UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ELIANE DE FRAGA SILVEIRA

JOGOS FÍSICOS E DIGITAIS: UM FACILITADOR DA APRENDIZAGEM DAS ESTRUTURAS ADITIVAS NO ÂMBITO DOS NÚMEROS INTEIROS

PORTO ALEGRE
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

ELIANE DE FRAGA SILVEIRA

JOGOS FÍSICOS E DIGITAIS: UM FACILITADOR DA APRENDIZAGEM DAS ESTRUTURAS ADITIVAS NO ÂMBITO DOS NÚMEROS INTEIROS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul na linha de pesquisa Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação na Educação Matemática, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Leandra Anversa Fioreze

PORTO ALEGRE
2024

CIP - Catalogação na Publicação

DE FRAGA SILVEIRA, ELIANE
JOGOS FÍSICOS E DIGITAIS: UM FACILITADOR DA APRENDIZAGEM DAS ESTRUTURAS ADITIVAS NO ÂMBITO DOS NÚMEROS INTEIROS / ELIANE DE FRAGA SILVEIRA. -- 2024.
88 f.
Orientador: LEANDRA ANVERSA FIOREZE.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2024.

1. Aprendizagem da Matemática. 2. Jogos Matemáticos. 3. Campo Conceitual das Estruturas Aditivas. 4. Números Inteiros. I. ANVERSA FIOREZE, LEANDRA, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

ELIANE DE FRAGA SILVEIRA

JOGOS FÍSICOS E DIGITAIS: UM FACILITADOR DA APRENDIZAGEM DAS ESTRUTURAS ADITIVAS NO ÂMBITO DOS NÚMEROS INTEIROS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul na linha de pesquisa Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação na Educação Matemática, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Profª. Drª. Leandra Anversa Fioreze – Orientadora

Prof. Dr. Fabrício Fernando Halberstadt – UFSM

Profª. Drª. Ivana Lima Lucchesi – E.E.E.M. ITÁLIA

Profª. Drª. Débora da Silva Soares – IME/PPGEMAT/UFRGS

Dedico esse trabalho à minha filha, que está sempre ao meu lado, se preocupando com o meu bem estar e me apoiando, com sugestões e estímulos, na construção das minhas práticas em sala de aula.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida, pelas oportunidades, pela companhia eterna e pela força nas horas das dificuldades.

Aos meus pais Moacir da Silva Silveira e Rosa de Fraga Silveira, por terem me ensinado, pelo exemplo, a sempre partir em busca dos desejos, independente das barreiras que surgem no caminho.

À minha filha Isabella Silveira Clos, pelo incondicional apoio e incentivo que sempre me dá. Sabendo que nenhum crescimento pessoal vem de graça, temos que correr atrás sempre dos nossos objetivos.

Às minhas irmãs Elisiane de Fraga Silveira e Elisa de Fraga Silveira, por estarem sempre ao meu lado, me apoiando e incentivando.

À minha prima Ondina Menezes, por estar sempre me incentivando.

À minha amiga Sabrina Laureano, por ter me incentivado a fazer a seleção para o mestrado.

Às minhas amigas Lucia Carrasco, Taís Cardoso e Suelen Dorneles, pelos ensinamentos que compartilharam comigo em tantos momentos importantes ao longo de toda essa caminhada.

Ao meu amigo Emanuel Kapczynski, pela paciência e colaboração ao me ensinar a usar o GeoGebra.

À colega e amiga Taciane Souza, pela troca de ideias e conhecimentos nos trabalhos em dupla durante o mestrado.

À equipe diretiva e pedagógica da escola que me concedeu a licença para aplicação dos jogos, imprescindível para a realização deste trabalho.

Aos estudantes do sétimo ano, sujeitos da pesquisa.

A todos os professores do Mestrado.

Agradecimento especial à minha professora e orientadora Leandra Anversa Fioreze, com quem aprendi muito mais do que fazer uma dissertação de Mestrado. Ela me possibilitou o reencontro de um caminho, do qual eu estava totalmente distante.

RESUMO

Nesta pesquisa tem-se por objetivo identificar como uma proposta pedagógica com ênfase em um jogo de tabuleiro e dois jogos digitais, voltada ao campo conceitual das estruturas aditivas com números inteiros, mobiliza os estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental a desenvolverem esquemas conceituais. A pesquisa é desenvolvida com a utilização de um jogo de trilha e de dois jogos digitais no GeoGebra, buscando entender como se dá a aprendizagem da adição com números inteiros, tendo por base a Teoria dos Campos Conceituais. Elege-se a metodologia qualitativa, visando esclarecer o processo de construção dos esquemas dos estudantes. Buscam-se contribuições teóricas nos estudos desenvolvidos por Gérard Vergnaud, no que se refere ao campo conceitual das estruturas aditivas em $\mathbb{Z}$ e ao caminho produzido pelo sujeito para chegar à construção de conceitos e teoremas dentro desse campo. Vergnaud enfatiza que o cerne do desenvolvimento cognitivo de um estudante é o processo de construir conceitos, o que indica ao professor a importância de propor um caminho metodológico específico que favoreça a compreensão da Matemática. Para a produção de dados, realizam-se filmagens e registros de observações durante as ações dos estudantes com os jogos e as respostas aos questionários, visando analisar os esquemas mobilizados. Os resultados desta investigação indicam que os jogos são eficazes no ensino, pois os estudantes se envolvem com o conteúdo enquanto se divertem, pois jogar mobiliza os estudantes a aprender matemática, facilitando a compreensão das estruturas aditivas. Foi notável que os estudantes demonstraram sinais de entendimento operatório, sugerindo compreensão do campo estudado.

Palavras-chave: Aprendizagem da Matemática. Jogos Matemáticos. Campo Conceitual das Estruturas Aditivas. Números Inteiros.

ABSTRACT

This research has as an aim to identify how a pedagogical proposal with emphasis in a boardgame and two digital games, focused on the conceptual field of additive structures with whole numbers, mobilizes seventh grade students to develop conceptual schemes. The research is developed using a trail game and two digital games on Geogebra, seeking to understand how addition with whole numbers is learned, based on the Conceptual Fields Theory. A qualitative methodology was chosen, with direct guidance on the process of constructing students' schemes. In search for theoretical contributions in studies developed by Gérard Vergnaud, with regard to the conceptual field of additive structures and the path produced by the subject to arrive at the construction of concepts and theorems within this field. Vergnaud emphasizes that the core of a student's cognitive development is the process of constructing concepts, which indicates to the teacher the importance of proposing a specific methodological path that favors the understanding of mathematics. In order to produce the data, we filmed and recorded observations during the students' actions with the games and the answers to the questionnaires, with the aim of analyzing the schemes mobilized. The results of this research indicate that games are effective in teaching, as the students get involved with the content while having fun, because playing mobilizes the students' minds to learn mathematics, facilitating their understanding of additive structures. It was notable that the students showed signs of operative understanding, suggesting comprehension of the field studied.

Keywords: Learning mathematics. Mathematical Games. Conceptual Field of Additive Structures. Whole numbers.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Durante minha prática profissional como professora de Matemática, percebi que ensinar essa disciplina é um desafio diário, pois, além de ser considerada pelos estudantes uma das disciplinas mais difíceis, observo que muitos deles têm apresentado desinteresse e necessitam auxílio até mesmo para ler e compreender os conteúdos e problemas relacionados.

O motivo dessa situação, segundo Baumgartel (2016, p.1), é determinado pelos “[...] altos índices de reprovação associados à disciplina e, também, [por] uma questão cultural, pois [...] os estudantes já apresentam uma aversão à disciplina mesmo que ainda não tenham passado por situações que revelem alguma grande dificuldade.” Vários autores, entre os quais destaco: Miorim e Fiorentini (2019); Baumgartel (2016); Muniz (2010); Fiorentini e Lorenzato (2006), tratam sobre dificuldades dos estudantes para com a aprendizagem de matemática e enfatizam o aspecto mecanizado e descontextualizado do ensino de matemática. As pesquisas destacam que um ensino muito abstrato e sem significado leva a maioria dos estudantes a se desinteressar ou duvidar de sua própria capacidade para aprender. Também enfatizam acerca da importância de se propor situações concretas, tendo em vista o processo de aprendizagem, a partir da perspectiva de conceitos matemáticos relacionados com o cotidiano dos estudantes.

Sendo assim, é preciso encontrar uma maneira de tentar diminuir as dificuldades que surgem em sala de aula, por meio de diferentes recursos, para que a matemática deixe de ser considerada esta grande vilã.

A escolha do tema desta pesquisa foi motivada por dois diferentes aspectos. Primeiramente, por minha vivência em sala de aula como educadora, sempre em contato com as dificuldades dos estudantes e, num segundo momento, pelo fato de ser estudante do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, com vínculo na linha de pesquisa Formação de Professores na Tecnologia Digital da Informação e Comunicação na Educação Matemática, no qual participo do grupo de estudos e pesquisas em Educação Matemática e Tecnologias - MathemaTIC[1],

---

[1]O grupo MathemaTIC, originado da pesquisa, ensino e extensão, está atualmente envolvido em dois projetos de extensão: "O lúdico e a aprendizagem com jogos" e "A programação na Educação

buscando aprimorar meus conhecimentos, principalmente na perspectiva da utilização de jogos e atividades lúdicas no ensino de matemática.

Na busca de novas metodologias de ensino que engajem os estudantes no processo de construção do conhecimento e colaborem para a reestruturação desse contexto rígido de estudo, destaca-se a utilização de materiais concretos, porque os estudantes têm a necessidade de ver, de pegar, de sentir e, dessa forma, é possível tornar a aprendizagem matemática prazerosa. Também as atividades que envolvem jogos, em particular jogos digitais, são de grande valor, pois atingem o comprometimento dos estudantes e o professor pode desenvolver o conteúdo curricular de forma instigante *(*Miorim; Fiorentini, 2019).

Segundo Smolle e Diniz (2011), as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) prosseguem na sociedade, enquanto o conceito de educação também se modifica, pois a escola não pode permanecer à parte dessas modificações. Para tanto, é necessário que se questione os paradigmas vigentes e se almeja compreender o novo para utilizá-lo da melhor forma.

Dessa forma, não busco propor ferramentas do mundo dos jogos como solução para o ensino, mas sim como alternativa e acréscimo às formas de ensino mais tradicionais, das quais destaco o uso do quadro para expor conteúdo e a resolução de exercícios no papel, sem desconsiderar que todas essas tecnologias podem possibilitar ao professor desafiar seu estudante. Assim, o presente estudo pode colaborar com os professores que buscam novas formas de ensinar e que desejam expandir seus planejamentos de aula com o uso de novas tecnologias, entre elas os jogos digitais.

