

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
ENGENHARIA MECÂNICA

JOAQUIM GIRARDELLO DETONI

MODELAGEM DE ACOPLADORES POR CORRENTES PARASITAS

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Porto Alegre  
2008



Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Departamento de Engenharia Mecânica

MODELAGEM DE ACOPLADORES POR CORRENTES PARASITAS

JOAQUIM GIRARDELLO DETONI

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS RE-  
QUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE  
**ENGENHEIRO(A) MECÂNICO(A)**  
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas  
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

**BANCA EXAMINADORA:**

Prof. Dr. ROGÉRIO JOSÉ MARCZAK  
UFRGS / DEMEC

Prof. Dr. HERBERT MARTINS GOMES  
UFRGS / DEMEC

Prof. Dr. HERALDO AMORIN  
UFRGS / DEMEC

Porto Alegre  
2008

## **Agradecimentos**

Agradeço à Universidade Federal do Rio Grande do Sul por oportunizar o desenvolvimento do curso de engenharia mecânica que portou ao presente trabalho

aos professores Dr. Nicola Amati, Prof. Andrea Tonoli e Ing. Xavier De Lepine pelo apoio e acompanhamento nos trabalhos realizados no Politecnico di Torino e pelos dados experimentais fornecidos para o desenvolvimento deste trabalho

ao meu orientador, Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas que durante meu percurso universitário sempre apoiou e incentivou o desenvolvimento de estudos em diversas áreas da engenharia mecânica e orientou este trabalho com maestria

ao programa ALPIP e partes envolvidas pela oportunidade e pelo apoio.

DETONI, J. G. **Modelagem de acopladores por correntes parasitas**. 2008. Trabalho de conclusão de curso em Engenharia Mecânica – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

## **Resumo**

Acopladores por correntes parasitas têm sido empregados em uma série de aplicações industriais tais como freios, transmissões ou sistemas de amortecimento. A principal vantagem deste tipo de componente é o funcionamento em ausência de contato mecânico, eliminando a necessidade do elevado grau de precisão de alinhamento típico de sistemas de acoplamento. No presente trabalho é apresentada a metodologia de análise de acopladores por correntes parasitas através da modelagem analítica e numérica. A construção de modelos numéricos é feita utilizando uma abordagem de resolução por equações diferenciais parciais. Estas equações são desenvolvidas em função do potencial vetorial magnético e inseridas diretamente no *solver* de elementos finitos. A resolução analítica é desenvolvida através de um modelo a parâmetros concentrados de um condutor em movimento em um campo magnético. Os estudos, de um modo geral, são desenvolvidos por meio de modelos simplificados colocando em evidência a validade das simplificações através de comparações entre os dois modelos, e também do confronto dos resultados destes com dados experimentais retirados da bibliografia.

**Palavras-chave:** acoplador, corrente parasita, elementos finitos.

DETONI, J. G. **Modelling of eddy-current couplers**. 2008. Trabalho de conclusão de curso em Engenharia Mecânica – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

### **Abstract**

Eddy-current couplers have been employed in many industrial applications such as braking, transmission or damping systems. The main advantage with respect to other coupling devices is the possibility of working in complete absence of mechanical contact, reducing the need for high accuracy alignment techniques typically required in mechanical coupling systems. In this work the analysis of an eddy-current coupler is performed using both analytical and numerical methodologies. The construction and analysis of the numerical models is done in a partial differential equation solver, and the results are obtained by the insertion of the Maxwell equations in terms of the magnetic vector potential directly into the solver. The analytical solution is developed using a lumped parameter model of a conductor moving in a magnetic field. The studies are developed by the means of simplified models, and the validity of the simplifications is shown by the comparison of the results with experimental data obtained from bibliography.

**Keywords:** coupler, eddy-current, finite element.

## Lista de Figuras

1	Circuito elétrico de um acoplador a correntes parasitas . . . . .	3
2	Sistema mecânico equivalente . . . . .	4
3	Comportamento função de transferência $F$ x $\Omega$ . . . . .	6
4	Direção de corte e modelo bidimensional do acoplador . . . . .	13
5	Distribuição de campo magnético sobre o modelo, $[T]$ . . . . .	13
6	Distribuição de correntes parasitas sobre o condutor, $[A/m^2]$ . . . . .	14
7	Curva característica de torque vs. velocidade angular . . . . .	14
8	Modelo tridimensional do acoplador eletrodinâmico . . . . .	15
9	Demonstração da rotação das grandezas em saída e em ingresso nos contornos. . . . .	15
10	Distribuição do campo magnético e das correntes parasitas no condutor. . . . .	16
11	Confronto entre os modelos numérico, analítico e dados experimentais. . . . .	16
12	Regiões, interfaces e contornos de um problema típico de correntes parasitas . . . . .	25

## Lista de Tabelas

1	Características geométricas e físicas . . . . .	12
---	---	----

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Revisão bibliográfica . . . . .	1
1.2	Motivação e objetivos do trabalho . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Modelagem de acopladores a correntes parasitas</b>	<b>3</b>
2.1	Sistema mecânico equivalente . . . . .	3
2.2	Resolução do sistema . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Construção dos modelos FEM</b>	<b>5</b>
3.1	Caracterização das regiões . . . . .	7
3.1.1	Materiais genéricos . . . . .	7
3.1.2	Condutor em movimento . . . . .	8
3.1.3	Ímã permanente . . . . .	10
3.2	Equacionamento final . . . . .	11
3.3	Modelos numéricos . . . . .	12
3.3.1	Acoplador bidimensional . . . . .	12
3.3.2	Acoplador tridimensional . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Conclusões e considerações finais</b>	<b>17</b>
	<b>Referências</b>	<b>19</b>
<b>A</b>	<b>Modelagem numérica</b>	<b>20</b>
A.1	Equações de Maxwell e Força de Lorentz . . . . .	20
<b>B</b>	<b>Formulação para problemas de eletromagnetismo</b>	<b>21</b>
B.1	Formulação A–V . . . . .	22
B.1.1	Potencial escalar elétrico . . . . .	22
B.1.2	Potencial vetorial magnético . . . . .	22
B.2	Equações de campo . . . . .	22
B.2.1	“Gauge fixing” . . . . .	23
B.2.2	Força de Lorentz . . . . .	25
B.3	Condições de contorno e interface . . . . .	25



# 1 Introdução

A sociedade atual impõe a cada dia novos desafios para o desenvolvimento de tecnologias e métodos mais eficazes, limpos e econômicos. Introduzidos neste contexto os engenheiros se vêem na responsabilidade de procurar alternativas para responder a estes requisitos sociais, buscando cada vez mais a eficiência em termos energético e econômico.

Na engenharia, a existência de alternativas de projeto para um equipamento possibilita que o projetista busque soluções que se enquadrem dentro dos critérios estabelecidos e satisfaçam da melhor maneira os interesses das partes envolvidas. Pensando nisso é que muitas empresas desenvolvem diversos produtos com finalidades e características semelhantes, mas que diferem em alguns pontos fundamentais de seu funcionamento.

O projeto de máquinas com acoplamentos de árvores conta com inúmeros tipos diferentes de acopladores, entre estes podem ser citados os acopladores rígidos e elásticos, acopladores a base de fluidos e também os acopladores eletromagnéticos. Este último tipo de junção constitui um objeto já conhecido e com práticas de projeto consolidadas, porém com aplicação relativamente restrita, ainda que apresente características que levem a crer num futuro promissor.

Um acoplador (ou freio) eletromagnético passivo, ou ainda eletrodinâmico, é constituído por discos com ímãs permanentes e condutores monolíticos para gerar o campo magnético e dissipar energia. Existe também a possibilidade de funcionamento semi-ativo utilizando eletroímãs, ou então um condutor com bobinas ligado em série a uma resistência variável. O emprego de componentes como junções ou freios baseados no fenômeno de indução de correntes parasitas por movimento é aconselhado em situações que exijam transmissão de torque sem contato, ausência de manutenção por longos períodos e/ou controle refinado do torque transmitido ou de frenagem.

A principal vantagem de um sistema de acoplamento a correntes parasitas em relação aos sistemas convencionais é justamente a possibilidade de funcionamento sem a necessidade de contato mecânico. Isto elimina a necessidade do elevado grau de precisão na fabricação e no alinhamento das peças. Além disso, utilizando materiais com alto valor de condutividade elétrica se consegue trabalhar com baixo escorregamento e, conseqüentemente, baixa perda por dissipação. Ainda pode-se citar que a alta condutividade colabora para o isolamento da carga transmitida em relação às vibrações torsionais, como será demonstrado mais adiante no trabalho.

