UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

MATEMÁTICA DINÂMICA E O ARRASTAR NA APRENDIZAGEM DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS ISOMÉTRICAS COM GEOGEBRA

GISLAINE PROENÇA PRATO

Porto Alegre
2024

GISLAINE PROENÇA PRATO

MATEMÁTICA DINÂMICA E O ARRASTAR NA APRENDIZAGEM DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS ISOMÉTRICAS COM GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado ao Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.
Orientadora: Profª. Drª. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Porto Alegre
2024

CIP - Catalogação na Publicação

Prato, Gislaine Proença
Matemática Dinâmica e o Arrastar na Aprendizagem de Transformações Geométricas Isométricas com GeoGebra / Gislaine Proença Prato. -- 2024.
90 f.
Orientadora: Márcia Rodrigues Notare Meneghetti.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística, Licenciatura em Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2024.

1. Matemática Dinâmica. 2. Arrastar. 3. GeoGebra. 4. Transformações Isométricas. I. Meneghetti, Márcia Rodrigues Notare, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Matemática Dinâmica e o Arrastar na Aprendizagem de Transformações Geométricas Isométricas com GeoGebra

Gislaine Proença Prato

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso
Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS

Prof. Dr. Vandoir Stormowski
Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS

Dedico este trabalho aos meus pais, Rosane Proença e Gilson Prato que, em todos os momentos, SEMPRE estiveram ao meu lado.
Dando o apoio que eu precisava!

AGRADECIMENTOS

Gostaria de começar agradecendo aos meus pais, Gilson e Rosane, que são os meus melhores amigos, presentes em todos os momentos da minha vida, acompanhando o meu desenvolvimento, me apoiando, incentivando, ouvindo, aconselhando, me dando sempre muito amor e carinho. Independente de qual seja a situação, sei que sempre posso contar com vocês. Vocês são o meu porto seguro. Obrigada por sempre incentivarem os meus estudos e apoiarem meus sonhos. O tempo passa voando né? Me lembro como se fosse ontem, do primeiro dia que fomos até no Campus do Vale, descobrir o local da sala, na qual eu realizaria o vestibular. Ter vocês ao meu lado naqueles quatro dias de provas foi muito importante para mim. Amo vocês!

Para a minha avó Lourdes, obrigada por ser minha ouvinte, conselheira e amiga. Por tantos momentos alegres que compartilhamos juntas, desde quando pequena quando chegava na sua casa e íamos para cima da cama pular e brincar até hoje quando nos reunimos para conversar sobre a vida, olhar o insta, jogar duolingo e fazer aqueles lanchinhos bons que só você sabe fazer.

Dedico aqui também, todo o meu carinho aos tios, tias, primos, primas, dindo e dindas, com os quais compartilhei tantas experiências boas nos aniversários, festas do natal, fogo de chão, praia, carnaval, almoços e passeios. Gosto muito de estar com vocês. Obrigada por todo apoio. Também gostaria de agradecer a todos professores e amigos que me ajudaram ao longo de minha trajetória acadêmica na educação básica e no ensino superior.

Com um carinho especial, queria agradecer aos professores da banca, Vandoir e Marcus, por terem aceitado este convite. São professores incríveis, com os quais aprendi muito ao longo desta graduação. E também gostaria de agradecer à minha orientadora, professora Márcia, que me ajudou muito no processo de desenvolvimento desta pesquisa, me auxiliando com as dúvidas que tinha com o trabalho, revisando a minha escrita, indicando leituras, agendando reuniões para conversarmos sobre o andamento da pesquisa, planejamento das atividades no GeoGebra e experiências com a prática. Muito obrigada por ser uma orientadora super presente que me apoiou e motivou em todas as etapas dessa pesquisa e também na minha trajetória acadêmica.

Obrigada por tudo professora Márcia, por ser essa professora super querida e inspiradora.

Quando ingressei na graduação, conheci muitas pessoas legais que me ajudaram muito, principalmente nos primeiros semestres em que não conhecia nada. Gostaria de agradecer todo apoio e carinho dessas pessoas que conheci pelos campus, salas de aula, paradas do D43 e filas ‘gigantes’ dos RU. No início do meu primeiro semestre, conheci a minha madrinha de curso, Thef, que já era veterana nesse curso de matemática licenciatura. Uma madrinha incrível! Que me salvou em diversos momentos da graduação, me auxiliando com dúvidas sobre trabalhos acadêmicos, ensinando como acessar o portal do aluno no site da UFRGS, comprar os ‘tíquetes’ para o RU, me apresentando aos colegas, avisando sobre oportunidades de bolsas, entre tantas outras questões, ela é uma pessoa muito querida, amiga que levo no coração. Dentre os colegas queridos que a Thef me apresentou, teve a Júlia que também se tornou uma grande amiga no decorrer desse curso, me ajudando em vários momentos, compartilhando experiências, fazendo fofocas e rolezinhos. Obrigada por todo apoio amiga! Gostaria de agradecer a todos colegas queridos que tive a oportunidade de conhecer ao longo deste curso. Obrigada por toda ajuda e troca de experiências.

Queria agradecer pela parceria e amizade construída com o colega Rodrigo, na cadeira de estágio I. Foi muito bom ter a tua companhia e a do Thiago, conhecendo uma escola nova, planejando e ministrando aulas em mais de uma turma. Também gostaria de agradecer ao Fabio, pelas conversas, histórias matemáticas, debates nas monitorias de Geometria I, foram ótimos momentos de trocas. E também a amiga Brenda, que compartilhou comigo esses últimos momentos de correrias com trabalhos acadêmicos, funções de estágio e busca por escolas, e desenvolvimento do TCC. Muito obrigada por todo o apoio que me deu nesse momento importante, pelas boas conversas, risadas e desabafos.

Meu amigo Thiago, o colega que conheci nos primeiros dias de aula que disse que gostava de logaritmos se tornou um grande amigo com quem compartilhei tantos momentos dentro e fora da graduação, valeu por todas as ajudas com trabalhos, chamadinhas para troca de ideias, rolezinhos, companhias no RU e na espera dos ônibus. Difícil pensar em algum momento da graduação, em que você não estivesse ao meu lado. Meu parceiro de todos os momentos, tamo junto! ;)

João, meu querido parceiro de cafezinhos, quando te conheci não fazia ideia do quão longe você morava do Vale (achei alguém que morava mais longe que eu shshsh) e do amigo incrível que você se tornaria. Obrigada pelas explicações avançadas de cálculo, companhia no Vale, Faced, ônibus, trem e rolezinhos que deixavam o meu dia mais alegre.

Lucas, o amigo com quem eu compartilhei tantas conversas sobre as aulas e sobre a vida também, aquele amigo que sabia que podia chamar a qualquer hora, seja para pedir ajuda com os trabalhos, fazer alguma fofoca, jogar um joguinho, reclamar da quantidade de trabalhos acumulados ou dividir uma caixa de bis no Vale.

Pedro, outro amigo importante com quem sei que posso contar, obrigada por todas as parcerias nas aulas, trabalhos em grupo, experiências compartilhadas como professor em sala de aula e todo apoio e incentivo no decorrer deste curso. E obrigada por ser aquele amigo que sempre pilhava as nossas propostas de rolezinhos.

Para finalizar, gostaria de agradecer à professora Catiane e a turma 82, que me acolheram muito desde o início do meu período de estágio na escola e aceitaram a proposta desta pesquisa. Sem vocês esse trabalho não seria possível. Muito obrigada por todo apoio e carinho.

RESUMO

Este trabalho trata de uma pesquisa de caráter qualitativo, na qual investigamos as possibilidades de uso de Tecnologias Digitais em sala de aula, em particular, a matemática dinâmica e os tipos de arrastar no estudo das Transformações Geométricas de Reflexão, Translação e Rotação. A pergunta diretriz sobre a qual esta pesquisa se desenvolveu é: “De que forma o GeoGebra, software de matemática dinâmica, pode auxiliar no processo de aprendizagem dos estudantes sobre as transformações geométricas do tipo isométricas?”. Na busca por respostas a essa pergunta, pesquisas por trabalhos correlatos foram realizadas, além de estudo teórico para sustentar a pesquisa. Também foram realizados planejamento e análise de atividades dinâmicas, sobre as transformações isométricas. As atividades dinâmicas planejadas, organizadas em cinco encontros, foram aplicadas com estudantes do oitavo ano do ensino fundamental, de uma escola da rede pública localizada em Esteio. Podemos considerar que essas atividades auxiliaram os estudantes em seus processos de aprendizagem sobre as transformações geométricas do tipo isométricas, apresentando situações que os incentivaram a realizar explorações, formular e validar conjecturas sobre esse conteúdo. Além de algumas atividades também apresentarem a possibilidade dos estudantes realizarem suas próprias construções, pensando em conjunto com a tecnologia e, dessa maneira, desenvolvendo o seu pensamento matemático.

Palavras-chave: Matemática Dinâmica. Arrastar. GeoGebra. Transformações Isométricas.

ABSTRACT

This work is qualitative research, in which we investigate the possibilities of using Digital Technologies in the classroom, in particular, dynamic mathematics and the types of dragging in the study of Geometric Transformations of Reflection, Translation and Rotation. The guiding question on which this research was developed is: “How can GeoGebra, dynamic mathematics software, help students’ learning process about isometric geometric transformations?”. In the search for answers to this question, searches for related works were carried out, theoretical study and planning and analysis of dynamic activities, on isometric transformations. The planned dynamic activities, organized in five meetings, were applied with students in the eighth year of elementary school, from a public school located in a metropolitan region, Esteio. We can consider that these activities helped students in their learning processes about isometric geometric transformations, presenting situations that encouraged them to carry out explorations, formulate and validate conjectures about this content. In addition, some activities also present the possibility for students to carry out their own constructions, thinking together with technology and, in this way, developing their mathematical thinking.

Palavras-chave: Dynamic Mathematics. Dragging. GeoGebra. Isometric Transformations.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Nos anos finais da Educação Básica, comecei[1] a interessar-me pelas tecnologias digitais, por meio de aplicativos que possibilitavam organizar notas no próprio celular, uso de editores de fotos, whatsapp, instagram, google drive, o qual pode ser entendido como um serviço onde se pode armazenar arquivos na nuvem e editar documentos de forma coletiva, entre outros meios tecnológicos que estão presentes em nosso cotidiano.

Por meio dessas experiências pessoais e trabalhos de pesquisa sobre tal assunto, meu interesse pelas tecnologias digitais só foi aumentando no decorrer dos anos. Mas nessa época ainda não pensava muito nas relações desses recursos tecnológicos com a aprendizagem matemática.

Logo que ingressei na graduação, no curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, em 2020, fomos todos surpreendidos, nas primeiras semanas de aula, por um vírus desconhecido, que foi chamado de Covid19. Com esse vírus, veio o período de quarentena, que durou muito mais do que 40 dias, e passamos a vivenciar o ERE (Ensino Remoto Emergencial).

A partir das experiências no ERE, com aulas síncronas e assíncronas, sem os encontros presenciais com os colegas, professores, amigos e familiares, percebi o quanto as Tecnologias Digitais podem ser importantes para auxiliar no desenvolvimento das aprendizagens dos estudantes.

Quando estava no ensino médio, aprendi um pouco sobre o GeoGebra, mas foi quando comecei a cursar a cadeira de Geometria I, no primeiro semestre da Graduação, que comecei a explorar o ambiente dinâmico desse software, conhecer melhor as ferramentas dessa multiplataforma e me interessar cada vez mais por ele e suas diversas funcionalidades.

O GeoGebra pode ser compreendido como um software de matemática dinâmica, que apresenta diversas ferramentas as quais podem ser usadas para trabalhar por meio de explorações e manipulações com conteúdos algébricos, geométricos, aritméticos, gráficos e estatísticos. Ele também é um software gratuito que pode ser acessado tanto

[1] Adotaremos a primeira pessoa do singular na abertura deste capítulo visto que esta se trata de uma narrativa pessoal da autora.

pelo computador quanto pelo celular.

Há aplicativos do GeoGebra que podem ser baixados em celulares ou tablets. Mas este também pode ser baixado em computadores e ainda possui uma versão online[2], com a qual iremos trabalhar nesta pesquisa.

Quando fazia uso desse software na cadeira de Geometria I do curso de Licenciatura em Matemática, uma das características que gostava muito neste programa era o seu ambiente dinâmico e fértil para explorações. Nele, era possível criar pontos que poderiam ser arrastados pela tela e, por meio deles, construir polígonos, circunferências, retas, segmentos de retas de forma dinâmica, que no papel não era possível.

A partir de construções dinâmicas no GeoGebra, eu podia realizar minhas explorações e, pensando em conjunto com essa tecnologia, construir conjecturas e identificar propriedades preservadas sob a ação do movimento (arrastar) desenvolvendo, assim, meu pensamento matemático.

Assim, a pergunta diretriz desta pesquisa é: **De que forma o GeoGebra, software de matemática dinâmica, pode auxiliar no processo de aprendizagem dos estudantes sobre as transformações geométricas do tipo isométricas?**. Com este trabalho, objetivamos compreender como o software GeoGebra pode auxiliar os estudantes nas suas aprendizagens sobre as transformações geométricas do tipo isométricas.

Na busca por respostas à pergunta diretriz, foi realizada uma revisão de literatura sobre assuntos relacionados ao foco desta pesquisa, GeoGebra e transformações isométricas e um estudo teórico sobre aspectos importantes do ambiente dinâmico, como a ação de arrastar. Também, atividades dinâmicas, sobre as transformações geométricas de reflexão, translação e rotação, foram planejadas para serem exploradas no GeoGebra, durante o experimento prático que realizamos neste trabalho, com estudantes do oitavo ano do ensino fundamental de uma escola da rede pública.

Apresentaremos esses processos com mais detalhes nos próximos capítulos desta pesquisa: Referencial Teórico; Trabalhos Inspiradores e Correlatos; Metodologia; Experimento Prático: Relatos e Análises; e Considerações Finais.

[2]Disponível em: https://www.geogebra.org/. Acesso em: 20 maio 2024.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo está organizado em três seções, com as quais buscamos dar sustentação teórica para esta pesquisa. Nessas seções falaremos sobre as Tecnologias Digitais, que estão cada vez mais presentes em nosso cotidiano; a Matemática Dinâmica, que pode ser um ambiente fértil para explorações e aprendizagens matemáticas; as diferentes modalidades do arrastar e suas possíveis contribuições no processo de aprendizagem dos estudantes; o GeoGebra, que é um ambiente de matemática dinâmica; e as Transformações Geométricas do tipo isométricas.

2.1 TECNOLOGIAS DIGITAIS

A tecnologia está ao nosso redor, é difícil pensar nos dias de hoje, na execução de alguma atividade que não envolva o uso de alguma tecnologia, ainda mais se pararmos para pensar que tecnologias não são apenas os computadores, smartphones, softwares e sites que consultamos, mas é algo que vai muito além disso.

Por exemplo, o livro didático, o caderno e o lápis também são tecnologias, e o uso desse termo abrange mais do que a questão de considerar objetos, equipamentos eletrônicos, ferramentas que fazem uso da internet, entre outros dispositivos como tecnologias, pois “ela engloba, também, os conhecimentos para planejar, construir e utilizar tais dispositivos.” (Chiari, 2018, p. 353). Kenski (2007) comenta sobre isto ao explicar que:

> Ao conjunto de conhecimentos e princípios científicos que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade, chamamos de “tecnologia”. Para construir qualquer equipamento – uma caneta esferográfica ou um computador – os homens precisam pesquisar, planejar e criar o produto, o serviço, o processo. Ao conjunto de tudo isso, chamamos tecnologias (Kenski, 2007, p. 24).

Se em alguns anos atrás, na época em que não se tinha internet, fosse dito para as pessoas que no futuro existiriam tipos de telefones com telas digitais (smartphones), onde se poderia utilizá-los para se comunicar com outras pessoas que moram longe, talvez em outra cidade ou país, e se poderia, além de ouvir a sua voz vê-las e conversar com elas de forma instantânea, será que eles acreditariam que isso e muito mais seria possível?

Os avanços tecnológicos vêm crescendo de forma extremamente rápida e nesse processo de avanços, as tecnologias mudam a forma de pensar dos seres humanos que, por sua vez, mudam as tecnologias, ou seja, “há uma fusão de tecnologia que age com humanos em uma relação dialética de moldagem recíproca, na qual a tecnologia transforma e é transformada por humanos” (Chiari, 2018, p. 362).

E se a tecnologia está tão presente no cotidiano das pessoas, com certeza ela estará presente no ambiente escolar e o questionamento que fica é: Como aproveitar as potencialidades desses recursos tecnológicos para auxiliar nos processos de aprendizagem dos estudantes?

O uso das tecnologias digitais na sala de aula não serve para tornar as aulas mais atrativas e “diferentes”, mas sim para auxiliar no desenvolvimento da aprendizagem.

> A respeito da integração de recursos computacionais na sala de aula de Matemática, temos como meta uma incorporação efetiva à prática docente – sem que o computador se reduza a um mero adereço, alegórico para a abordagem, e que a aula no laboratório de informática adquira um caráter de curiosidade, desconectada da aula “de verdade”, aquela com quadro negro e giz (Giraldo, 2012, p.7).

De acordo com Basso e Notare (2015), “os recursos tecnológicos e a possibilidade de representação e manipulação de objetos matemáticos abrem novas possibilidades para o pensamento matemático” (Basso; Notare, 2015, p.3). Com o uso de tecnologias digitais em aulas de matemática, os estudantes podem, ao interagir com estas, realizar explorações, formar, testar e validar conjecturas.

As tecnologias digitais podem ser utilizadas em sala de aula para possibilitar aos estudantes pensar sobre um determinado problema, pois, às vezes, pode ser difícil de se trabalhar com alguns problemas matemáticos utilizando apenas lápis e papel. Alguns problemas demandam dos estudantes “a realização de experiências com objetos matemáticos, para possibilitar a observação de seus comportamentos diante da manipulação de seus elementos.” (Basso; Notare, 2015, p. 4).

Há tecnologias digitais que trabalham com um ambiente de matemática dinâmica, que podem ser um ambiente fértil para provocar explorações matemáticas em sala de aula. Na seção a seguir, comentaremos sobre a matemática dinâmica e uma dessas tecnologias, o software GeoGebra.

2.2 MATEMÁTICA DINÂMICA

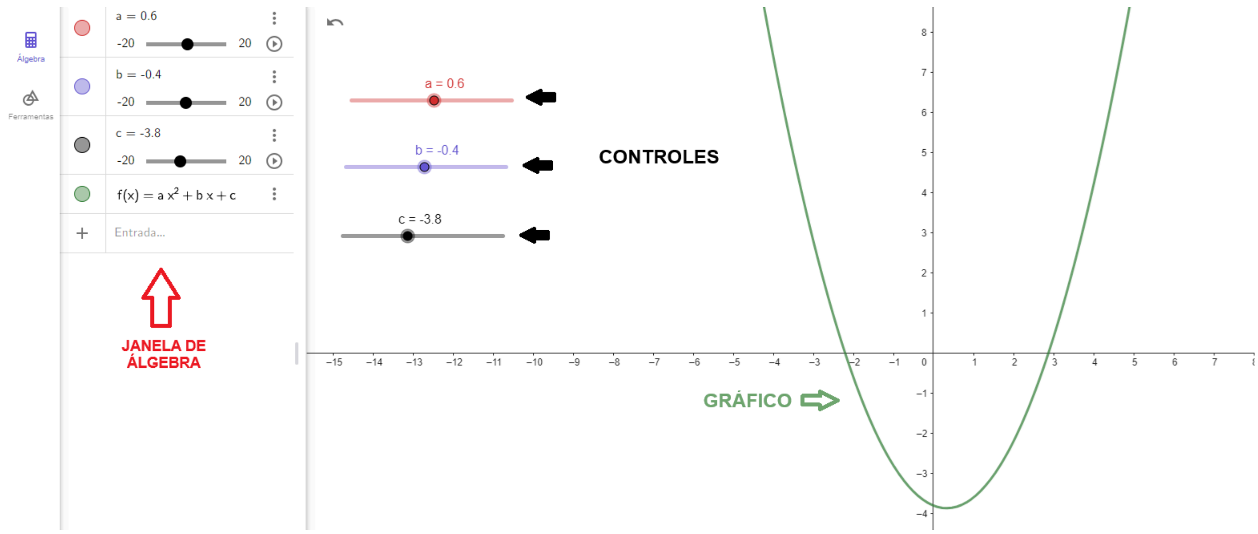
Na matemática dinâmica podemos explorar a ação do movimento e quais os efeitos deste sobre determinados objetos matemáticos. Por exemplo, imagine que você é uma professora de matemática que pretende dar uma aula sobre funções de segundo grau $(f(x) = ax^2 + bx + c;\ a, b, c \in \mathbb{R}\ e\ a \neq 0)$ para uma turma de estudantes do ensino médio e pretende explicar sobre o comportamento dos gráficos dessas funções e como as mudanças nos valores dos coeficientes a, b, c influenciam nesse comportamento.

Numa explicação a ser realizada no quadro, para cada escolha de valores para os coeficientes a, b, c será necessário fazer o desenho de um novo gráfico. Mas se essa aula pudesse ser realizada num laboratório de informática onde os estudantes tivessem acesso a softwares de matemática dinâmica, estes poderiam analisar o movimento e alterações que ocorreriam em um mesmo gráfico de acordo com mudanças provocadas nos valores dos coeficientes a, b, c. Algo que pelos esboços de gráficos estáveis no quadro não seria possível realizar.

O GeoGebra, que será apresentado mais detalhadamente na seção seguinte, é um exemplo de software que poderia ser utilizado na situação descrita acima. A professora poderia construir, utilizando a ferramenta “controle deslizante” do software, três controles, nomeados a, b, c, e digitar na caixa de entrada da janela de álgebra, que tal software dispõe, a equação $ax^2 + bx + c$, para que os próprios estudantes pudessem movimentar os controles, explorando valores para os coeficientes da equação e analisando o que acontece com o gráfico cada vez que movimentam um desses controles. Na Figura 01, podemos observar a representação dessa possível construção[3] realizada no GeoGebra.

[3]Disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/xxajnctj. Acesso em: 07 jun. 2024.

Figura 01 - Construção dinâmica da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ no GeoGebra



Fonte: Acervo da autora

Poder explorar o movimento de objetos matemáticos tais como gráficos e construções geométricas em ambientes de matemática dinâmica é algo que pode ser enriquecedor no processo de aprendizagem de um estudante. Este, por sua vez, se torna um protagonista de seus estudos e de forma ativa e autônoma pode fazer suas explorações, elaborar e verificar suas conjecturas e, dessa maneira, desenvolver o seu pensamento matemático.

