\{e_i\}_{i=1}^{12}$ é um conjunto de idempotentes dois a dois ortogonais cuja soma é 1_A. Definimos $A_{k_1} = \bigoplus_{i=1}^{8} Re_i$, $A_{k_2} = \bigoplus_{i=5}^{12} Re_i$, para todos $k_1, k_2 \in \mathcal{G}$ com $r(k_1) = f_1$, $r(k_2) = f_2$, e

$$\beta_k\left(\sum_{i=1}^{8} a_i e_i\right) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{8} a_i e_{\partial_k(i)}, & \text{se } d(k) = r(k) = f_1, \\ \sum_{i=1}^{8} a_i e_{\partial_k(i)+4}, & \text{se } d(k) = f_1, r(k) = f_2, \end{cases}$$

$$\beta_k\left(\sum_{i=1}^{8} a_i e_{i+4}\right) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{8} a_i e_{\partial_k(i)+4}, & \text{se } d(k) = r(k) = f_2, \\ \sum_{i=1}^{8} a_i e_{\partial_k(i)}, & \text{se } d(k) = f_2, r(k) = f_1, \end{cases}$$

temos que $\beta = (A_k, \beta_k)_{k \in \mathcal{G}}$ é uma ação global não ortogonal de $\mathcal{G}$ em A.

Mais ainda, A é fortemente β-Galois sobre $A^{\beta} = R$ com sistema de coordenadas $\{x_i = y_i = e_i\}_{i=1}^{12}$. Vamos apresentar agora a correspondência de Galois para essa ação. Para isso, denotaremos por $\mathcal{G}(f_1) = G_1$, $\mathcal{G}(f_2) = G_2$, e usaremos a seguinte notação de colchetes para descrever as subálgebras: representaremos por $[i_1, i_2, \ldots, i_n]$ a R-álgebra $R(e_{i_1} + e_{i_2} \cdots e_{i_n}) \oplus \bigoplus_{j \notin I} Re_j$, onde $I = \{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \{1, \ldots, 12\}$, e vamos omitir o símbolo da soma direta. Por exemplo,

$$[1,2] \leftrightarrow R(e_1 + e_2) \oplus \bigoplus_{i=3}^{12} Re_i,$$

$$[3,4][5,6,7] \leftrightarrow Re_1 \oplus Re_2 \oplus R(e_3 + e_4) \oplus R(e_5 + e_6 + e_7) \oplus \bigoplus_{i=8}^{12} Re_i,$$

$$[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12] \leftrightarrow A^\beta.$$

A correspondência de Galois relaciona os 33 elementos de W com os 33 elementos de A:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_0 &\leftrightarrow A \\
\mathcal{G}_0 \cup \{(f_1, f_1, g)\} &\leftrightarrow [1,2][3,4][5,6][7,8] \\
\mathcal{G}_0 \cup \{(f_1, f_1, h)\} &\leftrightarrow [1,3][2,4][5,7][6,8] \\
\mathcal{G}_0 \cup \{(f_1, f_1, gh)\} &\leftrightarrow [1,4][2,3][5,8][6,7] \\
\mathcal{G}_0 \cup G_1 &\leftrightarrow [1,2,3,4][5,6,7,8] \\
\mathcal{G}_0 \cup \{(f_2, f_2, g)\} &\leftrightarrow [5,6][7,8][9,10][11,12] \\
\mathcal{G}_0 \cup \{(f_2, f_2, h)\} &\leftrightarrow [5,7][6,8][9,11][10,12] \\
\mathcal{G}_0 \cup \{(f_2, f_2, gh)\} &\leftrightarrow [5,8][6,7][9,12][10,11] \\
\mathcal{G}_0 \cup G_2 &\leftrightarrow [5,6,7,8][9,10,11,12] \\
H_1 := \mathcal{G}_0 \cup \{(f_1, f_1, g), (f_2, f_2, g)\} &\leftrightarrow [1,2][3,4][5,6][7,8][9,10][11,12] \\
\mathcal{G}_0 \cup \{(f_1, f_1, g), (f_2, f_2, h)\} &\leftrightarrow [1,2][3,4][5,6,7,8][9,11][10,12] \\
\mathcal{G}_0 \cup \{(f_1, f_1, g), (f_2, f_2, gh)\} &\leftrightarrow [1,2][3,4][5,6,7,8][9,12][10,11] \\
\mathcal{G}_0 \cup \{(f_1, f_1, g)\} \cup G_2 &\leftrightarrow [1,2][3,4][5,6,7,8][9,10,11,12] \\
\mathcal{G}_0 \cup \{(f_1, f_1, h), (f_2, f_2, g)\} &\leftrightarrow [1,3][2,4][5,6,7,8][9,10][11,12] \\
H_2 := \mathcal{G}_0 \cup \{(f_1, f_1, h), (f_2, f_2, h)\} &\leftrightarrow [1,3][2,4][5,7][6,8][9,11][10,12] \\
\mathcal{G}_0 \cup \{(f_1, f_1, h), (f_2, f_2, gh)\} &\leftrightarrow [1,3][2,4][5,6,7,8][9,12][10,11] \\
\mathcal{G}_0 \cup \{(f_1, f_1, h)\} \cup G_2 &\leftrightarrow [1,3][2,4][5,6,7,8][9,10,11,12] \\
\mathcal{G}_0 \cup \{(f_1, f_1, gh), (f_2, f_2, g)\} &\leftrightarrow [1,4][2,3][5,6,7,8][9,10][11,12] \\
\mathcal{G}_0 \cup \{(f_1, f_1, gh), (f_2, f_2, h)\} &\leftrightarrow [1,4][2,3][5,6,7,8][9,11][10,12] \\
H_3 := \mathcal{G}_0 \cup \{(f_1, f_1, gh), (f_2, f_2, gh)\} &\leftrightarrow [1,4][2,3][5,8][6,7][9,12][10,11]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_0 \cup \{(f_1, f_1, gh)\} \cup G_2 &\leftrightarrow [1,4][2,3][5,6,7,8][9,10,11,12] \\
\mathcal{G}_0 \cup G_1 \cup \{(f_2, f_2, g)\} &\leftrightarrow [1,2,3,4][5,6,7,8][9,10][11,12] \\
\mathcal{G}_0 \cup G_1 \cup \{(f_2, f_2, h)\} &\leftrightarrow [1,2,3,4][5,6,7,8][9,11][10,12] \\
\mathcal{G}_0 \cup G_1 \cup \{(f_2, f_2, gh)\} &\leftrightarrow [1,2,3,4][5,6,7,8][9,12][10,11] \\
\mathcal{G}_0 \cup G_1 \cup G_2 &\leftrightarrow [1,2,3,4][5,6,7,8][9,10,11,12] \\
K_0 := \mathcal{G}_0 \cup \{(f_1, f_2, e), (f_2, f_1, e)\} &\leftrightarrow [1,5,9][2,6,10][3,7,11][4,8,12] \\
K_1 := \mathcal{G}_0 \cup \{(f_1, f_2, g), (f_2, f_1, g)\} &\leftrightarrow [1,6,9][2,5,10][3,8,11][4,7,12] \\
K_2 := \mathcal{G}_0 \cup \{(f_1, f_2, h), (f_2, f_1, h)\} &\leftrightarrow [1,7,9][2,8,10][3,5,11][4,6,12] \\
K_3 := \mathcal{G}_0 \cup \{(f_2, f_1, gh), (f_2, f_1, gh)\} &\leftrightarrow [1,8,9][2,7,10][3,6,11][4,5,12] \\
K_0 \cup K_1 \cup H_1 &\leftrightarrow [1,2,5,6,9,10][3,4,7,8,11,12] \\
K_0 \cup K_2 \cup H_2 &\leftrightarrow [1,3,5,7,9,11][2,4,6,8,10,12] \\
K_0 \cup K_3 \cup H_3 &\leftrightarrow [1,4,5,8,9,12][2,3,6,7,10,11] \\
\mathcal{G} &\leftrightarrow A^\beta
\end{aligned}
$$

Observação 2.3.14. Até agora, podemos concluir o seguinte:

(1) Existem propriedades da Teoria de Galois que são válidas para ações ortogonais mas que não são válidas para ações não ortogonais, de forma que a teoria não pode ser reduzida ao caso ortogonal.

(2) O Teorema 2.3.12 nos dá uma generalização das teorias de Galois que já existem na literatura, mas ainda é restritivo, pois pede que a ação parcial seja fortemente Galois, e nem todas as ações parciais de grupoide pertencem a essa classe, como podemos ver no exemplo a seguir.

Exemplo 2.3.15. Seja $\mathcal{G} = \{g, f_1\} \cup \{h, f_2\}$ o grupoide definido como a união de dois grupos isomorfos a $\mathbb{Z}_2$, isto é, $g^2 = f_1 = f_1^2$ e $h^2 = f_2 = f_2^2$. Considere um anel comutativo R e $A = Re_1 \oplus Re_2$, com e_1, e_2 idempotentes ortogonais cuja soma é 1_A. Defina $A_k = A$, para todo $k \in \mathcal{G}$,

$$\beta_g(ae_1 + be_2) = be_1 + ae_2 = \beta_h(ae_1 + be_2),$$

e $\beta_{f_1} = \beta_{f_2} = \mathrm{id}_A$. Temos que β é uma ação global (não ortogonal) de $\mathcal{G}$ em A. Mais ainda, A é β-Galois sobre $A^\beta = R$ com sistema de coordenadas β-Galois dado por $x_i = y_i = e_i$, $i = 1, 2$. Entretanto, temos que $A^{\beta|_{\mathcal{G}(f_1)}} = A^{\beta|_{\mathcal{G}(f_2)}} = A^\beta$, de onde segue que A não é fortemente β-Galois sobre A^β.

Embora o exemplo acima demonstre que nem toda ação global é fortemente Galois, podemos usar o resultado auxiliar abaixo para enunciar um teorema de correspondência de Galois que abranja toda a classe de ações globais de grupoide.

Proposição 2.3.16. *Seja $\beta = (A_g, \beta_g)$ uma ação global de um grupoide $\mathcal{G}$ em um anel comutativo A. Se $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são subgrupoides amplos de $\mathcal{G}$ tais que $A^{\beta|_{\mathcal{H}_1}} = A^{\beta|_{\mathcal{H}_2}}$, então o subgrupoide de $\mathcal{G}$ gerado por $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, denotado por $\mathcal{H}$, é tal que $A^{\beta|_{\mathcal{H}}} = A^{\beta|_{\mathcal{H}_1}}$.*

Demonstração. É fato que $A^{\beta|_{\mathcal{H}}} \subseteq A^{\beta|_{\mathcal{H}_1}}$, pois $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}$. Para a inclusão contrária, seja $a \in A^{\beta|_{\mathcal{H}_1}} = A^{\beta|_{\mathcal{H}_2}}$. Considere $h \in \mathcal{H}$. Temos que h pode ser escrito como $h = h_1 \cdots h_n$, para algum inteiro positivo n e $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ com $d(h_i) = r(h_{i+1})$, para todo $1 \leq i \leq n-1$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\beta_h(a1_{h^{-1}}) &= \beta_{h_1\cdots h_n}(a1_{d(h_n)}) \\
&= \beta_{h_1\cdots h_{n-1}}(\beta_{h_n}(a1_{d(h_n)})), && \text{pois } d(h_{n-1}) = r(h_n) \\
&= \beta_{h_1\cdots h_{n-1}}(a1_{r(h_n)}), && \text{pois } a \in A^{\beta|_{\mathcal{H}_1}} = A^{\beta|_{\mathcal{H}_2}} \\
&= \beta_{h_1\cdots h_{n-1}}(a1_{d(h_{n-1})}), && \text{pois } r(h_n) = d(h_{n-1}) \\
&= \beta_{h_1\cdots h_{n-2}}(\beta_{h_{n-1}}(a1_{d(h_{n-1})})), && \text{pois } d(h_{n-2}) = r(h_{n-1}) \\
&= \cdots \\
&= \beta_{h_1}(a1_{d(h_1)}) \\
&= a1_{r(h_1)}, && \text{pois } A^{\beta|_{\mathcal{H}_1}} = A^{\beta|_{\mathcal{H}_2}} \\
&= a1_h, && \text{pois } r(h) = r(h_1).
\end{aligned}$$

□

Mantendo as notações do Teorema 2.3.12, definimos uma relação de equivalência $\sim$ em W por: $\mathcal{H}_1 \sim \mathcal{H}_2$ se, e somente se, $A^{\alpha|_{\mathcal{H}_1}} = A^{\alpha|_{\mathcal{H}_2}}$. Se α é global, então segue da Proposição 2.3.16 que cada $\sim$-classe possui um único elemento maximal com respeito a inclusão. A saber, dado $\mathcal{H} \in \mathsf{W}$, escreveremos $\mathcal{H}^{max}$ para representar o único elemento maximal da $\sim$-classe de $\mathcal{H}$. Portanto, podemos definir o conjunto

$$\mathsf{W}^{max} = \{\mathcal{H}^{max} : \mathcal{H} \in \mathsf{W}\}.$$

Agora podemos enunciar a segunda correspondência de Galois dessa seção.

Teorema 2.3.17 (Correspondência de Galois para Ação Global de Grupoide)**.** *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide finito agindo em um anel comutativo A via ação global unitária β. Considere ω a ortogonalização de β no anel Ω como anteriormente. Suponha que $A_g \neq 0$, para todo $g \in \mathcal{G}_0$, e que A é uma extensão β-Galois de A^β. Então existe uma correspondência biunívoca entre os conjuntos W^{max} e A dada por $\mathsf{W}^{max} \ni \mathcal{H} \mapsto A^{\beta|_{\mathcal{H}}}$ com inversa $\mathsf{A} \ni C \mapsto (\mathcal{G}_{\psi(C)})^{max}$.*

Demonstração. Inicialmente aplicamos o teorema de correspondência de Galois para ações globais ortogonais [46, Theorem 4.6] na ortogonalização ω de β para obter uma correspondência de Galois entre todos os subgrupoides amplos de $\mathcal{G}$ e todas as Ω^{ω}-subálgebras separáveis, ω-fortes C de Ω, isto é, $\mathcal{H} \leftrightarrow \Omega^{\omega|_{\mathcal{H}}}$. Restringindo essa correspondência ao conjunto W^{max}, temos uma correspondência de um para um dada por $\mathcal{H}^{max} \leftrightarrow \Omega^{\omega|_{\mathcal{H}^{max}}}$.

Afirmação 1. Existe uma correspondência de um para um entre os conjuntos $\Omega^{\omega|_{\mathcal{H}^{max}}}$ e $A^{\beta|_{\mathcal{H}^{max}}} = \psi^{-1}(\Omega^{\omega|_{\mathcal{H}^{max}}} \cap \psi(A))$.

De fato, defina $\theta : \{\Omega^{\omega|_{\mathcal{H}^{max}}} : \mathcal{H} \in \mathsf{W}\} \to \{A^{\beta|_{\mathcal{H}^{\max}}} : \mathcal{H} \in \mathsf{W}\}$ por $\theta(\Omega^{\omega|_{\mathcal{H}^{max}}}) = A^{\beta|_{\mathcal{H}^{\max}}}$. Temos que θ é injetiva, pois se $\theta(\Omega^{\omega|_{\mathcal{H}^{max}}}) = \theta(\Omega^{\omega|_{\mathcal{K}^{max}}})$, para $\mathcal{H}^{max}, \mathcal{K}^{max} \in \mathsf{W}^{max}$, então $A^{\beta|_{\mathcal{H}^{max}}} = A^{\beta|_{\mathcal{K}^{max}}}$, de onde segue da Proposição 2.3.16 que $\mathcal{H} \sim \mathcal{K}$, isto é, $\mathcal{H}^{max} = \mathcal{K}^{max}$. Logo $\Omega^{\omega|_{\mathcal{H}^{max}}} = \Omega^{\omega|_{\mathcal{K}^{max}}}$. Mais ainda, a sobrejetividade de θ segue da Proposição 2.3.9, provando a afirmação.

Afirmação 2. $\mathsf{A} = \{A^{\beta|_{\mathcal{H}^{max}}} : \mathcal{H}^{max} \in \mathsf{W}^{max}\}$.

De fato, para todo $C \in \mathsf{A}$, existe um subgrupoide amplo $\mathcal{H} \in \mathsf{W}$ tal que $C = A^{\beta|_{\mathcal{H}}}$. Mas $\mathcal{H} \sim \mathcal{H}^{max}$, isto é, $A^{\beta|_{\mathcal{H}}} = A^{\beta|_{\mathcal{H}^{max}}}$, pela Proposição 2.3.16. Assim $\mathsf{A} \subseteq \{A^{\beta|_{\mathcal{H}^{max}}} : \mathcal{H}^{max} \in \mathsf{W}^{max}\}$. A outra inclusão é imediata.

Logo, pelas afirmações 1 e 2 segue que existe uma correspondência biunívoca entre os conjuntos W^{max} e A.

□

Quando a extensão $A|_{A^{\beta}}$ é fortemente Galois no teorema acima, recuperamos exatamente o Teorema 2.3.12 para o caso global, pois nessa hipótese cada $\sim$-classe consiste de apenas um único subgrupoide amplo. Se β é ortogonal, temos a correspondência de Galois para ações globais de grupoide em anéis comutativos provada em [46, Theorem 4.6], pois quando β é ortogonal a extensão $A|_{A^{\beta}}$ é fortemente β-Galois e β é igual a sua própria ortogonalização.

Observação 2.3.18. O mesmo argumento usado na Proposição 2.3.16 não pôde ser usado no caso parcial para obter um análogo do Teorema 2.3.17, pois dados $a \in A$, $h, k \in \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ tais que $(h, k) \in \mathcal{G}_2$, não temos, em geral, que $a1_{k^{-1}h^{-1}} \in A_{k^{-1}} \cap A_{k^{-1}h^{-1}}$. Dessa forma, não podemos garantir que $\alpha_{hk}(a1_{k^{-1}h^{-1}}) = \alpha_h \circ \alpha_k(a1_{k^{-1}h^{-1}})$. A existência de um teorema de correspondência de Galois para ação parcial de grupoide mais geral vai exigir outras técnicas e ainda segue uma questão em aberto.

2.3.2 Aplicação para o skew-anel parcial de grupoide

Mantendo as notações desse capítulo, considere α uma ação parcial pré-unitária de um grupoide $\mathcal{G}$ em um anel (não necessariamente comutativo) A e ω sua ortogonalização, ação parcial ortogonal de $\mathcal{G}$ em um anel Ω. Nessa seção iremos aplicar a construção da ortogonalização para relacionar os skew-anéis parciais de grupoide $A \star_{\alpha} \mathcal{G}$ e $\Omega \star_{\omega} \mathcal{G}$.

Proposição 2.3.19. *Nas notações acima, temos que os skew-anéis parciais de grupoide* $A \star_\alpha \mathcal{G}$ *e* $\Omega \star_\omega \mathcal{G}$ *são isomorfos como anéis.*

Demonstração. Basta considerar o isomorfismo natural dado por

$$\begin{aligned} \Psi : A \star_\alpha \mathcal{G} &\to \Omega \star_\omega \mathcal{G} \\ \sum_{g \in \mathcal{G}} a\delta_g &\mapsto \sum_{g \in \mathcal{G}} \psi_{r(g)}(a)\delta_g, \end{aligned}$$

onde $\psi = \{\psi_e\}_{e \in \mathcal{G}_0}$ com $\psi_e : A_e \to \Omega_e$ é o isomorfismo de ações parciais entre α e ω. Note que essa aplicação está bem definida pois se $a\delta_g \in A \star_\alpha \mathcal{G}$, então $a \in A_g \subseteq A_{r(g)}$, de onde $\psi_{r(g)}(a) \in \psi_{r(g)}(A_g) = \Omega_g$.

Esse é claramente um isomorfismo de módulos. Para verificar que é um isomorfismo de anéis, considere $a\delta_g, b\delta_h \in A \star_\alpha \mathcal{G}$. Suponha que $(g, h) \in \mathcal{G}_2$. Então

$$\begin{aligned} &\Psi(a\delta_g) \cdot \Psi(b\delta_h) \\ &= \psi_{r(g)}(a)\delta_g \cdot \psi_{r(h)}(b)\delta_h, && \text{pela definição de } \Psi \\ &= \omega_g(\omega_{g^{-1}}(\psi_{r(g)}(a))\psi_{r(h)}(b))\delta_{gh}, && \text{pelo produto em } \Omega \star_\omega \mathcal{G} \\ &= \omega_g(\psi_{d(g)} \circ \alpha_{g^{-1}} \circ \psi_{r(g)}^{-1} \circ \psi_{r(g)}(a)\psi_{r(h)}(b))\delta_{gh}, && \text{pela definição de } \omega_{g^{-1}} \\ &= \omega_g(\psi_{d(g)} \circ \alpha_{g^{-1}}(a)\psi_{r(h)}(b))\delta_{gh} \\ &= \omega_g(\psi_{d(g)} \circ \alpha_{g^{-1}}(a)\psi_{d(g)}(b))\delta_{gh}, && \text{pois } d(g) = r(h) \\ &= \omega_g(\psi_{d(g)}(\alpha_{g^{-1}}(a)b))\delta_{gh}, && \text{pois } \psi_{d(g)} \text{ é homomorfismo} \\ &= \psi_{r(g)} \circ \alpha_g \circ \psi_{d(g)}^{-1} \circ \psi_{d(g)}(\alpha_{g^{-1}}(a)b)\delta_{gh}, && \text{pela definição de } \omega_g \\ &= \psi_{r(g)} \circ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b)\delta_{gh} \\ &= \Psi(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a)b)\delta_{gh}), && \text{pela definição de } \Psi \\ &= \Psi(a\delta_g \cdot b\delta_h), && \text{pelo produto em } A \star_\alpha \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Caso $(g, h) \notin \mathcal{G}_2$, então

$$\Psi(a\delta_g \cdot b\delta_h) = \Psi(0) = 0 = \psi_{r(g)}(a)\delta_g \cdot \psi_{r(h)}(b)\delta_h = \Psi(a\delta_g) \cdot \Psi(b\delta_h),$$

de onde segue que

$$\Psi(a\delta_g \cdot b\delta_h) = \Psi(a\delta_g) \cdot \Psi(b\delta_h).$$

Estendendo esse resultado por linearidade, obtemos que Ψ é um isomorfismo de anéis, como gostaríamos. □

Como aplicação direta desse resultado, obtemos o seguinte.

Corolário 2.3.20. *Seja* α *uma ação parcial unitária (não necessariamente ortogonal) de* *um grupoide (não necessariamente finito) $\mathcal{G}$ em um anel (não necessariamente comutativo) A. Se A é artiniano à esquerda (resp. à direita) e $A_g \neq 0$ para apenas um número finito de $g \in \mathcal{G}$, então $A \star_\alpha \mathcal{G}$ é artiniano à esquerda (resp. à direita).*

Demonstração. Provaremos o caso à esquerda, sendo o caso à direita completamente análogo. Como A é artiniano à esquerda, A_g é artiniano à esquerda, para todo $g \in \mathcal{G}$. De fato, como A_g é unitário com unidade 1_g, podemos escrever $A = A_g \oplus A(1_A - 1_g)$. Assim, A_g é um somando direto de A e, portanto, artiniano à esquerda. Agora, como $\Omega = \bigoplus_{e \in \mathcal{G}_0} \psi_e(A_e)$ e cada $\psi_e(A_e)$ é artiniano à esquerda, temos que Ω é artiniano à esquerda. O resultado agora segue aplicando [44, Proposition 3.1] na ortogonalização ω e usando o fato de que $A \star_\alpha \mathcal{G} \simeq \Omega \star_\omega \mathcal{G}$ pela Proposição 2.3.19. □

Capítulo 3

Teoria de Galois para ação de semigrupo inverso

O binómio de Newton é tão belo
como a Vénus de Milo.
O que há é pouca gente para dar por
isso.
(Álvaro de Campos)
óóóó — óóóóóóóóó —
óóóóóóóóóóóóóóó
(O vento lá fora).

Álvaro de Campos

A Teoria de Galois para grupoides vem sendo construída desde 1966, no artigo [51] de Villamayor e Zelinsky. Desde então, todas as teorias de Galois para ação de grupoide carregaram a hipótese da ação ser ortogonal, como podemos ver, por exemplo, em [8], [11], [16], [44], [45], [46], [47] e [48]. Seguindo essa linha, Lautenschlaeger e Tamusiunas usaram em [36] o Teorema ESN [37, Theorem 4.1.8], que prova uma equivalência entre a categoria de semigrupos inversos e a categoria de grupoides indutivos, para traduzir a Teoria de Galois para ação ortogonal de grupoide para o caso de semigrupos inversos. Entretanto, a hipótese da ortogonalidade anula muitos ideais da ação que não são associados a um elemento maximal do semigrupo inverso com respeito à ordem parcial natural, o que torna a teoria de [36] muito restritiva.

Neste capítulo, usaremos resultados de Lawson [37] para obter uma relação entre ações de semigrupos inversos e ações parciais de grupo, e usaremos as referências [8], [11] e [19] para construir uma Teoria de Galois geral para semigrupos inversos. O principal argumento é que toda ação de semigrupo inverso E-unitário induz uma ação parcial de grupo, que será demonstrado no Teorema 3.2.3. Assim, conseguiremos construir uma nova aplicação traço invariante e um contexto de Morita envolvendo o anel dos invariantes e o skew anel de semigrupo inverso, bem como apresentar um teorema de equivalências para extensões galoisianas, um teorema de correspondência de Galois que não exige nenhuma hipótese sobre a ação e um teorema envolvendo semigrupos inversos quocientes.

Também analisaremos o que ocorre no caso de semigrupos inversos com zero. Para isso, estenderemos alguns resultados de Lawson [37] para obter uma relação entre semigrupos inversos categóricos no zero 0-E-unitários e grupoides. Mostraremos que as ações de semigrupo inverso com zero podem ser usadas para construir ações parciais ortogonais de grupoide e utilizaremos a teoria apresentada no capítulo anterior para obter resultados análogos ao caso de semigrupos inversos sem zero.