Para a realização desta pesquisa, utilizo como aporte teórico os estudos desenvolvidos por Gérard Vergnaud no que se refere aos campos conceituais[2]. Considero que a utilização de jogos físicos e digitais reconhece a Didática como sendo o ponto central para a investigação no campo da Educação Matemática, como defendia Gérard Vergnaud. O autor também enfatiza que o cerne do

Básica". Sua consolidação ocorre através de ações extensionistas e produções bibliográficas, incluindo artigos em periódicos e o livro "Aprendizagens e Vivências no Ensino de Matemática em Tempos de Pandemia" lançado em 2021. Além disso, o grupo produz conteúdo digital, como vídeos e lives, disponíveis em seu canal do YouTube, site e Instagram. Este projeto conta com a participação de pesquisadores e professores da UFRGS, UFSM, IFFAR e IFRS e também professores da rede pública, estudantes de graduação e mestrandos do PPGEMAT- UFRGS e do PPGEMEF - UFSM.

[2] Para definição de Campo conceitual, ver Capítulo 2 deste trabalho, página 14.

desenvolvimento cognitivo de um estudante é o processo de construir conceitos, o que indica ao professor a importância de propor situações específicas que favoreçam a compreensão da Matemática pelos estudantes.

A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, segundo Rezende Junior e Custódio (2003, p.2), tem “[...] um caráter de pragmatismo no sentido de que pressupõe que a aquisição do conhecimento é moldada por situações problemas e [...] é por meio dessas situações a resolver que um conceito adquire sentido”. Assim, destaco a importância de se propor aos estudantes situações problemas que precisam ser resolvidas, de modo a que eles identifiquem, interpretem, analisem, comparem, verifiquem, apliquem, utilizem, construam e argumentem, ou seja, as situações são as mais desafiadoras e abrangentes possíveis, de modo a que os estudantes percebam o sentido dos conceitos envolvidos.

Frente a isso, busco neste trabalho desenvolver o seguinte objetivo geral de pesquisa: **Identificar como uma proposta pedagógica com ênfase em um jogo de tabuleiro e dois jogos digitais, voltada ao campo conceitual das estruturas aditivas com números inteiros, mobiliza os estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental a desenvolverem esquemas conceituais.**

Os objetivos específicos são: (1) Elaborar jogos que favoreçam a construção de esquemas voltados ao campo conceitual das estruturas aditivas em $\mathbb{Z}$; (2) Identificar os principais aspectos e as transformações (esquemas) que os jogos possibilitam; (3) Identificar se os esquemas foram alcançados pelos estudantes durante a aplicação dos jogos.

Para a realização desta pesquisa produzo e utilizo com os estudantes um jogo de tabuleiro e dois jogos digitais, ambos com temáticas e desafios que envolvem operações de adição e subtração com números inteiros. Construo os jogos e os denomino “Trilha Humana” e “Jogos de Corrida”, inspirada, respectivamente, por trilhas produzidas no grupo de pesquisa MathemaTIC e pelo jogo criado por Aparecido Sousa[3]. Trato todos esses jogos como ferramentas de ensino de matemática e parto do pressuposto de que os mesmos proporcionam aos estudantes condições pedagógicas favoráveis ao raciocínio lógico e à construção do conhecimento.

[3] https://www.geogebra.org/m/uvaxmnct

A pesquisa que proponho no âmbito deste trabalho é de caráter qualitativo, devido a sua natureza subjetiva e experimental, incluindo uma prática de ensino direcionada a uma turma do sétimo ano do Ensino Fundamental II, de uma escola localizada na cidade de Porto Alegre, RS, na qual atuo como professora. A prática e a coleta de dados ocorrem no local onde esses estudantes estudam e meu envolvimento nessas etapas, bem como na fase de análise dos dados, é constante. A organização da sequência de atividades, com o detalhamento da proposta e dos recursos utilizados para a produção dos jogos, está descrita no capítulo da metodologia.

Este estudo está organizado em 4 capítulos. No primeiro consta a introdução, composta pela delimitação do tema da pesquisa, justificativa, pergunta central do estudo e objetivos.

No segundo capítulo, os aportes teóricos são dispostos em cinco seções: a primeira seção apresenta uma breve explanação sobre a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud; a segunda seção trata especificamente acerca do campo conceitual das estruturas aditivas; a terceira seção discorre sobre a dimensão pedagógica do uso de jogos; a quarta seção aborda a respeito das possibilidades pedagógicas dos jogos digitais, considerando o grande avanço da tecnologia no mundo de hoje, e a última seção aborda o uso dos jogos com o conjunto dos números inteiros.

O terceiro capítulo expõe os processos metodológicos desta pesquisa, contendo seções e subseções com detalhamento acerca da metodologia utilizada, do problema de pesquisa e dos objetivos, do delineamento da pesquisa, do contexto e participantes, da proposta didática e dos procedimentos para a análise de dados.

O quarto capítulo apresenta a análise de dados obtidos na pesquisa, com ênfase na eficácia das práticas dos jogos em sala de aula e no desenvolvimento dos esquemas, relacionados com o Campo Conceitual em $\mathbb{Z}$, dos estudantes.

O quinto capítulo contém as considerações finais, nas quais abordo constatações e resultados da pesquisa e ressalto como os jogos influenciam na aprendizagem e desenvolvimento dos estudantes, durante o estudo das operações aditivas com números inteiros.

2 APORTES TEÓRICOS

Nesta etapa do trabalho desenvolvo um embasamento teórico com a finalidade de obter subsídios que forneçam as diretrizes para a elaboração e proposição de uma prática de ensino, bem como para a realização da coleta de dados. Também conto com essa escolha teórica, no sentido de delimitar um caminho para a análise desses dados e para o alcance de respostas ao problema e aos objetivos explicitados na introdução.

Proponho a utilização da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud como fundamentação teórica que me auxilie a destacar pontos e conceitos que sirvam como faróis a me guiarem nos processos de elaboração de uma proposta pedagógica e de análise dos possíveis esquemas desenvolvidos pelos estudantes participantes da pesquisa. Da mesma forma, abrem-se outros dois campos teóricos como suporte para esta pesquisa: as possibilidades do uso de jogos para o ensino de matemática e o estudo dos números inteiros, em especial da operação de adição, em seus aspectos formal e aplicado.

2.1 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE GÉRARD VERGNAUD

A Teoria dos Campos Conceituais abrange aspectos do desenvolvimento da aprendizagem e foi criada pelo psicólogo francês Gérard Vergnaud. Apresenta como aspecto principal a psicologia mediante a qual se faz uma análise da construção do conhecimento matemático e das estratégias usadas para isso.

Vergnaud desenvolve sua teoria baseada nos conhecimentos e pesquisas de Jean Piaget, principalmente nas suas noções de esquemas e de invariantes operatórios, e nos estudos de Lev Vygotsky, no que relaciona à interatividade social, linguagem e simbolização no entendimento do campo conceitual. No início, a tese de Vergnaud surgiu para explicar o processo de conceitualização das estruturas aditivas, das multiplicativas, das relações número espaço e da álgebra, contudo sua aplicabilidade não se restringe apenas à área de Matemática (Vergnaud,1993).

Tendo como base a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996) “[...] um conceito não pode ser reduzido à sua definição se estamos interessados na sua aprendizagem e no seu ensino” (p. 156). Conforme esse autor, a construção do conhecimento acontece com o transcorrer do tempo, sendo um processo evolutivo e gradual entre experiência, maturidade e aprendizagem.

De acordo com Vergnaud, campo conceitual significa “[…] um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição” (Vergnaud, 1982 *apud* Moreira, 2002, p. 16).

Moreira (2002) destaca sobre a teoria de Vergnaud que um determinado campo conceitual envolve uma variedade de situações, nas quais as aprendizagens dos estudantes vão sendo moldadas, de modo a, progressivamente, darem sentido aos conceitos e procedimentos ensinados. “Segundo Vergnaud, muitas de nossas concepções vêm das primeiras situações que fomos capazes de dominar ou de nossa experiência tentando modificá-las” (Moreira, 2002, p.11).

Ainda acrescento de Vergnaud (1996, p. 167) que o conceito de situação está relacionado com tarefas, ou ainda, que “[...] qualquer situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas”, das quais é relevante saber suas naturezas e suas dificuldades.

A Teoria dos Campos Conceituais coloca a conceitualização como sendo o âmago do desenvolvimento cognitivo (Moreira, 2002). Assim,” [...] deve-se dar toda atenção aos aspectos conceituais dos esquemas e à análise conceitual das situações para as quais os estudantes desenvolvem seus esquemas, na escola ou fora dela” (Moreira, 2002, p. 8).

Segundo Beck (2019), Vergnaud denomina esquema a forma como uma pessoa organiza a resolução de uma determinada situação. São os esquemas que possibilitam aos estudantes terem ou não condições de resolverem certas situações. “Para que haja um esquema, devem-se possuir metas e antecipações e também deve ser fornecido ao sujeito um caminho para descobrir a finalidade de sua atividade ou até mesmo a extrapolação desse fim, desdobrando-se em outros esquemas” (Beck, 2019, p. 24).

Por conta das origens conceituais de Vergnaud, sua teoria também atribui grande importância a aspectos de interação social, linguagem e uso de símbolos durante a apropriação de um conceito pelo sujeito. O campo conceitual envolve múltiplas experiências, relações, conteúdos e operações mentais que estão conectadas entre si, de modo que ao pesquisador (ao professor) interessa criar oportunidades para que os sujeitos (os estudantes) se expressem e desenvolvam seus esquemas (Moreira, 2002).

> Um esquema é um universal eficiente para enfrentar uma gama de situações, sendo que, podem-se gerar diferentes sequências de ação, de coleta de informações e de controle, dependendo das peculiaridades de cada situação, ou seja, para Vergnaud, não é o comportamento frente a situações semelhantes que é invariante e universal, mas, a organização desse comportamento (Rezende Junior; Custódio, 2003, p. 2).

Resumindo, um esquema é capaz de oferecer elementos para se compreender o alcance cognitivo do estudante, pois ressalta a análise conceitual operada durante a resolução de um problema e expressa a organização do comportamento do estudante diante de situações análogas.

De acordo com Carvalho Jr. e Aguiar Jr. (2008, p. 216) “[...] é nos esquemas que devemos pesquisar os conhecimentos-em-ação do sujeito (os conceitos-em-ação e as teorias-em-ação), uma vez que é aí que podemos encontrar os elementos que fazem com que a sua ação seja operatória”. Vergnaud (1996) distingue dois tipos de invariantes operatórios: os teoremas em ação e os conceitos em ação, estes orientam os estudantes perante as situações-problema.

Os teoremas em ação direcionam-se em volta das situações específicas que guiam a atividade, considerada pelo estudante como verdadeira, desta maneira é possível dizer que é válida somente para um determinado conjunto de situações e que não devem ser generalizadas. Na disciplina de Matemática, pode-se relacionar um teorema em ação como sendo o conjunto das operações ou procedimentos usados em certa situação. De modo geral:

> Numa situação dada, o sujeito dispõe de muitos tipos de conhecimento para identificar os objetos e suas relações e a partir daí estabelecer objetivos e regras de conduta pertinentes. Os conhecimentos são conhecimentos em ato, designados aqui por “invariantes operatórios” para indicar que estes conhecimentos não são necessariamente explícitos, nem mesmo conscientes [...]. O conceito de invariante operatório permite falar nos mesmos termos às vezes da percepção, quer dizer da identificação dos objetos materiais e suas relações, da interpretação das informações perceptivas nas situações onde há espaço para a incerteza, e os pensamentos que portam os objetos altamente elaborados da cultura (Vergnaud, 1996, p. 10).

