

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**PROJETO BASEADO EM DADOS DE CONTROLADORES
RESSONANTES PARA SISTEMAS LPV**

LUIZA FONTANA DEXHEIMER

PORTO ALEGRE

2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**PROJETO BASEADO EM DADOS DE CONTROLADORES
RESSONANTES PARA SISTEMAS LPV**

Monografia de Projeto de Diplomação submetido como parte dos requisitos necessários para a aprovação na cadeira de Seminário de Acompanhamento e Prática Extensionista de Projeto de Diplomação II (ELE99002), bem como na atividade Projeto de Diplomação II (PD2) no curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador: Prof. Dr. Jeferson Vieira Flores

PORTO ALEGRE

2024

**PROJETO BASEADO EM DADOS DE CONTROLADORES
RESSONANTES PARA SISTEMAS LPV**

LUIZA FONTANA DEXHEIMER

Monografia de Projeto de Diplomação submetido como parte dos requisitos necessários para a aprovação na cadeira de Seminário de Acompanhamento e Prática Extensionista de Projeto de Diplomação II (ELE99002), bem como na atividade Projeto de Diplomação II (PD2) no curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Jeferson Vieira Flores - Orientador
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Profa. Dra. Lucíola Campestrini
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

Prof. Renan Caron Viero
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – Porto Alegre, Brasil

PORTO ALEGRE

2024

RESUMO

Plantas sujeitas a distúrbios periódicos ou que necessitam do rastreamento de referências senoidais precisam de controladores que garantam o rastreamento e a rejeição desses distúrbios com erro em regime permanente igual a zero. Controladores ressonantes são adequados para essa aplicação devido às garantias formais de rastreamento/rejeição proporcionadas pelo princípio do modelo interno. No entanto, a diversidade de plantas e as dinâmicas em constante mudança desafiam o projeto de controladores baseados em modelos matemáticos, tornando métodos orientados por dados, como o *Virtual Reference Feedback Tuning* (VRFT), atraentes, pois eliminam a necessidade de modelagem detalhada da planta. Este trabalho expande abordagens anteriores do VRFT para sistemas LPV ao desenvolver uma metodologia para o projeto de controladores ressonantes em plantas LPV. A metodologia proposta, baseada em modelos de referência existentes, foi validada através de simulações numéricas e mostrou-se eficaz em garantir o rastreamento de referências e a rejeição de distúrbios. Os resultados indicaram que, devido ao modelo de referência utilizado, a combinação de controladores ressonantes com controladores PD pode melhorar significativamente o desempenho, ampliando a gama de modelos de referência que resultam em sistemas estáveis e reduzindo o erro de rastreamento.

Palavras-chave: VRFT; LPV; Controladores Ressonantes; Controle baseado em dados.

ABSTRACT

Plants subject to periodic disturbances or requiring the tracking of sinusoidal references need controllers that ensure tracking and rejection of these disturbances with zero steady-state error. Resonant controllers are suitable for this application due to the formal guarantees of tracking/rejection provided by the internal model principle. However, the diversity of plants and constantly changing dynamics challenge the design of controllers based on mathematical models, making data-driven methods such as Virtual Reference Feedback Tuning (VRFT) attractive, as they eliminate the need for detailed plant modeling. This work expands previous VRFT approaches for LPV systems by developing a methodology for designing resonant controllers in LPV plants. The proposed methodology, based on existing reference models, was validated through numerical simulations and proved effective in ensuring reference tracking and disturbance rejection. The results indicated that, due to the reference model used, the combination of resonant controllers with PD controllers can significantly improve performance, expanding the range of reference models that result in stable systems and reducing tracking error.

Key-words: VRFT; LPV; Resonant Control; Data-driven control.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Diagrama de sistema de controle SISO de realimentação unitária. . . .	13
Figura 2 – Resposta em frequência de controlador ressonante com $\omega_0 = 50$ rad/s. .	15
Figura 3 – Saída da planta para entrada senoidal sem controlador - $p(t)$ quadrada	32
Figura 4 – Dados de ensaio na planta em malha aberta - $p(t)$ quadrada	33
Figura 5 – Escolha de polos para $T_d(z)$ - erros de seguimento - $p(t)$ quadrada . . .	34
Figura 6 – Resposta do sistema em malha fechada com o controlador projetado via VRFT	35
Figura 7 – Erros de seguimento para parametrização encontrada - $p(t)$ quadrada .	36
Figura 8 – Saída da planta para entrada senoidal sem controlador - $p(t)$ senoidal .	37
Figura 9 – Dados de ensaio na planta em malha aberta - $p(t)$ senoidal	38
Figura 10 – Escolha de polos para $T_d(z)$ - erros de seguimento - $p(t)$ senoidal	39
Figura 11 – Resposta do sistema em MF com o controlador projetado via VRFT - $p(t)$ senoidal	39
Figura 12 – Erros de seguimento para parametrização encontrada - $p(t)$ senoidal . .	40
Figura 13 – Escolha de polos para $T_d(z)$ - erros de seguimento - $p(t)$ quadrado com PD	42
Figura 14 – Resposta do sistema em MF com o controlador projetado via VRFT - $p(t)$ quadrado	43
Figura 15 – Erros de seguimento para parametrização encontrada - $p(t)$ quadrado .	43
Figura 16 – Erros de seguimento para $p_{PD} = 0$ e $p_{T_d} = 0,5$	44
Figura 17 – Erros de seguimento para $p_{T_d} = 0,9$ - $p_{PD} = 0$ e $p_{PD} = 0,6561$	44
Figura 18 – Escolha de polos para $T_d(z)$ - erros de seguimento - $p(t)$ senoidal	45
Figura 19 – Resposta do sistema em MF com o controlador projetado via VRFT - $p(t)$ senoidal	46
Figura 20 – Erros de seguimento para parametrização encontrada - $p(t)$ senoidal . .	47

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dados de J_y, J_e, J_{eD} para diferentes valores de $p_{T_d} - p(t)$ quadrada . . .	34
Tabela 2 – Dados de J_y, J_e, J_{eD} para diferentes valores de $p_{T_d} - p(t)$ senoidal . . .	37
Tabela 3 – Dados de J_y, J_e, J_{eD} para diferentes valores de $p_{T_d} - p(t)$ quadrado . . .	41
Tabela 4 – Dados de J_y, J_e, J_{eD} para diferentes valores de p_{PD} e $p_{T_d} = 0,9$	44
Tabela 5 – Dados de J_y, J_e, J_{eD} para diferentes valores de $p_{T_d} - p(t)$ senoidal com PD	45
Tabela 6 – Erros máximos em Regime Permanente	47
Tabela 7 – Tempos de Acomodação em Regime Permanente	48

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

VRFT	<i>Virtual Reference Feedback Tunning</i>
LPV	<i>Linear Parameter-Varying</i>
LIT	<i>Linear Invariante no Tempo</i>
PR	Proporcional-Ressonante
PD	Proporcional-Derivativo
PRBS	<i>Pseudorandom Binary Sequence</i>
PI	Proporcional-Integral
MIMO	<i>Multiple-Input Multiple-Output</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	CONCEITOS DE BASE	13
2.1	SISTEMAS DE CONTROLE	13
2.2	CONTROLE RESSONANTE	14
2.3	VRFT - <i>VIRTUAL REFERENCE FEEDBACK TUNNING</i>	16
2.4	APLICAÇÃO DO MÉTODO VRFT PARA PROJETO DE CONTRO- LADORES RESSONANTES	18
2.4.1	REPRESENTAÇÃO DE SISTEMA LPV	20
2.5	APLICAÇÃO DO MÉTODO VRFT PARA PROJETO DE CONTRO- LADORES LPV	21
2.6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	24
3	VRFT PARA CONTROLADORES DE SEGUNDA ORDEM PARA PLANTAS LPV	25
3.1	CONTROLADOR DE SEGUNDA ORDEM PARA PLANTA LPV . . .	25
3.2	CONTROLADORES ATUANDO EM PARALELO	27
3.3	CONTROLADOR RESSONANTE EM PARALELO COM UM CON- TROLADOR PD	29
3.4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	30
4	ESTUDO DE CASO	31
4.1	CONTROLADOR PR LPV	31
4.1.1	Controlador PR LPV - Variação do Parâmetro do Tipo Onda Quadrada	31
4.1.2	Controlador PR LPV - Variação Senoidal do Parâmetro	36
4.2	CONTROLADOR PR LPV + CONTROLADOR PD LPV	40
4.2.1	Controlador PR LPV + Controlador PD LPV - Variação do Parâmetro do Tipo Onda Quadrada	40
4.2.2	Controlador PR LPV + Controlador PD LPV - Variação Senoidal do Parâmetro	44
4.3	CONSIDERAÇÕES FINAIS	47
5	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	49

REFERÊNCIAS 50

1 INTRODUÇÃO

Devido ao grande número de aplicações práticas sujeitas a referências ou distúrbios periódicos, surge a necessidade intrínseca de desenvolver controladores que assegurem seguimento de tais referências e/ou a rejeição desses distúrbios com erro nulo em regime permanente (Boff; Flores; Eckert, 2024). No âmbito da teoria de controle, os controladores ressonantes são indicados para tais aplicações, já que eles possuem garantias formais de seguimento/rejeição dados pelo princípio do modelo interno. (Pereira *et al.*, 2013)

Entretanto, diante da ampla diversidade de plantas encontradas na prática, o projeto de controladores baseado em modelos matemáticos encontra desafios significativos, sobretudo devido à complexidade da modelagem requerida e à dinâmica em constante mutação de certos sistemas. É nesse contexto em que surge o desenvolvimento de métodos baseados em dados - *data driven* - para o projeto de controladores, os quais dispensam a necessidade de modelagem da planta para tal propósito. (Bazanella; Campestrini; Eckhard, 2011)

Dentro do contexto de metodologias *data driven*, quando o objetivo é seguir ou rejeitar sinais constantes, geralmente se utiliza o método *Virtual Reference Feedback Tunning* (VRFT) para seguimento de referência e o método *Virtual Disturbance Feedback Tunning* (VDFT) para compensação de distúrbios - essas abordagens se diferenciam de outras baseadas em dados por serem métodos *one-shot*, o que significa que todo o processo de sintonia do controlador é realizado a partir de um único ensaio de coleta de dados. No caso de sinais periódicos, há, também, diversas aplicações do VRFT, como no projeto de controladores ressonantes e repetitivos. Especificamente, os trabalhos de Beal (2021), Beal *et al.* (2023a), e Lourencena (2023) exploram aplicações do VRFT para controladores ressonantes, enquanto Moretto (2023) e Beal *et al.* (2023b) investigam o uso do VRFT para controladores repetitivos. Essas abordagens corroboram a versatilidade do VRFT em diferentes cenários de controle, e a capacidade de, através dessa metodologia, proporcionar seguimentos a referências periódicas de forma satisfatória.

A classe de sistemas lineares com parâmetros variantes (*Linear Parameter-Varying* - LPV) é de grande interesse prático já que ela pode representar incertezas, variações paramétricas e não linearidades que atuam na planta (Palmeira, 2019). Quando, para o objetivo em questão, é suficiente controlar o sistema no entorno de um ponto de operação específico, pode-se aproximar o comportamento dessa planta LPV por um modelo LTI, resgatando a simplicidade de projeto de controle para sistemas invariantes no tempo. (Khalil, 2002)

Contudo, conforme afasta-se desse ponto de operação, a aproximação torna-se

inválida, deixando clara a necessidade de métodos de projeto específicos para plantas LPV. Para isso, tipicamente é empregada técnica de escalonamento de ganhos (*gain scheduling*), em que são projetados parâmetros de n controladores para n diferentes faixas de operação - considerando a planta em cada faixa como um sistema LTI diferente -, e o conjunto de ganhos a serem utilizados para determinar a saída do controlador em cada instante t é determinado pelo valor na variável de *scheduling* utilizada.

Esse método traz consigo um claro *trade-off* entre complexidade e precisão: modelar matematicamente a planta e projetar o controlador em cada faixa de operação é um processo custoso, e, por outro lado, quantas mais faixas de operação se considerar, maior a assertividade do modelo de controle. Ainda, por vezes é inviável determinar *a priori* o quão preciso o modelo precisa ser para atingir os objetivos predeterminados. (Lasch, 2021)

Assim, abordagens baseadas em dados tornam-se especialmente atrativas para sistemas LPV, já que não utilizam modelo matemático da planta que deseja-se controlar. Esse contexto motiva trabalhos como o de Xavier (2020) e de Lasch (2021), que permitem o controle de plantas LPV com o projeto de um único controlador, através do método VRFT. Xavier (2020) focou no caso de controladores PI, demonstrando a eficácia do VRFT para plantas LPV com uma estrutura simples de controle. Já Lasch (2021) generalizou o método, estendendo-o para o caso de sistemas MIMO (*Multiple-Input Multiple-Output*) e tratando formalmente o problema de ruído. Em ambos os trabalhos, o foco principal foi o seguimento de referências constantes, reforçando a robustez e a versatilidade do VRFT para diferentes configurações de sistemas LPV.

Assim, o presente trabalho tem como objetivo central a expansão das abordagens apresentadas por Beal (2021), Xavier (2020), e Lasch (2021), desenvolvendo uma metodologia para projeto de controladores ressonantes para plantas lineares de parâmetros variantes. Essa metodologia se baseia na abordagem de VRFT para LPV apresentada em Xavier (2020) e nos modelos de referência apresentados por Beal (2021). Através de um estudo de caso, será avaliado com os parâmetros do modelo de referência e a adição de uma ação derivativa junto ao controlador ressonante impactam o desempenho de seguimento de referência do sistema em malha fechada.

Este trabalho está organizado em capítulos que abordam os aspectos fundamentais da pesquisa. O Capítulo 2 apresenta a revisão da literatura, introduzindo os conceitos-chave relacionados ao controle ressonante, sistemas LPV, e VRFT. O Capítulo 3 detalha a metodologia proposta, descrevendo o uso de VRFT para o projeto de controladores ressonantes com parâmetros variantes no tempo. O Capítulo 4 apresenta a implementação e validação da abordagem proposta, detalhando os resultados obtidos em plantas simuladas. Finalmente, o Capítulo 5 traz as conclusões e considerações finais, destacando as

contribuições do trabalho e delineando as perspectivas futuras.

