

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA**

Alice Borges Maestri

Investigações geométricas na sala de aula: Curvas de Nível

Porto Alegre
Janeiro/2024

ALICE BORGES MAESTRI

Investigações geométricas na sala de aula: Curvas de Nível

Trabalho de Diplomação a ser apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Professor Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso

Porto Alegre

Janeiro/2024

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA**

Investigações geométricas na sala de aula: Curvas de Nível

Alice Borges Maestri

BANCA EXAMINADORA

Professor Marcus Vinícius de Azevedo Basso (UFRGS)

Doutor em Informática na Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Professora Marcia Rodrigues Notare (UFRGS)

Doutora em Informática na Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Professor Anuar Daian de Moraes (Colégio de Aplicação/ UFRGS)

Doutor em Informática na Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu orientador, Professor Marcus Vinícius de Azevedo Basso, pela paciência e incentivo ao longo desta elaboração deste trabalho. Obrigada pela dedicação, tempo e conhecimento compartilhado durante todo esse processo.

Agradeço aos membros da banca, Professora Marcia Rodrigues Notare e Professor Anuar Daian de Moraes, pelas contribuições, análises críticas e orientações que enriqueceram o este trabalho.

Agradeço aos meus pais Ana e Rogério, exemplo de professores dedicados, que ofereceram todo o apoio para que eu pudesse realizar outra graduação ao mudar de profissão. Além disso, deram diversas ideias de como poderia elaborar da melhor forma os materiais utilizados nesse trabalho.

Agradeço a minha irmã Carla por ter coragem de romper com a tradição de engenheiros na família e ir estudar história para se tornar professora. Também por me ajudar a pintar a maquete construída para enriquecer a experiência dos estudantes envolvidos nesta pesquisa.

Agradeço ao meu namorado Markus, por todo o amor, parceria e paciência ao longo desses dez anos juntos. Muito obrigada por ter dedicado um tempo para aprender a fazer a planificação dos cones que os estudantes utilizaram.

Agradeço a todos os professores do Colégio de Aplicação da UFRGS que compartilharam conhecimentos e experiências, enriquecendo minha formação acadêmica, e que mostraram como é possível tornar o processo de ensino e aprendizagem de matemática mais leve e significativo.

Agradeço a todos os meus amigos da matemática que, de alguma forma, tornaram possível a conclusão deste trabalho. Obrigada pelo carinho, apoio e companheirismo.

Por fim, agradeço à Universidade Federal do Rio Grande do Sul por me proporcionar um ensino de qualidade e gratuito novamente.

RESUMO

Buscando romper com práticas em que a geometria espacial fica restrita aos processos mecanizados com sólidos convencionais, este trabalho se propõe a desenvolver habilidades de visualização de sólidos nos estudantes, em especial de representações bidimensionais, envolvendo o estudo de curvas de nível. Para isso, elaborou-se uma sequência de atividades distribuídas em um total de três aulas presenciais com estudantes da 2º série Ensino Médio da Educação de Jovens e Adultos (EJA) no Colégio de Aplicação (CAP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). A primeira aula visou introduzir os conceitos de projeção ortogonal e vistas ortográficas, em um momento expositivo dialogado, para que os estudantes praticassem o desenho das vistas com o auxílio de um material manipulativo não digital. A segunda aula apresentou uma atividade a partir da montagem de cones planificados e do desenho bidimensional dos círculos correspondentes as intersecções entre as superfícies (planos paralelos a base e cone). Na última aula, além de finalizar o processo de investigação da aula anterior, foi realizada a introdução das curvas de nível com a exploração da maquete, do software *Caltopo* e de um mapa da região do Vale do Taquari, próximo a cidade de Muçum, buscando despertar questionamentos sobre as enchentes ocorridas nessa região no ano de 2023. Para o desenvolvimento da pesquisa e a estruturação dos demais elementos deste trabalho, optou-se pelo método qualitativo. A coleta de dados foi realizada por meio de notas de campo, registros fotográficos e de áudio dos encontros, e registro das produções dos participantes. As notas de campo foram realizadas após cada aula de forma descritiva e reflexiva. Apesar de não ter sido possível propiciou a discussão de outros assuntos relacionados à região, a análise dos dados mostrou que a sequência de atividades planejadas tornou os estudantes ativos no processo, possibilitou o desenvolvimento do reconhecimento de propriedades de formas tridimensionais apresentadas em um plano com duas dimensões e mobilizaram suas habilidades de visualização em diversos momentos.

Palavras-chave: Geometria espacial, representação bidimensional, curvas de nível, software *Caltopo*

ABSTRACT

Searching to break away from practices in which spatial geometry is restricted to mechanized processes with conventional solids, this work aims to develop students' solid visualization skills, especially two-dimensional representations involving the study of contour lines. With this purpose, a sequence of activities was developed, spread over a total of three presential classes with students from the Youth and Adult Education at the School of Application of the Federal University of Rio Grande do Sul (UFRGS). The first lesson aimed to introduce the concepts of orthogonal projection and orthographic views, in an expository dialogical moment, so that the students could practice drawing the views with the help of non-digital manipulative material. The second lesson presented an activity based on the assembly of planar cones and the two-dimensional drawing of the circles corresponding to the intersections between the surfaces (planes parallel to the base and cone). In the last lesson, in addition to finalizing the research process of the previous lesson, the introduction of contour lines was carried out by exploring the model, the *Caltopo* software and a map of the Taquari Valley region, near the city of Muçum, with the aim of raising questions about the floods that would occur in this region in 2023. For the development of the research and the structuring of the other elements of this work, we opted for the qualitative method. Data was collected using field notes, photographic and audio records of the meetings, and records of the participants' productions. The field notes were taken after each class in a descriptive and reflective manner. Although it was not possible to discuss other subjects related to the region, the data analysis showed that the sequence of planned activities made the students active in the process, enabled them to develop their recognition of the properties of three-dimensional shapes presented in a plane with two dimensions and mobilized their visualization skills at various times.

Keywords: Spatial geometry, two-dimensional representations, contour lines, *Caltopo* software

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Página inicial do Caltopo	27
Figura 2 - Página do Caltopo já configurada para uso	27
Figura 3 – Imagens dos objetos utilizadas na apresentação	29
Figura 4 – Fotografias utilizadas na apresentação contendo ilusão de ótica	29
Figura 5 – Desenho em perspectiva isométrica	30
Figura 6 - Sistema de projeção ortogonal	30
Figura 7 – Problematizando a projeção ortogonal	31
Figura 8 - Cubo elástico	31
Figura 9 - Cubos de madeira	32
Figura 10 - Objetos a serem desenhados	32
Figura 11 – Cones de papel	33
Figura 12 – Cone reto com 8 cm de diâmetro e 12 cm de altura	34
Figura 13 - Suporte de balão fixado	35
Figura 14 - Contorno da base do cone na folha	35
Figura 15 – Indicação da linha a ser cortada (à esquerda) e cone já cortado (à direita).....	36
Figura 16 - Contorno da base do cone na folha	36
Figura 17 - Mapa elaborado para a impressão	37
Figura 18 – Maquete da região escolhida	37
Figura 19 - Criando uma linha.....	39
Figura 20 - Ícone para criar o perfil de elevação	39
Figura 21 - Perfil de elevação da linha criada	40
Figura 22 - Vista lateral do objeto	44
Figura 23 - Objeto utilizado como exemplo	45
Figura 24 - Registro fotográfico do trabalho em grupos	46
Figura 25 – Primeiro (à esquerda), segundo (no meio) e terceiro (à direita) sólidos desenhado pelos estudantes	46
Figura 28 - Suporte do cone	48
Figura 29 - Produção da Dupla 1	49
Figura 30 - Produção da Dupla 2	49
Figura 31 - Produção da Dupla 3	49
Figura 32 - Produção da Dupla 4	49
Figura 33 - Cones oblíquos.....	50
Figura 34 - Função "Mudança de elevação"	53

Figura 35 - Vistas ortográficas do grupo formado pelos estudantes E2 e E8	58
Figura 36 - Vistas ortográficas da estudante E10	58
Figura 37 - Desenho de alguns estudantes da vista superior do segundo sólido	59

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Fatores que integram a visualização.....	19
Quadro 2 – Tipos de raciocínio na geometria tridimensional	21
Quadro 3 – Diâmetros da base e altura dos cones	34
Quadro 4 - Datas e horários da aplicação das práticas	42
Quadro 5 - Respostas das perguntas	47
Quadro 6 – Respostas para a pergunta “O que você consegue observar a partir da manipulação do software?”	54
Quadro 7 – Respostas para a pergunta “Qual a função do perfil de elevação?”	55
Quadro 8 – Respostas para a pergunta “Qual o morro mais alto da região? Qual é a sua altura?”	55
Quadro 9 – Respostas para a pergunta “Como podemos identificar se um lado do morro é mais íngreme do que o outro?”	55
Quadro 10 – Respostas para a pergunta “Escolha um dos morros da região e indique-o abaixo. Agora, qual seria o caminho mais suave para chegar ao topo?”	56
Quadro 11 - Análise do desempenho dos estudantes no desenho das vistas frontal (VF), lateral (VL) e superior (VS) dos sólidos representados.....	58

SUMÁRIO

1	Introdução.....	11
2	Objetivos.....	14
2.1	Objetivo geral.....	14
2.2	Objetivos específicos	14
3	Referencial Teórico	15
3.1	Investigações matemáticas na sala de aula.....	15
3.2	Visualização e tipos de raciocínio na geometria espacial	18
3.3	O uso das tecnologias digitais para o desenvolvimento de pensamento espacial	22
3.4	Trabalhos relacionados a pesquisa.....	23
4	Metodologia.....	26
4.1	Recurso utilizado.....	26
4.2	Planejamento das aulas	28
4.2.1	Aula 1.....	28
4.2.1.1	Momento 1: Como representar objetos tridimensionais no papel?	28
4.2.1.2	Momento 2 - Desenhando	32
4.2.2	Aula 2 – Construindo o conceito de curva de nível	33
4.2.2.1	Momento 1 – Montando os cones	33
4.2.2.2	Momento 2 – Curvas de nível dos cones.....	35
4.2.3	Aula 3– Vida real.....	37
4.2.3.1	Momento 1 - Revisando	38
4.2.3.2	Momento 2 - Explorando o software.....	38
4.2.3.3	Momento 3 – Utilizando as ferramentas	39
4.3	Coleta de dados	40
5	Resultados da pesquisa	42
5.1	Descrição das aulas	42
5.1.1	Aula 1.....	42
5.1.2	Aula 2.....	46
5.1.3	Aula 3.....	49
5.2	Análise dos dados.....	56
6	Considerações finais.....	63
	Apêndice A –Modelo de Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE)	69
	Apêndice B – Termo de Uso de Som e Imagem.....	71
	Apêndice C – Cones planejados.....	73
	Apêndice D – Folha de atividades da Aula 3	81
	Apêndice E – Desenhos da Aula 1 elaborados pelos estudantes	83

1 INTRODUÇÃO

Ao aplicar a matemática em outras áreas do conhecimento, buscando dar significado ao conteúdo, o abstrato pode tornar-se mais palpável aos estudantes. Nesta busca por significado, se encontra a essência do movimento que culminou na presente proposta de trabalho de conclusão de curso, o qual inicio apresentando os motivos pessoais que o originaram. Após cursar Engenharia Civil, sempre procuro contextualizar os conteúdos matemáticos em aula, utilizando o que aprendi tanto na faculdade quanto em minha vida profissional. Quando me formei, trabalhava apenas 20 horas semanais e tinha tempo livre, logo, resolvi procurar um trabalho voluntário, foi quando descobri o Cursinho Pré-Vestibular Popular Liberato, um projeto de extensão vinculado à Universidade Federal do Rio Grande do Sul através do Departamento de Educação e Desenvolvimento Social, onde comecei a dar aulas de matemática. Ver alunos oriundos de escolas públicas, que pouco tiveram contato com a matemática, me olharem após uma explicação e dizerem: “Era só isso, achei que fosse mais difícil!”, me estimulou a estudar mais a fundo a matemática sobretudo aprender a ensinar. Sendo assim, através do ingresso de diplomado, iniciei minha licenciatura em 2019/2.

Recentemente, um dos trabalhos que realizei foi a delimitação dos divisores de água de uma bacia hidrográfica para, por exemplo, a determinação da vazão de um rio. Uma bacia hidrográfica, de acordo com Collischonn & Dornelles (2015), é a área de captação natural dos fluxos de água originados a partir da chuva, que faz convergir os escoamentos para um único ponto de saída. Esta delimitação pode ser realizada manualmente, utilizando uma carta topográfica impressa em papel, ou em formato digital, através de programas destinados ao processamento de dados referenciados geograficamente. Uma carta topográfica apresenta diversas informações de uma região, em escala, como a altimetria, ou seja, o relevo, determinado através de curvas de nível e pontos cotados. As curvas de nível são linhas imaginárias que unem todos os pontos que apresentam a mesma altitude, isto é, que possuem a mesma cota em relação ao nível do mar. Conforme ANA (2022), “matematicamente, uma curva de nível pode ser definida como sendo a curva produzida pela intersecção de um plano horizontal com a superfície do terreno”.

Quando estava realizando esta delimitação, também estava cursando a disciplina de Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática I e tive a oportunidade de trabalhar com a turma do Ensino de Jovens Adultos (EJA), além de conhecer o Professor Anuar. Durante as

reuniões realizadas semanalmente com o Professor, compartilhei minhas experiências profissionais e os *softwares* que utilizava. O *software QGIS*¹, utilizado na delimitação e que permite a criação de mapas para impressão, chamou a atenção do Professor. Ao começar a desenvolver o projeto desta pesquisa, o Professor Anuar compartilhou que estava planejando uma disciplina eletiva intitulada “Caminhos do Morro” com diversas atividades envolvendo o estudo de alguns morros de Porto Alegre, inclusive com a construção de maquetes deles. Nessa disciplina, o auxiliiei na elaboração dos mapas contendo as curvas de nível dos morros e conversei com ele sobre utilizar essa proposta como base para o meu trabalho de conclusão de curso.

Buscando integrar os meus conhecimentos profissionais, as curvas de nível e os conteúdos da matemática, escolheu-se trabalhar com a geometria espacial. Geralmente, a geometria espacial é apresentada nas escolas como um amontoado de fórmulas para o cálculo da área superficial e volumes, o que pode causar uma aversão dos estudantes ao conteúdo. Contudo, ela faz parte do nosso cotidiano e limitá-la à mecanização e à repetição de exercícios impede que habilidades de visualização sejam trabalhadas em sala de aula. Cohen e Hegarty (2014) destacam que déficits no pensamento espacial acabam afetando o desempenho de estudantes universitários em biologia, anatomia, engenharia, geologia e física, visto que, a “capacidade de inferir a forma externa e características internas de seções de objetos e estruturas desempenha um papel importante [...]” (Cohen; Hegarty, 2014, p.63) nessas áreas. Como exemplo, é apresentado que os estudantes de anatomia devem aprender a visualizar, seccionar e girar seções transversais de estruturas físicas, como em ressonâncias magnéticas.

Além disso, as figuras tridimensionais representadas em duas dimensões podem se tornar empecilhos na interpretação de problemas, impactando o processo de aprendizagem dos estudantes. Conforme Pittalis e Christou (2010, p.1) há um consenso nas publicações sobre como as relações entre a visualização tridimensional e as habilidades matemáticas dos estudantes reforçam a importância de promover o desenvolvimento de habilidades espaciais dos alunos no ensino de geometria.

Diante deste cenário, o presente trabalho busca romper com práticas em que a geometria espacial fica restrita aos processos mecanizados com sólidos convencionais, através de uma sequência de atividades que desafiem os estudantes a orientarem-se espacialmente e promovam

¹ O QGIS é um Sistema de Informação Geográfica livre e de código aberto. Para mais informações, consultar o site: https://qgis.org/pt_BR/site/

uma melhor compreensão de um objeto tridimensional que está sendo representado em desenho bidimensional. Ainda, segundo Gravina e Basso (2012), as tecnologias influenciam nas nossas formas de pensar, de aprender e de produzir, logo, devem ser incorporadas nas rotinas de sala de aula. Assim, o uso de um recurso tecnológico, que pudesse representar o *software QGIS*, foi integrado à sequência de atividades.

Inicialmente, o recurso tecnológico escolhido para a realização da atividade era o *Google Earth*, no entanto, o software precisaria estar instalado no computador para o pleno funcionamento de todas as ferramentas. Dessa forma, busquei um recurso que pudesse ser acessado pelo navegador e encontrei o *software Caltopo*. Além de apresentar um modelo bidimensional do globo terrestre, construído a partir de mosaico de imagens de satélite obtidas de fontes diversas, o *Caltopo* possibilita criar mapas, traçar rotas, entre outras funcionalidades.

Logo, este trabalho procurou responder a seguinte pergunta: **“Como a utilização de materiais manipulativos digitais e não digitais, envolvendo o estudo de curvas de nível, pode contribuir para o desenvolvimento da visualização bidimensional de sólidos tridimensionais dos estudantes da Educação de Jovens Adultos?”**.

Este trabalho de conclusão de curso apresenta um referencial teórico, abordando o tema pesquisado, e a metodologia desenvolvida para o atendimento do objetivo proposto com a descrição das aulas planejadas e do software utilizado. Na análise dos dados estão descritos os resultados da aplicação da prática e considerações relacionando o observado com os conteúdos matemáticos e a revisão de literatura. Por fim, teço algumas reflexões sobre todo o processo de elaboração do presente trabalho.

2 OBJETIVOS

Levando em conta a pergunta de como a utilização de materiais manipulativos digitais e não digitais, envolvendo o estudo de curvas de nível, pode contribuir para o desenvolvimento da visualização bidimensional de sólidos tridimensionais dos estudantes da Educação de Jovens Adultos, foram traçados os seguintes objetivos.

2.1 Objetivo geral

O objetivo geral desse trabalho é analisar o potencial da utilização de materiais manipulativos digitais, através do software *Caltopo*, e não digitais no desenvolvimento da visualização habilidades espaciais ao representar um sólido através do conceito de curva de nível.

2.2 Objetivos específicos

- Elaborar e aplicar uma sequência de atividades que promova o desenvolvimento de habilidades para a visualização bidimensional de sólidos tridimensionais;
- Estudar o impacto da utilização de materiais manipulativos não digitais na visualização de sólidos;
- Investigar os potenciais do *software Caltopo*, não desenvolvido para fins educativos, como ferramenta para o fazer matemático.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo busca apresentar uma revisão de referenciais relevantes para a proposta metodológica de ensino a ser aplicada. Para isso, iniciou-se com o estudo das investigações matemáticas na sala de aula, visando uma melhor aprendizagem dos estudantes. Além disso, considerando que a proposta de prática pedagógica tem um enfoque na habilidade de visualização espacial dos estudantes com o auxílio das tecnologias digitais, cada um desses tópicos será tratado individualmente. Por último, trago alguns trabalhos correlatos a minha proposta.

3.1 Investigações matemáticas na sala de aula

De acordo com Ponte, Brocado e Oliveira (2016), a investigação matemática constitui uma poderosa forma de construir conhecimento, visto que, é possível formular conjecturas, testá-las e prová-las, além de envolver conceitos, procedimentos e representações matemáticas. Para os autores, o processo de investigação matemática pode ser visto como uma tarefa possível para os estudantes, se assemelhando muito com a metodologia da resolução de problemas. Contudo, em uma investigação não há como prever uma solução, ou seja,

Trata-se de situações mais abertas – a questão não está bem definida no início, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua definição. E uma vez que os pontos de partida podem não ser exatamente os mesmos, os pontos de chegada podem ser também diferentes. (Ponte; Brocado; Oliveira, 2016; pg 19)

Este trabalho de investigação favorece o envolvimento do estudante na sua aprendizagem, tornando-o ativo “quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo” (Ponte; Brocado; Oliveira, 2016; pg 19). Ainda, a atividade convida o estudante a “agir como um matemático” (Ponte; Brocado; Oliveira, 2016; pg 19), já que, deve ser responsável por formular questões, elaborar conjecturas, testes e provas, apresentar resultados e discuti-los com seus colegas e professores.

Buscando implementar uma atividade de investigação em sala de aula, Ponte, Brocado e Oliveira (2016) apresentam os principais aspectos para se levar em consideração no planejamento, dividindo-os em três fases: a introdução da tarefa, o desenvolvimento da investigação e a discussão dos resultados. Além disso, destacam que investigar não significa

que o estudante trabalhará de forma totalmente autônoma, cabe ao professor ajudá-lo a compreender o que significa esta ação e como ela deve ser feita.

Na fase de introdução, absolutamente crítica para o desenvolvimento do resto da investigação, o professor deve “garantir que todos os alunos entendem o sentido da tarefa proposta e aquilo que deles se espera no decurso da atividade” (Ponte; Brocado; Oliveira, 2016; pg 23), de forma que os estudantes sejam capazes de compreender o que significa investigar. Para isso, conforme Ponte, Brocado e Oliveira (2016), a tarefa pode ser fornecida aos estudantes de forma escrita e o professor deve realizar uma breve introdução oral, podendo realizar a leitura conjunta do enunciado. Nesta primeira fala do professor, a atitude investigativa deve ser estimulada, porém, sem condicionar de forma demasiada o que deve ser feito. Ademais, o professor deve promover um ambiente que o estudante “se sinta à vontade e lhe seja dado tempo para colocar questões, pensar, explorar as suas ideias e exprimi-las, tanto ao professor como aos seus colegas” (Ponte; Brocado; Oliveira, 2016; pg 24), em adição a informar o papel que os estudantes devem desempenhar e mostrar que está presente para apoiá-los em suas descobertas.

A segunda etapa constitui-se no desenvolvimento da investigação, em que, segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2016), espera-se que os estudantes utilizem os processos que caracterizam a atividade investigativa, realizando registros escritos dos seus resultados. Durante essa etapa, o professor deve procurar acompanhar e “procurar compreender como o trabalho dos alunos se vai processando e prestar o apoio que for sendo necessário” (Ponte; Brocado; Oliveira, 2016; pg 25). Os processos que caracterizam essa etapa são, conforme Ponte, Brocado e Oliveira (2016): a exploração e formulação de questões, a formulação, o teste e reformulação e a justificação de conjecturas, além da avaliação do trabalho.

Para Ponte, Brocado e Oliveira (2016), a exploração demanda mais tempo e é decisiva para que os estudantes iniciem a formulação de questões e conjecturas. Ao explorar, os estudantes vão se familiarizando com os dados e, conseqüentemente, sendo capazes de compreender melhor o sentido da tarefa. O trabalho em grupo, para Ponte, Brocado e Oliveira (2016), potencializa o surgimento de alternativas para a exploração da tarefa e, assim, os estudantes são levados a começar por gerar dados e a organizá-los.

A partir da exploração, as conjecturas podem surgir de diversas formas, como por observação direta dos dados, por manipulação dos dados ou por analogia com outras conjecturas. É nessa etapa que fica evidenciada a importância dos registros ao longo da investigação, visto que, “esse trabalho indutivo tende, por vezes, a ficar confinado ao pensamento do aluno, não existindo uma formulação explícita da conjectura [...]” (Ponte; Brocado; Oliveira, 2016; pg 27). Além

disso, é através do registro que os estudantes sentem a necessidade de estruturar as suas ideias, estando de comum acordo quanto aos resultados obtidos.