## 1.1 Revisão bibliográfica

O projeto de junções baseadas no princípio de repulsão eletrodinâmica conta com a dedicação de pesquisadores e inclusive com aplicações industriais há alguns anos, porém é ainda pouco difundido e de uso restrito. A literatura sobre o tema contempla vários trabalhos que abrangem a resolução do problema dos pontos de vista analítico, numérico e experimental. No campo de trabalho com modelos analíticos pode ser citado o trabalho realizado por [Tonoli, 2006]. Na área de simulação numérica podemos citar o trabalho realizado por [Canova & Vusini, 2003]. Por fim, não pode ser esquecida a caracterização experimental feita por [Tonoli & Amati, 2008].

A solução analítica do problema geralmente é feita utilizando um modelo linearizado do sistema, uma vez que a resolução do problema de correntes parasitas em três dimensões é bastante complicada. O estudo de modelos linearizados desenvolvido por Tonoli se demonstra muito efi-

---

ciente como instrumento de análise rápida, ainda que menos exata, porque a dependência dos parâmetros de projeto é explícita neste caso. Em seu trabalho é desenvolvido de modo muito completo o equacionamento analítico de um amortecedor a correntes parasitas, demonstrando a forte conexão entre este sistema e aquele de um acoplador eletrodinâmico. É posta em evidência a possibilidade de realizar a caracterização do mesmo sistema inicialmente como um acoplador e, utilizando os dados provenientes desta análise, desenvolver o estudo dinâmico do sistema de amortecimento.

Em seu trabalho Canova e Vusini colocaram em evidência a necessidade de se trabalhar o projeto de junções eletrodinâmicas dos pontos de vista analítico e numérico. Isto é desenvolvido por meio de uma abordagem particular, na qual o modelo analítico é utilizado tanto no estudo dos parâmetros que influenciam as características de funcionamento do acoplador quanto na correção de um modelo numérico. A correção do modelo numérico deve-se ao fato de que na modelagem bidimensional a representação das correntes parasitas é incompleta. A resolução numérica é de particular interesse pois é desenvolvida utilizando ferramentas de eficácia comprovada na literatura e com descrição muito clara tanto da geometria e parâmetros utilizados quanto dos resultados obtidos, mostrando-se muito conveniente para a construção de modelos comparativos.

O tipo final de análise que se pode esperar no estudo de um acoplador a correntes parasitas é a análise experimental. Este tipo de estudo não é muito comum na literatura sobre o tema, merecendo destaque o realizado por Tonoli e Amati. Neste estudo se demonstra justamente a conexão entre o estudo de amortecedores e acopladores citada anteriormente. O trabalho também mostra como é possível desenvolver a caracterização quase-estática experimental de um amortecedor eletrodinâmico e, utilizando o modelo de Tonoli, é realizado o confronto entre resultados experimentais e analíticos demonstrando a validade do modelo analítico proposto.

## 1.2 Motivação e objetivos do trabalho

O estudo de um acoplador eletrodinâmico é particularmente importante no campo de projeto de componentes que funcionam através do princípio de repulsão eletrodinâmica, porque constitui um problema com características que podem ser tratadas de maneira relativamente simples, tanto do ponto de vista analítico, quanto numérico. Este fato faz com que este estudo seja também um passo introdutório ao estudo de sistemas mais complexos, como por exemplo, amortecedores, sistemas de levitação e rolamentos eletrodinâmicos.

O objetivo do presente trabalho é identificar os valores necessários à realização dos estudos dinâmicos de acopladores e amortecedores a correntes parasitas, através do confronto entre a modelagem analítica e numérica. Para tanto pretende-se, primeiramente, resolver um modelo físico de um acoplador eletrodinâmico encontrando a equação da força resultante do movimento de um condutor em um campo magnético. Posteriormente é necessário construir modelos numéricos utilizando o método dos elementos finitos. Neste intuito se propõe o estudo das formulações para a resolução de problemas de indução de correntes parasitas e a avaliação de ferramentas de modelagem disponíveis. Com isto se deseja adquirir a capacidade de estudar o funcionamento e as propriedades dos sistemas, avaliando juntamente as características elétricas de resistência e indução do material.

## 2 Modelagem de acopladores a correntes parasitas

O objetivo deste capítulo é desenvolver a resolução analítica de um sistema de indução de correntes parasitas devido ao movimento de um condutor em um campo magnético.

### 2.1 Sistema mecânico equivalente

Em sua forma mais simples, um acoplador a correntes parasitas é um circuito constituído por um condutor conectado em série a um resistor e a um indutor, com seus terminais curto circuitados como demonstra a figura 1.

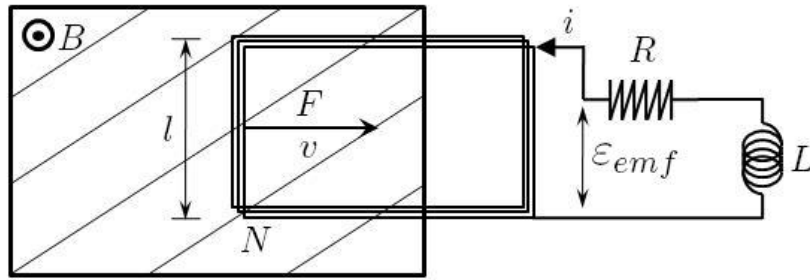


Figura 1: Circuito elétrico de um acoplador a correntes parasitas

O comportamento deste sistema tem como entrada a velocidade ( $v$ ) do movimento relativo entre o condutor e um campo magnético ( $B$ ) constante. Este movimento induz a força eletromotriz ( $\varepsilon_{emf}$ ) e a corrente ( $i$ ), que associada ao campo magnético, gera uma força ( $F$ ).

$$\begin{cases} \varepsilon_{emf} = K_m v \\ F = K_m i \end{cases} \quad (1)$$

Onde  $K_m$  é a constante eletromecânica do sistema, que para um sistema com  $N$  espiras vale

$$K_m = NBl$$

A equação deste sistema pode ser obtida aplicando-se a lei de tensões de Kirchhoff. A equação das saídas é a mesma equação (1) que dá a força como função da corrente elétrica ( $i$ ):

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\omega_{RL}i + \frac{K_m}{L}v \\ F = K_m i \end{cases} \quad (2)$$

Onde  $\omega_{RL}$  corresponde ao polo elétrico do sistema e é igual à razão entre a resistência  $R$  e a indutância  $L$ .

Este equacionamento é análogo àquele de um sistema puramente mecânico, como o demonstrado pela figura 2, constituído por uma mola e um amortecedor viscoso em série.

A equação de movimento deste sistema, na coordenada generalizada  $q$ , é:

$$c(\dot{q} - v) + kq = 0 \quad (3)$$

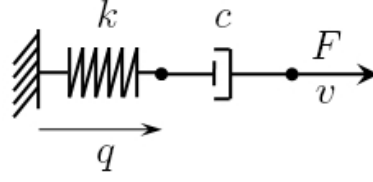


Figura 2: Sistema mecânico equivalente

Manipulando-a, encontra-se uma equação formalmente igual à eq.(2) para o sistema análogo:

$$\begin{cases} \dot{q} &= -\omega_{RL}q + v \\ F &= kq \end{cases} \quad (4)$$

A rigidez e o amortecimento equivalentes deste sistema valem:

$$k = \frac{K_m^2}{L} \quad c = \frac{K_m^2}{R}$$

O pólo do sistema mecânico ( $\omega_{RL}$ ) é igual à razão entre a rigidez  $k$  e o amortecimento  $c$  equivalentes.

Esta analogia é introduzida no trabalho porque apresenta uma vantagem fundamental em relação à representação na forma de sistema eletromecânico. A vantagem é que permite a visualização do comportamento do sistema em maneira mais simples. Isto é muito útil na modelagem dinâmica de sistemas mais complexos, como por exemplo rolamentos eletrodinâmicos, porque permite o estabelecimento dos sistemas de referência de modo mais intuitivo, que é um ponto fundamental do estudo da dinâmica de máquinas rotativas [Amati et al., 2008]. No estudo de um acoplador, o uso desta analogia não tem vantagens aparentes, porém permite o estabelecimento de um coeficiente de amortecimento equivalente que simplifica a notação e facilita o entendimento das propriedades do sistema, como será demonstrado.

## 2.2 Resolução do sistema

Para escrever a equação do condutor do acoplador, se assume a linearização do modelo apresentada precedentemente, e as seguintes hipóteses:

1. As propriedades que dependem da distribuição espacial do material são consideradas como simples grandezas escalares (sistema a parâmetros concentrados).
2. O campo magnético é constante e uniforme no sentido do movimento do condutor.
3. A velocidade tem perfil senoidal de frequência constante e igual à  $\Omega$ .
4. Nenhum efeito térmico é considerado.