Em estudos de geometria, esses ambientes de matemática dinâmica podem proporcionar ao usuário experiências com objetos matemáticos que não poderiam ser realizadas apenas com lápis e papel. Nesse tipo de ambiente, os objetos matemáticos tornam-se um recurso para representações e manipulações por parte dos estudantes, que visam auxiliá-los a compreender o assunto estudado.

Retore (2023) apresenta, em seu trabalho de conclusão de curso, um exemplo de situação na qual podemos observar uma possibilidade de como utilizar a matemática dinâmica no estudo de uma transformação geométrica de rotação, fazendo algo que não conseguiríamos realizar apenas com lápis e papel.

> (...) a rotação de uma figura em torno de um ponto, por exemplo, em um caderno ou livro didático pode ser representada por dois desenhos ou duas imagens em posições diferentes, mas à mesma distância de um ponto, com uma seta curva indicando a transformação. No GeoGebra, uma possibilidade é a construção de um controle deslizante c e utilizar a ferramenta Rotação em

> Torno de um Ponto, selecionando a figura, um ponto P qualquer e atribuindo c ao ângulo de rotação. Com isso, ao manipular c, é possível acompanhar a rotação da figura como um movimento circular em torno de P. Além disso, ativando a opção “exibir rastro” da figura, é possível acompanhar as posições que esta assumiu durante o movimento, pois o GeoGebra cria imagens estáticas da figura em tais posições (Retore, 2023, p.19).

Recursos tecnológicos, como o GeoGebra, podem auxiliar os estudantes a expandirem o seu pensamento matemático a fim de, por meio meio de manipulações de objetos matemáticos dinâmicos, conseguirem, em situações futuras semelhantes à esta descrita por Retore (2023), compreender ou, no caso de um problema, construir possíveis soluções.

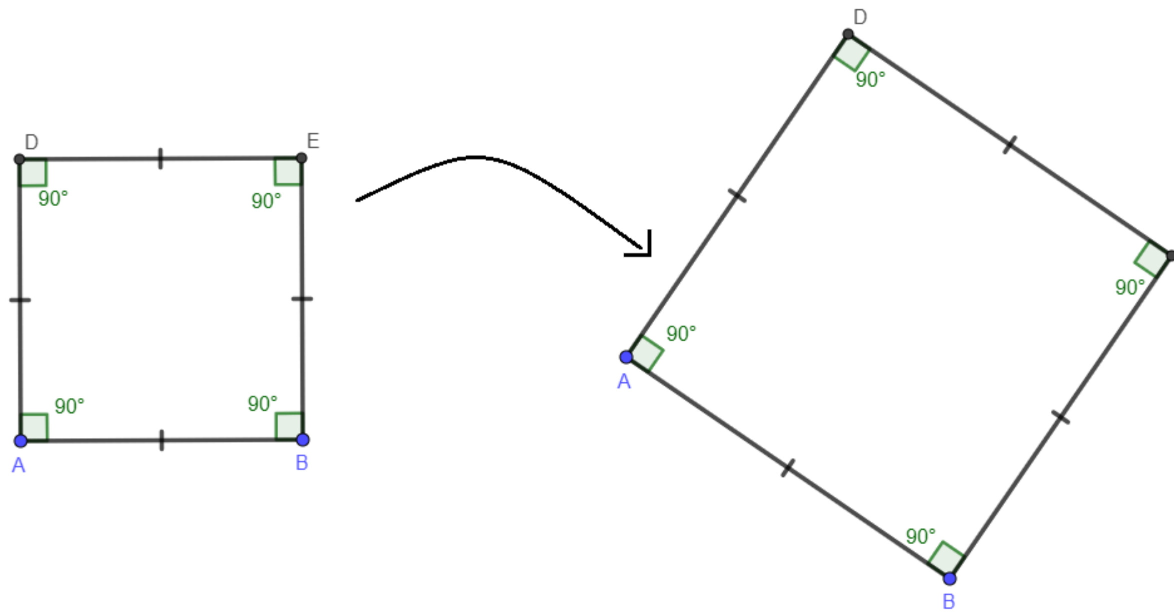
Basso e Notare (2015) também comentam sobre essa questão, afirmando que “os alunos que experimentam situações nas quais é possível movimentar e modificar objetos geométricos na tela do computador, começam a aprender como realizar os mesmos tipos de experiências em suas mentes, na ausência do recurso tecnológico.” (Basso; Notare, 2015, p.3).

Nesses ambientes de Matemática Dinâmica também podemos estudar figuras que são estáveis sob ação do movimento, em outras palavras, são figuras que possuem certas propriedades que a definem. Mesmo quando estas são movimentadas e alteradas, suas propriedades essenciais são preservadas.

Um quadrado poderia ser um exemplo de figura estável sob ação do movimento. No GeoGebra, poderia-se fazer a construção de um quadrado com dois pontos móveis[4] que mesmo quando arrastados, provocando mudanças na figura, manteriam as propriedades que a definem como um quadrado. Na Figura 02 podemos observar uma ilustração dessa situação.

[4] Pontos que podem ser arrastados (movimentados) em ambientes dinâmicos como o GeoGebra.

Figura 02 - Movimento dos pontos móveis A e B do quadrado ABDE no GeoGebra



Fonte: Acervo da autora

Apesar de movimentar (arrastando na janela de visualização do GeoGebra) os pontos móveis A e B do quadrado ABDE alterando, dessa forma, seu tamanho e orientação, este não deixou de ser um quadrado, pois foi construído a partir de propriedades geométricas que o definem.

Ao escolher trabalhar com uma didática que aborda a exploração do arrastar, o professor assumirá um papel de mediador nos processos investigativos do estudante. Nesses processos, o papel do professor é incentivar os estudantes a realizarem suas próprias explorações, arrastando objetos matemáticos pela tela para conjecturar e identificar propriedades pertinentes; apresentando problemas que os motivem a pensar, em conjunto com essa tecnologia, sobre possíveis soluções para estes; fazendo questionamentos sobre o que eles observam com suas explorações, motivando-os a construir conjecturas sobre o objeto matemático que estão explorando; e auxiliá-los com as dúvidas que vão surgindo ao longo desse processo. Esse é um caminho que faz com que o estudante se torne ativo e autônomo em seu processo de aprendizagem.

O uso de um software de geometria dinâmica envolve muito mais do que um objeto (um desenho por exemplo), pois também trabalha com as percepções físicas dos estudantes, seus movimentos, linguagens e instrumentos mediadores utilizados por estes durante seus processos investigativos feitos no software (Arzarello et al, 2002).

O arrastar dá suporte à formação de conjecturas dos estudantes. Quando estes movimentam uma determinada figura (arrastando os seus “pontos móveis”), podem analisar o que acontece com ela, se a sua forma irá mudar ou não e assim, ir formando conjecturas e compreendendo melhor suas propriedades (Arzarello et al, 2002).

Arzarello et al (2002) comentam que o processo de arrastar oferece um feedback ao estudante que está fazendo uma determinada atividade de exploração no software, o que o auxilia neste momento, classificado pelos autores como “fase da descoberta”, e dá suporte ao momento seguinte, com as explicações dessas conjecturas e propriedades que o assunto que está sendo estudado aborda.

Arzarello et al (2002) explicam sobre as diferentes modalidades do arrastar (Quadro 01) que podemos identificar em uma atividade exploratória. Neste trabalho, focaremos o estudo sobre duas dessas modalidades: Arrastar Vagando e Arrastar Teste.

Quadro 01 - Modalidades do Arrastar

Modalidade - Arrastar	**Explicação**
Wandering dragging (arrastar vagando)	Mover aleatoriamente pontos básicos na tela com a finalidade de descobrir configurações ou regularidades nos desenhos.
Bound dragging (arrastar vinculado)	Mover um ponto que está vinculado a um objeto, o qual limita o seu movimento.
Guided dragging (arrastar guiado)	Mover os pontos básicos da figura a fim de formar uma forma particular.
Dummy locus dragging (arrastar por um lugar geométrico ou “locus”)	Mover um ponto básico sobre um lugar geométrico, que não é visível para o estudante, com a finalidade de se preservar uma propriedade da figura a ser descoberta por este. Nem sempre o estudante percebe que ele está movimentando o ponto ao longo desse lugar geométrico.
Line dragging (arrastar linha)	Mover novos pontos ao longo de uma linha (não o objeto linha) a fim de preservar a regularidade da figura.
Linked dragging (arrastar ligado)	Ligando um ponto a um objeto e o movimentando sobre este objeto.
Dragging test (arrastar teste)	Os pontos arrastáveis ou semi-arrastáveis são movimentados com o objetivo de testar se a figura construída possui as propriedades geométricas as quais se pretendia que esta possuísse.

Fonte: Arzarello et al (2002, p.67)

Suponha que uma estudante comece a explorar um polígono, de quatro lados, construído num software de matemática dinâmica. Então, durante essa exploração, ela percebe que pode movimentar três dos quatro pontos (vértices) desse polígono, logo, arrastando de forma aleatória esses pontos ela começa a perceber certas regularidades presentes nessa construção: independente do movimento que ela faça, alterando o tamanho e orientação desse polígono, ela percebe que os seus quatro lados sempre apresentam o mesmo tamanho, ou seja, a congruência dos lados é preservada, e os ângulos internos opostos também permanecem congruentes. Esse é um exemplo de situação em que a estudante faz uso do arrastar vagando para formar conjecturas, buscando compreender as propriedades dessa construção, a qual era um losango.

Agora, se partíssemos do pressuposto de que essa construção do losango tivesse sido realizada por esta estudante, e então ela começasse a arrastar os pontos arrastáveis e semi-arrastáveis de sua construção para verificar se as propriedades do losango estavam sendo preservadas, teríamos um exemplo do uso do arrastar teste.

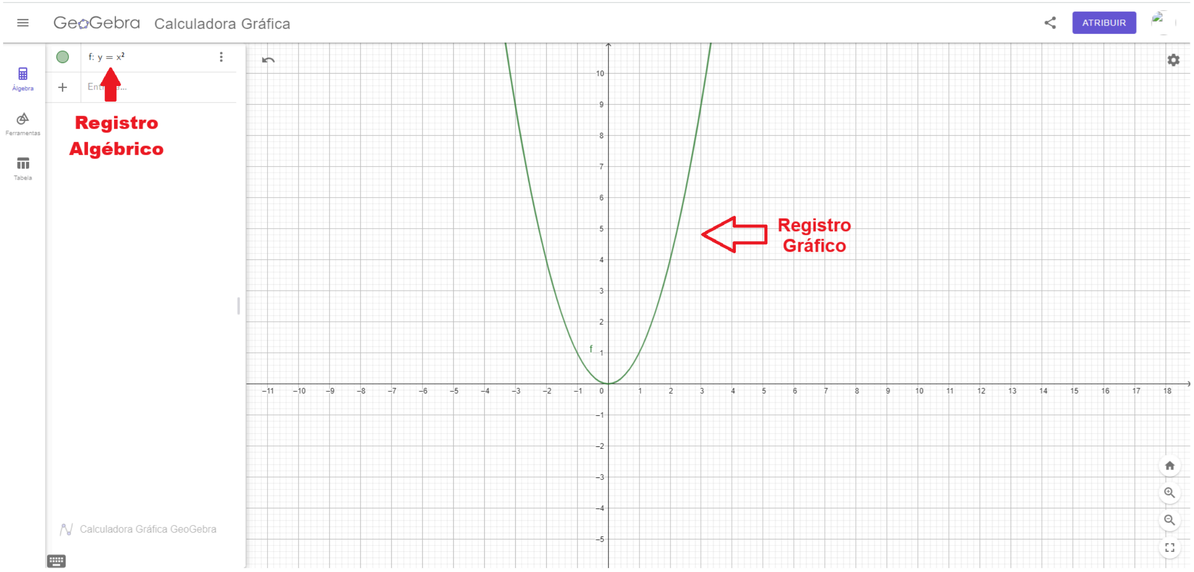
Um possível software de matemática dinâmica em que se pode explorar esses tipos de arrastar, apresentados por Arzarello et al (2002), é o GeoGebra, o qual apresentaremos com mais detalhes na seção a seguir.

2.3 GEOGEBRA

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica que foi desenvolvido em 2001 por Markus Hohenwarter, professor do Departamento de Matemática Aplicada da Universidade de Salzburgo, Áustria (Pereira, 2017). E desde então, esse software vêm sendo atualizado e ganhando destaque pelo seu dinamismo e diversidade de conteúdos matemáticos (como álgebra, estatística, geometria bidimensional e tridimensional) que podem ser explorados com o uso deste, além das análises que podem ser realizadas ao se comparar os diferentes registros (como algébricos, geométricos e gráficos) de um mesmo objeto matemático.

Na Figura 03, podemos analisar um exemplo de uma situação, na qual os registros algébricos e gráficos da equação $y = x^2$ são apresentados juntos nas janelas de visualização do GeoGebra.

Figura 03 - Registro Algébrico e Gráfico da equação $y = x^2$ no GeoGebra



Fonte: Acervo da autora

Na interface da Calculadora Gráfica da versão online do GeoGebra, podemos observar a apresentação simultânea dos registros algébricos e gráficos que tal software possibilita.

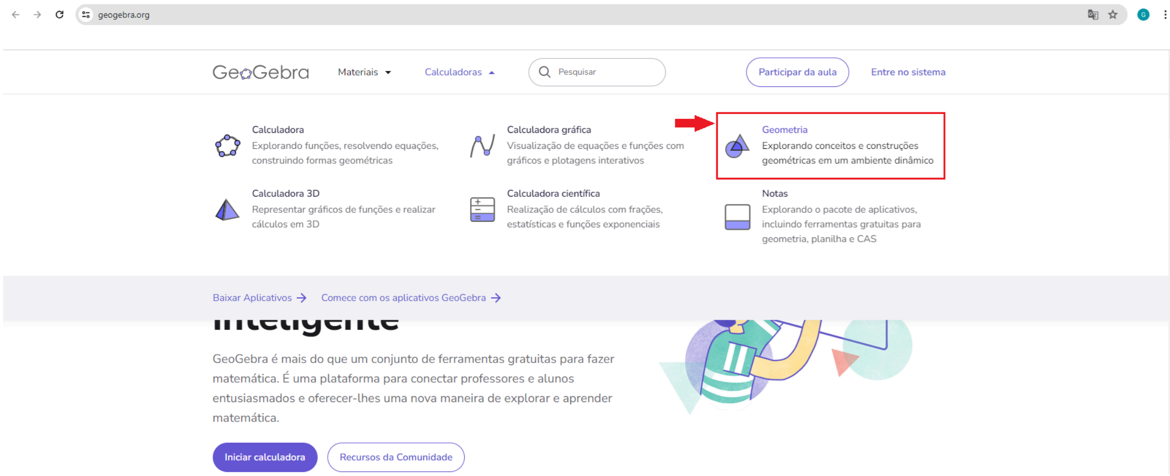
A palavra GeoGebra deriva da junção de duas palavras, Álgebra e Geometria, pois essa multiplataforma permite a possibilidade de se trabalhar, de forma simultânea, com essas duas áreas. Pereira comenta, em sua dissertação, que a origem da palavra GeoGebra vem do uso que pode ser dado a esse software (Pereira, 2017).

Este software pode ser baixado em computadores e notebooks ou acessado em celulares/tablets, por meio de aplicativos. Seu uso é gratuito e este também, como demonstrado na situação apresentada na Figura 03, pode ser utilizado de forma online.

O GeoGebra é um software livre, portanto, faz parte do movimento que concede liberdade aos usuários de poderem acessá-lo e, caso haja interesse no assunto, contribuir para sua construção, pelo fato de seu código ser aberto (Pereira, 2017).

Nesta pesquisa, faremos uso da calculadora de Geometria da versão online do GeoGebra. A Figura 04 indica onde esta pode ser localizada quando acessamos a página inicial da versão online do GeoGebra.

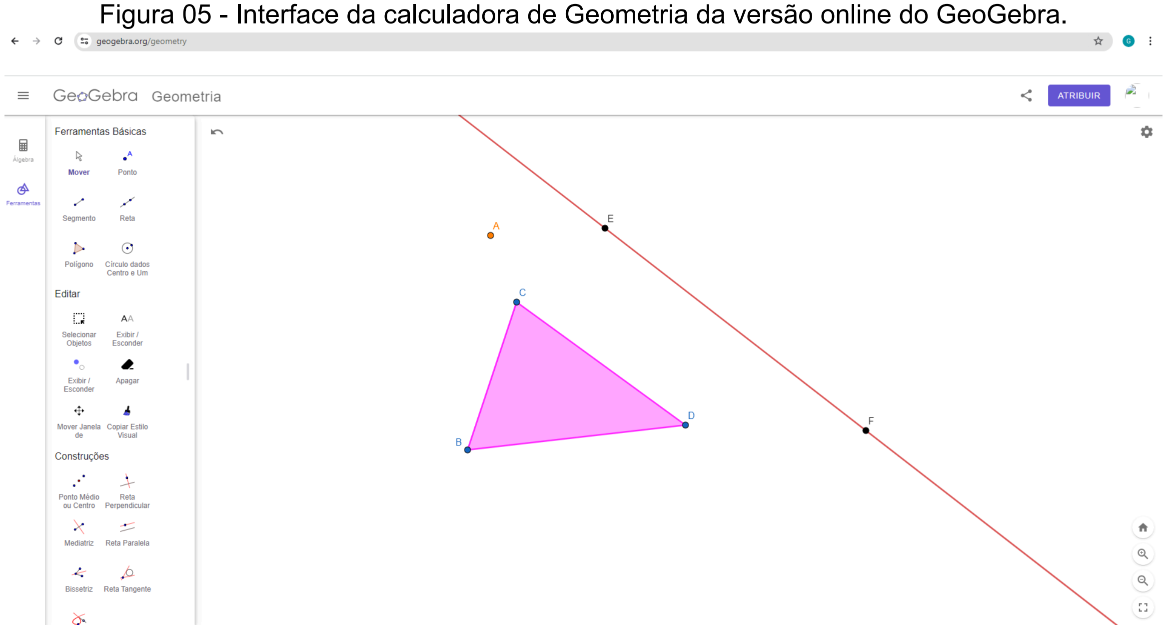
Figura 04 - Localização da calculadora de Geometria na página inicial do GeoGebra.



Fonte: Acervo da autora

Ao acessar a calculadora de Geometria do GeoGebra, o usuário irá deparar-se com a janela de geometria, na qual as construções geométricas poderão ser visualizadas e exploradas. E, no canto superior esquerdo da tela, o usuário também irá deparar-se com a opção “Álgebra”, que abre a janela de álgebra, a qual disponibiliza um registro algébrico de todos os pontos, segmentos, retas, entre outras construções que poderão ser realizadas no software. Na Figura 05, podemos observar a interface da calculadora de Geometria do GeoGebra.

Figura 05 - Interface da calculadora de Geometria da versão online do GeoGebra.



Fonte: Acervo da autora

O fundo inicial da janela de geometria é branco, mas caso seja da preferência do usuário, os eixos cartesianos e malhas quadriculadas podem ser inseridos, entre outras possíveis edições: Mudança da cor de fundo, inserir imagens, utilizar um outro tipo de malha, etc.

Quando uma das ferramentas do programa é selecionada a fim de se realizar uma determinada construção na janela de geometria, uma mensagem no canto inferior esquerdo da tela aparece para informar como utilizar a ferramenta. A linguagem desse software é simples o que proporciona uma melhor compreensão de como fazer uso deste por parte de seus usuários, os quais podem ser de diferentes faixas etárias.

Um software de matemática dinâmica como o GeoGebra pode trazer contribuições para o processo de aprendizagem dos estudantes na educação matemática, uma vez que este se torna um ambiente fértil para as explorações e criações dos alunos, e "(...) na educação é preciso ter-se espaços onde o aluno possa criar, articular, construir, conjecturar e validar suas ideias, competências indispensáveis nos tempos atuais." (Dickel, 2019).

Além do mais, Marschall (2015) comenta que o GeoGebra pode contribuir para a questão da visualização das representações dos estudantes no campo da Geometria e possibilitar a correção de erros, no qual estes podem ser apresentados pela resposta imediata que este software proporciona aos seus usuários.

Esta resposta imediata que softwares como o GeoGebra apresentam é outro potencial que se pode destacar para a escolha de fazer uso destas tecnologias em sala de aula.

O GeoGebra é um software que, com seu ambiente dinâmico, permite fazer diversas explorações sobre determinadas construções matemáticas tais como criações de polígonos, retas, pontos móveis, segmentos, entre outros. E é por meio destas explorações que conjecturas sobre conceitos matemáticos vão se formando, possibilitando aos alunos desenvolverem a sua aprendizagem nas aulas de matemática. Notare e Dickel sintetizam bem essa ideia ao fazerem o seguinte comentário:

> Vale ressaltar que utilizar os recursos computacionais por si só não garante o fazer matemático do aluno. Os professores devem ser críticos e cuidadosos para que tal recurso não se torne algo somente atrativo e que simplesmente reforça as mesmas características do modelo de escola que privilegia a

> transmissão do conhecimento, e sim apresentar problemas e situações nos quais os alunos possam desenvolver junto à tecnologia o pensamento matemático (Notare e Dickel, 2018, p.2).

Na seção a seguir, apresentamos os estudos sobre as transformações geométricas do tipo isométricas.

2.4 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DO TIPO ISOMÉTRICAS

De acordo com Wagner (2007), podemos compreender uma transformação geométrica como sendo uma função que, seguindo certas regras, associa a cada ponto do plano um outro ponto, que também pertence a esse plano.

> Uma transformação T no plano Π é uma função T: $\Pi \rightarrow \Pi$ que associa a cada ponto A do plano um outro ponto A' = T(A) do plano chamado imagem de A por T. Se F é uma figura (portanto um conjunto de pontos de Π) definiremos F' = T(F) como o conjunto das imagens dos pontos de F (Wagner, 2007, p.70).

Nesta pesquisa, focaremos no estudo de três transformações geométricas: Translação, Reflexão e Rotação. Essas transformações são todas isométricas, que preservam distâncias, e bijetivas, ou seja, as imagens de pontos distintos do plano serão sempre distintas e cada ponto do plano é imagem de um outro ponto desse plano.