Dando seguimento, segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2016), os estudantes são levados a testar suas conjecturas, processo que, em geral, eles interiorizam com facilidade, já que, a primeira ação ao chegar a certa conjectura é encontrar um caso em que ele não se verifica. Contudo, deve-se ter cuidado com a tendência dos estudantes de realizar a verificação apenas num número reduzido de casos. Dessa forma, sugere-se que o professor procure desconstruir essa tendência, estimulando-os a procurar contraexemplos e olhar em outras direções durante todo o processo de investigação.

Ponte, Brocado e Oliveira (2016) ainda destacam a importância da justificação ou prova das conjecturas para que o processo de investigação não saia empobrecido, pois, frequentemente, essa vertente tende a ser escanteada ou até esquecida. Deve-se mostrar que apenas testar as conjecturas não é suficiente para concluir o processo investigativo. Este momento se torna uma oportunidade para introduzir a ideia de prova matemática de forma gradual. Primeiramente, Ponte, Brocado e Oliveira (2016) sugerem a busca por uma justificação aceitável, baseado em um raciocínio razoável e nos conhecimentos que os estudantes já possuem. Ao passo que os estudantes evoluam nessa construção, aprendendo ferramentas mais sofisticadas, essa vertente vai se tornando mais fácil e os estudantes passam a compreender melhor a necessidade da justificativa.

De acordo com Ponte, Brocado e Oliveira (2016) a etapa final do processo de investigação, constitui-se da discussão da investigação, de partilha de conhecimentos, do confronto das estratégias, conjecturas e justificações realizadas anteriormente. Para os autores, cabe ao professor desempenhar o papel de moderador, estimulando os estudantes a questionarem-se. Assim,

A fase de discussão é, pois, fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. Podemos mesmo afirmar que, sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação. (Ponte; Brocado; Oliveira, 2016; pg 33)

Ainda, quando o professor incentiva que os estudantes intervenham na apresentação dos outros grupos, novos elementos podem surgir de forma a aprofundar a conjuntura que está sendo apresentada. Desse modo, o processo investigativo pode continuar a desenvolver-se de uma maneira espontânea. Por fim, para Ponte, Brocado e Oliveira (2016), a conclusão do processo

se dará quando os estudantes forem capazes de elaborar uma conjectura apoiada em um raciocínio lógico e não apenas em alguns casos particulares.

A partir da leitura, observa-se que o processo de investigação matemática é longo e favorecido pelo trabalho em grupo. Embora demande a autonomia dos estudantes, o professor é fundamental para auxiliar e dar significado ao processo. Além do mais, a investigação favorece o desenvolvimento do raciocínio matemático através da construção de concepções importantes. Tendo em vista os argumentos levantados, a investigação matemática em sala de aula será uma das metodologias adotadas para o desenvolvimento dessa pesquisa. Apesar da prova matemática ser um dos passos do processo de investigação, este não é um dos objetivos deste trabalho.

3.2 Visualização e tipos de raciocínio na geometria espacial

Ao se tratar da visualização na geometria espacial, Gutiérrez (1996a) afirma que não há um consenso sobre qual terminologia utilizar na área, já que, diversos termos são utilizados como referência nos trabalhos. Enquanto alguns autores utilizam pensamento espacial e visualização como sinônimo, imagem visual pode apresentar diferentes significados para o mesmo termo, sendo isso “apenas um reflexo da diversidade de áreas em que a visualização é considerada relevante e da variedade de especialistas que se interessam por ela (Gutiérrez, 1996a, p.2)”. Ainda, Pittalis e Christou (2010, p.193) afirmam o consenso da importância dos processos de visualização no pensamento geométrico.

Assim, apresentarei duas formas de discutir-se o pensamento geométrico dos estudantes brevemente. Primeiramente, focando a visualização no domínio da educação matemática em Gutiérrez (1996a), com contribuições de Pittalis e Christou (2010) e Cohen e Hegarty (2014). E em seguida, a estrutura das habilidades espaciais dos alunos com base em processos cognitivos derivados da literatura de pesquisa em psicologia, resumidos em Pittalis e Christou (2010).

De maneira geral, para Gutiérrez (1996a), a visualização é o contexto em que as imagens mentais e as representações externas (ou seja, não mentais) precisam interagir para obter uma melhor compreensão e resolver problemas. Por exemplo, no contexto de sala de aula, o estudante deve ser capaz de olhar para o livro didático, uma representação bidimensional, e diferenciar um sólido de uma figura plana. Com frequência, os estudantes não conseguem assimilar a representação plana de um objeto tridimensional, que exige a consciência de

convenções estabelecidas que não são triviais e nem ensinadas na escola, acarretando a má interpretação de um problema e/ou na dificuldade de identificação do sólido (Pittalis e Christou, 2010).

De acordo com Gutiérrez (1996a, p.7), a visualização pode ser definida como uma “atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, mentais ou físicos, realizada para resolver problemas ou comprovar propriedades”. Para o autor, são quatro fatores principais que integram a visualização: a imagem mental (elemento básico), a representação externa, os processos de visualização e as habilidades envolvidas. Esses fatores estão resumidos no Quadro 1.

Quadro 1 - Fatores que integram a visualização

Imagem mental	Qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito ou propriedade matemática por meio de elementos visuais ou espaciais
Representação externa	Qualquer tipo de representação verbal ou gráfica de conceitos ou propriedades, incluindo figuras, desenhos, diagramas que ajudam a criar ou transformar imagens mentais e a fazer o raciocínio visual
Processo de visualização	<p>Dividido em dois processos, conforme Bishop (1983, p. 177).</p> <p>O processamento visual (VP) responsável por criar imagens mentais, através da tradução de relações abstratas e dados não figurativos em termos visuais, da manipulação e extrapolação de imagens visuais e da transformação de uma imagem visual em outra.</p> <p>A interpretação de informações figurativas (IFI) que gera informações, utilizando o conhecimento das conversões visuais e do "vocabulário" espacial usados em trabalhos geométricos, gráficos, quadros e diagramas de todos os tipos. Além da leitura e interpretação de imagens visuais, mentais ou físicas, para obter delas qualquer informação relevante que possa ajudar a resolver um problema.</p>
Habilidades de visualização	<p>Segregação figura-fundo: a capacidade de identificar uma figura específica isolando-a de um fundo complexo.</p> <p>Constância subjetiva: a capacidade de reconhecer que algumas propriedades de um objeto (real ou em uma imagem mental) são independentes de tamanho, cor, textura ou posição, e de não se confundir quando um objeto ou figura é percebido em uma orientação diferente.</p> <p>Identificação visual: É a capacidade de reconhecer uma figura isolada de seu contexto. É usada, por exemplo, quando a figura é composta de várias partes, como em mosaicos, ou quando há várias figuras sobrepostas.</p> <p>Rotação mental: a capacidade de produzir imagens mentais dinâmicas e de visualizar uma configuração em movimento.</p> <p>Percepção de posições espaciais: a capacidade de relacionar a posição de um objeto, uma figura ou uma imagem mental a si mesmo (o observador) ou a outro objeto, que atua como ponto de referência.</p> <p>Percepção de relações espaciais: a capacidade de relacionar vários objetos, figuras e/ou imagens mentais situados no espaço.</p> <p>Discriminação visual: capacidade de comparar vários objetos, figuras e/ou imagens mentais para identificar semelhanças e diferenças entre eles.</p> <p>Memória visual: capacidade de lembrar as características visuais e posicionais de um conjunto de objetos que estavam à vista em um determinado momento, mas que não estão mais visíveis ou foram reposicionados.</p>

(Fonte: Adaptado de Gutierrez, 1996a, p.5-8 e de Gutierrez, 1992, p.46-47)

A literatura disponível apresenta diversas formas de desenvolvermos as habilidades de visualização dos estudantes. De acordo com Pittalis e Christou (2010, p.193), a representação dos sólidos através de malhas de duas dimensões está diretamente relacionada com a capacidade dos estudantes de combinar e analisar imagens visuais. Assim, o estudante deve ser capaz de coordenar a representação mental do objeto como um todo e a decomposição das suas partes. Além disso, o estudante precisa ter a habilidade de realizar conversões em ambas as representações através de um “ato mental” adequado que articula as diferentes perspectivas do objeto.

De acordo com Cohen e Hegarty (2014, p.64), os estudantes podem visualizar a seção transversal de um sólido cortado por um plano de corte formando e manipulando imagens mentais e/ou usando estratégias analíticas, como a comparação das características de dois objetos. Ainda, representar a seção transversal é um processo com várias etapas de codificação das características espaciais do sólido, imaginação do corte e da figura geométrica formada, além da mudança de orientação espacial de observação dela. Dessa forma, o processo de visualização permite que o estudante realize tarefas mais complexas de visualização espacial, ao transformar mentalmente de forma dinâmica os sólidos.

Ao se tratar da compreensão das propriedades de sólidos, Pittalis e Christou (2010) observaram que é necessário decompô-los em partes de forma a estabelecer relações comparativas entre elas ou diferentes partes estruturais. O estudante deve entender que cada “forma tridimensional tem um número de propriedades geométricas que não variam e variantes baseadas nas propriedades das partes componentes isoladas e nas suas próprias propriedades enquanto estrutura unificada” (Pittalis; Christou, 2010, p.194). Ademais, ao desenvolver competências como entender e visualizar a estrutura interna de um sólido, os estudantes se tornam mais aptos a calcular o volume e a área superficial destes.

As habilidades espaciais, definidas em Pittalis e Christou (2010, p.195), são influenciadas por três fatores conforme o modelo de Lohman: visualização espacial, orientação espacial e relações espaciais. Dentre eles, o único que complementa as habilidades de visualização do Quadro 1 e será utilizado neste trabalho é a orientação espacial. O segundo fator apresentado no modelo, está definida como a “capacidade dos alunos de não se confundirem com as mudanças de orientação em que uma configuração espacial pode ser apresentada” (Pittalis; Christou, 2010, p.195), principalmente a noção de se um objeto está à direita ou à esquerda, mais alto ou mais baixo, mais perto ou mais longe do que outro. Conforme os autores, os testes

voltados para medir o grau de orientação espacial de um estudante demanda que ele imagine qual forma é possível visualizar de uma perspectiva diferente.

Ainda, Pittalis e Christou (2010), analisando pensamento geométrico dos estudantes, estabelecem quatro tipos de raciocínio espacial, resumidos no Quadro 2. Para Pittalis e Christou (2010, p.192) a palavra "Raciocínio" refere-se a um conjunto de processos e capacidades que atuam como uma ferramenta na resolução de problemas e permite aos estudantes irem além da informação fornecida. Destaca-se a correlação entre a idade e os tipos de raciocínio na geometria tridimensional, já que, a idade, que no estudo dos autores coincidiu com os anos de instrução escolar sistemática, teve um efeito direto significativo sobre os quatro tipos de raciocínio em geometria 3D.

Quadro 2 – Tipos de raciocínio na geometria tridimensional

Tipo de raciocínio	Habilidades dos estudantes
Representação de objetos 3D	Manipulação das várias formas de representação de objetos 3D e reconhecimento e construção de malhas.
Estruturação espacial	Construção de conjuntos de cubos tridimensionais, manipulação de conjuntos de objetos em 3D e enumeração dos cubos que cabem numa forma.
Medição	Cálculo de volumes e áreas de superfície sem a utilização de fórmulas
Conceituação de propriedades matemáticas	Reconhecimento das propriedades das formas tridimensionais, como a identificação de sólidos no ambiente ou em esboços 2D; compreender os elementos estruturais e as propriedades dos objetos 3D; comparar os elementos estruturais das formas tridimensionais (número de vértices, faces e arestas), e; de conceitualizar as relações entre as formas 3D e as suas propriedades.

(Fonte: Adaptado de Pittalis e Christou, 2010; p.196-197)

Sendo assim, considera-se a visualização e as habilidades espaciais essenciais para o desenvolvimento do pensamento geométrico. No âmbito deste trabalho, as habilidades de visualização, os tipos de raciocínio e a orientação espacial serão complementares e servirão de base para a análise dos dados. Ademais, indo ao encontro do apresentado por Cohen e Hegarty (2014) considero que a memória é importante para as ações de transformação de objetos mentalmente. Como representar a seção transversal demanda um processo de várias etapas, deve-se partir de objetos mais simples, que poderão ser manipulados fisicamente, para os mais complexos, representados de maneira virtual.

3.3 O uso das tecnologias digitais para o desenvolvimento de pensamento espacial

O uso das tecnologias digitais em sala de aula vem sendo difundido nas escolas, já que, “[...] qualifica o processo de aprendizagem e, portanto, traz benefícios aos alunos se comparado às situações sem o seu uso [...]” (Stormowski; 2018, p.59). Além disso, segundo Gutiérrez (1996a), o avanço das tecnologias ocorrido nas últimas décadas proporcionou a professores e pesquisadores novos elementos que podem modificar a forma de ensinar a geometria espacial. De acordo com Basso e Notare (2015), através da manipulação, do controle, da observação e do agir sobre o objeto digital, o estudante se torna ativo no processo de pensar em matemática. Assim, utilizando a interatividade e a dinamicidade proporcionada na exploração de objetos matemáticos nesses ambientes digitais, é possível desencadear o pensamento matemático.

Ao destacar a importância da tecnologia no desenvolvimento do pensamento matemático, Basso e Notare (2015) ressaltam a necessidade de uma escolha cuidadosa do recurso tecnológico a ser utilizado, dos problemas a serem trabalhados e como eles serão abordados. Quando os problemas se tornam mais avançados que, no caso da geometria espacial pode estar vinculada a objetos mais complexos, os computadores oferecem uma alternativa, complementando abordagens tradicionais e proporcionando novas oportunidades de aprendizado. Assim,

“[...] um bom uso dos recursos tecnológicos deve proporcionar situações que ajudem os alunos a pensar matematicamente, fornecendo atividades de matemática cujos objetivos vão além do ‘aprender matemática’, em direção ao ‘fazer matemática’ (Basso; Notare, 2015, p.4)”

Ainda, conforme Basso e Notare (2015), ao explorar figuras e suas propriedades, o estudante é levado ao reconhecimento de relações geométricas que formam um objeto. Ao integrar as ferramentas tecnológicas e o pensamento matemático, é essencial reconhecer que o conhecimento matemático surge das interações com essas ferramentas.

Observa-se que, quando os modelos físicos são impossíveis ou inviáveis em relação ao uso, os modelos virtuais podem substituí-los, permitindo a visualização e manipulação com maior dinamicidade. Contudo, Cohen e Hegarty (2014, p.65) destacam que se deve ter cuidado para não sobrecarregar o estudante com a visualização de um sólido complexo a partir de perspectivas ilimitadas.

Apesar das ferramentas tecnológicas terem possibilitado uma representação tridimensional, dinâmica e manipulável em uma tela, Gutiérrez (1996a) recorda que esta ainda é uma

representação plana de objetos espaciais e os estudantes poderão apresentar dificuldades em realizar algumas interpretações como nos livros didáticos (Gutierrez, 1996). Isto porque, segundo Gutierrez (1996b), sempre haverá perda de informações na conversão das representações e o estudante deve ser capaz de recuperar o máximo de informação perdida possível.

O ensino da geometria, usualmente, é associado à utilização de softwares que permitem aos estudantes desenhar e manipular diferentes representações de objetos tridimensionais de maneira dinâmica, porém, este trabalho se propõe a introduzir um recurso tecnológico diferente. O *Caltopo* é um software de Sistema de Informação Geográfica como o *Google Earth*, porém, com algumas ferramentas a mais. Isso significa que é possível coordenar simultaneamente as diferentes representações bidimensionais do globo terrestre em uma mesma tela, como as imagens de satélite, as curvas de nível e o perfil topográfico.

Bairral e Maia (2013) mostraram a possibilidade de utilizar o *Google Earth* em atividades de geometria, oportunizando um processo de ensino com um maior envolvimento do estudante no seu aprendizado. Ao integrar os saberes de outras disciplinas, o software também viabilizou que os estudantes desenvolvessem uma “atitude crítica frente a questões geográfico-sociais” (Bairral e Maia, 2013, p.388). Os pesquisadores destacam que o professor tem papel essencial ao propor atividades que envolvam os estudantes no processo de descoberta de novos conhecimentos.

Diante do exposto, acredita-se que a utilização do *software Caltopo*, que une diversas representações bidimensionais de uma região em um ambiente dinâmico e interativo, pode ser um recurso tecnológico interessante para os estudantes. Ao visualizar as curvas de nível e o perfil topográfica do terreno simultaneamente, o estudante poderá buscar preencher as lacunas de informação perdida ao longo do processo de conversão da representação tridimensional para a bidimensional. Ainda, é possível ampliar os conhecimentos dos estudantes em outras áreas do conhecimento e fazê-los refletir sobre a realidade.

3.4 Trabalhos relacionados a pesquisa

Para identificar os trabalhos relacionados a pesquisa, foi realizada uma pesquisa online nos arquivos do LUME (repositório digital da UFRGS) e do Google Scholar que abordassem a

utilização de curvas de nível e do *software Caltopo* em propostas de ensino na educação básica. Não houve limitação no intervalo de tempo das pesquisas realizadas.

Para isso, inicialmente, pesquisou-se no repositório de Teses e Dissertações do LUME as palavras-chave "curvas de nível" AND "ensino". Dos 11 resultados da pesquisa apenas 3 se relacionavam com o ensino de matemática. Desses, dois tratavam sobre tópicos básicos de Programação Linear, estando fora do escopo deste trabalho. Assim, chegou-se ao trabalho de Jara (2008).

Jara (2008) tinha como objetivo desenvolver atividades, que envolvessem conceitos da disciplina de matemática, a partir de diferentes problemáticas para investigação escolhidas pelos estudantes do nível do Ensino Fundamental na Educação de Jovens Adultos de uma escola municipal de Florianópolis/SC. Dentre as temáticas escolhidas, resalto a pesquisa sobre Corridas de Aventuras, que envolvia a utilização de curvas de nível, em que “foi proposto a construção de maquete representativa de uma região montanhosa” (Jara; 2008, pg 79). Sobre esta pesquisa, Jara (2008) destaca que os conceitos matemáticos, apesar de não terem sido aprofundados como ele esperava, foram abordados pelo grupo e compreendidos. Além disso, conforme Jara (2008), os estudantes apresentaram um bom desempenho nas tarefas e tiveram avanços na escrita e na forma de expressão.

Após, foi realizada uma busca no Google Scholar contendo as palavras-chave “matemática” AND “geometria” AND "ensino fundamental" OR "ensino médio" AND "curvas de nível". Contudo, observou-se que diversos resultados estavam relacionados ao ensino superior. Assim, retirou-se a palavra “superior”, através da pesquisa avançada, resultando em 80 registros. Então, foram selecionados manualmente os trabalhos que envolviam mais diretamente o ensino da matemática, o que resultou em 4 trabalhos apresentados a seguir.

Kaleff e Rosa (2015), em seu artigo publicado, apresentam uma experiência que busca introduzir o conceito de curva de nível para alunos com deficiência visual, através da manipulação e observação de materiais concretos e de desenhos em alto relevo. A experiência foi realizada no Colégio Pedro II com duas alunas cegas do segundo ano do Ensino Médio. Para Kaleff e Rosa (2015), a experiência possibilitou a identificação dos sólidos e de seus conjuntos de curvas de nível, além de superar as expectativas, já que os materiais manipulativos e a estratégia de apresentação das atividades foram bem aceitas pelas estudantes.

Cabral (2017), em sua dissertação, propõe-se a investigar as percepções dos estudantes em suas construções argumentativas de alguns conceitos de geometria. O estudo foi realizado com

alunos do ensino fundamental, médio e superior através de seis atividades de provas experimentais de acordo com o currículo de cada nível. Dentre os experimentos realizados destaco a utilização das Curvas de Nível com estudantes do 9º ano do ensino fundamental que teve como objetivo “[...] desenvolver experimentalmente o conceito geométrico de Projeção Ortogonal, aprimorar a capacidade de visualização e associação de figuras tridimensionais a uma representação plana e aplicar conhecimentos geométricos a situações de caráter prático [...] (Cabral; 2017, pg 111)”. Juntamente com a professora de Geografia, após uma introdução sobre alguns tipos de relevo, a apresentação de um mapa topográfico e como é feita a representação gráfica das curvas de nível, os estudantes construíram relevos com massinha de modelar em grupos. Em seguida, a pesquisadora pediu que os estudantes apresentassem uma justificativa para a seguinte situação: “Façam cortes paralelos no relevo construído começando de baixo para cima e provem que as projeções desses cortes sobre um plano determinam as curvas de nível desse relevo (Cabral; 2017, pg 116)”. Por fim, os estudantes socializaram os argumentos construídos. Segundo a autora, o experimento realizado revelou que, mesmo empregando uma linguagem matemática menos rigorosa, os estudantes conseguiram formular argumentos fundamentados nas explicações das professoras.

Martins (2019) buscou construir curvas de nível utilizando o software *GeoGebra*. No minicurso desenvolvido no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência, os licenciandos definiram as curvas de nível e exemplificaram através de uma função plotada em um gráfico com três dimensões, utilizando *GeoGebra*. Depois, solicitaram que os estudantes criassem as suas curvas de nível a partir de funções pré-estabelecidas, seguindo a metodologia apresentada na aula anterior.

O artigo de Liao e Carvalho (2020) apresenta os resultados de um estudo de caso feito com estudantes do 1º ano do Ensino Médio de uma escola estadual do Paraná. A atividade proposta envolvia a utilização do aplicativo de realidade aumentada *LandscapAR* que permite a visualização de imagens tridimensionais a partir do escaneamento das curvas de nível desenhadas em um papel. De acordo com os autores, a proposta possibilitou a apropriação de conceitos da geografia e da matemática, como as formas do relevo e conceito de área e volume. Ao pesquisar as palavras-chave “Caltopo” AND “educação” no Google Scholar, não foram encontrados resultados em português. Este resultado pode estar relacionado ao fato de ser um software recente e em língua inglesa. Dessa maneira, ao pesquisar trabalhos correlatos, foi possível observar que o estudo das curvas de nível com um enfoque matemático não é muito recorrente.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo serão descritos os procedimentos de coleta e de análise de dados para atingir o objetivo deste trabalho. Assim, buscou-se responder como a utilização de materiais manipulativos digitais e não digitais, envolvendo o estudo de curvas de nível, pode contribuir para o desenvolvimento da visualização bidimensional de sólidos tridimensionais. Para isso, foi proposta uma prática pedagógica envolvendo a utilização de materiais manipulativos e a exploração do software *Caltopo*, de uma maquete e de um mapa.