Assumindo que a velocidade relativa  $v$  apresenta um comportamento senoidal com frequência  $\Omega$ , de acordo com [Fasana & Marchesiello, 2006] a corrente deverá, necessariamente, assumir um andamento igual, em forma e frequência, ao da excitação, portanto:

$$\begin{cases} v = v_0 e^{j\Omega t} \\ i = i_0 e^{j\Omega t} \\ \frac{di}{dt} = j i_0 \Omega e^{j\Omega t} \end{cases} \quad (5)$$

Inserindo as eqs. (5) na eq. (2), é possível calcular a intensidade da corrente  $i_0$  que passa no circuito em função da amplitude da velocidade  $v_0$ , do movimento relativo:

$$i_0 = \frac{\frac{K_m}{L} v_0}{\omega_{RL} + j\Omega} \quad (6)$$

Como neste caso apenas a parte real é de interesse para o estudo, e assumindo que a velocidade do acoplador é igual à velocidade de rotação  $\Omega$  multiplicada por um raio médio  $r$ , podemos obter a forma final da amplitude da corrente no circuito, como:

$$i_0 = \frac{\frac{K_m}{R} \Omega r}{1 + \left(\frac{\Omega}{\omega_{RL}}\right)^2} \quad (7)$$

Inserindo a resposta dada pela eq. (7) na equação de saída dada pela segunda linha da eq. (2), e considerando a analogia apresentada, é possível escrever a equação que descreve o comportamento da força gerada no condutor do acoplador em função da velocidade de rotação, como:

$$F = \frac{c\Omega r}{1 + \left(\frac{\Omega}{\omega_{RL}}\right)^2} \quad (8)$$

Esta equação permite a construção do gráfico apresentado na figura (3), que representa o andamento de  $F$  como função de  $\Omega$ .

A construção desta curva depende da identificação do coeficiente de amortecimento equivalente e da frequência do pólo elétrico do sistema. Para identificar os valores destes coeficientes podem ser adotados procedimentos baseados tanto na modelagem numérica quanto na caracterização experimental.

Como geralmente a fabricação de protótipos é algo oneroso do ponto de vista econômico e de tempo, o que se procura é utilizar modelos numéricos que permitam a redução destes dois fatores. Nos próximos capítulos será demonstrada uma das possíveis abordagens para a utilização de modelos numéricos na identificação dos coeficientes necessários aos estudos baseados no modelo analítico de um acoplador eletrodinâmico.

### 3 Construção dos modelos FEM

Um dos objetivos do presente trabalho, a construção de modelos capazes de reproduzir o comportamento de acopladores eletrodinâmicos em condição de velocidade angular constante. Para isto, se propõe a abordagem de resolução através da modelagem utilizando o método dos elementos finitos.

Por que o problema de indução de correntes parasitas se desenvolve como um problema de equações diferenciais parciais (equações de Maxwell na forma diferencial), se utiliza um *solver* numérico deste tipo de equação para resolver os modelos em elementos finitos (*PDE solver*). A modelagem numérica foi desenvolvida utilizando o programa COMSOL–Multiphysics

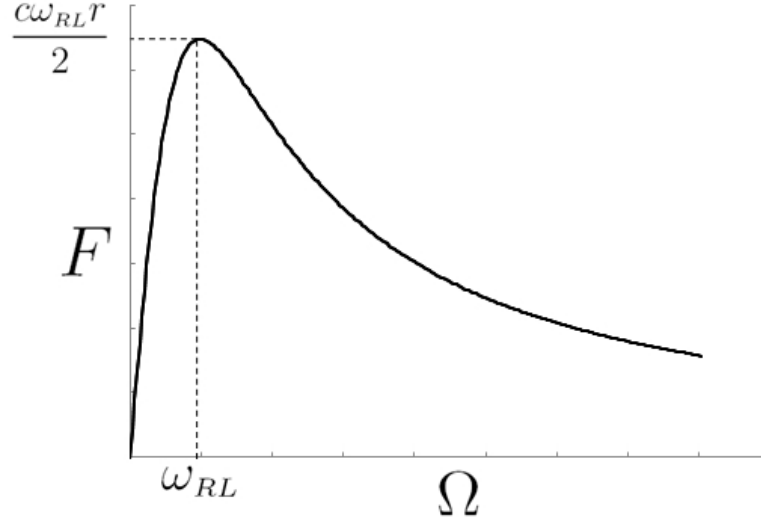


Figura 3: Comportamento função de transferência  $F$  x  $\Omega$

trabalhando com equações diferenciais parciais na forma a coeficientes (*PDE modes – coefficient form*).

O uso deste tipo de ferramenta pressupõe um conhecimento mínimo da física do problema por parte do usuário, uma vez que é necessário manipular as equações que descrevem os fenômenos de modo que seja possível introduzi-las no programa. Nos parágrafos seguintes será demonstrado o procedimento de manipulação desenvolvido no trabalho para utilizar o programa mencionado na resolução dos problemas de indução de correntes parasitas.

A equação de base do programa para a modelagem em *PDE – coefficient form* é a seguinte:

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (-c \nabla u - \alpha u + \gamma) + au + \beta \cdot \nabla u = f \quad (9)$$

Para problemas como o estudado, que se caracterizam pelo equilíbrio estático, ou pela sucessão de vários passos de equilíbrio estático (quase-estático), a equação (9) pode ser simplificada nos termos dependentes do tempo e desenvolvida de forma a tornar mais fácil a identificação dos coeficientes a serem introduzidos, assumindo a seguinte forma:

$$-c \nabla^2 u - \alpha \nabla \cdot u + \nabla \cdot \gamma + au + \beta \cdot \nabla u = f \quad (10)$$

A equação escrita nesta forma é válida para problemas uni, bi ou tridimensionais e a variável independente é  $u$ . Esta equação deve ser escrita para todas as regiões do problema de modo que se possa caracterizar as propriedades elétricas e magnéticas dos materiais que as constituem.

Esta forma de resolução não é específica para problemas de eletromagnetismo, sendo a equação expressa em função de coeficientes que assumem interpretações diferentes, porém análogas, de acordo com o fenômeno sobre o qual se esteja trabalhando. Por este motivo nem todos os coeficientes são necessários para resolver um determinado problema e estes se manifestam de acordo com o fenômeno ou formulação utilizados em cada caso. Neste trabalho se adota  $\alpha$  e  $a$  iguais a zero. Os demais coeficientes presentes na equação (10) surgirão dentro do equacionamento de acordo com o tipo de domínio sobre o qual se esteja trabalhando, e serão identificados quando necessário.

### 3.1 Caracterização das regiões

O primeiro passo para a resolução dos problemas é ser capaz de caracterizar cada região do problema. Isto será feito substancialmente reescrevendo as equações (27) e (37) de modo que sejam comparáveis à eq. (10) e que se possam identificar os valores dos coeficientes a serem inseridos no programa.

Para a caracterização das diferentes regiões se utilizam as seguintes definições:

$\vec{B}$	Densidade de fluxo magnético
$\vec{H}$	Intensidade de campo magnético
$\vec{J}$	Densidade de corrente elétrica
$\vec{M}$	Vetor de magnetização
$\vec{A}$	Potencial vetorial magnético

#### 3.1.1 Materiais genéricos

Assumindo a linearidade das propriedades de todos os materiais, a modelagem do ar circunstante, de materiais ferromagnéticos e outros materiais quaisquer, é feita utilizando exatamente o mesmo equacionamento, e a propriedade básica destes meios é a permeabilidade magnética  $\mu$ . Os materiais se diferenciam pelo valor da permeabilidade magnética relativa  $\mu_r$ .

No caso de um material genérico (com ou sem correntes impostas), o vetor de correntes  $\vec{J}$  assume a forma:

$$\vec{J} = \begin{Bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{Bmatrix}$$

A relação constitutiva magnética é:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

Onde  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo. Para materiais lineares, como  $\vec{M}$  é proporcional à  $\vec{H}$ , se chega a que:

$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

Na qual:

$$\mu = \mu_r\mu_0$$

Utilizando a equação (27) pode-se reescrever  $\vec{H}$  em função de  $\vec{A}$  para obter:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\nabla \times \vec{A} \quad (11)$$

No caso geral, a equação (21) não pode ser simplificada, e então:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

Aplicando o operador rotacional em eq. (11):

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$$

Através das propriedades da diferenciação vetorial e da eq. (34), se chega à equação (37):

$$-\frac{1}{\mu} \nabla^2 \vec{A} = \vec{J}$$

Fazendo o confronto com a equação (10) é possível identificar os coeficientes com os quais trabalhar em COMSOL:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{x,y,z} = \frac{1}{\mu} \\ f_x = J_x \\ f_y = J_y \\ f_z = J_z \end{array} \right.$$

No caso de materiais onde não existam correntes, o coeficiente  $f$  assume naturalmente o valor zero.

### 3.1.2 Condutor em movimento

No caso de um condutor em movimento em um campo magnético, o vetor  $\vec{J}$  contém os termos devidos às correntes parasitas. Se considera que não existam cargas estáticas e, conseqüentemente, as correntes se devem somente ao fenômeno de indução.