3.1 Pré-requisitos

Nessa seção, apresentaremos as referências básicas para a construção da Teoria de Galois para ações de semigrupo inverso. A maioria dos resultados e definições aqui apresentados vem do livro "*Inverse semigroups, the theory of partial symmetries*" de Mark V. Lawson [37], e portanto não será provida uma demonstração. É recomendado que a leitora e o leitor que não tenham familiaridade com o tema consultem as demonstrações dos resultados no livro.

Seja S um semigrupo inverso (Definição 1.1.6). Conforme definido anteriormente, relembramos a leitora e o leitor que a ordem parcial natural $\preceq$ em S é definida por

$$s \preceq t \Leftrightarrow s = te, \text{ algum } e \in E(S),$$

onde $E(S)$ representa o conjunto de idempotentes de S e $s, t \in S$.

Para todos $s, t \in S$, a *relação de compatibilidade à esquerda* é definida por

$$s \sim_l t \iff st^{-1} \in E(S),$$

a *relação de compatibilidade à direita* é definida por

$$s \sim_r t \iff s^{-1}t \in E(S),$$

e a *relação de compatibilidade*, a interseção das duas relações acima, é definida por

$$s \sim t \iff st^{-1}, s^{-1}t \in E(S).$$

Essas relações são reflexivas e simétricas, mas nenhuma delas precisa ser transitiva.

Lema 3.1.1. *[37, Lemma 1.4.11] Sejam S um semigrupo inverso e $s, t \in S$.*

(i) $s \sim_l t$ se, e somente se, o ínfimo $u = s \wedge t$ existe e $u^{-1}u = s^{-1}st^{-1}t$.

(ii) $s \sim_r t$ *se, e somente se, o ínfimo* $u = s \wedge t$ *existe e* $uu^{-1} = ss^{-1}tt^{-1}$.

(iii) $s \sim_r t$ *se, e somente se, o ínfimo* $u = s \wedge t$ *existe,* $u^{-1}u = s^{-1}st^{-1}t$ *e* $uu^{-1} = ss^{-1}tt^{-1}$.

Sejam S um semigrupo inverso e $A \subseteq S$. Dizemos que A é um *subconjunto compatível* se para todos $a, b \in A$, temos que $a \sim b$.

Definição 3.1.2. Uma *congruência* em um semigrupo inverso S é uma relação de equivalência ρ em S tal que $(a, b), (c, d) \in \rho$ implica $(ac, bd) \in \rho$.

Seja $\theta : S \to T$ um homomorfismo de semigrupos inversos. O núcleo de θ é a relação $\ker \theta$ definida em S por

$$\ker \theta = \{(a, b) \in S \times S : \theta(a) = \theta(b)\}.$$

É fácil de ver que $\ker \theta$ é uma congruência. A recíproca também é verdadeira. De fato, seja ρ uma congruência arbitrária em um semigrupo inverso S. Em S/ρ podemos definir o produto $\rho(a)\rho(b) = \rho(ab)$, bem-definido pois ρ é uma congruência. Então S/ρ é um semigrupo inverso com respeito à essa operação binária e $\rho(s)^{-1} = \rho(s^{-1})$, chamado o *semigrupo inverso quociente* de S por ρ. Então, denotando por $\pi : S \to S/\rho$ a aplicação definida por $\pi(s) = \rho(s)$, temos que $\rho = \ker \pi$.

Definição 3.1.3. Seja S um semigrupo inverso. Definimos a relação σ em S por

$$s\sigma t \iff \text{existe } u \preceq s, t,$$

para todos $s, t \in S$. Dizemos que σ é a *congruência de grupo minimal* em S.

Note que se S possui zero, então $0\sigma s$, para todo $s \in S$, de onde S/σ é o grupo trivial. Por esse motivo, iremos separar o estudo de semigrupos inversos sem zero para o caso de semigrupos inversos com zero. A partir daqui, consideraremos que S não possui zero.

Teorema 3.1.4. *[37, Theorem 2.4.1] Seja* S *um semigrupo inverso.*

(i) σ *é a menor congruência em* S *contendo a relação de compatibilidade.*

(ii) S/σ *é um grupo.*

(iii) Se ρ *é uma congruência em* S *tal que* S/ρ *é um grupo, então* $\sigma \subseteq \rho$.

Deste ponto até o final do capítulo, fixaremos o símbolo σ para representar a congruência de grupo minimal. Dado $s \in S$, denotaremos por $\sigma(s)$ a σ-classe do elemento s.

Definição 3.1.5. Dizemos que um semigrupo inverso S é *E-unitário* se $e \in E(S)$ e $e \preceq s$ implicarem que $s \in E(S)$, para todo $s \in S$.

Teorema 3.1.6. *[37, Theorem 2.4.6] Seja S um semigrupo inverso. As afirmações a seguir são equivalentes:*

(i) S é E-unitário.

(ii) $\sim = \sigma$.

(iii) $\sigma(e) = E(S)$, para todo $e \in E(S)$.

Também devemos fazer observações sobre supremos de elementos em um semigrupo inverso. Dizemos que o elemento $u \in S$ é o *supremo* dos elementos $s, t \in S$ se $s \preceq u$, $t \preceq u$ e se $s \preceq v$, $t \preceq v$, então $u \preceq v$. Neste caso denotamos $u = s \vee t$. Diferentemente do caso de ínfimos, supremos nem sempre estão definidos, nem mesmo entre idempotentes. Mais ainda, sabemos que se s e t não forem compatíveis, é garantido que seu supremo $s \vee t$ não existirá. Entretanto, apenas a compatibilidade não garante existência de supremo.

Um semigrupo inverso é dito *completo* se todo subconjunto compatível não vazio possui um supremo. Um semigrupo inverso é dito *f-completo* se todo subconjunto finito compatível não vazio possui um supremo. Dizemos que um subsemigrupo inverso T de um semigrupo inverso qualquer S é *fechado para supremos* se dado um subconjunto compatível $P \subseteq T$, temos que se existe $\bigvee P$, então $\bigvee P \in T$.

Exemplo 3.1.7. Seja A um anel e considere $\mathrm{Iso}_{pu}(A)$ o monoide inverso de isomorfismos entre ideais unitários de A. Temos que dados $f, g \in \mathrm{Iso}_{pu}(A)$, $f \sim g$ se, e somente se, $fg^{-1}, f^{-1}g \in E(\mathrm{Iso}_{pu}(A))$. Vamos caracterizar essa relação em $\mathrm{Iso}_{pu}(A)$. Escreva $\mathrm{dom}(f) = I_f$, $\mathrm{dom}(g) = I_g$, $\mathrm{Im}(f) = J_f$ e $\mathrm{Im}(g) = J_g$. Então $f : I_f \to J_f$ e $g : I_g \to J_g$ são isomorfismos entre ideais unitários I_f, J_f e I_g, J_g de A. Lembre ainda que $E(\mathrm{Iso}_{pu}(A)) = \{\mathrm{Id}_B : B \text{ é um ideal unitário de } A\}$.

Desta forma, temos que

$$\mathrm{dom}(fg^{-1}) = g(I_f \cap I_g) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(fg^{-1}) = f(I_f \cap I_g).$$

Se $fg^{-1} \in E(\mathcal{I}(A))$, então temos que $fg^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{dom}(fg^{-1})} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(fg^{-1})}$. Isso implica que $g(I_f \cap I_g) = f(I_f \cap I_g)$ e que $fg^{-1}(x) = x$, para todo $x \in g(I_f \cap I_g)$, ou seja, que $g^{-1}(x) = f^{-1}(x)$, para todo $x \in g(I_f \cap I_g)$. Mas isso é o mesmo que dizer que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in I_f \cap I_g$, de onde também segue que $f^{-1}g \in E(S)$. É fácil notar que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in I_f \cap I_g$ também implica que fg^{-1} é um idempotente.

Analogamente, temos que $f^{-1}g \in E(\mathrm{Iso}_{pu}(A))$ se, e somente se, $f^{-1}(x) = g^{-1}(x)$, para todo $x \in J_f \cap J_g$, de onde obtemos que

$$f \sim g \text{ em } \mathrm{Iso}_{pu}(A) \text{ se, e somente se, } f(x) = g(x), \text{ para todo } x \in I_f \cap I_g,$$
$$\text{e } f^{-1}(x) = g^{-1}(x), \text{ para todo } x \in J_f \cap J_g.$$

Temos que $\mathrm{Iso}_{pu}(A)$ é um semigrupo inverso f-completo, pois a soma finita de ideais unitários é unitária. Aqui usamos soma de ideais ao invés da união de conjuntos que aparece na literatura pois a união de ideais não é necessariamente um ideal. Agora, dados $f, g \in \mathrm{Iso}_{pu}(A)$ tais que $f \sim g$, temos que $f \vee g = f + g$, onde $f + g$ é definido como a aplicação $f + g : I_f + I_g \to J_f + J_g$ dada por $(f + g)(x + y) = f(x) + g(y)$, onde $x \in I_f$ e $y \in I_g$. Note que essa bijeção está bem definida pois $f \sim g$ implica que f e g coincidem em $I_f \cap I_g$ e f^{-1} e g^{-1} coincidem em $J_f \cap J_g$, de onde temos que $f^{-1} + g^{-1} = (f + g)^{-1}$.Agora verificaremos que $f + g$ é um homomorfismo de anéis. A aditividade é imediata, então vamos provar que $f + g$ preserva multiplicação. Sejam $x_1, x_2 \in I_f$ e $y_1, y_2 \in I_g$. Então:

$$
\begin{aligned}
&(f + g)((x_1 + y_1)(x_2 + y_2)) \\
&= (f + g)(x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2) \\
&= f(x_1x_2 + x_1y_2) + g(y_1x_2 + y_1y_2) \\
&= f(x_1)f(x_2) + f(x_1y_2)f(1_{I_f}1_{I_g}) + g(y_1x_2)g(1_{I_f}1_{I_g}) + g(y_1)g(y_2) \\
&= f(x_1)f(x_2) + f(x_1)f(y_21_{I_f}1_{I_g}) + g(y_1)g(x_21_{I_f}1_{I_g}) + g(y_1)g(y_2) \\
&= f(x_1)f(x_2) + f(x_1)g(y_21_{I_f}1_{I_g}) + g(y_1)f(x_21_{I_f}1_{I_g}) + g(y_1)g(y_2) \\
&= f(x_1)f(x_2) + f(x_1)g(y_2)g(1_{I_f}1_{I_g}) + g(y_1)f(x_2)f(1_{I_f}1_{I_g}) + g(y_1)g(y_2) \\
&= f(x_1)f(x_2) + f(x_1)g(y_2)1_{J_f}1_{J_g} + g(y_1)f(x_2)1_{J_f}1_{J_g} + g(y_1)g(y_2) \\
&= f(x_1)f(x_2) + f(x_1)g(y_2) + g(y_1)f(x_2) + g(y_1)g(y_2) \\
&= (f + g)(x_1 + y_1)(f + g)(x_2 + y_2).
\end{aligned}
$$

Além disso, a soma finita de ideais unitários segue um ideal unitário, concluindo que $f+g \in \mathrm{Iso}_{pu}(A)$. Além disso, é imediato verificar que $f \vee g = f + g$. Claramente podemos estender essa construção para um número finito de elementos compatíveis em $\mathrm{Iso}_{pu}(A)$.

De fato, dados $f : I_f \to J_f$, $g : I_g \to J_g$ e $h : I_h \to J_h$ em $\mathrm{Iso}_{pu}(A)$ tais que f, g, h são dois a dois $\sim$-relacionados, vamos mostrar que h é $\sim$-relacionado a $f+g$, de onde podemos definir $(f+g)+h$. Note que $\mathrm{dom}(f+g) = I_f+I_g$, de onde $I_h \cap \mathrm{dom}(f+g) = I_h \cap (I_f+I_g)$. Como esses ideais são unitários, temos que

$$I_h \cap (I_f + I_g) = I_h(I_f + I_g) = I_hI_f + I_hI_g = (I_h \cap I_f) + (I_h \cap I_g).$$

Considere $x + y \in I_h \cap \mathrm{dom}(f + g)$, onde $x \in I_h \cap I_f$ e $y \in I_h \cap I_g$. Então $h(x) = f(x)$, pois $h \sim f$, e $h(y) = g(y)$, pois $h \sim g$. Assim,

$$h(x + y) = h(x) + h(y) = f(x) + g(y) = (f + g)(x + y),$$

isto é, h e $f + g$ coincidem na interseção de seus domínios. Analogamente provamos que h^{-1} e $f^{-1} + g^{-1} = (f + g)^{-1}$ coincidem na interseção de seus domínios. Logo $h \sim f + g$

como gostaríamos. Por simetria, $f \sim g+h$ e $g \sim f+h$ também valem, de onde $f+g+h$ está bem definido sem a necessidade de parênteses. A demonstração para um número finito arbitrário de isomorfismos parciais segue agora por indução.

Essa construção de supremo será usada nos próximos parágrafos.

Suponha que S é um subsemigrupo inverso finito E-unitário do monoide inverso $\mathrm{Iso}_{pu}(A)$ do anel unitário A. Seja $f \in S$. Já vimos que o conjunto $\sigma(f)$ é composto de elementos compatíveis. Logo, como $\mathrm{Iso}_{pu}(A)$ é f-completo, podemos considerar o elemento $\alpha_f = \sum_{g \in \sigma(f)} g \in \mathrm{Iso}_{pu}(A)$. Considere $G' = \{\alpha_f : f \in S\} \subseteq \mathrm{Iso}_{pu}(A)$.

Adaptaremos [37, Lemmas 7.2.1, 7.2.2], onde os resultados são demonstrados para o caso de bijeções entre conjuntos, ao contexto de um semigrupo inverso finito de isomorfismos entre ideais unitários.

Lema 3.1.8. *Nas notações acima,*

(i) Para todo par $\alpha, \beta \in G'$, existe um único $\gamma_{(\alpha,\beta)} \in G'$ tal que $\alpha \circ \beta \leq \gamma_{(\alpha,\beta)}$.

(ii) α_e é um idempotente quando $e \in E(S)$.

(iii) Se $\alpha \in G'$, então $\alpha^{-1} \in G'$.

Demonstração. (i): Note que $f \preceq g$ em $\mathrm{Iso}_{pu}(A)$ é equivalente a f ser uma restrição de g no sentido usual de funções.

Considere $\alpha = \alpha_f$ e $\beta = \alpha_g$ para determinados $f, g \in S$. Defina $\gamma_{(\alpha,\beta)} = \alpha_{fg}$. Vamos provar que $\mathrm{dom}(\alpha_f \alpha_g) \subseteq \mathrm{dom}(\alpha_{fg})$ e que $\alpha_f \alpha_g(x) = \alpha_{fg}(x)$, para todo $x \in \mathrm{dom}(\alpha_f \alpha_g)$. Para isso, denotaremos por $\{f_1, \ldots, f_n\} = \sigma(f)$ e $\{g_1, \ldots, g_m\} = \sigma(g)$.

Se $x \in \mathrm{dom}(\alpha_f \alpha_g) = \alpha_g^{-1}(\mathrm{dom}(\alpha_f) \cap \mathrm{Im}(\alpha_g))$, então $x \in \mathrm{dom}(\alpha_g)$. Isso implica que $x = \sum_{i=1}^m x_i$, com $x_i \in \mathrm{dom}(g_i)$, para $1 \leq i \leq m$. Mais ainda, $y = \alpha_g(x) = \sum_{i=1}^m g_i(x_i)$ é um elemento de $\mathrm{dom}(\alpha_f)$. Podemos reescrever a soma, se necessário, para assumir que y é expressado como $y = \sum_{i=1}^n y_k$ com $y_k \in \mathrm{dom}(f_k)$ e $y_k = \sum_{i \in I_k} g_i(x_i)$ para determinado conjunto de índices $I_k \subseteq \{1, \ldots, m\}$. Assim, temos:

$$\alpha_f(y) = \sum_{k=1}^n f_k(y_k) = \sum_{k=1}^n f_k\left(\sum_{i \in I_k} g_i(x_i)\right) = \sum_{k=1}^n f_k\left(\alpha_g\left(\sum_{i \in I_k} x_i\right)\right).$$

Portanto, para cada $1 \leq k \leq n$, $\sum_{i \in I_k} g_i(x_i)$ é um elemento de $\mathrm{dom}(f_k)$. Isso implica que $\sum_{i \in I_k} x_i$ também é um elemento do domínio de α_{fg} para todo $1 \leq i \leq m$, pois é um elemento do domínio de $f_k \alpha_g$. Consequentemente, $x \in \mathrm{dom}(\alpha_{fg})$. Agora, como $\sigma(fg) = \sigma(f)\sigma(g)$, é fácil ver que $\alpha_{fg}(x)$ coincide com $\alpha_f \alpha_g(x)$. So $\alpha_f \alpha_g \preceq \alpha_{fg}$.

Para a unicidade, suponha que $\gamma' \in G'$ é tal que $\alpha_f \alpha_g \preceq \gamma'$. Pela construção de G', temos que $\gamma' = \alpha_h$, para algum $h \in S$. Então $\alpha_f \alpha_g \preceq \gamma' = \alpha_h$ implica $fg \preceq \alpha_h$. Como $h \preceq \alpha_h$, temos $(fg)\sigma h$. Logo, concluímos que $\alpha_h = \alpha_{fg} = \gamma_{(\alpha,\beta)}$.

As demonstrações de (ii) e (iii) agora são análogas à demonstração de [37, Lemma 7.2.1]. □

Defina uma operação binária $\odot$ em G' por $\alpha \odot \beta = \gamma_{(\alpha,\beta)}$, onde $\gamma_{(\alpha,\beta)}$ é o único elemento de G' maior ou igual que $\alpha \circ \beta$ como no lema acima.

Lema 3.1.9. *$(G', \odot)$ é um grupo isomorfo a S/σ; a identidade é α_e, onde $e \in E(S)$, e o inverso de $\alpha \in G'$ é a bijeção parcial α^{-1}.*

Demonstração. Defina $\Phi : (G', \odot) \to S/\sigma$ por $\Phi(\alpha_f) = \sigma(f)$. Então pelo Lema 3.1.8(i) temos que $\Phi(\alpha_f \odot \alpha_g) = \Phi(\alpha_{fg}) = \sigma(fg) = \sigma(f)\sigma(g) = \Phi(\alpha_f)\Phi(\alpha_g)$. Pelo item (iii), $\Phi(\alpha_f^{-1}) = \Phi(\alpha_{f^{-1}}) = \sigma(f^{-1}) = \sigma(f)^{-1} = \Phi(\alpha_f)^{-1}$. Finalmente, $\Phi(\alpha_e) = 1_{S/\sigma}$, para qualquer $e \in E(S)$ pelo item (ii). Mais ainda, Φ é claramente uma bijeção pois os elementos de $(G', \odot)$ são definidos precisamente pelas σ-classes de S. □

3.2 Aplicação traço e subanel dos invariantes

Começaremos essa seção observando que uma ação unitária de S em A pode ser vista como um homomorfismo de semigrupos inversos $\beta : S \to \mathrm{Iso}_{pu}(A)$ que cobre A, onde $\mathrm{Iso}_{pu}(A)$ é o semigrupo inverso de isomorfismos entre ideais *unitários* de A. Dizemos que β é uma ação *injetiva* se β for uma aplicação injetiva, isto é, se $\beta(s) = \beta(t)$ implicar $s = t$, para todos $s, t \in S$.

Observação 3.2.1. Por "cobrir A" na definição acima queremos dizer que podemos escrever $A = \sum_{e \in E(S)} A_e$.

A partir dessa seção, consideraremos S um semigrupo inverso *finito* agindo em um anel A via ação *unitária* $\beta = (A_s, \beta_s)_{s \in S}$. Relembramos novamente a leitora e o leitor de que isso implica que o anel A é unitário. Definimos

$$A^{\beta} = \{a \in A : \beta_s(a1_{s^{-1}}) = a1_s, \text{ para todo } s \in S\},$$

o subanel dos invariantes de A por β.

Definimos a aplicação traço $\mathrm{tr}_{\beta} : A \to A$ como

$$\mathrm{tr}_{\beta}(a) = \sum_{s \in S} \beta_s(a1_{s^{-1}}).$$

No caso de grupos, a aplicação traço sempre é invariante, isto é, sempre vale que $\mathrm{tr}_{\beta}(A) \subseteq A^{\beta}$. Esse não é sempre o caso para ações de semigrupo inverso, como podemos ver no próximo exemplo:

Exemplo 3.2.2. Considere o monoide inverso $S = \{1_S, s, s^{-1}, ss^{-1}, s^{-1}s, t, tt^{-1}\}$ com relações $t = stt^{-1}$, $t = s^{-1}tt^{-1}$, $t = t^{-1}$, $s^2 = s^{-2} = tt^{-1}$ e $1_S u = u 1_S = u$, para todo $u \in S$.

Seja $A = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3$, onde $\mathbb{C}$ representa o conjunto dos números complexos e e_1, e_2, e_3 são idempotentes centrais dois a dois ortogonais cuja soma é 1_A. Considere $A_{1_S} = A$, $A_{s^{-1}} = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2$, $A_s = \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3$, $A_t = \mathbb{C}e_2$. Defina $\beta_s(ae_1 + be_2) = \overline{b}e_2 + ae_3$, $\beta_{s^{-1}}(be_2 + ce_3) = ce_1 + \overline{b}e_2$, $\beta_t(be_2) = \overline{b}e_2$ e $\beta_e = \mathrm{Id}_{A_e}$, para todo $e \in E(S)$.

Assim, temos que $A^\beta = \mathbb{C}(e_1 + e_3) \oplus \mathbb{R}e_2$. Entretanto, $\mathrm{tr}_\beta(ie_2) = ie_2 \notin A^\beta$, onde i denota a unidade imaginária $\sqrt{-1}$.

A invariância da aplicação traço é um dos alicerces da Teoria de Galois. Nosso objetivo será, então, definir uma aplicação "tipo-traço" para o caso de ações de semigrupo inverso. Trabalharemos com o caso E-unitário, e provaremos mais adiante que esse contexto pode ser estendido para uma Teoria de Galois para semigrupos inversos no caso geral.

Teorema 3.2.3. *Seja S um semigrupo inverso finito E-unitário agindo em um anel A via ação unitária $\beta = (A_s, \beta_s)_{s \in S}$. Suponha que β é uma ação injetiva. Defina*

$$A_{\sigma(s)} = \sum_{t \in \sigma(s)} A_t \tag{3.1}$$

e

$$\alpha_{\sigma(s)} = \sum_{t \in \sigma(s)} \beta_t. \tag{3.2}$$

Então $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g \in G}$ é uma ação parcial unitária do grupo $G = S/\sigma$ no anel A.

Demonstração. Note que como β é uma ação injetiva, então a aplicação $\beta : S \to \mathrm{Iso}_{pu}(A)$ dada por $s \mapsto \beta_s$ é um homomorfismo injetivo de semigrupos inversos. Portanto, S é isomorfo à sua imagem $\beta(S)$ em $\mathrm{Iso}_{pu}(A)$. Vamos identificar S com sua imagem $\beta(S)$ em $\mathrm{Iso}_{pu}(A)$. Claramente $\beta(S)$ é E-unitário.

Usando a construção dos Lemas 3.1.8 e 3.1.9, obtemos que as equações (3.1) e (3.2) definem um grupo $G' = \{\alpha_{\sigma(s)} : s \in S\}$ em $\mathrm{Iso}_{pu}(A)$. Aqui é importante notar que G' não necessariamente é um grupo com respeito a operação usual de $\mathrm{Iso}_{pu}(A)$, mas sim com a operação $\odot$ definida no Lema 3.1.9. Ainda por esse lema, temos que $(G', \odot) \simeq \beta(S)/\sigma$. Mas S e $\beta(S)$ são isomorfos, de onde $(G', \odot) \simeq \beta(S)/\sigma \simeq S/\sigma = G$.

Defina, então, $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g \in G}$. Vamos provar que α é uma ação parcial de G em A. Para isso bastar notar que $A_{\sigma(e)} = \sum_{f \in E(S)} A_f = A$, onde $e \in E(S)$, pois β é uma ação global de semigrupo inverso. Além disso, $\alpha_{\sigma(e)} = \mathrm{Id}_{A_{\sigma(e)}} = \mathrm{Id}_A$. Isso prova o item (P1') de ação parcial de grupo.

O Lema 3.1.8 nos diz que $\alpha_g \circ \alpha_h \leq \alpha_{gh}$. Mas isso implica que

$$\alpha_h^{-1}(A_{g^{-1}} \cap A_h) = \mathrm{dom}(\alpha_g \circ \alpha_h) \subseteq \mathrm{dom}(\alpha_{gh}) = A_{(gh)^{-1}}$$

e

$$\alpha_g \circ \alpha_h = \alpha_{gh}|_{\mathrm{dom}(\alpha_g \circ \alpha_h)} = \alpha_{gh}|_{\alpha_h^{-1}(A_{g^{-1}} \cap A_h)},$$

que são precisamente os itens (P2') e (P3') da definição de ação parcial de grupo.

Para vermos que α é unitária, denote por $\sigma(s) = \{s_1, \ldots, s_m\}$, para algum $s \in S$. Temos que

$$A_{\sigma(s)} = \sum_{t \in \sigma(s)} A_t = \sum_{i=1}^{m} A_{s_i}.$$

Portanto, temos que como A_{s_i} é um ideal unitário, para todo $1 \leq i \leq m$, $A_{\sigma(s)}$ é um anel unitário com unidade dada pela soma

$$1_{\sigma(s)} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_k} (-1)^{k+1} 1_{s_{i_1}} \cdots 1_{s_{i_k}}. \tag{3.3}$$

Em particular α é uma ação parcial unitária de G em A. □

Observação 3.2.4. Deste ponto até o final do capítulo, fixaremos as notações $G = S/\sigma$ e $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g \in G}$ como acima.