Sejam A, B dois pontos distintos do plano Π; T(A) e T(B) as transformações geométricas do tipo isométricas de A e B, respectivamente; e $d(X, Y)$ a distância entre os pontos X,Y. Temos que: $A \neq B \Rightarrow T(A) \neq T(B)$; $d[T(A), T(B)] = d(A, B)$.

Quando temos uma transformação geométrica, vamos chamá-la de Id, tal que $Id: \Pi \rightarrow \Pi$ é definida por $Id(A) = A$ para todo ponto A do plano Π, dizemos que esta é uma transformação identidade (Wagner, 2007, p.70). Em seu livro, Wagner (2007) também explica sobre a transformação inversa de uma transformação bijetiva: “Uma transformação bijetiva T: $\Pi \rightarrow \Pi$ possui uma inversa T^{-1}: $\Pi \rightarrow \Pi$: onde para todo ponto A' de Π, $T^{-1}(A')$ é o único ponto A do plano Π tal que $T(A) = A'$ ” (Wagner, 2007, p.70).

Interessante observar que quando estamos fazendo uma determinada construção simétrica no plano, aplicar transformações geométricas simétricas em determinados conjuntos de pontos desta construção pode auxiliar na elaboração desta e, se quisermos, podemos aplicar transformações em transformações já realizadas. Wagner (2007) comenta sobre isso ao explicar a definição de uma transformação composta:

> Finalmente, dadas duas transformações T_1 e T_2 no plano definimos a composta $T_2 \circ T_1 : \Pi \rightarrow \Pi$ como a transformação que a cada ponto A do plano Π, associa o ponto $A' = (T_2 \circ T_1)(A) = T_2(T_1(A))$. Em particular, para qualquer transformação bijetiva T, temos $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = Id$ (Wagner, 2007, p.70).

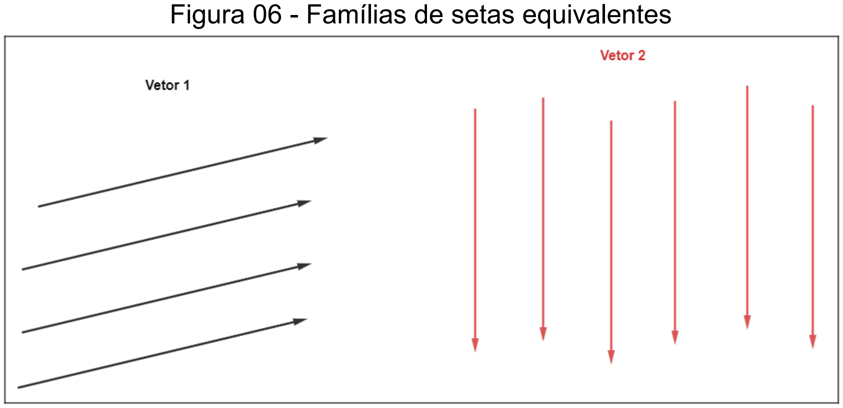
Quando aplicamos uma transformação geométrica do tipo isométrica sobre uma determinada figura, a imagem da figura resultante desta transformação é congruente à imagem da figura original, visto que as distâncias entre os pontos são todas preservadas e, como Wagner (2007) explica: “Toda isometria possui as seguintes propriedades: a) a imagem de uma reta por uma isometria é uma reta. b) uma isometria preserva paralelismo. e) uma isometria preserva ângulos.” (Wagner, 2007, p.71).

Apresentamos a seguir as transformações geométricas de translação, reflexão e rotação com mais detalhes.

2.4.1 Translação

Em latim a palavra vetor (“vehere”) significa transportar, e este “é dado pela direção, sentido e comprimento de uma família de ‘setas’ equivalentes” (Medeiros, 2012), e essas setas representam um vetor. Na Figura 06, podemos observar duas famílias de setas para representar o vetor 1 e vetor 2.

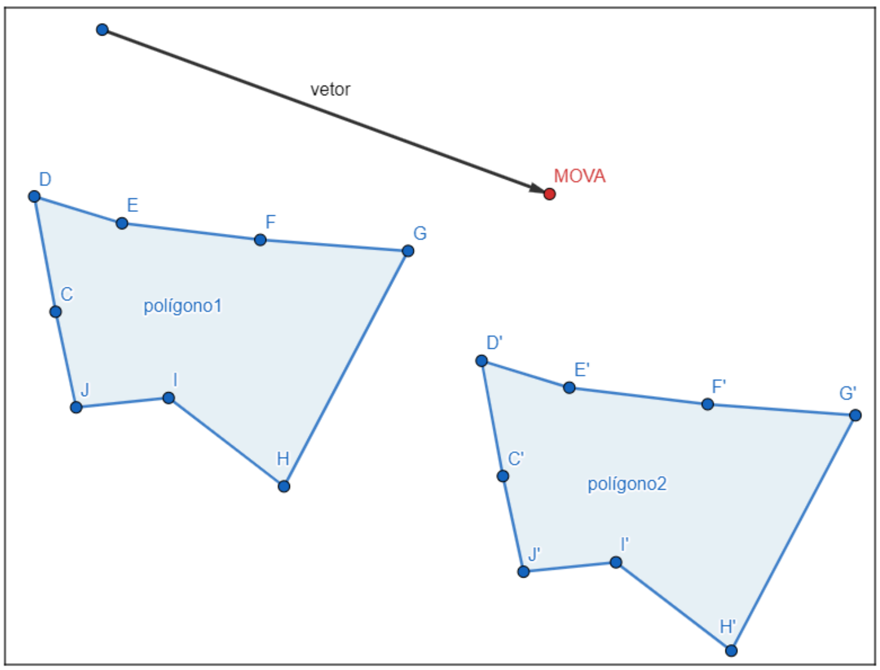
Figura 06 - Famílias de setas equivalentes



Fonte: Acervo da autora

Podemos compreender a translação como sendo uma transformação geométrica do tipo isométrica que está relacionada a um vetor v e pode ser definida da seguinte forma: Sejam A,A' pontos do plano Π e $T_v: \Pi \rightarrow \Pi$, temos que $T_v(A) = A' = A + v$ (Wagner, 2007, p.71). Na figura 07, apresentamos um exemplo desta transformação geométrica, na qual podemos observar a construção do polígono 2 a partir da translação do polígono 1 com relação ao vetor.

Figura 07 - Translação do polígono 1



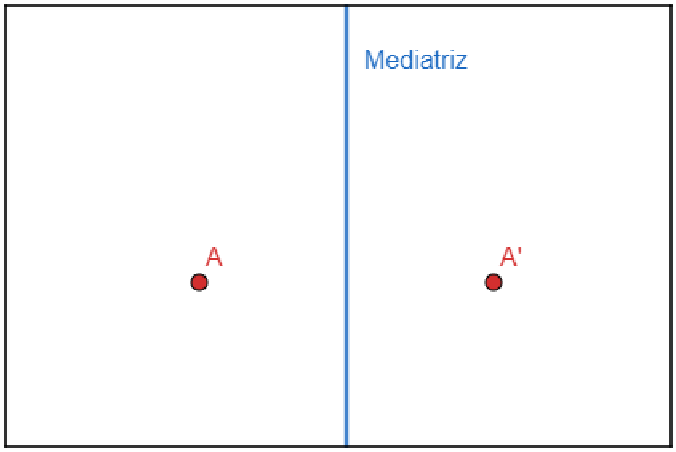
Fonte: Acervo da autora

De acordo com Dickel, “(...) uma translação é caracterizada pelo deslocamento de uma distância ao longo de uma direção e de um sentido, ou seja de um vetor” (Dickel, 2019).

2.4.2 Reflexão

Dados dois pontos pontos A, A' e uma reta r pertencentes a um plano Π, dizemos que o ponto A é simétrico ao ponto A' (Figura 08) em relação à reta r se esta for mediatriz do segmento com extremidades nesses pontos (Wagner, 2007, p.73).

Figura 08 - Reflexão do ponto A

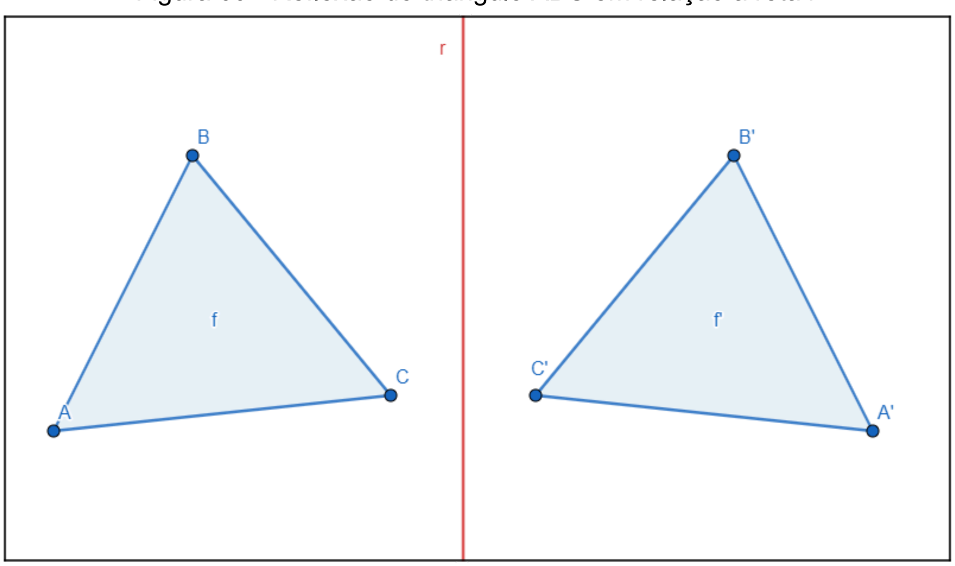


Fonte: Acervo da autora

Uma reflexão, ou simetria em relação a r, em torno de uma reta pode ser compreendida como sendo uma transformação geométrica do tipo isométrica $T_{re}: \Pi \rightarrow \Pi$ que para qualquer ponto A do plano Π encontra um ponto $A' = T_{re}(A)$, simétrico ao ponto A com relação à reta r (Wagner, 2007, p.73).

Na Figura 09, podemos observar que o triângulo A'B'C' (reflexão do triângulo ABC) é congruente ao triângulo ABC, porém as suas imagens não mantêm uma mesma orientação.

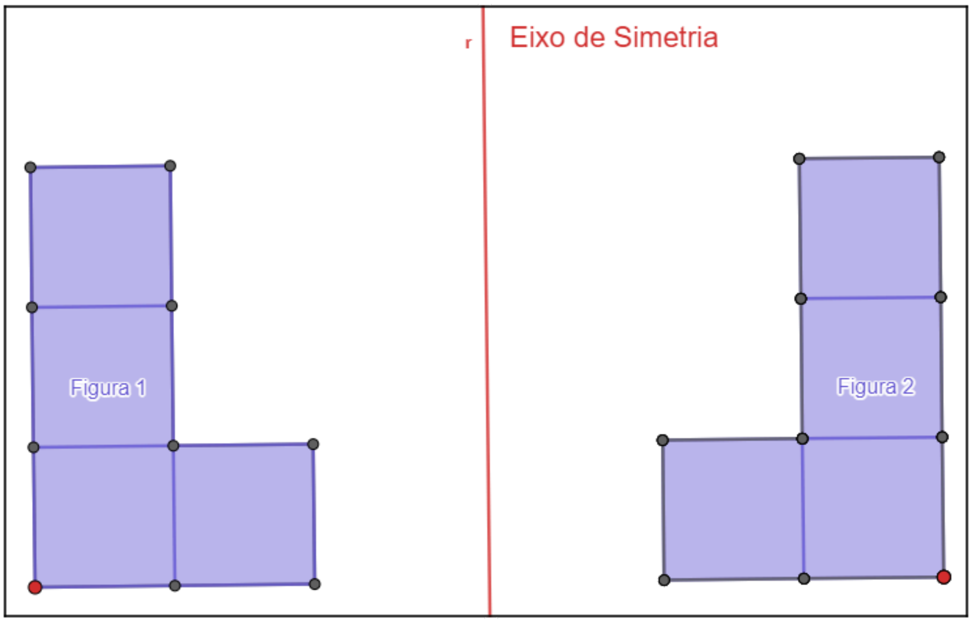
Figura 09 - Reflexão do triângulo ABC em relação à reta r



Fonte: Acervo da autora

Wagner comenta sobre essa questão (Figura 09) ao explicar que: “A reflexão é uma isometria e portanto transforma cada figura F em uma outra F' congruente a F. Entretanto, a reflexão inverte a orientação do plano, (...)” (Wagner, 2007, p.74). Na Figura 10, podemos observar mais um exemplo de transformação de reflexão de uma figura em relação a reta r.

Figura 10 - Reta r como Eixo de Simetria na reflexão da Figura 1



Fonte: Acervo da autora

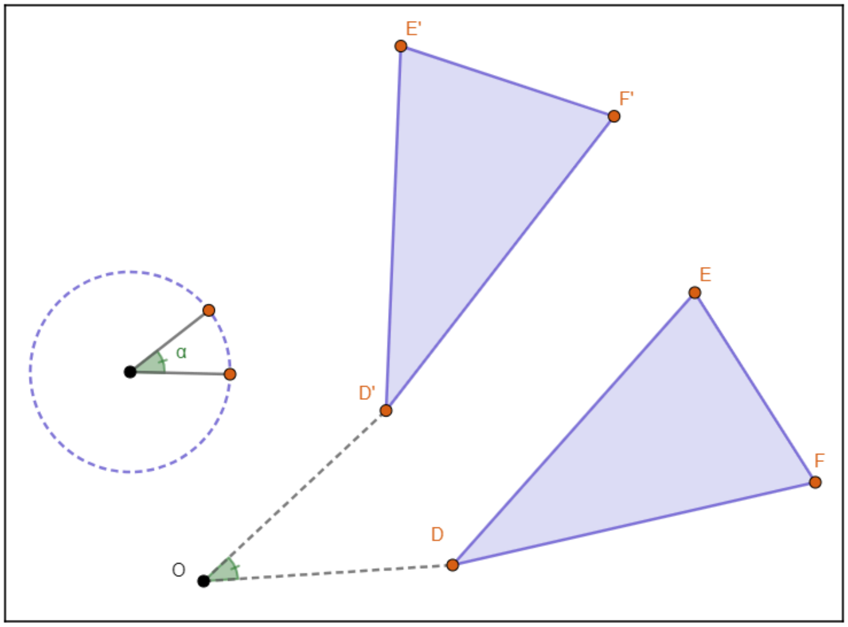
Dickel explica que essa reta r, nas transformações de reflexão, é considerada um eixo de simetria (Figura 10) que divide a figura em duas partes, congruentes por sobreposição (Dickel, 2019).

2.4.3 Rotação

Sejam O, X dois pontos do plano Π e dado um ângulo $0° \leq \alpha \leq 360°$. Podemos interpretar a rotação como sendo uma transformação geométrica do tipo isométrica $T_{ro}: \Pi \rightarrow \Pi$ que para todo ponto $X \neq O$ do plano Π associa um ponto $X' = T_{ro}(X)$ tal que os segmentos $\overline{OX}$ e $\overline{OX'}$ possuem a mesma medida ($\overline{OX} = \overline{OX'}$) e $X\widehat{O}X' = \alpha$ (Wagner, 2007, p.75).

Na Figura 11, podemos analisar a transformação de rotação realizada no triângulo DEF em função do ângulo α construindo, dessa forma, o triângulo D'E'F'.

Figura 11 - Rotação do triângulo DEF considerando o ângulo α



Fonte: Acervo da autora

O sentido da rotação indicado pelo valor positivo do ângulo α é anti-horário. No caso de considerarmos valores negativos para o ângulo α $(\alpha < 0)$, o sentido da rotação será invertido, ou seja, passará a ser horário (Wagner, 2007, p.75).

No capítulo a seguir, comentaremos sobre os trabalhos correlatos que trouxeram inspiração para a escolha do tema desta pesquisa, bem como os trabalhos correlatos selecionados para apresentarmos nesta.

3. TRABALHOS INSPIRADORES E CORRELATOS

Antes do tema para esta pesquisa ser escolhido e começarmos a elaborar atividades trabalhando com este, foram feitas algumas pesquisas por trabalhos acadêmicos que falassem sobre o uso de tecnologias digitais em aulas de matemática, visto que este já era um dos possíveis assuntos de interesse da pesquisadora para o trabalho.

Durante essas pesquisas, três trabalhos acadêmicos (Quadro 02) despertaram o interesse da pesquisadora, por conta de suas propostas didáticas trabalhando com as transformações geométricas do tipo isométricas e uso de tecnologias digitais, principalmente o GeoGebra, trazendo inspiração para a escolha do tema desta pesquisa e criação da proposta didática apresentada na abordagem metodológica deste trabalho.

Quadro 02 - Trabalhos Inspiradores

Trabalhos	Título	Autora(s)	Ano
Trabalho 1	Isometrias e Geogebra: O Papel do Arrastar na Construção de Conceitos	Marlei Tais Dickel; Márcia Rodrigues Notare	2018
Trabalho 2	O Estudo da Simetria de Reflexão através das Mídias Digitais	Daiane Maria Basso Bauer	2015
Trabalho 3	Pintando o Cubo: Matemática com Artes	Marilise Oliveira Jorge	2011

Fonte: Produção da pesquisadora

O trabalho 1 trata-se de um artigo, publicado na revista RENOTE[5], que debate sobre as potencialidades dos ambientes de geometria dinâmica, trazendo o foco para um destes, o GeoGebra. Esse artigo faz uma análise sobre duas atividades realizadas na pesquisa de mestrado de uma das autoras, Marlei Tais Dickel.

Nesta pesquisa, foi realizado um experimento prático com estudantes do 3° ano do Ensino Médio, da Rede Pública. Na prática, os estudantes se depararam com atividades a serem realizadas com o uso do software GeoGebra e, a partir de experimentos dinâmicos proporcionados pelo arrastar, começaram a conjecturar, testar

[5] Disponível em: https://seer.ufrgs.br/RENOTE. Acesso em: 16 jul. 2023.

e validar propriedades compreendendo, através dessas explorações, o significado das transformações isométricas (reflexão, rotação e translação).

Com esta pesquisa as autoras concluíram que o uso de um software de matemática dinâmica em atividades que incentivaram a exploração dos estudantes, proporcionada pela ação de arrastar, os auxiliou na formação do pensamento matemático, uma vez que estes já estavam pensando em conjunto com a tecnologia.

O trabalho 2, encontrado no LUME[6], trata-se de um trabalho conclusão de especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática. Nesta pesquisa, a autora apresenta um estudo sobre a Geometria, destacando a parte deste conteúdo que fala sobre a simetria de reflexão e possibilidades de conciliar este estudo com o uso de mídias digitais.

Tal pesquisa foi desenvolvida com estudantes do 7° ano, numa escola da rede municipal. Atividades para trabalhar com simetria de reflexão foram realizadas e dentre os recursos utilizados nessas atividades, quatro foram destacados: Aplicativo facial, vídeos, GeoGebra e fotografia.

O trabalho 3 foi um trabalho de conclusão de curso que também foi encontrado no LUME. Nessa pesquisa foi desenvolvido um trabalho interdisciplinar, envolvendo professores de artes e matemática, com estudantes do 2° ano do ensino médio do Colégio de Aplicação da UFRGS.

Em algumas partes do trabalho, as atividades desenvolvidas pela autora fizeram uso de algumas das obras de arte do artista holândes Maurits Cornelis Escher para construir os conceitos matemáticos de reflexão, rotação e translação.

Atividades de construção de caleidoscópios e mosaicos também foram elaboradas neste trabalho para aplicar os conceitos das transformações isométricas construídas.

Os objetivos da autora com essas práticas eram de mostrar que a matemática não é apenas ensinada com o uso de quadro e giz, pois podemos ensinar matemática fazendo uso de outros recursos com foi apresentado neste trabalho; os conteúdos matemáticos de simetria, reflexão, rotação e translação estão presentes em nosso cotidiano; elementos matemáticos podem ser reconhecidos em obras de arte; e ela

[6] Disponível em: https://lume.ufrgs.br/. Acesso em: 11 jul. 2023.

também buscava incentivar o uso de softwares para construir conceitos matemáticos, e um desses softwares utilizado nessas práticas foi o GeoGebra.

Após analisar esses três trabalhos, a pesquisadora decidiu aprofundar suas pesquisas sobre a temática: tecnologias digitais da informação e comunicação na educação matemática, focando principalmente no estudo do software de matemática dinâmica GeoGebra e das transformações geométricas do tipo isométricas: rotação, translação e reflexão.

Pesquisas por trabalhos de conclusão e dissertações, que abordassem esses assuntos, foram feitas no LUME, por meio das palavras-chaves "Transformações Isométricas e GeoGebra", com as quais encontramos 3 TCCs e 9 dissertações, e "simetria e GeoGebra", onde encontramos 22 trabalhos de conclusão de curso de especialização e 20 TCCs. Dentre os trabalhos encontrados, selecionamos quatro, os quais a pesquisadora considerou que se aproximavam mais do tema escolhido para esta pesquisa.

Além disso, também foi realizada uma busca no Google Acadêmico[7] com as palavras chave "GeoGebra e transformações isométricas", e dentre os 10 trabalhos que apareceram na primeira página, teve um artigo (Saito et al, 2023) que, pelo título, despertou o interesse da pesquisadora, que escolheu selecioná-lo como um trabalho correlato também. Portanto, no Quadro 03, apresentamos os cinco trabalhos correlatos que foram selecionados nessas pesquisas.

Quadro 03 - Trabalhos Correlatos Selecionados

Autor/a/es/as	**Título**	**Instituição**	**Ano**	**Tipo de Trabalho**
Marlei Tais Dickel	GeoGebra e Isometrias: A Ação de Arrastar na Construção de Conceitos	Universidade Federal do Rio Grande do Sul	2019	Dissertação
Olga H. Saito; Patricia M. Kitani; Mariana C. Chihaya	O GeoGebra e o floco de neve no ensino das transformações geométricas	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul	2023	Artigo

[7]Disponível em: https://scholar.google.com.br/?hl=pt. Acesso em: 21 dez. 2023.