O vetor de correntes tem a seguinte forma:

$$\vec{J}_{ec} = \left\{ \begin{array}{l} J_x \\ J_y \\ J_z \end{array} \right\}$$

A relação constitutiva para o material do condutor é:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Partindo de eq. (27), se reescreve  $\vec{H}$  em função de  $\vec{A}$  e se obtém a equação (11). Como neste caso existem correntes passando pelo condutor, a equação (21) não pode ser simplificada e então:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{ec}$$

Aplicando o operador rotacional na eq. (11):

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$$

Através das propriedades da diferenciação vetorial e da eq. (34), se chega à equação (37), mas desta vez com o vetor de correntes diferente de zero:

$$-\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \vec{A} = \vec{J}_{ec}$$



Neste ponto é necessário definir  $\vec{J}_{ec}$  que, diferentemente do caso anterior, não é uma corrente imposta por uma fonte, mas é resultado do movimento do condutor. Este movimento faz com que o campo magnético visto pelo condutor seja variável no tempo, dando origem a um fenômeno de indução eletromagnética.

A relação constitutiva entre corrente e campo elétrico é a seguinte:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (12)$$

Como primeiro passo, utilizando a equação (29), se encontra a interação entre o campo elétrico e a variação de  $\vec{A}$  com relação ao tempo:

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(x(t), y(t), z(t))$$

Fazendo a derivada parcial de  $\vec{A}$  em  $x, y, z$ , utilizando a regra da cadeia, se obtém a expressão do campo elétrico em função da velocidade do condutor em cada direção:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \frac{dz}{dt}\right) \implies -\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} v_z\right)$$

Realizando as derivações:

$$\vec{E} = -\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial A_x}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} \end{array} \right\} v_x - \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ \frac{\partial A_y}{\partial y} \\ \frac{\partial A_z}{\partial y} \end{array} \right\} v_y - \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{array} \right\} v_z$$

Através de uma passagem de manipulação algébrica é possível reescrever esta equação de forma mais conveniente:

$$\vec{E} = -\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \hat{k}\right) \cdot (v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) \hat{i} \\ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial A_y}{\partial z} \hat{k}\right) \cdot (v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) \hat{j} \\ \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \hat{k}\right) \cdot (v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) \hat{k} \end{array} \right\}$$

Chegando a:

$$\vec{E} = -(\vec{v} \cdot \nabla A_x) \hat{i} - (\vec{v} \cdot \nabla A_y) \hat{j} - (\vec{v} \cdot \nabla A_z) \hat{k} \quad (13)$$

Nesta equação é possível ver claramente que o campo elétrico em cada direção depende somente do potencial vetorial naquela direção. Por este motivo se consegue escrever as equações de modo desacoplado nas variáveis independentes  $A_x, A_y$  e  $A_z$ . Reescrevendo a equação (37) inserindo o termo de corrente parasita que se obtém unindo as equações (12) e (13), se obtém um sistema de três equações desacopladas entre elas:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 A_x + \sigma \vec{v} \cdot \nabla A_x = 0 \\ -\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 A_y + \sigma \vec{v} \cdot \nabla A_y = 0 \\ -\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 A_z + \sigma \vec{v} \cdot \nabla A_z = 0 \end{cases}$$

Comparando com a equação (10), se identificam os coeficientes a serem inseridos no programa:

$$\begin{cases} c_{x,y,z} = \frac{1}{\mu_0} \\ \beta_{x,y,z} = \sigma \vec{v} \\ f_{x,y,z} = 0 \end{cases}$$

### 3.1.3 Ímã permanente

A definição de ímã permanente se faz pontualmente como uma amplitude e uma direção, isto é, um vetor. Este vetor é o vetor de magnetização  $\vec{M}$ . Para definir este vetor devemos conhecer suas projeções sobre os três planos. Sua amplitude representa a intensidade do campo magnético gerado pelo ímã.

No espaço cartesiano 3D, qualquer plano é função dos três planos independentes  $xy$ ,  $yz$  e  $zx$ , portanto, definindo o vetor de magnetização nos três, se garante a definição em todo o espaço.

A relação constitutiva é:

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0$$

Partindo de eq. (27) se rescreve  $\vec{H}$  em função de  $\vec{A}$  e se obtém a equação (11). Agora é necessário trabalhar nos três diferentes planos do espaço.

**Plano  $xy$**

$$\vec{H}_0 = \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{A} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ A_z \end{Bmatrix}$$

Desenvolvendo a eq. (11) se observa que:

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial y} - H_x = 0 \\ \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial x} + H_y = 0 \end{cases}$$

Trocando a posição das linhas:

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial x} + H_y = 0 \\ \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial y} - H_x = 0 \end{cases}$$

É possível reescrever em uma forma mais conveniente multiplicando ambos os lados da equação por  $-1$  e aplicando o operador divergente:

$$\nabla \cdot \left( -\frac{1}{\mu_0} \nabla A_z + \begin{Bmatrix} -H_y \\ H_x \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = 0$$

A inserção dos ímãs pode ser feita trabalhando juntamente em todos os planos de acordo com o caso. Direções variáveis de magnetização podem ser úteis, por exemplo, quando se utilizam ímãs magnetizados radialmente. Trabalhando de modo análogo é possível obter as equações para os outros dois planos para fazer a comparação entre equação (10) e cada uma das equações nos planos de modo a encontrar os coeficientes que definem um ímã permanente, que são:

$$\begin{cases} c_{x,y,z} = \frac{1}{\mu_0} \\ f_{x,y,z} = 0 \\ \gamma_x = \{0 - H_z H_y\}^T \\ \gamma_y = \{H_z 0 - H_x\}^T \\ \gamma_z = \{-H_y H_x 0\}^T \end{cases}$$

### 3.2 Equacionamento final

O cálculo de cada quantidade que se deseje conhecer deve ser introduzido explicitamente no programa. As quantidades podem ser calculadas pontualmente ou ainda integradas sobre domínios uni, bi ou tridimensionais. As equações a serem introduzidas para calcular cada quantidade são apenas o desenvolvimento das equações (27), (12) e (25) escritas em função da variável de solução  $\vec{A}$ , apoiadas nas definições básicas de momento e velocidade angular, como se demonstra.

#### Campo magnético

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (14)$$

#### Correntes induzidas

$$\vec{J} = \sigma \times \vec{E} = -\sigma \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial A_x}{\partial z} v_z \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial A_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} v_z \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial A_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial A_z}{\partial z} v_z \end{pmatrix} \quad (15)$$

Onde as componentes das velocidades para o movimento rotacional se encontram utilizando a seguinte definição:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix} \quad (16)$$

Deve-se estar atento ao fato de que no vetor  $\omega$  cada componente representa uma velocidade de rotação sobre o eixo da mesma componente.

**Força de Lorentz** A força de Lorentz deve ser calculada, seja pontualmente, seja integrada, sobre o domínio condutor. Para fazer isto é imposta a mesma equação, tanto como variável global, quanto como variável de integração. Utilizando as definições de campo magnético e corrente parasita apresentadas, esta equação pode ser escrita em função das outras duas como:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} J_y B_z - J_z B_y \\ J_z B_x - J_x B_z \\ J_x B_y - J_y B_x \end{pmatrix} \quad (17)$$

**Torque sobre o condutor** O torque gerado sobre o condutor é a soma de todos os torques gerados por cada força atuante potencialmente sobre o mesmo, ou seja, a integral do torque sobre o volume do condutor, escrito em função da força de Lorentz na seguinte forma:

$$T = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} F_z y - F_y z \\ F_x z - F_z x \\ F_y x - F_x y \end{pmatrix} \quad (18)$$

### 3.3 Modelos numéricos

Nesta seção serão apresentados os modelos construídos utilizando toda a base desenvolvida nos capítulos precedentes, e também os resultados obtidos com os mesmos. A modelagem em duas e em três dimensões foi feita utilizando o conjunto de propriedades físicas e as dimensões geométricas apresentadas na tabela 1.

Tabela 1: Características geométricas e físicas

Variável	Parâmetro geométrico	Valor [mm]
$g$	Camada de ar	1
$S_d$	Espessura do disco	7
$S_m$	Espessura dos ímãs	6
$I_m$	Distancia entre os ímãs	13,2
$L_m$	Raio dos ímãs	30
$R_d$	Raio do disco	75
$R_m$	Raio médio dos ímãs	55
$h_z$	Espessura equivalente (modelo 2D)	23,5
	Propriedade física	Valor
$\sigma$	Condutividade elétrica do cobre	$5,998E7 [AV^{-1}]$
$B_r$	Densidade de fluxo magnético remanente	1,22 [T]
$\mu_r$	Permeabilidade magnética relativa do ferro	4000

#### 3.3.1 Acoplador bidimensional

O estudo de modelos em elementos finitos pode ser extremamente complicado quando se lida com geometrias de relativa complexidade, e por isso muitas vezes convém realizar estudos preliminares utilizando modelos simplificados. Um exemplo de como se pode abordar o problema é, quando possível, reduzir o modelo tridimensional a um modelo em duas dimensões.