Para o desenvolvimento das atividades e a estruturação dos demais elementos deste trabalho, optou-se pelo método qualitativo. Conforme Bogdan e Biklen (1994), uma investigação qualitativa possui cinco características: os dados são provenientes do ambiente natural, sendo o investigador o principal responsável pela coleta deles; é descritiva, abordando o “mundo de forma minuciosa” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, pag. 49); dá mais ênfase ao processo do que aos resultados; tende a analisar os dados à medida que são recolhidos e agrupados, e; preocupa-se com o significado dado às experiências pelos participantes da pesquisa.

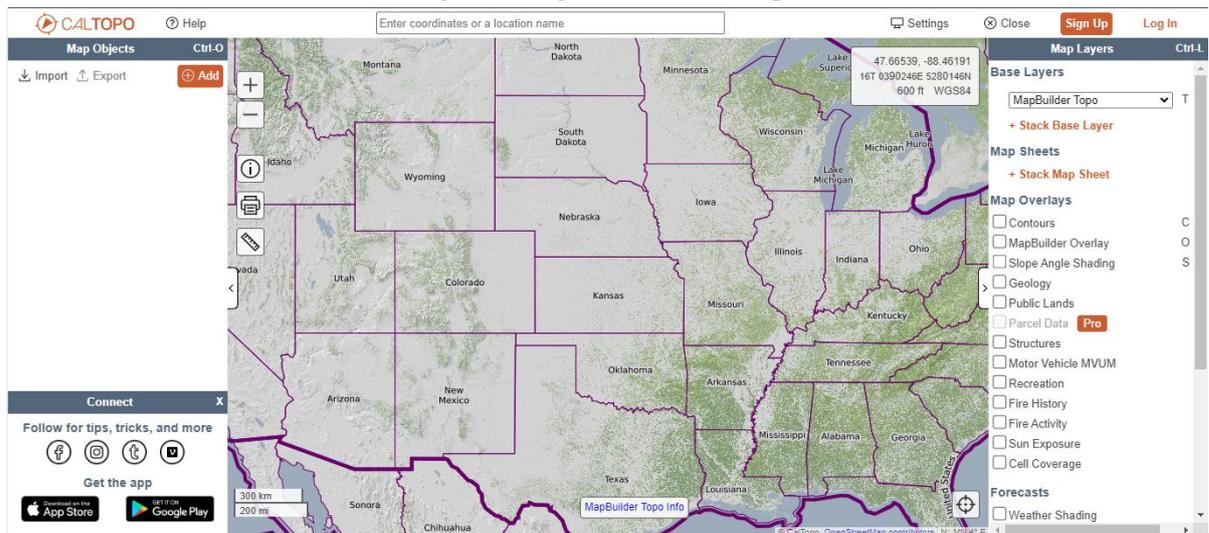
O local escolhido para este estudo foi o Colégio de Aplicação (CAP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), localizada no bairro Agronomia em Porto Alegre. A prática foi realizada com estudantes da 2º série Ensino Médio da Educação de Jovens e Adultos (EJA). O estudo foi realizado em três encontros de 1 hora e 30 minutos nas quartas-feiras a noite. Como recursos auxiliares para as aulas foram utilizados a projeção de uma apresentação de slides.

A seguir, estão apresentados o recurso tecnológico utilizado e a descrição da sequência de atividades planejadas.

4.1 Recurso utilizado

Como dito anteriormente, o recurso tecnológico escolhido foi o *software Caltopo* (Figura 1), desenvolvido por Matt Jacobs no ano de 2010 para auxiliar missões de resgate nos Estados Unidos e, com o tempo, foi melhorando para que fosse possível abranger outros locais. Além de apresentar um modelo bidimensional do globo terrestre, construído a partir de mosaico de imagens de satélite obtidas de fontes diversas, o *Caltopo* possibilita criar mapas, traçar rotas, entre outras funcionalidades. O software também apresenta um aplicativo para celular.

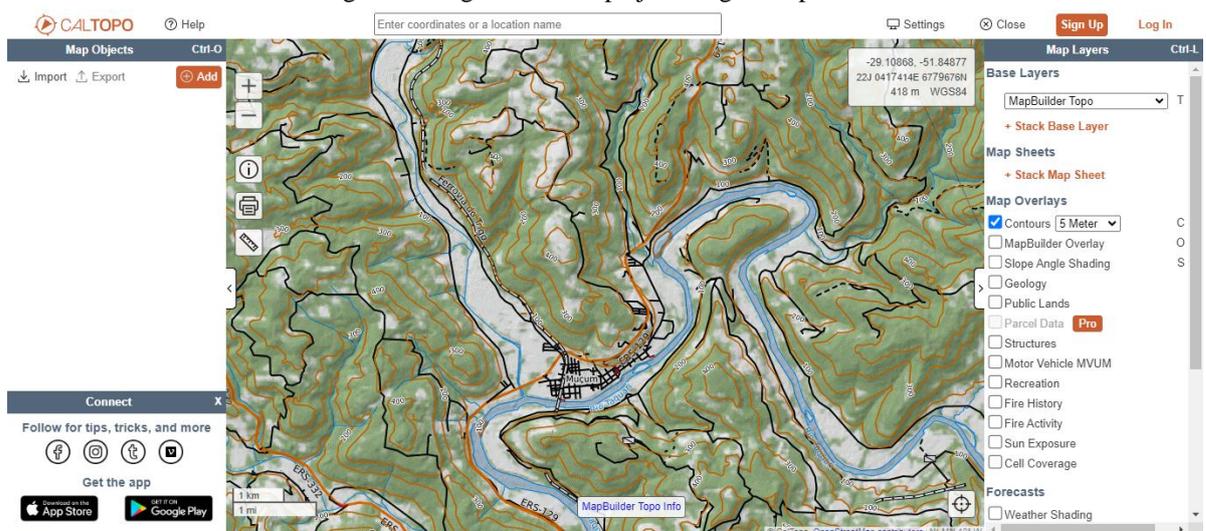
Figura 1 - Página inicial do Caltopo



(Fonte: JACOBS, 2023)

O *software Caltopo* apresenta as diversas ferramentas, entre elas, é possível traçar um trajeto e criar o Perfil de Elevação. A desvantagem desse software é que ele está em inglês, assim, foi necessário configurá-lo antes dos estudantes iniciarem a explorar, colocando a unidade de medida em metros. A vantagem é que ele já apresenta as curvas de nível, que também tiveram que ser ativadas. Dessa forma, os estudantes puderam observar tanto as imagens de satélite, quanto o perfil de elevação e as curvas de nível. A Figura 2 apresenta o *software* configurado para o uso dos estudantes.

Figura 2 - Página do Caltopo já configurada para uso



(Fonte: JACOBS, 2023)

4.2 Planejamento das aulas

Ao elaborar o planejamento, sabia-se previamente que as atividades deveriam estar distribuídas em três aulas e, no final, gostaria de integrar a exploração do *software Caltopo*, de uma maquete e de um mapa, todos contendo o conceito de curvas de nível, ou seja, curvas produzidas pela intersecção de um plano horizontal com a superfície do terreno. Ao analisarmos matematicamente esse conceito, veremos que ele é a representação em um plano inferior de várias seções transversais de um sólido complexo cortado em diferentes alturas por planos de corte. Para que os estudantes visualizem as curvas de nível é necessário um processo com várias etapas, como a imaginação do corte e da figura geométrica formada, além da mudança de orientação espacial de observação dela (Cohen e Hegarty, 2014). Assim, as duas primeiras aulas objetivaram desenvolver a orientação espacial e o processo de visualização dos estudantes em sólidos geométricos convencionalmente utilizados em sala de aula. Além disso, já que elas envolviam sólidos mais simples, foi possível utilizar materiais manipulativos não digitais para auxiliar na aprendizagem dos estudantes.

Logo, este item apresenta a descrição da sequência de atividades planejada para esta pesquisa, organizadas por aula e seus respectivos momentos. É importante destacar que, as aulas foram pensadas para se complementarem, não são dependentes umas das outras, já que, os estudantes do EJA não têm uma frequência em aula constante.

4.2.1 Aula 1

A primeira aula prevista buscou apresentar os conceitos de projeção ortogonal e vistas ortográficas para que os estudantes conseguissem representar objetos tridimensionais no plano bidimensional, além de explorar a orientação espacial em relação aos sólidos, e foi dividida em dois momentos. O primeiro momento foi expositivo dialogado, contando com um auxílio de uma apresentação projetada para todos os estudantes. Já o segundo momento, foi dedicado ao desenho das vistas ortogonais pelos estudantes.

4.2.1.1 Momento 1: Como representar objetos tridimensionais no papel?

Inicialmente, foram mostradas fotografias de objetos que transmitem a ideia de perspectiva, apresentadas na Figura 3. Os estudantes foram questionados sobre o que essas imagens

apresentavam em comum, visando concluir que, a partir de um único ponto de observação, é possível visualizar as três dimensões do objeto.

Figura 3 – Imagens dos objetos utilizadas na apresentação



(Fonte: Adaptado de Google Imagens)

Além disso, podemos forçar a perspectiva para criar uma ilusão de ótica. Então, foram projetadas fotos (Figura 4) tiradas com esse objetivo e os estudantes foram questionados se eles sabiam o que significava a palavra “perspectiva”. Em seguida, uma definição da palavra foi apresentada.

Figura 4 – Fotografias utilizadas na apresentação contendo ilusão de ótica



(Fonte: Garcia, 2023)

Após, a fotografia será substituída pelo desenho para introduzir a perspectiva isométrica que mantém as proporções do objeto a ser desenhado. Para isso, inicialmente, perguntei aos estudantes se havia uma forma de desenhar um objeto de forma a transmitirmos a mesma ideia

de uma fotografia, ou seja, apresentar as três dimensões em um plano. A Figura 5 mostra o exemplo que foi utilizado em sala de aula para ilustrar essa perspectiva.

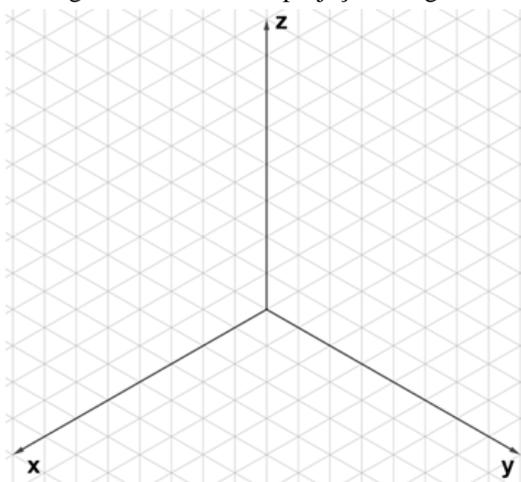
Figura 5 – Desenho em perspectiva isométrica



(Fonte: Andreatta, 2023)

Dando sequência, a definição de perspectiva isométrica foi comentada. Primeiramente, perguntei se os estudantes sabiam o que significava a palavra “Isométrica”. Dessa forma, foi possível explicar que essa perspectiva mantém as proporções de largura, altura e profundidade. Ainda, foi apresentado que o desenho nessa perspectiva é baseado em um sistema de três semirretas com o mesmo ponto de origem, formando entre si três ângulos de 120° , como o ilustrado na Figura 6.

Figura 6 - Sistema de projeção ortogonal



(Fonte: Próprio da autora)

Porém, a perspectiva não permite visualizarmos todos os detalhes desse objeto e, por isso, utilizamos as projeções ortogonais. Então, foram projetadas imagens que buscavam

problematizar essa forma de representação, como as apresentadas na Figura 7. Foram escolhidas imagens de casas e edifícios para que fosse possível associar as vistas ortográficas com uma planta baixa, que foi apresentada na sequência.

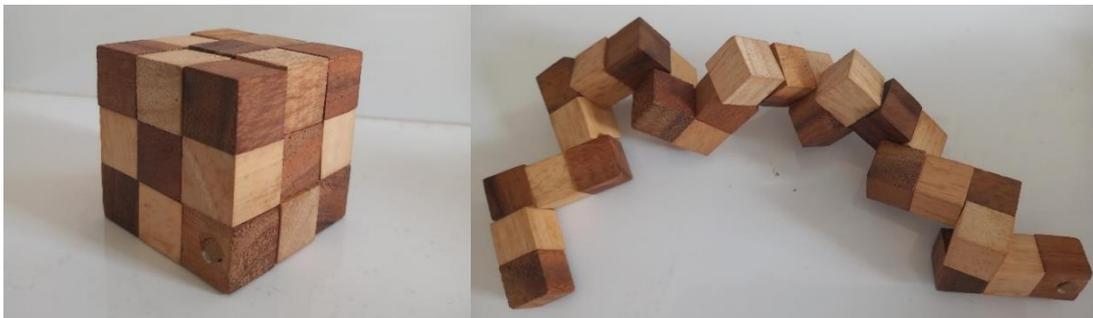
Figura 7 – Problematizando a projeção ortogonal



(Fonte: Próprio da autora)

Utilizando as projeções ortogonais, criamos vistas de diferentes pontos onde é possível ver apenas duas dimensões. Nessa hora, utilizei um cubo elástico, como o apresentado na Figura 8 e uma lanterna para exemplificar as vistas. A lanterna representou a posição do observador, a parede o plano a ser representado e a sombra à projeção do objeto. Também foi destacado a importância da perpendicularidade dos raios para que não haja distorção da sombra. Um estudante me auxiliou segurando a lanterna, enquanto eu ia manipulando o cubo.

Figura 8 - Cubo elástico



(Fonte: Próprio da autora)

4.2.1.2 Momento 2 - Desenhando

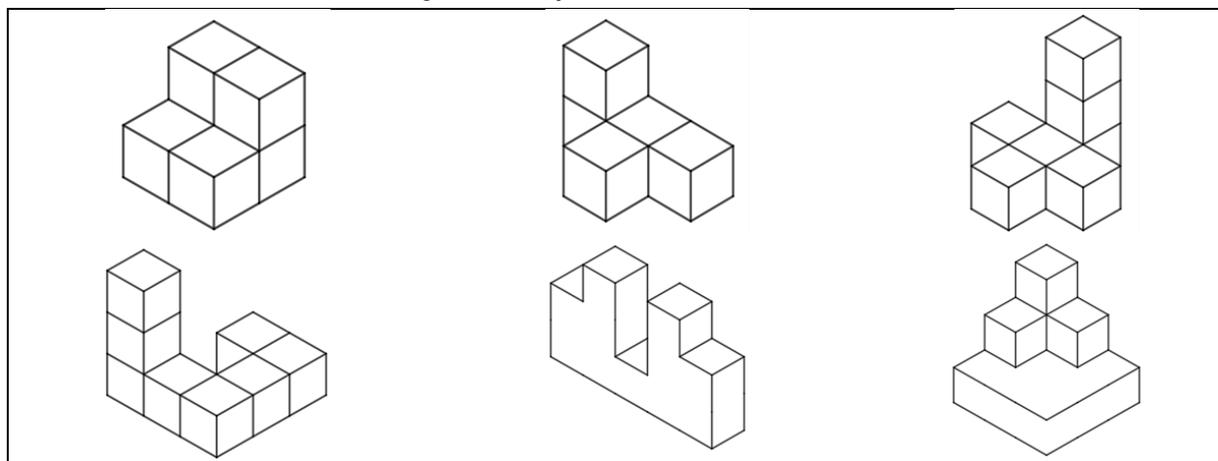
Neste momento, os estudantes se dividiram em duplas e/ou trios e receberam 10 cubos tridimensionais de madeira (Figura 9) e um papel quadriculado. Segundo Gutiérrez (1996b), estes sólidos oferecem uma forma fácil de construir e modificar uma grande variedade de formas e de diferentes graus de dificuldade. A perspectiva isométrica foi projetada no quadro, com o auxílio do projetor, e os estudantes foram convidados a montar os objetos utilizando os cubos. A perspectiva isométrica foi escolhida pois, de acordo com Gutiérrez (1996b), é mais fácil construir os sólidos a partir desta representação. Após, eles representaram as vistas frontal, lateral direita e superior no papel, que serviram de dados para a análise. Apenas essas três vistas foram escolhidas, pois, como afirma Gutiérrez (1996b), cada par de visualizações opostas é simétrico. Como o objetivo não era que eles soubessem nomear as vistas, estas foram indicadas nas imagens projetadas. A Figura 10 apresenta os objetos que serão disponibilizados aos estudantes.

Figura 9 - Cubos de madeira



(Fonte: Próprio da autora)

Figura 10 - Objetos a serem desenhados

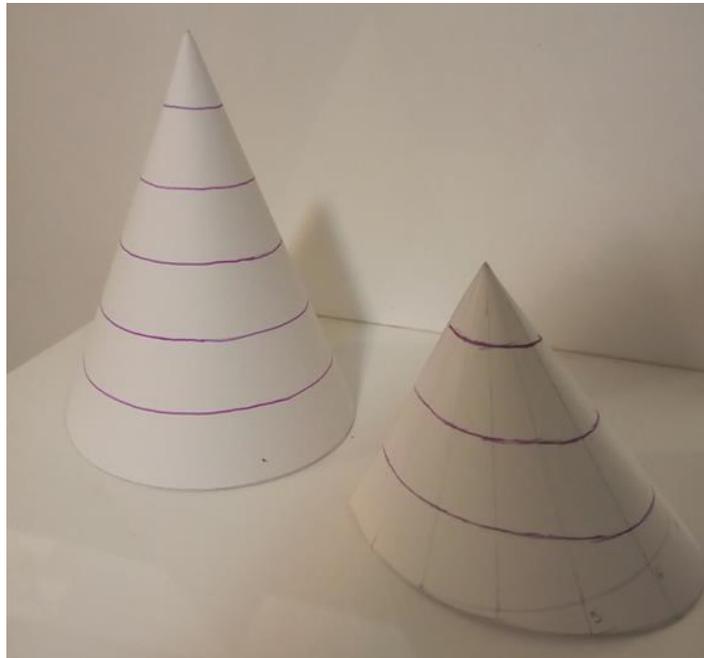


(Fonte: Próprio da autora)

4.2.2 Aula 2 – Construindo o conceito de curva de nível

Na última aula, os estudantes irão trabalhar com as curvas de nível de uma região que contém diversos morros. Buscando simplificar a representação de um morro, escolheu-se um sólido menos complexo, o cone, como os apresentados na Figura 11. Esta aula foi dividida em dois momentos. Primeiramente, a atividade consistiu em montar os cones já planificados e, após, desenhar em uma folha a representação dos círculos correspondentes às intersecções entre as superfícies (cone e planos paralelos à base). Além disso, os estudantes tiveram que responder a algumas perguntas.

Figura 11 – Cones de papel

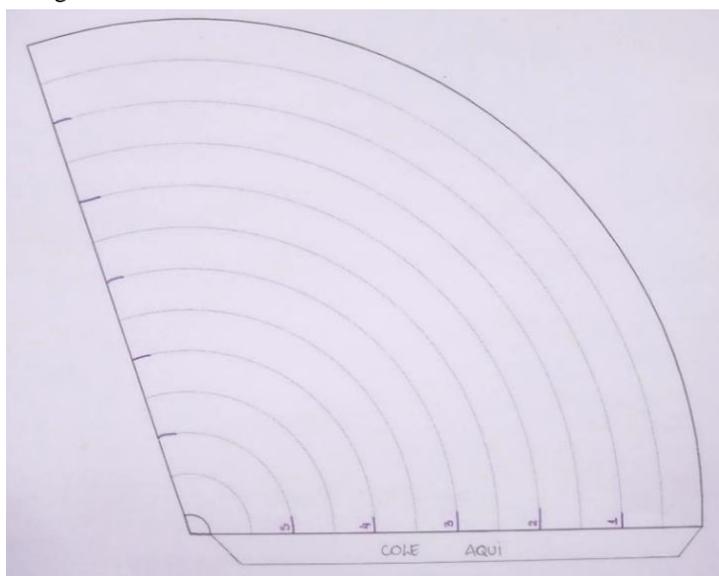


(Fonte: Próprio da autora)

4.2.2.1 Momento 1 – Montando os cones

Inicialmente, os estudantes se dividiram em duplas e cada uma recebeu duas planificações de cone iguais, como o ilustrado na Figura 12. Foram elaborados cinco cones retos e dois oblíquos planificados (Apêndice C). O Quadro 3 apresenta os diâmetros da base e a altura dos cones elaborados para a atividade.

Figura 12 – Cone reto com 8 cm de diâmetro e 12 cm de altura



(Fonte: Próprio da autora)

Quadro 3 – Diâmetros da base e altura dos cones

Retos		Obliquos	
Diâmetro da base (cm)	Altura (cm)	Diâmetro da base (cm)	Altura (cm)
8	12	8	12
10	8	14	8
10	12		
14	12		
14	8		

(Fonte: Próprio da autora)

Após distribuir as folhas A4 com as planificações, instruí os estudantes a recortarem e colarem onde estava indicando. Com os cones montados, os estudantes responderam as seguintes perguntas, que foram escritas no quadro:

1. Qual sólido você montou?
2. Que objetos reais você enxerga que apresentam essa forma?

Quando os estudantes terminaram de responder, realizei uma conversa com toda a turma sobre as perguntas. Em seguida, o sólido geométrico construído foi nomeado de cone e ele apresenta uma base circular e um vértice a uma determinada altura.

4.2.2.2 Momento 2 – Curvas de nível dos cones

Este momento iniciou-se com uma explicação de que um dos cones que eles haviam construído deveria permanecer inteiro e, as instruções que passaria a seguir, deveria ser realizada em apenas um deles. Após, distribuí o material de necessário, sendo ele: uma folha A4, tesoura, fita crepe e um suporte de balão. As instruções foram as apresentadas a seguir.

1º Passo: Cole o suporte de balão em uma folha, centralizado (Figura 13).

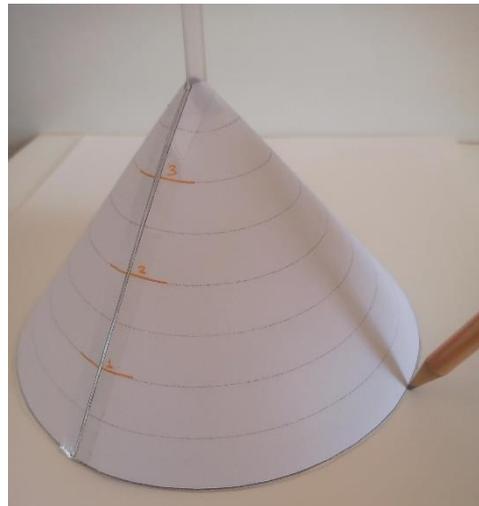
Figura 13 - Suporte de balão fixado



(Fonte: Própria da autora)

2º Passo: Encaixe o cone com a base para baixo e contorne a base do cone na folha (Figura 14).