Observação 3.2.5. Note que se esquecermos da estrutura de $E(A)$ como anel e vermos somente sua multiplicação como um semigrupo inverso com zero, temos que $1_s \preceq 1_{\sigma(s)}$, para todo $s \in S$. Assim, obtemos a igualdade $1_{\sigma(s)} 1_s = 1_s$, para todo $s \in S$.

Proposição 3.2.6. *Nas notações dos teoremas acima, temos que* $A^\beta = A^\alpha$.

Demonstração. Seja $a \in A^\beta$, isto é, $a \in A$ tal que $\beta_s(a 1_{s^{-1}}) = a 1_s$, para todo $s \in S$. Então

$$\begin{aligned}
\alpha_{\sigma(s)}(a 1_{\sigma(s)^{-1}}) &= \alpha_{\sigma(s)}\left(a \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_k} (-1)^{k+1} 1_{s_{i_1}^{-1}} \cdots 1_{s_{i_k}^{-1}} \right), && \text{por (3.3)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_k} (-1)^{k+1} \alpha_{\sigma(s)}(a 1_{s_{i_1}^{-1}}) \cdots \alpha_{\sigma(s)}(1_{s_{i_k}^{-1}}), && \text{pois } \alpha_{\sigma(s)} \text{ é isomorfismo} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_k} (-1)^{k+1} \beta_{s_{i_1}}(a 1_{s_{i_1}^{-1}}) \cdots \beta_{s_{i_k}}(1_{s_{i_k}^{-1}}), && \text{pelo Teorema 3.2.3} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_k} (-1)^{k+1} a 1_{s_{i_1}} \cdots 1_{s_{i_k}}, && \text{pois } a \in A^\beta \\
&= a \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_k} (-1)^{k+1} 1_{s_{i_1}} \cdots 1_{s_{i_k}} = a 1_{\sigma(s)},
\end{aligned}$$

onde $\sigma(s) = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Como escolhemos $\sigma(s) \in S/\sigma$ arbitrário, segue que $a \in A^\alpha$.

Reciprocamente, suponha que $a \in A^\alpha$, isto é, que $\alpha_{\sigma(s)}(a1_{\sigma(s)^{-1}}) = a1_{\sigma(s)}$, para todo $\sigma(s) \in S/\sigma$. Então

$$\begin{aligned}
\beta_s(a1_{s^{-1}}) &= \alpha_{\sigma(s)}(a1_{s^{-1}}), && \text{pelo Teorema 3.2.3}\\
&= \alpha_{\sigma(s)}(a1_{\sigma(s)^{-1}}1_{s^{-1}}), && \text{pela Observação 3.2.5}\\
&= \alpha_{\sigma(s)}(a1_{\sigma(s)^{-1}})\alpha_{\sigma(s)}(1_{s^{-1}}), && \text{pois } \alpha_{\sigma(s)} \text{ é isomorfismo}\\
&= a1_{\sigma(s)}\beta_s(1_{s^{-1}}), && \text{pois } a \in A^\alpha\\
&= a1_{\sigma(s)}1_s = a1_s, && \text{pela Observação 3.2.5,}
\end{aligned}$$

para todo $s \in S$. Portanto $a \in A^\beta$. □

Com estas informações, estamos aptos a definir o que chamaremos de *aplicação σ-traço*.

Definição 3.2.7. Definimos a aplicação *σ-traço* $\mathrm{tr}_\beta^\sigma := \mathrm{tr}_\alpha : A \to A$ como

$$\mathrm{tr}_\beta^\sigma(a) = \mathrm{tr}_\alpha(a) = \sum_{g \in S/\sigma} \alpha_g(a1_{g^{-1}}).$$

Corolário 3.2.8. *A operação tr_β^σ é um homomorfismo de A^β-bimódulos. Além disso, $tr_\beta^\sigma(A) \subseteq A^\beta$. Finalmente, $tr_\beta^\sigma(\beta_s(a)) = tr_\beta^\sigma(a)$, para todo $a \in A_{s^{-1}}$.*

Demonstração. As duas primeiras afirmações seguem de [19, Lemma 2.1(i)] e [8, Lemma 4.2]. Para a terceira afirmação, sejam $s \in S$ e $a \in A_{s^{-1}}$. Então

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_\beta^\sigma(\beta_s(a)) &= \mathrm{tr}_\alpha(\beta_s(a))\\
&= \sum_{g \in S/\sigma} \alpha_g(\beta_s(a)1_{g^{-1}})\\
&= \sum_{g \in S/\sigma} \alpha_g(\alpha_{\sigma(s)}(a)1_{g^{-1}}), && \text{pelo Teorema 3.2.3}\\
&= \sum_{g \in S/\sigma} \alpha_{g\sigma(s)}(a1_{(g\sigma(s))^{-1}})1_g, && \text{pois } \alpha_{\sigma(s)}(a)1_{g^{-1}} \in A_{\sigma(s)} \cap A_{g^{-1}}\\
&= \sum_{h \in S/\sigma} \alpha_h(a1_{h^{-1}})1_{h\sigma(s)^{-1}}, && \text{fazendo } h = g\sigma(s)\\
&= \sum_{h \in S/\sigma} \alpha_h(a1_{h^{-1}})\alpha_h(1_{h^{-1}}1_{\sigma(s)^{-1}}), && \text{pois } A_h \cap A_{h\sigma(s)^{-1}} = \alpha_h(A_{h^{-1}} \cap A_{\sigma(s)^{-1}})\\
&= \sum_{h \in S/\sigma} \alpha_h(a1_{h^{-1}}1_{\sigma(s)^{-1}}), && \text{pois } \alpha_h \text{ é isomorfismo}\\
&= \sum_{h \in S/\sigma} \alpha_h(a1_{h^{-1}}), && \text{pois } a \in A_{s^{-1}} \subseteq A_{\sigma(s)^{-1}}\\
&= \mathrm{tr}_\alpha(a) = \mathrm{tr}_\beta^\sigma(a).
\end{aligned}$$

□

Podemos ainda relacionar o anel dos invariantes A^β e o skew-anel de grupo parcial $A \star_\alpha G$ via um contexto de Morita que envolve a aplicação σ-traço de forma similar a [8, Theorem 3.2]. De fato, temos que A é um $(A^\beta, A \star_\alpha G)$-bimódulo (respectivamente $(A \star_\alpha G, A^\beta)$-bimódulo) com ações à esquerda e à direita de A^β via multiplicação e ação à direita (respectivamente à esquerda) de $A \star_\alpha G$ em A dada por

$$a \cdot b_g\delta_g = \alpha_{g^{-1}}(ab_g),$$

e respectivamente

$$b_g\delta_g \cdot a = b_g\alpha_g(a1_{g^{-1}}),$$

para todos $g \in G$, $b_g \in A_g$ e $a \in A$ e estendidas linearmente.

Observe agora que a aplicação

$$\begin{aligned} T : A \times A &\to A^\beta \\ (a, b) &\mapsto \mathrm{tr}^\sigma_\beta(ab) \end{aligned}$$

é $A \star_\alpha G$-balanceada e a aplicação

$$\begin{aligned} T' : A \times A &\to A \star_\alpha G \\ (a, b) &\mapsto \sum_{g \in G} a\alpha_g(b1_{g^{-1}})\delta_g \end{aligned}$$

é A^β-balanceada.

Portanto, podemos considerar as aplicações

$$\begin{aligned} \tau : A \otimes_{A\star_\alpha G} A &\to A^\beta \\ a \otimes b &\mapsto \mathrm{tr}^\sigma_\beta(ab) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tau' : A \otimes_{A^\beta} A &\to A \star_\alpha G \\ a \otimes b &\mapsto \sum_{g \in G} a\alpha_g(b1_{g^{-1}})\delta_g. \end{aligned}$$

Assim, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3.2.9. *A sêxtupla $(A \star_\alpha G, A^\beta, A, A, \tau, \tau')$ é um contexto de Morita. A aplicação τ é sobrejetiva se, e somente se, existe $a \in A$ tal que $tr^\sigma_\beta(a) = 1_A$.*

Demonstração. Esse é precisamente o resultado [8, Proposition 4.4] aplicado na ação parcial α de G em A. □

3.3 Extensões galoisianas

Começaremos essa seção definindo o que entenderemos por extensão galoisiana no contexto de semigrupos inversos agindo em anéis.

Definição 3.3.1. Dizemos que A é uma extensão β-Galois de A^β se existem $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$, elementos de A, tais que

$$\sum_{i=1}^n x_i\beta_s(y_i 1_{s^{-1}}) = \sum_{e\in E(S)} 1_e\delta_{e,s}.$$

Neste caso, dizemos que $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$ é um sistema de coordenadas β-galoisianas para a extensão $A|_{A^\beta}$.

Continuaremos considerando que S é um semigrupo inverso E-unitário finito agindo injetivamente em um anel A via ação $\beta = (A_s, \beta_s)_{s\in S}$.

Proposição 3.3.2. *Seja $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g\in G}$ a ação parcial de $G = S/\sigma$ em A construída a partir de β como no Teorema 3.2.3. Então A é uma extensão β-Galois de A^β se, e somente se, A é uma extensão de Galois α-parcial de A^α.*

Demonstração. Suponha que A é β-Galois sobre $A^\beta = A^\alpha$. Então existem $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$ em A tais que

$$\sum_{i=1}^n x_i\beta_s(y_i 1_{s^{-1}}) = \sum_{e\in E(S)} 1_e\delta_{e,s}.$$

Vamos analisar o caso α-parcial. Dado $g \in G$, sabemos que g é, a rigor, uma classe de equivalência, a saber $g = \{s_1, \dots, s_m\}$. Usamos, então, a expressão (3.3) para a identidade de A_g e o Teorema 3.2.3 para obter

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n x_i\alpha_g(y_i 1_{g^{-1}}) &= \sum_{i=1}^n x_i\alpha_g\left(y_i \sum_{k=1}^m \sum_{i_1\leq\cdots\leq i_k} (-1)^{k+1} 1_{s_{i_1}^{-1}}\cdots 1_{s_{i_k}^{-1}}\right)\\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \sum_{i_1\leq\cdots\leq i_k} x_i\alpha_g(y_i 1_{s_{i_1}^{-1}}\cdots 1_{s_{i_k}^{-1}})\\
&= \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \sum_{i_1\leq\cdots\leq i_k}\left(\sum_{i=1}^n x_i\alpha_g(y_i 1_{s_{i_1}^{-1}})\right)\alpha_g(1_{s_{i_2}}^{-1})\cdots\alpha_g(1_{s_{i_k}^{-1}}))\\
&= \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \sum_{i_1\leq\cdots\leq i_k}\left(\sum_{i=1}^n x_i\beta_{s_{i_1}}(y_i 1_{s_{i_1}^{-1}})\right)\beta_{s_{i_2}}(1_{s_{i_2}}^{-1})\cdots\beta_{s_{i_k}}(1_{s_{i_k}^{-1}}))\\
&= \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \sum_{i_1\leq\cdots\leq i_k}\left(\sum_{e\in E(S)} 1_e\delta_{e,s_{i_1}}\right) 1_{s_{i_2}}\cdots 1_{s_{i_k}}.
\end{aligned}$$

Note que se $g \neq 1_G$, então $s_i \notin E(S)$, para todo $1 \leq i \leq m$. Portanto

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_g(y_i 1_{g^{-1}}) = 0.$$

Por outro lado, se $g = 1_G$, então $s_i \in E(S)$, para todo $1 \leq i \leq m$, de onde segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_g(y_i 1_{g^{-1}}) &= \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_k} \left(\sum_{e \in E(S)} 1_e \delta_{e, s_{i_1}} \right) 1_{s_{i_2}} \cdots 1_{s_{i_k}} \\
&= \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_k} 1_{s_{i_1}} 1_{s_{i_2}} \cdots 1_{s_{i_k}} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_k} (-1)^{k+1} 1_{s_{i_1}} 1_{s_{i_2}} \cdots 1_{s_{i_k}} = 1_g.
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_g(y_i 1_{g^{-1}}) = 1_A \delta_{1_G, g},$$

para todo $g \in G$, isto é, concluímos que A é uma extensão de Galois α-parcial de A^α.

Reciprocamente, suponha que A é uma extensão de Galois α-parcial de A^α e considere $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{n}$ um sistema de coordenadas galoisianas α-parciais de A sobre A^α. Então, para todo $g \in G$,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_g(y_i 1_{g^{-1}}) = 1_A \delta_{1_G, g}.$$

Seja $s \in S$. Então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_i \beta_s(y_i 1_{s^{-1}}) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_{\sigma(s)}(y_i 1_{s^{-1}}), && \text{pelo Teorema 3.2.3} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_{\sigma(s)}(y_i 1_{\sigma(s)^{-1}} 1_{s^{-1}}), && \text{pois } A_{s^{-1}} \subseteq A_{\sigma(s)^{-1}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_{\sigma(s)}(y_i 1_{\sigma(s)^{-1}}) \alpha_{\sigma(s)}(1_{s^{-1}}), && \text{pois } \alpha_{\sigma(s)} \text{ é isomorfismo} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_{\sigma(s)}(y_i 1_{\sigma(s)^{-1}}) \beta_s(1_{s^{-1}}), && \text{pelo Teorema 3.2.3} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_{\sigma(s)}(y_i 1_{\sigma(s)^{-1}}) 1_s, && \text{por definição de } \beta_s \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_{\sigma(s)}(y_i 1_{\sigma(s)^{-1}}) \right) 1_s \\
&= 1_A \delta_{\sigma(s), 1_G} 1_s, && \text{pois } A \text{ é } \alpha\text{-Galois parcial sobre} A^\alpha \\
&= 1_s \delta_{\sigma(s), 1_G}.
\end{aligned}$$

Se $s \in E(S)$, então $\sigma(s) = 1_G$, de onde

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \beta_s(y_i 1_{s^{-1}}) = 1_s.$$

Por outro lado, se $s \notin E(S)$, então

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \beta_s(y_i 1_{s^{-1}}) = 0.$$

Assim, provamos que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \beta_s(y_i 1_{s^{-1}}) = \sum_{e \in E(S)} 1_e \delta_{e,s},$$

ou seja, que A é β-Galois sobre A^β. □

A partir de agora definiremos objetos importantes para o teorema de equivalências de extensões galoisianas. Esse teorema é importante pois são precisamente essas equivalências que nos permitirão construir a correspondência de Galois.

Considere a aplicação $j : A \star_\alpha G \to End(A)_{A^\beta}$ dada por

$$j\left(\sum_{g \in G} a_g \delta_g\right)(a) = \sum_{g \in G} a_g \alpha_g(a 1_{g^{-1}}).$$

Temos que j é um homomorfismo bem definido de A-módulos. Além disso, j também é um homomorfismo de anéis. De fato,

$$\begin{aligned}
& j((a_g\delta_g) \cdot (b_h\delta_h))(a) \\
&= j(a_g \alpha_g(b_h 1_{g^{-1}})\delta_{gh})(a) \\
&= a_g \alpha_g(b_h 1_{g^{-1}}) \alpha_{gh}(a 1_{(gh)^{-1}}) \\
&= a_g \alpha_g(b_h 1_{g^{-1}}) 1_g 1_{gh} \alpha_{gh}(a 1_{(gh)^{-1}}) \\
&= a_g \alpha_g(b_h 1_{g^{-1}}) \alpha_{gh}(1_{(gh)^{-1}} 1_{h^{-1}}) \alpha_{gh}(a 1_{(gh)^{-1}}), && \text{pela Proposição 1.1.13(ii)} \\
&= a_g \alpha_g(b_h 1_{g^{-1}}) \alpha_{gh}(a 1_{h^{-1}} 1_{(gh)^{-1}}) \\
&= a_g \alpha_g(b_h 1_{g^{-1}}) \alpha_g(\alpha_h(a 1_{h^{-1}}) 1_{g^{-1}}), && \text{por (P3)} \\
&= a_g \alpha_g(b_h \alpha_h(a 1_{h^{-1}}) 1_{g^{-1}}) \\
&= j(a_g\delta_g)(b_h \alpha_h(a 1_{h^{-1}})) \\
&= j(a_g\delta_g) \circ j(b_h\delta_h)(a),
\end{aligned}$$

para todo $a \in A$.

Seja agora M um $A \star_\alpha G$-módulo à esquerda. Definimos

$$M^S = \{m \in M : 1_s\delta_{\sigma(s)} \cdot m = 1_s m, \text{ para todo } s \in S\},$$

o A^β-submódulo dos invariantes de M sobre S. Note que M é um A-módulo à esquerda via o mergulho $a \mapsto a1_{A\star_\alpha G}$ de A em $A \star_\alpha G$. Podemos também definir

$$M^G = \{m \in M : 1_g\delta_g \cdot m = 1_g m, \text{ para todo } g \in G\}.$$

Lema 3.3.3. *Nas notações acima, $M^S = M^G$.*

Demonstração. Se $m \in M^G$, então

$$1_s\delta_{\sigma(s)} \cdot m = 1_s \cdot (1_{\sigma(s)}\delta_{\sigma(s)} \cdot m) = 1_s \cdot (1_{\sigma(s)} \cdot m) = (1_s \cdot 1_{\sigma(s)}) \cdot m = 1_s \cdot m,$$

para todo $s \in S$. Disto segue que $m \in M^S$.

Reciprocamente, se $m \in M^S$, então, considerando $\{s_1, \ldots s_n\} = g \in G$ e (3.3), temos

$$\begin{aligned} 1_g\delta_g \cdot m &= \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 \le \cdots \le i_k} (-1)^{k+1} 1_{s_{i_1}} \cdots 1_{s_{i_k}} \delta_{\sigma(s_{i_k})}\right) \cdot m \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 \le \cdots \le i_k} \left((-1)^{k+1} 1_{s_{i_1}} \cdots 1_{s_{i_{k-1}}}\right) \cdot (1_{s_{i_k}} \delta_{\sigma(s_{i_k})} \cdot m) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 \le \cdots \le i_k} \left((-1)^{k+1} 1_{s_{i_1}} \cdots 1_{s_{i_{k-1}}}\right) \cdot (1_{s_{i_k}} \cdot m) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 \le \cdots \le i_k} \left((-1)^{k+1} 1_{s_{i_1}} \cdots 1_{s_{i_k}}\right) \cdot m \\ &= 1_g \cdot m, \end{aligned}$$

exatamente como gostaríamos. □

Definição 3.3.4. Considere o anel $A_\beta(S) = \prod_{s \in S} A_s$. Definimos o subconjunto $PA_\beta(S)$ de $A_\beta(S)$ como

$$PA_\beta(S) = \{(a_s)_{s \in S} : \text{ se } s \preceq t, \text{ então } a_s = a_t 1_s\}.$$

Note que $PA_\beta(S)$ é um subanel de $A_\beta(S)$ e também um A-submódulo à esquerda.

Definição 3.3.5. Seja B uma A^β-subálgebra de A. Dizemos que B é

(i) A^β-*separável* se B é um $(B \otimes_{A^\beta} B^{op})$-módulo projetivo.

(ii) β-*forte* se para todos $s, t \in S$, com $s^{-1}t \notin S_B$, e para todo idempotente não nulo $e \in A_s \cup A_t$ existe um elemento $b \in B$ tal que $\beta_s(b1_{s^{-1}})e \neq \beta_t(b1_{t^{-1}})e$.

Observação 3.3.6. Analogamente ao caso A^α-separável, temos que B é A^β-separável se, e somente se, vale a seguinte condição: Existe $e = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in B \otimes B$ idempotente tal que

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i y_i = 1_B$.

(ii) $(1_B \otimes x - x \otimes 1_B)e = 0$, para todo $x \in B$.

Teorema 3.3.7 (Teorema das Equivalências para Semigrupos Inversos sem Zero)**.** *Seja S um semigrupo inverso E-unitário finito agindo injetivamente em um anel comutativo A via ação global $\beta = (A_s, \beta_s)_{s\in S}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A é uma extensão β-Galois de A^β;

(ii) A é um A^β-módulo projetivo finitamente gerado e j é um isomorfismo de A-módulos à esquerda e de anéis.

(iii) Para todo $A \star_\alpha G$-módulo à esquerda M a aplicação $\mu : A \otimes M^S \to M$ dada por $\mu(a \otimes m) = am$ é um isomorfismo de A-módulos à esquerda.

(iv) A aplicação $\psi : A \otimes_{A^\beta} A \to PA_\beta(S)$ definida por $\psi(a \otimes b) = (a\beta_s(b1_{s^{-1}}))_{s\in S}$ é um isomorfismo de A-módulos à esquerda.

(v) A é A^β-separável e β-forte.

(vi) $AtA = A \star_\alpha G$, onde $t = \sum_{g\in G} 1_g\delta_g$.

(vii) A aplicação τ' é sobrejetiva.

(viii) A é um gerador para a categoria de $A \star_\alpha G$-módulos à esquerda.

(ix) $tr_\beta^\sigma(A) = A^\beta$.

(x) A é um gerador para a categoria de A^β-módulos à direita.

(xi) O contexto de Morita $(A \star_\alpha G, A^\beta, A, A, \tau, \tau')$ é estrito.

Demonstração. Pela Proposição 3.3.2, A é uma extensão β-Galois de A^β se, e somente se, A é uma extensão de Galois α-parcial de $A^\alpha = A^\beta$. Portanto, por [19, Theorem 4.1] e pelo Lema 3.3.3 temos que (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Além disso, por [8, Theorem 5.3, Corollary 5.4], temos que (i) $\Leftrightarrow$ (vi) $\Leftrightarrow$ (vii) $\Leftrightarrow$ (viii) $\Leftrightarrow$ (ix) $\Leftrightarrow$ (x) $\Leftrightarrow$ (xi). Daqui em diante provaremos as equivalências restantes.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Por [19, Theorem 4.1], temos que $A \otimes_{A^\beta} A \overset{\rho}{\simeq} \prod_{g\in G} A_g$ via $a \otimes b \mapsto \rho(a\otimes b) = (a\alpha_g(b1_{g^{-1}}))_{g\in G}$. Vamos inicialmente provar que $\prod_{g\in G} A_g \simeq PA_\beta(S)$. Defina

$$\begin{aligned} \varphi : \prod_{g\in G} A_g &\to PA_\beta(S) \\ (a_g)_{g\in G} &\mapsto (a_{\sigma(s)}1_s)_{s\in S}. \end{aligned}$$

Note que φ está bem definida, pois se $s \preceq t$, então $\sigma(s) = \sigma(t)$, de onde segue que $a_s = a_{\sigma(s)}1_s = a_{\sigma(t)}1_s = a_{\sigma(t)}1_t1_s = a_t1_s$. Além disso, é fácil ver que φ é um homomorfismo de A-módulos. Vamos provar que φ é uma bijeção.

Sejam $(a_g)_{g\in G}, (b_g)_{g\in G} \in \prod_{g\in G} A_g$ tais que $\varphi((a_g)_{g\in G}) = \varphi((b_g)_{g\in G})$. Então $a_{\sigma(s)}1_t = b_{\sigma(s)}1_t$, para todo $t \in \sigma(s)$. Mas então

$$\begin{aligned} a_{\sigma(s)} &= a_{\sigma(s)}1_{\sigma(s)} \\ &= a_{\sigma(s)} \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_1\leq\cdots\leq i_k} (-1)^{k+1} 1_{s_{i_1}} \cdots 1_{s_{i_k}} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_1\leq\cdots\leq i_k} (-1)^{k+1} a_{\sigma(s)} 1_{s_{i_1}} \cdots 1_{s_{i_k}} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_1\leq\cdots\leq i_k} (-1)^{k+1} b_{\sigma(s)} 1_{s_{i_1}} \cdots 1_{s_{i_k}} \\ &= b_{\sigma(s)} \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_1\leq\cdots\leq i_k} (-1)^{k+1} 1_{s_{i_1}} \cdots 1_{s_{i_k}} \\ &= b_{\sigma(s)}1_{\sigma(s)} = b_{\sigma(s)}, \end{aligned}$$

onde $\{s_1, \ldots, s_m\} = \sigma(s)$, para todos $s \in S$. Portanto, $(a_g)_{g\in G} = (b_g)_{g\in G}$.

Para a sobrejetividade, seja $(a_s)_{s\in S} \in PA_\beta(S)$. Considere, para todo $s \in S$,

$$a_{\sigma(s)} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i_1\leq\cdots\leq i_k} (-1)^{k+1} 1_{s_{i_1}} \cdots 1_{s_{i_k}} a_{s_{i_k}},$$

onde $\sigma(s) = \{s_1, \ldots, s_m\}$. Então

$$\begin{aligned} \varphi((a_g)_{g\in G}) &= (a_{\sigma(s)}1_s)_{s\in S} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{i_1\leq\cdots\leq i_k} (-1)^{k+1} 1_{s_{i_1}} \cdots 1_{s_{i_k}} a_{s_{i_k}} 1_s \right)_{s\in S} \\ &\overset{(*)}{=} (1_s a_s)_{s\in S} = (a_s)_{s\in S}, \end{aligned}$$

onde $(*)$ segue da seguinte observação: seja $a = (-1)^{k+1} 1_{s_{i_1}} \cdots 1_{s_{i_k}} a_{s_{i_k}}$ um fator da soma acima, com $1 \leq k \leq m$. Então $a = (-1)^{k+1} 1_{s_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_k}} a_{s_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_k}}$, pois $\sigma =\sim$ e da definição de $PA_\beta(S)$. Temos agora duas possibilidades: $s \in \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_k}\}$ ou $s \notin \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_k}\}$.

Se $s \notin \{s_{i_1}, \dots, s_{i_k}\}$ (em particular $k < m$ e se $k = 1$ então a não é o fator $1_s a_s$), então $a1_s = (-1)^{k+1} 1_{s_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_k}\wedge s} a_{s_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_k}\wedge s}$. Mas então $\{s_{i_1}, \dots, s_{i_k}, s\}$ é um subconjunto de $k+1$ elementos distintos de $\sigma(s)$. Portanto $(-1)^{k+2} 1_{s_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_k}\wedge s} a_{s_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_k}\wedge s} = -a1_s$ também aparece na soma, cancelando o elemento $a1_s$.