Esta é a proposta deste modelo que é feito utilizando algumas diretrizes apresentadas em [Canova & Vusini, 2003]. O problema consiste em um acoplador axial a correntes parasitas representado em duas dimensões realizando um corte no sistema tridimensional e construindo um modelo bidimensional equivalente, como demonstra a figura 4.

Em um caso bidimensional como este, os campos magnético e elétrico podem ser calculados em função de apenas uma das componentes do potencial vetorial magnético, que é aquela perpendicular ao plano da figura.

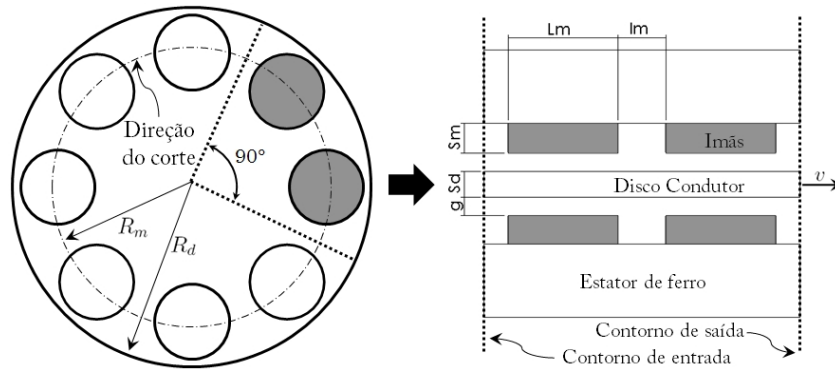


Figura 4: Direção de corte e modelo bidimensional do acoplador

O corte, realizado como demonstrado, faz com que o condutor tenha comprimento infinito na direção da velocidade. Como construir um modelo de comprimento infinito é algo inconcebível, se utilizam condições de contorno de periodicidade. A característica do problema também permite a redução do domínio de cálculo, utilizando apenas um setor de  $90^\circ$  do modelo completo. Por meio destas considerações e utilizando os dados da tabela 1 é possível construir o modelo e observar a distribuição de campo magnético e de correntes parasitas demonstradas pelas figuras 5 e 6.

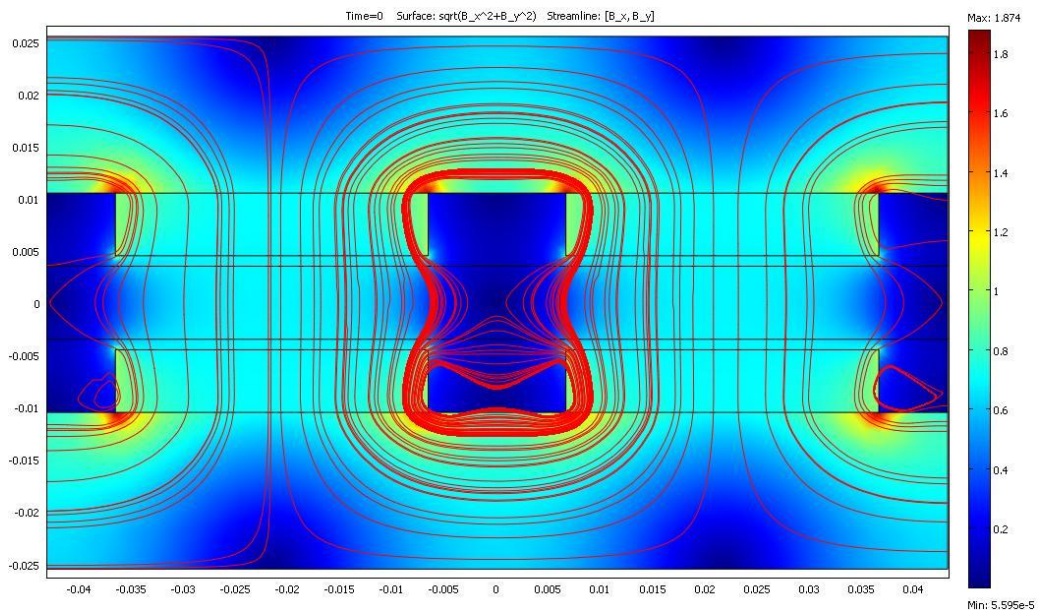


Figura 5: Distribuição de campo magnético sobre o modelo, [T].

A figura 5 mostra a distribuição do campo magnético sobre todo o domínio. Observando-se as linhas de campo percebe-se de modo bastante claro que o modelo reproduz o comportamento esperado. O sentido das linhas de campo e também a distribuição de correntes parasitas induzidas no condutor podem ser vistos na figura 6. Também neste caso percebe-se que o campo magnético e as correntes apresentam o comportamento esperado, e a indução de corrente respeita a regra da mão direita.

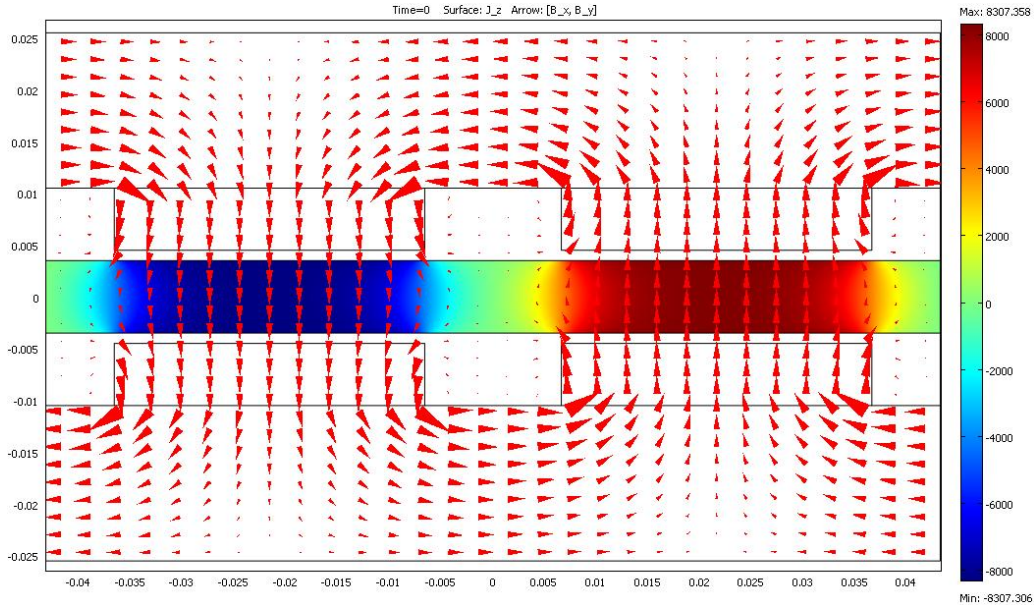


Figura 6: Distribuição de correntes parasitas sobre o condutor,  $[A/m^2]$ .

Embora estes resultados sejam importantes para o estudo, aquele mais expressivo que se obtém deste modelo é a curva característica de torque contra velocidade angular do acoplador. A construção do gráfico da figura 7 é feita através da integração da força de Lorentz sobre o condutor.

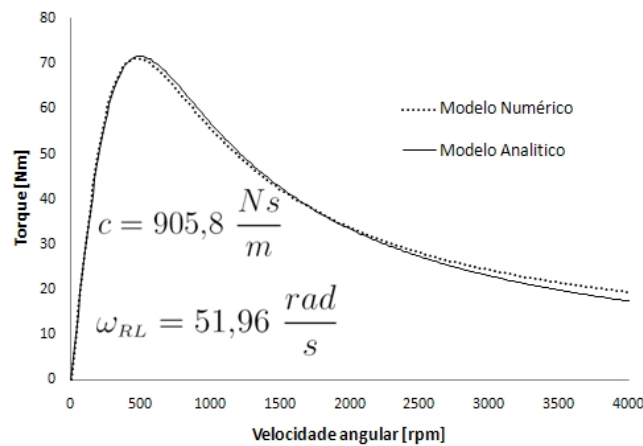


Figura 7: Curva característica de torque vs. velocidade angular

Como este é um modelo simplificado do sistema real, e sua construção foi feita utilizando o método demonstrado na figura 4, a curva de torque sobre o condutor é na realidade a curva de força multiplicada pelo raio do corte. Para conseguir identificar os valores necessários à construção das curvas de força e, conseqüentemente, torque do modelo analítico, vários são os possíveis métodos de abordagem. O método utilizado foi o de ajuste da curva por mínimos quadrados, procurando os valores de  $c$  e  $\omega_{RL}$  que minimizam a soma do erro ao quadrado entre as curvas numérica e analítica.

Observando o gráfico percebe-se a capacidade do modelo numérico em reproduzir o comportamento previsto pelo modelo analítico e também a eficiência do método de identificação dos parâmetros da equação.