Janini Marschall	GeoGebra no Ensino das Transformações Geométricas: Uma Investigação Baseada na Teoria da Negociação de Significados	Universidade Federal do Rio Grande do Sul	2015	Trabalho de Conclusão de Curso de Especialização
Barbara Cezar Goetz	Aprendizagem de simetrias nos anos finais do Ensino Fundamental	Universidade Federal do Rio Grande do Sul	2014	Trabalho de Conclusão de Curso
Margarete. F. Medeiros	Geometria Dinâmica no ensino de transformações no plano: Uma experiência com professores de Educação Básica.	Universidade Federal do Rio Grande do Sul	2012	Dissertação

Fonte: Produção da pesquisadora

Em sua pesquisa de mestrado, Dickel (2019) trabalhou com estudantes do 3° ano do ensino médio de uma escola da rede pública. No experimento prático de sua pesquisa, ela apresentou aos estudantes uma sequência de atividades que faziam uso do ambiente dinâmico do software GeoGebra, para os estudantes explorarem, fazendo uso das modalidades do arrastar apresentadas por Arzarello et al.

Neste trabalho também pretendemos explorar essas modalidades através de atividades elaboradas nesse mesmo software.

Uma das atividades que elaboramos no GeoGebra foi inspirada nas atividades propostas de construção e animação de um Floco de Neve, apresentadas no artigo “O GeoGebra e o floco de neve no ensino das transformações geométricas” (Saito et al, 2023).

Neste trabalho, Saito et al (2023) comentam sobre o Floco de Neve, explicando o que ele é, como se constitui quimicamente, quais foram seus primeiros registros, entre outras questões, sendo uma delas: a sua relação com o estudo das transformações isométricas, parte deste projeto que nos chamou a atenção, trazendo um lindo exemplo de onde podemos encontrar as transformações isométricas na natureza.

Trazer atividades matemáticas dinâmicas, e que incentivam a participação ativa dos estudantes em sala de aula, como as que foram apresentadas nesses trabalhos correlatos e nos trabalhos inspiradores visitados, pode proporcionar trocas interessantes entre professor-aluno e também entre aluno-aluno.

Marschall (2015) comenta sobre essa relação, baseada em seu estudo sobre a Teoria da Negociação de Significados, destacando a importância do professor buscar compreender as falas e diálogos dos alunos.

Propor, aos estudantes, momentos de debates e reflexões sobre as práticas e experiências em sala de aula para elaboração ou resignificação de conceitos é considerado, pela autora, a base para a construção e desenvolvimento do pensamento matemático.

Analisando o público alvo dos trabalhos inspiradores e correlatos (Quadro 04) apresentados nesta seção, percebemos que algumas pesquisas escolheram trabalhar com estudantes do ensino médio, outras com estudantes do ensino fundamental e ainda teve a pesquisa da Medeiros (2012), que trabalhou com professores em formação.

Quadro 04 - Público alvo dos trabalhos inspiradores e correlatos

Título	**Público Alvo**
Isometrias e Geogebra: O Papel do Arrastar na Construção de Conceitos	Estudantes do 3° ano do Ensino Médio
O Estudo da Simetria de Reflexão através das Mídias Digitais	Estudantes do 7° ano do Ensino Fundamental
Pintando o Cubo: Matemática com Artes	Estudantes do 2º ano do Ensino Médio
GeoGebra e Isometrias: A Ação de Arrastar na Construção de Conceitos	Estudantes do 3° ano do Ensino Médio
O GeoGebra e o Floco de Neve no Ensino das Transformações Geométricas	Estudantes do 7° e 8° ano do Ensino Fundamental
GeoGebra no Ensino das Transformações Geométricas: Uma Investigação Baseada na Teoria da Negociação de Significados	Estudantes do 7° ano do Ensino Fundamental
Aprendizagem de Simetrias nos Anos Finais do Ensino Fundamental	Estudantes do 6º e 7° ano do Ensino Fundamental
Geometria Dinâmica no Ensino de Transformações no Plano: Uma Experiência com Professores de Educação Básica.	Professores do Ensino Fundamental

Fonte: Produção da pesquisadora

As informações apresentadas no Quadro 04 evidenciam a possibilidade de trabalharmos esse tema, transformações isométricas, com públicos de diferentes faixas etárias. No capítulo a seguir, abordaremos a metodologia deste trabalho, ou seja, apresentaremos como será realizada esta pesquisa, o público-alvo escolhido para o experimento prático, as atividades dinâmicas planejadas no GeoGebra e como será realizada a coleta de dados.

4. METODOLOGIA

Este trabalho se trata de uma pesquisa de caráter qualitativo, ou seja, o foco é dado durante todo o processo investigativo desta, não apenas sobre resultados finais ou dados quantitativos (Bogdan; Biklen, 1994).

Na busca por respostas para a pergunta diretriz desta pesquisa: De que forma o GeoGebra, software de matemática dinâmica, pode auxiliar no processo de aprendizagem dos estudantes sobre as transformações geométricas do tipo isométricas?, foi elaborado e realizado um experimento prático com estudantes do oitavo ano do ensino fundamental II de uma escola da rede pública estadual, em Esteio (Carta de Anuência da Instituição no Apêndice A).

A coleta dos dados obtidos com essa pesquisa qualitativa se deu por meio de observações, gravações de áudio, relatórios e arquivos construídos e salvos pelos estudantes no GeoGebra.

Foram planejadas sete atividades no GeoGebra para serem realizadas durante o experimento prático desta pesquisa, o qual ocorreu na sala Maker. Esta sala (Figura 12) era onde os chromebooks da escola ficavam localizados.

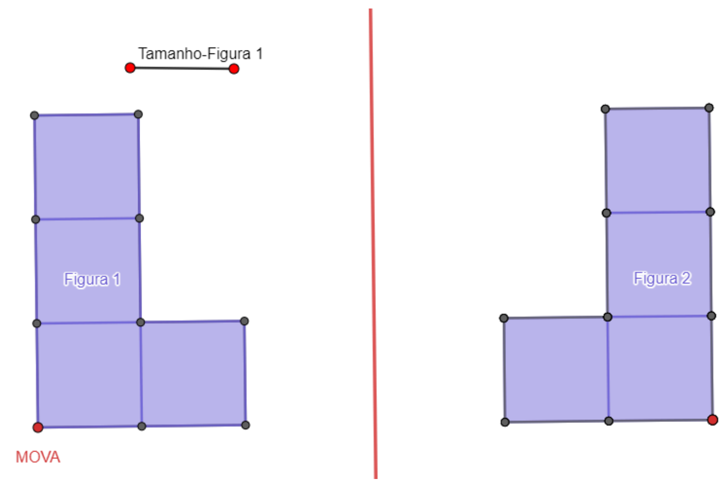
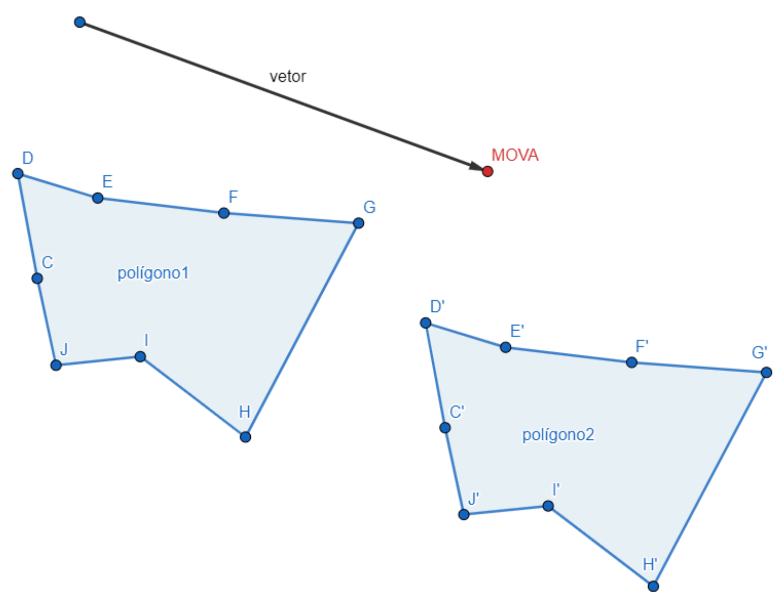
Figura 12 - Foto da Sala Maker

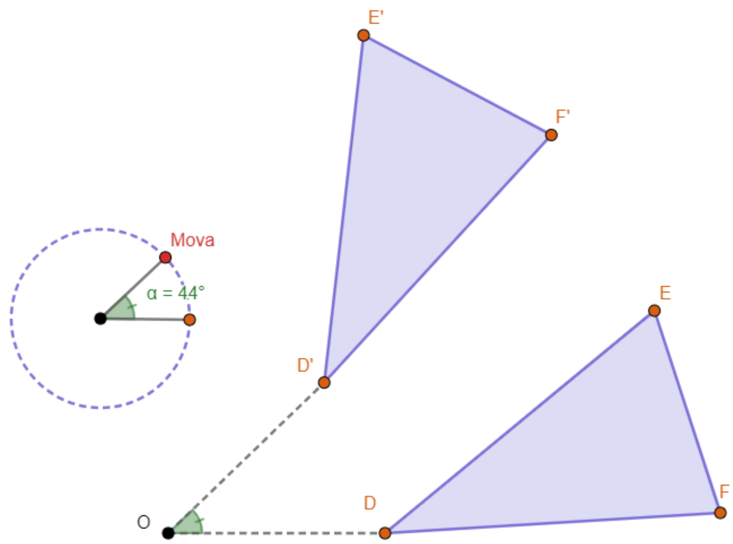
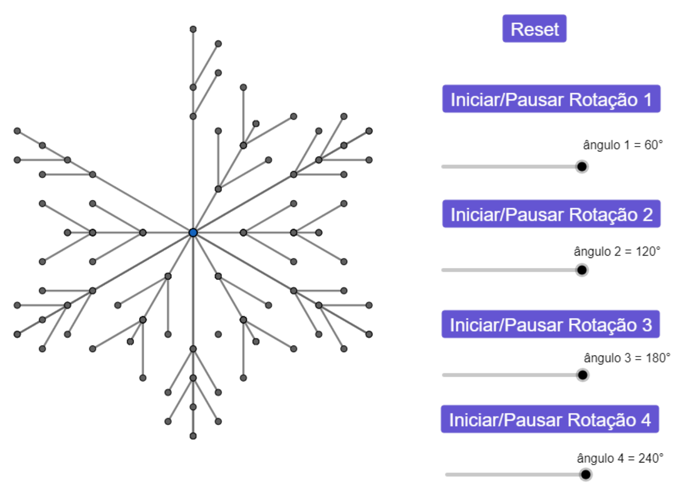
Fonte: Acervo da autora

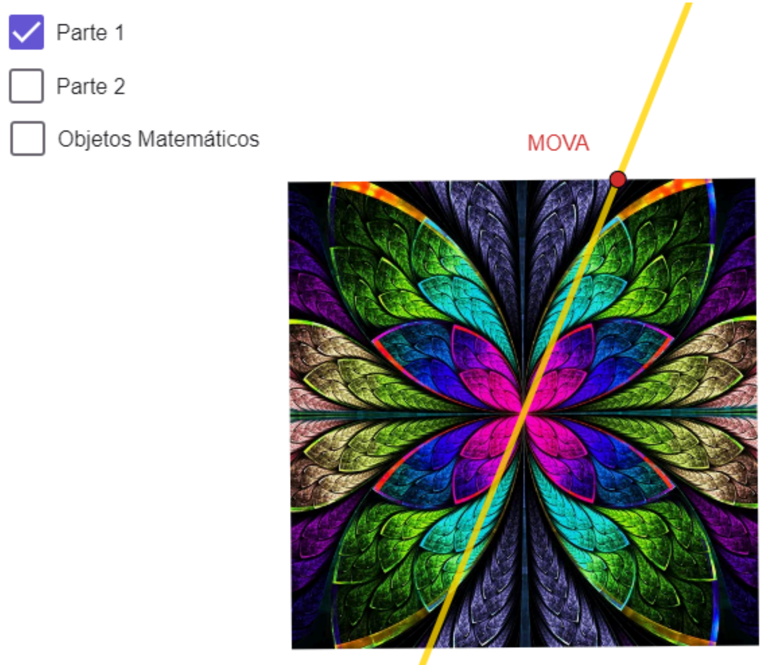
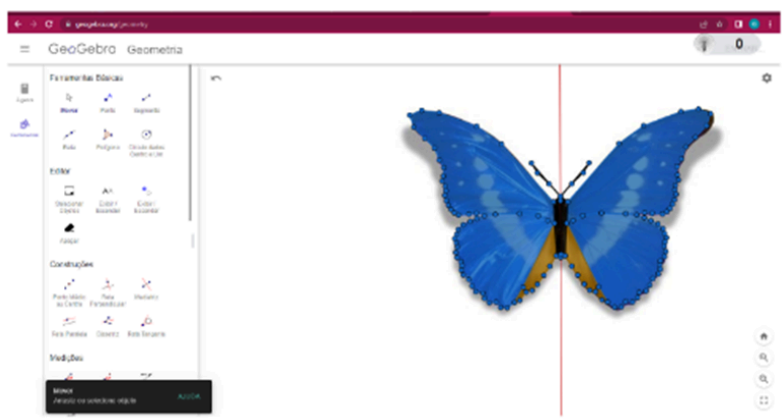
Quando os professores queriam realizar uma atividade, fazendo uso dos chromebooks, com os estudantes eles faziam a reserva desta sala, registrando num cronograma mensal que havia na sala dos professores, as datas e os horários que pretendiam utilizá-la.

Essas atividades trabalhavam com conteúdos da Geometria Euclidiana Plana, focando no estudo da simetria e das transformações geométricas do tipo isométricas: Rotação, Reflexão e Translação. Apresentamos cada uma delas no Quadro 05, com seus respectivos títulos, imagens e link para acesso, de forma online, no GeoGebra.

Quadro 05 - Atividades Dinâmicas Desenvolvidas no GeoGebra

Atividades	**Título**	**Imagem e Link para Acesso**
Atividade 1 (Apêndice D)	Reflexão	 **Link:** https://www.geogebra.org/m/heath2cv
Atividade 2 (Apêndice E)	Translação	 **Link:** https://www.geogebra.org/m/zqdbu4ee

Atividade 3 (Apêndice F)	Rotação	 **Link:** https://www.geogebra.org/m/unxhgjyc
Atividade 4 (Apêndice G)	Floco de Neve	 **Link:** https://www.geogebra.org/m/pqqyewqd

Atividade 5 (Apêndice H)	Imagens Simétricas	 **Link:** https://www.geogebra.org/m/une769zt
Atividade 6 (Apêndice I)	Construções com Imagem Simétrica	 **Link:** https://www.geogebra.org/m/cynkzawg
Atividade 7 (Apêndice J)	Criação Livre	-

Fonte: Produção da pesquisadora

Essas atividades foram elaboradas com o intuito de incentivar os estudantes a fazerem uso da tecnologia do software GeoGebra e auxiliá-los no desenvolvimento de seus pensamentos matemáticos.

A proposta foi elaborada de modo a provocar a exploração dinâmica nesse ambiente e a ação de arrastar para poderem realizar suas explorações, formarem suas próprias conjecturas e, assim, compreender os significados dos conteúdos apresentados nesta pesquisa.

As atividades 1 e 2 tiveram o objetivo de que os estudantes, a partir do arrastar vagando (Arzarello et al, 2002), explorassem as construções no ambiente dinâmico do GeoGebra para formar as suas primeiras conjecturas a respeito das definições matemáticas sobre as transformações isométricas de reflexão e translação.

Com a primeira parte da atividade 4, objetivamos que os estudantes observassem o movimento das rotações dos ramos do Floco de Neve e junto com as explorações, com um arrastar vagando (Arzarello et al, 2002), realizadas na atividade 3, construíssem conjecturas sobre a definição da transformação isométrica de rotação.

Na segunda parte da atividade 4, foi solicitado aos estudantes a construção, fazendo uso da ferramenta de rotação do software, de um ramo do Floco de Neve para completar a construção desse Floco e, dessa maneira, testar suas conjecturas. Dessa forma, foi possível aproveitar o feedback imediato do software para testar suas construções quantas vezes considerarem necessárias, desenvolvendo sua autonomia e pensamento matemático com o auxílio dessa tecnologia digital, GeoGebra.

Como mencionado anteriormente, com as três primeiras atividades apresentadas no Quadro 05, objetivamos que os estudantes fizessem uso do arrastar vagando em suas explorações, entretanto é possível que estes também façam uso do arrastar teste nessas atividades, caso observem propriedades sobre as construções antes de explorarem-las sob a ação do arrastar. As demais atividades não foram planejadas com o objetivo de que eles fizessem explorações com a ação do arrastar, mas com o intuito de que eles tivessem a oportunidade de colocar em prática as conjecturas construídas com as atividades anteriores em que realizaram tais explorações.

Para a primeira parte da atividade 5, o objetivo foi estudar o conceito de eixo de simetria apresentando uma imagem simétrica como exemplo. Ademais, com a segunda parte desta atividade, objetivamos que os estudantes colocassem em prática os conceitos sobre as transformações isométricas exploradas nas atividades anteriores e tentassem identificá-las nas imagens que foram apresentadas na janela de geometria do GeoGebra, podendo utilizar suas ferramentas (retas, ângulos e vetores) para isso.

Na atividade 6 o objetivo foi de que os estudantes conseguissem identificar, caso existisse, simetrias e eixos de simetrias nas imagens que pesquisarem. Além de incentivá-los a realizarem suas próprias construções, colocando em prática o conceito sobre transformação geométrica de reflexão explorado na atividade 1. Nesta atividade apresentamos a imagem de uma borboleta, como um exemplo de imagem simétrica na qual identificamos um eixo de simetria (reta vermelha da construção) que a dividia em duas partes congruentes por sobreposição. Construímos, com a ferramenta “polígono” do GeoGebra, uma das partes dessa imagem e, para construir a outra parte dessa imagem realizamos, com a ferramenta de “reflexão em relação a uma reta”, a reflexão dos polígonos construídos em relação a reta vermelha (eixo de simetria).

Para finalizar, com a atividade 7, pretendemos incentivar a criatividade dos estudantes ao solicitar que estes realizassem uma criação livre no GeoGebra. Com essa criação, também objetivamos que eles colocassem em prática os conceitos matemáticos, principalmente sobre as transformações isométricas, desenvolvidos com as atividades anteriores.

No capítulo a seguir, apresentamos como ocorreram as práticas dessas atividades planejadas para uma turma do oitavo ano do ensino fundamental II, na qual a pesquisadora estava realizando o seu período de regência da disciplina de Estágio em Educação Matemática II deste curso.

5. EXPERIMENTO PRÁTICO: RELATOS E ANÁLISE

O experimento prático, realizado com a autorização dos estudantes (Apêndice C - Termo de Assentimento) e seus responsáveis (Apêndice B - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido), desenvolveu-se no decorrer de cinco encontros. No Quadro 06, são apresentadas as atividades desenvolvidas em cada um desses encontros, bem como as suas datas de ocorrência.

Quadro 06 - Encontros - Experimento Prático

Encontros	**Data**	**Atividades**
Encontro 1	17/06/2024	Atividade 1
Encontro 2	18/06/2024	Continuação Atividade 1
Encontro 3	28/06/2024	Atividade 2
Encontro 4	05/07/2024	Atividade 3 Atividade 4
Encontro 5	12/07/2024	Atividade 5

Fonte: Produção da pesquisadora

Lembramos que esta prática do TCC foi realizada durante o período de estágio da pesquisadora, portanto a atividade foi realizada com toda a turma mas, nesta pesquisa, focaremos em analisar as explorações e relatos apenas dos estudantes que aceitaram participar desta pesquisa e entregaram os termos com as autorizações de seus responsáveis. No apêndice K, há uma tabela com a frequência desses participantes em cada encontro.

Nas próximas seções, apresentamos os relatos, observações, diálogos e análises sobre as experiências dos estudantes com as explorações das atividades dinâmicas realizadas nesses encontros.

5.1 ENCONTRO 1

Este foi o primeiro encontro do experimento prático realizado com os estudantes do oitavo ano e teve a duração de um período de aula, 50 minutos. Neste período, os estudantes deram início à primeira atividade de reflexão planejada para esse experimento.

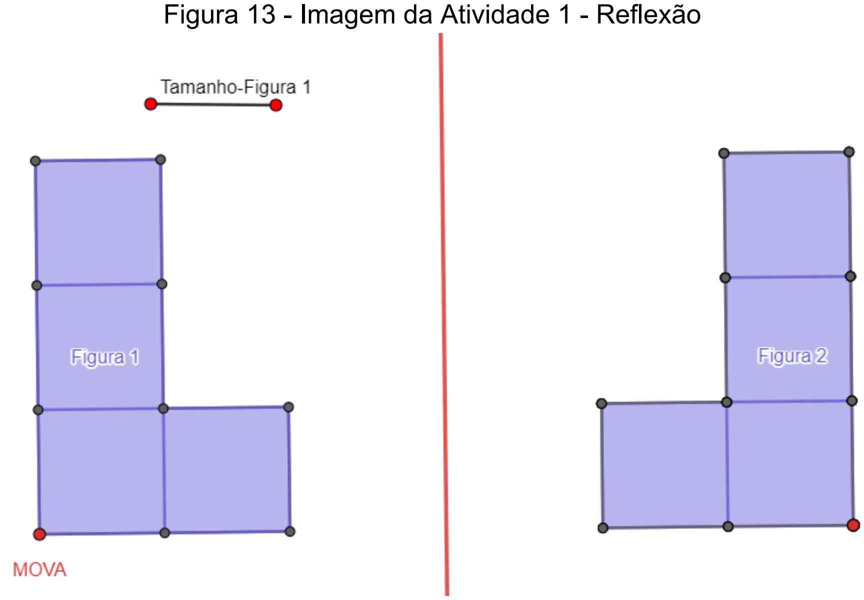
Neste dia a conexão com a internet não estava boa, o que levou um tempo a mais do que havia sido previsto para a realização da atividade. Todavia, todos os estudantes presentes nesta aula conseguiram acessar a atividade 1 nos chromebooks da escola. Nesta aula, dentre os 22 estudantes presentes, 11 eram participantes desta pesquisa.

Neste encontro, os estudantes tiveram o seu primeiro contato com o software GeoGebra. Por meio de questionamentos, a pesquisadora constatou que nenhum deles conhecia tal software.

Portanto, foi tudo uma novidade para a turma, desde compreender como acessar a atividade na versão online do GeoGebra até entender como mexer nas ferramentas do software, como movimentar as construções, conhecer as janelas de álgebra e de geometria, entre outras questões.

Foi muito bom poder observar os estudantes explorando o software e conhecendo os seus recursos, principalmente a exploração do arrastar que eles faziam nas construções da atividade (Figura 13).