Se $s \in \{s_{i_1}, \dots, s_{i_k}\}$, então $a1_s = a$. Suponha que $k \neq 1$. Suponha também, sem perda de generalidade, que $s_{i_k} = s$. Considere o elemento $b = (-1)^k 1_{s_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_{k-1}}} a_{s_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_{k-1}}}$. Então $b1_s = -a1_s$. Portanto esses elementos também se cancelam.

O único elemento que não se cancela é o elemento $a_s 1_s = a_s$, exatamente como afirmamos.

Para encerrar a demonstração da implicação, note que $\varphi \circ \rho = \psi$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\varphi \circ \rho(a \otimes b) &= \varphi((a\alpha_g(b1_{g^{-1}}))_{g\in G}) \\
&= (a\alpha_{\sigma(s)}(b1_{\sigma(s)^{-1}})1_s)_{s\in S} \\
&= (a\alpha_{\sigma(s)}(b1_{\sigma(s)^{-1}})\beta_s(1_{s^{-1}}))_{s\in S}, && \text{pela definição de } \beta_s \\
&= (a\alpha_{\sigma(s)}(b1_{\sigma(s)^{-1}})\alpha_{\sigma(s)}(1_{s^{-1}}))_{s\in S}, && \text{pois } \beta_s = \alpha_{\sigma(s)}|_{A_{s^{-1}}} \\
&= (a\alpha_{\sigma(s)}(b1_{\sigma(s)^{-1}}1_{s^{-1}}))_{s\in S}, && \text{pois } \alpha_{\sigma(s)} \text{ é isomorfismo} \\
&= (a\alpha_{\sigma(s)}(b1_{s^{-1}}))_{s\in S}, && \text{pela Observação 3.2.5} \\
&= (a\beta_s(b1_{s^{-1}}))_{s\in S}, && \text{pois } \beta_s = \alpha_{\sigma(s)}|_{A_{s^{-1}}} \\
&= \psi(a \otimes b).
\end{aligned}
$$

(iv) $\Rightarrow$ (i): Note que

$$\left(\sum_{e\in E(S)} \delta_{e,s} 1_s\right)_{s\in S} \in PA_\beta(S),$$

pois se $e \preceq f$ em $E(S)$ então $1_e = 1_e 1_f$ e não existe $s \in S \setminus E(S)$ com $e \preceq s$, $e \in E(S)$. Como ψ é isomorfismo, temos que existe $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in A \otimes_{A^\beta} A$ tal que

$$\left(\sum_{e\in E(S)} \delta_{e,s} 1_s\right)_{s\in S} = \psi\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \beta_s(y_i 1_{s^{-1}})\right)_{s\in S}.$$

(i) $\Rightarrow$ (v): Considere $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$ um sistema de coordenadas β-galoisianas de A sobre A^β. Seja $s = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in A \otimes_{A^\beta} A$. Vamos mostrar que s é o idempotente de separabilidade de A sobre A^β. De fato, para todo $e \in E(S)$, temos que

$$1_A = 1_{\sigma(e)} = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_{\sigma(e)}(y_i 1_{\sigma(e)}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i 1_{\sigma(e)} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Afirmamos que, para todo $1 \leq i \leq n$ e $a \in A$ temos que $ax_i = \sum_{j=1}^n x_j \mathrm{tr}_\beta^\sigma(y_j a x_i)$. De fato, pois

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} x_j \mathrm{tr}_{\beta}^{\sigma}(y_j a x_i) &= \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{g\in G} \alpha_g(y_j a x_i 1_{g^{-1}}) \right) \\
&= \sum_{g\in G} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_g(y_j 1_{g^{-1}}) \right) \alpha_g(a x_i 1_{g^{-1}}), && \text{rearranjando os somatórios} \\
&= 1_A \alpha_{1_G}(a x_i 1_{1_G}) = a x_i, && \text{pois a extensão } A|_{A^\alpha} \text{ é Galois.}
\end{aligned}$$

Logo, para todo $a \in A$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a x_i \otimes y_i &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \mathrm{tr}_{\beta}^{\sigma}(y_j a x_i) \otimes y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \otimes \mathrm{tr}_{\beta}^{\sigma}(y_j a x_i) y_i, && \text{pois } \mathrm{tr}_{\beta}^{\sigma}(A) \subseteq A^{\beta} \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes \sum_{i=1}^{n}\sum_{g\in G} \alpha_g(y_j a 1_{g^{-1}}) \alpha_g(x_i 1_{g^{-1}}) y_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes \sum_{g\in G} \alpha_g(y_j a 1_{g^{-1}}) \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_g(x_i 1_{g^{-1}}) y_i \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes \alpha_{1_G}(y_j a 1_{1_G}) 1_A, && \text{pois a extensão } A|_{A^\alpha} \text{ é Galois} \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j a.
\end{aligned}$$

Logo, A é uma extensão A^{β}-separável. Para mostrarmos que A é β-forte, sejam $s, t \in S$ tais que $s^{-1}t \notin E(S)$. Sem perda de de generalidade, considere $e \in E(A_s)$. Se $\beta_s(a 1_{s^{-1}})e = \beta_t(a 1_{t^{-1}})e$, para todo $a \in A$, então

$$a\beta_{s^{-1}}(e) = \beta_{s^{-1}}(\beta_t(a 1_{t^{-1}})e) = \beta_{s^{-1}t}(a 1_{t^{-1}s})\beta_{s^{-1}}(e), \tag{3.4}$$

para todo $a \in A$. Em particular,

$$\begin{aligned}
\beta_{s^{-1}}(e) &= 1_A \beta_{s^{-1}}(e) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \beta_{s^{-1}}(e), && \text{pois } \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1_A \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_{s^{-1}t}(y_i 1_{t^{-1}s})\beta_{s^{-1}}(e), && \text{pela igualdade (3.4)} \\
&= 0 \cdot \beta_{s^{-1}}(e) = 0, && \text{pois } s^{-1}t \notin E(S).
\end{aligned}$$

Assim, temos que $\beta_{s^{-1}}(e) = 0$, e como $\beta_{s^{-1}}$ é isomorfismo, então $e = 0$. Daí segue que A é β-forte.

(v) $\Rightarrow$ (i): Seja $e = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in A \otimes_{A^\beta} A$ o idempotente de separabilidade de A sobre A^β. Isto é, $m(e) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1_A$ e $(a \otimes 1_A - 1_A \otimes a)e = 0$, para todo $a \in A$, onde $m : A \otimes_{A^\beta} A \to A$ é a aplicação multiplicação. Para todos $s \in S$, defina $e_s = m((\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}}))(e)) \in A_s$. Temos que $\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}})$ é um endomorfismo de $A \otimes_{A^\beta} A$. Além disso, m é homomorfismo de anéis, pois A é comutativo. Assim, para todo $s \in S$, temos

$$
\begin{aligned}
e_s^2 &= m((\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}}))(e)) \cdot m((\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}}))(e)) \\
&= m((\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}}))(e) \cdot (\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}}))(e)) \\
&= m((\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}}))(e^2)) \\
&= m((\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}}))(e)) = e_s.
\end{aligned}
$$

Ou seja, e_s é um idempotente de A_s. Lembramos a leitora e o leitor de que A é um $(A \otimes_{A^\beta} A)$-módulo via $(a \otimes b) \cdot c = acb$. Por outro lado, para todo $a \in A$, temos

$$
\begin{aligned}
\beta_{ss^{-1}}(a 1_{ss^{-1}}) e_s = a e_s &= a m((\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}}))(e)) \\
&= a m((\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}}))(e)) 1_s \\
&= (a \otimes 1_s) \cdot m((\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}}))(e)) \\
&= m((a \otimes 1_s) \cdot (\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}}))(e)) \\
&= m((\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}}))(a \otimes 1_A) \cdot (\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}}))(e)) \\
&= m((\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}}))((a \otimes 1_A) e)) \\
&= m((\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}}))((1_A \otimes a) e)) \\
&= m((\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}}))(1_A \otimes a) \cdot (\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}}))(e)) \\
&= m((1_A \otimes \beta_s(a 1_{s^{-1}})) \cdot (\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}}))(e)) \\
&= m((1_A \otimes \beta_s(a 1_{s^{-1}}))) \cdot m((\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}}))(e)) \\
&= \beta_s(a 1_{s^{-1}}) m((\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}}))(e)) \\
&= \beta_s(a 1_{s^{-1}}) e_s.
\end{aligned}
$$

Como A é β-forte, temos que se $s \notin E(S)$, então devemos ter $e_s = 0$. Mas

$$
\begin{aligned}
e_s &= m((\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}}))(e)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_s(y_i 1_{s^{-1}}).
\end{aligned}
$$

Por outro lado, se $s \in E(S)$, então $s = ss^{-1}$ e

$$\begin{aligned} e_s &= m((\mathrm{Id}_A \otimes \beta_s(-1_{s^{-1}}))(e)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_s(y_i 1_{s^{-1}}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i 1_s \\ &= 1_A 1_s = 1_s. \end{aligned}$$

Portanto, $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$ é um sistema de coordenadas β-Galois de A sobre A^β. □

Exemplo 3.3.8. Seja G um grupo. Definimos o monoide inverso (semigrupo inverso com unidade global) de Exel [20, Definition 2.1] $S(G)$ via geradores $\{[g] : g \in G\}$ e relações $[g^{-1}][g][h] = [g^{-1}][gh]$, $[g][h][h^{-1}] = [gh][h^{-1}]$ e $[1_G][g] = [g] = [g][1_G]$, para todos $g, h \in G$. Sabemos que todo elemento de $s \in S(G)$ possui uma escrita única na forma

$$s = \varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}[g],$$

onde $g_1, \ldots, g_n, g \in G$ e $\varepsilon_h = [h][h^{-1}]$. Denotamos $g = \partial(s)$. Além disso, vimos em [21, Example 1.5] que $s \in E(S(G))$ se, e somente se, $\partial(s) = 1_G$. Mais ainda, foi provado que $s \preceq t$ em $S(G)$ se, e somente se, $g = \partial(s) = \partial(t) = h$ e $\{h_1, \ldots, h_m\} \subseteq \{g_1, \ldots, g_n\}$, onde $s = \varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}[g]$ e $t = \varepsilon_{h_1} \cdots \varepsilon_{h_m}[h]$.

Podemos usar essa caracterização para provarmos que S é E-unitário. De fato, pois se $e \in E(S(G))$ e $s \in S(G)$ são tais que $e \preceq s$, então $\partial(s) = \partial(e) = 1_G$, de onde segue que $s \in E(S(G))$.

Em [20, Theorem 4.2], vimos que as ações parciais de G estão em correspondência biunívoca com as ações globais de $S(G)$. Seja $\alpha = (A_g, \alpha_g)_{g \in G}$ uma ação parcial de G em um anel A. Então a ação global $\beta = (A_s, \beta_s)_{s \in S(G)}$ de $S(G)$ em A associada é dada por, dado $s = \varepsilon_{g_1} \cdots \varepsilon_{g_n}[g]$,

$$\begin{aligned} A_s &= A_{g_1} \cap \cdots \cap A_{g_n} \cap A_g, \\ \beta_s &= \alpha_g|_{A_{s^{-1}}}. \end{aligned}$$

Neste caso, é fácil ver que $S(G)/\sigma \simeq G$. Construiremos a ação parcial de G em A conforme o Teorema 3.2.3. Seja $\gamma = (A_g, \gamma_g)_{g \in G}$ tal que

$$\begin{aligned} A_{\sigma(s)} &= \sum_{t \in \sigma(s)} A_t, \\ \gamma_{\sigma(s)} &= \sum_{t \in \sigma(s)} \beta_t. \end{aligned}$$

Note que se $\partial(s) = g$, então $\bigvee_{t \in \sigma(s)} t = [g]$. Logo, $A_{\sigma(s)} = A_g = A_{\partial(s)}$. Além disso, segue também que $\gamma_{\sigma(s)} = \beta_{\partial(s)} = \beta_{[g]} = \alpha_g$. Logo, $\gamma \simeq \alpha$. Essa foi precisamente a construção que Exel usou em [20] para recuperar a ação parcial α a partir da ação global β. Assim, segue da Proposição 3.3.2 que $A^\alpha = A^\beta$ e que A é uma extensão de Galois α-parcial de A^α se, e somente se, A é uma extensão β-Galois de A^β.

Ainda nesse exemplo, note que dado um semigrupo inverso S agindo unitariamente em um anel A via ação β, foi definido em [21, Definition 3.5] o skew-anel de semigrupo inverso $A \star_\beta S$ como

$$A \star_\beta S = L/N,$$

onde

$$L = \bigoplus_{s \in S} A_s \delta_s,$$

com soma usual e produto $(a_s\delta_s)(b_t\delta_t) = a_s\beta_s(b_t 1_{s^{-1}})\delta_{st}$, e

$$N = \langle a_s\delta_s - a_s\delta_t : s \leq t, a_s \in A_s \subseteq A_t \rangle.$$

Em [21, Theorem 3.7] foi provado que $A \star_\alpha G \simeq A \star_\beta S(G)$. Portanto claramente temos que $A \star_\gamma G \simeq A \star_\beta S(G)$, mostrando que nossa definição de skew-anel de semigrupo inverso generaliza o conceito de Exel.

Portanto, toda Teoria de Galois que fizemos até aqui funciona para ações globais de monoides inversos de Exel.

3.4 Correspondência de Galois

Daremos início a essa seção definindo uma classe de subsemigrupos inversos que será importante no Teorema de Correspondência de Galois.

Definição 3.4.1. Seja T um subsemigrupo inverso (finito) de S. Dizemos que T é β-completo se T é cheio e $P \subseteq T$ é tal que existe $u = \bigvee P$ e $\beta_u = \sum_{s \in P} \beta_s$, então $u \in T$.

Observação 3.4.2. Note que quando S é um grupo, todo subgrupo de S é automaticamente β-completo, pois neste caso a ordem parcial natural é a igualdade.

Definimos também a aplicação que associará a cada A^β-subálgebra de A um subsemigrupo inverso de S.

Definição 3.4.3. Seja B uma A^β-subálgebra de A. Definimos

$$S_B = \{s \in S : \beta_s(b 1_{s^{-1}}) = b 1_s, \text{ para todo } b \in B\}.$$

Relembramos o leitor e a leitora de que estamos considerando o caso em que S é um semigrupo inverso E-unitário finito que age injetivamente em um anel A via ação $\beta = (A_s, \beta_s)_{s\in S}$.

Proposição 3.4.4. *Dada uma A^β-subálgebra B de A, temos que S_B é um subsemigrupo inverso β-completo de S.*

Demonstração. Provaremos inicialmente que S_B é um ideal de ordem. Sejam $s \in S_B$ e $u \preceq s$. Então

$$\begin{aligned}\beta_u(b1_{u^{-1}}) &= \beta_u(b1_{u^{-1}}1_{s^{-1}}) = \beta_u(b1_{s^{-1}})\beta_u(1_{u^{-1}})\\ &= \beta_s(b1_{s^{-1}})1_u = b1_s1_u = b1_u,\end{aligned}$$

para todo $b \in B$, de onde segue que $u \in S_B$.

Sejam $s, t \in S_B$. Para garantirmos que S_B é um subsemigrupo inverso de S, temos que provar que $st, s^{-1} \in S$. Por [37, Theorem 3.1.2(3)], existem $u, v \in S$ tais que $u \preceq s$, $v \preceq t$, $st = uv$ e $u^{-1}u = vv^{-1}$. Pela observação acima, temos que $u, v \in S_B$. Então

$$\begin{aligned}\beta_{st}(b1_{(st)^{-1}}) &= \beta_{uv}(b1_{(uv)^{-1}}) = \beta_u(\beta_v(b1_{v^{-1}})1_{u^{-1}})\\ &= \beta_u(b1_v1_{u^{-1}}) = \beta_u(b1_{vv^{-1}}1_{u^{-1}u})\\ &= \beta_u(b1_{u^{-1}u}) = \beta_u(b1_{u^{-1}})\\ &= b1_u = b1_{uu^{-1}} = b1_{u(u^{-1}u)u^{-1}}\\ &= b1_{u(vv^{-1})u^{-1}} = b1_{(uv)(uv)^{-1}} = b1_{uv} = b1_{st},\end{aligned}$$

para todo $b \in B$.

Além disso, para todo $b \in B$,

$$\beta_{s^{-1}}(b1_s) = \beta_{s^{-1}}(\beta_s(b1_{s^{-1}})) = b1_{s^{-1}},$$

pois $\beta_{s^{-1}} = \beta_s^{-1}$.

Mais ainda, para verificarmos que S_B é cheio, temos que dado $e \in E(S)$ e $b \in B$,

$$\beta_e(b1_{e^{-1}}) = \beta_e(b1_e) = \mathrm{Id}_{A_e}(b1_e) = b1_e.$$

Finalmente, seja $P \subseteq S_B$ tal que existe $u = \bigvee P$ e $\beta_u = \sum_{s\in P}\beta_s$. Seja $P = \{s_1, \ldots, s_n\}$.

Dado $b \in B$,

$$\begin{aligned}
\beta_u(b1_{u^{-1}}) &= \beta_u\left(b\left(\sum_{1\le j\le n}\sum_{i_1\le\cdots\le i_j}(-1)^{j+1}1_{s_{i_1}^{-1}}\cdots 1_{s_{i_j}^{-1}}\right)\right)\\
&= \beta_u\left(\sum_{1\le j\le n}\sum_{i_1\le\cdots\le i_j}b(-1)^{j+1}1_{s_{i_1}^{-1}}\cdots 1_{s_{i_j}^{-1}}\right)\\
&= \sum_{1\le j\le n}\sum_{i_1\le\cdots\le i_j}(-1)^{j+1}\beta_u(b1_{s_{i_1}^{-1}}\cdots 1_{s_{i_j}^{-1}})\\
&= \sum_{1\le j\le n}\sum_{i_1\le\cdots\le i_j}(-1)^{j+1}\beta_u(b1_{s_{i_1}^{-1}\wedge\cdots\wedge s_{i_j}^{-1}})\\
&= \sum_{1\le j\le n}\sum_{i_1\le\cdots\le i_j}(-1)^{j+1}\beta_u(b1_{(s_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_j})^{-1}}).
\end{aligned}$$

Note agora que se $Q = \{s_{i_1}, \dots, s_{i_j}\}$, então $s_{i_k} \preceq u$, para todo $1 \le k \le j$. Portanto, todos os elementos de Q pertencem à mesma σ-classe. Mais ainda, como S é E-unitário, segue do Teorema 3.1.6 que $\sigma =\sim$, de onde obtemos que Q é um subconjunto compatível de S. Assim, $v_Q := \bigwedge_{s\in Q} s$ está definido por [37, Lemma 1.4.11] e como $v_Q \preceq s$, para todo $s \in Q$, $v_Q \in S_B$. Além disso, $v_Q \preceq u$, de onde $\beta_u|_{A_{v_Q^{-1}}} = \beta_{v_Q}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\beta_u(b1_{u^{-1}}) &= \sum_{1\le j\le n}\sum_{i_1\le\cdots\le i_j}(-1)^{j+1}\beta_{s_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_j}}(b1_{(s_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_j})^{-1}})\\
&\overset{(*)}{=} \sum_{1\le j\le n}\sum_{i_1\le\cdots\le i_j}(-1)^{j+1}b1_{s_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_j}}\\
&= b\sum_{1\le j\le n}\sum_{i_1\le\cdots\le i_j}(-1)^{j+1}1_{s_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_j}}\\
&= b1_u,
\end{aligned}$$

isto é, $u \in S_B$. A igualdade $(*)$ segue do fato que $v_Q \in S_B$. □

Exemplo 3.4.5. Considere $G = \langle g : g^6 = e\rangle$, onde e é a identidade do grupo G. Seja S um anel comutativo tal que S é uma extensão de Galois sobre o anel R com grupo de Galois G. Defina $A = \bigoplus_{i=1}^{5} Se_i$, onde os e_i's são idempotentes dois a dois ortogonais cuja soma é 1_A. Defina a ação parcial $\alpha = (A_{g^i}, \alpha_{g^i})_{i=1}^{5}$ de G em A por

$$A_{g^i} = Se_{6-i}, \qquad \alpha_{g^i}(se_i) = g^i(s)e_{6-i}, \qquad 1 \le i \le 5$$
$$A_e = A, \qquad \alpha_e = \mathrm{Id}_A.$$

Então $A^\alpha = \{ae_1 + be_2 + ce_3 + g^2(b)e_4 + g(a)e_5 : a, b, c \in S \text{ e } g^3(c) = c\}$.

Por [19, Example 6.3], A é uma extensão de Galois α-parcial sobre A^α. Considere agora o semigrupo inverso de Exel $S(G)$ como no Exemplo 3.3.8. Temos que existe uma única ação global $\beta = (A_s, \beta_s)_{s\in S(G)}$ de $S(G)$ em A tal que $\beta_{[h]} = \alpha_h$, para todo $h \in G$. Note que

$\beta_{\varepsilon_h} = \mathrm{Id}_{A_h}$, para todo $h \in G$ e $\beta_s = 0$, para todo $s \notin \{[h] : h \in G\} \cup \{\varepsilon_h : h \in G\}$. Note que a A^β-subálgebra $B = \{ae_1 + be_2 + ce_3 + g^2(b)e_4 + g(a)e_5 : a, b, c \in S\}$ é A^β-separável e β-forte, mas $S(G)_B = S(G) \setminus \{[g^3]\}$ não é um subsemigrupo inverso β-completo de $S(G)$, pois $[g^3] = \bigvee_{\partial(s)=g^3} s \notin S(G)_B$.

O que possibilita a falha nesse exemplo é o fato de que a ação de $S(G)$ em A não é injetiva e que muitos dos isomorfismos associados à ação β são nulos.

A partir de agora suporemos que $A_s \neq 0$, para todo $s \in S$.

Teorema 3.4.6. *Suponha que A é uma extensão β-Galois de A^β. Seja T um subsemigrupo inverso β-completo de S. Então*

(i) $\beta_T = (A_t, \beta_t)_{t \in T}$ *é uma ação de T em A e A é β_T-Galois sobre $B := A^{\beta_T}$.*

(ii) B *é A^β-separável.*

(iii) B *é β-forte.*

(iv) $T = S_B$.

Demonstração. (i): A primeira afirmação é óbvia. Para a segunda afirmação, sejam $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$ coordenadas β-galoisianas de A sobre A^β, isto é, tais que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \beta_s(y_i 1_{s^{-1}}) = \sum_{e \in E(S)} 1_e \delta_{e,s},$$

para todo $s \in S$.

Em particular, como $E(S) = E(T)$ e $T \subseteq S$, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \beta_t(y_i 1_{s^{-1}}) = \sum_{e \in E(T)} 1_e \delta_{e,t},$$

para todo $t \in T$, isto é, $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$ também é um sistema de coordenadas β-galoisianas de A sobre $B = A^{\beta_T}$.

(ii): Por (i), A é uma extensão β_T-Galois de B. Logo, pelo Teorema 3.3.7(ii), A é um B-módulo projetivo finitamente gerado. Portanto, existe $p > 0$ tal que $B^p = A \oplus L$, onde L é um B-módulo adequado.

Observe que A e B são A^β-módulos via multiplicação. Mais ainda, $A \otimes_{A^\beta} A$ é um $B \otimes_{A^\beta} B$-módulo projetivo, pois

$$(B \otimes_{A^\beta} B)^{p^2} = B^p \otimes_{A^\beta} B^p = (A \oplus L) \otimes_{A^\beta} (A \oplus L) = (A \otimes_{A^\beta} A) \oplus M,$$

onde $M = (A \otimes_{A^\beta} L) \oplus (L \otimes_{A^\beta} A) \oplus (L \otimes_{A^\beta} L)$. Além disso, como A é A^β-separável, temos que existem $q > 0$ e um $(A \otimes_{A^\beta} A)$-módulo N tais que $(A \otimes_{A^\beta} A)^q = A \oplus N$. Portanto,

$$(B \otimes_{A^\beta} B)^{p^2 q} = (A \otimes_{A^\beta} A)^q \oplus M^q = A \oplus N \oplus M^q,$$

de onde segue que A é um $(B \otimes_{A^\beta} B)$-módulo projetivo.

Além disso, B é um somando direto de A como B-módulo. Então

$$(B \otimes_{A^\beta} B)^{p^2 q} = A \oplus N \oplus M^q = B \oplus \ker \operatorname{tr}^\sigma_{\beta_T} \oplus N \oplus M^q,$$

mostrando que B é um $(B \otimes_{A^\beta} B)$-módulo projetivo, isto é, que B é uma A^β-álgebra separável.

(iii): Como A é um β_T-Galois sobre B, existe $c \in A$ tal que $\operatorname{tr}^\sigma_{\beta_T}(c) = 1_A$ pelo Teorema 3.3.7(ix). Seja α' a ação parcial de $G' = T/\sigma$ em A construída como no Teorema 3.2.3. Assim, $A'_{\sigma(t)} = \sum_{s\in\sigma(t)\cap T} A_s$ e $\alpha'_{\sigma(t)} = \sum_{s\in\sigma(t)\cap T} \beta_s = \alpha_{\sigma(t)}|_{A'_{\sigma(t)^{-1}}}$, para todo $t \in T$.

Seja $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$ um sistema de coordenadas galoisianas α-parcial de A sobre A^α. Em particular, $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$ é um sistema de coordenadas galoisianas α'-parcial de A sobre $A^{\alpha'} = A^{\beta_T} = B$ pelo item (i) e pela Proposição 3.3.2.

Defina $x'_i = \operatorname{tr}^\sigma_{\beta_T}(cx_i)$ e $y'_i = \operatorname{tr}^\sigma_{\beta_T}(y_i)$, para $1 \leq i \leq n$. Assim, $x'_i, y'_i \in B$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Prosseguiremos a demonstração por afirmações.