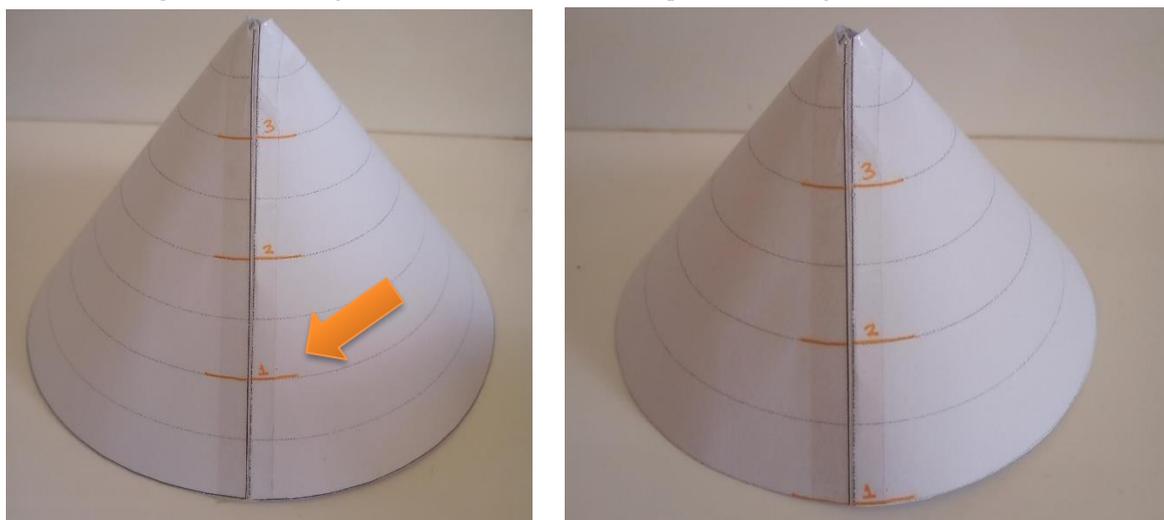
Figura 14 - Contorno da base do cone na folha



(Fonte: Própria da autora)

3º Passo: Retire o cone do suporte e recorte a primeira linha indicada (Figura 15).

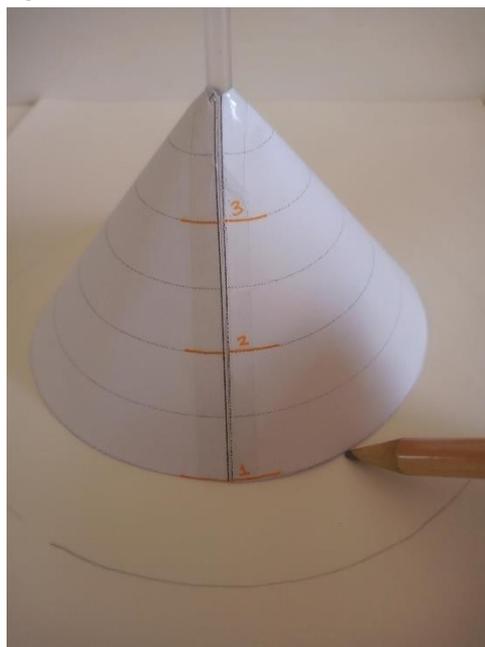
Figura 15 – Indicação da linha a ser cortada (à esquerda) e cone já cortado (à direita)



(Fonte: Própria da autora)

4º Passo: Coloque o cone de volta ao suporte e contorne novamente a base

Figura 16 - Contorno da base do cone na folha



(Fonte: Própria da autora)

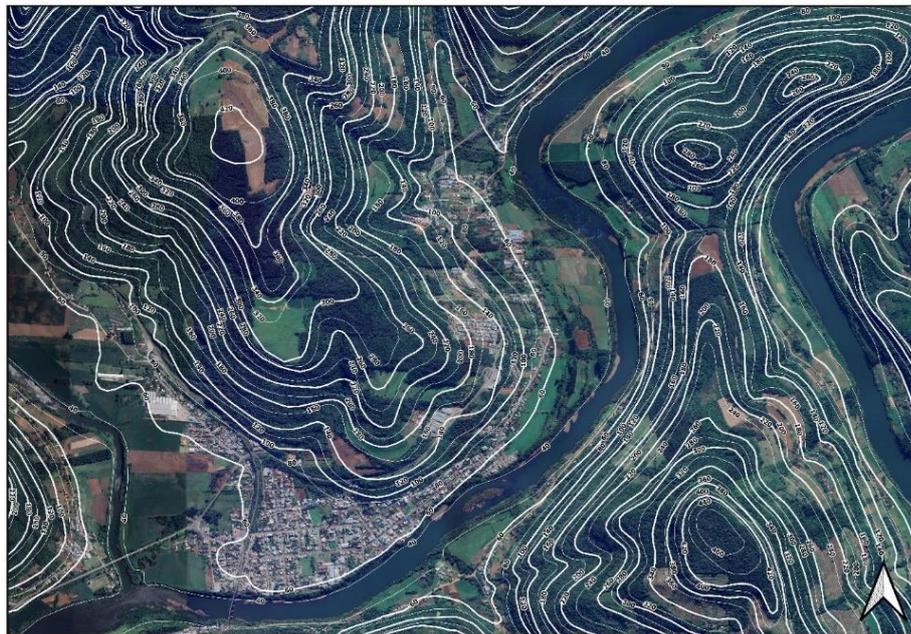
5º Passo: Repita os passos 3 e 4 até a última linha indicada.

Ao realizarem os passos instruídos, os estudantes desenharam os círculos correspondentes às intersecções entre os “planos” paralelos à base e o cone. Estes círculos concêntricos representam as curvas de nível do cone, uma forma de representar bidimensionalmente um sólido através da sua vista superior.

4.2.3 Aula 3– Vida real

No último encontro, os estudantes foram convidados a explorar o software *Caltopo*. Além disso, levei um mapa (Figura 17) e uma maquete (Figura 18) da região do Vale do Taquari, próximo a cidade de Muçum. A Figura 17 apresenta o mapa criado por mim, a partir do mapeamento disponibilizado pelo Laboratório de Geoprocessamento (Labgeo) do Centro de Ecologia da UFRGS (HASENACK; WEBER; LUCATELI; 2023) e de imagens de satélite do Google Earth.

Figura 17 - Mapa elaborado para a impressão



(Fonte: Própria da autora)

Figura 18 – Maquete da região escolhida



(Fonte: Própria da autora)

Esta região foi escolhida devido as enchentes ocorridas em setembro e novembro de 2023 e poderá despertar questionamentos sobre o porquê desses eventos. Seria possível a discussão sobre as mudanças climáticas que o planeta Terra vem vivenciando nos últimos anos que são em parte causadoras do aumento da intensidade das chuvas nos hemisférios², acarretando duas das três maiores cheias em cem anos do Rio Taquari³. Também seria possível comentar a respeito da importância do mapeamento das áreas de risco propensas a inundações e deslizamentos de terra, auxiliando na realização de medidas preventivas, como a elaboração de planos de contingência para orientar as ações de evacuação. Além disso, o mapeamento das áreas de inundação leva em consideração a interpretação visual de imagens de satélite e informações topográficas da região, ações que foram envolvidas nas atividades propostas para essa aula.

4.2.3.1 Momento 1 - Revisando

Inicialmente, com os cones e desenhos dos estudantes expostos em uma mesa, propus uma conversa para retomarmos o realizado na aula anterior. Abaixo, são apresentadas algumas perguntas que nortearam nosso diálogo.

1. Qual(is) figura(s) você enxerga no papel?
2. Como essa(s) figura(s) se relacionam com o sólido construído anteriormente?
3. Olhando apenas para o papel, conseguimos identificar qual o cone mais alto? E o mais íngreme?

Após, comentei que chamamos aquele tipo de representação de curva de nível, relacionando-a com o mapa impresso e a maquete, e os cones foram comparados aos morros.

4.2.3.2 Momento 2 - Explorando o software

Antes de partir para a atividade proposta, os estudantes exploraram livremente o *software* pesquisando lugares de seu interesse. Assim, procurou-se dar espaço para a criatividade e a curiosidade dos estudantes.

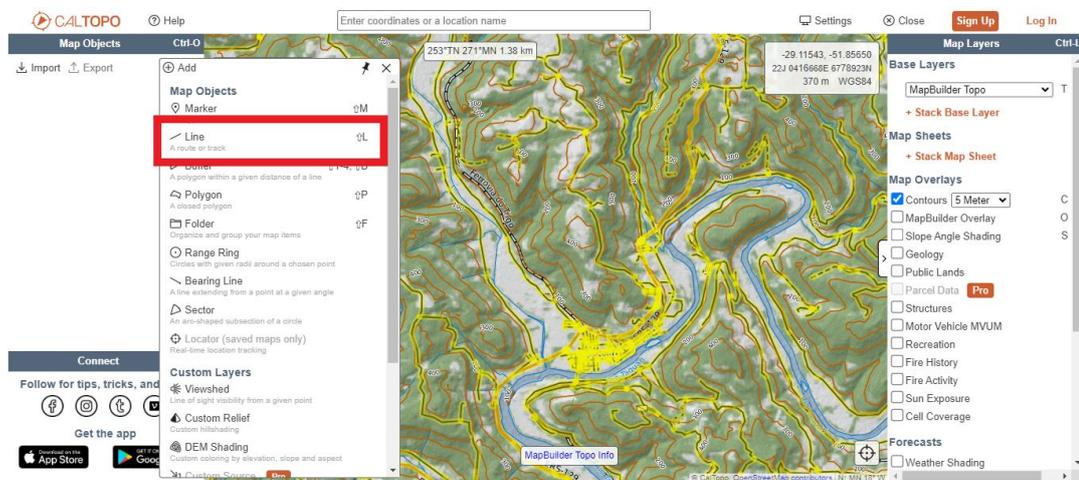
² <https://gauchazh.clicrbs.com.br/ambiente/noticia/2023/11/o-que-esta-causando-as-enchentes-records-no-rs-clp90b8qp003w012lan2jt7sx.html>

³ <https://metsul.com/rio-taquari-tem-maior-terceira-cheia-dos-ultimos-cem-anos-e-inunda-o-vale/>

4.2.3.3 Momento 3 – Utilizando as ferramentas

Em seguida, a atividade teve como objetivo explorar o “Perfil de Elevação” de diversos caminhos, com vistas a comparar o observado na realidade, com as curvas de nível e a maquete disponibilizada. Além disso, buscava-se desenvolver a noção de como identificar a inclinação e altura dos morros, a partir das características das curvas de nível. Para isso, instruí os estudantes a criarem uma linha sobre um dos morros que rodeiam a cidade de Muçum. A Figura 19 ilustra a utilização da ferramenta.

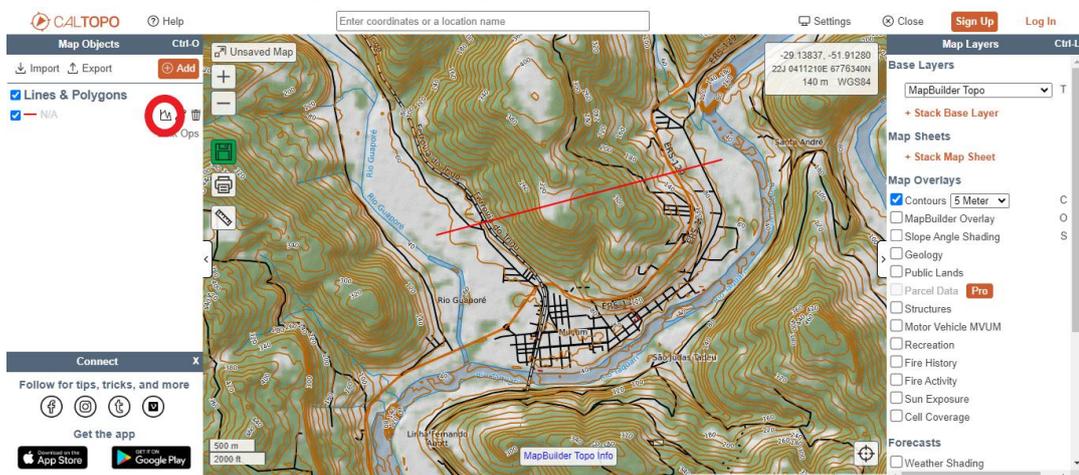
Figura 19 - Criando uma linha



(Fonte: Adaptado de Caltopo, 2023)

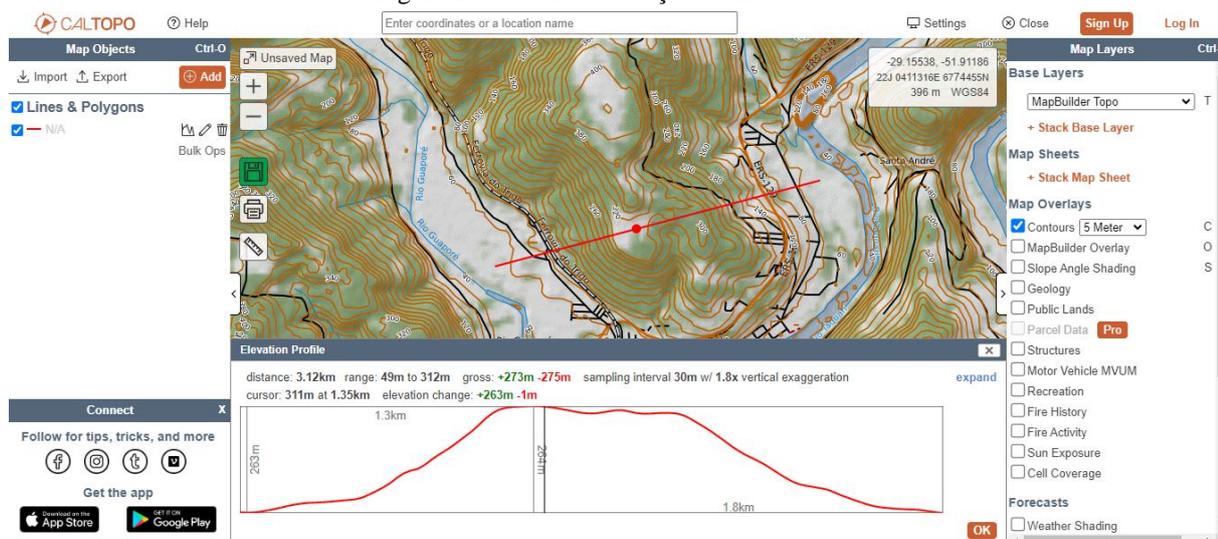
Na sequência, apertando o botão destacado em vermelho na Figura 20, o *software* apresentará o perfil longitudinal de elevação, através de um gráfico, além de outras informações, como é possível observar na Figura 21.

Figura 20 - Ícone para criar o perfil de elevação



(Fonte: Adaptado de Caltopo, 2023)

Figura 21 - Perfil de elevação da linha criada



(Fonte: Adaptado de Caltopo, 2023)

Ao realizarem estas tarefas, os estudantes responderam algumas perguntas que serviram de dados para a análise. As perguntas propostas foram entregues em uma folha que está apresentada no Apêndice D. A seguir, apresento as perguntas:

- 1) O que você consegue observar a partir da manipulação do software?
- 2) Qual a função do perfil de elevação?
- 3) Qual o morro mais alto da região? Qual é a sua altura?
- 4) Como podemos identificar se um lado do morro é mais íngreme do que o outro?
- 5) Escolha um dos morros da região e indique-o abaixo. Agora, qual seria o caminho mais suave para chegar ao topo?

4.3 Coleta de dados

De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2009), há diversas formas de coleta de dados, sendo que a escolha deve estar em conformidade com a pergunta diretriz e os objetivos da pesquisa. Como pretendo compreender se e de que forma a utilização de materiais manipulativos digitais e não digitais, envolvendo o estudo de curvas de nível, pode contribuir para o desenvolvimento de alguns conceitos matemáticos, foi necessário utilizar ferramentas que permitiam avaliar a evolução dos estudantes. Dessa forma, os dados foram obtidos por meio de notas de campo, registros fotográficos e de áudio dos encontros e registro das produções dos participantes. As notas de campo foram realizadas após cada aula e consistiram em dois tipos de materiais (BOGDAN; BIKLEN, 1994, pag. 152), sendo um descritivo e outro reflexivo. O descritivo se

propôs a captar objetivamente os detalhes do que ocorreu nas aulas, enquanto o reflexivo apresentou um relato das minhas impressões sobre os acontecimentos.

A respeito das questões éticas na pesquisa e considerando que os estudantes do EJA são maiores de 18 anos, aqueles que estivessem de acordo com a sua participação deveriam assinar um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE). Além disso, já que foram realizados registros fotográficos e de áudio, foi solicitado o assentimento dos estudantes ao Termo de autorização para utilização de imagem e som de voz para fins de pesquisa. Os modelos destes termos estão disponibilizados nos Apêndices A e B.

5 RESULTADOS DA PESQUISA

O presente capítulo apresenta os dados coletados ao longo da aplicação da sequência de atividade planejadas. A descrição das aulas contemplará as notas de campo, os registros fotográficos, trechos transcritos de áudio dos encontros e o registro das produções dos participantes. A descrição das aulas será analisada a luz da pergunta norteadora e do referencial teórico.

5.1 Descrição das aulas

Como já dito anteriormente, cada aula foi planejada para ocorrer de forma independente, porém, são complementares. O Quadro 4 apresenta as datas em que as atividades planejadas ocorreram. No total, treze estudantes participaram da pesquisa e entregaram os termos preenchidos, porém, apenas cinco participaram das três aulas planejadas. Ao longo da descrição, os estudantes serão identificados por números para preservar a identidade deles.

Quadro 4 - Datas e horários da aplicação das práticas

Aula	Data	Horário
1	25/10	19h15 às 20h45
2	01/11	20h45 às 22h15
3	22/11	20h45 às 22h15

(Fonte: Própria da autora)

5.1.1 Aula 1

Cheguei na sala de aula acompanhada da professora regente. Os estudantes ainda estavam retornando da janta, logo, fui organizando o material que iria utilizar. Assim que os estudantes chegaram, a professora regente me apresentou e explicou o que eu estava fazendo ali e me passou a palavra. Me apresentei, expliquei em linhas gerais o que trabalharíamos e expliquei e entreguei os termos para que eles assinassem. Ao redor das 19h35, iniciei a atividade planejada com 11 estudantes presentes. Nesse dia, estava bem ansiosa e nervosa.

Retomei explicando que este era o primeiro encontro de três e projetei as imagens no quadro. Ao perguntar para os estudantes o que eles poderiam observar a partir das fotos, resaltei que eles poderiam falar o que eles estivessem pensando, pois não havia respostas corretas. Um estudante perguntou “Como assim sora?” enquanto outros falaram o que estavam enxergando,

como uma cozinha planejada, ou um morro. Até que um estudante, que nomearei de E8, disse que todas estavam no fundo. Inicialmente, não entendi o que ele quis dizer, então pedi que ele explicasse melhor. Ele disse que nenhuma imagem estava de primeira, todas estavam no fundo da tela. Prossegui com a ideia de que todas as fotos eram de objetos reais, tridimensionais, e perguntei o que os estudantes entendiam a respeito dessa palavra. O estudante E8 disse que era uma coisa inteira, no sentido de que todo o objeto estava sendo representado na fotografia. Assim, segui falando que estávamos representando estes objetos reais em um plano com duas dimensões. Utilizando marcações nas imagens, mostrei como era possível observarmos essa ideia de profundidade (de fundo, como o estudante havia falado), de comprimento e de largura. Dando sequência, perguntei se os estudantes já haviam ouvido falar da frase “É tudo uma questão de perspectiva”, eles disseram que sim e logo parti para alguns comentários sobre as fotos. Falei sobre sabermos que uma bola é menor do que uma pessoa, porém, ela parece maior na fotografia. Após, expliquei com as minhas palavras a seguinte definição:

Se você se colocar atrás de uma janela envidraçada e, sem se mover do lugar, riscar no vidro o que está "vendo através da janela", terá feito uma perspectiva; a perspectiva é a representação gráfica que mostra os objetos como eles aparecem a nossa vista, com três dimensões.” (Barison, 2023)

Continuando o planejado, perguntei aos estudantes se havia uma forma de desenhar um objeto de forma a transmitirmos a mesma ideia de uma fotografia. Para exemplificar o que eu queria dizer desenhei uma casa simples no quadro. Enquanto pegava a caneta, alguns estudantes começaram a conversar e foi quando o estudante E1 falou que eles estavam fazendo algo semelhante àquilo na aula de artes, o ponto de fuga. Comentei que a arte e a matemática estavam relacionadas e o que veríamos era uma forma de representação dos objetos diferente da do ponto de fuga. Com a casa desenhada, perguntei se eles conseguiam reconhecer que era uma casa e se eu conseguia ter a mesma ideia que tínhamos nas fotografias. No mesmo momento, o estudante E7 disse que não e eu perguntei o porquê. O estudante E8 disse que era a “tridimensionalidade”, enquanto o E7 falou que seria a profundidade.

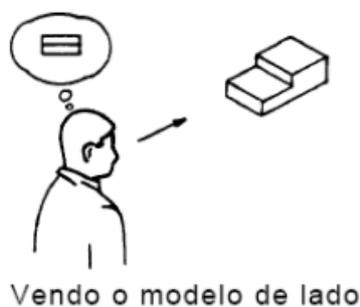
Na sequência, falei que existiam diversas perspectivas, mas utilizaríamos a perspectiva isométrica e perguntei se eles sabiam o que isso significava. Um estudante falou que seria uma vista de cima, enquanto o estudante E7 falou que seria uma maquete, influenciado pelas imagens que estavam projetadas. Depois, um estudante falou que seria 3D, outro falou sobre a planta de uma casa e o projeto, já outros comentaram sobre o jogo Minecraft. Pedi que eles tentassem pensar o que significava a palavra isométrica, porém, não houve manifestações possivelmente por ser uma definição difícil. Assim, segui com o que havia planejado. Expliquei

que a perspectiva poderia nos enganar, contudo, tinham casos em que o desenho deveria representar a realidade da melhor forma possível, como em um projeto, e que era necessário mantermos a proporcionalidade. O estudante E8 perguntou se essas proporções entravam nos objetos, referenciando os móveis que se encontravam dentro da casa ilustrada. Respondi que sim e, dando sequência, apresentei a definição matemática. Os estudantes me disseram que não sabiam o que era uma semirreta, o que eu expliquei. Aproveitei para falar como poderíamos definir um ângulo.

A problematização da perspectiva isométrica ocorreu como o esperado, perguntei se era possível enxergarmos todos os detalhes nas imagens apresentadas e os estudantes responderam que não. Como o estudante E7 já havia comentado sobre as plantas baixas, aproveitei e perguntei para ele novamente o que poderíamos fazer para representar os detalhes e ele respondeu que seria uma planta. Com algumas plantas baixas de apartamentos projetadas, questionei como estávamos olhando para o prédio e mais de um estudante respondeu que estávamos olhando de cima. O estudante E8 perguntou se o prédio seguia aquela planta em todos os andares ou dependia do projeto. Respondi que dependia do projeto, mas que em um prédio, tínhamos um padrão. Essa pergunta causou algumas conversas a respeito das plantas, como se era possível estimar a metragem de um apartamento a partir delas.

Na sequência, comecei a falar das vistas, que seriam formas diferentes de olharmos para um objeto. A partir de um objeto em perspectiva isométrica, mostrei as vistas frontal, lateral e superior, esta última relacionando com a planta. Ao mostrar a vista de lado (Figura 22), o estudante E11 disse: “parece tá empilhado”. Disse que não só parecia, como estava.