Figura 13 - Imagem da Atividade 1 - Reflexão

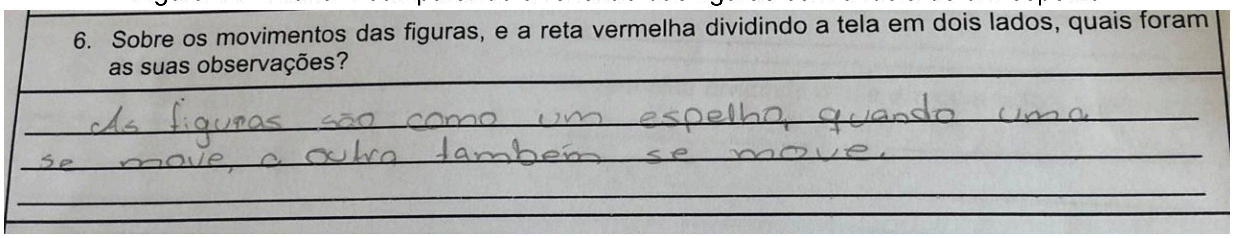


Fonte: Acervo da Autora

Ao analisar os tipos de arrastar que Arzarello et al (2002) apresentam em seu artigo, podemos considerar que o tipo de arrastar que os estudantes utilizaram nessa primeira atividade foi o arrastar vagando, pois eles arrastavam aleatoriamente todos os pontos e construções móveis da atividade para observar o que acontecia com as duas figuras refletidas em torno do eixo de simetria.

Foi interessante observar que, a partir da exploração dessa atividade, no ambiente dinâmico do GeoGebra, a Aluna 4 fez uma comparação (Figura 14) da reflexão das figuras com a ideia de um espelho.

Figura 14 - Aluna 4 comparando a reflexão das figuras com a ideia de um espelho



6. Sobre os movimentos das figuras, e a reta vermelha dividindo a tela em dois lados, quais foram as suas observações?

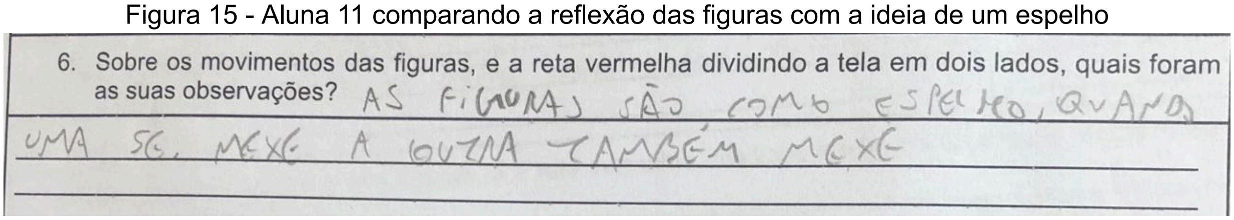
As figuras são como um espelho, quando uma se move, a outra também se move.

Fonte: Dados da pesquisa

A escolha da pesquisadora de apresentar, neste encontro, essa atividade dinâmica que incentivava a exploração do arrastar possibilitou que a Aluna 4, como diriam Arzarello et al (2002), partindo do empírico, produzisse conjecturas e chegasse a conceitos teóricos, neste caso, sobre a transformação geométrica de reflexão.

Outra estudante, Aluna 11, que sentava ao lado da Aluna 4 e conversava com ela sobre a atividade, também realizou essa comparação (Figura 15) das figuras refletidas com a ideia de um espelho.

Figura 15 - Aluna 11 comparando a reflexão das figuras com a ideia de um espelho



6. Sobre os movimentos das figuras, e a reta vermelha dividindo a tela em dois lados, quais foram as suas observações? AS FIGURAS SÃO COMO ESPELHO, QUANDO UMA SE MEXE A OUTRA TAMBÉM MEXE

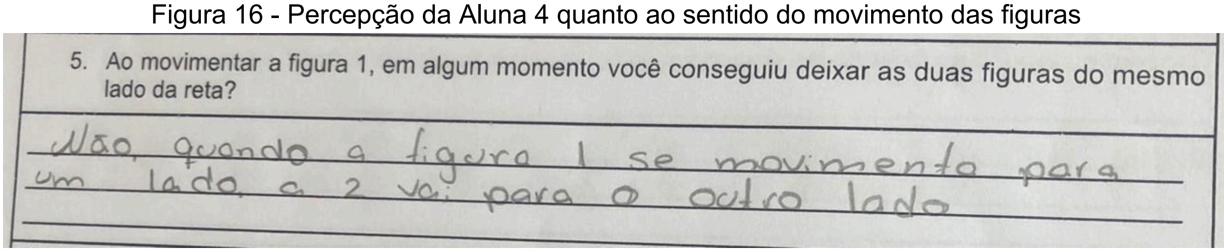
Fonte: Dados da pesquisa

Pelos comentários da Aluna 4 e da Aluna 11, podemos observar que, pela ação do movimento, elas identificaram uma relação de dependência da figura refletida em relação à figura original. Se a figura original sofre alterações, de posição neste caso, a figura refletida também sofrerá esse mesmo tipo de alteração para preservar a congruência por sobreposição em relação à reta vermelha que, segundo Dickel (2019), podemos considerar como um eixo de simetria.

Todos os participantes informaram em suas observações que as figuras "*se moviam juntas*" e afirmavam que quando uma se aproximava ou afastava da reta a outra também se aproximava ou afastava. Com base nisso, podemos concluir que a ação do arrastar possibilitou que os estudantes compreendessem a preservação de distâncias com relação ao eixo de simetria, reta vermelha, que há nas transformações geométricas de reflexão.

A Aluna 4 também comentou em seu relatório de observações (Figura 16) sobre o sentido dos movimentos dessas figuras refletidas, percebendo que, ao arrastar a figura 1, o movimento da figura 2 seria o mesmo num sentido contrário.

Figura 16 - Percepção da Aluna 4 quanto ao sentido do movimento das figuras

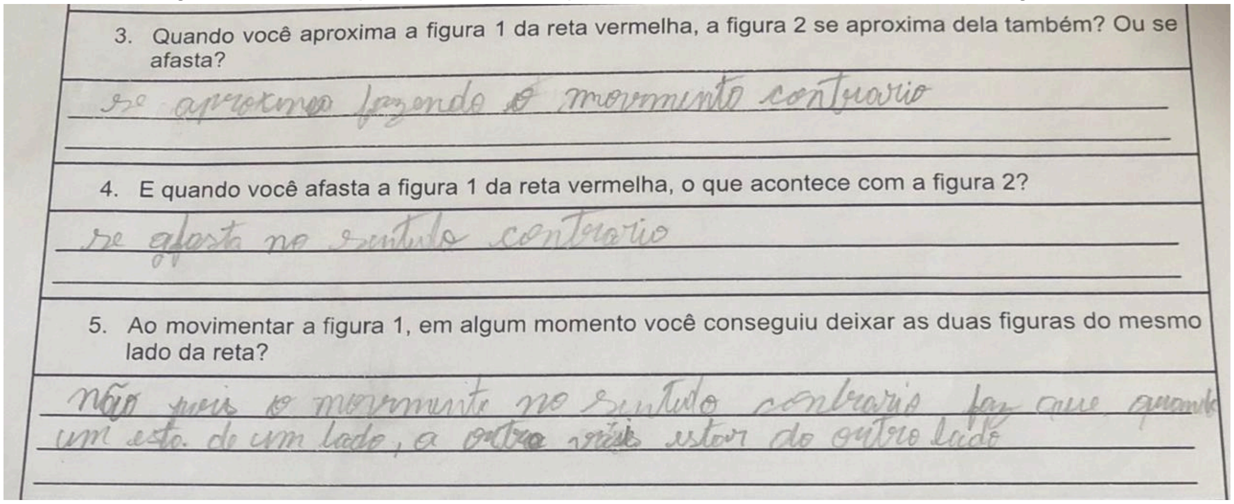

5. Ao movimentar a figura 1, em algum momento você conseguiu deixar as duas figuras do mesmo lado da reta?

Não, quando a figura 1 se movimenta para um lado, a 2 vai para o outro lado

Fonte: Dados da pesquisa

Interessante observar que o Aluno 9, que sentava na fileira da frente e não estava conversando com a Aluna 4, também percebeu, ao arrastar as figuras, esse movimento num sentido contrário e comentou (Figura 17) sobre isso em seu relatório de observações.

Figura 17 - Percepção do Aluno 9 quanto ao sentido do movimento das figuras



3. Quando você aproxima a figura 1 da reta vermelha, a figura 2 se aproxima dela também? Ou se afasta?

se aproxima fazendo o movimento contrario

4. E quando você afasta a figura 1 da reta vermelha, o que acontece com a figura 2?

se afasta no sentido contrario

5. Ao movimentar a figura 1, em algum momento você conseguiu deixar as duas figuras do mesmo lado da reta?

não pois o movimento no sentido contrario faz que quando um esta de um lado, a outra vai estar do outro lado

Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos que a Aluna 4 e o Aluno 9 identificaram em seus relatórios mais uma das propriedades da transformação geométrica de reflexão que fala sobre essa orientação das figuras que, segundo Wagner (2007), é invertida no plano, fazendo com que estas, quando movimentadas, apresentem sentidos opostos em relação ao eixo de simetria.

Outros estudantes, Aluno 1 e Aluno 7, quando conversaram com a pesquisadora, também comentaram sobre o sentido contrário no movimento da figura 2 em relação ao movimento da figura 1, mas não chegaram a fazer esse registro em seus relatórios.

A participação dos estudantes nessa aula foi ativa e cada estudante, no seu ritmo e com suas próprias explorações da atividade dinâmica começou a formar suas primeiras conjecturas sobre o conteúdo estudado. Este era um dos objetivos da autora com essa atividade: incentivar, com auxílio da tecnologia e de atividades dinâmicas, a autonomia e curiosidade dos estudantes em seus estudos.

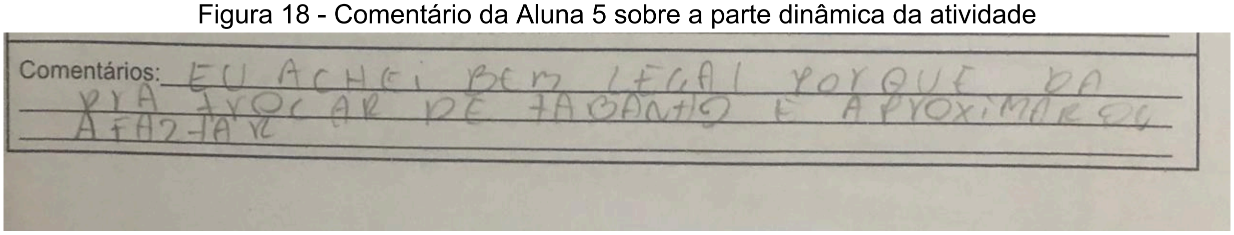
Uma questão importante a observar foi o fato dos estudantes, mesmo desconhecendo o ambiente de geometria dinâmica e o conteúdo novo de geometria, transformação geométrica de reflexão, não apresentaram medo de sair explorando a atividade e descobrindo os recursos do software.

Quando a pesquisadora percebeu, o Aluno 9 já estava testando algumas das ferramentas do GeoGebra e conseguiu inserir uma foto na janela de geometria do software, que tirou no próprio chromebook, algo que a pesquisadora não chegou a comentar antes como poderia ser feito e nem havia testado previamente para saber se era possível de tirar fotos pelas câmeras dos chromebooks. Esta foi uma situação de troca de aprendizados entre professora-aluno, que contribuiu para a experiência e formação da pesquisadora, comprovando que vale a pena trazer atividades que incentivem a autonomia e participação ativa dos estudantes em sala de aula.

Os estudantes demonstraram ter gostado da atividade dinâmica e de poder realizar suas próprias explorações no software. Alguns comentaram também que foi uma atividade diferente das que eles estavam acostumados a fazer em sala de aula e que gostaram.

Também houve uma estudante, Aluna 5, que comentou (Figura 18) em seu relatório de observação sobre a questão de poder movimentar e alterar o tamanho das construções dinâmicas dessa atividade do GeoGebra.

Figura 18 - Comentário da Aluna 5 sobre a parte dinâmica da atividade


Comentários: EU ACHEI BEM LEGAL PORQUE DA PRA TROCAR DE TAMANHO E APROXIMAR OU AFASTAR

Fonte: Dados da pesquisa

A partir do comentário da Aluna 5, percebemos que ocorreu uma exploração, pela ação de arrastar por parte da estudante, das construções realizadas no ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra e refletir sobre as possíveis contribuições desta experiência em seu aprendizado. Essa possibilidade de mudança de tamanho e movimentos de aproximação e afastamento das figuras em relação a reta (eixo de simetria) pode fazer com que a estudante perceba padrões de movimento e nessa “fase da descoberta”, como Arzarello et al (data) chamam, comece a produzir as suas primeiras conjecturas referentes às propriedades e definições das transformações geométricas de reflexão.

A Aluna 5 achou “*bem legal*” poder arrastar as figuras para “*aproximar ou afastar*” da reta e poder alterar o seu tamanho, e essa possibilidade de movimento não seria possível numa aula realizada no quadro. E se a aula sobre esse conteúdo ainda fosse apenas transmissiva, todas as explorações realizadas por essa estudante, bem como as de seus colegas, conclusões de ter achado legal ou não e conjecturas próprias formadas sobre o tema estudado possivelmente não existiriam.

Devido ao tempo, não foi possível concluirmos a atividade 1 neste encontro. Alguns estudantes conseguiram explorar melhor essa atividade e completar boa parte de seus relatórios de observações, em contrapartida outros estudantes levaram mais tempo para conseguir acessar o GeoGebra e abrir a atividade.

A conexão com a internet foi um dos desafios e como foi proposto para os estudantes acessarem a atividade de modo individual, havia 22 chromebooks utilizando uma mesma rede de wi-fi.

Então, no final da aula, a professora recolheu os relatórios de observação dos estudantes e informou que seria dada continuidade à essa atividade no próximo encontro.

5.2 ENCONTRO 2

Neste encontro, demos continuidade à atividade 1 de reflexão. Dentre os 22 estudantes presentes nesta aula que, assim como o primeiro encontro, durou um período, 10 eram participantes desta pesquisa.

O início da aula foi de organização da turma na sala Maker (sala onde ficam os chromebooks), a pesquisadora auxiliou os estudantes a acessarem a versão online do GeoGebra e pesquisarem a atividade 1 de reflexão que eles começaram a explorar na aula anterior. Nesse processo, devido às explorações realizadas na aula anterior, os estudantes já estavam um pouco mais familiarizados com o ambiente.

Havia apenas um dos participantes, Aluno 12, que não estava presente no primeiro encontro e, portanto, estava tendo seu primeiro contato com o ambiente dinâmico do software. Todavia, com o auxílio da pesquisadora e de alguns colegas, ele logo se familiarizou com o software e começou a realizar suas próprias explorações e criar conjecturas.

No início da aula, o Aluno 12 perguntou sobre essa atividade para a professora, a qual explicou que ele precisava observar e explorar as figuras, movimentá-las, e anotar as suas observações a partir disso e com base nas perguntas guias do relatório de observações. Então, quando ele olhou para as figuras refletidas, sem tentar movimentá-las, ele já as comparou com a ideia de um espelho também, informando que elas eram iguais, mas era como se estivessem num espelho.

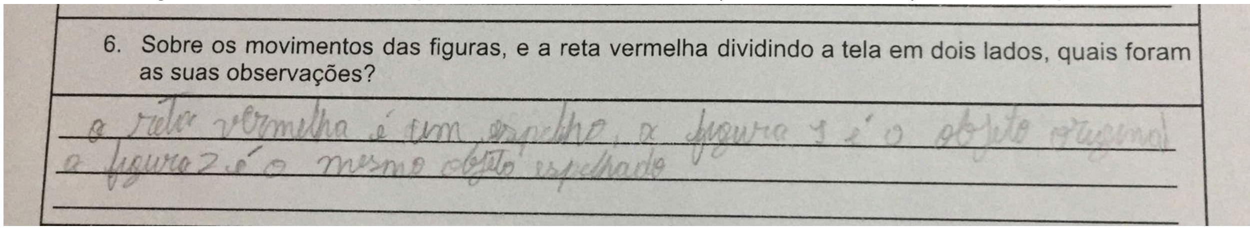
Com base nesses comentários do Aluno 12, a pesquisadora observou que este, antes de realizar as suas explorações com o arrastar, já havia formado algumas conjecturas a respeito da transformação geométrica de reflexão. Então, a pesquisadora incentivou esse estudante a movimentar, arrastando, e alterar o tamanho da figura 1 para observar o que aconteceria com a figura 2 e verificar se as propriedades que ele observou sobre a reflexão das figuras seria preservada sob a ação do movimento.

Pensando nos tipos de arrastar apresentados por Arzarello et al (2002), podemos considerar que o Aluno 12 fez uso de dois tipos de arrastar: arrastar vagando e arrastar teste. Consideramos que ele utilizou o arrastar vagando porque movia aleatoriamente os pontos móveis da construção para observar o que acontecia com as figuras refletidas em torno do eixo de simetria, mas também, como possuía algumas conjecturas prévias sobre as propriedades da reflexão das figuras, fez uso do arrastar teste para verificar se essas conjecturas, que são propriedades da transformação geométrica de reflexão, eram preservadas.

Alguns estudantes, Aluno 1, Aluno 7, Aluna 8, Aluno 10 e Aluno 12, afirmaram em seus relatórios de observações que as duas figuras ficavam “no mesmo tamanho” mesmo quando o tamanho que figura 1 era alterado. A partir dessa afirmação, podemos constatar que esses estudantes perceberam, pela exploração do arrastar, alterando o tamanho das figuras, que a relação de congruência destas foi preservada. Apesar da orientação no plano ser invertida, é possível identificar a congruência das figuras pois, como Wagner (2007) comenta, a transformação geométrica de reflexão é uma isometria.

O Aluno 9 comentou (Figura 19) em seu relatório de observações sobre a reta vermelha (eixo de simetria), a comparando com um espelho.

Figura 19 - Aluno 9 comparando a reta vermelha (eixo de simetria) com um espelho


6. Sobre os movimentos das figuras, e a reta vermelha dividindo a tela em dois lados, quais foram as suas observações?

a reta vermelha é um espelho, a figura 1 é o objeto original
a figura 2 é o mesmo objeto espelhado

Fonte: Dados da pesquisa

Ao analisar o comentário do Aluno 9, podemos observar que, ao comparar a reta vermelha com um espelho, ele percebeu que a reflexão da figura 1, que ele ainda destaca como figura original, ocorre com relação a essa reta, ou seja, ele considerou essa reta vermelha como o eixo de simetria dessa reflexão.

No encontro 1, esse estudante já havia comentado sobre o sentido contrário das duas figuras refletidas em torno do eixo de simetria e, com esse comentário, percebemos que esse estudante, pelas suas explorações do arrastar propiciadas pela atividade dinâmica desenvolvida no GeoGebra, conseguiu identificar as congruências, eixo de simetria e orientação invertida presentes na transformação geométrica de reflexão.

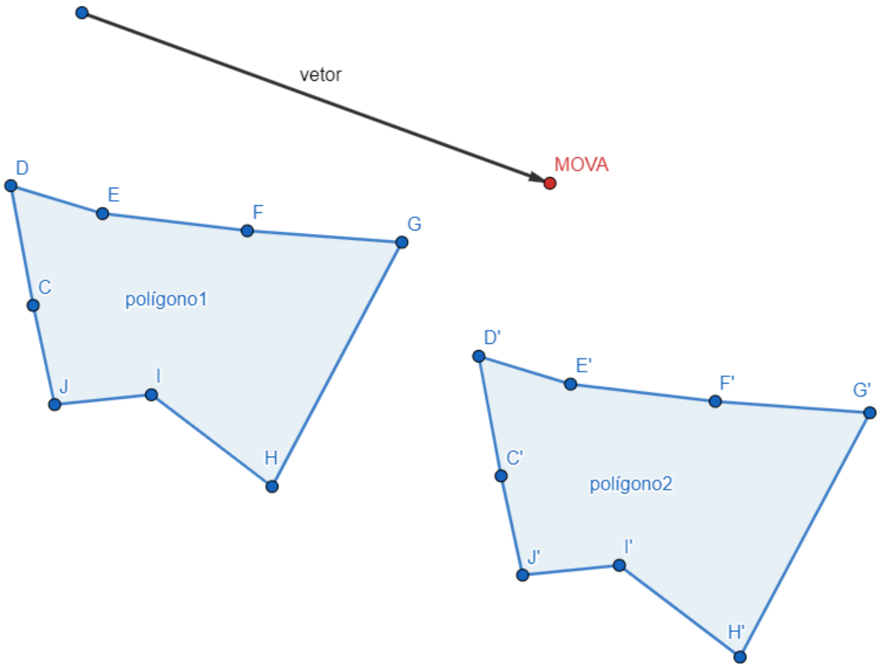
Ao final desse encontro, todos os participantes presentes conseguiram finalizar as suas explorações e entregaram os seus relatórios de observações para a pesquisadora. Após isso, a professora informou que no próximo encontro eles iriam explorar uma nova atividade dinâmica no mesmo software, GeoGebra.

5.3 ENCONTRO 3

Neste encontro, havia 11 participantes dentre os 21 estudantes presentes. A duração de outras atividades acadêmicas, que não fazem parte desta pesquisa, acabou se estendendo neste dia, o que acabou tomando um pouco do tempo planejado para este encontro. Portanto, o encontro 3 durou 30 minutos ao invés de um período de 50 minutos.

Para reduzir a quantidade de chromebooks utilizando uma mesma rede de wi-fi, a pesquisadora solicitou que os estudantes formassem duplas para realizar as explorações da atividade 2 sobre translação, no GeoGebra. Entretanto, foi entregue uma folha, com os relatórios de observações, para cada um dos estudante a fim de que estes pudessem realizar seus próprios registros sobre o que analisaram com as explorações da atividade (Figura 20).

Figura 20 - Imagem da Atividade 2 - Translação



Fonte: Acervo da autora

Com menos chromebooks sendo utilizados, a conexão com a internet ficou um pouco melhor. Todos os estudantes conseguiram acessar a atividade na versão online do GeoGebra e realizar, apesar do tempo reduzido, as suas explorações com o arrastar dos pontos móveis das construções e, em conjunto com a tecnologia, construir as suas primeiras conjecturas sobre a transformação geométrica de translação.