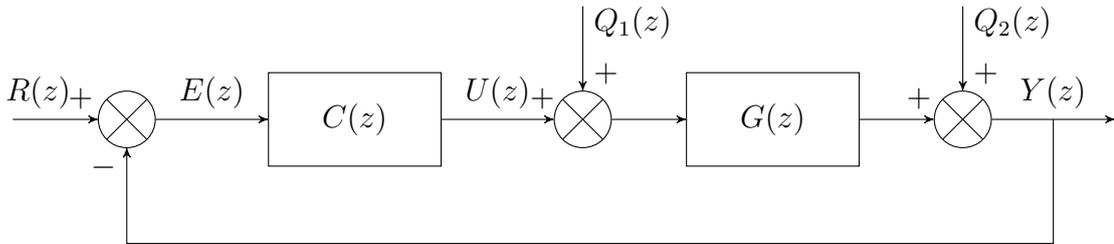
2 CONCEITOS DE BASE

Neste capítulo estão contidos conceitos fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente, é introduzida a teoria dos sistemas LPV, seguida pela exposição dos principais conceitos de controle ressonante. Em seguida, é apresentado o método VRFT, abordando sua aplicação tanto no projeto de controladores ressonantes quanto no projeto de controladores para sistemas LPV. Esses conceitos formam a base teórica necessária para a compreensão e implementação das técnicas desenvolvidas ao longo deste estudo.

2.1 SISTEMAS DE CONTROLE

Um sistema realimentado genérico pode ser representado como demonstra a Figura 1, em que $R(z)$, $E(z)$, $U(z)$, $Y(z)$ representam, respectivamente, os sinais de referência, erro, controle e saída. $G(z)$ e $C(z)$ representam, respectivamente, as funções de transferência da planta e do controlador, tendo que a função primária de tal controlador é garantir o seguimento ao sinal de referência previamente citado. Ainda, $Q_1(z)$ e $Q_2(z)$ representam possíveis perturbações atuando, respectivamente, na entrada e na saída do processo. (Bazanella; Silva, 2005)

Figura 1 – Diagrama de sistema de controle SISO de realimentação unitária.



Fonte: Adaptado de Bazanella & Silva (2005)

A função de transferência que relaciona a saída $Y(z)$ à referência $R(z)$ nesse sistema em malha fechada se dá por

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)}. \quad (1)$$

Ainda, as funções de transferências que relacionam os sinais de distúrbio $Q_1(z)$ e $Q_2(z)$ à referência $R(z)$ nesse sistema em malha fechada se dão, respectivamente, por

$$T_{Q_1}(z) = \frac{Q_1(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + C(z)G(z)} \quad (2)$$

$$T_{Q_2}(z) = \frac{Q_2(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + C(z)G(z)}. \quad (3)$$

2.2 CONTROLE RESSONANTE

Controladores ressonantes tem como sua mais importante aplicação o seguimento de referências e rejeição de distúrbios periódicos. Sua principal característica é possuir magnitude infinita nas frequências que compõem os sinais de interesse, atendendo assim o Princípio do Modelo Interno (Pereira *et al.*, 2013). Tomando-se como exemplo uma referência puramente senoidal,¹

$$r(t_c) = A \sin(\omega_0 t_c) \quad (4)$$

com amplitude A , e frequência ω_0 , tem-se que o controlador ressonante de tempo contínuo deve ter a forma

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{s^2 + w_0^2} . \quad (5)$$

Essa estrutura, contudo, torna a estabilização do sistema em malha fechada um desafio, por inserir polos sobre o eixo imaginário, em $s = \pm jw_0$. Para solucionar esse ponto, são inseridos dois zeros para cada modo ressonante, resultando em um controlador na forma a seguir, como em Pereira, Carvalho & Flores (2013)

$$C(s) = \frac{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}{s^2 + w_0^2} \quad (6)$$

onde α_0 , α_1 e α_2 são parâmetros de sintonia.

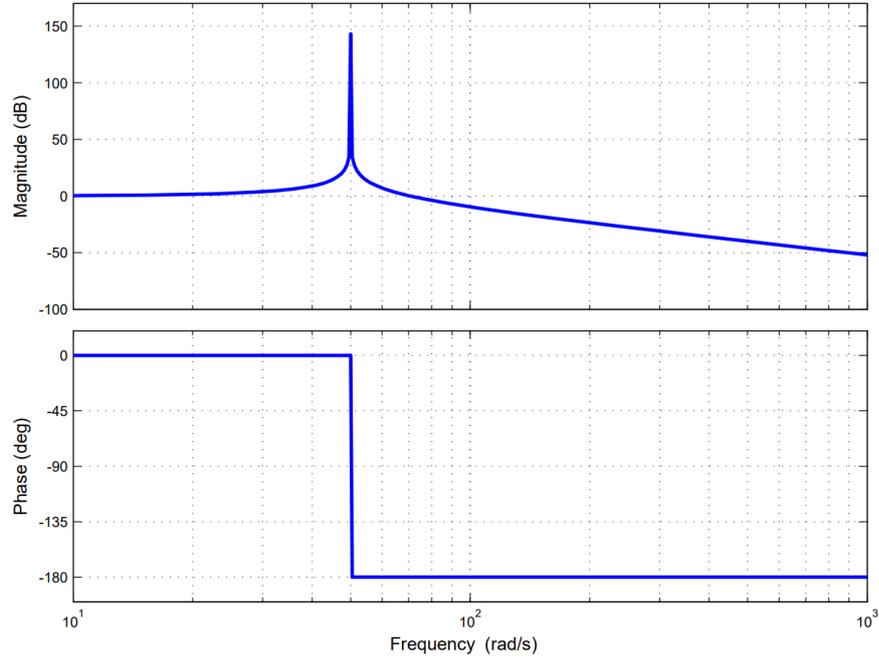
A resposta em frequência de um controlador cuja estrutura é como a apresentada em (6) pode ser visualizada na Figura 2, em que pode ser observado o pico na frequência de um sinal senoidal de referência, com $\omega_0 = 50$ rad/s.

Para seguir sinais periódicos com elevado conteúdo harmônico, um par de polos e zeros complexos deve ser inserido para cada frequência que compõe o sinal. Isso resulta em controladores de alta ordem e com um grande número de parâmetros de sintonia. Uma alternativa seria inserir no controlador apenas as harmônicas mas significativas. Isso traz consigo um erro de seguimento em regime permanente, porém diminui a ordem e simplifica o projeto do controlador. (Pereira; Carvalho; Flores, 2013)

Para o caso de sistemas de tempo discreto, considera-se que a referência $r(t)$ em (4) é discretizada com um período de amostragem t_s . Assim, definindo a frequência

¹ Neste trabalho, t_c é utilizado na descrição de sinais de tempo contínuo

Figura 2 – Resposta em frequência de controlador ressonante com $\omega_0 = 50$ rad/s.



Fonte: A autora

discretizada Ω_0 como

$$\Omega_0 = \omega_0 t_s \quad (7)$$

segue que

$$R(z) = \frac{A z \sin(\Omega_0)}{z^2 - 2 z \cos(\Omega_0) + 1} \quad (8)$$

Percebe-se que $R(z)$ tem polos complexos de magnitude unitária e ângulo igual a $\pm\Omega_0$. A versão de tempo discreto do controlador ressonante que garante o seguimento de tal referência é definida por

$$C_{PR}(z) = \frac{K (z - z_1) (z - z_2)}{z^2 - 2 z \cos(\Omega_0) + 1} \quad (9)$$

onde z_1 , z_2 e o ganho K são parâmetros de projeto. O controlador PR pode, ainda, ser reescrito na forma

$$C_{PR}(z) = k_{PR} + \frac{k_{R1} z + k_{R0}}{z^2 - 2 z \cos(\Omega_0) + 1} \quad (10)$$

2.3 VRFT - VIRTUAL REFERENCE FEEDBACK TUNNING

O VRFT (*Virtual Reference Feedback Tuning*) é uma abordagem de projeto de controladores baseada em dados, projetando controladores sem a necessidade de um modelo matemático preciso do processo a ser controlado. O VRFT se difere de outras abordagens baseadas em dados por ser um método "one-shot", o que significa que todo o processo de sintonia do controlador é realizado a partir de uma única coleta de dados. Isso contrasta com abordagens de otimização convencionais, que podem exigir várias iterações e coletas de dados para alcançar os parâmetros ideais do controlador.

A abordagem *one-shot* evita problemas associados à convergência lenta ou instabilidade que podem surgir em processos de otimização iterativa. No entanto, é importante destacar que essa mesma característica faz com que o sucesso na implementação desse método dependa fortemente da escolha apropriada do modelo de referência desejado, que deve representar de forma precisa o comportamento dinâmico desejado do sistema.

Assuma que o controlador pode ser descrito na forma $C(z, \rho)$ onde o vetor ρ descreve todos parâmetros de projeto. Nesse caso, (1) passa a ser descrito por

$$T(z, \rho) = \frac{C(z, \rho)G(z)}{1 + C(z, \rho)G(z)}. \quad (11)$$

Considere também que saída desejada para o sistema em malha fechada é dada por

$$y_d(t) = T_d(z)r(t) \quad (12)$$

onde $T_d(z)$ é um dado modelo de referência.

A partir de (11) e (12), segue que o problema de controle por modelo de referência é então definido como a determinação de ρ que minimiza

$$J^{MR}(\rho) = \|[T(z, \rho) - T_d(z)]r(t)\|_2^2 \quad (13)$$

onde, para um sinal $x(t)$ de N pontos,

$$\|x(t)\|_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x(i)]^2. \quad (14)$$

De (11) fica claro que a solução de (13) depende do conhecimento do modelo do sistema $G(z)$. O VRFT minimiza uma função alternativa que depende somente de dados de entrada e saída coletados no sistema e que, em algumas condições, possui o mesmo mínimo de J^{MR} .

Para aplicar o método, é necessário conduzir ensaio de coleta de dados de entrada e saída - $u(t)$ e $y(t)$ - do sistema que deseja-se controlar. Tendo a saída $y(t)$ medida, define-se um sinal de referência virtual $\bar{r}(t)$ que ter-se-ia que dar para esse sistema para que ele tivesse atingido um determinado comportamento desejado $T_d(z)$. Assim, segue que (Bazanella; Campestrini; Eckhard, 2011)

$$\bar{r}(t)T_d(z) = y(t) . \quad (15)$$

Define-se, ainda, o erro virtual $\bar{e}(t)$ como

$$\bar{e}(t) = \bar{r}(t) - y(t) . \quad (16)$$

Baseado nesses sinais virtuais, tem-se que o controlador ideal é aquele que quando alimentado com $\bar{e}(t)$ resulta no sinal $u(t)$ coletado no ensaio na planta. Assim, define-se o critério de custo a ser minimizado pelo VRFT como: (Bazanella; Campestrini; Eckhard, 2011)

$$J^{VR}(\rho) = \|[L(z)[u(t) - C(z,\rho)\bar{e}(t)]]\|_2^2 \quad (17)$$

onde $L(z)$ é um filtro que aproxima os mínimos de J^{VR} e J^{MR} em casos não ideais. Conforme Bazanella, Campestrini & Eckhard (2011), o filtro para o caso do VRFT pode ser aproximado por

$$L(z) = T_d(z)(1 - T_d(z)) . \quad (18)$$

Considere, agora, que o controlador é linearmente parametrizado na forma

$$C(z,\rho) = \rho^T \bar{C}(z) \quad (19)$$

com $\bar{C}(z)$ sendo um vetor de funções de transferência definido a priori. De (17) segue que

$$J^{VR}(\rho) = \|u_L(t) - \rho^T \phi(t)\|_2^2 \quad (20)$$

com

$$u_L(t) = L(z)u(t) \quad (21)$$

e

$$\phi(t) = \bar{C}(z)L(z)\bar{e}(t) . \quad (22)$$

Por fim, tem-se que o vetor ótimo de parâmetros pode ser dado por (Bazanella; Campestrini; Eckhard, 2011)

$$\rho = \left[\sum_{t=1}^N \phi(t)\phi^T(t) \right]^{-1} \sum_{t=1}^N \phi(t)u_L(t) . \quad (23)$$

Dessa maneira, VRFT pode ser aplicado de acordo com o passo a passo a seguir:

1. Conduzir ensaio para coleta de dados na planta, obtendo $u(t)$ e $y(t)$.
2. Definir o modelo de referência $T_d(z)$ que representa o comportamento desejado para o sistema, e o filtro $L(z)$.
3. Determinar a estrutura de controle a ser utilizada - $\bar{C}(z)$ -, e calcular $\bar{e}(t)$, $u_L(t)$, e $\phi(t)$.
4. Determinar ρ conforme (23).

2.4 APLICAÇÃO DO MÉTODO VRFT PARA PROJETO DE CONTROLADORES RESSONANTES

Para garantir o seguimento ou a rejeição de um sinal com n componentes harmônicas, a estrutura do controlador é definida tal que inclua da frequência fundamental até a n - ésima harmônica. (Beal, 2021)

Baseado em (10), segue que esse controlador pode ser representado na forma $C(z,\rho) = \rho^T \bar{C}(z)$ a partir de

$$\bar{C}(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{z}{z^2 - 2\cos(\Omega_1)z + 1} \\ \frac{1}{z^2 - 2\cos(\Omega_1)z + 1} \\ \frac{z}{z^2 - 2\cos(\Omega_2)z + 1} \\ \frac{1}{z^2 - 2\cos(\Omega_2)z + 1} \\ \dots \\ \frac{z}{z^2 - 2\cos(\Omega_n)z + 1} \\ \frac{1}{z^2 - 2\cos(\Omega_n)z + 1} \end{bmatrix} \quad \rho^T = \begin{bmatrix} k_{PR} \\ k_{R11} \\ k_{R10} \\ k_{R21} \\ k_{R20} \\ \dots \\ k_{Rn1} \\ k_{Rn0} \end{bmatrix} . \quad (24)$$

Para sintonizar esses parâmetros via VRFT, deve-se definir um modelo de referência - o ponto mais crítico da aplicação do método. Tal modelo de referência deve seguir algumas diretrizes básicas:

1. O grau relativo do modelo de referência deve ser maior do que ou igual ao grau relativo da planta que se deseja controlar.
2. Para as frequências consideradas no controlador ressonante, $T_d(z)$ deve apresentar fase nula e magnitude unitária.
3. Os polos do modelo de referência devem ser escolhidos visando atender critérios de estabilidade e tempo de acomodação.
4. Os seus zeros, por sua vez, devem ser escolhidos para satisfazer o item 2 acima.