### 3.3.2 Acoplador tridimensional

Neste caso se estuda de modo mais acurado o mesmo acoplador, utilizando um modelo completo em três dimensões como demonstra a figura 8. Os resultados do modelo numérico são comparados aos resultados experimentais obtidos da bibliografia.

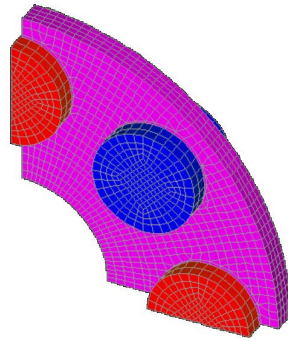


Figura 8: Modelo tridimensional do acoplador eletrodinâmico

Para dar seqüência a este estudo é imprescindível que as equações introduzidas no programa sejam capazes de considerar o acoplamento do movimento multidirecional do condutor. Como demonstrado na definição de um condutor em movimento, o cálculo do potencial vetorial é feito de modo desacoplado em cada direção do espaço como conseqüência do *Coulomb gauge*. Quem impõe o acoplamento na equação (13) é justamente a velocidade do condutor. Neste caso os resultados dependem de mais de uma componente do potencial vetorial magnético, portanto as equações a serem inseridas são mais longas mas substancialmente as mesmas.

A imposição da periodicidade das condições de contorno não é banal neste caso, pois prevê a rotação das quantidades do contorno e de saída e a introdução destas no contorno de ingresso. A necessidade desta rotação e o modo correto de fazê-la é demonstrado na figura 9.

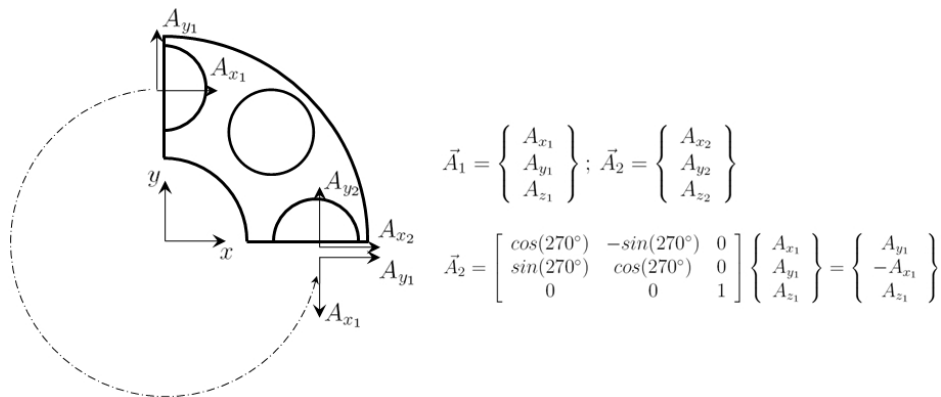


Figura 9: Demonstração da rotação das grandezas em saída e em ingresso nos contornos.

A visualização de resultados no modelo tridimensional é mais complicada que no caso anterior, porém ainda assim alguns dos resultados obtidos são muito relevantes, como por exemplo a distribuição de campo magnético e o andamento das correntes parasitas no condutor. Estes dois resultados podem ser vistos na figura 10.

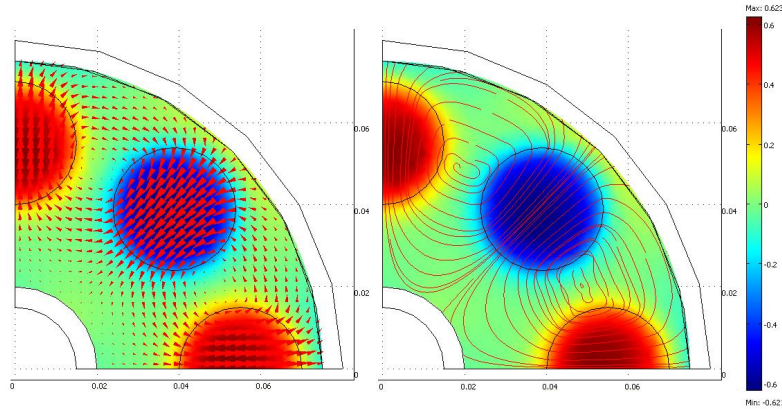


Figura 10: Distribuição do campo magnético e das correntes parasitas no condutor.

Esta figura mostra que o modelo construído é capaz de considerar o acoplamento bidirecional do movimento do condutor e as correntes são induzidas de modo correto, respeitando o sentido imposto pela regra da mão direita e também demonstram que os resultados obtidos no modelo bidimensional são adequados. Seguindo a metodologia descrita na modelagem em duas dimensões, é possível confrontar o gráfico do modelo numérico com os resultados experimentais. Utilizando o ajuste por mínimos quadrados podem ser identificados os coeficientes que melhor aproximam a curva analítica dos dados experimentais. A figura 11 mostra os resultados dos três modelos.

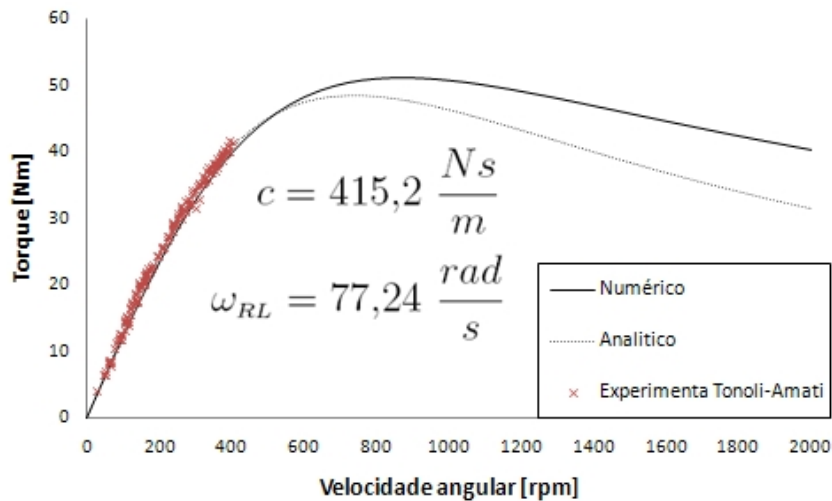


Figura 11: Confronto entre os modelos numérico, analítico e dados experimentais.

Esta figura mostra que os modelos numérico e analítico são bastante competentes na representação do comportamento real do sistema. De modo geral os resultados obtidos são bons,



porém um detalhe chama a atenção na figura 10. Neste caso nota-se que algumas linhas de corrente não se fecham dentro do condutor, apontando para a parte externa. Isto é um comportamento fisicamente incorreto pois vai de encontro a equação da continuidade (eq. 23) que impõe valor do divergente da densidade de corrente igual a zero. O não fechamento dos anéis de corrente representa que o divergente não é igual a zero dentro do condutor e que algo não está correto. Como este fenômeno está localizado relativamente distante da região mais importante, onde se geram as forças de Lorentz, o efeito parece ser reduzido. Nota-se, porém, que existe uma diferença importante entre as curvas analítica e numérica, diferentemente do caso 2D. Isto provavelmente se deve às simplificações introduzidas no modelo analítico e aos problemas encontrados na definição da condição de interface do condutor. Este último fenômeno, por sua vez, é consequência de uma imposição incompleta das condições de interface entre o domínio condutor e sua vizinhança devida à impossibilidade de se alterar esta condição no programa. As condições necessárias para resolver este tipo de problema são apresentadas no apêndice B.

## 4 Conclusões e considerações finais

O presente trabalho se propõe a encontrar ferramentas e desenvolver modelos numéricos para realizar simulações e construir curvas características de acopladores eletrodinâmicos apoiando-se também em modelos analíticos e dados experimentais. Para alcançar este objetivo, primeiramente foi estudado um modelo analítico de um acoplador eletrodinâmico, manipulando-o de modo a obter os resultados procurados. O passo seguinte foi a realização de um estudo sobre as formulações classicamente utilizadas para a resolução numérica de problemas de indução de correntes parasitas no intuito de ter controle sobre as simulações e sobre as modificações a introduzir nos modelos numéricos. Este estudo possibilitou a construção de modelos numéricos utilizando uma abordagem particular por meio da inserção das equações de Maxwell em um *solver* de equações diferenciais parciais. Uma série de modelos foi construída e diversas simulações foram realizadas, algumas das quais infrutíferas e outras de grande valia para o entendimento do problema de um modo geral.