Conforme citado anteriormente os invariantes operatórios “não são necessariamente explícitos”, nem “de um tipo lógico único” (Vergnaud, 1993, p. 8), de modo que se torna fundamental, numa pesquisa dentro desta linha teórica, que se analise as condições de ocorrência de cada invariante. Da mesma forma, Vergnaud (1993, p. 8) afirma que “[...] um conceito-em-ação não é, absolutamente, um conceito, nem um teorema-em-ação é um teorema”. Segundo esse autor, os conceitos e os teoremas, conforme tratados no campo das ciências, são expressões precisas de alguma verdade, mas não expressam a “parte oculta” (Vergnaud, 1993, p. 8) do processo de conceitualização. Essa parte constitui os invariantes operatórios, ou seja, os conhecimentos contidos nos esquemas, e aquilo que se mostra como verdade final não é o que importa para o autor.

Segundo o Wikipedia, “**Conceito** [...] é aquilo que a mente concebe ou entende: uma ideia ou noção, representação geral e abstrata de uma realidade. Pode ser também definido como uma unidade semântica, um símbolo mental ou uma ‘unidade de conhecimento’”[4].Também segundo o Wikipedia, consta que: “Na matemática, um **Teorema** é uma afirmação que pode ser provada como verdadeira, por meio de outras afirmações já demonstradas” [5]. Na perspectiva de Vergnaud, a compreensão desses dois termos supera as explicações acima, conduzindo a um aprofundamento na direção da “parte oculta”, ou seja, daquilo que constitui as condições de ocorrência de um invariante durante o processo de conceitualização.

Isso concorre para a necessidade de se propor, no contexto de uma pesquisa, múltiplas situações de experiência, nas quais o conceito em estudo esteja presente. A análise estará focada, portanto, nas propriedades desse conceito e em suas pertinências nas situações propostas, bem como, nos esquemas utilizados pelos sujeitos da pesquisa nessas situações.

Ainda é preciso destacar de Vergnaud (1993) que “[...] a ação operatória não é a totalidade da conceitualização do real” (p. 8), outros aspectos do real devem ser levados em conta. Além disso, todo campo conceitual abrange uma multiplicidade de símbolos, sinais e enunciados, ou seja, contempla o “[...] emprego de significantes explícitos [...] indispensável à conceitualização” (p. 8). Disso resulta, conforme o autor, que um conceito compreende três conjuntos (S, I, Y), descritos abaixo:

---

[4] https://pt.wikipedia.org/wiki/Conceito
[5] https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema

> S conjunto das situações que dão sentido ao conceito (referência).
> I conjunto dos invariantes em que se baseia a operacionalidade dos esquemas (significado).
> Y conjunto das formas de linguagem (ou não) que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (significante) (Vergnaud, 1993, p. 10).

Assim, com relação à 'referência', a construção do conhecimento só é efetiva quando exposta por meio de diferentes contextos, fornecendo base para os estudantes fazerem correspondências entre contextos e conceitos. Com essa ideia, é aceitável que um conceito seja válido a partir da investigação de várias situações (Vergnaud, 1996).

O 'significado', por sua vez, traduz a complexidade de um esquema, mostrando que os conceitos em ação presentes no mesmo, possibilitam ao indivíduo escolher as informações importantes para produzir soluções conforme seus propósitos. Os conceitos em ação possibilitam, portanto, que sejam definidas as propriedades e relações que o auxiliarão a resolver um problema, ou seja, o conceito em ação também pode ser visto como uma ação conexa no contexto de um problema (Vergnaud,1996). Relacionando isso com situações de aprendizagem, pode-se dizer que o 'significado' envolve os conhecimentos que os estudantes utilizam para lidar com o conjunto de situações, o conjunto das referências.

Do entendimento da teoria de Vergnaud destaco, ainda, que um problema a ser resolvido abre espaço ao reconhecimento e apropriação de múltiplos conceitos matemáticos implicados na situação em foco, mas também contém outros aspectos, como o enunciado da própria situação, com linguagens, símbolos e sinais específicos, assim como a própria vinculação dessa representação ao conceito matemático. Esse campo simbólico (explícito ou não) compreende o 'significante' e abrange diferentes maneiras de representação de um conceito.

Retomando o entendimento de esquema como forma de operar durante a resolução de um determinado problema, destaco que são eles que, através da organização do pensamento, apoiam as competências matemáticas. Isso ocorre, porque os esquemas são construções dinâmicas, não mecanizadas, que possibilitam aos estudantes um pensamento ativo, relacional e consciente dos caminhos que percorrem para resolver um determinado problema. Neste contexto, a escola que propõe uma linha teórica nessa direção, passa a ser vista como um lugar de produção do conhecimento matemático e não apenas de reprodução.

Moreira (2002) reforça que a Teoria dos Campos Conceituais assegura que o ponto basilar da cognição é o processo de conceitualização do real, atividade mental dentro do indivíduo que não pode ser restringida nem a operações lógicas gerais, muito menos às operações puramente linguísticas. E isso provoca, no âmbito desta pesquisa, a investigação da parte oculta do processo de conceitualização.

Dessa forma, é necessário oportunizar o contato do estudante com várias situações, de maneira a contemplar maiores condições de desenvolvimento cognitivo. Vergnaud (1996) enfatiza que os conhecimentos dos estudantes são moldados pelas situações que, gradativamente, vão compreendendo. Assim, são as situações que dão sentido aos conceitos, tornando-se o ponto de entrada para um dado Campo Conceitual.

Segundo Moreira (2002, p. 7), "O conceito de esquema proporciona o indispensável vínculo entre a conduta e a representação: a relação entre situações e esquemas é a fonte primária da representação e, portanto, da conceitualização". Assim, na presença de uma nova situação, o indivíduo movimenta os seus esquemas para desenvolver estratégias de resolução de problema. Isso refere-se a uma complexa atividade de construções e reconstruções dos mecanismos cognitivos e são justamente os esquemas que possibilitam essa atividade. Como destaca Fioreze (2010, p. 39): "[..] quando se afirma que uma determinada situação tem sentido para um sujeito, está se considerando que esse sentido evoca um subconjunto de esquemas, restringindo ao conjunto dos esquemas possíveis".

Cabe ainda destacar que em todo processo de conceitualização tem grande relevância o sentido que se dá às dificuldades que surgem, ou seja, numa prática pedagógica, por exemplo, o professor desenvolve o trabalho baseado nos obstáculos encontrados por seus estudantes. Nesse sentido, ressalto uma afirmação de Fioreze (2010, p. 29):

> A teoria dos campos conceituais apoia-se na ideia de que um bom desempenho didático baseia-se no conhecimento das dificuldades envolvidas nas tarefas cognitivas, nos obstáculos enfrentados, nos repertórios de procedimentos que o estudante possui e nas possibilidades de representação.

Isso resulta numa constante adaptação do professor às mudanças que vão ocorrendo durante o amadurecimento dos estudantes, sendo esse expresso pela construção de esquemas. Consequentemente, a ação desse professor será direcionada à escolha de situações adequadas à superação de obstáculos e à conexão de conceitos com suas representações simbólicas.

2.2 CAMPO CONCEITUAL DAS ESTRUTURAS ADITIVAS

A sequência de atividades proposta para fins da pesquisa, apresentada no terceiro capítulo, se enquadra no campo conceitual das estruturas aditivas. Para o estudo deste campo é necessário que se explore o conjunto das situações que requerem adições, subtrações e / ou combinações dessas operações (Vergnaud, 1993). Esse campo também agrega o conjunto de conceitos, teoremas, propriedades, relações e resultados acerca das situações que envolvem tais operações (Vergnaud, 1996). Dentro dessa amplitude, pode-se vislumbrar muitas das atividades matemáticas utilizadas normalmente nas escolas. Da mesma forma, entendo que os jogos produzidos para esta pesquisa, envolvendo operações de adição e subtração em $\mathbb{Z}$ adequadas para estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental, correspondem a tal campo, devido às suas características e possibilidades conceituais e operatórias.

Importante destacar que esse campo conceitual, o das operações com números inteiros, costuma ser de difícil compreensão pelos estudantes, devido ao caráter abstrato que evidencia. Quando se propõe adições com números negativos, geralmente busca-se relações com perdas e ganhos ou indica-se um ponto de referência para determinar sentidos positivos e negativos ou temperaturas acima e abaixo de zero e, muitas vezes, apenas se dá ênfase à regra de sinais. Isso ocorre principalmente, porque não é possível representar concretamente o número -2, por exemplo, da mesma forma que posso representar o número 2.

Entendendo a construção do conhecimento matemático numa perspectiva histórica, é possível afirmar que a busca de modelos concretos para um número sempre esteve presente, tanto no que se refere a números positivos, frações, números irracionais e, no caso dos negativos, a falta de modelos constituiu realmente um grande obstáculo para a aceitação de que eles representavam números. Assim, durante muito tempo, o símbolo (–) ao lado de um número positivo funcionava apenas como “artifícios para o cálculo”. No entanto, a eficácia destes falsos números nas operações não podia ser ignorada e esse foi o começo da legitimação deste campo numérico. Em um passo seguinte esses números também se mostram muito bem comportados formalmente, ou seja, possuem propriedades, regras, operações, aplicações, a que costumam ser submetidos os novos números. Eles acabam por fazer parte da Reta Numérica (Gonzalez, 1990).

Ainda que essa história tenha terminado bem, não se pode ignorar que a dificuldade que os homens, em geral, tiveram de aceitar e de se adaptar aos números negativos pode ser experimentada também nos dias de hoje, por estudantes que aprendem isso pela primeira vez. De modo que um cuidado maior deve ser posto na passagem das operações com números positivos para operações com números negativos. Em particular, no âmbito da pesquisa que proponho neste trabalho, estarei tratando das contribuições da TCC acerca do campo conceitual das estruturas aditivas, tendo em vista a realização de adições e subtrações em $\mathbb{Z}$, através de situações de jogo, nas quais a proposta ou desafio explora situações práticas, presentes na vida das pessoas, cuja solução necessita de um campo teórico de natureza abstrata, simbólica e relacional.

Conforme destaca Rocha (2019), as situações que fazem parte da vida das crianças, e aqui o autor faz referência a jogos, compras, ganhos e perdas, entre outras, geralmente exigem resoluções de adições e subtrações. E, justamente a conexão entre o contexto social dos estudantes e os problemas aditivos é que atribuirá sentido às situações vivenciadas. Além disso, o autor ressalta a importância dos enunciados para a compreensão dos conceitos envolvidos no problema e isso acarreta uma análise de aspectos que vão além do cálculo numérico necessário na resolução do problema.