Adicionalmente, como feito em (Beal, 2021), os polos podem ser todos posicionados em um mesmo ponto, reduzindo assim o número de escolhas do modelo de referência. Ainda, a fim de satisfazer o ganho unitário e fase nula em cada frequência de interesse, o numerador do modelo deve ter duas vezes mais parâmetros livres do que a quantidade de frequências - a fim de garantir as condições de magnitude e fase. Além disso, o atraso de uma amostra na medição dos sinais aparece como um zero na origem (Beal, 2021). Assim, a função de transferência para o modelo de referência resultante é

$$T_d(z) = \frac{z \sum_{i=0}^N k_i z^i}{(z - p_{T_d})^{N+2}}, \quad N = 1, 2, \dots, n \quad (25)$$

com n representando as harmônicas de interesse, p_{T_d} o valor dos polos, e os coeficientes k_i definidos conforme a diretriz 4 previamente apresentada. Tanto a potência do termo em z no numerador quanto o número de polos adicionados podem ser alterados com o objetivo de obter $T_d(z)$ com grau relativo diferente de 1.

Ainda, para aplicar VRFT para otimização de parâmetros do controlador, é necessário conduzir ensaio de coleta de dados. Preferencialmente, nesse ensaio excita-se a planta com um sinal de espectro de frequências amplo. Procurando atender esse requisito, em Beal (2021) são aplicados os seguintes sinais de excitação.

- A soma de seis senoides com as frequências de 10 Hz, 60 Hz, 100 Hz, 150 Hz, 200 Hz e 300 Hz;
- a soma de seis senoides com as frequências de 10 Hz, 60 Hz, 100 Hz, 150 Hz, 200 Hz e 300 Hz, somadas às harmônicas ímpares de 60 Hz de ordem 3 a 9;
- sequência binária pseudorrandômica — *Pseudorandom Binary Sequence* (PRBS) — com 30 V de amplitude e banda de 30 amostras;
- PRBS com 30 V de amplitude e banda de 100 amostras;

- e PRBS com 30 V de amplitude e banda de 200 amostras.

Apesar de terem sido obtidos considerando um sistema específico, uma importante conclusão obtida após essa série de ensaios é que os melhores resultados para coleta de dados para aplicação de metodologia de VRFT para controladores ressonantes se deu com a aplicação de sinal de excitação do tipo PRBS. (Beal, 2021)

2.4.1 REPRESENTAÇÃO DE SISTEMA LPV

Sistemas LPV - *Linear Parameter-Varying* - representam uma classe de sistemas dinâmicos que exibem variação nos parâmetros ao longo do tempo ou em diferentes condições operacionais. A modelagem desses sistemas, considerando suas variações parametrizadas, possibilita o projeto de controladores que se adaptam a diferentes condições operacionais, melhorando o desempenho global do sistema. Tal modelagem pode ser feita através da dependência de um vetor de parâmetros variantes no tempo. (Shamma, 1988)

Tomando um sistema LPV cuja saída $y(t)$ ² depende de uma entrada $u(t)$ e de um parâmetro variante $p(t)$, tem-se que ele pode ser descrito, desconsiderando-se ruído, através de uma equação de diferenças, como feito em Bamieh & Giarre (2002) e Xavier (2020) representada por

$$\begin{aligned} & y(t) + a_1(p(t))y(t-1) + a_2(p(t))y(t-2) + \dots + a_{n_a}(p(t))y(t-n_a) \\ & = b_0(p(t))u(t) + b_1(p(t))u(t-1) + b_2(p(t))u(t-2) + \dots + b_{n_b}(p(t))u(t-n_b) \end{aligned} \quad (26)$$

em que pode-se supor que a_i e b_i podem ser escritos como uma combinação linear de um conjunto de funções $f = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$

$$\begin{aligned} a_i(p(t)) &= \sum_{j=1}^m a_{ij} f_j(p(t)) \\ b_i(p(t)) &= \sum_{j=1}^m b_{ij} f_j(p(t)) . \end{aligned} \quad (27)$$

Com isso, pode-se reescrever (26) como

$$y(t) + \sum_{i=1}^{n_a} a_i(p(t))y(t-i) = \sum_{i=0}^{n_b} b_i(p(t))u(t-i) \quad (28)$$

ou, ainda,

$$y(t) + \sum_{i=1}^{n_a} \sum_{j=1}^m a_i^j f_j(p(t))y(t-i) = \sum_{i=0}^{n_b} \sum_{j=1}^m b_i^j f_j(p(t))u(t-i) \quad (29)$$

² Assim como em Xavier (2020), $x(t)$ denota o valor do sinal x na t -ésima amostra

$$y(t) = \sum_{j=1}^m f_j(p(t)) \left[- \sum_{i=1}^{n_a} a_i^j y(t-i) + \sum_{i=0}^{n_b} b_i^j u(t-i) \right] \quad (30)$$

o que pode, por sua vez, ser reescrito como

$$y(t) = \sum_{j=1}^m f_j(p(t)) \sum_{i=1}^n \theta_{ij} \varphi_i(t) \quad (31)$$

em que define-se θ como um vetor de tamanho $n \times m$, com $n = n_a + n_b + 1$, i.e.,

$$\theta = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{na1} & \cdots & a_{nam} \\ b_{01} & \cdots & b_{0m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{nb1} & \cdots & b_{nbm} \end{bmatrix} \quad (32)$$

e, $\varphi(t)$ como

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} -y(t-1) \\ \vdots \\ -y(t-n_a) \\ u(t) \\ \vdots \\ u(t-n_b) \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Ainda, dado que $\Psi_{ij}(t) = \varphi_i(t) f_j(p(t))$

$$y(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \theta_{ij} \Psi_{ij}(t). \quad (34)$$

2.5 APLICAÇÃO DO MÉTODO VRFT PARA PROJETO DE CONTROLADORES LPV

Ao serem definidas estratégias de controle para plantas do tipo LPV procuram-se estruturas em que o controlador projetado apresente comportamento dependente de parâmetros - os mesmos que definem o ponto de operação da planta. Habitualmente, para projetar controladores de sistemas LPV opta-se por uma metodologia baseada em escalonamento de ganhos (*gain scheduling*), projetando controladores lineares em diversos

pontos de operação, e interpolando parâmetros do controlador entre tais pontos. Essa metodologia, apesar de suficiente para uma série de aplicações, é limitada. Diferentes métodos de interpolação, assim como diferentes escolhas de pontos de operação para projeto dos controladores LIT originais, resultarão em controladores diferentes - que podem não atender os requisitos de projeto adequadamente. (Bamieh; Giarre, 2002)

Como alternativa aos métodos tradicionais, Xavier (2020) apresenta uma estratégia de projeto de controladores PI para sistemas LPV via VRFT. Considerando $p(t)$ o parâmetro variante - variável de *scheduling* - é proposto um controlador PI escalonado descrito por

$$C_{PI}(z) = K_1(p(t)) + K_2(p(t)) \frac{1}{z-1} = \frac{b_0(p(t)) + b_1(p(t))z^{-1}}{1-z^{-1}}. \quad (35)$$

Observe que (35) pode ser escrito de uma forma geral como

$$C_{PI}(z) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(p(t))z^{-i}}{Q(z^{-1})} \quad (36)$$

em que n representa a quantidade de coeficientes do numerador, $Q(z^{-1})$ representa o polinômio do denominador de $C_{PI}(z)$ escritos em potências de z^{-1} e $b_i(p(t))$ pode ser dado como uma combinação linear de funções dependentes da variável de *scheduling*, ou seja,

$$b_i(p(t)) = \sum_{j=1}^m \Theta_{ij} f_j(p(t)). \quad (37)$$

Nesse caso, $f_j(p(t))$ são funções que dependem de $p(t)$, m indica a quantidade de termos da combinação linear - a ser escolhida pelo projetista -, e Θ_{ij} são os parâmetros a serem projetados por VRFT. (Xavier, 2020)

Um ponto fundamental para a utilização do método apresentado Xavier (2020) é que o sinal de controle gerado PI pode ser escrito na forma

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \Theta_{ij} \frac{1}{Q(z^{-1})} f_j(p(t-i)) e(t-i). \quad (38)$$

Nesse caso, a determinação de Θ_{ij} a partir de (38) possui a mesma estrutura utilizada na identificação de sistemas LPV, podendo ser resolvida pelo método de mínimos quadrados (Xavier, 2020). Assim, o problema de identificação de Θ , aqui abordado por VRFT, reduz-se a encontrar a matriz Θ que minimiza

$$J_{VR}^{LPV}(\Theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[L(z) \left(u(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \Theta_{ij} \frac{1}{Q(z^{-1})} f_j(p(t-i)) \bar{e}(t-i) \right) \right]^2 \quad (39)$$

que pode ser reduzida para uma forma similar a (20). Para tal, reescreve-se (39) na forma

$$\begin{aligned} J_{VR}^{LPV}(\Theta) &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[L(z) \left(u(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \Theta_{ij} \frac{L(z)}{Q(z^{-1})} f_j(p(t-i)) \bar{e}(t-i) \right) \right]^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[L(z) u(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \Theta_{ij} z^{-i} \frac{L(z)}{Q(z^{-1})} f_j(p(t)) \bar{e}(t) \right]^2. \end{aligned} \quad (40)$$

e, ainda, com $u_L(t)$ sendo os dados de entrada da planta coletados filtrados por $L(z)$, e $\alpha_j(t)$ tal que

$$\alpha_j(t) = \frac{L(z)}{Q(z^{-1})} [f_j(p(t)) \bar{e}(t)] \quad (41)$$

o critério J_{VR}^{LPV} torna-se

$$\begin{aligned} J_{VR}^{LPV}(\Theta) &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[u_L(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \Theta_{ij} z^{-i} \alpha_j(t) \right]^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[u_L(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \Theta_{ij} \alpha_j(t-i) \right]^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Por fim, com $\Psi(t)$ tal que $\Psi_{ij}(t) = \alpha_j(t-i)$, tem-se ³

$$J_{VR}^{LPV}(\Theta) = \|u_L(t) - \langle \Theta, \Psi(t) \rangle\|_2^2. \quad (43)$$

Assim, (23) se torna

$$\text{vec}(\Theta) = \left[\sum_{i=1}^N \text{vec}(\Psi(t)) \text{vec}(\Psi(t))^T \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^N \text{vec}(\Psi(t)) u_L(t) \right] \quad (44)$$

onde $\text{vec}(A)$ é o vetor obtido concatenando as colunas de uma matriz A .

Dessa maneira, conforme apresentado em Xavier (2020), o projeto de controladores para plantas LPV via VRFT é feito de acordo com o seguinte passo a passo:

1. Conduzir ensaio em para coleta de dados na planta em malha aberta ou malha fechada adquirindo $u(t)$, $y(t)$ e $p(t)$.
2. Definir a estrutura do controlador desejado - $Q(z^{-1})$, n , $T_d(z)$, $L(z)$, e o conjunto de funções $f_j(p(t))$.

³ Aqui, usa-se a definição de produto interno de duas matrizes $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$

3. Determinar $\bar{e}(t)$, $\alpha_j(t)$, e $u_L(t)$.
4. Estruturar $\Psi(t)$ tal que $\Psi_{ij}(t) = \alpha_j(t - i)$.
5. Por fim, resolver (44) para determinar Θ que minimiza (43).

2.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As Seções 2.1 a 2.3 apresentaram conceitos fundamentais para a compreensão do método e da estrutura de controle de interesse neste trabalho. Estes conceitos formam a base necessária para o entendimento das técnicas que serão exploradas nos capítulos seguintes.

Nos próximos capítulos, a formulação do VRFT LPV discutida na Seção 2.5 será estendida para abranger qualquer controlador que possa ser implementado como a soma de termos de primeira ou segunda ordem. Em particular, será dado foco ao controlador ressonante apresentado na Seção 2.4, limitado especificamente ao seguimento de referências de uma única frequência. Essa extensão permitirá uma aplicação mais abrangente das metodologias baseadas em dados no projeto de controladores, demonstrando sua versatilidade e aplicabilidade em diferentes contextos de controle.

3 VRFT PARA CONTROLADORES DE SEGUNDA ORDEM PARA PLANTAS LPV

Em Xavier (2020) é desenvolvida a abordagem de projeto de controladores para plantas LPV via VRFT, aplicada especificamente para controladores PI. Nesse capítulo, a abordagem é estendida para o caso de controladores com função de transferência de segunda ordem. Além disso, a formulação é sistematizada para controladores operando em paralelo, permitido assim a aplicação para qualquer controlador com polos reais ou complexos.

3.1 CONTROLADOR DE SEGUNDA ORDEM PARA PLANTA LPV

Conforme apresentado no capítulo anterior, é fundamental que o sinal seja escrito na forma (38), ou seja.

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m \Theta_{ij} \frac{1}{Q(z^{-1})} f_j(p(t-i))e(t-i) .$$

Considerando-se um controlador com ganhos escalonados genérico de segunda ordem no formato

$$C(z) = \frac{\beta_1(p(t))z + \beta_0(p(t))}{z^2 + \gamma_1 z + \gamma_0} + k_p(p(t)) \quad (45)$$

em que β_1 e β_0 dependem de um parâmetro variante $p(t)$, enquanto γ_1 e γ_0 são constantes.