Figura 22 - Vista lateral do objeto



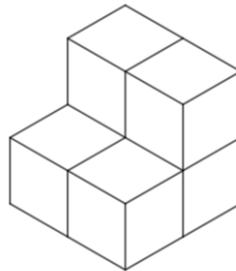
(Fonte: Borba, 2010)

Partindo para a exemplificação utilizando o cubo elástico e a lanterna para exemplificar as vistas, pedi um ajudante e, prontamente, o estudante E9 se manifestou. Apaguei as luzes e expliquei que iríamos brincar com as vistas já que elas seriam a sombra da projeção do objeto.

Segurei o cubo na frente e perguntei se os estudantes conseguiam ver a sombra, eles disseram que sim. Perguntei qual a figura que eles estavam vendo, o estudante E2 respondeu que era um cubo, disse que isso era o objeto que eu estava segurando e, prontamente, ele respondeu que seria um quadrado. Comecei a alterar o cubo para formar outra figura, mas esta parte acabou não dando muito certo, os estudantes não conseguiam enxergar a sombra de forma a representar outras vistas. Então, optei por dar continuidade a aula.

Em torno das 20 horas comecei o segundo momento planejado, expliquei a atividade e fiz um exemplo, apresentado na Figura 23, com a turma. Enquanto fazia o exemplo, pude perceber que apenas três estudantes acompanhavam e me ajudaram a montar os cubos e desenhar as vistas. Após, distribuí as folhas quadriculadas e os cubos para os estudantes e eles começaram a trabalhar.

Figura 23 - Objeto utilizado como exemplo



(Fonte: Própria da autora)

No restante da aula fiquei circulando e auxiliando os estudantes. A Figura 24 apresenta uma fotografia de como os estudantes se organizaram na sala. Em diversos momentos foi necessário reforçar que eles precisavam desenhar o que eles estavam enxergando, colocando o sólido construído na linha dos olhos, ou como seria a sombra projetada. Para isso, movimentava os sólidos montado com os cubos e perguntava quantos quadrados eles conseguiam identificar e de que forma eles estavam “empilhados”. Os cubinhos funcionaram muito bem, e auxiliaram os estudantes no desenho das vistas. A estudante E10 estava tendo bastante dificuldade e não conseguia desenhar as vistas, mesmo com o auxílio da sua dupla, logo, tentei uma abordagem diferente. Perguntei para ela qual o contorno que formava ao olharmos para o sólido por cima e sugeri que ela o fizesse. Quando observei que alguns estudantes estavam confundindo as vistas frontal e lateral, pedi para que eles seguissem as setas indicadas na projeção do quadro. Os estudantes pareciam estar empolgados e gostando da atividade, inclusive, o estudante E1 disse que era muito legal.

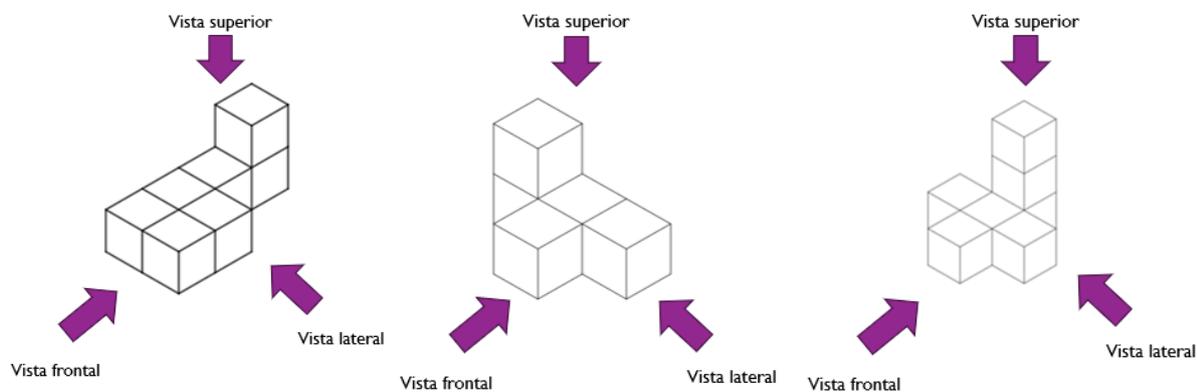
Figura 24 - Registro fotográfico do trabalho em grupos



(Fonte: Própria da autora)

Os estudantes conseguiram desenhar três sólidos no total. Dois trios desenharam apenas em uma folha, enquanto o restante dos estudantes, apesar de estarem trabalhando em grupo, desenharam individualmente. A Figura 25, a **Erro! Fonte de referência não encontrada.** e a **Erro! Fonte de referência não encontrada.** ilustram os três sólidos projetados no quadro, já o Apêndice E apresenta os desenhos dos estudantes das vistas frontal, lateral e superior.

Figura 25 – Primeiro (à esquerda), segundo (no meio) e terceiro (à direita) sólidos desenhado pelos estudantes



(Fonte: Própria da autora)

5.1.2 Aula 2

Esta aula iniciou ao redor das 20h50 e contou com 7 estudantes presentes. Comecei retomando o que havíamos trabalhado na aula anterior. O estudante E1 disse “trabalhamos com os cubinhos, de frente, de lado, de cima”. Expliquei que iríamos trabalhar com essa mesma ideia, mas com um sólido diferente. Depois, mostrei a folha que eles deveriam cortar e expliquei que eles deveriam montar o sólido e responder as perguntas. Foram dedicados cerca de 15 minutos para a montagem do cone e tive que auxiliar os estudantes na colagem. Logo que os estudantes

começaram a recortar, já houve manifestações sobre o que eles estavam montando. O grupo de estudantes, formado pelos estudantes E2, E4, E11 e E12, fez referência ao cone, antes que eu pudesse propor um momento de tentar antecipar o sólido que seria formado. O Quadro 5 apresenta as respostas dos estudantes para as perguntas propostas.

Quadro 5 - Respostas das perguntas

1. Qual sólido você montou?
Cone
2. Que objetos reais você enxerga que apresentam essa forma?
Megafone, cone de trânsito, casquinha de sorvete, chapéuzinho de aniversário, chapéu de chins, ponta de lápis, ponta de furadeira e bico de pica-pau

(Fonte: Dados da pesquisa)

Enquanto os estudantes respondiam às perguntas, fiquei conversando com eles. Em certo momento, começou um diálogo que transcrevo a seguir:

E2 – Tem centímetros nele?

Alice – Por que tu acha que tem centímetros nele?

E12 – Porque tem números...

Tentei pensar em uma pergunta para que os estudantes refletissem sobre o que aqueles números representavam. Contudo, o diálogo seguiu.

E2 – Eu acho que é... pode ser metros?

E4, E11 e E12 – Não... (risadas)

E4 – Deve ser em centímetros.

Alice – É... é em centímetros.

E12 – Mas porque tem centímetros ali?

Perguntei para o estudante por que ele achava que tinham aquelas marcações, ele disse que não fazia ideia. Disse que iríamos utilizá-las a seguir e perguntei qual era a distância entre as marcações, se elas eram sempre a mesma. O estudante E12 disse que era sempre a mesma, enquanto o E2 discordou, logo o E12 começou a mostrar como os espaços eram sempre os mesmos.

Em torno das 21h05, comentei que, como havia observado nas folhas de registro, todos já sabiam que o nome daquele sólido era cone e mostrei que chamávamos a parte de baixo do cone de base. Logo em seguida, iniciei o segundo momento planejado para a aula. Achei melhor ir explicando os passos e esperando os estudantes fazerem para dar continuidade. Apesar de estar meio atrapalhada, foi possível auxiliar os estudantes a montarem o mecanismo (Figura 26)

utilizado para manter o cone sempre no mesmo lugar, o que facilitou o desenho dos círculos no papel. Com o suporte no papel, expliquei o que eles deveriam fazer na sequência.

Figura 26 - Suporte do cone

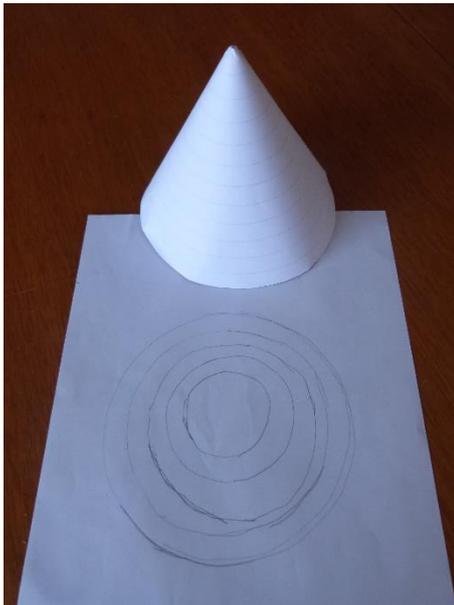


(Fonte: Própria da autora)

Quando os estudantes estavam desenhando, eles conseguiram identificar que seriam sempre círculos com o mesmo centro. Foi possível observar que o estudante E1 estava muito preocupado em fazê-los com perfeição, pois, de acordo com ele, estava ficando disforme. Após a aula, fiquei me questionando se não deveria ter perguntado o porquê de sua preocupação. Alguns estudantes não tinham entendido que o processo deveria ser repetido até o final da marcação, o que foi notado pela professora regente. Logo, reforcei para toda a turma o que deveria ser feito.

Às 21h40, os estudantes que já haviam terminado começaram a ir embora. Como este era o último período, eles acabaram saindo um pouco mais cedo da aula para pegar o ônibus. Acredito que, se esta aula fosse no primeiro período, haveria tempo de fazer o fechamento da atividade, que acabou ficando para a aula seguinte. A Figura 27, Figura 28, Figura 29 e Figura 30 a seguir apresentam os cones e as planificações elaboradas pelos estudantes.

Figura 27 - Produção da Dupla 1



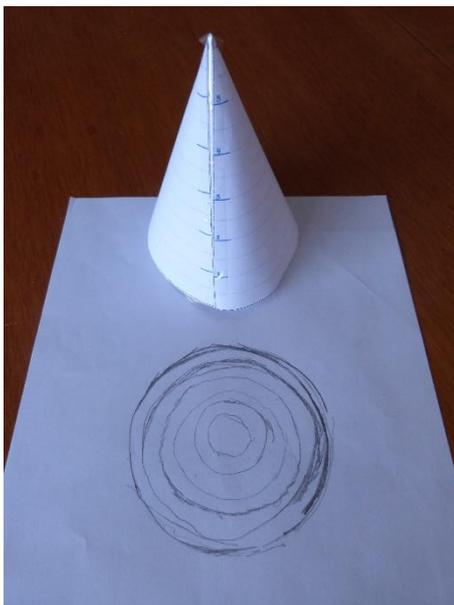
(Fonte: Dados da pesquisa)

Figura 28 - Produção da Dupla 2



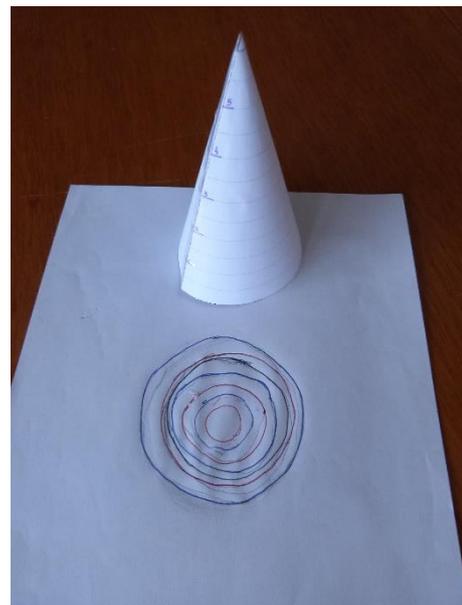
(Fonte: Dados da pesquisa)

Figura 29 - Produção da Dupla 3



(Fonte: Dados da pesquisa)

Figura 30 - Produção da Dupla 4



(Fonte: Dados da pesquisa)

5.1.3 Aula 3

Esta aula foi realizada no laboratório de informática e começou em torno das 20h50, retomando o que havia sido feito na aula anterior. Como se passaram diversos dias, inicialmente, os estudantes não se lembraram o que haviam feito, porém, ao mostrar os cones e os desenhos no papel, eles se lembraram. Assim, comecei perguntando que figuras eles haviam desenhado no

papel. Os estudantes E1 e E2 responderam que eram círculos. Utilizando os desenhos dos estudantes, mostrei que todos haviam desenhado círculos. Comparando dois cones de mesma altura, porém, com diâmetro da base diferentes, perguntei qual era a diferença entre os dois. O estudante E1 falou que um estava mais fechado (cone com diâmetro menor) e o outro estava mais aberto (cone com diâmetro maior). Já o estudante E11 falou sobre a diferença do espaçamento entre os círculos. Com os cones correspondentes, perguntei qual era a diferença entre eles.

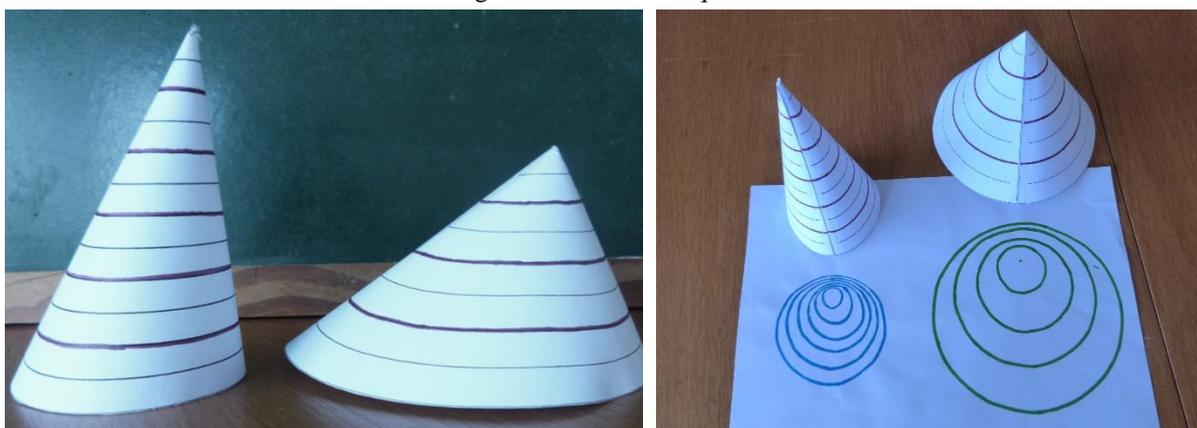
E1 – Um é maior e o outro é menor.

Alice - Um maior e outro menor em que sentido?

E1 – De largura (fez sinal com as mãos, referenciando um círculo)

Mostrei os dois cones para que o restante dos estudantes pudesse ver o que o colega estava falando. Então, perguntei se a altura dos dois cones era a mesma, o que os estudantes confirmaram que era. Ainda, perguntei qual era a diferença entre os dois, se olhássemos de frente. A estudante E10 falou que um era mais reto e o outro mais inclinado. Assim, comparando os cones com seus respectivos círculos, concluímos como o menos inclinado apresentava um maior espaçamento entre os círculos e o mais inclinado apresentava um menor espaçamento. Em seguida, iniciei a comparação dos cones oblíquos que eu construí (Figura 31) e cones retos com a mesma altura.

Figura 31 - Cones oblíquos



(Fonte: Própria da autora)

Iniciei com os cones reto e oblíquo de diâmetro igual a 14 centímetros e altura igual a 8 centímetros. Ao perguntar qual a diferença entre eles, o estudante E2 falou: “um tá mais reto e o outro tá mais inclinado”, já o estudante E11 falou que estava “tipo uma escada” e, depois, ele ainda complementou que um lado estava mais inclinado do que o outro. Em seguida, o estudante

E4 falou que o cone oblíquo parecia uma concha e o estudante E11 perguntou para ele se não parecia os campos de arroz. Nesse momento, com as folhas contendo os círculos, questionei qual era a diferença no desenho. Primeiramente, um estudante falou que os dois eram grandes (fazendo referência ao diâmetro da base) e aproveitei para falar que eles tinham as mesmas dimensões de diâmetro da base e altura. Então, o estudante E11 falou: “o ponto central dele tá mais pra cima ali ó, não tá tão centrado quanto o outro”. Assim, mostrei que o cone reto produzia círculos com o centro bem no meio, já o cone oblíquo, não. Observei que o estudante E4 relacionou a figura com uma cebola.

Dando continuidade, perguntei se os estudantes tinham ideia do porquê havíamos desenhado os círculos dos cones, se era possível estudarmos algo da vida real a partir disso. Foi quando um estudante fez referência ao desenho que estava no mapa da tela do computador. Dessa forma, mostrei a maquete. Novamente, o estudante E2 comentou a respeito do Minecraft. Então, perguntei o que estávamos representando ali. O estudante E4 falou que era o mapa, o E11 disse que era o relevo e o E7 falou que eram as montanhas. Comentei que estávamos, assim, buscando representar as montanhas, ou a topografia de um lugar. O estudante E1 repetiu a palavra topografia, como se achasse interessante a palavra. Logo, mostrei o mapa com as curvas de nível explicando que aquele mapa havia sido utilizado para criar a maquete e comecei a relacioná-lo com os cones. Inicialmente, perguntei o que acontecia com o cone quando íamos recortando as camadas e o estudante E11 disse que ele ia diminuindo, ou seja, que os círculos da base iam ficando menores. Assim, mostrei que o mesmo acontecia na maquete e que, conforme os círculos diminuía no mapa, podíamos observar que estávamos mais alto. Então, nomeei as curvas de nível do mapa e perguntei o que significavam os números nas curvas. O estudante E4 disse que seria a altitude e latitude, enquanto o E7 falou que seriam as coordenadas. Perguntei se não teria que ter mais de um número para representar essas características. Neste momento, a professora regente estava me auxiliando, segurando a maquete para que os estudantes conseguissem enxergar melhor, e foi quando ela falou que só havia um número por linha. Logo em seguida, o estudante E2 falou que seria a altura deles e outro falou que seria a distância de altura. Dessa maneira, juntei as duas para explicar que cada uma das linhas estava a uma certa altura do nível do mar.

Continuando o planejado, segui para a exploração do *software Caltopo* em torno das 21h10, todos os estudantes tinham acesso individual ao *software*, exceto os estudantes E6 e E10 que optaram por trabalhar juntos. Os estudantes foram instruídos que poderiam pesquisar qualquer região de interesse. Enquanto isso, fiquei circulando pela sala, conversando com os estudantes

e observando os locais que eles haviam escolhido. Este momento durou cerca de 10 minutos. Após, comecei pedindo que eles pesquisassem a cidade de Muçum e perguntei se os estudantes já haviam ouvido falar dela. Inicialmente, o estudante E2 falou sobre o personagem, logo, questionei se eles conheciam a cidade. O estudante E7 disse que sim, perguntei por que e ele explicou que o pai dele era de lá, mas não morava mais na região. O estudante E1 falou que comia muito mussum na adolescência, como eu não conhecia, pedi que ele explicasse o que era. Conversamos alguns minutos sobre o peixe e continuei falando da região escolhida. Disse que o município de Muçum faz parte da região do Vale do Taquari que tinha sido atingida fortemente pelas chuvas de setembro e, a partir dos materiais que estávamos explorando, poderíamos refletir sobre o porquê desses desastres. O estudante E7 complementou minha fala, dizendo sobre o município de Roca Salles. Mostrei o local do município na maquete e o estudante E1 falou sobre o rio que passava ali. Falei sobre o Rio Taquari que dava nome a região e um estudante disse que era um “baita de um rio”. O estudante E2 perguntou onde ficava Arroio do Meio e mostrei no mapa que estava projetado no quadro. Os estudantes não pareceram muito interessados em entender os motivos que causaram o desastre na região comentada.

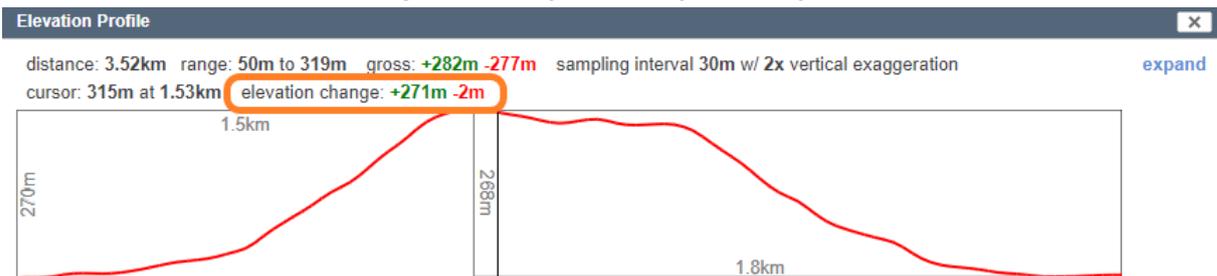
No último momento da aula, apresentei como criar a linha para que eles pudessem observar o perfil de elevação, depois, auxiliei individualmente os que estavam tendo dificuldades. Entreguei as folhas com as perguntas e, enquanto os estudantes trabalhavam, fiquei observando, além de auxiliá-los quando necessário.

Conversando com o estudante E2, ele me relatou que estava vendo “altura, distância, velocidade”. Questionei onde estava a velocidade e ele respondeu que era a distância percorrida da linha que ele havia criado. Ele também falou que estava vendo o relevo, porém não escreveu isto na sua folha de registro.

O estudante E1 perguntou se as perguntas eram todas sobre aquela linha que eles haviam criado e respondi que eles poderiam criar outras linhas. Contudo, foi possível observar que tanto ele como os outros estudantes apenas exploraram a linha que haviam criado no início deste momento.

O estudante E12 me perguntou por que ele diminuía, apontando para o destacado em laranja na Figura 32. Inicialmente, não entendi o que era, então ele me mostrou algo que não tinha percebido. Ao mover o cursor sobre o perfil de elevação, o software mostra a mudança de elevação no trajeto criado. Juntos, conseguimos identificar essa funcionalidade.

Figura 32 - Função "Mudança de elevação"



(Fonte: Adaptado de Caltopo)

Na concepção das perguntas, não pensei como os estudantes iriam identificar qual o morro mais alto na região. Assim, sugeri que os estudantes colocassem as coordenadas do local, que aparecia no canto direito da tela. Contudo, onde se encontra essa informação, também é possível ver a altitude do local. Dessa forma, os estudantes começaram a percorrer a tela com o mouse e procurar o ponto com maior altitude, sem observar as curvas de nível.

A estudante E3 me chamou para mostrar que ela havia identificado o lado mais íngreme do morro. Ao perguntar como ela tinha chegado nessa resposta, ela apontou para o mapa e não o perfil de elevação, como os outros estudantes estavam fazendo, mas não soube explicar como. Então, aproveitei para fazer a comparação entre as curvas de nível e o perfil de elevação. Ao questioná-la sobre o que estava acontecendo com as linhas que formam as curvas de nível, ela respondeu: “ela tá diminuindo com a horizontal, pra cá sora (apontando para o topo do morro)”. Depois de mais algumas perguntas, consegui notar que ela estava falando sobre o espaçamento entre as linhas, logo, apenas a auxiliiei a concluir que quanto mais íngreme, menor seria o espaçamento e vice-e-versa, através de outros caminhos criados. Essa ação foi realizada com outros estudantes.