O campo conceitual das estruturas aditivas refere-se a um agrupamento de acontecimentos que envolvem cálculos apropriados às adições e/ou às subtrações, que incluem uma variedade de conceitos, por exemplo, numeral, valor absoluto, oposto, antecessor e sucessor. Também nesse campo é relevante identificar variáveis e procedimentos que aparecem nas situações problemas, tais como, ordenar, agregar, separar, unir, transfazer, adicionar, conferir, tudo isso para a identificação e execução das operações com suas devidas representações. Assim, o campo conceitual que abrange a adição e subtração envolve operações e variáveis que são tratadas por Vergnaud no campo conceitual das estruturas aditivas (Rocha, 2019). Como destaca o autor:

> No tocante ao campo aditivo, por exemplo, é importante que o professor trabalhe em sala aula, as situações de adição e subtração, como operações complementares, operações "irmãs", e não de forma isolada, desconexas, pois adição e subtração fazem parte do mesmo campo conceitual ao qual Vergnaud denominou de estruturas aditivas (Rocha, 2019, p. 55).

Desta forma, o autor reforça que o campo conceitual das estruturas aditivas caracteriza um conjunto de situações, nas quais o tratamento e as soluções necessitem de adições e/ou subtrações e/ou a conciliação destas operações de forma natural. Empregando esse mesmo entendimento, temos que as estruturas aditivas são aquelas nas quais as conexões compreendidas estão elaboradas estritamente entre adição e subtração.

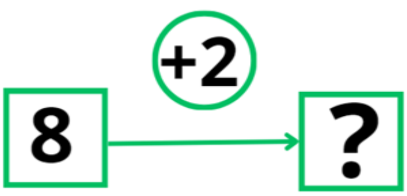
O campo aditivo abrange, entre outros pontos, a ideia de somar, subtrair, acumular, reunir e desunir objetos, conceitos de medida, variação de tempo e associações de diversos assuntos. Desse modo, ao abordar o campo aditivo com os estudantes, é necessário considerar a relação existente entre conceitos envolvidos nas questões propostas e não se limitar somente à utilização do cálculo numérico.

Apesar da adição e subtração serem operações diferentes, de acordo com Vergnaud (2014), ambas se referem à relação entre parte e todo, e isso constitui um invariante conceitual que coloca essas operações na mesma estrutura de raciocínio. Segundo o autor, nessa relação conhecem-se as partes e pretende-se conhecer o todo, ou, conhecendo o todo e uma das partes, pretende-se descobrir a outra.

No campo aditivo, por exemplo, podem ser propostas as questões abaixo, inspiradas em Vergnaud.

1. Isabella tinha 8 ursos de pelúcia e ganhou 2. Com quantos ursos ela ficou?

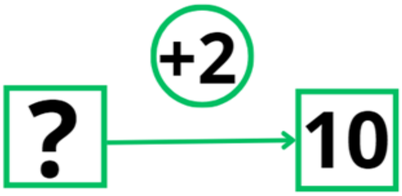
Figura 1: Exemplo de transformação direta no campo aditivo.



Fonte: Elaborada pela autora

2. Isabella ganhou 2 ursos, ficando com um total de 10. Quantos ursos ela possuía antes?

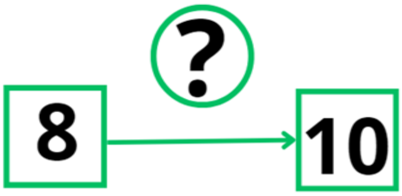
Figura 2: Exemplo de transformação indireta no campo aditivo.



Fonte: Elaborada pela autora

3. Isabella tinha 8 ursos; após ganhar alguns presentes ficou com 10. Quantos ursos ela ganhou?

Figura 3: Exemplo de comparação entre as medidas.



Fonte: Elaborada pela autora

Esses problemas induzem a uma escolha da operação a ser usada (adição ou subtração), pois a incógnita vai mudando de posição. Também envolvem diferentes tipos de raciocínio, ainda que se utilize a mesma operação; o segundo problema, por exemplo, faz uma transformação indireta, enquanto o terceiro utiliza um raciocínio comparativo, ainda que ambos invoquem a ideia de diferença. Interessante observar que esses dois problemas exigem uma operação oposta à que se espera do primeiro problema e tudo isso, sem dúvida, vai estar presente nos esquemas produzidos por estudantes que estejam aprendendo esse conteúdo.

Sem dúvida, desafios dessa natureza, são extremamente válidos para a apropriação desse campo conceitual e ainda se pode acrescentar outras possibilidades na formulação de problemas, levando em consideração o que Vergnaud (2014) estabelece acerca das estruturas aditivas, do qual destaco seis categorias de análise, com seus respectivos esquemas:

> Primeira categoria: duas medidas se compõem para resultar em uma terceira medida;
> Segunda categoria: uma transformação opera sobre uma medida para resultar em outra medida;
> Terceira categoria: uma relação liga duas medidas;
> Quarta categoria: duas transformações se compõem para resultar em uma transformação;
> Quinta categoria: uma transformação opera sobre um estado relativo (uma relação) para resultar em um estado relativo;
> Sexta categoria: dois estados relativos (relações) se compõem para resultar em um estado relativo (Vergnaud, 2014, p. 200).

Algumas dessas categorias podem ser relacionadas aos exemplos de questões citadas anteriormente. A primeira questão aciona a composição de duas medidas para que se chegue a um terceiro valor, que expressa a solução, isso está conforme a primeira categoria destacada.

Para Vergnaud (2014, p. 218), na resolução de alguns problemas, o caminho pode consistir em: “Conhecendo-se uma das transformações elementares e a composta, encontrar a outra transformação elementar”. Com isso, as dificuldades na resolução desse tipo de problema, por envolverem operações inversas como é o caso da adição em $\mathbb{Z}$, podem ser maiores que problemas com transformação direta. No entanto, esses problemas não são difíceis em sua essência, porque é possível relacionar as transformações envolvidas com as operações efetivas e com as grandezas relativas e seus valores absolutos.

Independente da complexidade do campo conceitual em estudo, o estudante sempre pode acionar seus esquemas para dar um passo à frente. No entanto, são os desafios que provocam esse movimento, por isso é preciso que o docente oportunize situações que entrem em conflito com os conhecimentos já conquistados pelos estudantes. Dessa maneira, eles terão a oportunidade de mobilizar conceitos-em-ação e teoremas-em-ação na construção de novos esquemas, aumentando seu conjunto de recursos para a resolução de problemas.

2.3 JOGO E SUA DIMENSÃO PEDAGÓGICA

Jogar e competir sempre foram importantes atividades de recreação para os seres humanos. Existem muitos registros de sinais de regras de jogos em pinturas rupestres, levando-nos aos primórdios da história da humanidade. Na Grécia antiga, lugar de origem dos jogos olímpicos, a atividade tinha uma forte relevância para os jogadores, já que em função da colocação, era possível tornar-se um homem reconhecido, estimado e eternizado na lembrança dos torcedores (Huizinga, 2000).

Além de fazer referência às formas como o jogo sempre esteve presente na cultura humana, Huizinga (2000) ressalta nesta obra vários aspectos da natureza e das características do jogo, mostrando ao homem moderno o quanto podemos saber de nós mesmos ao entendermos nosso eterno interesse pelo lúdico, pela brincadeira, e pelos desafios do jogo. Destaco desse autor que: “A alegria que está indissoluvelmente ligada ao jogo pode transformar-se, não só em tensão, mas também em arrebatamento” (p. 24). Como complemento fundamental ainda destaca: “A capacidade criadora, tanto nos povos quanto nas crianças ou em qualquer indivíduo criador, deriva desse estado de arrebatamento.” (p. 20).

O jogo pode ser definido como um conjunto de regras, no qual um jogador pode ter diferentes resultados. Segundo Santaella e Feitoza (2009, p. 12), jogo é “um sistema formal baseado em regras, com um resultado variável e quantificável, no qual diferentes resultados são atribuídos por diferentes valores”. Com isso, o jogador é impulsionado a tentar influenciar, modificar os resultados, e isso faz aumentar cada vez mais sua conexão com o jogo.

O jogo permite que uma pessoa simule situações e, a partir destas, com base em regras predeterminadas, possa conferir o nível de destreza ou sorte de cada jogador participante. Além disso, Cordeiro e Silva (2017) dizem que:

> Na prática em sala de aula, geralmente, o trabalho com jogos envolve um desejo e interesse natural do estudante, enquanto ser de movimentação nata, ou seja, além da ação de jogar, o desejo e o desafio de competir servem como motivação para o estudante-jogador aprender a conhecer seus limites e procurar superá-los, para, desta forma, alcançar a vitória (Cordeiro; Silva, 2017, p. 32).

Diante do exposto, o jogo em sala de aula desperta o interesse do estudante e o desejo de competir, atitudes que podem ser favoráveis num processo de aprendizagem, ou seja, o jogo auxilia o estudante na compreensão dos seus próprios limites e na busca de formas para superá-los, conduzindo, assim, a conquistas no jogo e, também, em outras práticas desafiadoras.

Melo (2009) ressalta a importância do jogo no processo de aprendizagem dos estudantes quando diz que:

> Os jogos podem ser para os educandos um recurso fundamental para que passem a entender e a utilizar regras que serão empregadas no processo de ensino-aprendizagem, de matemática, na apropriação dos diferentes conteúdos, superando a utilização das cansativas listas de exercício de fixação, cujo objetivo era a memorização de fórmulas e dados (Melo, 2009, p. 5).

Ainda de acordo com Melo (2009), o jogo deve ser usado como uma estratégia facilitadora de aprendizagem, visto que envolve o lúdico, o que torna as atividades mais prazerosas e significativas. Segundo Melo (2009), o uso dos jogos em sala de aula desenvolve outros aspectos além de estratégias. Ao utilizar o jogo, os estudantes exercitam a socialização, desenvolvem o trabalho em equipe, ou seja, trabalham questões emocionais e sociais que serão primordiais para sua vida em sociedade.

Alves (2015) traz uma reflexão pertinente sobre a escolha dos jogos como ferramenta educacional. O autor nos diz que é o desafio que mobiliza o jogo e impulsiona o jogador a alcançar os objetivos. Um jogo não precisa ter muitos objetivos, mas ele precisa ser suficientemente interessante e provocador para levar o jogador a cumprir os desafios, seja grande ou pequeno.

Sem dúvida, uma atitude desse tipo por parte dos estudantes seria de grande valor. Quando se pensa nas práticas repetitivas propostas na escola, percebe-se o quanto a aprendizagem através de jogos pode colaborar para a constituição de um estudante mais ativo, tanto em relação ao seu desempenho nas disciplinas escolares, quanto às condições de ser sociável, seguindo regras e estando motivado a superar desafios.