As conclusões obtidas deste trabalho são as seguintes:

1. A modelagem numérica de fenômenos eletromagnéticos utilizando o método de introdução direta das equações de Maxwell no *solver PDE* se mostra eficiente para a modelagem dos problemas propostos, especialmente quando estes podem ser reduzidos a modelos em duas dimensões.
2. O modelo analítico utilizado nos estudos apresenta uma correspondência ótima tanto com os resultados obtidos através de modelos numéricos quanto com os dados experimentais, e demonstra a validade das simplificações e hipóteses assumidas.
3. A utilização do método de identificação dos coeficientes se mostra muito eficiente e dá resultados comparáveis àqueles apresentados na bibliografia.
4. O tipo de sistema estudado demonstra boas características de acoplamento podendo ser explorado como uma junção de segurança desde que o sistema seja ajustado para que o máximo torque transmissível seja igual ao valor limite do sistema.

---

O estudo realizado se mostrou aplicável como parte do projeto de acopladores eletrodinâmicos, porém é importante salientar que um sistema como este apresenta as características de um sistema rotacionalmente instável. Isto se deve ao fato que parte da energia a ser transmitida pelo acoplador será inevitavelmente dissipada no condutor, ou seja, o condutor será também um amortecedor. Sabe-se do estudo da dinâmica de rotores que a energia da rotação, quando dissipada em um componente que também está rodando, é instabilizante para o sistema após a primeira velocidade crítica [Genta, 1996]. Devido a este fato é muito importante realizar um estudo dinâmico completo procurando identificar as velocidades críticas dos rotores empregados e, quando necessário, a quantidade de amortecimento não rotacional a ser introduzida para garantir a estabilidade do funcionamento. Neste caso se aplicam justamente os coeficientes encontrados através da modelagem proposta no presente trabalho, de modo semelhante a [Amati et al., 2008].

Os resultados finais dos estudos podem ser considerados satisfatórios pois os principais objetivos foram alcançados, porém durante o andamento dos trabalhos alguns detalhes complementares não foram satisfeitos em sua plenitude. Um deles é que a utilização do programa apresenta dificuldades com relação às simulações de modelos tridimensionais, pois não permite a imposição completa das condições de interface entre domínios condutores de correntes parasitas e domínios sem correntes. Outro problema que se manifesta, ainda que não seja decisivo e nem tenha sido apresentado no presente trabalho, é que a utilização do programa no modo apresentado parece insuficiente para resolver problemas que não possuam simetria cíclica, como demonstrado em [Detoni, 2008]. De acordo com a literatura isto se deve à ausência de acoplamento eletromecânico em problemas com simetria [Karl et al., 1997].

Como explicitado nos capítulos iniciais, o estudo de acopladores é mais simples e introdutório ao estudo de amortecedores, rolamentos e outros sistemas eletrodinâmicos. Estes são apenas alguns dos casos que envolvem a integração entre estudos em mecânica, elétrica, eletrônica, etc.

---

## Referências

- [Amati et al., 2008] Amati, N., De Lepine, X. & Tonoli, A. (2008). ASME Journal of Vibration and Acoustics 130.
- [Biro & Preis, 1989] Biro, O. & Preis, K. (1989). IEEE Transactions on Magnetics 25.
- [Canova & Vusini, 2003] Canova, A. & Vusini, B. (2003). IEEE Transactions on Industry Applications 39.
- [Chow, 2006] Chow, T. L. (2006). Introduction to Electromagnetic Theory, a modern perspective. Jones and Bartlett, Toronto.
- [Detoni, 2008] Detoni, J. G. (2008). Tesi di laurea specialistica Politecnico di Torino.
- [Fasana & Marchesiello, 2006] Fasana, A. & Marchesiello, S. (2006). Meccanica delle vibrazioni. CLUT, Torino.
- [Genta, 1996] Genta, G. (1996). Vibrazioni delle strutture e delle macchine. Levrotto & Bella, Torino.
- [Karl et al., 1997] Karl, H., Fetzer, J., Kurz, S., Lehner, G. & Rucker, W. M. (1997). COM-PUMAG TEAM Workshop 6.
- [Lembke, 2003] Lembke, T. A. (2003). Induction Bearings A Homopolar Concept for High Speed Machines. PhD thesis, Royal Institute of Technology.
- [Tonoli, 2006] Tonoli, A. (2006). Elsevier Journal of Sound and Vibration 301, 576–591.
- [Tonoli & Amati, 2008] Tonoli, A. & Amati, N. (2008). ASME Journal of Vibration and Acoustics 130.

## A Modelagem numérica

O cálculo de campos tridimensionais de correntes parasitas vem sendo, há bastante tempo, objeto de pesquisa através da análise numérica de campos eletromagnéticos. Diversas formulações foram desenvolvidas e neste apêndice será apresentada a formulação estudada para este trabalho.

### A.1 Equações de Maxwell e Força de Lorentz

Fundamentando qualquer formulação para a solução de problemas eletromagnéticos, estão as equações de Maxwell. Estas, são um conjunto de equações que compreendem todas as quantidades elétricas e magnéticas, a interação entre elas e seu comportamento com respeito ao tempo, constituindo a base para o estudo deste tipo de problema [Chow, 2006].

Em sua forma completa as equações de Maxwell recebem uma correção de modo que a lei de Ampere respeite a equação da continuidade levando em consideração as correntes de deslocamento. Em situações como as de interesse para o presente estudo, nas quais os campos não variem com frequências muito elevadas ( $f < 100 \text{ kHz}$ ), as correntes de deslocamento podem ser negligenciadas e as equações de Maxwell se apresentam nas seguintes formas reduzidas [Chow, 2006]:

**Lei de Gauss** A lei de Gauss descreve a interação entre as cargas estáticas e o campo elétrico por elas gerado.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (19)$$

**Lei de Gauss para campos magnéticos** A lei de Gauss para campos magnéticos é aquela que garante a ausência de cargas magnéticas, ou monopólos magnéticos.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (20)$$

**Lei de Ampere** Esta lei explica a interação entre campos magnéticos e a corrente elétrica.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (21)$$

**Lei de Faraday da indução** A lei de Faraday descreve a relação entre campos magnéticos variáveis no tempo e os campos elétricos por estes induzidos.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (22)$$

**Equação da continuidade** Uma outra equação importante na modelagem de problemas de eletromagnetismo, ainda que não faça parte das equações de Maxwell, é a equação da continuidade. Esta equação garante o transporte conservativo de uma certa quantidade, neste caso da densidade de carga elétrica.

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (23)$$

**Força eletromotriz devida ao movimento** Em problemas que envolvem a geração de correntes parasitas e sua interação com o campo magnético pode ser interessante conhecer a força que atua sobre o condutor devida a este fenômeno. Para fazer este cálculo um dos métodos é através da força eletromotriz devida ao efeito do movimento.

Esta força eletromotriz é uma consequência da *força de Lorentz* que descreve a força gerada pelo movimento de uma carga elétrica em um campo magnético:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (24)$$

Quando um condutor é posto em movimento em um campo magnético, este campo empurra as cargas elétricas no condutor gerando corrente elétrica. A interação entre a corrente e o campo magnético gera uma força que é igual à integral das forças geradas pelo movimento de cada carga elétrica no campo magnético. Isto pode ser escrito como:

$$\vec{F} = \int_V \vec{J} \times \vec{B} dV \quad (25)$$

Onde:

$$\vec{J} = \rho\vec{v}$$

Esta abordagem é particularmente conveniente para o cálculo com o método dos elementos finitos, porque utiliza a integração em todo o domínio condutor. Isto reduz a sensibilidade do resultado com relação à qualidade do reticulado em relação ao método da integral de superfície do tensor de tensões de Maxwell. O método perde precisão para problemas em alta velocidade porque o efeito pele (*skin effect*) reduz o número de elementos nos quais passa uma corrente relativamente alta. Sabe-se também que a força de Lorentz não é capaz de considerar a interação entre campos magnéticos e materiais ferromagnéticos, nestes casos deve ser utilizada a integral de superfície do tensor de Maxwell [Lembke, 2003].

## B Formulação para problemas de eletromagnetismo

Em muitos campos dos estudos científicos a resolução de problemas de modo analítico não é simples e muitas vezes é possível somente através de diversas simplificações. Para casos bi e tridimensionais as soluções analíticas são menos comuns e muitas vezes servem somente em casos muito específicos. Normalmente, para resolver problemas de alta complexidade se utilizam métodos numéricos.

As equações de Maxwell, como citado precedentemente, constituem a base para estudos de eletromagnetismo, porém a forma apresentada anteriormente não é conveniente para a utilização em códigos de resolução numérica. Para resolver este problema muitos autores desenvolveram formulações que possibilitam a implementação deste conjunto de equações em sistemas de resolução baseados em métodos numéricos, em especial no método dos elementos finitos.

Nesta seção se apresenta uma das principais formulações para problemas de correntes parasitas. Esta formulação será estudada com o objetivo de encontrar um modo para desenvolver

as simulações numéricas de modo a possuir um controle maior sobre as ações do programa de resolução utilizado.