O estudante E3 pediu auxílio para responder qual a função do perfil de elevação. Primeiramente, esclareci o que significava explicar a função de algo e perguntei o que ele observava. Abaixo, descrevo o diálogo que se iniciou com essa pergunta:

E3 – Tá mostrando as medidas geográficas?

Alice – As medidas geográficas do que?

E3 – Da vista plana, olhando de cima.

Alice – (Apontando para o gráfico) Isso aqui parece que estamos olhando de cima?

E3 – Não

Alice -Então como eu tô olhando?

E3 – Como assim olhando da onde? Eu não faço nem ideia...

Alice – Ó... Quando a gente tava trabalhando com os cubinhos, como a gente olhava para eles pra desenhar?

E3 – De cima e de lado

Alice – Se essa não é a vista de cima, é a de?

E3 – Lado

A dupla de estudantes E6 e E10 estavam trabalhando juntos e me perguntaram como era possível encontrar o lado mais íngreme. Eles estavam bem inseguros com o que haviam concluído, inclusive a estudante E10 se chamou de burra. Então, pedi que eles me explicassem o que eles haviam pensado. Em vez de olharem para a linha que forma o perfil de elevação, eles estavam olhando para as distâncias horizontais dadas até o ponto mais alto do morro. Dessa maneira, como os dois lados chegam na mesma altura, o que tivesse uma maior distância horizontal, seria o menos íngreme, ou nas palavras da estudante E10 teria uma maior extensão. Em torno das 22 horas, os estudantes começaram a entregar as folhas de registro e ir embora. Agradei a participação de todos e a professora regente me lembrou para pedir os termos que estavam faltando. Os quadros a seguir apresentam as respostas dos estudantes para as perguntas propostas. Destaco que o estudante E11 estava presente, mas não respondeu às perguntas, já os estudantes E6 e E10 responderam em apenas uma folha.

Quadro 6 – Respostas para a pergunta “O que você consegue observar a partir da manipulação do software?”

E1	Percebo as coordenadas da linha criada, como a distância, altura e largura, elevação
E2	To vendo algumas coisas como o rio taquari e indústrias próximas
E3	A altitude, tamanho e altura
E4	Consigo achar localizações mais facilmente
E5	Que é um mapa com marcações que foi feita uma linha, que dá pra encher a cidade e a natureza
E6 e E10	Que podemos ver o rio, as camadas do morro, bastante vegetação. A distância do rio de um lado até outro
E7	Eu vejo cidade, campo
E12	Eu vejo o mapa inteiro do mundo, vejo distância da linha que eu adicionei local Muçum até local parei da linha, tem altura que marca montanha sobe
E13	A altitude tamanho e longitude

(Fonte: Dados da pesquisa)

Quadro 7 – Respostas para a pergunta “Qual a função do perfil de elevação?”

E1	Mostra o quanto necessário de altura há entre uma ponta e outra da linha, exemplo: os picos e montanhas entre a linha
E2	que estamos visualizando a vista de lado e temos elevações nas partes dos morros
E3	6 km por caminhada
E4	Determinar a distância, quilômetros etc
E5	5,82 km
E6 e E10	A elevação é feita de camadas do morro
E7	Altura, distância
E12	Elevação 273 m função é ver altura da montanha e distância percorrida
E13	Nós vemos de cima mas o perfil mostra o que é maior a altitude

(Fonte: Dados da pesquisa)

Quadro 8 – Respostas para a pergunta “Qual o morro mais alto da região? Qual é a sua altura?”

E1	Viaduto 13, 143 m de altura
E2	m -29.15132 -51.87939
E3	Minha altura máxima é 388 m
E4	O mirante ande está a Nossa senhora da Selesté fica no alto do morro nos fundos da Igreja Matriz. A altura chega aproximadamente 5 m
E5	m -29.1460 -51.85916
E6 e E10	O morro mais alto tem 319 m e 1,4 km de extensão
E7	m -29.24986 -51.94971 , 521 m
E12	Muçum morro mais alto 531 m -29.18948 -51.84663
E13	m -29.17607 -51.83264

(Fonte: Dados da pesquisa)

Quadro 9 – Respostas para a pergunta “Como podemos identificar se um lado do morro é mais íngreme do que o outro?”

E1	Usando o perfil de elevação, ele mostra o lado mais íngreme e menos íngreme do morro
E2	Vendo exatamente a medida dele vendo qual parte é mais inclinado
E3	Um lado direito tem menos distância. No lado esquerdo tem maior distância e diâmetros diferentes.
E4	Através da altura que ele possui
E5	Pelo gráfico e por que um é mais reto outro é mais deitado
E6 e E10	O gráfico indica que as linha que marca mais juntos será o lado do morro mais inclinado
E7	Pela as coordenadas, quanto mais baixo o mapa, mais alto é o morro
E12	Eu posso identificar pela linha que desce mais rápido seria mais ou menos meio
E13	Sim o perfil mostra bem o tamanho com lados mais “imburcados” que o outro

(Fonte: Dados da pesquisa)

Quadro 10 – Respostas para a pergunta “Escolha um dos morros da região e indique-o abaixo. Agora, qual seria o caminho mais suave para chegar ao topo?”

E1	m -29.13119 -51.85945 0,2km menos ingrime 404 m
E2	Pela esquerda
E3	No meu caso eu escolhi do lado direito por que tem menor distância e de diametro
E4	Não respondeu
E5	Subiria pelo lado direito porque ele tá mais deitado
E6 e E10	Não tiveram tempo de responder
E7	Para chegar até aqui é pela trilha e com equipamento adequado e com as coordenadas
E12	Pelo lado mais inclinado
E13	Tem mais distância de um lado para o outro

(Fonte: Dados da pesquisa)

5.2 Análise dos dados

A primeira aula ocorreu de uma forma expositiva dialogada, buscando possibilitar uma interação maior com os estudantes. A utilização das imagens associadas aos slides tornou a aula mais dinâmica e participativa, promovendo o envolvimento ativo de alguns estudantes. Já nas primeiras fotografias, houve demonstrações de uma das habilidades de visualização propostas por Gutierrez (1996a). Ao enxergar profundidade, já que, “nenhuma imagem estava de primeira, todas estavam no fundo da tela”, os estudantes utilizaram a capacidade de relacionar a posição de um objeto a si mesmo, como observador.

Inicialmente, a palavra tridimensional foi associada a uma coisa inteira, no sentido de que todo o objeto estava sendo representado na fotografia. Contudo, esse pensamento geométrico tridimensional se expandiu. Após alguns minutos de trocas sobre a representação de um objeto em três dimensões em um plano com duas dimensões, ao se confrontarem com um desenho que não estava transmitindo essa ideia, os estudantes foram capazes de apontar a profundidade como o elemento que faltava. Assim, podemos supor que os estudantes desenvolveram o reconhecimento das propriedades das formas tridimensionais que, conforme Pittalis e Christou (2010), está associada ao raciocínio de conceituação de propriedades matemáticas.

A problematização da perspectiva isométrica ocorreu como o esperado, dado que, os estudantes, ao se colocarem como observadores, perceberam que não era possível reconhecer todas as características das imagens. Ainda, a partir da perspectiva isométrica foi possível comentar

sobre alguns elementos da geometria plana, como semirreta e ângulo, mostrando possibilidades de integração entre os conteúdos.

Para que os estudantes fossem capazes de desenhar vistas ortográficas, apresentei um exemplo. Ao desenhar a vista lateral, o estudante E11 afirmou que os cubos pareciam estar empilhados. Dessa forma, o estudante foi capaz de relacionar a posição dos cubos da segunda camada aos da primeira camada, que atuavam como ponto de referência. Ao utilizar a sombra como a projeção do cubo, quase instantaneamente, os estudantes identificaram o quadrado como a figura plana correspondente. Nesta ação os estudantes estão desenvolvendo o processamento visual, já que, há uma transformação de uma imagem visual em outra, articulando a geometria espacial a plana. Nestes dois momentos, os estudantes desenvolveram a visualização definida por Gutierrez (1996a)

Durante a atividade do desenho das vistas ortográficas (frontal, lateral e superior), ficou bem nítido os estudantes que já tinham uma habilidade de visualização mais desenvolvida que outros. Alguns estudantes olhavam para a perspectiva isométrica projetada no quadro e, apenas com a imagem mental, eram capazes de interpretar as informações, utilizando o conhecimento das conversões visuais, e faziam o desenho. Já outros estudantes precisavam do material manipulativo (cubos de madeira), visto que, o material “pode servir de representação visual ou tátil para gerar uma imagem mental desse objeto” (Kalleff, 2015, p.84). Além disso, foi necessária a utilização de “imagens cinestésicas” (Gutierrez, 1996a, p.5) que são criadas, transformadas ou comunicadas com a ajuda de movimentos físicos, como o movimento dos sólidos montados em diversas direções.

O Quadro 11 apresenta as vistas que foram representadas de forma correta (C) ou de forma errada (E) de cada estudante, ou grupo, por sólido desenhado. Observa-se que apenas o grupo indicado formado pelos estudantes E4, E11 e E12 conseguiu desenhar corretamente todas as vistas ortográficas. Destaco que não auxiliei o grupo 3 em nenhum momento durante a aula.

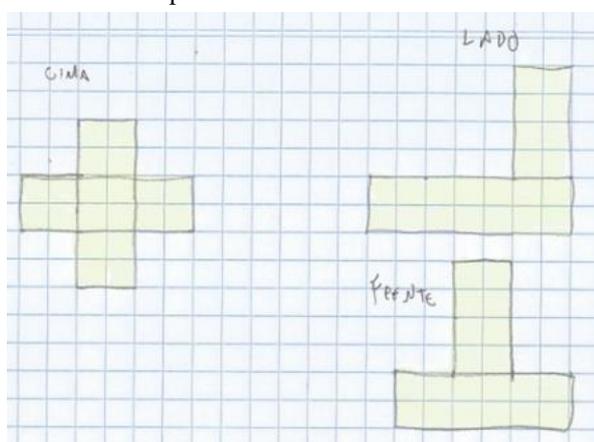
Quadro 11 - Análise do desempenho dos estudantes no desenho das vistas frontal (VF), lateral (VL) e superior (VS) dos sólidos representados.

Estudante	Sólido 1			Sólido 2			Sólido 3		
	VF	VL	VS	VF	VL	VS	VF	VL	VS
E1	C	E	C	C	E	C	C	E	C
E2, E8	E	C	C	C	C	C	C	C	C
E4, E11, E12	C	C	C	C	C	C	C	C	C
E5	C	C	C	C	E	C	C	C	C
E6	E	C	E	C	C	C	E	E	C
E7	C	C	E	C	E	C	C	C	C
E9	C	C	C	E	E	C	C	C	C
E10	E	C	C	E	-	C	E	E	-

(Fonte: Dados da pesquisa)

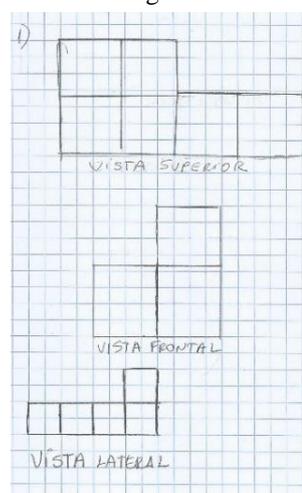
Ao analisar desenhos dos estudantes utilizando o referencial teórico, é possível observar que o grupo formado pelos estudantes E2 e E8 nomeou as vistas utilizando a habilidade de percepção de posições espaciais (Gutierrez, 1996a), de acordo com a sua em relação ao objeto, ou seja, olhando de cima, de lado e de frente (Figura 33). Também, nota-se que apenas a estudante E10 não desenhou quadrados com as medidas dos lados iguais (Figura 34). Essa estudante não foi capaz de reconhecer o quadrado como uma figura isolada, nomeada de habilidade de identificação visual por Gutierrez (1996a), que apresenta medida iguais para todos os lados. O restante optou ou por utilizar o quadriculado com uma unidade ou os lados com mais de uma unidade de medida.

Figura 33 - Vistas ortográficas do grupo formado pelos estudantes E2 e E8



(Fonte: Dados da pesquisa)

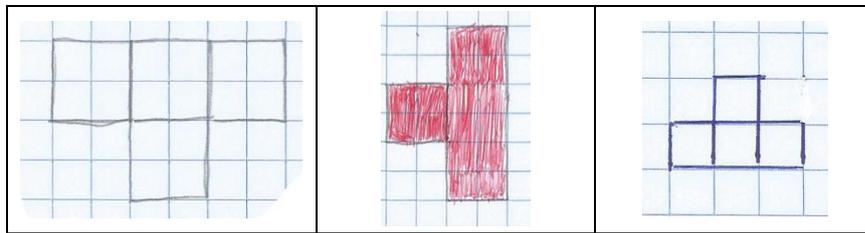
Figura 34 - Vistas ortográficas da estudante E10



(Fonte: Dados da pesquisa)

Como ressaltam Pittalis e Christou (2010), a representação plana de um objeto tridimensional exige a compreensão de convenções estabelecidas. No caso das vistas ortográficas, o método de projeção ortográfica é indicado por uma norma brasileira (ABNT, 1995) que padroniza as representações. Na vista superior desenhada pelos estudantes do segundo sólido, ficou claro como, ao não estabelecer tais convenções, os estudantes orientaram seus desenhos a partir do seu posicionamento frente ao sólido e este foi o principal erro dos estudantes. A Figura 35 mostra que os desenhos continham a quantidade de quadrados corretas, assim como o posicionamento do quadrado no meio, porém, eles apresentam orientações espaciais diferentes.

Figura 35 - Desenho de alguns estudantes da vista superior do segundo sólido



(Fonte: Dados da pesquisa)

As expectativas para esta aula foram atingidas, visto que, os estudantes conseguiram representar objetos tridimensionais no plano bidimensional, exploraram a orientação espacial em relação aos sólidos e a visualização, essenciais para o desenvolvimento do pensamento geométrico. A aula também demonstrou a importância de associar conhecimentos geométricos com o cotidiano e outros conteúdos. A utilização de imagens de edifícios e a relação da planta baixa com a vista superior de um apartamento, despertou o interesse dos estudantes, e poderiam ter sido discutidos conceitos de área e proporcionalidade. Além disso, a referência do estudante E1 ao ponto de fuga, permitiria integrar os conceitos aprendidos nas aulas de artes.

Buscando introduzir o conceito de curvas de nível, a segunda aula apresentou uma atividade investigativa com a utilização de um material manipulativo não digital que explorou a elaboração da representação bidimensional de diferentes cones. Considerando que uma curva de nível “pode ser definida como sendo a curva produzida pela intersecção de um plano horizontal com a superfície do terreno” (ANA, 2022), foi proposto que os estudantes pensassem na seção transversal do cone. O cone foi escolhido, pois pode ser considerado um sólido menos complexo do que a topografia de uma região e permitiria que os estudantes utilizassem a comparação entre eles posteriormente. Dessa forma, os estudantes puderam vivenciar o processo de imaginação do corte e da figura geométrica formada, além da mudança de orientação espacial de observação dela (Cohen; Hegarty, 2014).

Sobre o andamento da atividade, foi possível notar a participação ativa dos estudantes presentes, envolvidos em todo o processo. A identificação de objetos reais, do nome do sólido e dos círculos concêntricos na representação bidimensional mostra a existência de processo de visualização, já que, houve uma interpretação de informações figurativas (Gutierrez, 1996a, p.5) que levou ao reconhecimento de algumas propriedades do objeto. Ainda, a habilidade dos estudantes está relacionada ao raciocínio de conceituação de propriedades matemáticas, definido por Pittalis e Christou (2010). Como os estudantes do EJA são mais velhos, isso reforça a ideia de Pittalis e Christou (2010) sobre a correlação entre a idade e os tipos de raciocínio na geometria tridimensional.

Além disso, a atividade possibilitou que os estudantes fizessem algumas conjecturas a partir da observação dos sólidos construídos por eles. Como exemplo, cito como os estudantes afirmaram que a distância entre os círculos na representação bidimensional era sempre a mesma. Contudo, como não houve registros por parte dos estudantes desses momentos, como recomendado por Ponte, Brocado e Oliveira (2016), e a aula foi curta, não foi possível que os próprios estudantes continuassem o processo e as justificassem. Assim, apesar de ter sido uma atividade interessante, não foi possível promover uma atividade investigativa da melhor maneira.

A terceira aula iniciou-se com uma discussão da investigação começada na aula anterior com a professora desempenhando um papel de moderadora, estimulando os estudantes a questionarem-se (Ponte; Brocado; Oliveira, 2016). A partir da comparação de dois cones de mesma altura, porém, com diâmetro da base distintos, os estudantes foram capazes de identificar a diferença entre o espaçamento dos círculos resultantes da intersecção entre o cone e o plano paralelo à base.

Ao comparar os cones oblíquo e reto de mesma altura, a primeira constatação dos estudantes foi relativo à inclinação dos “lados”, já que, eles estavam observando os sólidos tridimensionais. Novamente, os estudantes começaram a buscar relações com objetos do cotidiano, como uma escada, conchas ou campos de arroz. Quando questionados sobre a diferença nas representações bidimensionais, o estudante E11 disse: “o ponto central dele tá mais pra cima ali ó, não tá tão centrado quanto o outro”. Assim, pode-se supor que os estudantes utilizaram habilidades de discriminação visual (Gutierrez, 1996a), ao comparar as figuras entre si e as figuras com os sólidos para identificar semelhanças e diferenças entre elas.

A continuação da terceira aula constituiu-se na introdução das curvas de nível com a exploração da maquete, buscando relacionar o formato tridimensional dos cones aos morros da topografia da região escolhida. Diferentemente do que eu imaginava, a região não despertou interesse dos

estudantes e nem propiciou a discussão de outros assuntos. A maquete serviu como uma representação externa para que os estudantes visualizassem que os números contidos nas curvas de nível representariam as alturas em relação ao nível do mar, porém apenas quando os incentivei a isso.

A atividade proposta a partir da exploração do *software Caltopo* possibilitou comparações entre as curvas de nível (vista superior) e o perfil longitudinal (vista lateral) da intersecção entre o caminho criado pelos estudantes e os morros, evidenciando a importância da escolha do recurso tecnológico a ser utilizado (Basso; Notare, 2015). No entanto, os estudantes acabaram focando em apenas um caminho, sendo necessária uma maior intervenção de minha parte, estimulando-os a estruturar as ideias e testar outras possibilidades. Esta situação corrobora para o relatado por Basso e Notare (2015) sobre a forma com a qual os problemas são abordados. Possivelmente, as perguntas propostas nessa etapa e a minha atuação inicial não direcionaram corretamente os estudantes na atividade de forma a “garantir que todos os alunos entendem o sentido da tarefa proposta e aquilo que deles se espera no decurso da atividade” (Ponte; Brocado; Oliveira, 2016; pg 23).

Foi interessante observar como os estudantes relacionaram o observado no *software* com a tarefa realizada na primeira aula. O perfil de elevação foi associado à vista lateral e as curvas de nível e o mapa à vista superior. Essa ação permitiu que os estudantes preenchessem as lacunas de informação perdida ao longo do processo de conversão da representação tridimensional dos morros para a bidimensional e concluíssem como identificar o lado mais íngreme do morro. Destaca-se o raciocínio realizado pela estudante E9 que teve bastante dificuldade na primeira aula ao desenhar as vistas ortográficas, porém, foi capaz de relacionar a vista superior à vista lateral na última atividade. Ao observar as distâncias horizontais dadas até o ponto mais alto do morro, concluiu que o lado que tivesse uma maior distância horizontal, seria o menos íngreme. Isso só foi possível pois a estudante foi capaz de reconhecer as relações geométricas que formam um objeto, indo ao encontro do explicitado por Basso e Notare (2015).

Infelizmente, a terceira aula que ainda tinha como objetivo integrar o *software Caltopo*, ao mapa e à maquete da região do Vale do Taquari, próximo a cidade de Muçum, para discutir aspectos da topografia e do clima que influenciaram nas enchentes ocorridas em setembro e novembro de 2023. Assim, os materiais não propiciaram que estudantes desenvolvessem uma postura mais crítica em relação a questões sociais e ambientais como esperava-se.

Posto isto, pode-se afirmar que as expectativas apenas a primeira aula atingiu as expectativas completamente. Apesar de alguns aspectos da prática que poderiam melhorar, as atividades

promoveram uma participação ativa dos estudantes e possibilitaram o desenvolvimento do raciocínio dos estudantes a partir utilização de objetos tridimensionais e de elementos visuais e mentais.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho buscou responder à pergunta diretriz: “Como a utilização de materiais manipulativos digitais e não digitais, envolvendo o estudo de curvas de nível, pode contribuir para o desenvolvimento da visualização bidimensional de sólidos tridimensionais dos estudantes da Educação de Jovens Adultos?”. Assim, procurou-se aprimorar as habilidades de visualização dos estudantes, necessárias para que o estudante possa compreender os objetos tridimensionais representados em um plano, criar imagens mentais e manipulá-las, além de gerar informações que permitam resolver um problema ou comprovar propriedades.

Para responder à pergunta diretriz, foi elaborada uma sequência de atividades em que fosse possível desenvolver habilidades para que, no final, os estudantes fossem capazes de visualizar e coordenar as representações bidimensionais de morro, a partir das curvas de nível relacionando-as com o perfil de elevação. Todas as atividades contaram com o uso dos materiais manipulativos não digitais e, na última, integrou-se o *software Caltopo*, pensando nos benefícios da tecnologia no desenvolvimento do pensamento matemático.

A análise dos dados mostrou que a sequência de atividades planejadas aparentou despertar nos estudantes o interesse pelo conteúdo e foi possível observar que eles estavam envolvidos a todo o momento, ativos no processo. Alguns estudantes expressaram verbalmente como haviam gostado das atividades propostas.

Ao longo das aulas, os estudantes realizaram conversões das representações tridimensional para a bidimensional, utilizando imagens mentais e cinestésicas além de representações externas. Ainda, desenvolveram o reconhecimento de propriedades de formas tridimensionais apresentadas em um plano com duas dimensões, essencial para sanar dificuldades de alguns estudantes em realizar algumas interpretações como nos livros didáticos.

Os estudantes também mobilizaram suas habilidades de visualização em diversos momentos. Foi possível identificar a capacidade de relacionar a posição de um objeto em relação a outro e a si mesmo, como observador, ou seja, a habilidade de percepção de posições espaciais. Ainda, a análise apresentou manifestações da habilidade de identificação visual, ao reconhecer uma figura isolada e suas características, e de discriminação visual, ao comparar as figuras entre si e as figuras com os sólidos para identificar semelhanças e diferenças entre elas. Também foi observado os processos de visualização, através da transformação de uma imagem visual espacial para a plana.

A primeira aula foi a única em que as expectativas foram atingidas completamente, visto que, os estudantes conseguiram representar objetos tridimensionais no plano bidimensional, exploraram a orientação espacial em relação aos sólidos e a visualização, essenciais para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Na análise das produções dos estudantes, destaco a importância da padronização nas representações frente a orientação espacial.