Afirmação 1: $\sum\limits_{i=1}^n x'_i y'_i = 1_A$.

De fato, pois

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n x'_i y'_i &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{g\in G'} \alpha'_g(cx_i 1_{h^{-1}}) \right) \left(\sum_{h\in G'} \alpha'_h(y_i 1_{h^{-1}}) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{g,h\in G'} \alpha'_g(cx_i \alpha'_{g^{-1}}(\alpha'_h(y_i 1_{h^{-1}}) 1_g)), && \text{por (P3')} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{g,h\in G'} \alpha'_g(cx_i \alpha'_{g^{-1}h}(y_i 1_{h^{-1}g}) 1_{g^{-1}}) \\
&= \sum_{g,h\in G'} \alpha'_g \left(c \left(\sum_{i=1}^n x_i \alpha'_{g^{-1}h}(y_i 1_{h^{-1}g}) \right) 1_{g^{-1}} \right), && \text{pois } \alpha'_g \text{ é isomorfismo} \\
&= \sum_{g\in G'} \alpha'_g \left(c 1_A 1_{g^{-1}} \right), && \text{pois } A|_{A^{\alpha'}} \text{ é Galois} \\
&= \sum_{g\in G'} \alpha'_g \left(c 1_{g^{-1}} \right) \\
&= \operatorname{tr}_{\alpha'}(c) = \operatorname{tr}^\sigma_{\beta_T}(c) = 1_A.
\end{aligned}$$

Afirmação 2: $\sum\limits_{i=1}^n x'_i \beta_s(y'_i 1_{s^{-1}}) = \begin{cases} 1_s, & \text{se } s \in T, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Como $x'_i, y'_i \in B = A^{\beta_T}$, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} x'_i \beta_s(y'_i 1_{s^{-1}}) = \sum_{i=1}^{n} x'_i y'_i 1_s = 1_A 1_s = 1_s,$$

para todo $s \in T$.

Se $s \notin T$, então

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} x'_i \beta_s(y'_i 1_{s^{-1}}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{g \in G'} \alpha'_g(cx_i 1_{g^{-1}}) \beta_s \left(\sum_{h \in G'} \alpha'_h(y_i 1_{h^{-1}}) 1_{s^{-1}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{g \in G'} \alpha'_g(cx_i 1_{g^{-1}}) \alpha_{\sigma(s)} \left(\sum_{h \in G'} \alpha'_h(y_i 1_{h^{-1}}) 1_{\sigma(s)^{-1}} 1_{s^{-1}} \right), && \text{pois } \beta_s = \alpha_{\sigma(s)}|_{A_{s^{-1}}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{g \in G'} \alpha_g(cx_i 1_{g^{-1}}) \alpha_{\sigma(s)} \left(\sum_{h \in G'} \alpha_h(y_i 1_{h^{-1}}) 1_{\sigma(s)^{-1}} 1_{s^{-1}} \right), && \text{pois } \alpha'_h = \alpha_h|_{A'_{h^{-1}}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{g \in G'} \alpha_g(cx_i 1_{g^{-1}}) \left(\sum_{h \in G'} \alpha_{\sigma(s)h}(y_i 1_{h^{-1}\sigma(s)^{-1}}) 1_{\sigma(s)} \right) 1_s, && \text{por (P3')} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{g \in G'} \alpha_g(cx_i 1_{g^{-1}}) \left(\sum_{h \in G'} \alpha_{\sigma(s)h}(y_i 1_{h^{-1}\sigma(s)^{-1}}) \right) 1_s, && \text{pela Observação 3.2.5} \\
&= \sum_{g,h \in G'} \alpha_g \left(c \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_{g^{-1}\sigma(s)h}(y_i 1_{h^{-1}\sigma(s)^{-1}g}) \right) 1_{g^{-1}} \right) 1_s, && \text{rearranjando os somatórios} \\
&= \sum_{g,h \in G'} \alpha_g \left(c\delta_{g^{-1}\sigma(s)h, 1_{G'}} 1_{g^{-1}} \right) 1_s, && \text{pois } A|_{A^{\alpha'}} \text{ é Galois.}
\end{aligned}$$

Se $g^{-1}\sigma(s)h = 1_{G'}$, então $\sigma(s) = gh^{-1} \in G'$. Mas então $s \in T$, o que não é possível por hipótese. Logo, $g^{-1}\sigma(s)h \neq 1_{G'}$, de onde segue que $\delta_{g^{-1}\sigma(s)h, 1_{G'}} = 0$, ou seja, que vale a Afirmação 2.

Provaremos agora que B é β-forte. De fato, suponha que $s, t \in S$ são tais que $s^{-1}t \notin S_B$. Em particular, $s^{-1}t \notin T$, pois $T \subseteq S_B$ por definição.

Seja $0 \neq e \in A_s \cup A_t$ idempotente. Suponha, por contradição, que $\beta_s(b1_{s^{-1}})e = \beta_t(b1_{t^{-1}})e$, para todo $b \in B$. Sem perda de generalidade, podemos considerar $e \in A_s$. Então

$$b\beta_{s^{-1}}(e) = \beta_{s^{-1}}(b1_{t^{-1}s})\beta_{s^{-1}}(e), \quad \text{para todo } b \in B.$$

Defina $e' = \beta_{s^{-1}}(e)$. Como $y'_i \in B$ e $\sum_{i=1}^{n} x'_i y'_i = 1_A$ pela Afirmação 1, temos que

$$e' = 1_A e' = \sum_{i=1}^{n} x'_i y'_i e' = \sum_{i=1}^{n} x'_i \beta_{s^{-1}t}(y'_i 1_{t^{-1}s})e' = 0e' = 0.$$

Como $\beta_{s^{-1}}$ é isomorfismo, segue que $e = 0$, o que é uma contradição. Portanto, deve existir $b \in B$ tal que $\beta_s(b1_{s^{-1}})e \neq \beta_t(b1_{t^{-1}})e$, isto é, B deve ser β-forte.

(iv): É fácil ver que $T \subseteq S_B$, pois $B = A^{\beta_T}$. Observe que $A^{\beta_{S_B}} = A^{\beta_T} = B$. De fato, como $T \subseteq S_B$, então $A^{\beta_{S_B}} \subseteq A^{\beta_T}$. A inclusão reversa segue da definição de S_B. Então, de (i) segue que A é uma extensão β_T-Galois de $A^{\beta_{S_B}} = A^{\beta_T}$. Pelo Teorema 3.3.7(iv), temos que as aplicações

$$\begin{aligned} \psi : A \otimes_B A &\to PA_{\beta_T}(T) \\ x \otimes y &\mapsto (x\beta_t(y1_{t^{-1}}))_{t \in T} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \psi' : A \otimes_B A &\to PA_{\beta_{S_B}}(S_B) \\ x \otimes y &\mapsto (x\beta_t(y1_{t^{-1}}))_{t \in S_B} \end{aligned}$$

são isomorfismos de A-módulos.

Suponha, por contradição, que existe $t \in S_B \setminus T$. Considere determinado t minimal com respeito à ordem parcial natural, isto é, se $s \prec t$, então $s \in T$ (o que sempre é possível pois S é finito). Seja

$$z = (\delta_{s,\sigma(t)}1_s)_{s \in S_B} \in PA_{\beta_{S_B}}(S_B),$$

onde

$$\delta_{s,\sigma(t)} = \begin{cases} 1_A, & \text{se } s \in \sigma(t), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que $z \neq 0$, pois $A_t \neq 0$, para todo $t \in S$. Como ψ' é isomorfismo, existe $0 \neq x = \sum_{i=1}^m a_i \otimes b_i \in A \otimes_B A$ tal que $\psi'(x) = z$, isto é, tal que

$$\sum_{i=1}^m a_i\beta_s(b_i1_{s^{-1}}) = \delta_{s,\sigma(t)}1_s,$$

para todo $s \in S_B$.

Note que não existe $s \in T$ com $t \preceq s$, pois T é um ideal de ordem e neste caso teríamos que $t \in T$.

Considere $U = \{u_1, \dots, u_k\} = \{u \in T : u \prec t\}$.

Caso 1: $U = \emptyset$.

Neste caso, $\sigma(t) \cap T = 0$, pois caso existisse $s \in \sigma(t) \cap T$, então $s \wedge t \in U$. Portanto, temos que $\psi(x) = 0$, o que é uma contradição com $x \neq 0$.

Caso 2: $U \neq \emptyset$.

Note que como $u_i \preceq t$, para todo $1 \leq i \leq k$, temos que $\beta_{u_i} \leq \beta_t$, para todo $1 \leq i \leq k$, o que implica que $\beta_{u_i} \sim \beta_t$, para todo $1 \leq i \leq k$. Logo, como $\mathrm{Iso}_{pu}(A)$ é um semigrupo inverso f-completo, temos que a união $f_t = \sum_{i=1}^{k} \beta_{u_i}$ está bem definida e $f_t \leq \beta_t$.

Caso 2.1: $f_t = \beta_t$.

Neste caso, temos que $t \in T$, pois T é β-completo, o que é uma contradição.

Caso 2.2: $f_t < \beta_t$.

Se $f_t < \beta_t$, então $w = 1_t - 1_{\mathrm{dom}(f_t)} \neq 0$. Assim, considere o elemento $wz \in PA_{\beta|_{S_B}}(S_B)$. Temos que

$$wz = (w 1_s \delta_{s,\sigma(t)})_{s \in S_B},$$

e dado $s \in S_B \cap \sigma(t)$, temos que

$$w1_s = \begin{cases} w, & \text{se } t \preceq s, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De fato, pois se $t \preceq s$, então $w1_s = (1_t - 1_{\mathrm{dom}(f_t)})1_s = 1_t 1_S - 1_{\mathrm{dom}(f_t)} 1_s = 1_t - 1_{\mathrm{dom}(f_t)} = w$. Agora, se não valer $t \preceq s$, então temos que $t \wedge s \preceq t$, de onde temos que $s \wedge t = u_j$, algum $1 \leq j \leq k$, já que t é minimal com respeito à ordem parcial natural. Assim, $1_{u_i} 1_s = (1_{u_i} 1_t) 1_s = 1_{u_i}(1_t 1_s) = 1_{u_i} 1_{u_j}$, para todo $1 \leq i \leq k$. Logo, $1_{\mathrm{dom}(f_t)} 1_s = 1_{u_j}$, pois

$$\begin{aligned} 1_{\mathrm{dom}(f_t)} 1_s &= \left(\sum_{\ell=1}^{k} \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_\ell} (-1)^{k+1} 1_{u_{i_1}} \cdots 1_{u_{i_\ell}} \right) 1_s \\ &= \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_\ell} (-1)^{k+1} 1_{u_{i_1}} \cdots 1_{u_{i_\ell}} 1_s \\ &= \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_\ell} (-1)^{k+1} 1_{u_{i_1}} \cdots 1_{u_{i_\ell}} 1_{u_j} \\ &= \left(\sum_{\ell=1}^{k} \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_\ell} (-1)^{k+1} 1_{u_{i_1}} \cdots 1_{u_{i_\ell}} \right) 1_{u_j} \\ &= 1_{\mathrm{dom}(f_t)} 1_{u_j} = 1_{u_j}. \end{aligned}$$

Logo, $w1_s = 1_t 1_s - 1_{\mathrm{dom}(f_t)} 1_s = 1_{u_j} - 1_{u_j} = 0$, como gostaríamos.

Portanto, existe $0 \neq x' \in A \otimes_B A$ tal que $\psi'(x') = wz$. Digamos que $x' = \sum_{i=1}^{m'} a_i' \otimes b_i'$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{m'} a_i' \beta_s(b_i') = \begin{cases} w, & \text{se } t \preceq s, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note agora que $\psi(x') = 0$, pois não existe $s \in T$ com $t \preceq s$, como havíamos observado.

Mas ψ é isomorfismo e $x' \neq 0$, o que é uma contradição. $\square$

Esse teorema provou a primeira metade do Teorema de Correspondência de Galois, pois mostrou que a aplicação $T \mapsto A^{\beta_T}$ é injetiva. O próximo objetivo é provarmos a sobrejetividade dessa aplicação. Para isso, mostraremos que a aplicação $B \mapsto S_B$ é injetiva. Como em caso positivo essas aplicações são inversas uma da outra, teremos encerrado a demonstração do teorema. Antes disso, entretanto, precisaremos de alguns resultados técnicos.

Lema 3.4.7. *Suponha que A é uma extensão β-Galois de A^β e seja R uma A^β-álgebra comutativa. Defina $\gamma = (R \otimes A_s, \gamma_s)_{s\in S}$ uma ação de S em $R \otimes_{A^\beta} A$ induzida por β via $\gamma_s(r \otimes a1_{s^{-1}}) = r \otimes \beta_s(a1_{s^{-1}})$, para $r \in R$, $a \in A$ e $s \in S$. Então $R \otimes_{A^\beta} A$ é uma extensão γ-galoisiana de R.*

Demonstração. Temos que $A \simeq A^\beta \oplus \ker(\mathrm{tr}^\sigma_\beta)$. Então $R \otimes_{A^\beta} A \simeq (R \otimes_{A^\beta} A^\beta) \oplus (R \otimes_{A^\beta} \ker(\mathrm{tr}^\sigma_\beta)$. Portanto, podemos identificar R com sua imagem homomórfica $R \otimes_{A^\beta} A^\beta$.

Se $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n \subseteq A$ são coordenadas β-galoisianas de A sobre A^β, então claramente o conjunto $\{1_R \otimes x_i, 1_R \otimes y_i\}_{i=1}^n$ satisfaz

$$\sum_{i=1}^n (1_R \otimes x_i)\gamma_s(1_R \otimes y_i 1_{s^{-1}}) = \sum_{e\in E(S)} \delta_{e,s}(1_R \otimes 1_e),$$

para todo $s \in S$. Portanto, para concluirmos que $R \otimes_{A^\beta} A$ é γ-Galois sobre R, basta provarmos que $(R \otimes_{A^\beta} A)^\gamma = R$.

Considere $u = \sum_{i=1}^m r_i \otimes a_i \in (R \otimes A)^\gamma$ e $c \in R$ tal que $\mathrm{tr}^\sigma_\beta(c) = 1_A$. Então

$$\begin{aligned} u &= u(\mathrm{Id}_R \otimes \mathrm{tr}^\sigma_\beta)(1_R \otimes c) = \left(\sum_{i=1}^m r_i \otimes a_i\right)\left(1_R \otimes \mathrm{tr}^\sigma_\beta(c)\right) \\ &= \sum_{i=1}^m r_i \otimes a_i \mathrm{tr}^\sigma_\beta(c) = \sum_{i=1}^m r_i \otimes a_i \sum_{g\in G} \alpha_g(c1_{g^{-1}}) \\ &= \sum_{g\in G}\sum_{i=1}^m (r_i \otimes a_i)\alpha_g(c1_{g^{-1}}) = \sum_{g\in G}\sum_{i=1}^m (r_i \otimes a_i)1_g\alpha_g(c1_{g^{-1}}) \\ &= \sum_{g\in G}\sum_{i=1}^m (r_i \otimes a_i 1_g)\alpha_g(c1_{g^{-1}}) = \sum_{g\in G}\sum_{i=1}^m (r_i \otimes \alpha_g(a_i 1_{g^{-1}}))\alpha_g(c1_{g^{-1}}) \\ &= \sum_{i=1}^m r_i \otimes \sum_{g\in G} \alpha_g(a_i 1_{g^{-1}})\alpha_g(c1_{g^{-1}}) = \sum_{i=1}^m r_i \otimes \sum_{g\in G} \alpha_g(a_i c 1_{g^{-1}}) = \sum_{i=1}^m r_i \otimes \mathrm{tr}^\sigma_\beta(a_i c), \end{aligned}$$

isto é, $u \in R \otimes_{A^\beta} A^\beta = R$.

A inclusão reversa é imediata. $\square$

Defina $E = \{f : S \to A : f \text{ é função}, f(s) \in A_s, \text{ para todo } s \in S, \text{ e se } s \preceq t, \text{ então } f(s) = f(t)1_s\}$. Note que E é uma A^β-álgebra com as operações pontuais.

Lema 3.4.8. *Suponha que A é β-Galois sobre A^β. Então existe uma ação β' de S em E e E é β'-Galois sobre A.*

Demonstração. Pelo Lema 3.4.7, $A \otimes_{A^\beta} A$ é γ-Galois sobre A, onde $\gamma_s(a \otimes b1_{s^{-1}}) = a \otimes \beta_s(b1_{s^{-1}})$, para $a, b \in A$. Mas temos que $E \simeq PA_\beta(S)$ via

$$\begin{aligned} \phi : E &\to PA_\beta(S) \\ f &\mapsto (f(s))_{s\in S} \end{aligned}$$

com inversa dada por

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : PA_\beta(S) &\to E \\ (a_s)_{s\in S} &\mapsto f : S \to R, \qquad f(s) = a_s,\ \forall s \in S. \end{aligned}$$

Pelo item (iv) do Teorema 3.3.7,

$$\begin{aligned} \psi : A \otimes_{A^\beta} A &\to PA_\beta(S) \\ a \otimes b &\mapsto (a\beta_s(b1_{s^{-1}}))_{s\in S} \end{aligned}$$

é um isomorfismo de A^β-álgebras. Logo, a aplicação $\eta = \phi^{-1} \circ \psi$ dada por

$$\begin{aligned} \eta : A \otimes_{A^\beta} A &\to E \\ a \otimes b &\mapsto \eta(a \otimes b) : S \to R, \qquad \eta(a \otimes b)(s) = a\beta_s(b1_{s^{-1}}), \end{aligned}$$

é um isomorfismo de A^β-álgebras.

Esse isomorfismo induz uma ação $\beta' = (E_s, \beta'_s)_{s\in S}$ de S em $E = \eta(A \otimes_{A^\beta} A)$ dada por

$$\begin{aligned} \beta'_s(\eta(a \otimes b)\eta(1_A \otimes 1_{s^{-1}}))(t) &= \beta'_s(\eta(a \otimes b1_{s^{-1}}))(t) = \eta(\gamma_s(a \otimes b1_{s^{-1}}))(t) \\ &= \eta(a \otimes \beta_s(b1_{s^{-1}}))(t) = a\beta_t(\beta_s(b1_{s^{-1}})1_{t^{-1}}), \end{aligned}$$

onde os ideais são dados por $E_s = \eta(A \otimes_{A^\beta} A_s)$. Agora, como $A \otimes_{A^\beta} A$ é β-Galois sobre A, é fácil ver que como $A \otimes_{A^\beta} \simeq E$ e β' é apenas a tradução de β via esse isomorfismo, então E é β'-Galois sobre A. □

Lema 3.4.9. *Sejam A β-Galois sobre A^β e T um subsemigrupo inverso de S. Então $f \in E^{\beta'|_T}$ se, e somente se, $f(st) = f(s)1_{st}$, para todos $t \in T$ e $s \in S$.*

Demonstração. Considere $f \in E^{\beta'|_T}$. Como η, definida no Lema 3.4.8, é um isomorfismo, existe $\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \in A \otimes_{A^\beta} A$ tal que $f = \eta\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i\right)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\eta\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i\right) \in E^{\beta'|_T} &\Leftrightarrow \beta'_t\left(\eta\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i 1_{t^{-1}}\right)\right) = \eta\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i 1_t\right), \ \forall t \in T \\
&\Leftrightarrow \eta\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes \beta_t(b_i 1_{t^{-1}})\right) = \eta\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i 1_t\right), \ \forall t \in T \\
&\Leftrightarrow \eta\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes \beta_t(b_i 1_{t^{-1}})\right)(u) = \eta\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i 1_t\right)(u), \ \forall t \in T, u \in S \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i \beta_u(\beta_t(b_i 1_{t^{-1}}) 1_{u^{-1}}) = \sum_{i=1}^n a_i \beta_u(b_i 1_t 1_{u^{-1}}), \ \forall t \in T, u \in S \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i \beta_{ut}(b_i 1_{t^{-1}u^{-1}}) 1_u = \sum_{i=1}^n a_i \beta_u(b_i 1_{u^{-1}}) 1_{ut}, \ \forall t \in T, u \in S \\
&\Leftrightarrow \eta\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i\right)(ut) 1_u = \eta\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i\right)(u) 1_{ut}, \ \forall t \in T, u \in S \\
&\Leftrightarrow f(ut) 1_u = f(u) 1_{ut}, \ \forall t \in T, u \in S \\
&\Leftrightarrow f(ut) 1_{ut} 1_u = f(u) 1_{ut}, \ \forall t \in T, u \in S \\
&\Leftrightarrow f(ut) 1_{ut} = f(u) 1_{ut}, \ \forall t \in T, u \in S \\
&\Leftrightarrow f(ut) = f(u) 1_{ut}, \ \forall t \in T, u \in S.
\end{aligned}$$

□

Agora temos todas as ferramentas necessárias para provar a segunda parte do Teorema de Correspondência de Galois.

Teorema 3.4.10. *Suponha que A é uma extensão β-Galois de A^β. Seja B uma A^β-subálgebra de A, A^β-separável e β-forte. Então temos que $A^{\beta|_{S_B}} = B$.*

Demonstração. Vamos denotar por $T = S_B$. Sempre vale que $B \subseteq A^{\beta|_T}$. Portanto, precisamos apenas provar que $A^{\beta|_T} \subseteq B$. Para isso, precisaremos inicialmente de uma inclusão técnica.

Primeiramente relembraremos a leitora e o leitor da definição do *produto restrito* $\cdot$ em um semigrupo inverso S. Dizemos que o produto restrito $s \cdot t$ está definido se, e somente se, $s^{-1}s = tt^{-1}$. Neste caso, $s \cdot t = st$.

Afirmação: $E^{\beta'|_T} \subseteq \eta(A \otimes_{A^\beta} B)$.

Defina a relação $\equiv_T$ em S por $s \equiv_T u \Leftrightarrow u^{-1} \cdot s$ está definido e $u^{-1} \cdot s \in T$. É fácil ver que essa relação é reflexiva (pois T é cheio) e simétrica. Para a transitividade, suponha $s \equiv_T u$ e $u \equiv_T v$. Então $u^{-1} \cdot s, v^{-1} \cdot u \in T$. Como T é subsemigrupo inverso, temos que $(v^{-1} \cdot u)(u^{-1} \cdot s) \in T$. Note agora que $(v^{-1} \cdot u)(u^{-1} \cdot s) = (v^{-1}u)(u^{-1}s) = v^{-1}(uu^{-1})s = v^{-1}(vv^{-1})s = (v^{-1}vv^{-1})s = v^{-1}s$, e $vv^{-1} = uu^{-1} = ss^{-1}$, de onde segue que $v^{-1} \cdot s$ está definido e $v^{-1} \cdot s \in T$.

Sejam, então, $\{s_i\}_{i=1}^n$ um sistema de representantes das classes de equivalência definidas por $\equiv_T$. Considere $f_i : E \to A$ o homomorfismo de A-álgebras definido por $f_i(v) = v(s_i)$.

Vamos provar agora que os homomorfismos $f_1, \ldots, f_n$ são fortemente distintos. De fato, se $i \neq j$, então as restrições $\beta_{s_i}|_B$ e $\beta_{s_j}|_B$ não podem coincidir. De fato, se $\beta_{s_i}(b1_{s_i^{-1}}) = \beta_{s_j}(b1_{s_j}^{-1})$, para todo $b \in B$, então $\beta_{s_j}^{-1}(\beta_{s_i}(b1_{s_i^{-1}})1_{s_j}) = b1_{s_j^{-1}}$. Assim,

$$\begin{aligned}
&\beta_{s_j^{-1}s_i}(b1_{s_i^{-1}s_j})1_{s_j^{-1}} = t1_{s_j^{-1}} \\
\Rightarrow\ &\beta_{s_j^{-1}s_i}(b1_{s_i^{-1}s_j})1_{s_j^{-1}s_i}1_{s_j^{-1}} = t1_{s_j^{-1}}1_{s_j^{-1}s_i} \\
\Rightarrow\ &\beta_{s_j^{-1}s_i}(b1_{s_i^{-1}s_j})1_{s_j^{-1}s_i} = t1_{s_j^{-1}s_i} \\
\Rightarrow\ &\beta_{s_j^{-1}s_i}(b1_{s_i^{-1}s_j}) = t1_{s_j^{-1}s_i},
\end{aligned}$$

para todo $b \in B$, isto é, $s_j^{-1}s_i \in S_B = T$, de onde $s_i \equiv_T s_j$, uma contradição.

Agora, como B é β-forte, para todo idempotente não nulo $e \in A_{s_i} \cup A_{s_j}$ existe $b \in B$ tal que $\beta_{s_i}(b1_{s_i^{-1}})e \neq \beta_{s_j}(b1_{s_j^{-1}})e$. Assim,

$$f_i(\eta(1_A \otimes b))e = \eta(1_A \otimes b)(s_i)e = \beta_{s_i}(b1_{s_i^{-1}})e \neq \beta_{s_j}(b1_{s_j^{-1}})e = f_j(\eta(1_A \otimes b))e.$$

Podemos agora provar a afirmação. Como B é A^β-separável, então $A \otimes_{A^\beta} B$ é A-separável por [33, Proposition III 2.1] e consequentemente $\eta(A \otimes_{A^\beta} B)$ é A-separável. De [46, Lemma 2.4], obtemos idempotentes dois a dois ortogonais $w_1, \ldots, w_n \in \eta(A \otimes_{A^\beta} B)$ com $f_i(x)w_i = xw_i$, para todo $x \in \eta(A \otimes_{A^\beta} B)$ e $w_j(s_i) = f_i(w_j) = \delta_{i,j}$, para todos $1 \leq i, j \leq n$.