O trabalho com jogos em sala de aula concorre, portanto, para motivar e aumentar o entusiasmo e a criatividade dos estudantes. O estudante já traz com ele uma bagagem cultural rica em conhecimentos matemáticos e experiências com jogos e, mesmo que isso não tenha ocorrido em contextos formais de educação, esses conhecimentos e experiências podem ser o ponto de partida para colocar em prática o ensino de matemática, com a devida ênfase no caráter formal e abstrato dos conceitos envolvidos.

Os jogos na sala de aula também auxiliam o professor a desenvolver uma cumplicidade com os estudantes, tornando a aprendizagem matemática mais instigante e significativa. Os estudantes, em geral, enquanto jogam, respondem ao desafio lançado e buscam com mais dinamismo e dedicação resolverem os problemas que surgem assim à matemática que pode estar envolvida adquire um significado e torna-se contextualizada. Segundo Lara (1998, p.17), as atividades lúdicas na sala de aula além de tornarem a aprendizagem mais agradável, também podem ser “[...] consideradas como uma estratégia que estimula o raciocínio, levando o estudante a enfrentar situações conflitantes relacionadas com o seu cotidiano”.

Assim, retomo o que diz Huizinga (2000) acerca da alegria – misto de tensão e arrebatamento, que se experimenta durante o jogo e que pode ativar na pessoa sua capacidade criativa – para reforçar meu argumento de que o jogo tem um grande potencial pedagógico, ainda que sua natureza e características tenham que ser respeitadas quando é proposto em sala de aula.

2.4 JOGOS DIGITAIS

As possibilidades de aprendizagem que os jogos digitais proporcionam para área do entretenimento e para área da educação motivaram pesquisas em um novo campo de conhecimento, chamado de Ludologia. Esse campo “[...] se caracteriza por entender o jogo por sua estrutura sistêmica, como regras, ações e lógicas” (Pinheiro, 2007, p. 123).

A partir do estudo da Ludologia, ou seja, do estudo da sistemática dos jogos, foi possível desvincular o atributo de que estes eram voltados somente para o público infantil e, assim, otimizar o seu papel na sociedade. Jogar tornou-se uma das principais atividades de entretenimento e, no transcorrer da história, a tendência é disponibilizar tecnologicamente os jogos, agregando-os às modernas plataformas disponíveis (Pinheiro, 2007). Isso significa a recriação, modificação e adaptação de jogos tradicionais, através de plataformas eletrônicas, o que possibilita um uso mais contemporâneo dos jogos nos processos de ensinar e aprender. Além disso, considerando que os jogos estratégicos já são reconhecidos como de grande valor para a aprendizagem matemática, tornando as aulas mais prazerosas e significativas, os jogos digitais, em especial, também se inserem nesse mesmo contexto.

Moran, Masetto e Behrens (2000) ressaltam que a realidade escolar que não inserir as novas tecnologias em seu contexto precisará lidar com a falta de interesse dos jovens, pois, num mundo tão conectado, métodos de ensino que não se atualizam podem, inclusive, fomentar a indiferença e a falta de comprometimento dos estudantes.

Silva e Scheffer (2019) trazem uma reflexão sobre o uso dos jogos digitais no ambiente escolar, ao alertarem sobre o fato de que “[...] as tecnologias digitais estejam cada vez mais presentes nas práticas de sala de aula; nesse contexto, entende-se que os jogos digitais podem ser elementos importantes para enriquecê-las, oferecendo desafios para o ato de aprender” (Silva; Scheffer, 2019, p.159).

O jogo digital tem função essencial na aprendizagem escolar, especialmente quando se ensina matemática, uma disciplina de natureza lógica e demonstrativa que costuma gerar dificuldades. Segundo Borin (2015) o jogo digital pode ser uma alternativa de ensino que contribua para desenvolver habilidades, potencialidades, reflexão e o raciocínio dos estudantes. O autor ainda destaca que a utilização de jogos digitais nas aulas de Matemática é uma possibilidade de atenuar as dificuldades, criando caminhos para construir conceitos e possibilitar ao estudante uma maior interação, principalmente porque, em situações de jogo, é impossível aos estudantes terem uma atitude passiva. Assim, naturalmente, se gera um ambiente favorável para o estudante melhorar seu interesse e seu desempenho, o que repercute na própria aprendizagem.

Quando se pensa nas potencialidades dos jogos digitais, vislumbram-se ambientes interativos, jogadores atentos e desafios que demandam níveis crescentes de raciocínio, agilidade e habilidades. Quando se pensa em jogos digitais no ensino, além desses aspectos, os jogos:

> [...] devem possuir objetivos pedagógicos e sua utilização deve estar inserida em um contexto e em uma situação de ensino baseados em uma metodologia que oriente o processo, através da interação, da motivação e da descoberta, facilitando a aprendizagem de um conteúdo (Prieto et al., 2005, apud Savi; Ulbricht, 2008, p. 3).

Entretanto, o potencial dos jogos digitais como ferramenta que auxilia no ensino vai além do aspecto motivacional, pois os jogos ajudam os estudantes a desenvolverem várias habilidades e estratégias, como, por exemplo: a capacidade de experimentar, explorando alternativas de ação e correndo riscos; a oportunidade de assumir novas identidades, através da imersão em múltiplos universos; a prática de socialização, em aspectos tanto de cooperação, como competição; a expansão da coordenação motora, devido a necessidade de movimentos rápidos e eficientes (Savi; Ulbricht, 2008).

Nas palavras de Starepravo (2009) os jogos digitais podem trazer uma variedade de benefícios ao serem utilizados como recurso didático nas práticas de ensino, inclusive nas aulas de Matemática, onde os estudantes têm a oportunidade de partilhar e trocar informações e experiências, expor dificuldades referentes aos jogos e auxiliar uns aos outros, resultando em um cenário de aprendizagem. Para Starepravo (2009, p. 20), é preciso saber utilizar os jogos digitais no ensino da matemática, pois:

> [...] se conseguirmos compreender o papel que os jogos digitais exercem na aprendizagem de Matemática, poderemos usá-los como instrumentos importantes, tornando-os parte integrante de nossas aulas de Matemática. Mas devemos estar atentos para que eles realmente constituam desafios (Starepravo, 2009, p. 20).

Silva e Scheffer (2019) confirmam a importância dos jogos digitais no ensino de matemática. Os autores enfatizam, por exemplo, que essas tecnologias enriquecem “[...] os processos de ensinar e de aprender, pois uma demonstração que era estática, escrita no papel, passou a ganhar vida e movimento por intermédio de um software dinâmico [...], tornando a aprendizagem mais expressiva, atraente e investigativa” (Silva; Scheffer, 2019, p. 152).

Para esse fim, devem-se sugerir jogos digitais nos quais os estudantes utilizem formas de jogar próprias, sem que as estratégias sejam ensinadas anteriormente. Jogos digitais, empregados com fins pedagógicos, de forma planejada, possibilitam que os estudantes consigam usar mais de uma competência ao mesmo tempo, alcançando um aprendizado fundamentado no uso concreto de saberes (Starepravo, 2009).

Importante destacar que, no âmbito deste trabalho, busco utilizar jogos digitais, tendo em vista as contribuições dos autores abordados, e esclareço que os jogos produzidos para fins da pesquisa necessitam de um *software* para serem jogados, não necessariamente de internet, ainda que o mundo tecnológico em que nossos estudantes estão inseridos priorize os jogos *online*.

Com relação ao uso dos jogos *online*, Haguenauer *et al.* (2007) salientam que os mesmos ampliam o campo de informações que são apresentados aos estudantes que desempenham o papel de jogador, possibilitando cada vez mais ajudá-los na compreensão de novos conceitos. Segundo os autores:

> O computador e a internet ampliam a representação da realidade, abrindo possibilidades para um novo enfoque educacional baseado em jogos, permitindo a exploração de diversos recursos multimídia. Sua utilização modifica a dinâmica do ensino, as estratégias e o comportamento de estudantes e professores. A possibilidade de simulação que os jogos de computador e internet oferecem, acentuam três características básicas dos jogos em geral: a fantasia, a curiosidade, e o desafio (Haguenauer *et al.*, 2007, p. 6).

Sem dúvida, a utilização de jogos *online* no ensino de matemática é muito atraente e promissora, mas reforço que minha escolha não foi nesse sentido e acrescento que os jogos foram criados no *software* GeoGebra, devido às inúmeras ferramentas que contém, com riqueza de símbolos e figuras, úteis na produção de aulas expositivas e de jogos digitais. Esses podem “rodar” na internet ou ser feito o *download* no computador.

De modo mais amplo, entendo que as ferramentas contidas nesse *software* podem influenciar o pensamento lógico matemático dos estudantes, contribuindo no processo de resolução das situações problemas, através da mobilização de conceitos e teoremas matemáticos, em particular relativos aos números inteiros, conforme objetivo desta pesquisa.

Segundo Nuernberg (2016), a utilização do computador associado ao *software* educacional GeoGebra permite incrementar as aulas da disciplina de Matemática, uma vez que oportuniza aulas mais dinâmicas, incentivando os estudantes a realizarem a construção do conhecimento por meio da exploração de novas estratégias. De acordo com o autor:

> O software GeoGebra traz muitas vantagens em relação ao trabalho no papel ou no quadro negro, pois com ele é possível movimentar as figuras em diversas direções, ampliar, reduzir, comparar e voltar ao aspecto inicial proporcionando assim uma melhor assimilação permitindo a análise, compreensão e aprofundamento dos conceitos geométricos por parte dos estudantes (Nuernberg, 2016, p. 20).

O uso de recursos digitais e, em particular, do *software* GeoGebra na área educacional apresenta inúmeras análises, compatíveis com o presente estudo. A seguir apresento contribuições teóricas que resultam de uma busca de trabalhos, no Google acadêmico, com as palavras-chaves “Jogos no GeoGebra”, sendo esses trabalhos submetidos a uma seleção, cujo critério é a relevância desses jogos para o ensino e para a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Pinheiro (2017) realizou um estudo, tendo por objetivo a adaptação e a criação de jogos eletrônicos por parte do professor de Matemática, utilizando o GeoGebra para obter maior participação e protagonismo dos estudantes no processo de aprendizagem. Os conteúdos trabalhados foram Plano Cartesiano, Operações com Números Inteiros, Gráfico de Função Quadrática e Sólido Geométrico. Após uma pesquisa para verificar o conhecimento prévio dos estudantes, foi realizada a aplicação dos jogos. Os jogos utilizados neste estudo foram os seguintes: O Vira Carta; O jogo Pega o Bicho (este jogo é uma adaptação do conhecido jogo “Batalha Naval”), jogo da Memória com sólidos geométricos e o jogo Mergulho nos Inteiros. A partir da análise dos resultados, Pinheiro (2017) conclui que os jogos contribuíram de forma significativa no processo de ensino-aprendizagem, proporcionando inclusive um ambiente escolar mais dinâmico e engajador para os estudantes.

Pinheiro (2017) destaca que foi de fundamental importância o uso dos jogos para instigar o interesse dos estudantes e envolvê-los na prática, além de ter estimulado a interação entre a turma. Por meio dos objetivos alcançados e dos desafios a serem superados, os estudantes trocavam experiências e compartilham conhecimentos, tornando o ato de jogar também um momento de interação entre os jogadores.