Utilizando os cones, os estudantes experimentaram o processo de visualização do corte e da figura geométrica resultante, juntamente com a alteração na orientação espacial ao observá-la, para facilitar a compreensão do conceito de curva de nível. Além disso, os estudantes realizaram a interpretação de informações que levou à identificação de objetos reais, do nome do sólido apenas com a planificação e dos círculos concêntricos na representação bidimensional. Ainda, a atividade possibilitou que os estudantes fizessem algumas conjecturas a partir da observação dos sólidos construídos por eles e os desenhos, como a afirmação de que a distância entre os círculos na representação bidimensional era sempre a mesma.

Ao integrar o *software* Caltopo, os estudantes puderam realizar comparações entre as curvas de nível (vista superior) e o perfil longitudinal (vista lateral) da intersecção entre o caminho criado pelos estudantes e os morros. Assim, os estudantes foram capazes de preencher as lacunas de informação perdida ao longo do processo de conversão da representação tridimensional dos morros para a bidimensional e concluir como identificar o lado mais íngreme de um morro. O uso do recurso digital permitiu a manipulação de sólidos mais complexos e o reconhecimento de algumas relações geométricas que formam um objeto, como os triângulos utilizados para concluir qual seria o lado do morro menos íngreme.

Caso esse planejamento seja replicado, sugiro que a utilização da lanterna para a criação das vistas ortográficas seja substituída por outro material. Mesmo estando escuro durante a realização da atividade, notei que os estudantes não estavam conseguindo visualizar as projeções da melhor forma possível.

Sobre a utilização da maquete e do mapa, associada ao software, percebi que os materiais não digitais ficaram relegados. Acredito que tenha sido devido às perguntas propostas aos estudantes que acabaram direcionando com maior intensidade ao uso da ferramenta “Perfil de elevação”. Além disso, não pensei como os estudantes iriam identificar qual o morro mais alto na região, o que poderia ter sido indicado pela maquete, como o nome ou número dos morros. Assim, sugeri que os estudantes colocassem as coordenadas do local, que aparecia no canto direito da tela. Contudo, onde se encontra essa informação, também é possível ver a altitude do local. Dessa forma, os estudantes começaram a percorrer a tela com o mouse e procurar o ponto

com maior altitude, sem observar as curvas de nível. Também ficou claro que o uso das palavras manipulação e íngreme não foi uma boa escolha, pois todos os estudantes não sabiam o que significava.

De maneira geral, conclui-se que as atividades planejadas envolvendo a manipulação de sólidos tridimensionais digitais e não digitais, permitiu o surgimento de situações envolvendo a visualização e as habilidades espaciais. Portanto, pode-se sugerir que a pergunta foi respondida positivamente, já que, foram apresentados momentos em que os estudantes praticam o fazer matemático.

REFERÊNCIAS

- Agência Nacional de Águas (ANA). **Curvas de Nível**: catálogo de metadados da ANA. Catálogo de Metadados da ANA. Disponível em: <https://metadados.snirh.gov.br/geonetwork/srv/api/records/0e21c03b-fd46-4c9a-9a39-2537ac347214>. Acesso em: 27 jul. 2022.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 10067**: Princípios gerais de representação em desenho técnico. Rio de Janeiro, 1995. 14 p.
- ANDREATA, Juliana. **Fachada**. Disponível em: https://www.flickr.com/photos/juliana_andreata/5535339775/in/photostream. Acesso em: 2 out. 2023.
- BAIRRAL, Marcelo Almeida; MAIA, Rafael Cardoso Ofredi. O uso do Google Earth em aulas de matemática. **Linhas Críticas**, [S. l.], v. 19, n. 39, p. 373–390, 2013. DOI: 10.26512/lc.v19i39.4145. Disponível em: <https://periodicos.unb.br/index.php/linhascriticas/article/view/4145>. Acesso em: 01 ago. 2022.
- BARISON, Maria Bernadete. **Geometria descritiva**: perspectivas. perspectivas. Disponível em: https://www.uel.br/cce/mat/geometrica/php/gd_t/gd_2t.php. Acesso em: 2 out. 2023.
- BASSO, M.; RODRIGUES NOTARE, M. Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 13, n. 2, 2015. DOI: 10.22456/1679-1916.61432. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/61432>.
- BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.
- BORBA, Gustavo Benvenuto. **Notas de aula**: perspectiva isométrica e projeção ortográfica. Curitiba: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, . Disponível em: http://paginapessoal.utfpr.edu.br/gustavoborba/material/files/persp-proj_LT31B.pdf. Acesso em: 2 out. 2023.
- CABRAL, Sabrina Alves Boldrini. Desenvolvendo o Pensamento Argumentativo Geométrico: construindo práticas investigativas. 2017. 220 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2017. Disponível em: <https://philarchive.org/archive/CABDOP>. Acesso em: 24 nov. 2023.
- COLLISCHONN, Walter; DORNELLES, Fernando. **Hidrologia para engenharias e ciências ambientais**. Porto Alegre: 2ª edição. Associação Brasileira de Recursos Hídricos (ABRH), 2015.
- FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em Educação em Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2009. 228 p.
- COHEN, Cheryl A.; HEGARTY, Mary. Visualizing cross sections: training spatial thinking using interactive animations and virtual objects. **Learning And Individual Differences**, [S.L.], v. 33, p. 63-71, jul. 2014. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.lindif.2014.04.002>.

GARCIA, Diogo. **Perspectiva forçada e ilusão de óptica**. Disponível em: <https://diogogarcia.com/perspectiva-forcada-e-ilusao-de-optica/>. Acesso em: 2 out. 2023.

GEOSENSORI. **O uso das curvas de nível**. 2019. Disponível em: <https://www.geosensori.com.br/2019/05/20/curvas-de-nivel-ponto-crucial-em-um-projeto>. Acesso em: 23 out. 2023.

GRAVINA, Maria Alice; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. Mídias digitais na educação matemática. In: GRAVINA, Maria Alice; BÚRIGO, Elizabete Zardo; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo; GARCIA, Vera Clotilde Vanzetto (org.). **Matemática, mídias digitais e didática: tripé para formação de professores de matemática**. Porto Alegre: Evangraf, 2012. p. 180.

GUTIÉRREZ, Angel. Procesos y habilidades en visualización espacial. **Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría**, p. 44-59, 1992. Disponível em: <https://www.uv.es/angel.gutierrez/marcotex.html>.

_____. Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. **Proceedings of the 20th PME Conference**, Valencia, v. 1, p. 3-19, 1996. International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1996a. Disponível em: <https://www.uv.es/angel.gutierrez/marcotex.html>

_____. Children's ability for using different plane representations of space figures. **New directions in geometry education**, p. 33-42, 1996b. Disponível em: <https://www.uv.es/angel.gutierrez/marcotex.html>

HASENACK, H.; WEBER, E.(org.) **Base cartográfica vetorial contínua do Rio Grande do Sul – escala 1:50.000**. Porto Alegre: UFRGS Centro de Ecologia. 2010. 1 DVD-ROM. (Série Geoprocessamento n.3). ISBN 978-85-63483-00-5 (livreto) e ISBN 978-85-63843-01-2 (DVD). Disponível em <https://www.ufrgs.br/labgeo/index.php/downloads/dados-geoespaciais/base-cartografica-vetorial-continua-do-rio-grande-do-sul-escala-150-000/>. Acesso em: 13 nov. 2023

JACOBS, Matt (org.). **CalTopo**. Disponível em: <https://caltopo.com/map.html#ll=38.80547,-98.39355&z=5&b=mbt>. Acesso em: 20 nov. 2023.

JARA, Eduardo Janicsek. **Matemática em Rede a partir de Projetos de Pesquisa na Educação de Jovens e Adultos**. 2008. 130 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

KALEFF, Ana Maria Martenen Roland. Formas, Padrões, Visualização e ilusão de ótica no ensino da geometria. **Vidya - Edição Especial - Geometria: Ensino e Aprendizagem**, Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 75-91, 4 dez. 2015.

KALEFF, Ana Maria Martenen Roland; ROSA, Fernanda Malinosky Coelho da. da. Introdução ao conceito de curvas de nível visando à inclusão do aluno com deficiência visual nas aulas de Geometria. In: XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACION MATEMATICA, 2015, Chiapas. **Anais [...]**. Chiapas, 2015.

LIAO, Tarliz; CARVALHO, Jhonatas Mayke Junkes de. Realidade Aumentada e Interdisciplinaridade: o uso do aplicativo landscapar no ensino de matemática e geografia.

Ead em Foco, [S.L.], v. 10, n. 2, p. 1-13, 8 jul. 2020. Fundacao CECIERJ.
<http://dx.doi.org/10.18264/eadf.v10i2.1049>. Acesso em: 01 ago. 2022

MARTINS, Wilton Vieira. **Curvas de Nível**: um recurso gráfico utilizando o software Geogebra. 2019. 34 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto Federal Goiano, Urutaí, 2019.

PITTALIS, Marios; CHRISTOU, Constantinos. Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. **Educational Studies In Mathematics**, [S.L.], v. 75, n. 2, p. 191-212, 2 jun. 2010. Springer Science and Business Media LLC.
<http://dx.doi.org/10.1007/s10649-010-9251-8>.

PONTE, João Pedro da; BROCADO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.

STORMOWSKI, Vandoir. Vale a pena utilizar tecnologias digitais na educação? In: SILVA, Rodrigo Sychocki (Org.). **Diálogos e Reflexões sobre Tecnologias Digitais na Educação Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018. p. 95-112.

**Apêndice A –Modelo de Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
(TCLE)**



TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, _____, R.G. _____, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada “Investigações matemáticas na sala de aula: Curvas de Nível”, desenvolvida pela pesquisadora Alice Borges Maestri. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone [] ou e-mail [].

Tenho ciência de que a minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são introduzir o conceito de curva de nível por meio da manipulação e observação de materiais concretos e de uma plataforma de análise geoespacial.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas por mim serão apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A minha colaboração se dará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da minha participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que serei observado(a) e terei a produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, filmagens ou gravações de áudio, obtidas durante a minha participação aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos entrevistados ao precisarem responder a algumas perguntas sobre o desenvolvimento de seu trabalho. A fim de amenizar este desconforto será mantido o anonimato das entrevistas. Além disso, asseguramos que você poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação.

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre a aprendizagem da geometria espacial no Ensino de Jovens Adultos através do uso de materiais manipuláveis e das tecnologias digitais, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A colaboração se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar a pesquisadora responsável no telefone [] ou e-mail [].

Fui ainda informado(a) de que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, ____ de _____ de _____.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa:

Apêndice B – Termo de Uso de Som e Imagem

**TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA UTILIZAÇÃO DE IMAGEM E SOM DE
VOZ PARA FINS DE PESQUISA**

Eu, _____,
autorizo a utilização da minha imagem e som de voz, na qualidade de participante no projeto de pesquisa intitulado “Investigações matemáticas na sala de aula: Curvas de Nível”, sob responsabilidade de Alice Borges Maestri vinculada à Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Minha imagem e som de voz podem ser utilizados apenas para transcrição da entrevista e análise por parte da equipe de pesquisa. Tenho ciência de que não haverá divulgação da minha imagem nem som de voz por qualquer meio de comunicação, sejam elas televisão, rádio ou internet, exceto nas atividades vinculadas ao ensino e a pesquisa explicitadas anteriormente. Tenho ciência também de que a guarda e demais procedimentos de segurança com relação às imagens e sons de voz são de responsabilidade da pesquisadora responsável.

Deste modo, declaro que autorizo, livre e espontaneamente, o uso para fins de pesquisa, nos termos acima descritos, da minha imagem e som de voz.

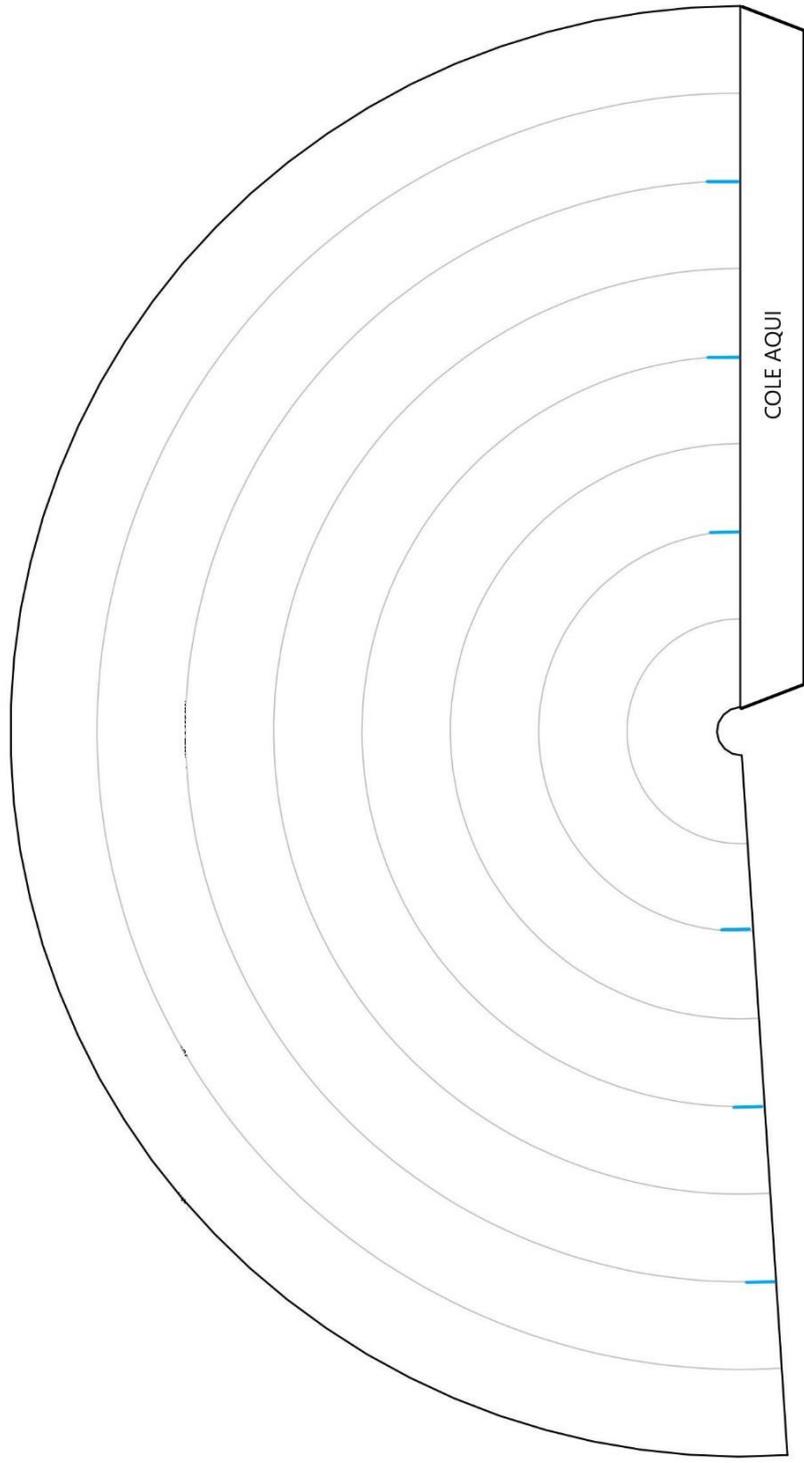
Este documento foi elaborado em duas vias, uma ficará com a pesquisadora responsável pela pesquisa e a outra com o(a) participante.

Porto Alegre, _____ de novembro de 2023.

Assinatura do (a) participante

Assinatura da pesquisadora
Alice Borges Maestri

Apêndice C – Cones planificados



Código:

Peça:

Material:

Espessura:

QTD:

Revisão:

Data:

Peso: kg

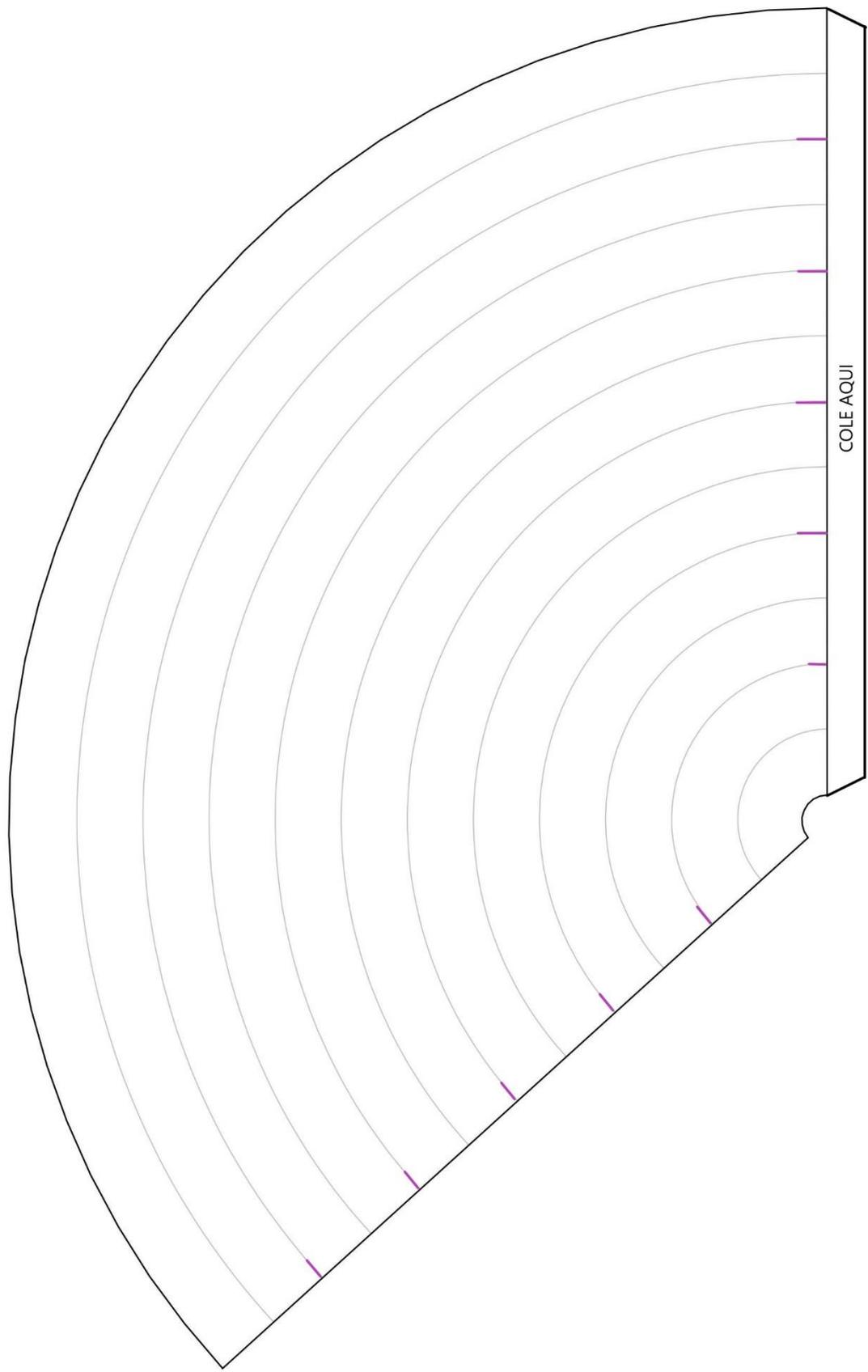
Projelista:

Unidade:

mm

Escala:

1:1



Código:

Material:

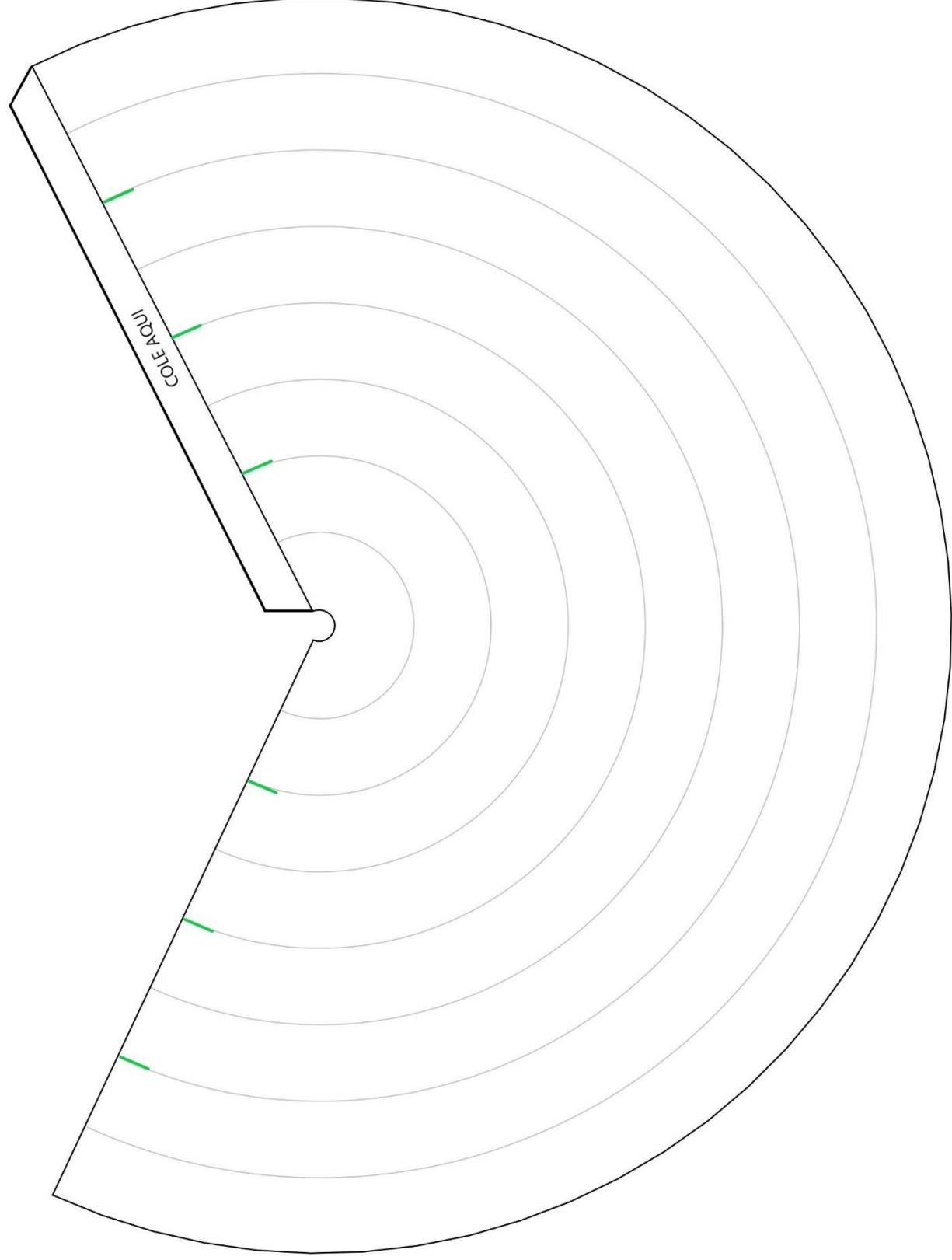
Revisão:

Peça:

Espessura:

Data:

QTD:



Código:

Peça:

Material:

Espessura:

QTD:

Revisão:

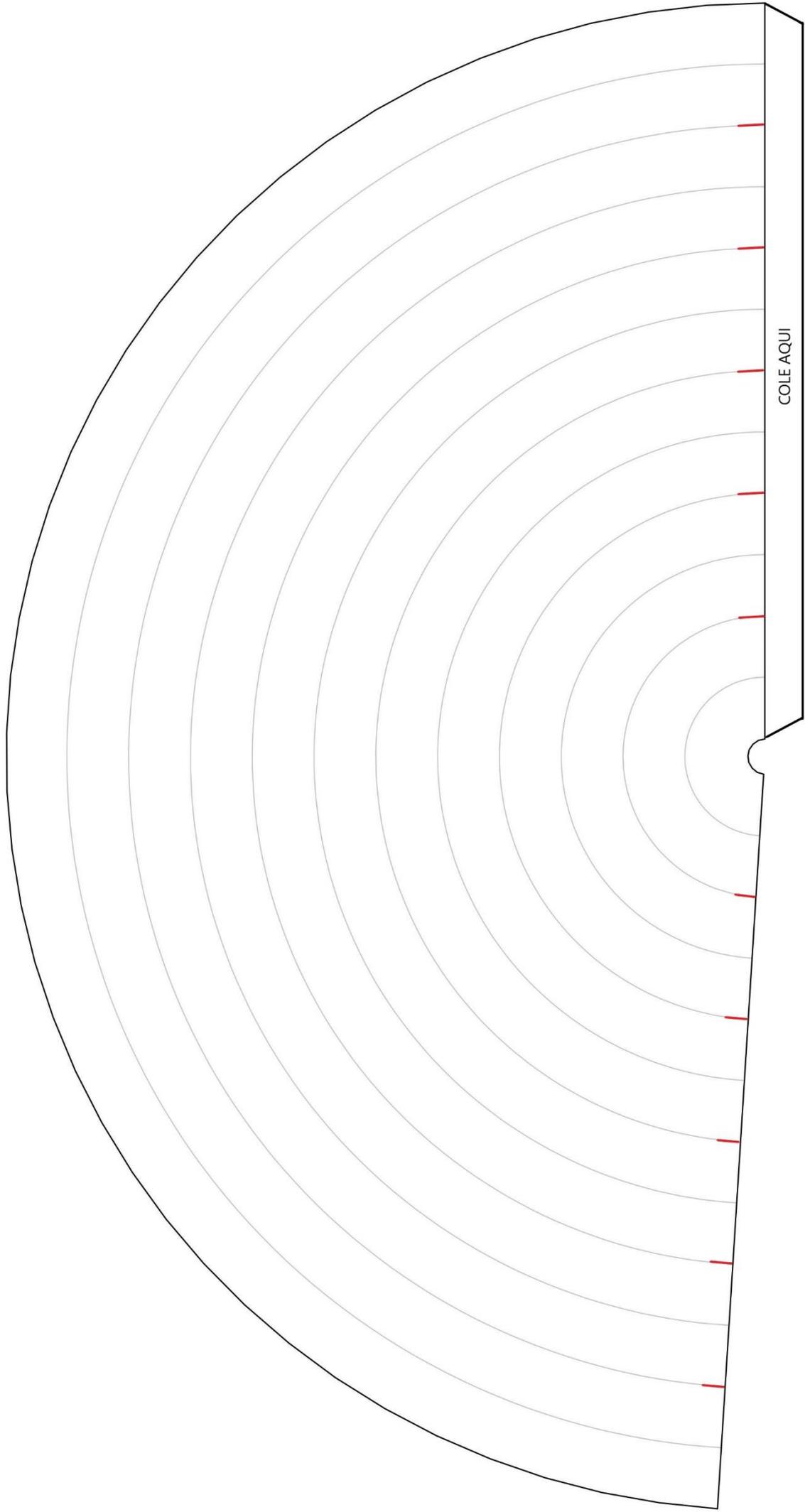
Data:

Peso: kg

Projetista:

Unidade: mm

Escala: 1:1



Código:

Peça:

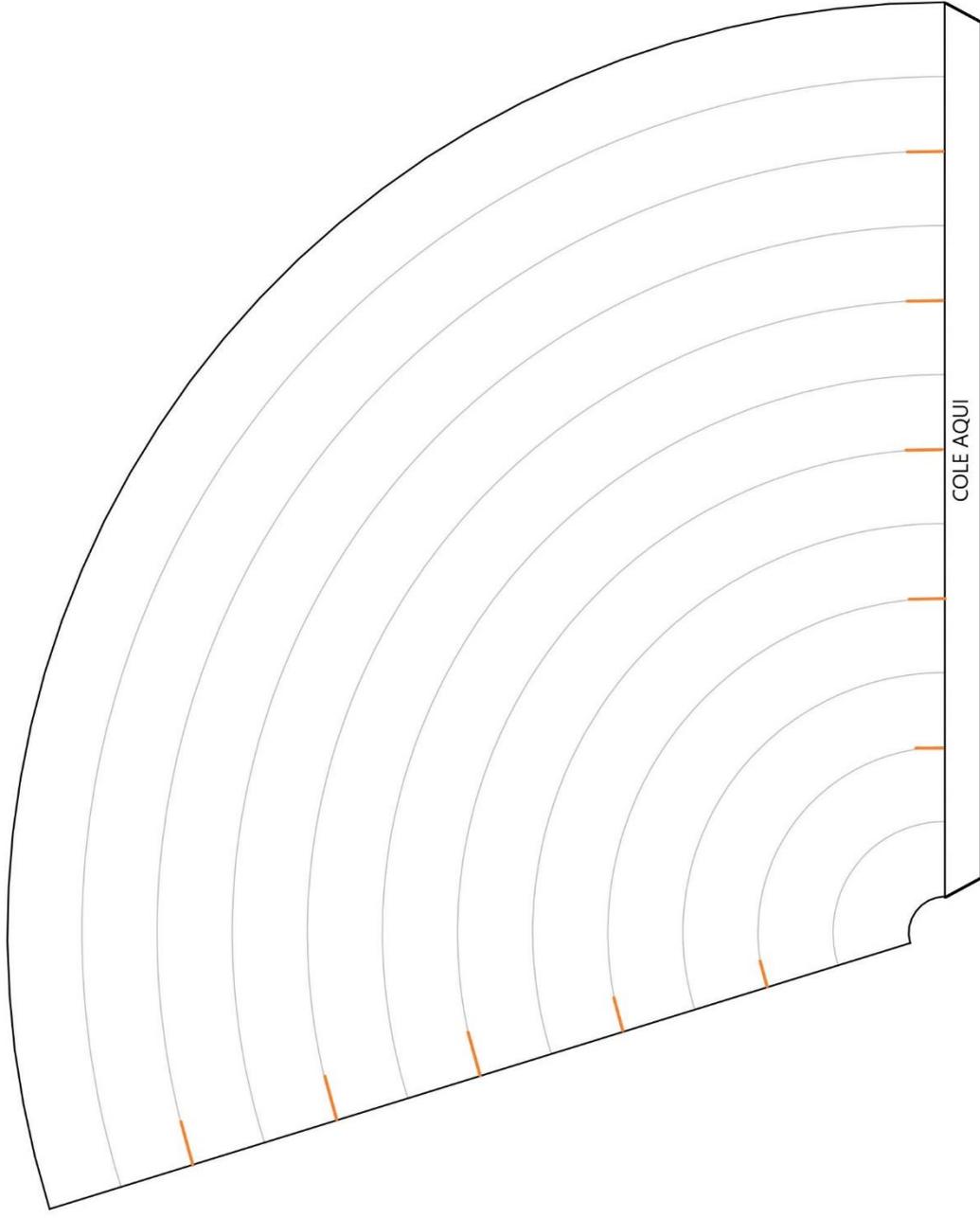
Material:

Espessura:

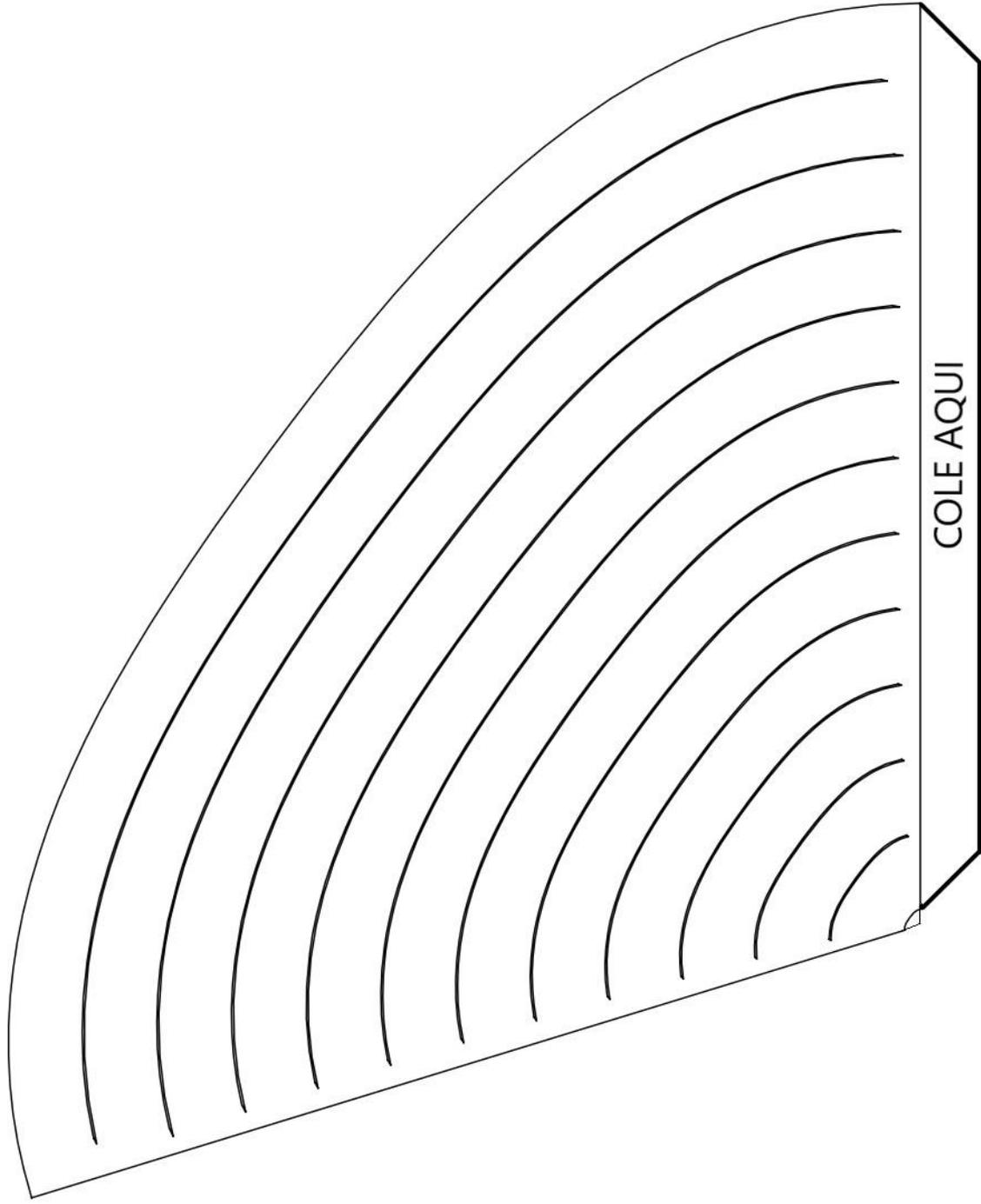
Revisão:

Data:

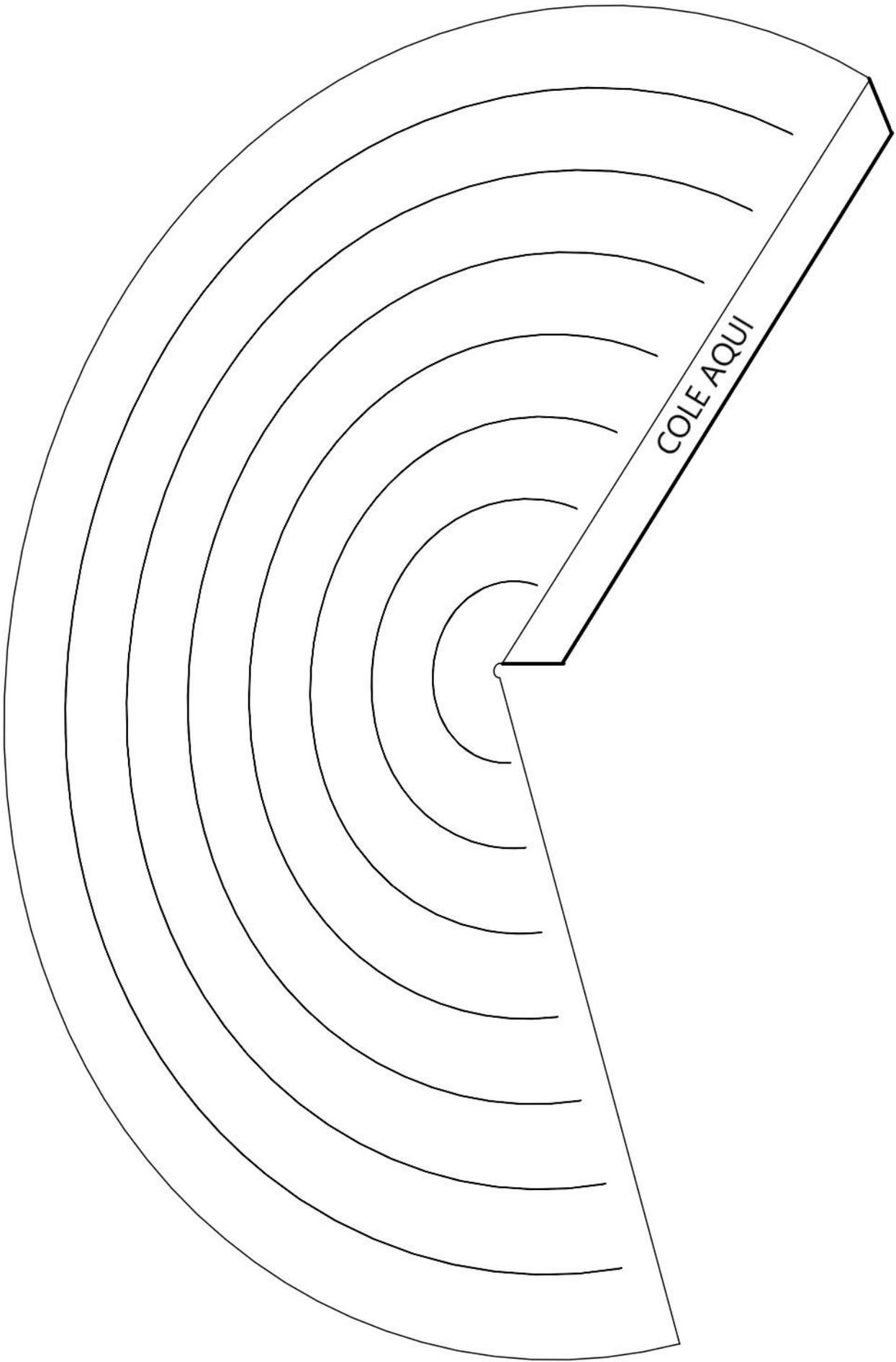
QTD:



Código:	Peça:	QTD:		
Material:	Espessura:			
Revisão:	Data:			
Peso: kg	Projefista:	Unidade: mm	Escala: 1:1	



Código:	Peça:	QTD:
Material:	Espessura:	
Revisão:	Data:	



Código:	Peça:	QTD:
Material:	Espessura:	
Revisão:	Data:	
Peso: kg	Projetista:	Unidade: mm Escala: 1:1

Apêndice D – Folha de atividades da Aula 3



Nome: _____ Data: _____

1) O que você consegue observar a partir da manipulação do Google Earth?

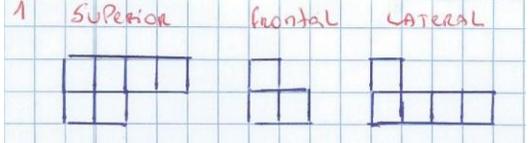
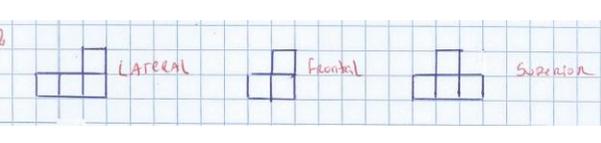
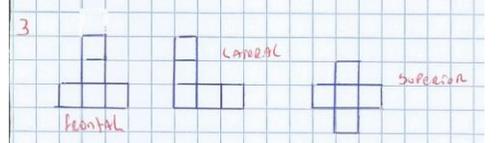
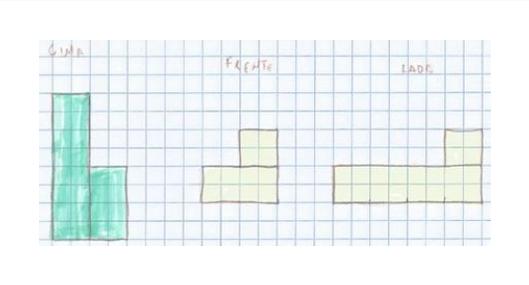
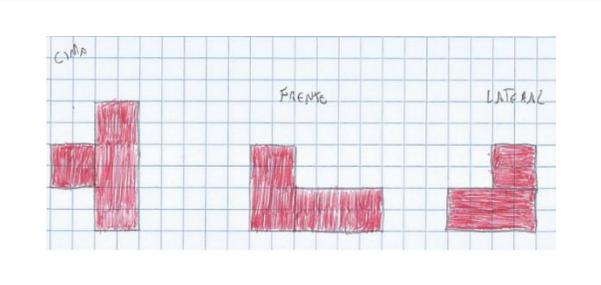
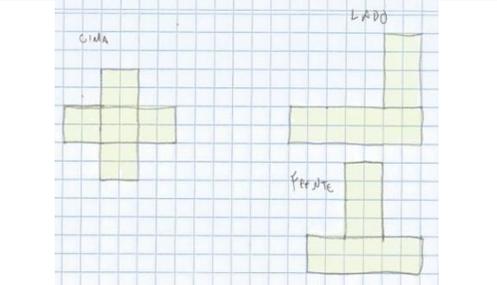
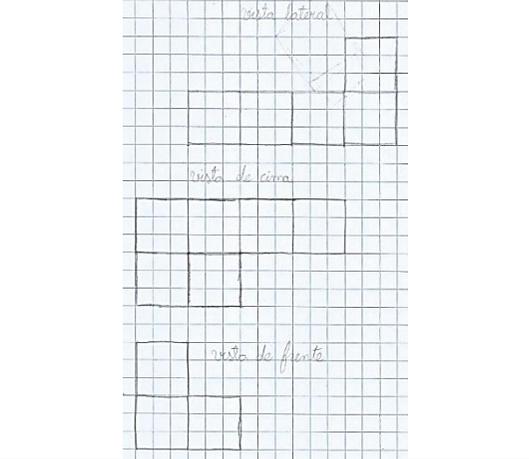
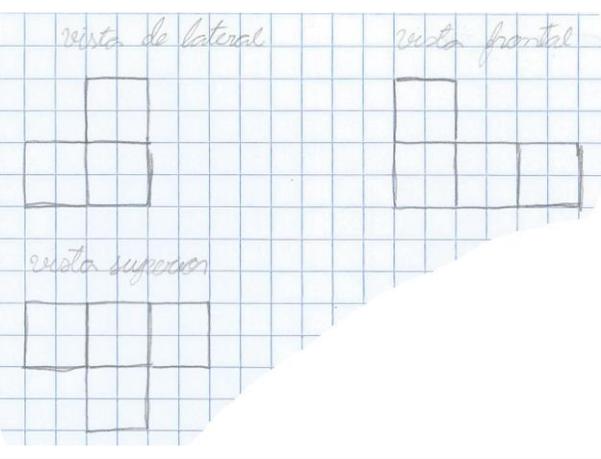
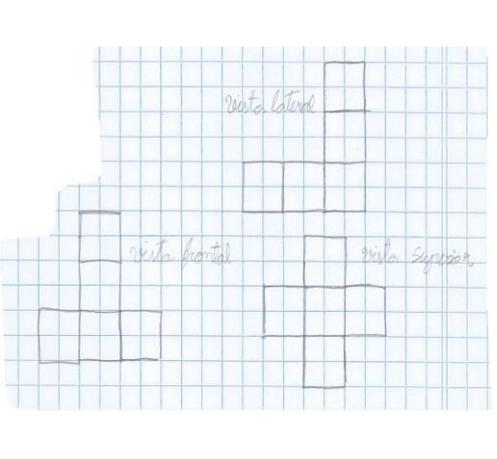
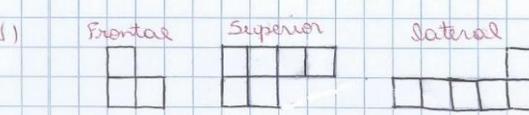
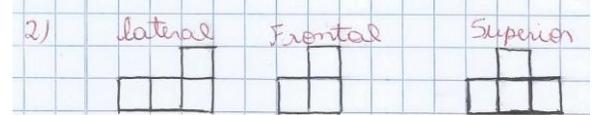
2) Qual a função do perfil de elevação?

3) Qual o morro mais alto da região? Qual é a sua altura?

4) Como podemos identificar se um lado do morro é mais íngreme do que o outro?

5) Escolha um dos morros da região e indique-o abaixo. Agora, qual seria o caminho mais suave para chegar ao topo?

Apêndice E – Desenhos da Aula 1 elaborados pelos estudantes

<p>E1</p>	<p>1 SUPERIOR frontal LATERAL</p> 	<p>2</p> 	<p>3</p> 
<p>E2 E8</p>	<p>CIMA FRENTE LADO</p> 	<p>CIMA FRENTE LATERAL</p> 	<p>CIMA LADO FRENTE</p> 
<p>E4 E11 E12</p>	<p>vista lateral vista de cima vista de frente</p> 	<p>vista de lateral vista frontal vista superior</p> 	<p>vista lateral vista frontal vista superior</p> 
<p>E5</p>	<p>1) Frontal Superior lateral</p> 	<p>2) lateral Frontal Superior</p> 	<p>3) Frontal lateral Superior</p> 

<p>E6</p>	<p>1) Lateral</p>	<p>2) Frontal</p>	<p>3) Frontal</p>
<p>E7</p>	<p>① Superior Frontal Lateral</p>	<p>Frontal Lateral & Superior</p>	<p>② Frontal Superior Lateral</p>
<p>E9</p>	<p>SUPERIOR</p>	<p>SUPERIOR</p>	<p>SUPERIOR</p>

E10