Vamos provar agora que $w_1, \ldots, w_n$ geram $E^{\beta'|_T}$ sobre A. Para isso, inicialmente provaremos que $w_i \in E^{\beta'|_T}$, para todo $1 \leq i \leq n$. Como $w_i \in \eta(A \otimes_{A^\beta} B)$, temos que existem $a_{ij} \in A$, $b_{ij} \in B$ tais que $w_i = \eta\left(\sum_j a_{ij} \otimes b_{ij}\right)$, para $1 \leq i \leq n$. Vamos provar que $w_i(st) = w_i(s)1_{st}$, para todos $s \in S$ e $t \in T$. De fato,

$$\begin{aligned}
w_i(st) = \eta\left(\sum_j a_{ij} \otimes b_{ij}\right)(st) &= \sum_j a_{ij}\beta_{st}(b_{ij}1_{t^{-1}s^{-1}}) \\
&= \sum_j a_{ij}\beta_s(\beta_t(b_{ij}1_{t^{-1}})1_{s^{-1}}) = \sum_j a_{ij}\beta_s(b_{ij}1_t1_{s^{-1}}) \\
&= \sum_j a_{ij}\beta_s(b_{ij}1_{s^{-1}})1_{st} = \eta\left(\sum_j a_{ij} \otimes b_{ij}\right)(s)1_{st} = w_i(s)1_{st}.
\end{aligned}$$

Portanto $w_i \in E^{\beta'|_T}$, para todo $1 \leq i \leq n$. Considere agora $f \in E^{\beta'|_T}$. Então existem $a_j, b_j \in A$ tais que $f = \eta\left(\sum_j a_j \otimes b_j\right)$. Assim,

$$\begin{aligned}
f(s_i) = \eta\left(\sum_j a_j \otimes b_j\right)(s_i) &= \sum_j a_j\beta_{s_i}(b_j1_{s_i^{-1}}) \\
&= \sum_{j,k} s_j\beta_{s_k}(b_j1_{s_k^{-1}})\delta_{k,i} = \sum_{j,k} s_j\beta_{s_k}(b_j1_{s_k^{-1}})w_k(s_i).
\end{aligned}$$

Como $f \in E^{\beta'|_T}$, temos que $f(s_i)1_{s_i t} = f(s_i t)$, para todo $t \in T$. Assim,

$$f(s_i t) = f(s_i)1_{s_i t} = \sum_{j,k} s_j \beta_{s_k}(b_j 1_{s_k^{-1}}) w_k(s_i) 1_{s_i t} = \sum_{j,k} s_j \beta_{s_k}(b_j 1_{s_k^{-1}}) w_k(s_i t),$$

de onde segue que $f = \sum_{j,k} s_j \beta_{s_k}(b_j 1_{s_k^{-1}}) w_k$, isto é, $w_1, \ldots, w_n$ geram $E^{\beta'|_T}$ sobre A. Portanto $E^{\beta'|_T} \subseteq \eta(A \otimes_{A^\beta} B)$, o que prova a afirmação.

Agora prosseguimos para a provar de que $A^{\beta|_T} \subseteq B$. De fato, aplicando η^{-1} na afirmação, temos que $\eta^{-1}(E^{\beta'|_T}) \subseteq A \otimes_{A^\beta} B$. Note que $E^{\beta'|_T} = \eta((A \otimes_{A^\beta} A)^{\gamma|_T})$, pois $\beta'_s \otimes \eta = \eta \otimes \gamma_s$, para todo $s \in S$. Assim, $(A \otimes_{A^\beta} A)^{\gamma|_T} = \eta^{-1}(E^{\beta'|_T}) \subseteq A \otimes_{A^\beta} B$. Logo,

$$A \otimes_{A^\beta} A^{\beta|_T} \subseteq (A \otimes_{A^\beta} A)^{\gamma|_T} \subseteq A \otimes_{A^\beta} B.$$

Aplicando $\mathrm{tr}_\beta^\sigma \otimes_{A^\beta} \mathrm{Id}_A$ nessa inclusão, temos que

$$A^{\beta|_T} = A^\beta \otimes_{A^\beta} A^{\beta|_T} = \mathrm{tr}_\beta^\sigma(A) \otimes_{A^\beta} A^{\beta|_T} \subseteq \mathrm{tr}_\beta^\sigma(A) \otimes_{A^\beta} B = A^\beta \otimes_{A^\beta} B = B,$$

pois tr_β^σ é sobrejetiva em A^β. Isso encerra a demonstração. $\square$

Os Teoremas 3.4.6 e 3.4.10 são a prova do seguinte teorema:

Teorema 3.4.11. *Seja S um semigrupo inverso E-unitário finito que age injetivamente em um anel A via ação β. Suponha que A é uma extensão β-Galois de A^β tal que $A_s \neq 0$, para todo $s \in S$. Então existe uma correspondência biunívoca entre as A^β-subálgebras β-fortes e A^β-separáveis B de A e os subsemigrupos inversos β-completos T de S dada por $B \mapsto S_B$ e $T \mapsto A^{\beta|_T}$.*

Também queremos provar um teorema envolvendo ações de semigrupos inversos quocientes.

Definição 3.4.12. Sejam S um semigrupo inverso e T um subsemigrupo inverso de S. Dizemos que T é *normal* se T é cheio e $s^{-1}Ts \subseteq T$, para todo $s \in S$. Dizemos que T é *Clifford* se $t^{-1}t = tt^{-1}$, para todo $t \in T$.

Definição 3.4.13. [2, Definition 4.1] Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide ordenado e $\mathcal{H}$ um subgrupoide ordenado de $\mathcal{G}$. Dizemos que $\mathcal{H}$ é *normal* se

(i) $\mathcal{H}$ é amplo;

(ii) Dados $a, b \in \mathcal{G}$ tais que a e b possuem uma cota superior, isto é, tais que existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $a \leq g$, $b \leq g$, então $a^{-1}\mathcal{H}b = \{a^{-1}hb : h \in \mathcal{H}, a^{-1}hb \text{ está definido}\} \subseteq \mathcal{H}$.

Observe que se tomarmos um grupoide $\mathcal{G}$, podemos considerar $\mathcal{G}$ um grupoide ordenado tomando a igualdade como ordem parcial. Nesse caso, a Definição 3.4.13 é a mesma que aparece em [46].

Sejam $(\mathcal{G}, \leq)$ um grupoide ordenado e $\mathcal{H}$ um subgrupoide ordenado normal de $\mathcal{G}$. Definimos a relação $\sim_{\mathcal{H}}$ por, dados $a, b \in \mathcal{G}$,

$$a \sim_{\mathcal{H}} b \Leftrightarrow \text{ existem } x, y, u, v \in \mathcal{H} \text{ tais que } x{\cdot}a \cdot y \text{ está definido}, u \cdot b \cdot v \text{ está definido}, \\ x \cdot a \cdot y \leq b \text{ e } u \cdot b \cdot v \leq a.$$

Por [2], essa é uma relação de equivalência e uma congruência, de onde segue que o quociente $\mathcal{G}/\mathcal{H} := \mathcal{G}/\sim_{\mathcal{H}}$ está bem definido. Defina a ordem parcial $\leq_{\mathcal{H}}$ por:

$$[a]_{\mathcal{H}} \leq_{\mathcal{H}} [b]_{\mathcal{H}} \Leftrightarrow \text{ existem } x, y \in \mathcal{H} \text{ tais que } x \cdot a \cdot y \text{ está definido e } x \cdot a \cdot y \leq b.$$

Por [2, Theorem 4.14] temos que $(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \leq_{\mathcal{H}})$ é um grupoide ordenado. A operação em $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ é dada a seguir. Se $d(g) \sim_{\mathcal{H}} r(h)$, então existem $a, b \in \mathcal{H}$ tais que $r(a) \leq d(g)$, $d(a) = r(h)$, $r(b) \leq r(h)$ e $d(b) = d(g)$. Denotando $g' = (g|r(a))$ e $h' = (r(b)|h)$, definimos

$$[g]_{\mathcal{H}} \cdot [h]_{\mathcal{H}} = [g' \cdot a \cdot h]_{\mathcal{H}} = [g \cdot b^{-1} \cdot h']_{\mathcal{H}},$$

onde $[g]_{\mathcal{H}}$ denota a $\sim_{\mathcal{H}}$-classe do elemento g.

Essa definição não depende da escolha de a e b. De fato, para quaisquer elementos $x, y \in \mathcal{H}$ tais que $r(x) \leq d(g)$, $d(x) = r(h)$, $r(y) \leq r(h)$ e $d(y) = d(g)$, temos, denotando $g'' = (g|r(x))$, $h'' = (r(y)|h)$, que

$$[g' \cdot a \cdot h]_{\mathcal{H}} = [g'' \cdot x \cdot h]_{\mathcal{H}} \text{ e } [g \cdot b^{-1} \cdot h']_{\mathcal{H}} = [g \cdot y^{-1} \cdot h'']_{\mathcal{H}}.$$

Vamos traduzir essa definição para o caso de semigrupos inversos. Dado um semigrupo inverso S e um subsemigrupo inverso normal T, definimos a relação $\sim_T$ por, dados $a, b \in S$,

$$a \sim_{T} b \Leftrightarrow \text{ existem } x, y, u, v \in T \text{ tais que } x{\cdot}a \cdot y \text{ está definido}, u \cdot b \cdot v \text{ está definido}, \\ x \cdot a \cdot y \preceq b \text{ e } u \cdot b \cdot v \preceq a.$$

Note o uso do produto restrito $\cdot$ nessa definição, isto é, $s \cdot t$ está definido se, e somente se, $s^{-1}s = tt^{-1}$ e neste caso $s \cdot t = st$. A ordem $\leq_T$ é definida da mesma forma do caso de grupoides ordenados. Denotamos por $S/T := \mathcal{S}/\sim_T$.

O quociente de um semigrupo inverso por um subsemigrupo inverso normal é sempre um grupoide ordenado [1, Theorem 3.6], mas em geral não é um grupoide indutivo, isto é, não é um semigrupo inverso, pois seus idempotentes nem sempre formam um semirreticulado inferior.

Se os idempotentes de S/T formam um semirreticulado inferior, a operação em S/T, denotada por $\star$, será dada por

$$[s]_T \star [t]_T = ([s]_T|[e]_T) \cdot ([e]_T|[t]_T),$$

onde $[e]_T = [s^{-1}s]_T \wedge [tt^{-1}]_T$ e $[s]_T$ denota a $\sim_T$-classe de s.

Uma condição suficiente para que S/T seja um semigrupo inverso é que T seja um subsemigrupo inverso normal e Clifford [1, Proposition 4.6], pois neste caso as relações $\sim_T$ e $\equiv_T$ coincidem. Isso conversa intrinsecamente com a necessidade de exigirmos que o subgrupoide $\mathcal{H}$ fosse estritamente normal no Teorema 2.2.12.

Teorema 3.4.14. *Seja S um semigrupo inverso E-unitário finito agindo em um anel A via ação unitária $\beta = (A_s, \beta_s)_{s\in S}$. Seja T um subsemigrupo inverso normal e Clifford de S. Então S/T age em $B = A^{\beta|_T}$ via ação $\gamma = (B_{\overline{s}}, \gamma_{\overline{s}})_{\overline{s}\in S/T}$ e B é γ-Galois sobre A^β.*

Demonstração. Para simplificar a notação, denotaremos a $\equiv_T$-classe $[s]_T$ do elemento $s \in S$ por $\overline{s}$ e a operação $\star$ em S/T por concatenação.

Note que como T é normal e Clifford, temos que se $s \cdot t$ está definido com $s \in S$ e $t \in T$, então existe $u \in T$ tal que $s \cdot t = u \cdot s$ $(*)$. De fato, pois como T é normal e $s^{-1}s = tt^{-1} = t^{-1}t$, temos que $s \cdot t \cdot s^{-1}$ está definido e $sts^{-1} \in T$. Isto é, existe $u \in T$ tal que $s \cdot t \cdot s^{-1} = u$. Mas isso é o mesmo que dizer que $s \cdot t = u \cdot s$.

Seja, então, $\{s_i\}_{i=1}^m$ um sistema de representantes das $\equiv_T$-classes. Definimos a ação γ de T em B por

$$B_{\overline{s_i}} = A_{s_i} \cap B, \quad \gamma_{\overline{s_i}} = \beta_{s_i}|_{B_{\overline{s_i}^{-1}}}.$$

Note que como $A_{s_i} \lhd A$, temos que $B_{\overline{s_i}} \lhd B$, para todo $1 \leq i \leq m$.

Para mostrarmos que γ está bem definida, considere $s \in \overline{s_i}$, algum $1 \leq i \leq m$. Então existe $t \in T$ tal que $s_i \cdot t$ está definido e $s = s_i \cdot t$. Como $ss^{-1} = s_it(s_it)^{-1} = s_i(tt^{-1})s_i^{-1} = s_i(s_i^{-1}s_i)s_i^{-1} = s_is_i^{-1}$, temos que $A_s = A_{ss^{-1}} = A_{s_is_i^{-1}} = A_{s_i}$, de onde segue que $B_{\overline{s_i}}$ não depende da escolha do representante, como gostaríamos. Além disso, se $x \in B_{\overline{s_i}^{-1}}$, então

$$\begin{aligned}
\gamma_{\overline{s}}(x) &= \beta_s(x) = \beta_s(x1_{s^{-1}}) \\
&= \beta_s(x1_{s^{-1}s}) = \beta_{s_it}(x1_{t^{-1}t}) \\
&= \beta_{s_i}(\beta_t(x1_t)) = \beta_{s_i}(x1_t) \\
&= \beta_{s_i}(x1_{s_i^{-1}}) = \gamma_{\overline{s_i}}(x1_{\overline{s_i}^{-1}}),
\end{aligned}$$

o que prova que $\gamma_{\overline{s}}$ independe do representante de classe. Para vermos que $\gamma_{\overline{s}}(B_{\overline{s}^{-1}}) = B_{\overline{s}}$, considere $x \in B_{\overline{s}^{-1}}$ e $u \in T$. Então

$$\begin{aligned}
\beta_u(\gamma_{\overline{s}}(x)1_u) &= \beta_u(\beta_s(x)1_u) \\
&= \beta_{us}(x1_{(us)^{-1}}) \\
&= \beta_{u'\cdot s'}(x1_{(s')^{-1}}), && \text{onde } u' = uss^{-1} \in T \text{ e } s' = u^{-1}us \\
&= \beta_{s'\cdot u''}(x1_{u''}), && \text{por } (*) \\
&= \beta_{s'}(\beta_{u''}(x1_{u''})1_{(s')^{-1}}) \\
&= \beta_{s'}(x1_{u''}1_{(s')^{-1}}) = \beta_{s'}(x1_{s'}^{-1}) \\
&= \beta_s(x1_s^{-1})1_{s'} \\
&= \beta_s(x1_s^{-1})1_s1_u = \beta_s(x1_s^{-1})1_u
\end{aligned}$$

isto é, $x \in A_s \cap B = B_{\overline{s}}$.

Agora, claramente temos que $\gamma_{\overline{e}} = \mathrm{Id}_{B_{\overline{e}}}$, para todo $e \in E(S)$, que $B = \sum_{e\in E(S)} B_{\overline{e}}$ e que $\gamma_{\overline{st}} = \gamma_{\overline{s}}\gamma_{\overline{t}}$, para todos $s, t \in S$, de onde segue que γ é uma ação de S/T em B.

Note que $A^\beta = B^\gamma$. É fácil de ver que $A^\beta \subseteq B^\gamma$. Reciprocamente, se $b \in B^\gamma$, então dado $s \in S$, temos que

$$\beta_s(b1_{s^{-1}}) = \gamma_{\overline{s_i}}(b1_{\overline{s_i}^{-1}}) = b1_{\overline{s_i}} = b1_s,$$

para algum $1 \leq i \leq m$, ou seja, $b \in A^\beta$.

Seja agora $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$ um sistema de coordenadas β-galoisianas de A sobre A^β. Defina $x_i' = \mathrm{tr}^\sigma_{\beta|_T}(cx_i)$ e $y_i' = \mathrm{tr}^\sigma_{\beta|_T}(y_i')$, para todo $1 \leq i \leq n$, onde $c \in A$ é tal que $\mathrm{tr}^\sigma_{\beta|_T}(c) = 1_A$, que existe pelo Teorema 3.3.7(ix). Note que $x_i', y_i' \in B$.

Por um argumento similar ao do item (iii) do Teorema 3.4.6, temos que

$$\sum_{i=1}^n x_i'\beta_s(y_i'1_{s^{-1}}) = \begin{cases} 1_s, & \text{se } s \in T, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n x_i'\gamma_{\overline{s}}(y_i'1_{\overline{s}^{-1}}) &= \sum_{i=1}^n x_i'\beta_s(y_i'1_{s^{-1}}) = \sum_{i=1}^n x_i'\beta_{s_j\cdot t}(y_i'1_{s_j^{-1}}) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i'\beta_{s_j}(y_i'1_{s_j^{-1}}) = \sum_{i=1}^n x_i'\beta_{s_j}(y_i'1_{s_j^{-1}}) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i'\gamma_{\overline{s_j}}(y_i'1_{\overline{s_j}^{-1}}),
\end{aligned}$$

para algum $1 \leq j \leq m$.

Note agora que $s \in T$ se, e somente se, $s_j \in E(S)$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' \gamma_{\overline{s}}(y_i' 1_{\overline{s}^{-1}}) = \sum_{\overline{e} \in E(S/T)} 1_{\overline{e}} \delta_{\overline{s}, \overline{e}},$$

ou seja, B é γ-Galois sobre $B^\gamma = A^\beta$, como gostaríamos de demonstrar. □

3.5 Caso geral

Chegamos no ponto do capítulo em que traduziremos a teoria desenvolvida até aqui para o caso de semigrupos inversos finitos que não são E-unitários e não agem injetivamente em um anel comutativo. Sejam, então, S um semigrupo inverso finito e $\beta = (A_s, \beta_s)_{s \in S}$ uma ação unitária de S em um anel A. Note que a ação de S em A pode ser vista como um homomorfismo de semigrupos inversos $\beta : S \to \mathrm{Iso}_{pu}(A)$ dado por $\beta(s) := \beta_s$. Faremos uso dessa notação durante essa seção.

Para trabalharmos com a correspondência de Galois, gostaríamos de exigir a hipótese $A_s \neq 0$, para todo $s \in S$. Neste caso, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3.5.1. *Suponha que A é β-Galois sobre A^β tal que $A_s \neq 0$, para todo $s \in S$. Então $\beta(S) = \{\beta_s : s \in S\}$ é um semigrupo inverso E-unitário.*

Demonstração. Suponha que $e \in E(S)$ e $\beta_e = \beta_s|_{A_e}$, algum $s \in S$. Se $s \in E(S)$, não há nada a se provar. Suponha que $s \notin E(S)$. Então

$$\begin{aligned} 1_e &= \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_e(y_i 1_e) = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_s(y_i 1_e) = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_s(y_i 1_{s^{-1}}) \beta_s(1_e) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_s(y_i 1_{s^{-1}}) 1_e = 0 1_e = 0. \end{aligned}$$

Mas por hipótese $1_e \neq 0$, de onde obtemos uma contradição. Logo $s \in E(S)$, de onde segue que $\beta_s \in E(\beta(S))$. □

Esse resultado é fundamental para a nossa tradução do Teorema 3.4.11 para o caso geral. Além disso, ainda precisaremos do lema abaixo. Embora importante, sua demonstração é fácil e será omitida.

Lema 3.5.2. *O semigrupo inverso (finito) $\beta(S)$ age em A via ação β dada por $\beta(s) \mapsto \beta_s$. Se T é um subsemigrupo inverso (finito) de $\beta(S)$, então T é β-completo se, e somente se, T é f-completo.*

Finalmente, nomearemos os subsemigrupos inversos que aparecerão na correspondência de Galois.

Definição 3.5.3. Um subsemigrupo inverso cheio (finito) T de S é dito β-maximal se $\beta(T)$ é f-completo e se para todo $t \in T$, $\beta^{-1}(t) = \{s \in S : \beta_s = \beta_t\} \subseteq T$.

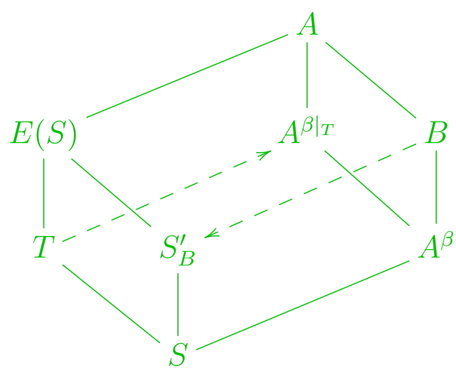
Teorema 3.5.4 (Correspondência de Galois para semigrupos inversos sem zero)**.** *Seja S um semigrupo inverso finito que age em um anel A via ação global $\beta = (A_s, \beta_s)_{s \in S}$. Suponha que A é β-Galois sobre A^β e que $A_s \neq 0$, para todo $s \in S$. Então existe uma correspondência biunívoca entre os subsemigrupos inversos β-maximais T de S e as A^β-subálgebras separáveis e β-fortes B de A dada por $B \mapsto \beta^{-1}(\beta(S)_B)$ com inversa $T \mapsto A^{\beta|_T}$.*

Demonstração. Note inicialmente que A é β-Galois sobre A^β com respeito a ação β de S em A se, e somente se, A é β'-Galois sobre $A^{\beta'}$ com respeito a ação β' de $\beta(S)$ em A. É fácil de ver que $A^\beta = A^{\beta'}$.

Agora, $\beta(S)$ é um semigrupo inverso E-unitário finito que age injetivamente em A via β'. Portanto, estamos nas hipóteses do Teorema 3.4.11. Logo, existe uma correspondência biunívoca entre os subsemigrupos inversos finitos completos de $\beta(S)$ e as subálgebras A^β-separáveis e β'-fortes de A. A verificação de que uma subálgebra é β-forte se, e somente se, é β'-forte também é imediata.

Finalmente, basta notarmos agora que existe uma correspondência biunívoca entre os subsemigrupos inversos β-maximais de S e os subsemigrupos inversos finitos completos de $\beta(S)$. Unindo essa correspondência com a correspondência do parágrafo acima, obtemos o resultado desejado. □

Apresentamos a representação visual do Teorema 3.5.4, onde $S'_B := \beta^{-1}(\beta(S)_B)$.



3.6 Semigrupos inversos com zero

Encerraremos esse trabalho apresentando as principais diferenças do que trabalhamos até aqui para o caso de semigrupos inversos com zero. A maioria dos resultados se mantém, então apresentaremos as demonstrações dos detalhes que exigem cuidado na presença de um elemento zero.

Seja S um semigrupo inverso com zero. Denotaremos o elemento zero de S por 0. Note que $0 \in E(S)$. Dado $T \subseteq S$, definimos

$$T^* = \begin{cases} T \setminus \{0\}, & \text{se } 0 \in T, \\ T, & \text{se } 0 \notin T. \end{cases}$$

Um par de elementos $s, t \in S$ é dito *fortemente compatível* se vale $s = t = 0$ ou $s, t \neq 0$ e $s^{-1}t, st^{-1} \in E(S)^*$. Se s, t forem fortemente compatíveis, escrevemos que $s \approx t$. Claramente a relação $\approx$ é reflexiva e simétrica, mas não necessariamente transitiva.

Dizemos que um semigrupo inverso é 0-E-unitário se $e \preceq s$, para algum idempotente $0 \neq e \in E(S)$, então $s \in E(S)$.

Lema 3.6.1. *[37, Lemma 9.1.1] Seja S um semigrupo inverso com zero.*

(i) Se $s, t \in S^*$ e $s \approx t$, então s e t possuem uma cota inferior não nula.

(ii) Suponha que S é 0-E-unitário. Então um par de elementos $s, t \in S^*$ possui uma cota inferior não nula se, e somente se, $s \approx t$.

Podemos ir além desse resultado. A cota inferior não nula de s e t apresentada na demonstração em [37, Lemma 9.1.1] é $z = ss^{-1}t$. Note que $z = s \wedge t$. De fato, pois se $w \preceq s, t$, então $w = ww^{-1}w \preceq ss^{-1}t = z$. Mais ainda, temos que $zz^{-1} = ss^{-1}tt^{-1}$. Além disso, como $st^{-1}t$ também satisfaz as condições de ínfimo, temos que $z = st^{-1}t$, de onde $z^{-1}z = s^{-1}st^{-1}t$. Claramente zz^{-1} e $z^{-1}z$ são não nulos, pois caso contrário z seria nulo, uma contradição. Portanto, podemos reescrever o lema acima da seguinte forma.

Proposição 3.6.2. *Seja S um semigrupo inverso com zero.*

(i) Se $s, t \in S^*$ e $s \approx t$, então $s \wedge t$ está definido e $s \wedge t \in S^*$. Além disso, $(s \wedge t)(s \wedge t)^{-1} = ss^{-1}tt^{-1}$ e $(s \wedge t)^{-1}(s \wedge t) = s^{-1}st^{-1}t$.

(ii) Suponha que S é 0-E-unitário. Então um par de elementos $s, t \in S^*$ é tal que $s \wedge t \in S^*$ se, e somente se, $s \approx t$.

Dizemos que um conjunto parcialmente ordenado é *direcionado* se quaisquer dois elementos desse conjunto possuem uma cota inferior.

Proposição 3.6.3. *[37, Theorem 9.1.2] Seja S um semigrupo inverso com zero. Então $\approx$ é transitiva se, e somente se, S é 0-E-unitário e para todo $s \in S^*$ o conjunto $[s]^*$ é direcionado.*

Um semigrupo inverso com zero S é dito *categórico no zero* se $stu = 0$ implicar que $st = 0$ ou $tu = 0$, para $s, t, u \in S$.

Lema 3.6.4. *[37, Lemma 9.1.3] Seja S um semigrupo inverso categórico no zero. Então o conjunto $[s]^*$ é direcionado para todo $s \in S^*$.*

Seja S um semigrupo inverso com zero. Vamos definir uma relação de equivalência que fará o papel da congruência mínima de grupo no caso de semigrupos inversos com zero. Definimos a relação τ em S por $s\tau t$ se $s = t = 0$ ou $s, t \in S^*$ e existe um elemento $u \in S^*$ tal que $u \preceq s, t$. A relação τ generaliza a relação de grupo minimal σ para o caso de semigrupos inversos com zero. Pela Proposição 3.6.2, em semigrupos inversos 0-E-unitários categóricos no zero temos que τ coincide com $\approx$.