Estendendo o que foi apresentado em Xavier (2020) para sistemas de maior ordem, segue que o primeiro passo para a obtenção de (38) é escrever uma realização do controlador no espaço de estados onde a matriz C que compõe o sinal de saída do controlador não dependa de parâmetros variantes no tempo. Supondo que $e(t)$ é a entrada do controlador, $u(t)$ a sua saída e $\eta(t)$ como o seu estado, segue que a representação deve ser na forma

$$\begin{cases} \eta(t+1) = A\eta(t) + B(p(t))e(t) \\ u(t) = C\eta(t) + D(p(t))e(t) \end{cases} \quad (46)$$

Assim, após diversas tentativas, encontrou-se uma possível realização de (45) na forma (46), descrita pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma_0 & -\gamma_1 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{-\beta_0(p(t))}{\gamma_0} \\ \beta_1(p(t)) \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$C = [0 \quad 1] \quad (49)$$

$$D = [k_p(p(t))] \quad (50)$$

Supondo $\eta(t) = [\eta_1(t) \quad \eta_2(t)]^T$, tem-se que

$$\begin{cases} \eta_1(t+1) = \eta_2(t) - \frac{\beta_0(p(t))}{\gamma_0} e(t) \\ \eta_2(t+1) = -\gamma_0 \eta_1(t) - \gamma_1 \eta_2(t) + \beta_1(p(t)) e(t) \\ u(t) = \eta_2(t) + k_p(p(t)) e(t) \end{cases} \quad (51)$$

Manipulando a última equação de (51), é obtido

$$\begin{aligned} u(t) + \gamma_1 u(t-1) + \gamma_0 u(t-2) &= \eta_2(t) + k_p(p(t)) e(t) + \gamma_1 \eta_2(t-1) \\ &\quad + \gamma_1 k_p(p(t)) e(t-1) + \gamma_0 \eta_2(t-2) + \gamma_0 k_p(p(t)) e(t-2) \\ &= -\gamma_0 \eta_1(t-1) + \beta_1 e(t-1) + k_p(p(t)) e(t) \\ &\quad + \gamma_1 k_p(p(t)) e(t-1) + \gamma_0 \eta_2(t-2) + \gamma_0 k_p(p(t)) e(t-2) \\ &= -\gamma_0 \eta_1(t-1) + \beta_1 e(t-1) + k_p(p(t)) e(t) \\ &\quad + \gamma_1 k_p(p(t)) e(t-1) + \gamma_0 \eta_1(t-1) + \beta_0 e(t-2) \\ &\quad + \gamma_0 k_p(p(t)) e(t-2) \\ &= k_p(p(t)) e(t) + (\beta_1(p(t)) + \gamma_1 k_p(p(t))) e(t-1) \\ &\quad + (\beta_0(p(t)) + \gamma_0 k_p(p(t))) e(t-2) \end{aligned} \quad (52)$$

o que, por sua vez, pode ser reescrito como

$$u(t) + \gamma_1 u(t-1) + \gamma_0 u(t-2) = b_0(p(t)) e(t) + b_1(p(t)) e(t-1) + b_2(p(t)) e(t-2) \quad (53)$$

com $b_0(p(t)) = k_p(p(t))$, $b_1(p(t)) = \beta_1(p(t)) + \gamma_1 k_p(p(t))$ e $b_2(p(t)) = \beta_0(p(t)) + \gamma_0 k_p(p(t))$. Note que (53) pode ser escrito na mesma forma apresentada em (36) por (Xavier, 2020) para o controlador PI, ou seja

$$C_{PI}(z) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(p(t))z^{-i}}{Q(z^{-1})}$$

com

$$Q(z^{-1}) = 1 + \gamma_1 z^{-1} + \gamma_0 z^{-2}. \quad (54)$$

Assim, com a realização proposta, pode-se representar o controlador no formato (38) assumindo que $b_0(p(t))$, $b_1(p(t))$ e $b_2(p(t))$ podem ser representados como uma combinação linear das funções $f_j(p(t))$. Conseqüentemente, é possível resolver o problema de otimização de parâmetros de Θ_{ij} para um controlador de segunda ordem por mínimos quadrados utilizando o procedimento descrito na Seção 2.5.

3.2 CONTROLADORES ATUANDO EM PARALELO

A abordagem demonstrada na seção anterior pode, ainda, ser estendida para aplicação de controladores atuando em paralelo. Essa formulação importante para o caso de controladores múltiplos-ressonantes ou a adição de outras estruturas atuando em conjunto com o termo ressonante. Para tal, consideram-se dois controladores $C_1(z)$ e $C_2(z)$ com entrada $e(t)$ e saídas $u_1(t)$ e $u_2(t)$, respectivamente. O sinal de controle entregue à planta é $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$. Baseado em (38) segue que os sinais de controle podem ser escritos na como

$$u_1(t) = \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=1}^{m_1} \Theta_{1ij} \frac{1}{Q_1(z^{-1})} f_{1j}(p(t-i)) \bar{e}(t-i) \quad (55)$$

$$u_2(t) = \sum_{i=0}^{n_2-1} \sum_{j=1}^{m_2} \Theta_{2ij} \frac{1}{Q_2(z^{-1})} f_{2j}(p(t-i)) \bar{e}(t-i) \quad (56)$$

onde diferentes funções dependentes de $p(t)$ podem ser utilizadas para gerar os parâmetros variantes no tempo do controlador. Por outro lado, para simplificar a apresentação dos resultados, considera-se o caso onde as mesmas funções descrevem os termos variantes, ou seja, $m_1 = m_2 = m$ e $f_{1j}(p(t)) = f_{2j}(p(t)) = f_j(p(t))$.

Considerando a aplicação do VRFT LPV, o equivalente à (40) passa a ser

$$J_{VR}^{LPV}(\Theta) = \frac{1}{N} \sum \left[L(z) \left(u(t) - \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=1}^{m_1} \Theta_{1ij} \frac{1}{Q_1(z^{-1})} f_{1j}(p(t-i)) \bar{e}(t-i) - \sum_{i=0}^{n_2-1} \sum_{j=1}^{m_2} \Theta_{2ij} \frac{1}{Q_2(z^{-1})} f_{2j}(p(t-j)) \bar{e}(t-i) \right) \right]. \quad (57)$$

Definindo

$$\alpha_{1j} = \frac{L(z)}{Q_1(z^{-1})} f_{1j}(p(t)) \bar{e}(t) \quad (58)$$

$$\alpha_{2j} = \frac{L(z)}{Q_2(z^{-1})} f_{2j}(p(t)) \bar{e}(t) \quad (59)$$

então segue que

$$\bar{J}_{VR}^{LPV}(\Theta) = \frac{1}{N} \sum \left[u_L - \sum_{i=0}^{n_1-1} \sum_{j=1}^{m_1} \Theta_{1ij} \alpha_{1j}(t-i) - \sum_{i=0}^{n_2-1} \sum_{j=1}^{m_2} \Theta_{2ij} \alpha_{2j}(t-i) \right] \quad (60)$$

e, como $m_1 = m_2 = m$, a equação (60) torna-se

$$J_{VR}^{LPV}(\Theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left[u_L(t) - \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=0}^{n_1-1} \Theta_{1ij} \alpha_{1j}(t-i) + \sum_{i=0}^{n_2-1} \Theta_{2ij} \alpha_{2j}(t-i) \right] \right]^2. \quad (61)$$

Observe que a equação (61) pode ser escrita matricialmente na forma

$$J_{VR}^{LPV}(\Theta_a) = \|u_L(t) - \langle \Theta_a, \Psi_a(t) \rangle\|_2^2 \quad (62)$$

onde

$$\Theta_a = \begin{bmatrix} \Theta_{1ij} \\ \Theta_{2ij} \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$\Psi_a = \begin{bmatrix} \Psi_{1ij} \\ \Psi_{2ij} \end{bmatrix}. \quad (64)$$

Com isso, pode-se aplicar (44) normalmente para encontrar os parâmetros ótimos para o controladores $C_1(z)$ e $C_2(z)$ via VRFT para sistemas LPV. O passo a passo para isso se dá como a seguir:

1. Conduzir ensaio em para coleta de dados na planta em malha aberta ou malha fechada - $u(t)$, $y(t)$, $p(t)$ -.
2. Definir $T_d(z)$ e $L(z)$.
3. Escolher o conjunto de funções $f_j(p)$.

4. Definir a estrutura do controlador $C_1(z) - Q_1(z^{-1})$, n_1 e Θ_{1ij} -, e do controlador $C_2(z) - Q_2(z^{-1})$, n_2 e Θ_{2ij} -.
5. Determinar $\bar{e}(t)$, $u_L(t)$, e $\alpha_{1j}(t)$, $\alpha_{2j}(t)$.
6. Estruturar $\Psi_1(t)$ tal que $\Psi_{1ij}(t) = \alpha_{1j}(t - i)$, e $\Psi_2(t)$ tal que $\Psi_{2ij}(t) = \alpha_{2j}(t - i)$.
7. Definir Θ_a de acordo com (63), e Ψ_a de acordo com (64).
8. Por fim, determinar Θ que minimiza (43), conforme indicado em (44).

3.3 CONTROLADOR RESSONANTE EM PARALELO COM UM CONTROLADOR PD

O caso do controlador proporcional ressonante LPV nada mais é que do que uma aplicação particular da visão generalista apresentada acima. Para o caso específico do controlador ressonante os parâmetros β_1 , β_0 , γ_1 e γ_0 representam, respectivamente, $k_{R1}(p(t))$, $k_{R0}(p(t))$, $-2 \cos(\Omega_0)$, 1, conforme indicado em (65)

$$C_{PR}(z) = k_{PR}(p(t)) + \frac{k_{R1}(p(t))z + k_{R0}(p(t))}{z^2 - 2z \cos(\Omega_0) + 1} \quad (65)$$

onde ganhos k_{PR} , k_{R1} , k_{R0} e sejam funções da variável de *scheduling* $p(t)$, e Ω_0 é a frequência de ressonância do controlador.

Quando se trata do projeto de controladores ressonantes via VRFT, Beal *et al.* (2023a) mostra que os resultados obtidos tendem a melhorar caso seja inserido um termo derivativo em paralelo com o controlador ressonante. Nesse caso, considera-se um controlador na forma

$$C_{PD}(z) = k_{PD}(p(t)) + \frac{k_D(p(t))(z - 1)}{z - p_{PD}}. \quad (66)$$

Aqui, poderia ser utilizado apenas o termo derivativo, já que o controlador em (65) já tem parcela proporcional. Contudo, foi optado por manter a estrutura tradicional em ambos controladores.

A formulação para o controlador PD segue os mesmos passos da Seção 3.1, porém considerando apenas um estado $\eta(t) = \eta_1(t)$. Dessa maneira, pode-se aproveitar a abordagem de estratégias de controle aplicadas de forma paralela para utilizar, simultaneamente,

controladores PD - $C_{PD}(z)$ - e PR - $C_{PR}(z)$ - em plantas LPV. Para isso, serão considerados $Q_{PR}(z^{-1})$ e $Q_{PD}(z^{-1})$ dados por

$$\begin{aligned} Q_{PR}(z^{-1}) &= 1 - 2\cos(\Omega_0)z^{-1} + z^{-2} \\ Q_{PD}(z^{-1}) &= 1 - p_{PD}z^{-1} . \end{aligned} \tag{67}$$

3.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse capítulo foi mostrado que existe uma realização específica de um sistema de segunda ordem que permite escrever o sinal de controle na forma necessária para a utilização do método VRFT LPV. Além disso, usando matrizes aumentadas, é possível estender a formulação para o caso de controladores operando em paralelo.

No próximo capítulo, a aplicação do método VRFT LPV na sintonia de controladores resultantes será ilustrada a partir de um estudo de caso.

4 ESTUDO DE CASO

Foram desenvolvidos 4 cenários, em simulações numéricas, para exemplificar a aplicação do método de projeto de controladores ressonantes via VRFT para plantas LPV. Aborda-se um sistema linear parametrizado por $p(t_c)$ - sinal externo variável no tempo que serve, também, como variável de *scheduling* para o controlador.

Na Seção 4.1 é aplicado o PR para LPV desenvolvido por VRFT, enquanto na Seção 4.2 é utilizada a combinação de um controlador PR LPV e um controlador PD LPV.

4.1 CONTROLADOR PR LPV

Essa Seção divide-se em duas Subseções de acordo com o sinal $p(t_c)$ de interesse em cada cenário. Na Subseção 4.1.1 $p(t_c)$ é descrito por uma onda quadrada, e na Subseção 4.1.2 $p(t_c)$ é descrito por uma onda senoidal.

4.1.1 Controlador PR LPV - Variação do Parâmetro do Tipo Onda Quadrada

O sistema LPV considerado é a mesma planta de segunda ordem apresentada em (Xavier, 2020). Essa planta é descrita pela seguinte dinâmica de tempo contínuo

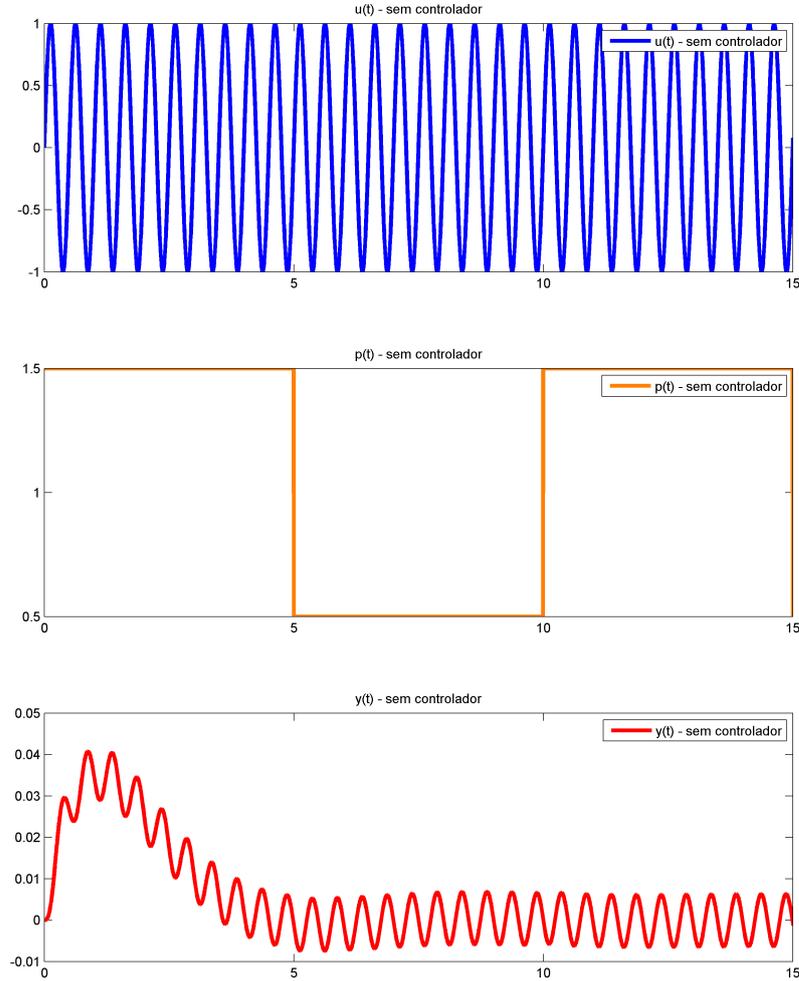
$$u(t_c) = \ddot{y}(t_c) + p(t_c)\dot{y}(t_c) + y(t_c) \quad (68)$$

em que $u(t_c)$ representa o sinal de controle, $y(t_c)$ representa sua saída, $p(t_c)$ representa um sinal externo variante no tempo. A planta foi simulada em tempo contínuo, sendo o controle e a coleta de dados implementados em tempo discreto com um período de amostragem de 1 ms. Esse período foi escolhido de forma que a o erro que ocorre pelo fato do controlador ser discretizado e da planta ser de tempo contínuo não seja significativo.