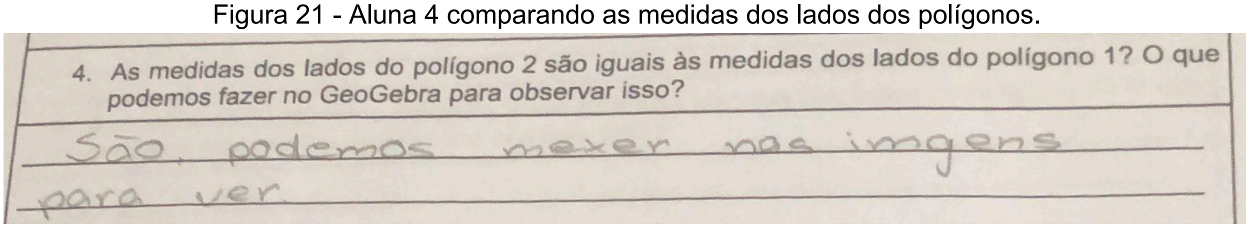
Todos os estudantes, com exceção da Aluna 4, comentaram que os dois polígonos, como no caso das figuras refletidas da atividade 1, "*se moviam/mexiam juntos*". Com isso, podemos observar que esses estudantes perceberam, pela exploração do arrastar, que havia uma preservação das distâncias, mantendo a congruência entre os polígonos, uma das propriedades da transformação geométrica de translação.

A Aluna 4 comentou em seu relatório de observações que "*a imagem do polígono 2 se movimenta igual o 1*". A partir disso, podemos considerar que a Aluna 4, ao arrastar o polígono 1, percebeu um padrão de movimento no polígono 2 que precisava ser igual ao movimento do polígono 1 para preservar as distâncias que, nessa transformação geométrica de translação, precisam ser deslocadas, de acordo com Dickel (2019), ao longo de uma direção e sentido, um vetor.

Essa percepção de direção e sentido indicadas por um vetor numa transformação geométrica de translação foram apontadas nos relatórios de observações de duas estudantes, Aluna 2 e Aluna 5 que exploravam juntas a atividade, ao afirmarem que o polígono 2 “*se mexe de acordo com o vetor de trás pra frente*”. Provavelmente, elas devem ter arrastado o ponto “MOVA”, na extremidade do vetor, nesse sentido “*de trás pra frente*”, aumentando o comprimento do vetor, o que influenciou no movimento do polígono 2.

A Aluna 4 apresentou (Figura 21) em seu relatório de observações uma ação, envolvendo o arrastar, que poderia ser realizada para verificar se as medidas dos lados do polígono 2 eram iguais às dos lados do polígono 1.

Figura 21 - Aluna 4 comparando as medidas dos lados dos polígonos.


4. As medidas dos lados do polígono 2 são iguais às medidas dos lados do polígono 1? O que podemos fazer no GeoGebra para observar isso?

São, podemos mexer nas imgens para ver.

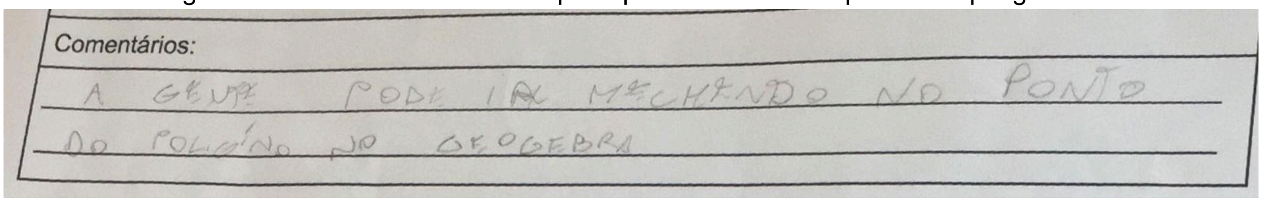
Fonte: Dados da pesquisa

A partir desse comentário da Aluna 4, podemos considerar que a ação do arrastar possibilitou que a relação de congruência entre as medidas dos lados dos polígonos, que precisa existir em uma transformação geométrica de translação, pudesse ser verificada pela estudante.

O Aluno 9, ao tentar verificar a congruência entre os lados dos polígonos, fez o seguinte comentário em seu relatório de observações: “*na opção ‘álgebra’ aparece os segmentos e todos têm o mesmo valor*”. Podemos observar, com isso, que o registro algébrico dos segmentos auxiliou esse estudante a verificar a congruência dos segmentos dos polígonos presentes na janela de geometria do GeoGebra. O fato deste software ser uma multiplataforma que possibilita trabalhar com diferentes registros (algébrico, gráfico, geométrico) de forma simultânea, pode auxiliar os estudantes a perceberem relações entre diferentes áreas da matemática, como Álgebra e Geometria.

O Aluno 7 fez um comentário (Figura 22) em seu relatório sobre os pontos móveis do polígono 1 construído no GeoGebra, percebendo que, nesse ambiente dinâmico do software, eles podem ser arrastados.

Figura 22 - Aluno 7 comentando que é possível mover os pontos do polígono 1


Comentários:
A GENTE PODE IR MECHANDO NO PONTO
DO POLÍGNO NO GEOGEBRA

Fonte: Dados da pesquisa

Com esse comentário do Aluno 7 percebemos que houve uma exploração do arrastar na construção do polígono 1. A partir dessa exploração, o Aluno 7 também comenta o que acontece com o polígono 2 quando ele arrasta os pontos móveis do polígono 1, informando que o polígono 2 “*muda o formato também*”.

Portanto, com base nos relatos do Aluno 7 e dos outros participantes que apresentamos nesta seção, podemos concluir que o uso do recurso tecnológico, GeoGebra, nesta aula não se tornou algo meramente atrativo uma vez que apresentou, como Notare e Dickel (2018) recomendam, situações nas quais os estudantes puderam desenvolver o seu pensamento matemático em conjunto com a tecnologia.

Ao final da aula, mesmo com o tempo reduzido, todos os participantes realizaram suas explorações da atividade 2 sobre translação. Então, a pesquisadora recolheu os relatórios e informou que no próximo encontro eles explorariam novas atividades dinâmicas no GeoGebra envolvendo um outro tipo de transformação geométrica, rotação.

5.4 ENCONTRO 4

Neste encontro havia 8 participantes, dentre os 17 estudantes presentes, e a pesquisadora iniciou a aula informando a turma que seria realizada uma dinâmica um pouco diferente. Com a intenção de dar uma atenção mais individualizada aos estudantes, realizar gravações de áudio e ter uma quantia menor de chromebooks utilizando uma mesma rede de wi-fi, a pesquisadora dividiu (Quadro 07) a turma em dois grupos, grupo A e grupo B .

Quadro 07 - Distribuição dos participantes da pesquisa nos grupos A e B.

Grupo A	**Grupo B**
Aluno 7	Aluna 4
Aluno 9	Aluna 6
Aluno 10	Aluna 8
Aluno 12	Aluna 11

Fonte: Produção da pesquisadora

A pesquisadora ficou dois períodos consecutivos, de 50 minutos cada, realizando a prática com cada grupo. Neste encontro, os dois grupos realizaram as atividades 3 e 4, sobre a transformação geométrica de rotação e fizeram comparações entre os três tipos de transformações isométricas (reflexão, translação e rotação).

Enquanto um grupo estava com a professora pesquisadora participando da prática do TCC, o outro grupo ficou na sala com a professora de matemática da escola fazendo outras atividades não referentes ao assunto desenvolvido nesta pesquisa.

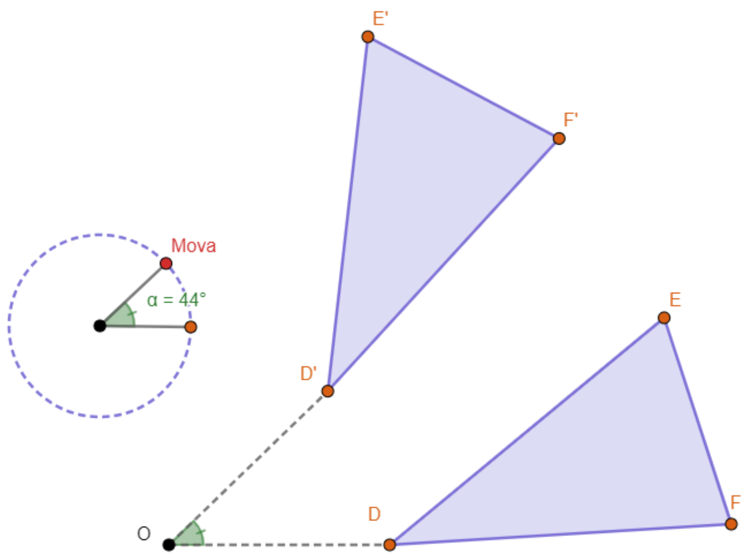
Nas seções a seguir, apresentamos todos os relatos, observações e análises que ocorreram neste encontro, a partir das práticas realizadas no Grupo A e no Grupo B.

5.4.1 Exploração da Atividade 3 - Rotação

No início da prática, a pesquisadora solicitou que os estudantes abrissem a Atividade 3 - Rotação no GeoGebra para começarem as suas explorações. Desta vez, os estudantes já demonstraram estar mais familiarizados com a versão online do GeoGebra.

Como havia poucos chromebooks sendo utilizados, a conexão com a internet estava melhor e mais veloz. E logo que abriram a atividade 3 (Figura 23), todos os estudantes já começaram a tentar arrastar todos os pontos das construções que apareciam na tela. Com base nisso, percebemos que os estudantes já estavam pensando em conjunto com a tecnologia do ambiente dinâmico, aproveitando os seus recursos dinâmicos para realizar as suas explorações, sob a ação do arrastar.

Figura 23 - Imagem da Atividade 3 - Rotação



Fonte: Acervo da autora

Conversando com o Aluno 7 e o Aluno 12, que estavam explorando a atividade 3 em dupla, a pesquisadora solicitou para que eles tentassem explicar o que acontecia com os triângulos quando eles alteravam o ângulo indicado na circunferência, com o objetivo de verificar se eles iram perceber que a rotação do triângulo D'E'F' dependia do valor daquele ângulo. No Quadro 08, apresentamos o diálogo entre esses estudantes e a pesquisadora, gerado a partir dessa solicitação.

Quadro 08 - Diálogo entre Pesquisadora, Aluno 7 e Aluno 12 sobre a Atividade 3

Pesquisadora: *O que acontece com o triângulo?* **Aluno 7:** *É que se mexe… ele fecha ou abre. Depende quando tu move no ponto* (esse é o ponto *Mova* que aparece na circunferência e que eles estavam arrastando). **Aluno 12:** *Ele não muda nada. Ele muda o ângulo conforme tu vai mexendo. O ângulo vai aqui oh, por exemplo* (ele arrastou o ponto *Mova* da circunferência) *aqui* (arrastou mais um pouco o ponto) *oh já é um 180° né? Ou tô errado?* **Aluno 7:** *Não, é 166°. Vai mais!* **Aluno 12:** *Não vai até 180º* (ele continua arrastando o ponto MOVA) **Aluno 7:** *Vai… acho que vai… Passou!* **Aluno 12:** *Ahh ele vai até 179.* **Aluno 7:** *Não dá para mover nesse daqui oh sora?* (ele aponta para o outro ponto da circunferência)

Aluno 12: *Esse daqui dá também* (ele começa a arrastar o outro ponto da circunferência), mas faz a mesma coisa.

Aluno 7: *Mas daí dá pra achar o 180º.*

Aluno 12: *Ele não vai oh…* (ele arrasta o outro ponto da circunferência) *porque tem que ficar reto* (na mesma reta) *com esse daqui oh, o vermelho.*

Fonte: Dados da Pesquisa

A partir desse diálogo podemos concluir que o Aluno 7 percebeu que a rotação do triângulo D'E'F' dependia do valor do ângulo indicado na circunferência. Quando esse estudante comenta que o movimento do triângulo D'E'F' "*fecha ou abre*" ele está se referindo à distância entre esse triângulo e o triângulo DEF que diminui, "*fecha*", conforme o ângulo de rotação é reduzido, pelo movimento do ponto *Mova*, ou aumenta, "*abre*", conforme o ângulo de rotação é aumentado.

No momento em que o Aluno 12 comenta "*não muda nada*", nesse diálogo com a pesquisadora e o Aluno 7, podemos constatar que ele está percebendo a congruência dos dois triângulos que é preservada, apesar do movimento do triângulo D'E'F' quando eles arrastavam o ponto *Mova*, alterando o ângulo de rotação.

O Aluno 9 chamou a pesquisadora para mostrar que havia conseguido deixar o triângulo D'E'F' exatamente por cima do triângulo DEF e começou a arrastar o ponto *Mova*, reduzindo a medida do ângulo de rotação, da construção para mostrar como havia conseguido fazer aquilo. Com base nisso, a pesquisadora perguntou o que ocorria com o ângulo quando isso acontecia. O Aluno 9 respondeu "*fica zero graus*".

Analisando as explorações, arrastar vagando (Arzarello et al, 2002), do Aluno 7, Aluno 12 e Aluno 9 e seus comentários, percebemos que eles conseguiram identificar as congruências entres os segmentos dos triângulos e o ângulo α de rotação, os quais estão presentes em uma transformação geométrica de rotação (Wagner, 2007).

O centro de rotação, que na transformação desta atividade era o ponto O, também é um elemento importante numa transformação geométrica de rotação, pois, verificamos a preservação das distâncias de cada ponto rotacionado da construção com ele e sabemos que ele é o vértice do nosso ângulo de rotação (Wagner, 2007). Analisando as observações e diálogos dos estudantes, não identificamos evidências sobre a compreensão do ponto O como o centro de rotação nessa transformação da atividade 3.

O Aluno 9, observando e arrastando os três pontos móveis do triângulo DEF, comentou que "*o único que diferencia é o D já que o D move o triângulo, mudando de lugar, de posição, enquanto o F e o E movem os lados, as pontas… olha aqui oh*" nesse momento ele arrasta o ponto D na tela a argumenta que "*ele movimenta o polígono*" depois, arrastando o ponto F, ele comenta "*muda a ponta do polígono*". Analisando as explicações desse estudante, percebemos que ele aproveitou esse ambiente dinâmico, e fértil para explorações, do GeoGebra, para construir suas conjecturas e, em conjunto com a tecnologia, desenvolver seu pensamento matemático (Notare e Dickel, 2018).

Com os comentários do Aluno 9, também podemos pensar sobre o suporte, como comentam Arzarello et al (2002), que essa ação do arrastar pode proporcionar às explicações futuras das conjecturas construídas por esse estudante durante a exploração dessa atividade. E essa atividade ainda poderia envolver outros conteúdos além das transformações geométricas do tipo isométricas, foco desta pesquisa, tais como funções e coordenadas de pontos no plano cartesiano, uma vez que as coordenadas dos pontos F e E do triângulo DEF estão em função das coordenadas do ponto D, nessa construção, e por isso esse ponto "*movimenta o polígono*", como afirma o Aluno 9.

Durante uma conversa com a Aluna 8, a pesquisadora perguntou sobre o que ela havia observado durante suas explorações da atividade 3. Então, ela começou a explicar (Quadro 09), para a pesquisadora, o que havia observado.

Quadro 09 - Diálogo entre Pesquisadora e Aluna 8 sobre a Atividade 3

Aluna 8: *Eu observei que quando mexe o preto* (ponto no centro da circunferência) *o círculo aumenta e daí esses dois aqui* (triângulos DEF e D'E'F') *podem se juntar só que vai ser tipo de formas diferentes.* **Pesquisadora:** Tipo de formas diferentes tu diz … **Aluna 8:** *É que tem um* (triângulo D'E'F') *que tá de cabeça pra baixo e o outro* (triângulo DEF) *não.* **Pesquisadora:** *ok, mas vamos tentar juntar eles então. Tenta mexer nesse ponto* (a pesquisadora aponta para um dos pontos que alteram a medida do ângulo de rotação). *O triângulo ainda está de cabeça pra baixo?*

Aluna 8: *Não…*(ela continuou arrastando o ponto que alterava a medida do ângulo de rotação, até que o triângulo D'E'F' ficou na mesma posição, por cima, do triângulo DEF e, com isso, ela percebeu que as medidas eram iguais e, ao girar, a forma dos triângulos era a mesma).

Fonte: Dados da Pesquisa

A partir desse diálogo entre a Aluna 8 e a pesquisadora, podemos observar que o processo dinâmico de movimento dos objetos geométricos na tela auxiliou a estudante a perceber a congruência existente entre os triângulos, nessa transformação geométrica de rotação. Experimentar esse tipo de situação pode possibilitar que essa estudante, como comentam Basso e Notare (2015), comece a aprender como realizar esse mesmo tipo de experiência, sem o uso de recursos tecnológicos. Talvez, se em um outro momento ela se deparar com uma imagem estática envolvendo a transformação geométrica de rotação, ela consiga perceber, sem o auxílio das TDs e Matemática Dinâmica, as congruências presentes nesta.

A Aluna 11 estava arrastando os pontos da circunferência, que alteravam o ângulo de rotação do triângulo D'E'F', e percebeu que, conforme aumentava o tamanho desse ângulo, os triângulos iam se afastando. Então a pesquisadora perguntou o que ela poderia fazer para tentar aproximar esses triângulos. E ela respondeu que precisava "*juntar as bolinhas*", referindo-se aos pontos que estava movimentando.

A Aluna 6 começou a relatar para a pesquisadora o que ela estava observando ao explorar essa atividade de rotação. Ela explicou que ao mexer no ângulo ela conseguia juntar ou afastar os triângulos, e também destacou que conseguia deixar eles "*meio que um em cima do outro*", então a pesquisadora perguntou o acontecia com o ângulo quando isso acontecia e ela disse "*ele fica… pera… acho que fica zero graus*".

A partir dos comentários e explorações da Aluna 11 e da Aluna 6, percebemos que estas também, a partir do arrastar vagando (Arzarello et al, 2002), construíram suas primeiras conjecturas sobre a transformação geométrica de rotação.

Conforme os estudantes iam concluindo as suas explorações da atividade 3 de rotação, a pesquisadora ia solicitando que estes revisassem as atividades 1 de reflexão e 2 de translação para compararem esses três tipos de transformações isométricas. Na seção a seguir, apresentamos as comparações sobre essas transformações, realizadas pelos estudantes.

5.4.2 Comparando as Atividades de Reflexão, Translação e Rotação

Ao conversar com o Aluno 12, a pesquisadora questionou o que ele identificava de semelhante entre a atividade 3 de rotação que eles estavam explorando naquela aula e as atividades de reflexão e translação que eles exploraram nos encontros anteriores. O Aluno 12 comentou que "*é o que tu mexe nela, a outra parte também mexe junto, ela não…tipo não se desvirtua no caso*", percebendo a congruência preservada, sob a ação do movimento, entre as figuras nesses tipos de transformações geométricas. O Aluno 12, com suas explorações, sob a ação do arrastar, percebeu que mesmo arrastando ou alterando o formato da figura original, a outra figura "*não se desvirtua*", mantém a congruência em relação à figura original.

O Aluno 12 também comentou que, nas três atividades, as figuras "*se movem igual*" e que na atividade 3 havia um ângulo que nas outras não tinha. Então a pesquisadora perguntou o que mais o Aluno 12 e o Aluno 7, que também estava comparando essas atividades, identificavam de diferente entre essas três transformações geométricas que exploraram. O Aluno 12 explicou que na atividade 3 de rotação e atividade 2 de translação as figuras "*se juntam*" e o Aluno 7 completou "*se juntam de um mesmo lado*", percebendo que na atividade 1, de reflexão, isso não era possível, devido a orientação invertida no plano (Wagner, 2007).

O Aluno 7 comentou sobre os pontos da circunferência, que alteravam o ângulo de rotação na atividade 3, e os pontos das extremidades do vetor, na atividade 2, percebendo que quando eles se juntavam, as figuras rotacionadas ou transladadas também ficavam juntas, uma por cima da outra. Com isso, a pesquisadora perguntou o que acontecia com o ângulo e o vetor quando ele juntava esses pontos das extremidades, então ele percebeu que eles "*somem, fica zero*".

O Aluno 12, ao arrastar os pontos das extremidades do segmento que indica o tamanho das figuras refletidas em torno do eixo de simetria na atividade 1, comentou que havia um momento em que, aumentando esse segmento, a figura 1 ultrapassava o eixo de simetria, mas percebeu que, nesse momento, a figura 2 também ultrapassava esse eixo, para manter a simetria (Wagner, 2007). Então, o Aluno 12 concluiu que "*se aumentar demais ela* (Figura 1) *vai passar do eixo de simetria,* mas *elas* (Figura 1 e Figura 2, reflexão da figura 1) *se movem igual, não muda nada*". O Aluno 7 comenta que "*a diferença entre a 1 a 2 e a 3 é que a 1 tem uma listra no meio, quando tu vai aproximar elas passam*".

O Aluno 10 comentou que na atividade 3 havia um ângulo e na atividade 1, uma reta. Esse estudante também explicou, arrastando as construções das atividades 1 e 3, que a reta na atividade 1 funcionava como um espelho e ele não conseguia deixar as duas do mesmo lado, já na atividade 3 não tinha essa reta e quando ele movimentava o ângulo, o triângulo D'E'F' se mexia também. Esse estudante não estava presente no encontro 3, no qual trabalhamos com a transformação geométrica de translação, então a pesquisadora solicitou para que ele abrisse a atividade 2 para explorar um pouco essa transformação também.

A Aluna 11, ao comparar as três atividades (de reflexão, translação e rotação), comentou que a primeira de reflexão era como um espelho e observou que na atividade 3 de rotação havia um ângulo que fazia com que só uma das figuras, o triângulo D'E'F', fosse movimentada e na atividade 2 de translação havia "*uma seta*", o vetor, que só movimentava uma das figuras também, o polígono 2, o afastando ou aproximando, dependendo do tamanho da "*seta*".