Uma congruência é dita *0-restrita* se a classe do elemento 0 só possui o elemento 0. Um semigrupo inverso com zero S é dito *primitivo* se a ordem parcial natural $\preceq$ de S é a igualdade em S^*. Uma congruência é dita *primitiva* se o quociente dessa congruência é um semigrupo inverso primitivo. Embora τ faça o papel de σ, temos que o quociente S/τ não é um grupo.

Proposição 3.6.5. *[37, Proposition 9.1.4] Seja S um semigrupo inverso categórico no zero. Então τ é a menor congruência primitiva 0-restrita em S.*

A proposição acima indica que nosso foco de estudo para repetir o método aplicado no capítulo anterior deve ser semigrupos inversos primitivos ao invés de grupos. Para isso, mostraremos que ações parciais de semigrupos inversos primitivos estão intrinsecamente relacionadas com ações parciais ortogonais de grupoides.

Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Definindo $\mathcal{G}^0 = \mathcal{G} \cup \{0\}$ com produto $g0 = 0 = 0g$, para todo $g \in \mathcal{G}^0$, e $gh = 0$ se $(g, h) \notin \mathcal{G}_2$, temos que $\mathcal{G}^0$ é um semigrupo inverso primitivo. De fato, por [37, Theorem 3.3.4], todo semigrupo inverso primitivo é dessa forma. Isso e a definição de grupoide nos garantem que todo semigrupo inverso primitivo é categórico no zero. Reciprocamente, podemos considerar S um semigrupo inverso primitivo e construir uma estrutura de grupoide no conjunto S^* dada por $s \cdot t$ está definido se, e somente se, $st \neq 0$, e nesse caso $s \cdot t = st$.

Seja S um semigrupo inverso com zero e $\alpha = (A_s, \alpha_s)_{s\in S}$ uma ação parcial de S em A. Dizemos que α é uma ação parcial de semigrupo inverso com zero se vale

(P0) $A_0 = 0$ e $\alpha_0 = 0$.

Teorema 3.6.6. *Seja $\alpha = (A_s, \alpha_s)_{s\in S}$ uma ação parcial de semigrupo inverso com zero de um semigrupo inverso primitivo S em um anel A. Então $\alpha^* = (A'_s, \alpha'_s)_{s\in S^*}$ é uma ação parcial ortogonal do grupoide S^* no anel A, onde $A'_s = A_s$ e $\alpha'_s = \alpha_s$, para todo $s \in S^*$.*

Reciprocamente, seja $\gamma = (A_g, \gamma_g)_{g\in\mathcal{G}}$ uma ação parcial ortogonal de um grupoide $\mathcal{G}$ em um anel A. Então $\gamma^0 = (A'_g, \gamma'_g)_{g\in\mathcal{G}^0}$ é uma ação parcial de semigrupo inverso com zero do semigrupo inverso primitivo $\mathcal{G}^0$ em A, onde $A'_g = A_g$, $\gamma'_g = \gamma_g$, para todo $g \in \mathcal{G}$, $A'_0 = 0$ e $\gamma'_0 = 0$.

Mais ainda, $(\gamma^0)^* = \gamma$ e $(\alpha^*)^0 = \alpha$.

Demonstração. Para a primeira parte, é fácil ver que α^* satisfaz os itens (P2) e (P3) para todo $(s,t) \in (S^*)_2$. Agora, como temos que $\alpha'_e = \alpha_e = \mathrm{Id}_{A_e}$, para todo $e \in E(S)^* = (S^*)_0$, se provarmos que α^* satisfaz (PO) também garantimos que α^* satisfaz (P1). Para isso, sejam $e, f \in E(S^*)$. Então $A_e \cap A_f = A_{e \wedge f}$. Mas $e \wedge f = 0$, pois S é primitivo. Logo, $A'_e \cap A'_f = A_e \cap A_f = A_0 = 0$, para todos $e, f \in E(S^*)$ tais que $e \neq f$. Como $A = \cup_{e \in E(S)} A_e$, temos que $A = \bigoplus_{e \in E(S)^*} A'_e$.

Reciprocamente, vamos provar que γ^0 é uma ação parcial de $\mathcal{G}^0$ em A. Claramente vale (P1), pois

$$A = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} A_e = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} A'_e + 0 = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} A'_e + A'_0 = \sum_{e \in E(\mathcal{G}^0)} A'_e$$

e $\gamma'_e = \gamma_e = \mathrm{Id}_{A_e} = \mathrm{Id}_{A'_e}$ para todo $e \in E(\mathcal{G}^0)^*$ e $\gamma'_0 = 0 = \mathrm{Id}_{A'_0}$.

Sejam agora $g, h \in \mathcal{G}^0$. Se $g = 0$, temos que $\gamma'_{h^{-1}}(A'_{g^{-1}} \cap A'_h) = 0 \subseteq A_{(gh)^{-1}}$ e $\gamma'_g \circ \gamma'_h(0) = 0\gamma'_{gh}(0)$. Se $h = 0$ valem as mesmas afirmações. Suponha, então que $g, h \neq 0$. Se $(g,h) \in \mathcal{G}_2$, então o par (g,h) já satisfaz (P2) e (P3). Se $(g,h) \notin \mathcal{G}_2$, então $gh = 0$ em $\mathcal{G}^0$. Neste caso, $\gamma'_{h^{-1}}(A'_{g^{-1}} \cap A'_h) \subseteq \gamma'_{h^{-1}}(A'_{d(g)} \cap A'_{r(h)}) = 0 \subseteq A'_{(gh)^{-1}}$ e $\gamma'_g \circ \gamma'_h(0) = 0 = \gamma'_{gh}(0)$, como gostaríamos.

A última afirmação agora é imediata. □

Suponha agora que S é um subsemigrupo inverso finito 0-E-unitário categórico no zero do monoide inverso com zero $\mathrm{Iso}_{pu}(A)$ do anel A. Seja $f \in S$. Sabemos a τ-classe de f coincide com a $\approx$-classe de f. Em particular, os elementos de $\tau(f)$ são compatíveis. Logo, como $\mathrm{Iso}_{pu}(A)$ é f-completo, podemos considerar o elemento $\alpha_f = \sum_{g \in \tau(f)} g \in \mathrm{Iso}_{pu}(A)$. Considere $P' = \{\alpha_f : f \in S\} \subseteq \mathrm{Iso}_{pu}(A)$.

Lema 3.6.7. *Nas notações acima,*

(i) Para todo par $\alpha, \beta \in P'$ tal que $\alpha \circ \beta \neq 0$, existe um único $0 \neq \gamma_{(\alpha,\beta)} \in P'$ tal que $\alpha \circ \beta \leq \gamma_{(\alpha,\beta)}$.

(ii) α_e é um idempotente quando $e \in E(S)$.

(iii) $\alpha_0 = 0$.

(iv) Se $\alpha \in P'$, então $\alpha^{-1} \in P'$.

Demonstração. (i): Por hipótese, temos que $\alpha = \alpha_f$ e $\beta = \alpha_g$, para $f, g \in S$. Se $\alpha \circ \beta \neq 0$, em particular temos que $f, g \neq 0$. Seja então $\gamma_{(\alpha,\beta)} = \alpha_{fg}$.

O resto da prova de (i) e as provas de (ii) e (iv) são análogas a 3.1.8.

(iii): Claramente $\tau(0) = \{0\}$, de onde $\alpha_0 = \sum_{f \in \tau(0)} f = 0$. □

Defina uma operação binária $\odot$ em P' por $\alpha \odot \beta = \gamma_{(\alpha,\beta)}$, onde $\gamma_{(\alpha,\beta)}$ é o único elemento de P' maior ou igual que $\alpha \odot \beta$ como no lema acima, se $\alpha \circ \beta \neq 0$, e $\alpha \odot \beta = 0$ se $\alpha \circ \beta = 0$.

Lema 3.6.8. *$(P', \odot)$ é um semigrupo inverso primitivo isomorfo a S/τ.*

Demonstração. Pelo Lema 3.6.7, $\alpha_f \odot \alpha_g = \alpha_{fg}$. Para provar que $(P', \odot)$ é um semigrupo inverso primitivo basta provar que existe uma bijeção de S/τ em P' preservando operações binárias. Mas isso é facilmente provado através da aplicação $\tau(f) \mapsto \alpha_f$. □

Podemos ainda obter resultados análogos aos de semigrupos inversos sem zero.

Teorema 3.6.9. *Seja S um semigrupo inverso finito 0-E-unitário categórico no zero agindo em um anel A via ação unitária de semigrupo inverso com zero $\beta = (A_s, \beta_s)_{s \in S}$. Suponha que β é uma ação injetiva. Defina*

$$A_{\tau(s)} = \sum_{t \in \tau(s)} A_t \tag{3.5}$$

e

$$\alpha_{\tau(s)} = \sum_{t \in \tau(s)} \beta_t. \tag{3.6}$$

Então $\alpha = (A_p, \alpha_p)_{p \in P}$ é uma ação parcial unitária do semigrupo inverso primitivo $P = S/\tau$ no anel A.

Demonstração. A demonstração seguirá passos análogos à demonstração do Teorema 3.2.3.

Note que como β é uma ação injetiva, a aplicação $\beta : S \to \mathrm{Iso}_{pu}(A)$ dada por $s \mapsto \beta_s$ é um homomorfismo injetivo de semigrupos inversos com zero. Logo, $S \simeq \beta(S) \subseteq \mathrm{Iso}_{pu}(A)$. É fácil de ver que $\beta(S)$ é 0-E-unitário.

Usando as construções dos Lemas 3.6.7 e 3.6.8, obtemos que as equações 3.5 e 3.6 definem um semigrupo inverso primitivo $P' = \{\alpha_{\tau(s)} : s \in S\}$ em $\mathrm{Iso}_{pu}(A)$. Note que P' não é necessariamente um semigrupo inverso com a operação usual de $\mathrm{Iso}_{pu}(A)$, mas sim com a operação $\odot$ definida no Lema 3.6.8. Ainda por esse lema, temos que $(P', \odot) \simeq \beta(S)/\tau$. Mas S e $\beta(S)$ são isomorfos, de onde $(P', \odot) \simeq \beta(S)/\tau \simeq S/\tau = P$.

Defina, então, $\alpha = (A_p, \alpha_p)_{p \in P}$. Vamos provar que α é uma ação parcial de semigrupo inverso com zero de P em A. Para isso basta notar que

$$\sum_{\tau(e) \in E(P)} A_{\tau(e)} = \sum_{\tau(e) \in E(P)} \sum_{f \in \tau(e)} A_f = \sum_{e \in E(S)} A_e = A,$$

pois $\cup_{\tau(e) \in E(P)} \tau(e) = E(S)$, já que S é 0-E-unitário. Isso prova o item (P1) de ação parcial de semigrupo inverso. Claramente $\alpha_{0_P} = \alpha_{\tau(0)} = \alpha_{0_S} = 0$ e $A_{0_P} = 0$, de onde também vale (P0).

O Lema 3.6.7 nos diz que $\alpha_p \circ \alpha_q \leq \alpha_{pq}$, para todos $p, q \in P$. Mas isso implica que

$$\alpha_q^{-1}(A_{p^{-1}} \cap A_q) = \mathrm{dom}(\alpha_p \circ \alpha_q) \subseteq \mathrm{dom}(\alpha_{pq}) = A_{(pq)^{-1}}$$

e

$$\alpha_p \circ \alpha_q = \alpha_{pq}|_{\mathrm{dom}(\alpha_p \circ \alpha_q)} = \alpha_{pq}|_{\alpha_q^{-1}(A_{p^{-1}} \cap A_q)},$$

que são os itens (P2) e (P3) da definição de ação parcial de semigrupo inverso. A verificação de que α é unitária é análoga ao caso sem zero. □

Corolário 3.6.10. *Seja S um semigrupo inverso finito 0-E-unitário categórico no zero agindo em um anel A via ação unitária de semigrupo inverso com zero $\beta = (A_s, \beta_s)_{s \in S}$. Suponha que β é uma ação injetiva. Defina*

$$A_{\tau(s)} = \sum_{t \in \tau(s)} A_t,$$

e

$$\gamma_{\tau(s)} = \sum_{t \in \tau(s)} \beta_t,$$

para todo $s \in S^*$. Então $\gamma = (A_g, \gamma_g)_{g \in \mathcal{G}}$ é uma ação parcial ortogonal unitária do grupoide $\mathcal{G} = (S/\tau)^*$ no anel A.

Demonstração. Basta notar que, nas notações do Teorema 3.6.6, $\gamma = \alpha^*$, onde α é a ação parcial unitária do semigrupo inverso primitivo S/τ em A construída no Teorema 3.6.9. □

Observação 3.6.11. Deste ponto até o final do capítulo, fixaremos as notações $P = S/\tau$, $\mathcal{G} = P^*$, $\alpha = (A_p, \alpha_p)_{p \in P}$ e $\gamma = (A_g, \gamma_g)_{g \in \mathcal{G}}$ como acima.

Observação 3.6.12. Analogamente à Observação 3.2.5, podemos notar que $1_{\tau(s)} 1_s = 1_s$, para todo $s \in S$.

Os próximos resultados são completamente análogos ao caso sem zero, e portanto suas demonstrações serão omitidas. As definições de subanel dos invariantes, aplicação traço, extensões galoisianas, subsemigrupos inversos β-fortes e subsemigrupo que fixa determinada subálgebra se mantém inalteradas

Proposição 3.6.13. *Nas notações dos teoremas acima, temos que $A^\beta = A^\alpha = A^\gamma$.*

Desta forma, se definirmos $\mathrm{tr}_\beta^\tau = \mathrm{tr}_\alpha = \mathrm{tr}_\gamma$, obtemos diretamente o próximo resultado.

Corolário 3.6.14. *A operação tr_β^τ é um homomorfismo de A^β-bimódulos. Além disso, $tr_\beta^\tau(A) \subseteq A^\beta$. Finalmente, $tr_\beta^\tau(\beta_s(a)) = tr_\beta^\tau(a)$, para todo $a \in A_{s^{-1}}$.*

Nosso próximo objetivo é construir um contexto de Morita para o caso de semigrupos inversos com zero análogo ao da Proposição 3.2.9, visando obtermos um Teorema de Equivalências da definição de extensão galoisiana na próxima seção. Para isso, precisaremos de um lema auxiliar.

Lema 3.6.15. *Os anéis $A \star_\alpha P$ e $A \star_\gamma \mathcal{G}$ são isomorfos.*

Demonstração. Claramente esses conjuntos são iguais. Defina então a aplicação bijetiva

$$\begin{aligned} \varphi : A \star_\alpha P &\to A \star_\gamma \mathcal{G} \\ a\delta_p &\mapsto a\delta_p, \end{aligned}$$

estendida linearmente.

Vamos provar que φ é um isomorfismo. Para isso basta apenas provarmos que φ preserva produtos. Mas isso é fácil, pois

$$\begin{aligned} \varphi((a\delta_p)(b\delta_q)) &= \varphi(\alpha_p(\alpha_{p^{-1}}(a)b)\delta_{pq}) \\ &= \alpha_p(\alpha_{p^{-1}}(a)b)\delta_{pq} \\ &= \begin{cases} \alpha_p(\alpha_{p^{-1}}(a)b)\delta_{pq}, & \text{se } p^{-1}p = qq^{-1}, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \gamma_p(\gamma_{p^{-1}}(a)b)\delta_{pq}, & \text{se } d(p) = r(q), \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= (a\delta_p)(b\delta_q). \end{aligned}$$

□

Temos que A é um $(A^\beta, A\star_\gamma\mathcal{G})$-bimódulo (respectivamente $(A\star_\gamma\mathcal{G}, A^\beta)$-bimódulo) com ações à esquerda e à direita de A^β via multiplicação e ação à direita (respectivamente à esquerda) de $A \star_\gamma \mathcal{G}$ em A dada por

$$a \cdot b_g\delta_g = \gamma_{g^{-1}}(ab_g),$$

e respectivamente

$$b_g\delta_g \cdot a = b_g\gamma_g(a1_{g^{-1}}),$$

para todos $g \in \mathcal{G}$, $b_g \in A_g$ e $a \in A$ e estendidas linearmente.

Podemos considerar as aplicações

$$\begin{aligned} \eta : A \otimes_{A\star_\gamma\mathcal{G}} A &\to A^\beta \\ a \otimes b &\mapsto \mathrm{tr}_\beta^\tau(ab) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \eta' : A \otimes_{A^\beta} A &\to A \star_\gamma \mathcal{G} \\ a \otimes b &\mapsto \sum_{g\in\mathcal{G}} a\gamma_g(b1_{g^{-1}})\delta_g. \end{aligned}$$

Proposição 3.6.16. *A sêxtupla* $(A \star_\alpha P, A^\beta, A, A, \eta, \eta')$ *é um contexto de Morita. A aplicação* η *é sobrejetiva se, e somente se, existe* $a \in A$ *tal que* $tr_\beta^\tau = 1_A$*.*

Demonstração. Basta notar que a sêxtupla $(A\star_\gamma \mathcal{G}, A^\beta, A, A, \eta, \eta')$ é um contexto de Morita por [8, Proposition 4.4]. Agora, usando o Lema 3.6.15, temos que $A\star_\gamma \mathcal{G} \simeq A\star_\alpha P$, obtendo o resultado desejado. □

Podemos agora passar para o caso de semigrupos inversos com zero categóricos no zero.

Por abuso de notação, usaremos o mesmo símbolo para denotar aplicações análogas ao caso sem zero no teorema de equivalências. Considere a aplicação $j : A \star_\gamma \mathcal{G} \to End(A)_{A^\beta}$ dada por

$$j\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} a_g\delta_g\right)(a) = \sum_{g\in\mathcal{G}} a_g\gamma_g(a1_{g^{-1}}).$$

Temos que j é um homomorfismo bem definido de A-módulos. Além disso, j também é um homomorfismo de anéis por [8].

Seja agora M um $A \star_\gamma \mathcal{G}$-módulo à esquerda. Definimos

$$M^S = \{m \in M : 1_s\delta_{\tau(s)} \cdot m = 1_s m, \text{ para todo } s \in S\},$$

o A^β-submódulo dos invariantes de M sobre S. Note que M é um A-módulo à esquerda via o mergulho $a \mapsto a1_{A\star_\gamma\mathcal{G}}$ de A em $A \star_\gamma \mathcal{G}$. Podemos também definir

$$M^{\mathcal{G}} = \{m \in M : 1_g\delta_g \cdot m = 1_g m, \text{ para todo } g \in \mathcal{G}\}.$$

Lema 3.6.17. *Nas notações acima,* $M^S = M^{\mathcal{G}}$*.*

Demonstração. Análoga à demonstração do Lema 3.3.3. □

Teorema 3.6.18 (Teorema das Equivalências para semigrupos inversos com zero)**.** *Seja* S *semigrupo inverso 0-E-unitário categórico no zero finito agindo injetivamente em um anel comutativo* A *via ação global* $\beta = (A_s, \beta_s)_{s\in S}$*. Considere* $P = S/\tau$ *e* $\alpha = (A_p, \alpha_p)_{p\in P}$ *como no Teorema 3.6.9. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *A é uma extensão* β*-Galois de* A^β*;*

(ii) *A é um* A^β*-módulo projetivo finitamente gerado e* j *é um isomorfismo de* A*-módulos à esquerda e de anéis.*

(iii) *Para todo* $A \star_\alpha P$*-módulo à esquerda* M *a aplicação* $\mu : A \otimes M^S \to M$ *dada por* $\mu(a \otimes m) = am$ *é um isomorfismo de* A*-módulos à esquerda.*

(iv) *A aplicação* $\psi : A \otimes_{A^\beta} A \to PA_\beta(S)$ *definida por* $\psi(a \otimes b) = (a\beta_s(b1_{s^{-1}}))_{s\in S}$ *é um isomorfismo de* A*-módulos à esquerda.*

(v) A *é* A^β*-separável e* β*-forte.*

(vi) $AtA = A \star_\alpha P$*, onde* $t = \sum_{p\in P} 1_p\delta_p$*.*

(vii) *A aplicação* η' *é sobrejetiva.*

(viii) A *é um gerador para a categoria de* $A \star_\alpha P$*-módulos à esquerda.*

(ix) $tr^\sigma_\beta(A) = A^\beta$*.*

(x) A *é um gerador para a categoria de* A^β*-módulos à direita.*

(xi) *O contexto de Morita* $(A \star_\alpha P, A^\beta, A, A, \eta, \eta')$ *é estrito.*

Demonstração. Pela Proposição 3.3.2, A é uma extensão β-Galois de A^β se, e somente se, A é uma extensão de Galois α-parcial de A^α, se, e somente se, A é uma extensão de Galois γ-parcial de $A^\gamma = A^\beta = A^\alpha$. Portanto, por [8, Theorem 5.3, Corollary 5.4] e pelo Lema 3.6.17 temos que (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (vi) $\Leftrightarrow$ (vii) $\Leftrightarrow$ (viii) $\Leftrightarrow$ (ix) $\Leftrightarrow$ (x) $\Leftrightarrow$ (xi) trocando $A \star_\alpha P$ por $A \star_\gamma \mathcal{G}$. Mas esses anéis são isomorfos, então as equivalências ainda são válidas para $A \star_\alpha P$.

Daqui em diante provaremos as equivalências restantes. A demonstração de (i) $\Leftrightarrow$ (v) é análoga ao caso de semigrupos inversos sem zero.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Por [8, Theorem 5.3], temos que $A \otimes_{A^\beta} A \overset{\rho}{\simeq} \prod_{g\in\mathcal{G}} A_g$ via $a \otimes b \mapsto \rho(a\otimes b) = (a\alpha_g(b1_{g^{-1}}))_{g\in\mathcal{G}}$. Vamos inicialmente provar que $\prod_{g\in\mathcal{G}} A_g \simeq PA_\beta(S)$. Defina

$$\begin{aligned} \varphi : \prod_{g\in\mathcal{G}} A_g &\to PA_\beta(S) \\ (a_g)_{g\in\mathcal{G}} &\mapsto (a_s)_{s\in S}, \end{aligned}$$

onde $a_s = a_{\tau(s)}1_s$, para todo $s \in S^*$ e $a_0 = 0$.

Note que φ está bem definida, pois se $s \preceq t$ com $s, t \neq 0$, então $\tau(s) = \tau(t)$, de onde segue que $a_s = a_{\tau(s)}1_s = a_{\tau(t)}1_s = a_{\tau(t)}1_t1_s = a_t1_s$. Se $s = 0$, então $a_0 = 0 = a_t0 = a_t1_0$. Além disso, é fácil ver que φ é um homomorfismo de A-módulos. A demonstração de que φ é uma bijeção é análoga ao caso de semigrupos inversos sem zero.

Para encerrar a demonstração da implicação, basta notar que $\varphi \circ \rho = \psi$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Note que

$$\left(\sum_{e\in E(S)} \delta_{e,s}1_s\right)_{s\in S} \in PA_\beta(S),$$

pois se $e \preceq f$ em $E(S)$ então $1_e = 1_e 1_f$ e não existe $s \in S \setminus E(S)$ com $e \preceq s$, $e \in E(S)$. Como ψ é isomorfismo, temos que existe $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in A \otimes_{A^\beta} A$ tal que

$$\left(\sum_{e\in E(S)} \delta_{e,s} 1_s\right)_{s\in S} = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \beta_s(y_i 1_{s^{-1}})\right)_{s\in S}.$$

□

Proposição 3.6.19. *Dada uma A^β-subálgebra B de A, temos que S_B é um subsemigrupo inverso β-completo de S.*

Demonstração. A demonstração de que S_B é um subsemigrupo inverso cheio de S é análoga ao caso sem zero.

Seja então $P \subseteq S_B$ tal que existe $u = \bigvee P$ e $\beta_u = \sum_{s\in P} \beta_s$. Seja $P = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Dado $b \in B$, podemos concluir de forma análoga ao caso sem zero que

$$\beta_u(b1_{u^{-1}}) = \sum_{1\leq j\leq n} \sum_{i_1\leq \cdots \leq i_j} (-1)^{j+1} \beta_u(b1_{(s_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_j})^{-1}}).$$

Seja $Q = \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_j}\}$. Como $0 \neq s \preceq u$, para todo $s \in Q^*$, temos que todos elementos de Q^* pertence a mesma τ-classe. Como S é 0-E-unitário, segue que $\tau =\approx$, de onde segue que Q^* é um subconjunto fortemente compatível de S. Assim, $v_{Q^*} := \bigwedge_{s\in Q^*} s$ está definido. Note que $v_{Q^*} \in S_B$, pois $v_{Q^*} \preceq s$, para todo $s \in Q^* \subseteq S_B$ e S_B é um ideal de ordem. Defina então $v_Q = v_{Q^*}$ se $0 \notin Q$ e $v_Q = 0$, se $0 \in Q$. De qualquer forma, $v_Q \in S_B$. Além disso, $v_Q \preceq u$, de onde $\beta_u|_{A_{v_Q^{-1}}} = \beta_{v_Q}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\beta_u(b1_{u^{-1}}) &= \sum_{1\leq j\leq n} \sum_{i_1\leq \cdots \leq i_j} (-1)^{j+1} \beta_u(b1_{(s_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_j})^{-1}}) \\
&= \sum_{1\leq j\leq n} \sum_{i_1\leq \cdots \leq i_j} (-1)^{j+1} \beta_{s_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_k}}(b1_{(s_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_j})^{-1}}) \\
&= \sum_{1\leq j\leq n} \sum_{i_1\leq \cdots \leq i_j} (-1)^{j+1} b1_{s_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_j}} \\
&= b \sum_{1\leq j\leq n} \sum_{i_1\leq \cdots \leq i_j} (-1)^{j+1} 1_{s_{i_1}\wedge\cdots\wedge s_{i_j}} \\
&= b1_u,
\end{aligned}$$

isto é, $u \in S_B$. □

A partir de agora deveríamos supor que que $A_s \neq 0$, para todo $s \in S^*$, mas isso já está implícito. De fato, no caso de semigrupos inversos com zero, nas nossas hipóteses de que $A_0 = 0$, temos automaticamente que $A_s \neq 0$, para todo $s \in S^*$, pois caso contrário β não seria injetiva.