Gama (2016) utilizou jogos digitais e o aplicativo de rede social *WhatsApp* como artefatos digitais no aprendizado dos conteúdos de função do primeiro e segundo graus. Apresentou como objetivo a verificação das possibilidades educativas oferecidas pelos jogos em situações de lazer, “podendo ser associados com conteúdos matemáticos, bem como promover outros modos de interações entre estudantes e professor, propiciadas através do jogo e das redes sociais” (Gama, 2016, p. 8). Por meio desse estudo foi possível perceber que após o uso dos jogos no GeoGebra os estudantes demonstraram maior facilidade ao solucionar as funções de primeiro e segundo grau criando, inclusive, outras possibilidades de estudo das funções, diferentes das apresentadas em aula. Ao realizar a análise final do material fornecido aos estudantes, percebeu-se uma simplificação na resolução das funções, ou seja, um raciocínio mais rápido e objetivo.

George *et al.* (2017), ofereceram uma oficina com o objetivo de auxiliar os estudantes a compreenderem e interpretarem os conteúdos de matemática financeira, progressão aritmética e progressão geométrica. Eles desenvolveram uma pesquisa referente ao aprendizado de matemática com o auxílio de jogos, tendo em vista que seu público alvo foram estudantes dos três anos do Ensino Médio de uma escola da rede estadual. A metodologia do trabalho abrangeu jogos lúdicos, tais como “Corrida aos 100” e “Torre de Hanói”, resolução de situações-problema e utilização de *softwares*, como o Excel e o GeoGebra. Em relação aos resultados obtidos, os autores afirmam que consideram positiva a participação dos estudantes, pois houve um interesse crescente durante a oficina ministrada e pode-se perceber um olhar diferenciado em relação aos conteúdos abordados durante o trabalho.

Eisenmann *et al*. (2017) realizaram uma pesquisa, cujo público-alvo foram estudantes do primeiro ano do Ensino Médio, tendo por objetivo o desenvolvimento de uma aula que atraísse a atenção dos estudantes, bem como, instigasse sua participação e despertasse a vontade de aprender o conteúdo apresentado pelo professor. O conteúdo abordado foi a função exponencial e a metodologia utilizada englobou o jogo “A Torre de Hanói" e o software GeoGebra. Os autores relatam que os resultados, após análise dos materiais, foram positivos revelando a importância de aliar as tecnologias ao processo de ensino-aprendizagem, visto que tornam as aulas mais atrativas, ágeis e facilitam a compreensão dos conceitos matemáticos, possibilitando a reflexão sobre as atividades. Além disso, os autores ressaltam a importância do uso do software GeoGebra o que otimizou a análise da variação das funções exponenciais comparado com o tempo que se gastaria se fosse feita manualmente.

Ao analisar os estudos apresentados, percebo que são indiscutíveis os benefícios dos jogos digitais durante o processo de ensino-aprendizagem, tendo em vista que o mundo tem se tornado cada vez mais tecnológico. Os estudantes estão cada vez mais inseridos no mundo digital, gerando a necessidade dos professores se apropriarem das diferentes ferramentas e recursos que as tecnologias oferecem, planejando e propondo atividades que possuam potencial de mobilizar os estudantes a aprenderem matemática. O uso dos jogos digitais por si só não garante a aprendizagem matemática, mas promove possibilidades para que isso ocorra. Além disso, também oportuniza o desenvolvimento da concentração e da socialização entre os jogadores, instiga a adequação a regras e oferece condições para que o estudante transfira os novos conhecimentos a situações do seu cotidiano.

2.5 JOGOS E O ENSINO DE NÚMEROS INTEIROS

O argumento de que precisamos nos adaptar ao mundo tecnológico não parece ser suficiente para que se defenda o uso de jogos no ensino de matemática. Sua dimensão pedagógica, conforme tratei anteriormente, é bem mais ampla e consistente, e as possibilidades de conectar a estrutura de um jogo à natureza lógica da matemática também é bem significativa.

Entendo, por exemplo, que é possível e apropriado construir jogos (tanto de tabuleiro físico, como digitais) com o intuito de explorar conceitos específicos de matemática, ou seja, jogos em que os estudantes realizam, de forma concreta ou virtual, ações que conduzam à construção de conceitos e a procedimentos operatórios, importantes para a formalização do campo de conhecimento em questão neste trabalho. Assim, os estudantes partem de uma referência (uma situação proposta pelo jogo) que os auxilie na compreensão do problema teórico, escolhem suas próximas ações de forma lógica e metódica e alcançam resultados significativos e operatórios (adicionar ou subtrair com números negativos).

Os jogos de lógica, semelhantes aos utilizados neste estudo, são como um teste mental e até físico, conduzido de acordo com as regras dadas, no qual o jogador desenvolve determinada atividade matemática num processo de criação ou de resolução de problema, acessando conhecimentos já adquiridos e ativando sua capacidade de criar ou gerenciar novas estratégias de pensamentos. Cada indivíduo tenta concluir o jogo com vitória, uma competição saudável na qual todos os competidores saem ganhando, pois o intuito de “jogar” é para praticar e, em muitas ocasiões, para aprender o conteúdo dado.

> Desse modo, penso que através dos jogos, é possível desenvolvermos no estudante, além de habilidades matemáticas, a sua concentração, a sua

> curiosidade, a consciência de grupo, o coleguismo, o companheirismo, a sua autoconfiança e a sua autoestima (Lara; 1998, p. 18).

Além disso, considero que a dificuldade dos estudantes com o caráter abstrato evidenciado pelo conjunto dos números inteiros constitui um previsível obstáculo à aprendizagem, sobre o qual toda sequência de atividades a ser elaborada e executada precisa se debruçar, na busca do entendimento e de ações necessárias para a sua superação.

Assim, realizo uma pesquisa no Google Acadêmico sobre “jogos com números inteiros”, selecionando dissertações de mestrado acadêmico que relatam resultados envolvendo o ensino de matemática com estudantes do ensino fundamental. Destes, destaco:

TÍTULO	AUTOR	ANO	UNIVERSIDADE
ENSINO E APRENDIZAGEM DE NÚMEROS INTEIROS UTILIZANDO O JOGO “CARTAS MATEMÁTICAS”	FABIANA TORRES BASONI GOMES	2019	FACULDADE VALE DO CRICARÉ
ATIVIDADES INTERATIVAS COMO GERADORAS DE SITUAÇÕES NO CAMPO CONCEITUAL DA MATEMÁTICA	MÁRCIA BÁRBARA BINI	2018	PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL
QUATRO JOGOS PARA NÚMEROS INTEIROS: UMA ANÁLISE	PATRÍCIA ROSANA LINARDI	1998	UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FÓRMULA (-1): DESENVOLVENDO OBJETOS DIGITAIS DE APRENDIZAGEM PARA AS OPERAÇÕES COM NÚMEROS POSITIVOS E NEGATIVOS	ANUAR DAIAN DE MORAIS	2010	UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

O estudo conduzido por Gomes (2019), "**Ensino e Aprendizagem de Números Inteiros Utilizando o Jogo 'Cartas Matemáticas’**", observa o conhecimento prévio dos estudantes sobre números inteiros e sua aplicação no cotidiano, revelando uma compreensão dos conceitos básicos em situações como transações bancárias, medição de temperaturas e compras. Contudo, são identificadas dificuldades durante atividades práticas envolvendo operações com números inteiros, especialmente em situações mais complexas, que envolvem aumento no número de variáveis.

O jogo "Cartas Matemáticas" é destacado por Gomes (2019) como uma ferramenta eficaz para promover a participação ativa dos estudantes e facilitar a compreensão e aplicação dos números inteiros. Os estudantes demonstram motivação para resolver problemas matemáticos e expressam interesse por mais atividades nesse formato. Apesar de algumas dificuldades iniciais na compreensão das regras do jogo, os estudantes reconhecem que executam cálculos de forma mais fácil e eficaz. Este estudo ressalta a relevância de atividades interativas, como os jogos, no ensino de números inteiros, proporcionando uma abordagem prática e envolvente, que permite aos estudantes desenvolverem suas habilidades matemáticas e aplicá-las em situações do mundo real.

O estudo realizado por Bini (2008), "**Atividades Interativas como Geradoras de Situações no Campo Conceitual da Matemática**", ressalta a eficácia do uso de jogos e atividades interativas para a compreensão da matemática e a aplicação dos números inteiros no contexto cotidiano dos estudantes. Essa abordagem é destacada como uma maneira de tornar o ensino da Matemática mais envolvente e promover maior confiança entre os estudantes. Além disso, evidencia-se a importância da compreensão dos professores sobre os processos mentais dos estudantes, o que contribui para o melhor planejamento das aulas e suporte ao aprendizado individualizado.

Adicionalmente, o estudo de Bini (2008) revela a necessidade dos professores estarem atentos aos métodos utilizados pelos estudantes na resolução das operações matemáticas, a fim de adaptar suas práticas de ensino de acordo com as necessidades específicas de cada estudante. Por fim, é ressaltado o papel crucial da avaliação como ferramenta para orientar o processo de ensino e aprendizagem, enfatizando sua função não apenas como um instrumento de medição de desempenho, mas como um meio para promover a melhoria contínua do aprendizado dos estudantes, especialmente daqueles com dificuldades adicionais.

Por meio da análise realizada por Linardi (1998), em “**Quatro Jogos para Números Inteiros: Uma Análise**”, constata-se que o uso de uma pedagogia específica e de ferramentas didáticas como os jogos - Jogo das Borboletas Joga de Perdas e Ganhos, Jogo das Apostas e Jogo das Araras – permite aos estudantes assumir a responsabilidade por sua própria aprendizagem e responder aos problemas didáticos propostos, como "Como tirar o maior do menor?", "Como subtrair um negativo?", "Por que menos por menos dá mais?" e "O que significa menos vezes?". Os estudantes são capazes de resolver esses problemas por meio da participação nos jogos e atividades propostas, demonstrando compreensão dos conceitos matemáticos e capacidade de aplicá-los em diferentes contextos.

Morais (2010), em seu trabalho, “**Fórmula (-1): Desenvolvendo Objetos Digitais de Aprendizagem para as Operações com Números Positivos e Negativos**”, teve como objetivo desenvolver objetos digitais para promover a aprendizagem das operações com números positivos e negativos. Esses objetos digitais consistem em um conjunto de situações-problemas que envolvem deslocamentos de objetos, necessitando de operações com números positivos e negativos para sua resolução, inseridos em um sistema referencial. No âmbito teórico, ele utilizou a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, com foco no Campo Aditivo. Os resultados demonstram que um objeto digital de aprendizagem pode promover a compreensão das operações com números positivos e negativos sob a perspectiva dos Campos Conceituais de Vergnaud, ao contribuir para a coordenação entre os sistemas de ação e simbólico. No entanto, esse fato isolado não é suficiente para garantir a aprendizagem completa.