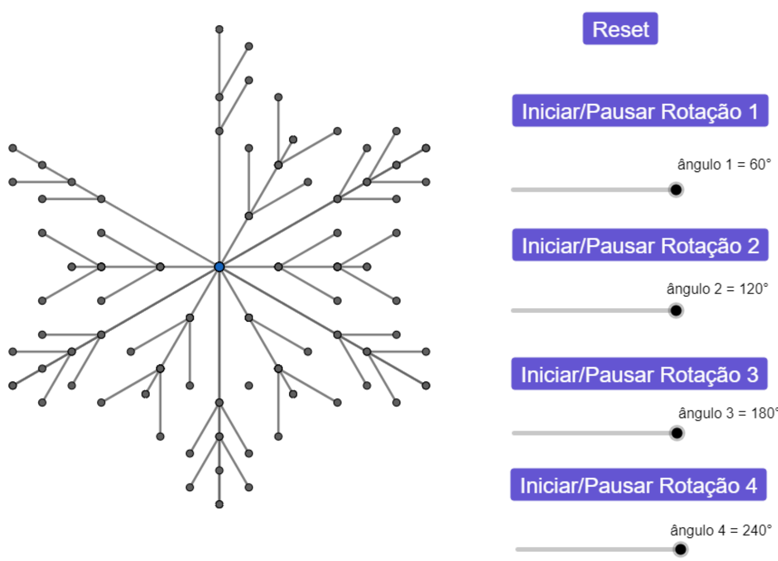
Com base nos comentários que os estudantes apresentaram nesta seção, podemos concluir que estes perceberam as relações de congruência preservadas, sob a ação do movimento, nesses três tipos de transformações geométricas (reflexão, translação e rotação) pois, segundo Wagner (2007), são todas transformações do tipo isométricas que, por sua vez, preservam distâncias. E também podemos considerar que eles conseguiram diferenciar os elementos de cada uma delas, sendo eles: uma reta (eixo de simetria) presente na transformação geométrica de reflexão, um vetor presente na transformação geométrica de translação, e um ângulo de rotação presente na transformação geométrica de rotação.

Após a realização dessas comparações das transformações geométricas, a professora convidou os estudantes a explorarem a Atividade 4 - Floco de Neve que também trabalha com a transformação geométrica de rotação. A seguir, apresentamos o relato sobre essas explorações.

5.4.3 Exploração da Atividade 4 - Floco de Neve

Como dito anteriormente, os estudantes começaram a explorar a atividade 4 (Figura 24) do Floco de Neve que também trabalha com a transformação geométrica de rotação.

Figura 24 - Imagem da Atividade 4 - Floco de Neve



Fonte: Acervo da autora

Ao observar os movimentos das quatro rotações, no sentido horário, realizadas a partir do primeiro ramo, o Aluno 12 comentou que o Floco de Neve "*precisa de um 300… um ângulo de 300*", esse estudante fez um cálculo mental para descobrir o valor desse ângulo, pois ele havia percebido que estava aumentando 60° nos ângulos das rotações. A pesquisadora incentivou o Aluno 12 e o Aluno 7 a fazerem a construção dessa rotação no GeoGebra para verificar se, ao colocar aquele ângulo de 300°, o ramo rotacionado ficaria na posição que eles imaginavam. Nesse processo eles precisavam escolher o sentido de rotação, que o Aluno 7 escolheu como sentido horário.

O Aluno 9 comentou que a quinta rotação que faltava seria "a *volta completa*", entretanto ele pensa mais um pouco e comenta que "*não, quase a volta completa, trezentos e… não, pera aí* (continua pensando) *é vai dar 300 graus já que o movimento é o mesmo 60, 120, 180… vai multiplicado por 1, 2, 3 e 4*".

Depois que o Aluno 9 realizou a construção da quinta rotação, no sentido horário testando o ângulo de 300°, a pesquisadora fez um questionamento referente ao sentido de rotação escolhido, perguntando se o sentido escolhido fosse o anti-horário qual deveria ser o valor do ângulo de rotação. Então o Aluno 9 logo respondeu que seria “*60 graus no anti-horário*”.

Na atividade 4 do Floco de Neve, a Aluna 4, Aluna 6, Aluna 11 e Aluna 8 concluíram, ao observar o movimento das rotações do primeiro ramo, que o valor do ângulo de rotação deveria ser 300° no sentido horário.

Com essa atividade percebemos o quanto um software como o GeoGebra pode auxiliar, com seu feedback imediato, os estudantes em seus testes para verificar suas conjecturas, que neste caso foram sobre a medida do ângulo de rotação e o seu sentido. Além do mais, nesta atividade os estudantes tiveram a oportunidade de realizar suas próprias construções, determinando a quinta rotação do ramo e, dessa maneira, atuando de forma ativa nos seus processos de aprendizagem.

Ademais, os estudantes demonstraram interesse nessa etapa de realizar uma rotação, ficando animados ao procurar as ferramentas do GeoGebra que iriam utilizar para realizar suas próprias construções.

5.5 ENCONTRO 5

Dentre os 20 estudantes presentes neste dia, 8 eram os participantes desta pesquisa. Esse foi um encontro de dois períodos consecutivos, de 50 minutos cada, no qual realizamos a atividade 5.

Nesta atividade, o objetivo geral era que os estudantes colocassem em prática os conceitos sobre as transformações isométricas exploradas nos encontros anteriores e buscassem identificá-las nas imagens apresentadas na janela de geometria do GeoGebra podendo utilizar suas ferramentas (retas, ângulos e vetores) para isso. Além disso, também se pretendia retomar o conceito de eixo de simetria com algumas imagens simétricas como exemplo.

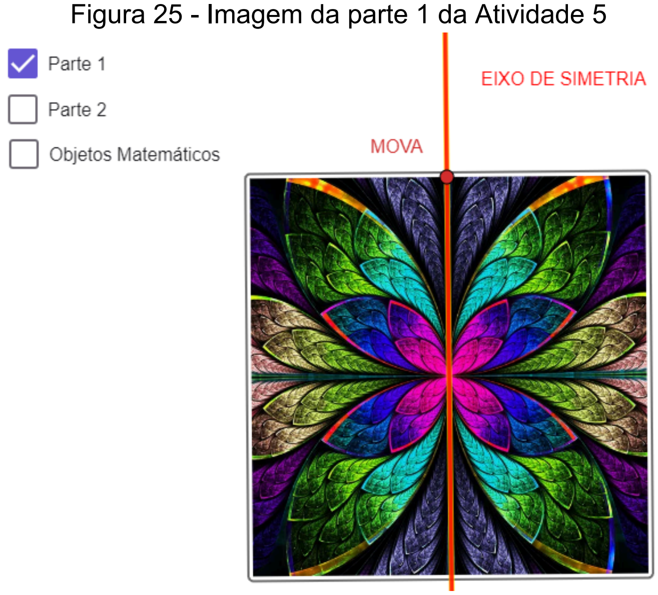
Neste dia, quando a pesquisadora chegou na escola para realizar a prática com os estudantes, ela descobriu que haviam iniciado uma Gincana naquela semana.

Diversas atividades estavam ocorrendo ao mesmo tempo e, por conta disso, os estudantes estavam mais agitados e dispersos neste encontro.

Mesmo assim, eles conseguiram se organizar para realizar a prática na sala Maker. A conexão foi outro desafio nesse dia, e a pesquisadora precisou solicitar que os estudantes formassem duplas ou trios para abrir a atividade num mesmo chromebook. Além disso, no início desta aula, também ocorreu um problema com a versão online do GeoGebra, na qual não foi possível, em alguns chromebooks, carregar a página onde as atividades da prática estavam publicadas. A pesquisadora tentou ajudar os estudantes, pesquisando pelo seu nome de usuária, nome completo e digitando diretamente o endereço do site da atividade 5, mas a página não carregou. Esses estudantes precisaram pegar outro chromebook para carregar essa atividade.

Ao abrir a atividade 5, todos os estudantes começaram arrastando o ponto "Mova" para encontrar as posições em que a reta podia ser considerada como um eixo de simetria na imagem da parte 1 (Figura 25) dessa atividade.

Figura 25 - Imagem da parte 1 da Atividade 5

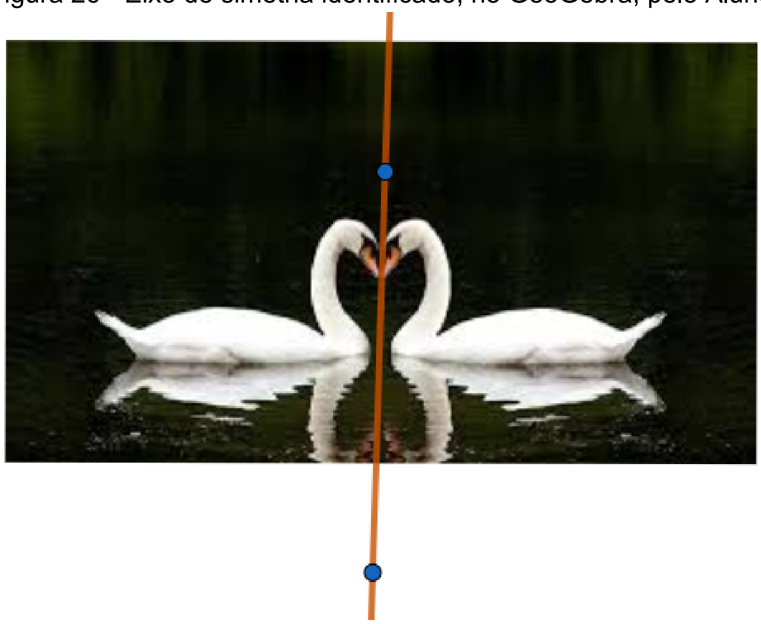


Fonte: Acervo da autora

O Aluno 12 começou a conversar com a Aluna 6 que estava explorando a imagem simétrica da parte 1 dessa atividade. Então, o Aluno 12 começa a explicar que "*essa reta aqui oh vai mudar de cor. Mexe ela oh, até tu ver que vai mudar de cor.*", nesse momento a Aluna 6 segue arrastando o ponto Mova ao redor da imagem para movimentar a reta, *“ohh alí viu! mudou de cor, tenta pausar quando mudar de cor… aí oh deu”*, ela deixou a reta em uma das posições (horizontal) do eixo de simetria e, com isso, o aluno 12 comentou *“tá igual em cima e em baixo”*, percebendo a congruência entre as duas partes da imagem em torno do eixo, horizontal, de simetria. Com isso, a pesquisadora os incentivou a continuarem arrastando o ponto Mova para verificar se identificavam outras possíveis posições para a reta ser considerada como um eixo de simetria.

O Aluno 1 chamou a pesquisadora para mostrar o eixo de simetria que havia identificado em uma das imagens (Figura 26) da parte 2 dessa atividade, na qual precisavam analisar quatro imagens e identificar transformações geométricas de reflexão, translação e/ou rotação nestas.

Figura 26 - Eixo de simetria identificado, no GeoGebra, pelo Aluno 1



Fonte: Dados da pesquisa

Esse estudante ainda comentou sobre a congruência por sobreposição das duas partes desta imagem em torno da reta (eixo de simetria) que ele colocou, ao dizer que “*ficou igual sora, se dobrar assim ficou igual*”. A partir disso, podemos considerar que o Aluno 1 percebeu uma transformação geométrica de reflexão em torno do eixo de simetria que ele identificou.

Dentre as quatro imagens da segunda parte desta atividade, teve uma (Figura 27) que chamou a atenção dos estudantes, gerando debates entre estes e a pesquisadora.

Figura 27 - Imagem que se destacou na parte 2 da atividade 5

Fonte: https://www.scienceinschool.org/pt-pt/article/2007/symmetry-pt-pt/

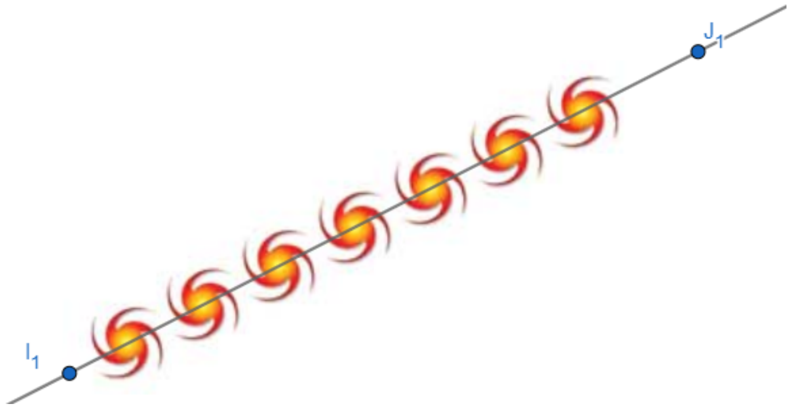
Dois estudantes, Aluno 1 e Aluno 7, chegaram a identificar até um movimento na imagem apresentada na Figura 27. Ao conversarem com a pesquisadora, eles explicaram que parecia que todas aquelas figuras da imagem estavam girando.

O Aluno 1, analisando todas as imagens dessa parte da atividade 5 comentou que "*só essa aqui* (Figura 27) *tá se movendo"* e, a partir disso, a pesquisadora começou a questionar sobre esse movimento e como ele era. Então, o Aluno 1 começou a comentar que *"tá girando, tipo assim… como se eu fosse jogar uma coisa e ela vai ficar girando*", com isso a pesquisadora pergunta "*e o que tá girando, cada um deles? ou tudo junto? ...*" e ele responde "*tudo junto, girando tudo ao mesmo tempo"*.

O Aluno 7, que se aproximou para participar do debate, também apresentou essa mesma percepção sobre o movimento dessas figuras na imagem, que era estática, e comentou que "*todas tão girando no sentido horário*".

O Aluno 12, que também estava analisando essa imagem, comentou que daria para colocar uma reta como eixo de simetria nela. Como esse estudante já havia utilizado as retas construídas em outras imagens, a pesquisadora lhe auxiliou na construção de uma nova reta no GeoGebra, para colocá-la na posição que queria. Na Figura 28 podemos observar a posição da reta que o Aluno 12 construiu no GeoGebra.

Figura 28 - Posição da reta que o Aluno 12 construiu no GeoGebra



Fonte: Dados da pesquisa

Com isso, esse estudante comentou que "fica igual oh, se eu pegar e dobrar em dois fica igual". A partir desse comentário, a pesquisadora concluiu que o Aluno 12 estava identificando uma transformação geométrica de reflexão naquela imagem, porém não havia uma congruência por sobreposição em torno do eixo de simetria, reta construída.

Então, para tentar fazer com que o próprio estudante percebesse isso, a pesquisadora perguntou "*tá mas esse risquinho aqui tá pra cima e esse tá pra baixo?*" e apontou para as pontas de uma das figuras. Com isso, esse estudante respondeu "*ahh tá, esse daqui tá girando pra baixo e esse pra cima, então não vão ser igual os dois, porque tão girando em sentido diferente*". Com base nesse último comentário, podemos considerar que esse estudante identificou uma transformação geométrica de rotação da metade de cada uma dessas figuras da imagem, na qual o centro dessas rotações seria um ponto localizado no centro dessas figuras. Todavia, quando ele comenta que "(...) *porque tão girando em sentido diferente"* ele não está se referindo ao sentido da rotação da figura, mas sim às pontas inclinadas desta, que dão a impressão de um movimento de giro na figura, que deveriam estar num mesmo sentido se houvesse uma transformação geométrica de reflexão em torno da reta (eixo de simetria) construída.

A pesquisadora também perguntou para o Aluno 12 se ele considerava as 7 figuras daquela imagem como "*iguais*" e ele afirmou que sim, percebendo a congruência entre elas. Todavia, ele voltou a falar sobre a questão do giro das figuras se referindo a transformação geométrica de rotação e não percebeu a transformação geométrica de translação presente nessas figuras também.

A Aluna 2 e a Aluna 5 identificaram um eixo vertical de simetria, assim como o Aluno 1 (Figura 26), na imagem dos cisnes, e também um eixo, horizontal, de simetria na imagem com as estrelas (Figura 29). Então a pesquisadora questionou se essas estudantes conseguiam encontrar outras posições em que essa reta pudesse ser considerada como um eixo de simetria também, então elas seguiram arrastando e inclinando a reta para procurar outras posições.

Figura 29 - Imagem com estrelas da parte 2 da atividade 5

Fonte: https://descargamatematicas.com/wp-content /uploads/2017/03/03-DESCARGAR-FIGURAS-SIM%C3%89TRICAS-RESPECTO-A-EJES.pdf

Após isto, acabou o último período deste encontro e, infelizmente, tivemos que encerrar as observações e análises das imagens. A pesquisadora ainda pretendia investigar se os estudantes identificavam uma transformação isométrica de translação nas figuras da imagem da Figura 27, e também observar e restante de suas análises sobre as outras imagens, mas já estava no horário do recreio deles e, logo após este, já estavam programadas as atividades da Gincana.

Devido às atividades da Gincana e período de férias dos estudantes, este foi o nosso último encontro e não conseguimos realizar as atividades 6 e 7, apresentadas no capítulo de metodologia deste trabalho, às quais trabalham com as criações próprias dos estudantes e uso das ferramentas de reflexão, translação e rotação do GeoGebra.

Percebemos, que os estudantes realizaram explorações, com o arrastar vagando, nas três primeiras atividades do experimento prático, as quais auxiliaram os seus processos de aprendizagem sobre as transformações geométricas de reflexão, translação e rotação. Aprendizagem estas que puderam colocar em prática, como pretendíamos, nas atividade 4 e 5 realizadas nos últimos encontros.

No capítulo a seguir, apresentamos nossas considerações finais com base em todas as experiências que coletamos durante a trajetória desta pesquisa sobre o GeoGebra e as transformações geométricas do tipo isométricas.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer desta pesquisa, estudamos sobre as transformações geométricas do tipo isométricas: Reflexão, Translação e Rotação e sobre a matemática dinâmica, que podemos considerar como um ambiente fértil para explorações matemáticas.

Ao pesquisar sobre as Tecnologias Digitais e seu uso em sala de aula, aprofundamos nossos estudos sobre um software de matemática dinâmica, GeoGebra e, pelas análises dos trabalhos correlatos, tivemos a oportunidade de observar relatos sobre o uso deste software na Educação Matemática, com estudantes de diferentes faixas etárias. Estes trabalhos apresentaram diferentes propostas de atividades matemáticas dinâmicas que trouxeram inspiração para a pesquisadora elaborar as suas atividades e demonstraram que o uso de tecnologias digitais como esta, podem auxiliar no aprendizado matemático dos estudantes.

Retomando a pergunta diretriz sobre a qual esta pesquisa se desenvolveu, “De que forma o GeoGebra, software de matemática dinâmica, pode auxiliar no processo de aprendizagem dos estudantes sobre as transformações geométricas do tipo isométricas?”, e com base nas experiências e análises do experimento prático realizado neste trabalho, podemos concluir que as atividades dinâmicas desenvolvidas no GeoGebra e apresentadas nesta pesquisa auxiliaram os estudantes em seus processos de aprendizagem sobre as transformações geométricas do tipo isométricas.

Com essas atividades, os estudantes, sob a ação do arrastar, tiveram a oportunidade de construir e validar conjecturas sobre as transformações geométricas de reflexão, translação e rotação, percebendo o que havia em comum entre elas, preservação da congruência sob ação do movimento, e também os elementos presentes em apenas uma delas, sendo eles: uma reta (eixo de simetria) presente na transformação geométrica de reflexão, um vetor presente na transformação geométrica de translação, e um ângulo de rotação presente na transformação geométrica de rotação.

Observando as explorações dos estudantes, seus relatos e diálogos, percebemos que eles estavam pensando em conjunto com a tecnologia dinâmica desse software e, dessa forma, desenvolvendo o seu raciocínio matemático.

Em todas as atividades realizadas nesse experimento prático, os estudantes tiveram uma participação ativa, partindo do empírico e caminhando para a compreensão de conceitos teóricos. Além do mais, com o feedback do software, eles tiveram a possibilidade de realizar suas próprias construções para verificar suas conjecturas sobre medidas ou sentidos de ângulos de rotação em uma transformação geométrica de rotação.

Nessas aulas da prática do TCC, a professora pesquisadora deparou-se com dúvidas e descobertas dos estudantes não só sobre as transformações geométricas, o que possibilitou que trocas de aprendizagens ocorressem entre professora e estudantes. Mesmo com desafios, tais como problemas de conexão, acesso às atividades na versão online do GeoGebra, alunos acessando jogos online ao mesmo tempo em que faziam as atividades e distraindo-se com estes, agitação e empolgação da turma com a ida para a sala Maker e o uso de recursos tecnológicos com acesso à internet, podemos considerar que valeu a pena, levando em consideração todo o aprendizado que os estudantes e a professora construíram juntos no decorrer desta prática.

Sobre as atividades da prática, algumas alterações poderiam ser consideradas em futuras aplicações. Na atividade 3 - Rotação, identificamos uma limitação no intervalo de valores do ângulo de rotação, pois os estudantes tentavam alterar o ângulo de rotação para realizar uma volta completa (de 360º) na rotação dos triângulos e não era possível. Também identificamos que seria importante abordar com maior ênfase o centro de giro nessa atividade, provocando questionamentos aos estudantes com o objetivo de compreender melhor esse elemento importante da transformação geométrica de rotação.

Nas transformações geométricas de rotação que realizamos nas atividades 3 e 4, não debatemos sobre o sinal dos ângulos de rotação, que são importantes para determinar o sentido da rotação, e quando os estudantes realizaram as suas próprias construções na atividade 4 do Floco de Neve, não precisaram refletir sobre o sinal do ângulo de rotação, pois havia uma opção para a escolha do sentido da rotação quando eles faziam uso da ferramenta de rotação do GeoGebra.

Com a experiência desta pesquisa, caminho em direção à conclusão deste curso de Matemática Licenciatura sabendo que o uso de Tecnologias Digitais pode ser enriquecedor no processo de aprendizagens matemáticas dos estudantes, desde que as atividades propostas provoquem a exploração do ambiente e ferramentas dessa tecnologia.

Deixamos as atividades dinâmicas planejadas no GeoGebra aos leitores desta pesquisa e o incentivo de aproveitá-las, no caso de serem professores, com seus estudantes em sala de aula. Ademais, fica o convite aos leitores para se inspirarem nelas e tentarem realizar suas próprias criações.

Com a criação das atividades dessa pesquisa, colocamos em prática conceitos matemáticos, tais como ângulos, retas paralelas e perpendiculares, circunferência, coordenadas de ponto, construções com régua e compasso, programação, entre outros conteúdos estudados ao longo desse curso. E temos certeza que, com suas próprias criações, os leitores desta pesquisa também poderão colocar em prática conceitos já estudados. O pensar sobre essas criações provoca aprendizagem.

Para pesquisas futuras, gostaríamos de experienciar a prática desta pesquisa com mais estudantes de outras faixas etárias também, para analisar as suas interações com o ambiente dinâmico do GeoGebra. Além disso, pretendemos pesquisar outros conteúdos matemáticos que poderiam ser explorados no ambiente de matemática dinâmica desse software, e continuar os estudos teóricos sobre as Tecnologias Digitais, que estão em constante atualização, e suas possíveis contribuições para o processo de aprendizagem dos estudantes.