Deseja-se seguir uma referência senoidal com amplitude 1, frequência de 2 Hz, e valor médio nulo. Ainda, tem-se que $p(t_c)$ é uma onda quadrada de período 10s oscilando entre 0,5 e 1,5, mesma faixa considerada em Xavier (2020). Esse caso é importante uma vez que as garantias de seguimento de referência em regime permanente do princípio do modelo interno só são válidas para sistemas lineares e invariantes no tempo. Aplicando uma entrada senoidal com as mesmas características da referência no sistema em malha aberta, obtém-se os resultados demonstrados na Figura 3.

Em todos os casos dessa seção, o projeto dos controladores foi realizado a partir do mesmo conjunto de dados. Esses dados foram coletados em um ensaio em malha aberta com sinal de excitação do tipo PRBS de amplitude variando entre -1 e 1 e banda de

Figura 3 – Saída da planta para entrada senoidal sem controlador - $p(t)$ quadrada



Fonte: A autora

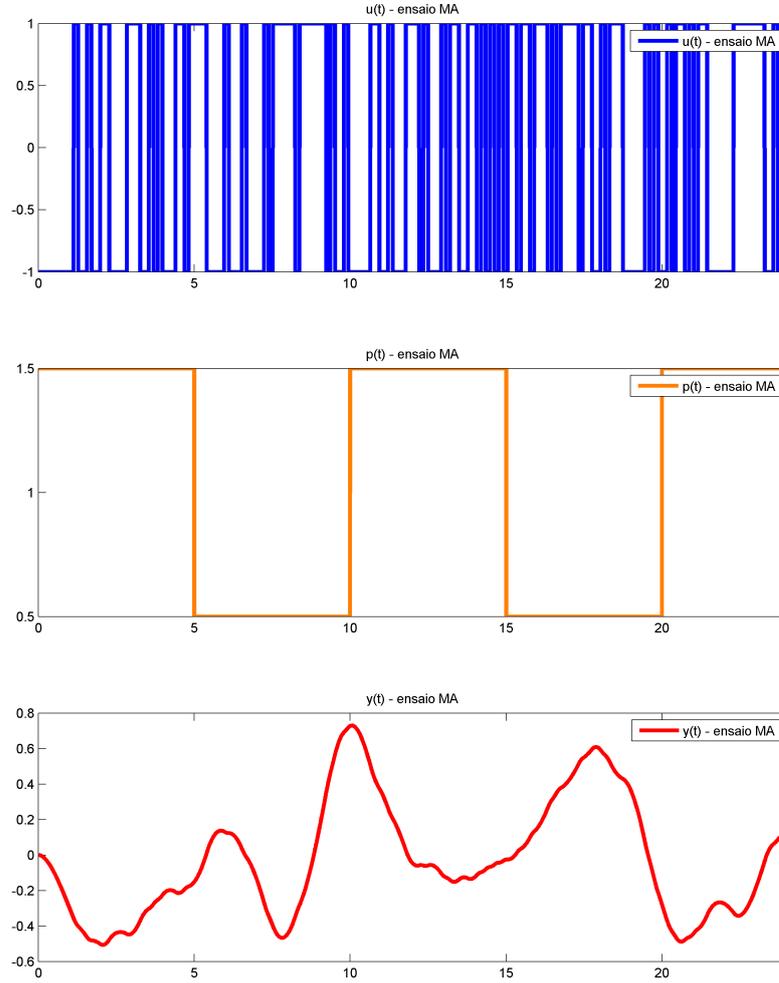
frequência entre 0 Hz e 7 Hz. No total, foram coletados 25000 amostras. Os resultados de tal ensaio em malha aberta podem ser encontrados na Figura 4.

Considere o controlador ressonante LPV descrito por

$$C_{PR}(z) = k_{PR}(p(t)) + \frac{k_{R1}(p(t))z + k_{R0}(p(t))}{z^2 - 2z \cos(\Omega_0) + 1}$$

onde ganhos k_{PR} , k_{R1} e k_{R0} sejam funções da variável de *scheduling* $p(t)$, e $\Omega_0 = 12,56$ rad/s é a frequência de ressonância do controlador. Aqui tem-se como objetivo projetar os parâmetros desse controlador para o caso LPV, que garanta o seguimento a tal referência para o sistema apresentado em (68). Para projetar esse controlador, segue-se o passo a passo descrito no Capítulo 3.

Figura 4 – Dados de ensaio na planta em malha aberta - $p(t)$ quadrada



Fonte: A autora.

A função de transferência desejada segue a mesma forma apresentada em (25). Como o objetivo é seguir apenas um sinal senoidal, ou seja, $N=1$, segue que ela é dada por

$$T_d(z) = \frac{k_0 z + k_1 z^2}{(z - p_{T_d})^3} \quad (69)$$

onde k_0 e k_1 são determinados tais que $T_d(z)$ apresente magnitude unitária e fase nula para $\Omega = \Omega_0$. Observe que a $T_d(z)$ escolhida possui grau relativo unitário, assim como em Xavier (2020). Além disso, o modelo de referência desejado se altera quando o valor de p_{T_d} muda, uma vez que k_0 e k_1 deverão ser recalculados.

A influência do valor de $p(t)$ na resposta em malha fechada será analisada através de exemplos. Para isso, foram consideradas $n = 3$, $m = 2$, $f_1(p(t)) = 1$, $f_2(p(t)) = p(t)$ e

$Q(z^{-1}) = 1 - 2\cos(\Omega_0)z^{-1} + z^{-2}$, e utilizado filtro $L(z) = T_d(z)(1 - T_d(z))$.

Verificou-se, de forma experimental, que para esse sistema existe uma faixa restrita de valores de p_{T_d} tais que o sistema em malha fechada é estável. Para valores de polo abaixo de 0,92 o sistema torna-se instável, sendo, então, testados valores entre 0,92 e 0,99. Como métrica de desempenho são calculados os custos J_y ¹, J_e ², e J_{eD} ³ dos resultados mais relevantes dos testes para os polos testados na Tabela 1, e seus erros de seguimento em forma gráfica são apresentados na Figura 5.

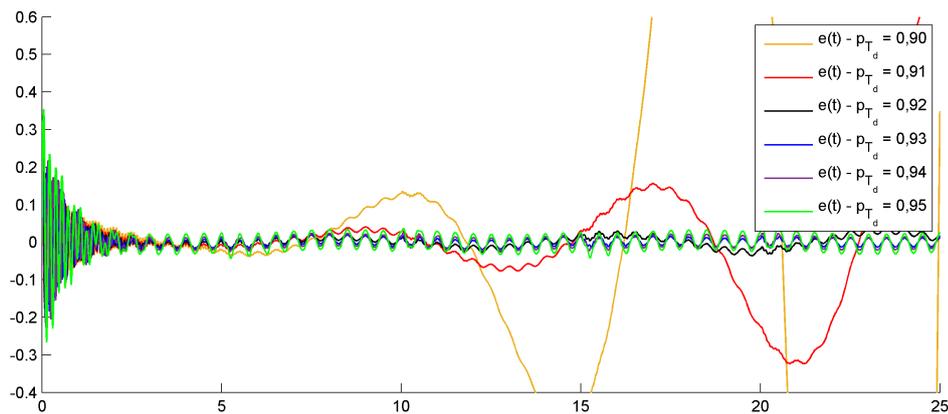
Pelos dados da tabela, verificou-se que para $p_{T_d} = 0,92$, o modelo desejado possui um erro menor em relação à referência, porém o controlador calculado pelo VRFT está mais distante do controlador ideal. Considerando como métrica o menor erro de seguimento à referência, a melhor solução encontrada para esse sistema se dá com $p_{T_d} = 0,93$. Na sequência, serão detalhados os parâmetros e sinais obtidos com esse valor de polo para modelo de referência.

Tabela 1 – Dados de J_y , J_e , J_{eD} para diferentes valores de p_{T_d} - $p(t)$ quadrada

	Cenário 1	Cenário 2	Cenário 3	Cenário 4
p_{T_d}	0,92	0,93	0,94	0,95
J_y	3,766	3,442	4,008	5,020
J_e	3,879	3,626	4,240	5,407
J_{eD}	0,692	0,857	1,083	1,432

Fonte: A Autora

Figura 5 – Escolha de polos para $T_d(z)$ - erros de seguimento - $p(t)$ quadrada



Fonte: A autora.

¹ $J_y = \|y(t) - y_D(t)\|_2^2$ é usado para indicar o sucesso da abordagem via VRFT em atingir o modelo desejado

² $J_e = \|r(t) - y(t)\|_2^2$ é utilizado para indicar o sucesso do controlador em seu seguimento à referência

³ $J_{eD} = \|r(t) - y_D(t)\|_2^2$ é utilizado para indicar o sucesso do modelo desejado em representar o correto seguimento à referência

Dado o polo alocado em $p_{T_d} = 0,93$, foram calculados k_0 e k_1 de (69) que satisfazem os requisitos de magnitude unitária e fase nula para $\Omega = \Omega_0$. Para essas condições, isso é atingido através dos seguintes valores.

$$\begin{aligned} k_0 &= -0,0139 \\ k_1 &= 0,0142. \end{aligned}$$

Finalmente, tem-se

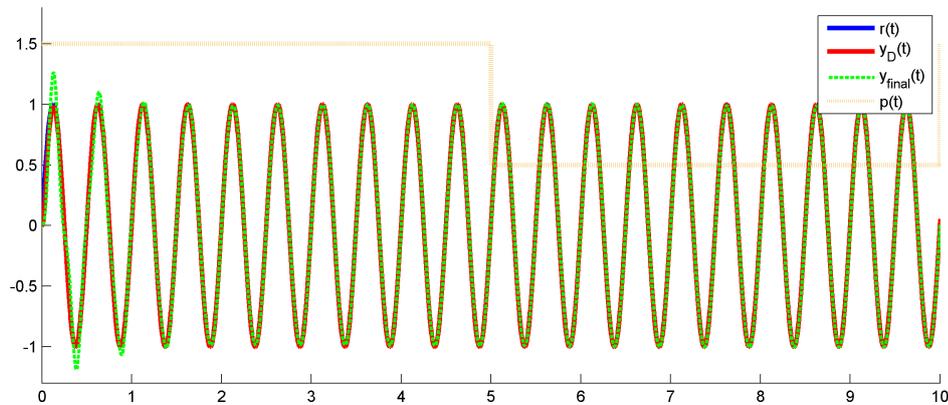
$$T_d(z) = \frac{0,0142z(z - 0,978)}{(z - 0,93)^3}. \quad (70)$$

Nesse ponto, é aplicado o passo-a-passo da abordagem VRFT para sistemas LPV conforme descrito na Seção 3.3, que resulta em

$$\Theta = 10^3 \times \begin{bmatrix} 2,6324 & 0,0001 \\ -5,2649 & -0,0002 \\ 2,6325 & 0,0001 \end{bmatrix}. \quad (71)$$

Com os parâmetros obtidos, foi simulado a resposta do sistema controlado à referência apresentada. O resultado dessa simulação é encontrado na Figura 6. Aqui percebe-se que, em regime permanente, a saída do sistema segue a senoide de referência, demorando cerca de 2 ciclos - 1,03s - para se acomodar, considerando-se erro de 5%. Mesmo com a mudança de valores de $p(t)$, o sistema foi capaz de manter seguimento satisfatório à referência, mantendo o erro dentro da tolerância esperada.

Figura 6 – Resposta do sistema em malha fechada com o controlador projetado via VRFT

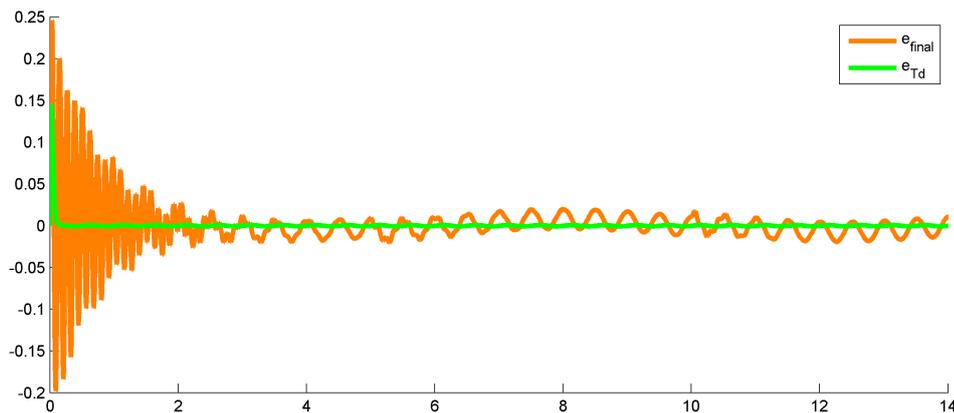


Fonte: A autora.