Na dissertação de Morais (2010) que utilizou a Teoria dos Campos Conceituais, observa-se a necessidade de o professor promover em sala de aula situações variadas e contextualizadas, pois isso poderá possibilitar a construção significativa de conceitos. Entendo que o objetivo de “brincar” presente em minha dissertação é possibilitar, no jogo, a resolução de situações que surgem nas jogadas, desenvolvendo estratégias lógicas de raciocínio e, muitas vezes, aprender o conteúdo em estudo. Além disso, estas situações em ação inclui uma variedade de símbolos e conteúdos, que inclui o processo de compreensão e utilização de conceitos e teoremas, bem como o processo de representação simbólica em relação ao campo em estudo das estruturas aditivas.

Assim, pode-se afirmar e confirmar que o uso de jogos promove a interação e integração dos estudantes, resultando em uma experiência educativa mais dinâmica, descontraída e gratificante. Durante os jogos, os estudantes aplicam e constroem conceitos matemáticos, desde os fundamentais, como adicionar pontos para determinar o vencedor, até conceitos mais complexos, além de realizar descobertas e formular hipóteses, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio lógico. Geralmente, os estudantes buscam alcançar a vitória no jogo, participando de uma competição saudável na qual todos os envolvidos podem se beneficiar.

3 PROCESSOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, retomo os objetivos da pesquisa, já explicitados na Introdução deste trabalho, e apresento a caracterização da pesquisa, o contexto e os participantes da mesma, os instrumentos de produção de dados e a metodologia de análise dos dados.

3.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

Considerando a amplitude do campo teórico em que desenvolvo a pesquisa, bem como as estratégias e instrumentos escolhidos para a organização da proposta didática, entendo que seja possível verificar como a ação de jogar contribui para que os estudantes resolvam problemas e cálculos com números inteiros.

Também pretendo dar ênfase à investigação e à análise dos procedimentos e estratégias utilizados pelos estudantes durante a realização dos desafios propostos e, conforme espero, com resultados bem sucedidos, que mostrem o caminho da aprendizagem dos conceitos.

Assim, com esta pesquisa, viso o alcance do seguinte objetivo: **Identificar como uma proposta pedagógica com ênfase em um jogo de tabuleiro e dois jogos digitais, voltada ao campo conceitual das estruturas aditivas com números inteiros, mobiliza os estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental a desenvolverem esquemas conceituais.**

Ao retomar os objetivos específicos, busco com esta pesquisa:

(1) Elaborar jogos que favoreçam a construção de esquemas voltados ao campo conceitual das estruturas aditivas em $\mathbb{Z}$;

(2) Identificar os principais aspectos e transformações (esquemas) que os jogos possibilitam;

(3) Identificar se os esquemas foram alcançados pelos estudantes durante a aplicação dos jogos.

Dessa forma, para a realização dos propósitos destacados acima, desenvolvo um caminho metodológico que parte dos aspectos teóricos contidos no campo matemático em estudo, ou seja, no campo conceitual das estruturas aditivas no âmbito do conjunto dos números inteiros; que oferece alternativas de intervenção junto aos estudantes, através de propostas didáticas com uso de jogos; e que propõe estratégias para a análise dos dados, através do reconhecimento da eficiência dos jogos para a produção de esquemas conceitos pelos estudantes.

Também levo em consideração meu intenso envolvimento pessoal com o grupo de estudantes que participam do projeto de pesquisa; a natureza experimental, com características práticas e flexíveis, da minha proposta; e o aspecto de subjetividade, marcante em toda a experiência de ensino e de aprendizagem e, especialmente, durante a fase de análise.

Assim, escolho seguir os princípios de uma pesquisa qualitativa, levando em conta alguns de seus aspectos essenciais, em especial por sua flexibilidade no que se refere à escolha "[...] de métodos e teorias convenientes; [à] análise de diferentes perspectivas; [às] reflexões dos pesquisadores a respeito de suas pesquisas como parte do processo de produção de conhecimento; e [à] variedade de abordagens e métodos" (Flick, 2009, p. 23). Segundo esse autor, o objeto em estudo é primordial para a escolha da perspectiva metodológica, pois representa uma totalidade, conectada aos contextos sociais em que se insere. Mais precisamente, o objeto não é criado em laboratório, de modo artificial, ele envolve pessoas reais, com expectativas concretas e em situações de interações umas com as outras (Flick, 2009).

Mussi *et al*. (2019) também contribui nesta discussão quando dizem que o problema se situa dentro de um contexto amplo e complexo, com possíveis contradições. Disso decorre, conforme os autores, que "[...] a investigação qualitativa é alicerçada na inseparabilidade dos fenômenos e seu contexto, pois, as opiniões, percepções e significados serão mais bem compreendidos com maior profundidade a partir da contextualização" (Mussi *et al*., 2019, p. 422). Outros dois aspectos que esses autores destacam se referem à importância do pesquisador ser ativo, sensível e perceptivo durante o processo de coleta de dados, e à necessidade de validação da pesquisa, o que se verifica pela aceitação e disposição dos participantes em fazerem parte do estudo.

A escolha metodológica me conduz, portanto, à adoção de uma determinada postura, como pesquisadora, tanto com relação ao modo de atuar no campo da pesquisa, como à forma de olhar e interpretar os dados. Isso ocorre de forma dinâmica e relacional, revelando minha interação com o objeto de estudo e fazendo ressaltar a influência que exerço sobre o campo e o quanto ele também me influencia. Além disso, neste tipo de pesquisa não há neutralidade na análise, sempre é uma interpretação, portanto, um processo subjetivo, que expressa não apenas o alcance de um resultado final, mas o caminho, o processo que meus estudantes trilham para chegar a esse resultado.

Sintetizando, desenvolvo uma proposta de ensino no próprio ambiente pesquisado, propondo a utilização de jogos como ferramentas de ensino, e analiso a produção de esquemas dos estudantes durante essa prática. Entendo que esses encaminhamentos são compatíveis com as dimensões de uma pesquisa qualitativa, considerando que: (1) o problema proposto é contextualizado e abrangente, de modo a propiciar a construção de hipóteses; (2) sustento, durante a realização da pesquisa, a familiaridade com o grupo de estudantes e minha constante imersão no campo; (3) elaboro estratégias de ensino que provoquem os estudantes a pensarem nos conceitos e ideias relacionados ao campo conceitual em foco, de modo a compreenderem suas particularidades e a resolverem os problemas propostos; (4) e, por meio de situações problemas, obtenho uma variedade de dados e informações relativas à experiência dos estudantes e às apropriações conceituais realizadas por eles.

3.2 CONTEXTO E SUJEITOS DA PESQUISA

Apresento agora o cenário da pesquisa, no qual descrevo o local, os participantes e outras condições essenciais para a realização da prática de ensino que serve como base para a investigação.

A aplicação da proposta de ensino, tendo em vista a produção de dados desta pesquisa, ocorre em outubro e novembro de 2023, com estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental II, de uma escola municipal na cidade de Porto Alegre, RS. São 23 estudantes nessa turma, com idades entre 12 e 13 anos, e participam desta pesquisa apenas os 15 estudantes que entregaram os termos de consentimento. Os estudantes participantes da pesquisa recebem nomes fictícios para evitar a identificação dos mesmos.

Atenta a preocupações éticas solicito o preenchimento de um Termo de Consentimento Informado (Apêndice A) e de um Termo de Autorização para Utilização de Imagem e Som de Voz (Apêndice B), assinado pelos responsáveis dos estudantes. Ademais, a instituição participante assina a Carta de Anuência da Escola (Apêndice C) e o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido – Tale (Apêndice D).

A proposta de ensino organizada para esta pesquisa compreende uma sequência de jogos, um de caráter prático, com o uso de um tabuleiro físico, e outros dois a serem jogados no computador, com o *software* GeoGebra. Essa proposta tem como objetivo teórico a aprendizagem de números inteiros e das operações de adição e subtração com esses números. As tarefas propostas são aplicadas em oito períodos de aula, de quarenta e cinco minutos cada, distribuídas ao longo de três semanas, durante os horários destinados às aulas de Matemática.

Todas as atividades são realizadas na sala de Matemática e, para a realização dos jogos digitais, desloco *chromebooks* da biblioteca para essa sala. Também coloco à disposição dos estudantes folhas de ofício e canetas para a realização das atividades. Em muitas situações os estudantes jogam no GeoGebra e fazem seus registros na folha de ofício. Durante toda a prática pedagógica realizo filmagens e registros fotográficos, para fins de análise posterior.

3.3 APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA

Existem diversos instrumentos de coleta de dados que podem ser usados na pesquisa qualitativa, tais como questionários, entrevistas, observações, entre outros. Também cabe lembrar que dentro desta perspectiva metodológica é fundamental a escolha dos procedimentos e das ferramentas que favoreçam a produção subjetiva e espontânea dos sujeitos participantes.

Nesta pesquisa, os instrumentos utilizados para coleta de dados são, basicamente, participação em jogos, resolução de situações problemas, conversas, observações, sendo todas essas atividades registradas através de trabalhos produzidos pelos estudantes, fotos, filmagens com imagem e som, e anotações, tanto dos estudantes como da professora.

Confirmando minha escolha de buscar na teoria de Vergnaud algumas formas de analisar a produção dos estudantes e alguns elementos que esclareçam sobre o campo conceitual em que a pesquisa se desenvolve, organizo jogos que se configuram como situações desafiadoras que impulsionam e direcionam os estudantes na direção da construção do conhecimento. Em decorrência, nesta seção, apresento as características da proposta didática, em termos de sua organização e de sua aplicação.

Inicialmente, eu preparo os estudantes para começarem o estudo dos Números Inteiros, através de uma história sobre a expansão do campo numérico (do conjunto $\mathbb{N}$ para o conjunto $\mathbb{Z}$) e da apresentação da reta numérica como método de representar esses números. Isso é feito em uma aula expositiva, com desenhos no quadro e apresentação de exemplos.

A primeira etapa de atividades práticas ocorre por meio do jogo de tabuleiro físico – “Trilha Humana” e a segunda etapa acontece através da aplicação dos jogos digitais – “Jogos de Corrida”. Reforço que construo o jogo de trilha a partir de outras trilhas publicadas na Internet, inclusive no site da MathemaTIC[6], e os jogos digitais, inspirada pelo jogo criado por Aparecido Souza, esses desenvolvidos no software GeoGebra.

Durante a realização das atividades, os estudantes não consultam material didático e não usam calculadoras. Minha posição, como professora, sempre se manteve no sentido de estimular, sem intervir, para que realizem o trabalho e, como pesquisadora, no sentido de observar o desempenho e agilidade de cada estudante, registrando (por escrito e por filmagens) detalhes do que ocorre e do que eles comentam.

3.4 DESCRIÇÃO DO JOGOS UTILIZADOS NA PESQUISA

Nesta seção descrevo o material que compõe os jogos utilizados na proposta didática e defino o objetivo e as regras dos mesmos. Na sequência, apresento mais detalhes relativos à estrutura do jogo e às estratégias de movimentação no tabuleiro, bem como as condições específicas para que os estudantes do sétimo ano realizem as atividades.