Ademais, também objetivamos conhecer e explorar outros softwares e recursos tecnológicos que possam ser utilizados em uma aula de matemática. Um desses softwares sobre o qual a pesquisadora gostaria de aprofundar seus estudos é o Scratch, um software de programação.

REFERÊNCIAS

BASSO, M. V. A.; NOTARE, M. R. Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica. **RENOTE: Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 13, n. 2, dez. 2015.

BAUER, Daiane M. B. **O Estudo da Simetria de Reflexão através das Mídias Digitais**. Trabalho de conclusão de curso de especialização. Picada Café, 2015. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/134076 . Acesso em: 11 jul. 2023.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos**. Tradução: M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018.

CHIARI, Aparecida S. de S. Tecnologias Digitais e Educação Matemática: relações possíveis, possibilidades futuras. **Perspectivas da Educação Matemática**. Mato Grosso do Sul, v. 11, n. 26, p. 351-364, fev. 2018. Disponível em: https://desafioonline.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/6570. Acesso em: 07 jul. 2023.

DICKEL, Marlei T. **Geogebra e Isometrias**. A Ação de Arrastar na Construção de Conceitos. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS. Porto Alegre, 2019. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/198640. Acesso em: 26 jul. 2023.

DICKEL, Marlei T.; NOTARE, Márcia R. Isometrias e Geogebra: O Papel do Arrastar na Construção de Conceitos. **Novas Tecnologias na Educação.** Porto Alegre, v. 16, n. 1, julho. 2018. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/182506. Acesso em: 16 jul. 2023.

GIRALDO, Victor. **Recursos computacionais no ensino de matemática.** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

GOETZ, Barbara Cezar. **Aprendizagem de simetrias nos anos finais do Ensino Fundamental.** Trabalho de conclusão de curso (Instituto de Matemática). Porto Alegre, 2014. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/109995. Acesso em: 14 dez. 2023.

JORGE, Marilise O. **Pintando o Cubo: Matemática com Artes.** Trabalho de conclusão de graduação. Departamento de Matemática Pura e Aplicada, UFRGS. Porto Alegre,2011. Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/31622. Acesso em: 11 jul. 2023.

KENSKI, Vani M. **Educação e tecnologias**. O novo ritmo da informação. 2. ed. Campinas: Papirus, 2007.

MARSCHALL, Janini. **Geogebra no Ensino das Transformações Geométricas.** Uma Investigação Baseada na Teoria da Negociação de Significados. Trabalho de conclusão de especialização (Instituto de Matemática). Pólo NH, 2015. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/134110. Acesso em: 02 set. 2023.

MEDEIROS, Margarete. F. **Geometria Dinâmica no ensino de transformações no plano.** Uma experiência com professores de Educação Básica. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática, UFRGS. Porto Alegre,2012. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/54888. Acesso em: 10 abr. 2024.

RETORE, Lucas D. **Visualização Com Matemática Dinâmica: Um Estudo Com Projeção Ortogonal Na Educação Básica.** Trabalho de conclusão de graduação. Departamento de Matemática Pura e Aplicada, UFRGS. Porto Alegre, 2023. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/270507. Acesso em: 29 maio 2024.

SAITO, Olga H.; KITANI, Patricia M.; CHIHAYA, Mariana C. O GeoGebra e o floco de neve no ensino das transformações geométricas. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computation and Applied Mathematics**. Mato Grosso do Sul, v. 10, n. 01, dez. 2023. Disponível em: https://proceedings.sbmac.org.br/sbma c/article/view/4078. Acesso em: 21 dez. 2023.

WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas.** Rio de Janeiro: SBM, 2007

APÊNDICES

APÊNDICE A - Carta de Anuência da Instituição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Porto Alegre, 10 de abril de 2024.

Prezada Diretora,
Da Escola:

A acadêmica Gislaine Proença Prato é estudante regularmente matriculada no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Como parte das exigências do currículo do curso, a aluna está desenvolvendo uma pesquisa sobre o software de matemática dinâmica GeoGebra e as transformações geométricas do tipo isométricas, para a conclusão de seu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), o qual é exigido para que possa adquirir o título de Licenciado em Matemática.

O objetivo do trabalho, estritamente acadêmico, em linhas gerais, consiste em investigar de que forma o software de matemática dinâmica GeoGebra pode auxiliar no processo de aprendizagem de estudantes sobre as transformações geométricas do tipo isométricas. Neste sentido, torna-se importante proceder à coleta de dados, incluindo gravações, relatórios e arquivos construídos no GeoGebra pelos estudantes, para futuras análises e obtenção dos resultados relacionados com a aprendizagem da Matemática. Por esta razão, estamos solicitando a sua autorização para que este trabalho possa ser desenvolvido na escola sob sua Direção.

Em caso de manifestação de sua concordância, por favor, registre sua ciência ao final deste documento, o qual está sendo encaminhado em duas vias.

Enquanto orientadora responsável, reiteramos nosso compromisso ético com os participantes dessa pesquisa e nos colocamos à disposição para quaisquer esclarecimentos durante e após a realização da coleta de dados. Para tanto, deixamos à disposição o seguinte contato: XXXXXXXXXXXX@ufrgs.br.

Agradecemos a sua atenção.
Cordialmente,

____
Márcia Rodrigues Notare Meneghetti
Professora do Instituto de Matemática e Estatística/IME-UFRGS

____
Diretora da Escola

APÊNDICE B - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
Convite para participação em pesquisa

Título da pesquisa: GeoGebra e Transformações Geométricas do Tipo Isométricas
Pesquisadora: Gislaine Proença Prato
Orientadora: Prof. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

Prezado(a) Participante,

Gostaríamos de convidá-lo(a) a participar da pesquisa "Matemática Dinâmica e o Arrastar na Aprendizagem de Transformações Geométricas Isométricas com GeoGebra". A pesquisa está vinculada ao trabalho de conclusão de curso da pesquisadora Gislaine Proença Prato, a qual é estudante do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Essa pesquisa é orientada pela Profa. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti, a quem você poderá contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone (XX) XXXXXXXXX ou e-mail XXXXXXXXXXXX@ufrgs.br.

O objetivo da pesquisa consiste em investigar de que forma o software de matemática dinâmica GeoGebra pode auxiliar no processo de aprendizagem de estudantes sobre as transformações geométricas do tipo isométricas.

Para isto, solicitamos a sua especial colaboração na participação da pesquisa, a qual ocorrerá por meio de participação em atividades envolvendo o uso do software GeoGebra, em que seu trabalho, seus diálogos com seus colegas e a professora/pesquisadora e suas produções serão analisadas, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. Estima-se que sejam investidas no máximo 8 horas para a realização dos encontros referentes às tarefas propostas.

Sua participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade contribuir para o sucesso do estudo, cujos objetivos são estritamente acadêmicos. Gostaríamos de esclarecer que sua participação é totalmente voluntária, podendo você recusar-se a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa. A sua colaboração iniciará apenas a partir da entrega desse documento por você assinado, que está impresso em duas vias, sendo que uma delas é sua e a outra pertence à pesquisadora responsável.

O uso das informações decorridas de sua participação (produção escrita/gravação em áudio/caderno de campo e criação de arquivos no software) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas por um código alfanumérico, de modo a preservar a sua identidade. No caso de fotos e filmagem obtidas durante sua participação, elas também serão utilizadas exclusivamente em atividades acadêmicas, sem identificação. Todas as informações fornecidas por você serão armazenadas sob responsabilidade da pesquisadora por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Com relação aos riscos da pesquisa, informamos que você poderá sentir desconforto emocional e/ou de possíveis riscos psicossociais (ex.; constrangimento, intimidação, angústia, insatisfação, irritação, mal-estar etc.) característicos de ambientes com recursos tecnológicos. Acrescentamos que como pesquisadores temos limitações para assegurar total confidencialidade e potencial risco de violação à privacidade, tendo em vista o registro de dados/logs na utilização de plataforma em ambiente virtual. Ao mesmo tempo, você receberá todo o apoio da professora/pesquisadora no sentido de minimizar estes riscos, tais como resposta a dúvidas e incentivo e apoio para superar essa adaptação.

Já com relação aos benefícios da pesquisa, você terá a oportunidade de conhecer o ambiente dinâmico do GeoGebra, e realizar atividades exploratórias e de criações, proporcionando contribuições para o desenvolvimento, em conjunto com a tecnologia, do seu pensamento matemático e da sua criatividade.

Destacamos que o seu consentimento não o impede de buscar indenização por eventuais danos causados pela pesquisa.

Caso o(a) senhor(a) tenha dúvidas ou necessite de maiores esclarecimentos pode nos contatar pelo telefone (XX) XXXXXXXXX e e-mail XXXXXXXXXXXX@gmail.com .

Caso tenha dúvidas acerca de procedimentos éticos, você também poderá contatar o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av. Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e e-mail etica@propesq.ufrgs.br

Obrigada pela sua colaboração.

Porto Alegre, 30 de abril de 2024.

Pesquisadora Responsável: Gislaine Proença Prato – RG XXX.XXX.XX.XX

Eu, ____, portador(a) do documento de identidade ou CPF ____________________________, concordo em participar voluntariamente da pesquisa intitulada “GeoGebra e Transformações Geométricas do Tipo Isométricas”, desenvolvida pela pesquisadora Gislaine Proença Prato. Fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada, bem como sobre a metodologia que será adotada, sobre os riscos e benefícios envolvidos.

Autorização do Uso de Imagem e Voz:
(   ) SIM, autorizo a divulgação de minha imagem e voz, com uso de efeitos para a não identificação da minha pessoa, em atividades acadêmicas.
(   ) NÃO autorizo a divulgação de minha imagem e voz.

Porto Alegre, 30 de abril de 2024.

________________________________ ________________________________

Assinatura do(a) Responsável   Assinatura da pesquisadora

APÊNDICE C - Termos de Assentimento

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

TERMO DE ASSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, aluno(a) da turma 82, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada: Matemática Dinâmica e o Arrastar na Aprendizagem de Transformações Geométricas Isométricas com GeoGebra, desenvolvida pela pesquisadora Gislaine Proença Prato**.** Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Márcia Rodrigues Notare Meneghetti, professora acadêmica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Tenho ciência de que a minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação, a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) do objetivo estritamente acadêmico do estudo, que consiste em investigar de que forma o software de matemática dinâmica GeoGebra pode auxiliar no processo de aprendizagem de estudantes sobre as transformações geométricas do tipo isométricas.

A minha colaboração se fará por meio de questionários, bem como da participação nas aulas, em que serei observado(a) e minha produção analisada. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a minha participação, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. Porém, para que não ocorram constrangimentos, estou ciente de que será mantido o anonimato dos dados. Além disso, estou ciente de que poderei deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação.

Como benefícios, é esperado deste estudo, produzir informações importantes sobre Tecnologias Digitais na Educação Matemática, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes à educação.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar a pesquisadora responsável pelo e-mail XXXXXXXXXXXX@gmail.com

Porto Alegre, 30 de abril de 2024.

Assinatura do(a) aluno(a):____

Assinatura da pesquisadora: ____

Assinatura da Orientadora da pesquisa: _________________________________

APÊNDICE D - Folha com atividade 1

ATIVIDADE 1 - REFLEXÃO

Nome:____

Turma:________

1. Pesquise GeoGebra no Google e acesse o site: https://www.geogebra.org/. Após entrar nesse site, procure a opção de pesquisar e digite "Gislaine Proença Prato" e abra a Atividade 1 - Reflexão;
2. Observe, tente movimentar e explore a figura 1 e a figura 2, que é a reflexão da figura 1 em relação a reta vermelha;
3. Preencha o Relatório de Observações da Atividade 1.

Relatório de Observações da Atividade 1

1. O que acontece com a figura 2 quando movimentamos a figura 1?
______________________________ ______________________________ ______________________________ ______________________________ ______________________________
2. Quando alteramos o tamanho da figura 1, o que acontece com a figura 2? Explique o que você observa:
______________________________ ______________________________ ______________________________ ______________________________ ______________________________
3. Quando você aproxima a figura 1 da reta vermelha, a figura 2 se aproxima dela também? Ou se afasta?
______________________________ ______________________________ ______________________________

4. E quando você afasta a figura 1 da reta vermelha, o que acontece com a figura 2?

5. Ao movimentar a figura 1, em algum momento você conseguiu deixar as duas figuras do mesmo lado da reta?

6. Sobre os movimentos das figuras, e a reta vermelha dividindo a tela em dois lados, quais foram as suas observações?

Comentários:

APÊNDICE E - Folha com atividade 2

ATIVIDADE 2 - TRANSLAÇÃO

Nome:____ **Turma:**_________

1. Pesquise GeoGebra no Google e acesse o site: https://www.geogebra.org/. Após entrar nesse site, procure a opção de pesquisar e digite “Gislaine Proença Prato” e abra a Atividade 2 - Translação;
2. Observe, tente movimentar e explore o polígonos 1 e o polígono 2, que é a translação do polígono 1 em relação ao vetor;
3. Preencha o Relatório de Observações da Atividade 2.

Relatório de Observações da Atividade 2

1. O que acontece com o polígono 2 quando você mexe no vetor? Descreva os movimentos:
__________ __________ __________
2. Quando você mexe nos vértices (pontos) do polígono 1, o que acontece com o polígono 2?
__________ __________ __________
3. A imagem do polígono 2 é igual à imagem do polígono 1? E quando você muda a imagem do polígono 1, o que acontece com a imagem do polígono 2?
__________ __________ __________
4. As medidas dos lados do polígono 2 são iguais às medidas dos lados do polígono 1? O que podemos fazer no GeoGebra para observar isso?
__________ __________ __________ __________
Comentários:
__________ __________

APÊNDICE F - Folha com atividade 3

ATIVIDADE 3 - ROTAÇÃO

Nome:____ **Turma:**________

1. Pesquise GeoGebra no Google e acesse o site: https://www.geogebra.org/. Após entrar nesse site, procure a opção de pesquisar e digite “Gislaine Proença Prato” e abra a Atividade 3 - Rotação;
2. Observe, tente movimentar e explore o triângulo DEF, o triângulo D’E’F’, que é a rotação do triângulo DEF em relação ao ângulo de rotação (destacado em verde na construção);
3. Preencha o Relatório de Observações da Atividade 3.

Relatório de Observações da Atividade 3

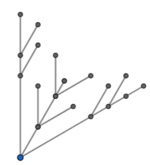
1. O que acontece quando você muda o valor do ângulo α (ângulo de rotação, verde)?
____________________ ____________________ ____________________ ____________________
2. Quando você mexe nos vértices (pontos vermelhos) do triângulo DEF, o que acontece com o triângulo D’E’F’?
____________________ ____________________ ____________________ ____________________
3. A imagem do triângulo DEF é **<u>SEMPRE</u>** igual à imagem do triângulo D’E’F’? Explique o que você fez para chegar nessa conclusão:
____________________ ____________________ ____________________
4. Mexa no ponto “MOVA” até conseguir fazer com que o triângulo D’E’F’ fique na mesma posição do triângulo DEF. O que acontece com o ângulo α quando você faz isso?
____________________ ____________________ ____________________
Comentários:
____________________ ____________________

APÊNDICE G - Folha com atividade 4

ATIVIDADE 4 - FLOCO DE NEVE

Nome:____ **Turma:**_________

1. Pesquise GeoGebra no Google e acesse o site: https://www.geogebra.org/. Após entrar nesse site, procure a opção de pesquisar e digite "Gislaine Proença Prato" e abra a Atividade 5 - Floco de Neve;
2. Você irá se deparar com a seguinte construção:



Este é o desenho do primeiro ramo de um floco de neve, clique nos botões de "iniciar/pausar Rotação" para observar os movimentos que são realizados em cada uma das rotações. Depois faça a atividade descrita abaixo:

ATIVIDADE

Na Rotação 1, explique o que acontece com o ramo de rotação conforme o ângulo 1 vai aumentando de 0° até 60°:

____

____.

Se seguirmos essa estratégia de rotacionar o primeiro ramo do floco de neve, quantas rotações você acha que ainda precisamos fazer para conseguirmos construir um floco de neve inteiro?

____.

Qual deve ser a medida do ângulo de rotação da(s) próxima(s) rotação/rotações? Explique como você chegou nessa conclusão:

____

____.

- ❖ **Hora de Testar**

Usando a ferramenta de "Rotação em Torno de um Ponto" do GeoGebra, faça a(s) rotação/rotações que falta/faltam para completar o desenho do floco de neve, usando as medidas dos ângulos que você colocou na resposta anterior:

O que aconteceu depois que você fez essas rotações? Descreva:

____

____.

Se, com essas rotações, o desenho do seu floco de neve não ficou completo, por que você acha que isso aconteceu? E o que você acha que podemos mudar para resolver esse problema? Faça os testes no GeoGebra e depois nos conte se conseguiu e o que fez.

____

____

____.

APÊNDICE H - Folha com atividade 5

ATIVIDADE 5 - IMAGENS SIMÉTRICAS

Nome:____ **Turma:**________

1. Pesquise GeoGebra no Google e acesse o site: https://www.geogebra.org/. Após entrar nesse site, procure a opção de pesquisar e digite “Gislaine Proença Prato” e abra a Atividade 5 - Imagens Simétricas;
2. Clique na opção “Parte 1” na tela;

Parte 1

Uma reta pode ser considerada como um eixo de simetria quando esta divide uma imagem em duas partes congruentes por sobreposição. (Dica: Imagine que você irá dobrar a imagem ao meio bem na parte indicada por uma reta. Se, ao fazer isso, todos os contornos e formas de uma das partes coincidir, na mesma posição, com os da outra parte, então podemos considerar essa reta como um eixo de simetria).

Movimente o ponto “MOVA”, em vermelho, da construção para encontrar posições que façam com que a reta amarela possa ser considerada um eixo de simetria para essa imagem.

Parte 2

3. Depois desmarque a opção “Parte 1” e clique em “Parte 2” e “Objetos Matemáticos”. Analise as imagens que aparecem na tela e tente identificar nestas, as transformações geométricas de reflexão, translação e rotação. Pode utilizar os “objetos matemáticos” ou outras ferramentas do GeoGebra para lhe auxiliar nesse processo.

APÊNDICE I - Folha com atividade 6

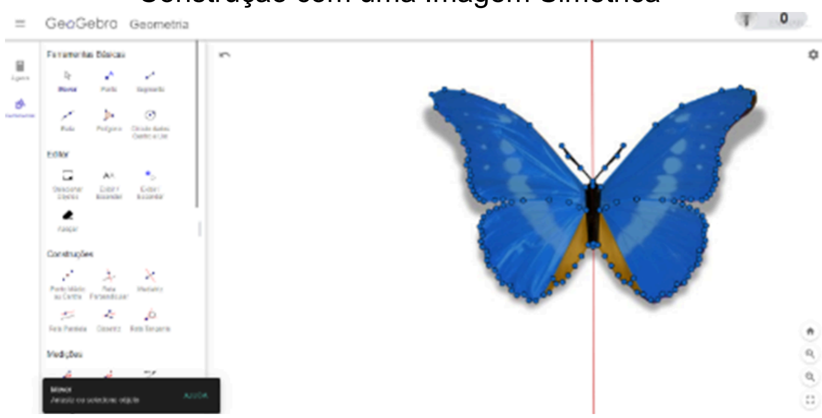
ATIVIDADE 6 - CONSTRUÇÕES COM IMAGEM SIMÉTRICA

Nome:____ **Turma:**_________

1. Pesquise GeoGebra no Google e acesse o site: https://www.geogebra.org/. Após entrar nesse site, procure a opção de pesquisar e digite “Gislaine Proença Prato” e abra a Atividade 6 - Construções com Imagem Simétrica;

2. Você irá encontrar o seguinte exemplo de uma construção feita com uma imagem simétrica:

Construção com uma Imagem Simétrica



Fonte: Acervo da autora

AGORA É SUA VEZ!

3. Pesquise GeoGebra no Google e acesse o site: https://www.geogebra.org/. Após entrar nesse site, procure a opção calculadora, clique e depois escolha a opção Geometria. Então iniciaremos a sua própria construção com uma imagem simétrica;

4. Pesquise uma imagem simétrica que lhe chame a atenção, que você goste: Pode ser a imagem de um rosto, um objeto, uma pintura, uma flor, um animal, um personagem, entre outros;

5. Copie e cole essa imagem no GeoGebra. Depois construa uma reta por cima dela (ela deve estar numa posição que possa ser considerada como o seu eixo de simetria);

6. De um lado desse eixo (reta construída), desenhe (usando as ferramentas de pontos, segmentos, polígonos...) a metade dessa imagem;

7. Após isto, tente construir a outra metade simétrica da imagem, fazendo uso, da transformação geométrica de reflexão;

8. Quando terminar a construção, chame e aguarde a professora para que ela possa salvar seu arquivo no pendrive.

APÊNDICE J - Folha com atividade 7

ATIVIDADE 7 - CRIAÇÃO LIVRE

Nome:____ **Turma:**________

Chegou o momento de liberar toda a sua imaginação e criatividade. Essa criação será única e será de sua autoria!

1. Pesquise GeoGebra no Google e acesse o site: https://www.geogebra.org/. Após entrar nesse site, procure a opção calculadora, clique e depois escolha a opção Geometria para iniciarmos a sua própria construção no GeoGebra;

2. Faça a construção de um desenho (pode ser inventado ou de algo que conheça) no GeoGebra, usando as ferramentas que esse software disponibiliza (pode usar o que quiser);

3. Esse desenho deve ter partes simétricas e você deve fazer uso, pelo menos de uma, das transformações isométricas (translação, reflexão e rotação).

APÊNDICE K - Frequência dos participantes nos encontros

Frequência dos Participantes desta Pesquisa

Participantes	Encontro 1	Encontro 2	Encontro 3	Encontro 4	Encontro 5
Aluno 1	P	P	P	F	P
Aluna 2	P	P	P	F	P
Aluna 3	P	F	P	F	F
Aluna 4	P	P	P	P (Grupo B)	P
Aluna 5	P	F	P	F	P
Aluna 6	P	P	P	P (Grupo B)	P
Aluno 7	P	P	P	P (Grupo A)	P
Aluna 8	P	P	P	P (Grupo B)	F
Aluno 9	P	P	P	P (Grupo A)	F
Aluno 10	P	P	F	P (Grupo A)	P
Aluna 11	P	P	P	P (Grupo B)	F
Aluno 12	F	P	P	P (Grupo A)	P