Teorema 3.6.20. *Suponha que A é uma extensão β-Galois de A^β. Seja T um subsemigrupo inverso β-completo de S. Então*

(i) $\beta_T = (A_t, \beta_t)_{t\in T}$ *é uma ação de T em A e A é β_T-Galois sobre $B := A^{\beta_T}$.*

(ii) B *é A^β-separável.*

(iii) B *é β-forte.*

(iv) $T = S_B$.

Demonstração. As demonstrações de (i) e (ii) são análogas ao caso sem zero. Vamos provar os itens restantes. Considere $\mathcal{G} = (S/\tau)^*$ o grupoide associado à S e $\gamma = (A_g, \gamma_g)_{g\in\mathcal{G}}$ a ação parcial ortogonal unitária de $\mathcal{G}$ em A construída como no Corolário 3.6.10.

(iii): Como A é β_T-Galois sobre B, existe $c \in A$ tal que $\operatorname{tr}^\sigma_{\beta_T}(c) = 1_A$. Considere $\mathcal{G}' = (T/\tau)^*$ o grupoide associado à T e $\gamma' = (A'_g, \gamma'_g)_{g\in\mathcal{G}'}$ a ação parcial de $\mathcal{G}'$ em A construída como no Corolário 3.6.10. Assim, $A'_{\tau(t)} = \sum_{s\in\tau(t)\cap T} A_s$ e $\gamma'_{\tau(t)} = \sum_{s\in\tau(t)\cap T} \beta_s = \gamma_{\tau(t)}|_{A'_{\tau(t)^{-1}}}$, para todo $t \in T$.

Seja $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$ um sistema de coordenadas galoisianas γ-parciais de A sobre A^γ. Em particular, $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$ é um sistema de coordenadas galoisianas γ'-parcial de A sobre $A^{\gamma'} = A^{\beta_T} = B$ pelo item (i) e pela Proposição 3.2.6.

Defina $x'_i = \operatorname{tr}^\sigma_{\beta_T}(cx_i)$ e $y'_i = \operatorname{tr}^\sigma_{\beta_T}(y_i)$, para $1 \le i \le n$. Assim, $x'_i, y'_i \in B$, para todo $1 \le i \le n$.

Prosseguimos a demonstração por afirmações.

Afirmação 1: $\sum\limits_{i=1}^n x'_i y'_i = 1_A$.

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n x'_i y'_i &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{g\in\mathcal{G}'} \gamma'_g(cx_i 1_{g^{-1}})\right)\left(\sum_{h\in\mathcal{G}'} \gamma'_h(y_i 1_{h^{-1}})\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{r(g)=r(h)} \gamma'_g(cx_i\gamma'_{g^{-1}}(\gamma'_h(y_i 1_{h^{-1}})1_g)) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{r(g)=r(h)} \gamma'_g(cx_i\gamma'_{g^{-1}h}(y_i 1_{h^{-1}g})1_{g^{-1}}), && \text{por (P3)} \\
&= \sum_{r(g)=r(h)} \gamma'_g\left(c\left(\sum_{i=1}^n x_i\gamma'_{g^{-1}h}(y_i 1_{h^{-1}g})\right)1_{g^{-1}}\right), && \text{pois } \gamma'_g \text{ é isomorfismo} \\
&= \sum_{r(g)=r(h)} \gamma'_g\left(c\left(\sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,h^{-1}g}1_e\right)1_{g^{-1}}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{g\in\mathcal{G}'} \gamma'_g \left(c1_{d(g)}1_{g^{-1}} \right), && \text{pois } A|_{A^{\gamma'}} \text{ é Galois}\\
&= \sum_{g\in\mathcal{G}'} \gamma'_g \left(c1_{g^{-1}} \right), && \text{pois } A_{g^{-1}} \subseteq A_{d(g)}\\
&= \mathrm{tr}_{\gamma'}(c) = \mathrm{tr}^{\sigma}_{\beta_T}(c) = 1_A.
\end{aligned}
$$

Afirmação 2: $\sum_{i=1}^{n} x'_i\beta_s(y'_i1_{s^{-1}}) = \begin{cases} 1_s, & \text{se } s\in T,\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$

Como $y'_i \in B = A^{\beta_T}$, temos que

$$
\sum_{i=1}^{n} x'_i\beta_s(y'_i1_{s^{-1}}) = \sum_{i=1}^{n} x'_iy'_i1_s = 1_A1_s = 1_s,
$$

para todo $s\in T$.

Agora, se $s\notin T$ (em particular $s\neq 0$), temos que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} x'_i\beta_s(y'_i1_{s^{-1}})\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{g\in\mathcal{G}'} \gamma'_g(cx_i1_{g^{-1}})\beta_s\left(\sum_{h\in\mathcal{G}'}\gamma'_h(y_i1_{h^{-1}})1_{s^{-1}}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{g\in\mathcal{G}'} \gamma'_g(cx_i1_{g^{-1}})\gamma_{\tau(s)}\left(\sum_{h\in\mathcal{G}'}\gamma'_h(y_i1_{h^{-1}})1_{\tau(s)^{-1}}1_{s^{-1}}\right), && \text{pois } \beta_s = \gamma_{\tau(s)}|_{A_{s^{-1}}}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{g\in\mathcal{G}'} \gamma_g(cx_i1_{g^{-1}})\gamma_{\tau(s)}\left(\sum_{h\in\mathcal{G}'}\gamma_h(y_i1_{h^{-1}})1_{\tau(s)^{-1}}1_{s^{-1}}\right), && \text{pois } \gamma'_h = \gamma_h|_{A'_{h^{-1}}}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{g\in\mathcal{G}'} \gamma_g(cx_i1_{g^{-1}})\sum_{h\in\mathcal{G}'}\gamma_{\tau(s)}(\gamma_h(y_i1_{h^{-1}})1_{\tau(s)^{-1}})\gamma_{\tau(s)}(1_{s^{-1}}), && \text{pois } \gamma_{\tau(s)} \text{ é isomorfismo}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{g\in\mathcal{G}'} \gamma_g(cx_i1_{g^{-1}})\sum_{h\in\mathcal{G}'}\gamma_{\tau(s)}(\gamma_h(y_i1_{h^{-1}})1_{\tau(s)^{-1}})1_s, && \text{pois } \gamma_{\tau(s)}|_{A_{s^{-1}}} = \beta_s\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{g\in\mathcal{G}'} \gamma_g(cx_i1_{g^{-1}})\sum_{d(\tau(s))=r(h)}\gamma_{\tau(s)}(\gamma_h(y_i1_{h^{-1}})1_{\tau(s)^{-1}})1_s, && \text{pois } \gamma \text{ é ortogonal}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{g\in\mathcal{G}'} \gamma_g(cx_i1_{g^{-1}})\sum_{d(\tau(s))=r(h)}\gamma_{\tau(s)h}(y_i1_{h^{-1}\tau(s)^{-1}})1_{\tau(s)}1_s, && \text{por (P3)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{g\in\mathcal{G}'} \gamma_g(cx_i1_{g^{-1}})\sum_{d(\tau(s))=r(h)}\gamma_{\tau(s)h}(y_i1_{h^{-1}\tau(s)^{-1}})1_s, && \text{pela Observação 3.6.12}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{d(g)=r(\tau(s))\\ d(\tau(s))=r(h)}} \gamma_g \left(c \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_{g^{-1}\tau(s)h}(y_i 1_{h^{-1}\tau(s)^{-1}g}) \right) 1_{g^{-1}} \right) 1_s$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{d(g)=r(\tau(s))\\ d(\tau(s))=r(h)}} \gamma_g \left(c \left(\sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{g^{-1}\tau(s)h,e} 1_e \right) 1_{g^{-1}} \right) 1_s.$$

Se $g^{-1}\tau(s)h \in \mathcal{G}_0$, então $d(g) = d(h)$ e $g^{-1}\tau(s)h = d(g)$. Mas nesse caso $\tau(s) = gh^{-1} \in \mathcal{G}'$. Mas então $s \in T$, o que não é possível por hipótese. Logo, $g^{-1}\tau(s)t \notin \mathcal{G}_0$, de onde segue que $\delta_{g^{-1}\tau(s)h,e} = 0$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$, completando a demonstração da Afirmação 2.

Provaremos agora que B é β-forte. De fato, suponha que $s,t \in S$ são tais que $s^{-1}t \notin S_B$. Em particular, $s^{-1}t \notin T$, pois $T \subseteq S_B$ por definição.

Seja $0 \neq e \in E(A_s \cup A_t)$. Suponha, por contradição, que $\beta_s(b1_{s^{-1}})e = \beta_t(b1_{t^{-1}})e$, para todo $b \in B$. Sem perda de generalidade, podemos considerar $e \in A_s$. Então

$$b\beta_{s^{-1}}(e) = \beta_{s^{-1}t}(b1_{t^{-1}s})\beta_{s^{-1}}(e), \quad \text{para todo } b \in B.$$

Defina $e' = \beta_{s^{-1}}(e)$. Como $y_i' \in B$ e $\sum_{i=1}^{n} x_i'y_i' = 1_A$, temos que

$$e' = 1_A e' = \sum_{i=1}^{n} x_i'y_i'e' = \sum_{i=1}^{n} x_i'\beta_{s^{-1}t}(y_i'1_{t^{-1}s})e' = 0e' = 0.$$

Como $\beta_{s^{-1}}$ é isomorfismo, segue que $e = 0$, o que é uma contradição. Portanto, deve existir $b \in B$ tal que $\beta_s(b1_{s^{-1}})e \neq \beta_t(b'_{t^{-1}})e$, isto é, B precisa ser β-forte.

(iv): É fácil ver que $T \subseteq S_B$, pois $B = A^{\beta_T}$. Observe que $A^{\beta_{S_B}} = A^{\beta_T} = B$. De fato, como $T \subseteq S_B$, então $A^{\beta_{S_B}} \subseteq A^{\beta_T}$. A inclusão reversa segue da definição de S_B. Então, de (i) segue que A é uma extensão β_T-Galois de $A^{\beta_{S_B}} = A^{\beta_T}$. Pelo Teorema 3.6.18, temos que as aplicações

$$\begin{aligned} \psi : A \otimes_B A &\to PA_{\beta_T}(T) \\ x \otimes y &\mapsto (x\beta_t(y1_{t^{-1}}))_{t\in T} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \psi' : A \otimes_B A &\to PA_{\beta_{S_B}}(S_B) \\ x \otimes y &\mapsto (x\beta_t(y1_{t^{-1}}))_{t\in S_B} \end{aligned}$$

são isomorfismos de A-módulos.

Suponha, por contradição, que existe $t \in S_B \setminus T$. Claramente $t \neq 0$, pois T é cheio.

Considere determinado t minimal com respeito à ordem parcial natural. Seja

$$z = (\delta_{s,\tau(t)} 1_s)_{s\in S_B} \in PA_{\beta_{S_B}}(S_B).$$

Note que $z \neq 0$, pois $A_t \neq 0$, para todo $t \in S^*$. Como ψ' é isomorfismo, existe $0 \neq x = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i \in A \otimes_B A$ tal que $\psi'(x) = z$, isto é, tal que

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \beta_s(b_i 1_{s^{-1}}) = \delta_{s,\tau(t)} 1_s,$$

para todo $s \in S_B$.

Note que não existe $s \in T$ com $t \preceq s$, pois T é um ideal de ordem e neste caso teríamos que $t \in T$. Considere $U = \{u_1, \ldots, u_k\} = \{u \in T : u \prec t\}$.

Caso 1: $U = \emptyset$.

Neste caso, $\tau(t) \cap T = \emptyset$, pois se existisse $s \in \tau(t) \cap T$, então $s \wedge t \in U$. Portanto, temos que $\psi(x) = 0$, o que é uma contradição com $x \neq 0$.

Caso 2: $U \neq 0$.

Note que como $u_i \preceq t$, para todo $1 \leq i \leq k$, temos que $\beta_{u_i} \leq \beta_t$, para todo $1 \leq i \leq k$, o que implica que $\beta_u \approx \beta_t$, para todo $u \in U^*$. Logo, como $\mathrm{Iso}_{pu}(A)$ é um semigrupo inverso f-completo, temos que a união $f_t = \sum_{i=1}^{k} \beta_{u_i}$ está bem definida e $f_t \leq \beta_t$.

Caso 2.1: $f_t = \beta_t$.

Neste caso, temos que $t \in T$, pois T é β-completo, o que é uma contradição.

Caso 2.2: $f_t < \beta_t$.

Se $f_t < \beta_t$, então $w = 1_t - 1_{\mathrm{dom}(f_t)} \neq 0$. Assim, considere o elemento $wz \in PA_{\beta_{S_B}}(S_B)$. Temos que

$$wz = (w 1_s \delta_{s,\tau(t)})_{s\in S_B},$$

e dado $s \in S_B \cap \tau(t)$, temos analogamente ao caso sem zero que

$$w1_s = \begin{cases} w, & \text{se } t \preceq s, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, existe $0 \neq x' \in A \otimes_B A$ tal que $\psi'(x') = wz$. Digamos que $x' = \sum_{i=1}^{m'} a'_i \otimes b'_i$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{m'} a'_i \beta_s(b'_i 1_{s^{-1}}) = \begin{cases} w, & \text{se } t \preceq s, 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note agora que $\psi(x') = 0$, pois não existe $s \in T$ com $t \preceq s$, Mas ψ é isomorfismo e $x' \neq 0$, o que é uma contradição. $\square$

A segunda metade do Teorema de Correspondência de Galois para o caso de semigrupos inversos sem zero tem a demonstração facilmente adaptável para o caso de semigrupos inversos com zero. Portanto, apenas citaremos seu enunciado.

Teorema 3.6.21. *Suponha que A é uma extensão β-Galois de A^β. Seja B uma A^β-subálgebra de A, A^β-separável e β-forte. Então temos que $A^{\beta|_{S_B}} = B$.*

Os Teoremas 3.6.20 e 3.6.21 são a prova do seguinte teorema:

Teorema 3.6.22. *Seja S um semigrupo inverso com zero finito categórico no zero 0-E-unitário que age injetivamente em um anel A via ação β. Suponha que A é uma extensão β-Galois de A^β tal que $A_s \neq 0$, para todo $s \in S^*$. Então existe uma correspondência biunívoca entre as A^β-subálgebras β-fortes e A^β-separáveis B de A e os subsemigrupos inversos β-completos T de S dada por $B \mapsto S_B$ e $T \mapsto A^{\beta|_T}$.*

Chegamos no ponto da seção em que traduziremos a teoria desenvolvida até aqui para o caso de semigrupos inversos categóricos no zero que não são 0-E-unitários e não agem injetivamente em um anel comutativo. Sejam, então, S um semigrupo inverso com zero categórico no zero e $\beta = (A_s, \beta_s)_{s\in S}$ uma ação de S em um anel A. Note que a ação de S em A pode ser vista como um homomorfismo de semigrupos inversos com zero $\beta : S \to \mathrm{Iso}_{pu}(A)$ dado por $\beta(s) := \beta_s$.

Para trabalharmos com a correspondência de Galois, vamos exigir a hipótese $A_s \neq 0$, para todo $s \in S^*$. Neste caso, obtemos o seguinte resultado com demonstração análoga ao caso sem zero.

Proposição 3.6.23. *Suponha que A é β-Galois sobre A^β tal que $A_s \neq 0$, para todo $s \in S$. Então $\beta(S) = \{\beta_s : s \in S\}$ é um semigrupo inverso com zero categórico no zero 0-E-unitário.*

Esse resultado é fundamental para estender o Teorema 3.6.22 para o caso geral, teorema que encerrará o trabalho. A demonstração segue de forma muito semelhante ao caso de semigrupos inversos sem zero, e portanto será omitida.

Teorema 3.6.24 (Correspondência de Galois para semigrupos inversos com zero)**.** *Seja S um semigrupo inverso com zero categórico no zero finito que age em um anel A via ação global $\beta = (A_s, \beta_s)_{s\in S}$. Suponha que A é β-Galois sobre A^β e que $A_s \neq 0$, para todo $s \in S^*$. Então existe uma correspondência biunívoca entre os subsemigrupos inversos β-maximais T de S e as A^β-subálgebras separáveis e β-fortes B de A dada por $B \mapsto \beta^{-1}(\beta(S)_B)$ com inversa $T \mapsto A^{\beta|_T}$.*

Referências Bibliográficas

[1] N. AlYamani and N. D. Gilbert. Ordered groupoid quotients and congruences on inverse semigroups. In *Semigr. Forum*, volume 96, pages 506–522. Springer, 2018. 107, 108

[2] N. AlYamani, N. D. Gilbert, and E. C. Miller. Fibrations of ordered groupoids and the factorization of ordered functors. *Appl. Categor. Struct.*, 24:121–146, 2016. 106, 107

[3] M. Auslander and O. Goldman. The Brauer group of a commutative ring. *Trans. Am. Math. Soc.*, 97(3):367–409, 1960. 1

[4] J. Ávila and V. Marín. The notions of center, commutator and inner isomorphism for groupoids. *Ing. Cienc.*, 16(31):7–26, 2020. 5

[5] J. Ávila, V. Marín, and H. Pinedo. Isomorphism theorems for groupoids and some applications. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2020. 5

[6] D. Bagio, A. Cañas, V. Marín, A. Paques, and H. Pinedo. The commutative inverse semigroup of partial abelian extensions. *Comm. Algebra*, 50(4):1498–1517, 2022. 3, 41, 54

[7] D. Bagio, D. Flores, and A. Paques. Partial actions of ordered groupoids on rings. *J. Algebra Appl.*, 9(03):501–517, 2010. 2, 10, 11, 12, 25

[8] D. Bagio and A. Paques. Partial groupoid actions: globalization, Morita theory, and Galois theory. *Comm. Algebra*, 40(10):3658–3678, 2012. 2, 3, 9, 10, 25, 34, 41, 42, 43, 44, 45, 49, 51, 52, 54, 55, 73, 82, 83, 88, 118, 119

[9] D. Bagio, A. Paques, and H. Pinedo. Restriction and extension of partial actions. *J. Pure Appl. Algebra*, 224(10):106391, 2020. 2

[10] D. Bagio, A. Paques, and H. Pinedo. On partial skew groupoid rings. *International Journal of Algebra and Computation*, 31(01):1–17, 2021. 10

[11] D. Bagio, A. Sant'Ana, and T. Tamusiunas. Galois correspondence for group-type partial actions of groupoids. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 28:745–767, 2021. 3, 41, 47, 73

[12] G. Beier, C. Garcia, W. G. Lautenschlaeger, J. Pedrotti, and T. Tamusiunas. Generalizations of Lagrange and Sylow theorems for groupoids. *São Paulo J. Math. Sci.*, pages 1–20, 2023. 5

[13] V. Beuter, D. Gonçalves, J. Öinert, and D. Royer. Simplicity of skew inverse semigroup rings with applications to Steinberg algebras and topological dynamics. In *Forum Mathematicum*, volume 31, pages 543–562. De Gruyter, 2019. 37, 38, 40

[14] S. U. Chase, D. K. Harrison, and A. Rosenberg. *Galois theory and cohomology of commutative rings*, volume 52. Am. Math. Soc., 1965. 1, 2, 47

[15] W. Cortes and T. Tamusiunas. A characterisation for groupoid Galois extension using partial isomorphisms. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 96(1):59–68, 2017. 3

[16] S. Della Flora, D. Flôres, A. Morgado, and T. Tamusiunas. Groupoid actions on sets, duality and a Morita context. *Comm. Algebra*, 51(1):178–190, 2023. 3, 73

[17] D. DeWolf and D. Pronk. The Ehresmann-Schein-Nambooripad theorem for inverse categories. *Theory Appl. Cat.*, 33(27):813–831, 2018. 4, 9, 40

[18] M. Dokuchaev and R. Exel. Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations. *Trans. Am. Math. Soc.*, 357(5):1931–1952, 2005. 2, 12, 25

[19] M. Dokuchaev, M. Ferrero, and A. Paques. Partial actions and Galois theory. *J. P. Appl. Algebra*, 208(1):77–87, 2007. 2, 47, 73, 82, 88, 89, 96

[20] R. Exel. Partial actions of groups and actions of inverse semigroups. *Proc. Am. Math. Soc.*, 126(12):3481–3494, 1998. 2, 93, 94

[21] R. Exel and F. Vieira. Actions of inverse semigroups arising from partial actions of groups. *J. Math. Anal. Appl.*, 363(1):86–96, 2010. 93, 94

[22] O. Ganyushkin and V. Mazorchuk. *Classical finite transformation semigroups: an introduction*, volume 9. Springer, 2008. 7

[23] C. Garcia and T. Tamusiunas. A Galois correspondence for K_β-rings. *J. Algebra*, 640:74–105, 2024. 3

[24] J. García and J. J. Simón. Morita equivalence for idempotent rings. *J. Pure Appl. Algebra*, 76(1):39–56, 1991. 25, 26

[25] N. Gilbert. Actions and expansions of ordered groupoids. *J. Pure Appl. Algebra*, 198(1-3):175–195, 2005. 3, 7, 8

[26] V. Gould and C. Hollings. Partial actions of inverse and weakly left E-ample semigroups. *J. Aust. Math. Soc.*, 86(3):355–377, 2009. 3

[27] V. Gould and C. Hollings. Actions and partial actions of inductive constellations. In *Semigr. Forum*, volume 82, pages 35–60. Springer, 2011. 3, 7, 8, 9

[28] V. Gould and T. Stokes. Constellations and their relationship with categories. *Algebra univers.*, 77(3):271–304, 2017. 3

[29] A. Grothendieck. Revêtements étales et groupe fondamental. *Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie*, 1960. 2

[30] C. Hollings. Extending the Ehresmann-Schein-Nambooripad theorem. In *Semigr. Forum*, volume 80, pages 453–476. Springer, 2010. 3, 7, 8, 9

[31] G. Janelidze. Pure Galois theory in categories. *J. Algebra*, 132(2):270–286, 1990. 2

[32] G. Janelidze and W. Tholen. Extended Galois theory and dissonant morphisms. *J. Pure Appl. Algebra*, 143(1-3):231–253, 1999. 2

[33] M.-A. Knus and M. Ojanguren. *Théorie de la descente et algèbres d'Azumaya*, volume 389. Springer, 2006. 47, 105

[34] W. G. Lautenschlaeger. Semigrupoides inversos: Ações, representações e teoria de Galois. Master's thesis, UFRGS, 2021. 2, 12

[35] W. G. Lautenschlaeger and T. Tamusiunas. Inverse semigroupoids actions and representations. *REMAT*, 9:e3006, 2023. 2

[36] W. G. Lautenschlaeger and T. Tamusiunas. Maximal ordered groupoids and a Galois correspondence for inverse semigroup orthogonal actions. *Appl. Categor. Struct.*, 31(5):31, 2023. 4, 10, 73

[37] M. V. Lawson. *Inverse semigroups, the theory of partial symmetries*. World Scientific, 1998. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 29, 46, 73, 74, 75, 76, 78, 79, 95, 96, 112, 113

[38] A. Magid. Galois groupoids. *J. Algebra*, 18(1):89–102, 1971. 1

[39] A. R. Magid. The separable closure of some commutative rings. *Trans. Am. Math. Soc.*, 170:109–124, 1972. 1

[40] A. R. Magid. *The separable Galois theory of commutative rings*. CRC press, 2014. 1

[41] D. B. McAlister and N. Reilly. E-unitary covers for inverse semigroups. *Pacific J. Math.*, 68:161–174, 1977. 7

[42] T. Nagahara. A note on Galois theory of commutative rings. *P. Am. Math. Soc.*, 18(2):334–340, 1967. 1

[43] P. Nystedt. Partial category actions on sets and topological spaces. *Commun. Algebra*, 46(2):671–683, 2018. 3

[44] P. Nystedt, J. Öinert, and H. Pinedo. Artinian and noetherian partial skew groupoid rings. *J. Algebra*, 503:433–452, 2018. 72, 73

[45] A. Paques and T. Tamusiunas. A Galois-Grothendieck-type correspondence for groupoid actions. *Algebra Discrete Math.*, 17(1):80–97, 2014. 2, 73

[46] A. Paques and T. Tamusiunas. The Galois correspondence theorem for groupoid actions. *J. Algebra*, 509:105–123, 2018. 2, 3, 5, 41, 48, 49, 52, 53, 54, 55, 70, 73, 105, 106

[47] A. Paques and T. Tamusiunas. On the Galois map for groupoid actions. *Comm. Algebra*, 49(3):1037–1047, 2021. 73

[48] J. Pedrotti and T. Tamusiunas. Injectivity of the Galois map. *Bull. Brazilian Math. Soc., New Series*, 54(1):1–11, 2023. 3, 73

[49] L. H. Rowen. Ring theory (student edition), 1991. 44

[50] W. Velasco. *Algebras of Expanded Structures*. PhD thesis, UFPR, 2021. 3

[51] O. Villamayor and D. Zelinsky. Galois theory for rings with finitely many idempotents. *Nagoya Math. J.*, 27(2):721–731, 1966. 1, 2, 73

[52] O. Villamayor and D. Zelinsky. Galois theory with infinitely many idempotents. *Nagoya Math. J.*, 35:83–98, 1969. 1

[53] S. Wang. An Ehresmann–Schein–Nambooripad-type theorem for a class of P-restriction semigroups. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 42(2):535–568, 2019. 4

[54] S. Wang. An Ehresmann–Schein–Nambooripad theorem for locally Ehresmann P-Ehresmann semigroups. *Period. Math. Hung.*, 80:108–137, 2020. 4