## B.1 Formulação A–V

A abreviação *A–V* se refere à escrita das equações dos campos na forma de equações diferenciais parciais em termos do potencial vetorial magnético  $\vec{A}$  e escalar elétrico  $V$ . Nesta formulação se subdividem os problemas em regiões condutoras de corrente e regiões não condutoras.

O objetivo desta seção é demonstrar a definição destas duas grandezas e como se formula o problema de modo mais completo para dar uma compreensão maior do problema.

### B.1.1 Potencial escalar elétrico

O campo elétrico possui propriedades matemáticas interessantes e que podem ser exploradas. Da diferenciação vetorial se sabe que, se o rotoacional de um campo vetorial é nulo, então este campo pode ser representado como o gradiente de uma função escalar. O campo elétrico, definido pela lei de Faraday (eq. 22), quando o campo magnético é nulo ou constante no tempo, satisfaz esta condição. Isto permite a seguinte representação:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

E portanto:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (26)$$

Por conveniência se insere o sinal negativo no lado direito da equação. A função escalar  $V$  é conhecida como potencial escalar elétrico.

### B.1.2 Potencial vetorial magnético

A lei de Gauss impõe a condição de divergente nulo para o campo magnético e conseqüentemente este pode ser escrito em função de um potencial vetorial como:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (27)$$

## B.2 Equações de campo

Partindo das duas definições apresentadas, é possível escrever as equações de campo em função das duas novas quantidades  $V$  e  $\vec{A}$ .

A natureza linear das equações de Maxwell permite que o campo elétrico seja escrito como a soma da contribuição das cargas estáticas com aquela devida às variações do campo magnético no tempo.

$$\vec{E} = \vec{E}_G + \vec{E}_F \quad (28)$$

Onde  $E_G$  é a contribuição das cargas estáticas que vem da equação (26):

$$\vec{E}_G = -\nabla V$$

A contribuição do campo magnético vem da lei de Faraday (22). Para escrevê-la em função de  $\vec{A}$  se substitui  $\vec{B}$  pela equação (27):

$$\nabla \times \vec{E}_F = -\frac{\partial(\nabla \times \vec{A})}{\partial t}$$

Da qual se obtém o campo elétrico em função do potencial vetorial:

$$\vec{E}_F = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (29)$$

E portanto:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla V\right) \quad (30)$$

Utilizando a relação constitutiva elétrica:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (31)$$

É possível calcular a densidade de corrente total somando as contribuições das leis de Ampere e Faraday:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}\right) - \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla V\right) = \vec{J} \quad (32)$$

A lei de Gauss (eq. 20) assume a seguinte forma:

$$\nabla \cdot \left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Distribuindo o operador divergente se obtém a sua forma final:

$$-\nabla^2 V - \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{A})}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (33)$$

Estas duas equações formam um sistema de equações indefinido. Isto representa que infinitos valores de  $\vec{A}$  e  $V$  resolvem o sistema, o que cria dificuldades para a solução. Para definir o sistema de modo que haja uma única solução para o sistema de equações se utiliza uma ferramenta matemática chamada “*gauge fixing*”.

### B.2.1 “Gauge fixing”

Matematicamente, um *gauge* é um certo grau de liberdade dentro de uma teoria, do qual os efeitos externos não são observáveis. Uma transformação de gauge é, portanto, uma transformação deste grau de liberdade e não modifica nenhuma propriedade física observável.

A definição dos potenciais magnéticos e elétricos não garante a unicidade destas quantidades, ou seja, existem infinitos valores de  $\vec{A}$  e  $V$  que resultam nos mesmos valores de  $\vec{B}$  e  $\vec{E}$ . Isto representa um grau de liberdade matemático não restrito, isto é, as equações (27) e (26) são satisfeitas para uma função  $\psi(x, y, z, t)$  qualquer, como se demonstra:

$$\begin{cases} \vec{A}_1 &= \vec{A} + \nabla\psi(x, y, z, t) \\ V_1 &= V - \frac{\partial\psi}{\partial t} \end{cases}$$

Agora calculando  $\vec{B}$ :

$$\begin{aligned} \vec{B}_1 &= \nabla \times \vec{A}_1 \\ &= \nabla \times (\vec{A} + \nabla\psi) \\ &= \nabla \times \vec{A} + \overbrace{\nabla \times \nabla\psi}^{=0} \\ &= \vec{B} \end{aligned}$$

Calculando  $\vec{E}$ :

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= -\nabla V_1 - \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} \\ &= -\nabla(V - \frac{\partial\psi}{\partial t}) - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A} + \nabla\psi) \\ &= -\nabla V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\psi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\psi) \\ &= \vec{E} \end{aligned}$$

Uma escolha particular dos potenciais é um *gauge*, a função  $\psi$  é chamada *gauge function*, e a existência de um número de *gauge functions*  $\psi(x, y, z, t)$  corresponde à liberdade de *gauge* desta teoria.

A escolha dos potenciais pode ser feita de vários modos diferentes. As variantes mais comuns são o *Coulomb gauge* e o *Lorentz gauge*:

### Coulomb gauge

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (34)$$

O *Coulomb gauge* apresenta a vantagem de permitir a escritura das leis de Gauss e Ampere de forma desacoplada em termos de  $\vec{A}$  e  $V$  obtendo a equação da difusão para o potencial vetorial e de Laplace para o potencial escalar.

### Lorentz gauge

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (35)$$

O *Lorentz gauge* encontra aplicação em casos nos quais o campo magnético varie a altas frequências como nos problemas de propagação de ondas eletromagnéticas.

Para problemas a baixa frequência os efeitos das correntes de deslocamento são negligenciáveis e ambos os *gauge* assumem a mesma forma que é aquela do *Coulomb gauge*.

As equações (32) e (33) são aquelas que definem o problema transiente e podem ser simplificadas assumindo as seguintes hipóteses:

1. Não se consideram cargas estáticas
2. O problema em questão é estacionário
3. Os materiais são isotrópicos
4. O divergente do potencial vetorial é igual a zero (*Coulomb gauge*)



Aplicando estas hipóteses se chega à seguinte forma:

$$-\nabla^2 V = 0 \quad (36)$$

$$-\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (37)$$

### B.2.2 Força de Lorentz

Partindo das definições anteriores, é possível calcular a força de Lorentz atuante sobre o condutor gerada pelo seu movimento em um campo magnético em termos do potencial vetorial.

Utilizando a relação constitutiva:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

E colocando juntas as equações (25), (27) e (29) se obtém que a força é:

$$\vec{F} = - \int_V \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \times (\nabla \times A) dV \quad (38)$$

Que pode ser escrita em termos da velocidade do condutor<sup>1</sup>:

$$F = - \int_V \sigma \left\{ \begin{array}{l} \vec{v} \cdot \nabla A_x \\ \vec{v} \cdot \nabla A_y \\ \vec{v} \cdot \nabla A_z \end{array} \right\} \times (\nabla \times A) dV \quad (39)$$

## B.3 Condições de contorno e interface

Para a definição completa do problema de eletromagnetismo ainda é necessário impor as condições de interface e contorno nas diversas regiões que constituem o problema. Um problema típico de correntes parasitas é demonstrado pela figura (12), e consiste em uma região com correntes parasitas com condutividade elétrica não nula  $\Omega_1$  e uma região vizinha sem correntes  $\Omega_2$ .

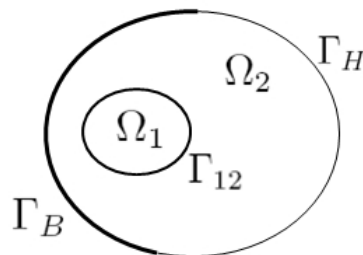


Figura 12: Regiões, interfaces e contornos de um problema típico de correntes parasitas

O contorno da região  $\Omega_2$  pode assumir duas condições de importância prática: em  $\Gamma_B$ , a componente normal da densidade de fluxo  $\vec{B}$  é imposta como igual a zero enquanto em  $\Gamma_H$  a

<sup>1</sup>Esta passagem é conseqüência da escritura da equação do campo elétrico em modo desacoplado nas componentes do potencial vetorial magnético. Ver parágrafo 3.1.2

componente tangencial da intensidade de campo magnético  $\vec{H}$  é prescrita como igual a zero. Na fronteira de  $\Omega_1$ , dada por  $\Gamma_{12}$ , se impõe a condição de interface entre um meio condutor e um meio não condutor. Aqui devem se manter as condições de continuidade da componente normal da intensidade de fluxo e da componente tangencial do campo magnético.

Em síntese, as condições de contorno e interface a serem respeitadas no problema são as seguintes [Biro & Preis, 1989]:

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot \vec{n} &= 0 \quad \text{em } \Gamma_B \\ \vec{H} \times \vec{n} &= 0 \quad \text{em } \Gamma_H \\ \left. \begin{aligned} \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 &= 0 \\ \vec{H}_1 \times \vec{n}_1 + \vec{H}_2 \times \vec{n}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{em } \Gamma_{12} \end{aligned}$$