De forma gráfica, pode-se avaliar o quão adequado é o Θ encontrado para o problema proposto através do erro ao longo do tempo avaliado - em que $e_{final}(t) = r(t) - y(t)$ e

$e_{Td}(t) = r(t) - y_D(t)$ -, representado na Figura 7. Nela, identifica-se que o erro de seguimento em regime permanente, apesar de oscilar com o valor de $p(t)$, fica confinado a valores máximos de 2,5% da amplitude da referência, demonstrando que o seguimento à referência foi atingido.

Figura 7 – Erros de seguimento para parametrização encontrada - $p(t)$ quadrada



Fonte: A autora.

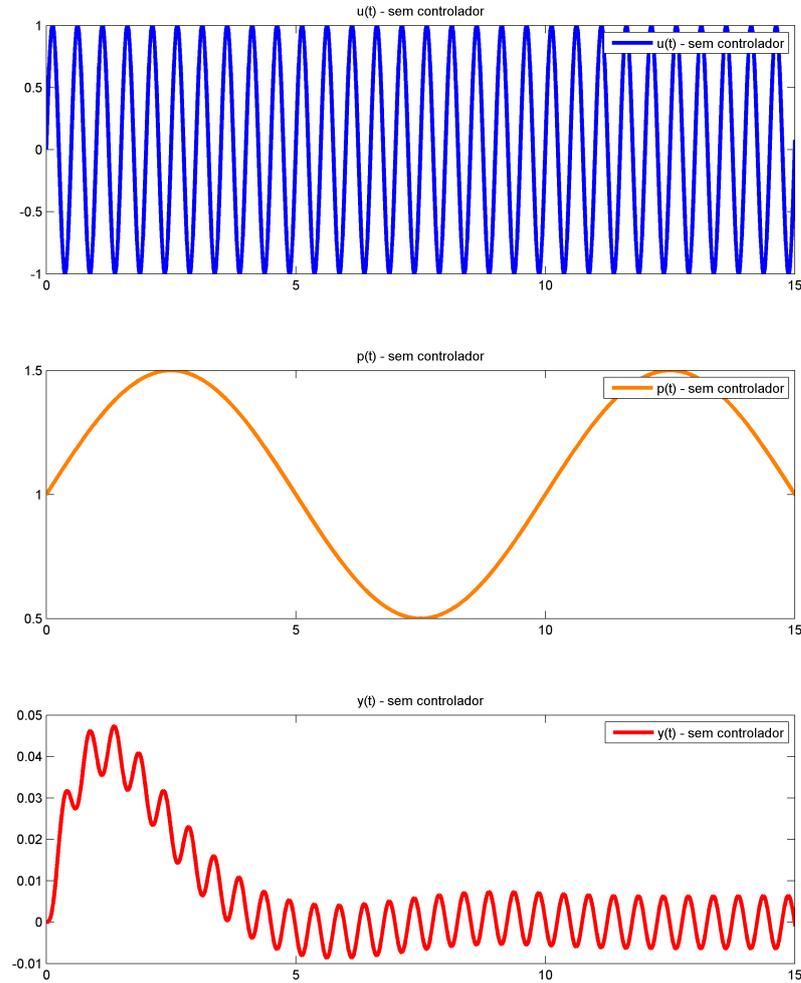
4.1.2 Controlador PR LPV - Variação Senoidal do Parâmetro

Ampliando o que foi demonstrado em 4.1.1, pode-se considerar, ainda, $p(t_c)$ como um sinal senoidal de período 10s oscilando entre 0,5 e 1,5. Utilizando a planta apresentada em (68), o sinal de referência, os parâmetros para coleta de dados e o tempo de amostragem descritos em 4.1.1, tem-se por objetivo encontrar parâmetros para (69) que minimizem o erro de seguimento à referência para o sistema em questão.

Aplicando uma entrada senoidal com as mesmas características da referência no sistema em MA apresentadas na Subseção 4.1.1, são obtidos os resultados apresentados na Figura 8. Para o ensaio de coleta de dados em MA, é aplicado um PRBS conforme descrito em na Subseção 4.1.1, e cujos resultados podem ser observados na Figura 9. A estrutura de controle é mantida como em 4.1.1. Ou seja, são utilizados $n = 3$, $m = 2$, $f_1(p(t)) = 1$, $f_2(p(t)) = p(t)$ e $Q(z^{-1}) = 1 - 2\cos(\Omega_0)z^{-1} + z^{-2}$, e utilizado filtro $L(z) = T_d(z)(1 - T_d(z))$.

Verifica-se que após a mudança do sinal que define a variável de *scheduling*, a instabilidade do sistema para valores de p_{Td} abaixo de 0,92 se mantém. Assim, foram avaliados polos entre 0,92 e 0,99, e observou-se que o menor erro de seguimento à referência é observado em $p_{Td} = 0,92$. Na Tabela 2 podem ser observados os custos J_y , J_e , J_{eD} para os principais polos testados, e na Figura 10 são apresentados seus resultados gráficos. Observa-se que os valores dos custos avaliados nesse caso são muito parecidos com aqueles encontrados na Seção 4.1.1, o que indica a capacidade do método em lidar com diferentes tipos de parâmetros de *scheduling*.

Figura 8 – Saída da planta para entrada senoidal sem controlador - $p(t)$ senoidal



Fonte: A autora

Tabela 2 – Dados de J_y , J_e , J_{eD} para diferentes valores de p_{T_d} - $p(t)$ senoidal

	Cenário 1	Cenário 2	Cenário 3	Cenário 4	Cenário 5
p_{T_d}	0,90	0,91	0,92	0,93	0,94
J_y	291,637	13,428	3,524	3,669	4,224
J_e	291,638	13,450	3,643	3,839	4,439
J_{eD}	0,488	0,575	0,692	0,857	1,083

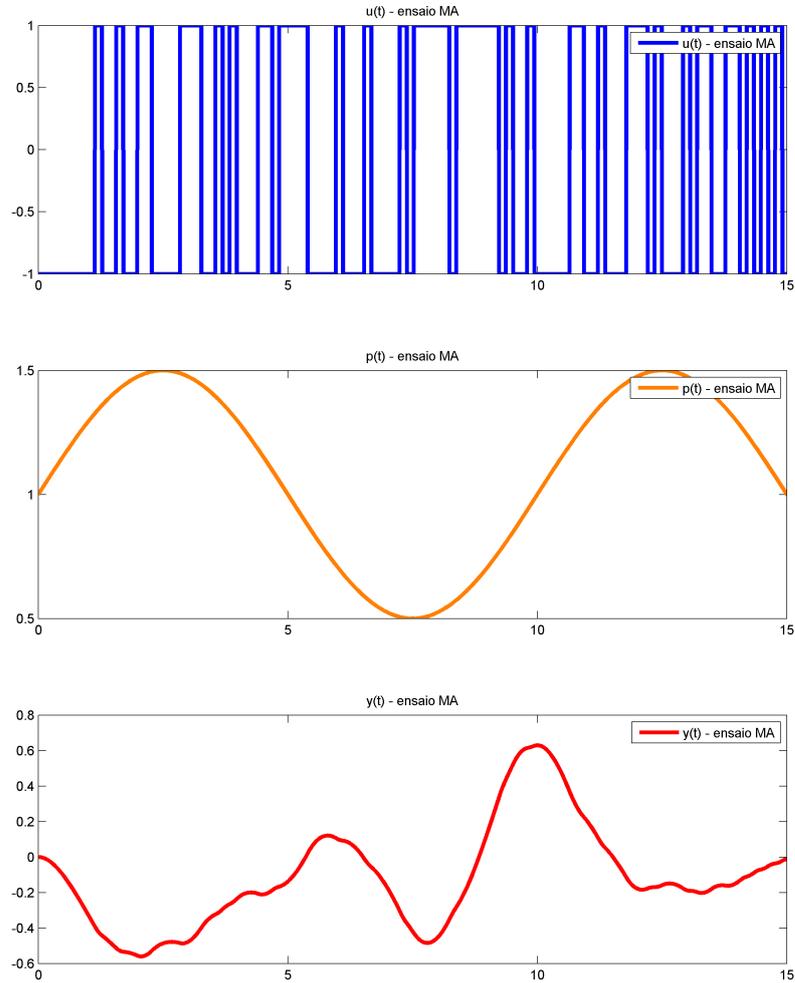
Fonte: A Autora

Com o polo da $T_d(z)$ alocado em 0,92 definem-se k_1 e k_0 de forma a garantir magnitude unitária e fase nula para a frequência de ressonância. Isso é atingido através de

$$k_0 = -0,0181$$

$$k_1 = 0,0185.$$

Figura 9 – Dados de ensaio na planta em malha aberta - $p(t)$ senoidal



Fonte: A autora

Disso, segue que

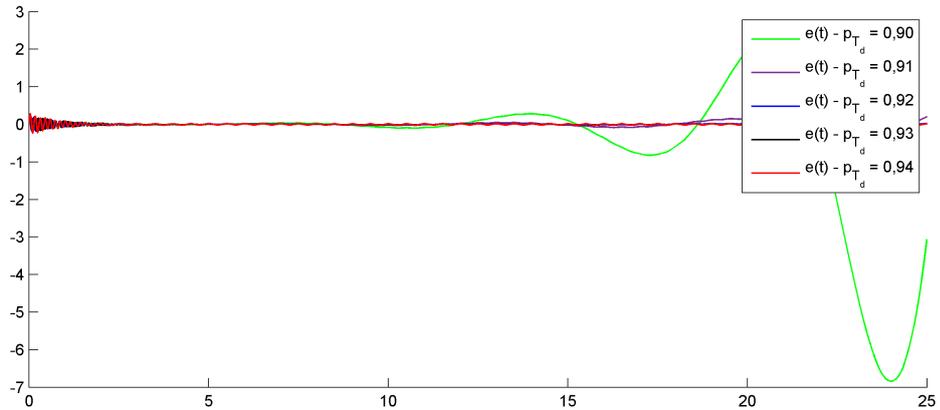
$$T_d(z) = \frac{0,0185z(z - 0,974)}{(z - 0,92)^3}. \quad (72)$$

Aplicando o passo-a-passo da abordagem VRFT para sistemas LPV conforme descrito na Seção 3.3, obtém-se

$$\Theta = 10^3 \times \begin{bmatrix} 3,359 & 0,174 \\ -6,718 & -0,347 \\ 3,360 & 0,173 \end{bmatrix}. \quad (73)$$

Observe que, quando comparado à (71), a variação persistente da variável de *sche-*

Figura 10 – Escolha de polos para $T_d(z)$ - erros de seguimento - $p(t)$ senoidal

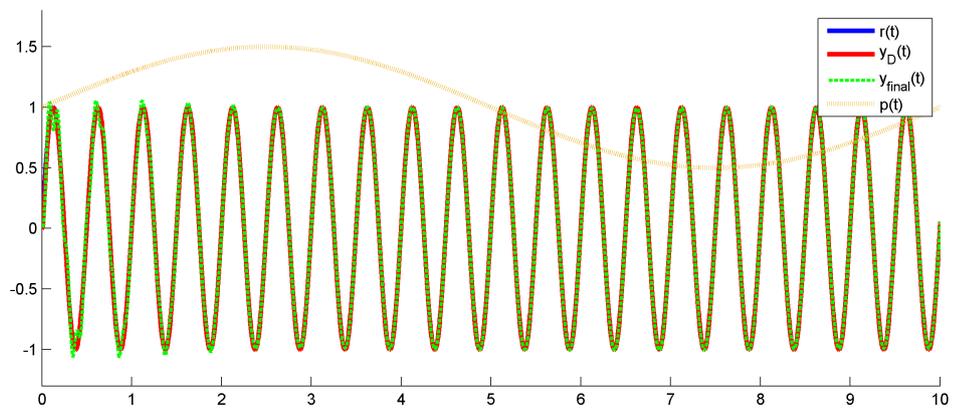


Fonte: A autora.

duling fez com que os valores de Θ associados a $f_2(t) = p(t)$ aumentam significativamente, indicado pelos valores da segunda coluna das matrizes. Isso reforça a importância do escalonamento dos ganhos do controlador.

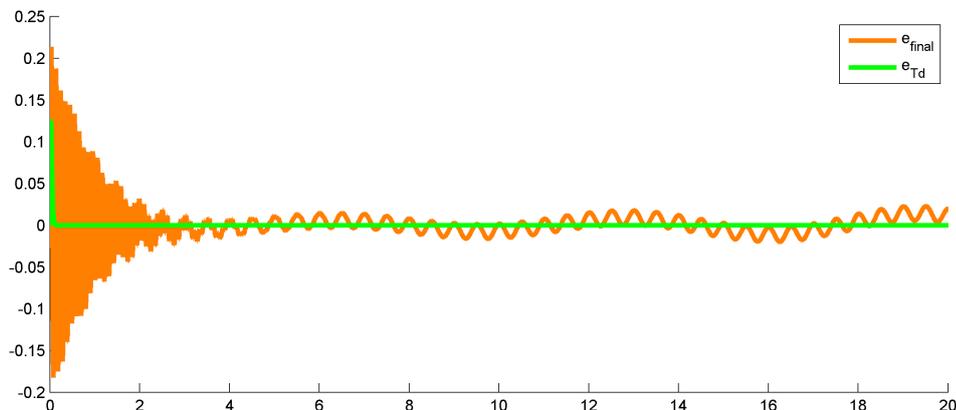
Com esses parâmetros, foi simulada a resposta do sistema controlado à referência apresentada. O resultado dessa simulação é encontrado na Figura 11, e compara-se graficamente o erro de seguimento obtido com o erro de seguimento desejado na Figura 12. Percebe-se que novamente em regime permanente a saída do sistema segue a senoide de referência, demorando pouco mais de 2 ciclos - 1,32s - para se acomodar, considerando-se erro de 5%. Nesse caso, temos $p(t)$ variando de forma consideravelmente mais persistente do que na Subseção 4.1.1, e o sistema ainda foi capaz de manter seguimento satisfatório à referência. Após os primeiros 10 ciclos o erro de seguimento à referência, apesar de ainda oscilar, fica confinado a 1,4% do valor da amplitude da referência.

Figura 11 – Resposta do sistema em MF com o controlador projetado via VRFT - $p(t)$ senoidal



Fonte: A autora.

Figura 12 – Erros de seguimento para parametrização encontrada - $p(t)$ senoidal



Fonte: A autora.

4.2 CONTROLADOR PR LPV + CONTROLADOR PD LPV

Como extensão do que foi apresentado na Seção 4.1.1, nesta seção é utilizado um controlador PR LPV em paralelo com um controlador PD LPV para o controle da planta (68).

Assim como na seção anterior, as subseções são aqui divididas para diferentes sinais $p(t_c)$: na Subseção 4.2.1 o sinal é apresentado como uma onda quadrada, e a Subseção 4.2.2 o apresenta como uma onda senoidal.

4.2.1 Controlador PR LPV + Controlador PD LPV - Variação do Parâmetro do Tipo Onda Quadrada

Ainda considerando-se o mesmo sistema LPV de segunda ordem apresentado em (68), deseja-se seguir a mesma referência do tipo senoidal. Mantém-se, também, $p(t_c)$ como uma onda quadrada de período 10s oscilando entre 0.5 e 1.5.

Como foi visto na Seção 4.1.1, a abordagem de controle desse sistema através de um PR desenvolvido por VRFT gerou custos altos, e erro significativo. Observa-se que modelos mais rápidos tendem a gerar custos menores uma vez que sistema atinge o regime permanente em menos tempo.

Dado que deseja-se diminuir o valor de p_{T_d} , tornando o sistema de controle mais rápido, entende-se que pode ser utilizado um controlador do tipo PD em paralelo com o PR previamente utilizado, com aplicação de controladores atuando em paralelo, como descrito na Seção 3.3. Dessa maneira, considera-se $n_1 = 3$, $m_1 = 2$, $n_2 = 2$, $m_2 = 2$, $f_1(p(t)) = 1$, $f_2(p(t)) = p(t)$, utiliza-se o filtro $L(z) = T_d(z)(1 - T_d(z))$, e os controladores

de interesse tem a estrutura apresentada em (74) e (75).

$$Q_1(z^{-1}) = 1 - 2\cos(\Omega_0)z^{-1} + z^{-2} \quad (74)$$

$$Q_2(z^{-1}) = 1 - p_{PD}z^{-1} . \quad (75)$$

Utilizam-se os mesmos dados coletados no ensaio de MA apresentado na Figura 4, e a mesma estrutura básica para $T_d(z)$ dada por

$$Td(z) = \frac{k_0z + k_1z^2}{(z - p_{T_d})^3} .$$

Como o objetivo da inclusão do controlador PD é trazer um polo em altas frequências, optou-se por alocar o polo do PD (p_{PD}) tal que seja 4 vezes mais rápido que o polo da $T_d(z)$, como feito em Remes (2021), ou seja,

$$p_{PD} = p_{T_d}^4 . \quad (76)$$

Para a escolha do polo da $T_d(z)$, verificou-se, inicialmente, que para valores abaixo de 0,5 o sistema torna-se instável. A partir disso, testaram-se valores entre 0,5 e 0,99 para o polo. Observam-se os custos J_y , J_e , J_{eD} para os polos testados inicialmente na Tabela 3, e os resultados gráficos dos erros de seguimento na Figura 13.

Tabela 3 – Dados de J_y , J_e , J_{eD} para diferentes valores de $p_{T_d} - p(t)$ quadrado

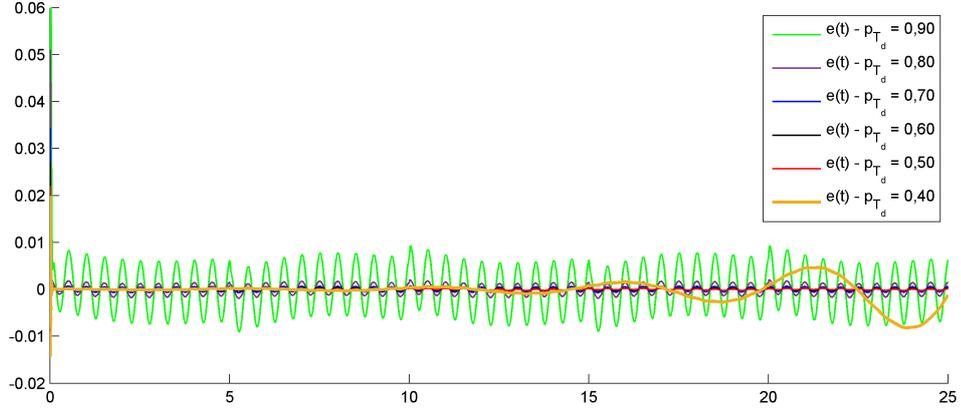
	Cenário 1	Cenário 2	Cenário 3	Cenário 4	Cenário 5
p_{T_d}	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
J_y	0,030	0,039	0,072	0,174	0,758
J_e	0,045	0,061	0,105	0,232	0,905
J_{eD}	0,033	0,050	0,082	0,177	0,488

Fonte: A Autora

Perceba que, sem exceções, os custos aumentam de acordo com o aumento do valor de p_{T_d} . Assim, é de interesse alocar esse polo no menor valor possível tal que a estabilidade esteja ainda garantida. Escolhe-se $p_{T_d} = 0,5$, e, conseqüentemente, $p_{PD} = 0,0625$. Perceba que com o uso do PD, quando comparado ao que foi apresentado na Subseção 4.1.1, foram obtidos valores menores para todos custos avaliados.

Novamente, os coeficientes dos zeros da $T_d(z)$ são calculados de forma a garantir magnitude unitária e fase zero. Para o sistema em questão e as condições alocadas, isso é atingido através dos seguintes valores.

Figura 13 – Escolha de polos para $T_d(z)$ - erros de seguimento - $p(t)$ quadrado com PD



Fonte: A autora.

$$k_0 = -0,5000$$

$$k_1 = 0,6249.$$

Por fim, tem-se

$$Td(z) = \frac{0,6249z(z - 0,8002)}{(z - 0,5)^3}. \quad (77)$$

É aplicado o passo-a-passo da abordagem VRFT para sistemas LPV, que resulta em

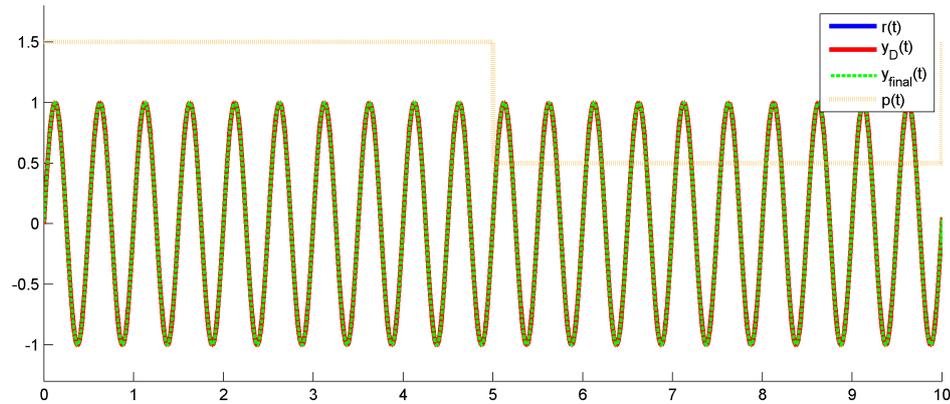
$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} -377,7042 & 0,1597 \\ 93,6941 & -0,1528 \\ 248,6394 & 0,0603 \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} 6,0694 \times 10^5 & -0,0623 \\ -3,9752 \times 10^5 & -0,1589 \end{bmatrix}. \quad (79)$$

Com os parâmetros obtidos, foi simulado a resposta do sistema controlado à referência apresentada. O resultado dessa simulação é encontrado na Figura 14. Nessa simulação, percebe-se que o sistema entra em regime permanente em 0,1s, e tem seu erro de seguimento confinado ao valor máximo de 0,03% da amplitude do sinal de referência. Esse é um resultado superior àquele encontrado para a mesma planta no cenário sem uso do controlador PD, apresentado na Subseção 4.1.1. Como esperado, com o uso do PD a acomodação é mais rápida e o erro de seguimento é consideravelmente menor.

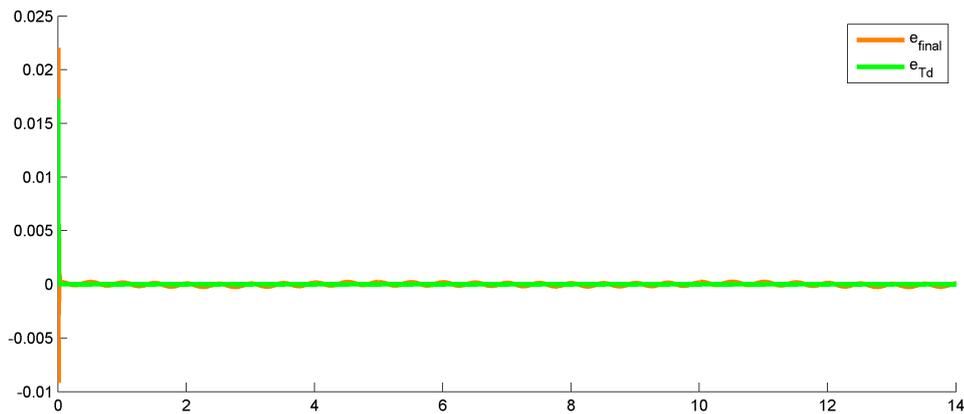
De forma gráfica, pode-se avaliar o quão adequado é o Θ encontrado para o problema proposto através do erro ao longo do tempo avaliado, representado na Figura 15.

Figura 14 – Resposta do sistema em MF com o controlador projetado via VRFT - $p(t)$ quadrado



Fonte: A autora.

Figura 15 – Erros de seguimento para parametrização encontrada - $p(t)$ quadrado



Fonte: A autora.

Ainda, de forma quantitativa, avalia-se o sucesso dessa abordagem através dos custos J_y , J_e e J_{eD} , como feito na Seção 4.1.1

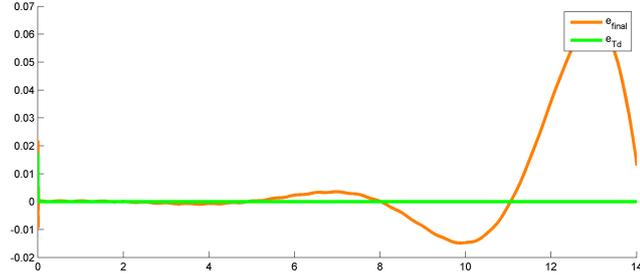
$$J_y = 0,030443$$

$$J_e = 0,044689$$

$$J_{eD} = 0,032908.$$

Pode-se comparar o resultado obtido com o desempenho do sistema alocando o polo p_{PD} em 0, e mantendo $p_{T_d} = 0,5$. Essas condições resultam em um sistema instável, conforme indicado na Figura 16. A fim de avaliar em mais detalhes a contribuição do controlador PD para o sistema, é retomado um caso de p_{T_d} mais lento, em que é encontrado um sistema estável com p_{T_d} em 0. Esse ensaio foi conduzido com $p_{T_d} = 0,9$, e seus resultados são encontrados na Tabela 4 e na Figura 17. Observe que tornando p_{T_d} mais rápidos os custos - e conseqüentemente o erro de seguimento - caem.

Figura 16 – Erros de seguimento para $p_{PD} = 0$ e $p_{T_d} = 0,5$.



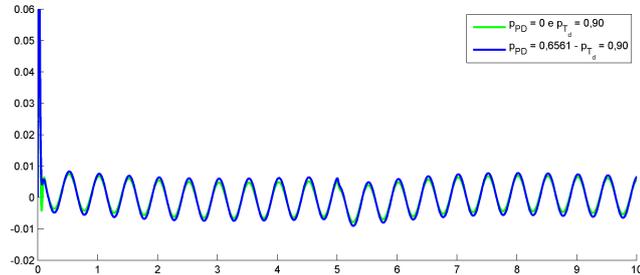
Fonte: A autora.

Tabela 4 – Dados de J_y , J_e , J_{eD} para diferentes valores de p_{PD} e $p_{T_d} = 0,9$

	Cenário 1	Cenário 2
p_{PD}	0	0,656
p_{T_d}	0,9	0,9
J_y	0,650	0,758
J_e	0,793	0,905
J_{eD}	0,488	0,488

Fonte: A Autora

Figura 17 – Erros de seguimento para $p_{T_d} = 0,9$ - $p_{PD} = 0$ e $p_{PD} = 0,6561$.



Fonte: A autora.

4.2.2 Controlador PR LPV + Controlador PD LPV - Variação Senoidal do Parâmetro

De maneira similar ao que foi feito na Subseção 4.1.2, considera-se, agora, $p(t_c)$ como um sinal senoidal de período 10s oscilando entre 0,5 e 1,5. Mantém-se a planta apresentada em (68), o sinal de referência, os parâmetros para coleta de dados e o tempo de amostragem descritos em 4.1.1.

Utilizam-se os mesmos dados coletados no ensaio de MA apresentado na Figura 9, e a mesma estrutura básica para $T_d(z)$ apresentada em (69). A estrutura de controle é mantida como em 4.2.1. Ou seja, são utilizados $n_1 = 3$, $m_1 = 2$, $n_2 = 2$, $m_2 = 2$, $f_1(p(t)) = 1$, $f_2(p(t)) = p(t)$ e $Q(z^{-1}) = 1 - 2\cos(\Omega_0)z^{-1} + z^{-2}$, e utilizado filtro $L(z) = T_d(z)(1 - T_d(z))$. A relação entre p_{T_d} e p_{PD} apresentada em (76) é, também, mantida.

Assim como no caso anterior, verificou-se que a instabilidade do sistema para

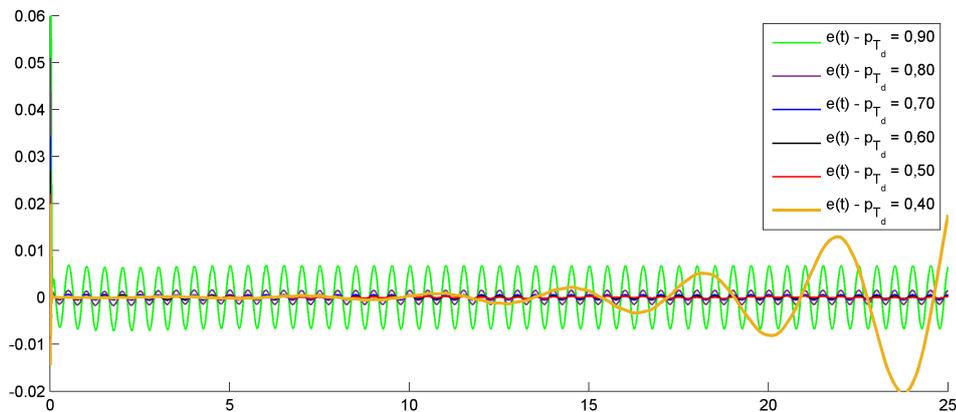
p_{T_d} menor do que 0,5 manteve-se mesmo com a troca de sinal $p(t_c)$. Assim, novamente testam-se polos entre 0,5 e 0,99, e observou-se que o menor erro de seguimento à referência é observado em $p_{T_d} = 0,5$. Na Tabela 5 podem ser observados os custos J_y , J_e , J_{eD} para os principais polos testados, e na Figura 18 são apresentados seus resultados gráficos. Assim como observado na Subseção 4.1.2, pode-se ver que os valores dos custos avaliados nesse caso são muito parecidos com aqueles encontrados na Seção 4.2.1, o que novamente corrobora a capacidade do método em lidar com diferentes tipos de parâmetros de *scheduling*.

Tabela 5 – Dados de J_y , J_e , J_{eD} para diferentes valores de p_{T_d} - $p(t)$ senoidal com PD

	Cenário 1	Cenário 2	Cenário 3	Cenário 4	Cenário 5
p_{T_d}	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
J_y	0,032	0,040	0,071	0,173	0,742
J_e	0,046	0,062	0,104	0,230	0,889
J_{eD}	0,033	0,050	0,082	0,177	0,488

Fonte: A Autora

Figura 18 – Escolha de polos para $T_d(z)$ - erros de seguimento - $p(t)$ senoidal



Fonte: A autora.

Com o polo da $T_d(z)$ arbitrado em 0,5 definem-se k_1 e k_0 de forma a garantir magnitude unitária e fase nula para a frequência de ressonância. Isso é atingido através de

$$k_0 = -0,5000$$

$$k_1 = 0,6249.$$

Por fim, tem-se que

$$T_d(z) = \frac{0,62485z(z - 0,8002)}{(z - 0,5)^3}. \quad (80)$$

E, conforme descrito na Seção 3.3, obtém-se

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} -753,7590 & -27,1691 \\ 780,6797 & 110,5145 \\ -62,1842 & -83,4300 \end{bmatrix} \quad (81)$$

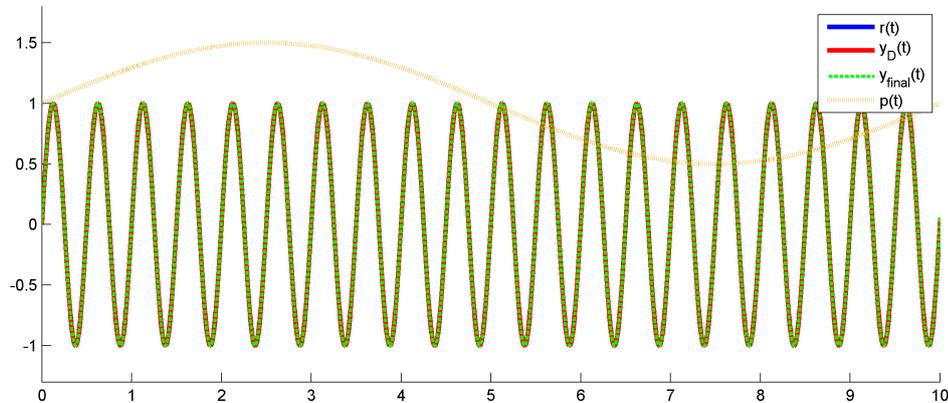
$$\Theta_2 = 10^5 \times \begin{bmatrix} 6,0870 & -0,0073 \\ -3,9909 & 0,0108 \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Perceba que novamente existe maior ganho nos termos dependentes de $p(t)$ para o caso de sinal senoidal. Isso é observado comparando-se (81) com (78) e (82) com (79), indicado pelos valores da segunda coluna das matrizes Θ , que tem várias ordens de grandeza a mais no caso de $p(t)$ senoidal.

A resposta do sistema à referência apresentada, quando parametrizado com as matrizes acima, pode ser encontrado na Figura 19. Ainda, compara-se, graficamente, o erro de seguimento obtido com o erro de seguimento desejado na Figura 20. No cenário simulado, tem-se que o sistema entra em regime permanente em 0,07s, e tem seu erro de seguimento confinado ao valor máximo de 0,02% da amplitude do sinal de referência.

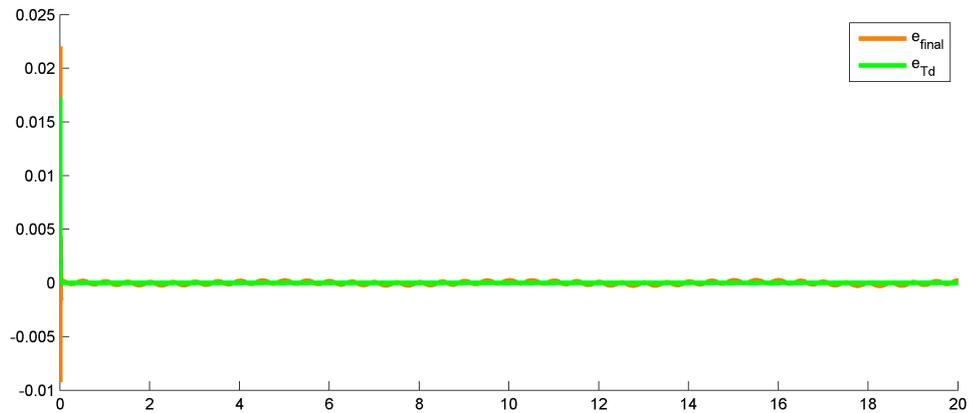
Assim como aconteceu comparando a Subseção 4.2.1 com a Subseção 4.1.1, tem-se que os resultados encontrados nessa Subseção são superiores àqueles encontrados na Subseção 4.1.2, que implementa a mesma planta, com a mesma $p(t)$, porém sem a utilização da estratégia de controle PD. Mais uma vez, é corroborado que com o uso do PD para a planta em questão a acomodação é mais rápida e o erro de seguimento é consideravelmente menor.

Figura 19 – Resposta do sistema em MF com o controlador projetado via VRFT - $p(t)$ senoidal



Fonte: A autora.

Figura 20 – Erros de seguimento para parametrização encontrada - $p(t)$ senoidal



Fonte: A autora.

4.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os quatro cenários apresentados demonstram a eficácia da abordagem de controle baseada em VRFT para sistemas LPV. Na Seção 4.1, utilizando apenas o controlador ressonante, foi possível seguir a referência senoidal, mas com limitações significativas de estabilidade e maiores erros de seguimento. Essas limitações se devem à faixa restrita de estabilidade da planta e à necessidade de ajustar finamente os polos da função de transferência desejada.

Na Seção 4.2, a combinação de controladores PD e ressonante mostrou-se uma solução mais robusta e eficaz. A inclusão do controlador PD permitiu ampliar a faixa de estabilidade do sistema - fornecendo maior flexibilidade na escolha dos polos -, e conseqüentemente resultando em um sistema de controle mais rápido e com menores erros de seguimento, conforme evidenciado na Tabela 4.3 e Tabela 4.3. Isso é, também, corroborado por valores menores de J_y , J_e e J_{eD} nos cenários apresentados nessa seção quando comparados à anterior.

Tabela 6 – Erros máximos em Regime Permanente

$p(t)$	Ressonante	Ressonante + PD
Onda quadrada	4,1%	0,03%
Senoidal	1,4%	0,02%

Fonte: A Autora.

Portanto, para a mesma planta, a segunda abordagem provou ser a melhor solução, destacando a vantagem de utilizar controladores combinados em paralelo para sistemas LPV.

Comparando os casos com $p(t_c)$ senoidal com os casos de sinal quadrado, observa-se

Tabela 7 – Tempos de Acomodação em Regime Permanente

$p(t)$	Ressonante	Ressonante + PD
Onda quadrada	1,03 s	0,10 s
Senoidal	1,32 s	0,07 s

Fonte: A Autora.

que os resultados em termos de custos foram muito similares. O que distingue os casos, contudo, é o peso que os ganhos dependentes de $p(t)$ tem nas matrizes Θ encontradas. Percebe-se que nos casos senoidais esses valores são ordens de grandeza maiores do que nos casos quadrados.

5 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Esse trabalho teve como objetivo desenvolver e aplicar uma metodologia para o projeto de controladores ressonantes para plantas LPV utilizando a abordagem VRFT. Essa abordagem permitiu projetar controladores de segunda ordem via VRFT, que garantem o seguimento de referências periódicas, demonstrando a viabilidade e eficácia do método para diferentes cenários de controle.

A metodologia foi validada através de estudos de caso em simulações numéricas, onde foram testados controladores ressonantes e PD em paralelo. Os resultados mostraram que a combinação desses controladores pode proporcionar melhorias significativas no desempenho do sistema, quando comparado à atuação do PR individualmente.

É importante ressaltar que, apesar da metodologia apresentada ser baseada em dados, dispensando a modelagem matemática precisa da planta de interesse, reforça-se que esse método não pode ser aplicado sem um mínimo conhecimento do processo que deseja-se controlar.

Para trabalhos futuros, algumas direções podem ser exploradas para ampliar e aprofundar as contribuições deste estudo, como avaliar o resultado do método desenvolvido em novos estudos de caso: outras plantas LPV, outras combinações de controladores (e.g. múltiplos-ressonantes), testes em controladores de segunda ordem com polos complexos, além de validação experimental dos controladores aqui simulados. Outro ponto de extensão desse trabalho é o tratamento de casos com ruído, que não foram abordados aqui.

A contribuição desse trabalho é sumarizada na apresentação de um método generalista capaz de projetar controladores de segunda ordem para plantas LPV sem necessidade de modelagem de tais plantas, além da extensão do método para aplicação de diferentes estratégias de controle em paralelo no sistema.

REFERÊNCIAS

- BAMIEH, B.; GIARRE, L. Identification of linear parameter varying models. **International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal**, Wiley Online Library, v. 12, n. 9, p. 841–853, 2002.
- BAZANELLA, A. S.; CAMPESTRINI, L.; ECKHARD, D. **Data-driven controller design: the H2 approach**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.
- BAZANELLA, A. S.; SILVA, J. M. G. **Sistemas de controle - Princípios e métodos de projeto**. Porto Alegre: UFRGS, 2005.
- BEAL, G. P. Projeto de controlador proporcional-múltiplo-ressonante sintonizado por vrft para rejeição de harmônicas em fonte de alimentação ininterrupta. 2021.
- BEAL, G. P.; LORENZINI, C.; FLORES, J. V.; CAMPESTRINI, L. Harmonic rejection on ups through cascade vrft of proportional-resonant controller. In: **2023 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)**. [S.l.: s.n.], 2023. p. 1083–1088.
- BEAL, G. P.; MORETTO, R. M. F.; FLORES, J. V.; CAMPESTRINI, L. Projeto de controlador repetitivo com virtual reference feedback tuning (vrft). In: **Anais do XVI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI 2023)**. Manaus: [s.n.], 2023. p. 1–6.
- BOFF, Ben Hur Bandeira; FLORES, Jeferson Vieira; ECKERT, Paulo Roberto. Multi-loop resonant control applied to linear permanent magnet synchronous motors for periodic position tracking. **Mechatronics**, Elsevier, v. 99, p. 103163, 2024.
- KHALIL, HK. **Nonlinear systems**, ; prentice-hall: Upper saddle river, nj, usa. 2002.
- LASCH, R. Método vrft-lpv para sistemas multivariáveis. 2021.
- LOURENCENA, M. O. **Projeto de Controle Baseado em Dados para Regulação de Velocidade do Rotor e Redução de Esforços Mecânicos em Turbinas Eólicas**. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. Orientador: Jeferson Vieira Flores. Dissertação (Mestrado em Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2023.
- MORETTO, R. M. F. **Aplicação de métodos de controle baseados em dados na sintonia de controladores repetitivos**. Orientador: Jeferson Vieira Flores. Trabalho de Conclusão de Curso — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2023.
- PALMEIRA, Alessandra Helena Kimura. Estabilidade e estabilização de sistemas lpv amostrados. 2019.
- PEREIRA, L. F. A.; CARVALHO, F. M. de; FLORES, J. V. Alternative resonant controller design for uninterruptible power supplies (ups). In: IEEE. **IECON 2013-39th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society**. [S.l.], 2013. p. 3311–3316.

PEREIRA, L. F. A.; FLORES, J. V.; BONAN, G.; COUTINHO, D. F.; SILVA, J. M. G. da. Multiple resonant controllers for uninterruptible power supplies—a systematic robust control design approach. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, IEEE, v. 61, n. 3, p. 1528–1538, 2013.

REMES, Chrystian Lenon. **Aplicação de Metodologias de Controle Baseado em Dados em Conversores CC-CC**. Tese (Doutorado em Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2021.

SHAMMA, J. S. **Analysis and design of gain scheduled control systems**. Tese (Doutorado) — Massachusetts Institute of Technology, 1988.

XAVIER, F. E. Projeto de controladores lpv pelo método vrft. 2020.