[6] https://www.ufrgs.br/mathematic/

3.4.1 Jogo da Trilha Humana

Material: Tabuleiro (Figura 4), dois dados (um com números de 1 a 6 e outro com sinais “de mais” e “de menos”), peões humanos.

Objetivo: O jogador que chegar na casa ($+\infty$) ou ($-\infty$) primeiro é o vencedor.

Regras:

1. O número zero do tabuleiro é o ponto de partida do jogo.
2. Os jogadores (peões) jogam alternadamente.
3. Na sua vez, cada jogador lança os dados. O dado numérico indica o número de passos a ser dado pelo peão e o dado contendo sinais (+) e (-) indica o sentido a ser seguido no tabuleiro.

Figura 4: Jogo “Trilha Humana”

Fonte: Elaborada pela autora

A “Trilha Humana” é um jogo dinâmico, pois os peões (neste caso, os estudantes) vão caminhar sobre um grande tabuleiro traçado no chão. Esse tabuleiro é constituído por números inteiros, positivos e negativos, sendo o zero o ponto de partida e as casas do (+∞) e do (−∞), desenhadas de forma diferenciada, os pontos de chegada. O próprio jogador se movimenta com a função de um peão; e os dados são lançados para indicar o movimento do jogador. O objetivo do jogo é chegar à casa do infinito, seja o positivo ou o negativo.

Importante destacar que inicialmente explico aos estudantes que os números apresentados no tabuleiro estão, em um sentido, numa sequência de zero até 15 e logo depois vem a casa do +∞ e, no sentido oposto, numa sequência de zero a -15 e logo depois vem a casa do −∞. A ideia de infinito, portanto, é explorada em termos de um potencial caminho a ser seguido após o 15 e/ou o -15, caminho que, para fins de realização prática do jogo, se reduz a um simples passo para uma casa simbólica.

Os estudantes participantes da pesquisa formam dois grandes grupos. Cada grupo recebe um tabuleiro e dois dados. Logo após, cada um desses grupos se subdivide em dois subgrupos, sendo que um estará ativo no jogo e o outro estará discutindo e registrando no quadro os cálculos envolvidos. Depois, esses dois subgrupos trocam de posição.

O jogo inicia com os dois peões na posição “zero” do tabuleiro e, após decidirem quem começa, é lançado o primeiro dado (de números), indicando o número de casas que o jogador deve percorrer, em seguida é lançado o segundo dado (de sinais), indicando se o movimento será no sentido positivo ou negativo. Todos os estudantes do subgrupo ativo (um de cada vez) devem lançar os dados e caminhar no tabuleiro, na mesma rodada. O outro subgrupo tem a função de apoio nos cálculos e, seguindo minha orientação, os estudantes discutem entre si e indicam a quantidade de casas e o devido sentido que cada estudante/peão deve seguir. Isso ocorre ao mesmo tempo nos dois grandes grupos.

Para a produção do tabuleiro e dos dados utilizo papel pardo, folha A4 colorida, papel paraná e papel contact, conforme se observa na Figura 4.

3.4.2 Jogos de Corrida

Material: Jogo no GeoGebra (Figuras 5 e 6), com uma pista de corrida e dois personagens para cada pista.

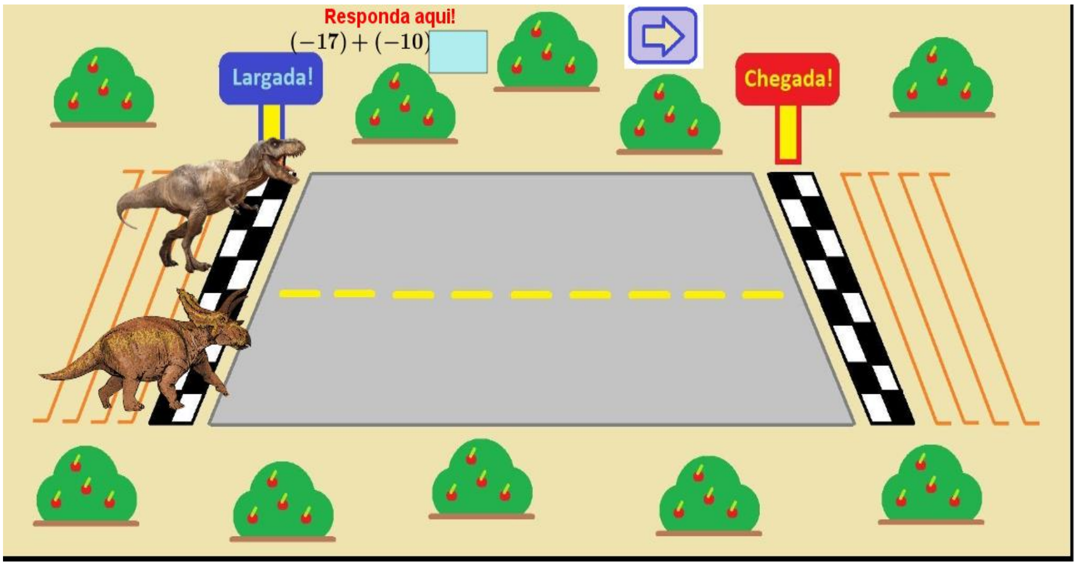
Objetivo: Ser o primeiro a alcançar (com seu personagem) a linha de chegada.

Regras:

1. Deve ser jogado em duplas, sendo que um dos jogadores é virtual.
2. Os jogadores jogam alternadamente.
3. Cada jogador, na sua vez, deve realizar a operação matemática que aparece no painel digital do jogo.
4. Se a resposta estiver errada, o jogador pode tentar novamente. Seu personagem só avançará se a resposta estiver correta.
5. O jogador virtual vai avançando sistematicamente.

A Figura 5 representa a fase inicial do jogo "Corrida dos Dinossauros", quando os estudantes têm o primeiro contato com o desafio. Nesse jogo, os estudantes trabalham a adição com os números inteiros.

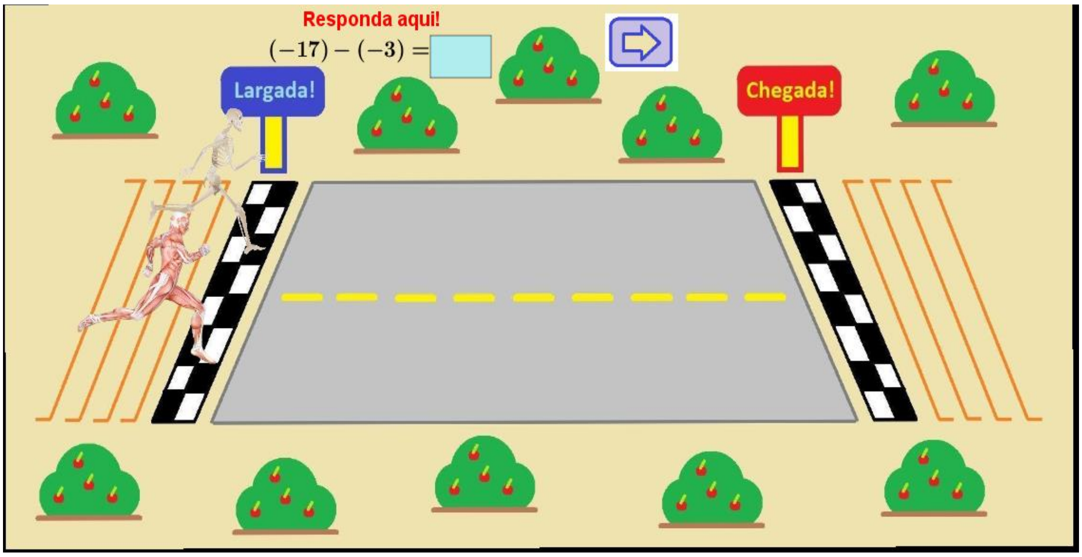
Figura 5: Jogo "Corrida dos Dinossauros"



Fonte: Elaborada pela autora - (https://www.geogebra.org/m/uswwpt47)

A Figura 6 representa o jogo "Corrida dos Músculos e Esqueletos", no qual os estudantes trabalham a subtração com os números inteiros.

Figura 6: Jogo “Corrida dos Músculos e Esqueletos”



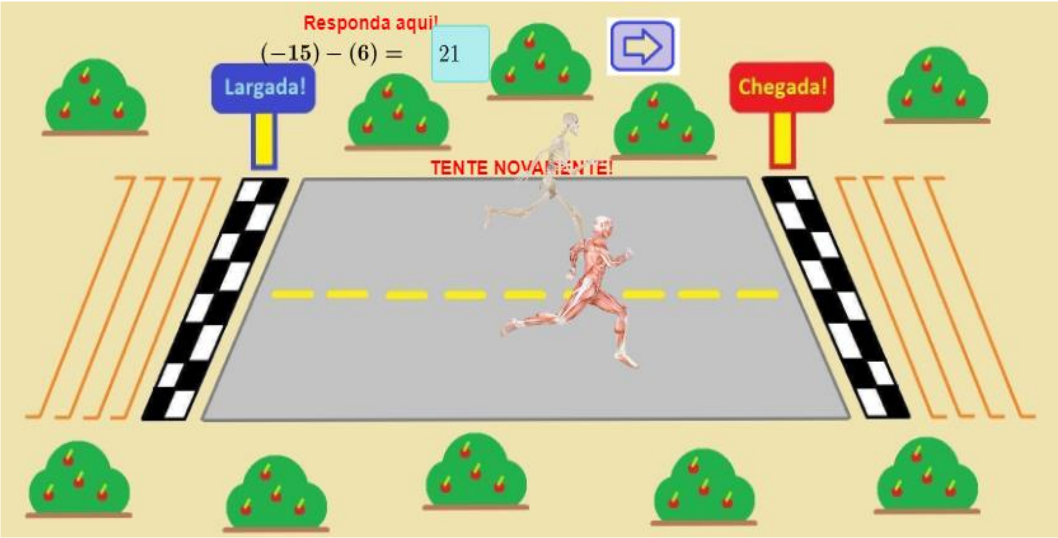
Fonte: Elaborada pela autora – (https://www.geogebra.org/m/mfutd6t7)

A escolha desses jogos atende ao objetivo de propiciar situações que mobilizem o estudante a calcular corretamente as operações de adição e de subtração com os números inteiros, dentro de um contexto de “urgência”, visto que, na corrida, seu personagem pode ficar atrás do personagem programado pelo computador, que nunca erra. A partir da minha orientação, para compensar essa desvantagem, os estudantes formam dupla contra o adversário virtual, ou seja, um estudante joga e seu colega auxilia, realizando os cálculos em uma folha de ofício A4. Os estudantes alternam esse processo, para que ambos tenham contato com as duas fases da atividade.

Após a explicação sobre o funcionamento dos jogos de corrida, os estudantes organizam-se em duplas de livre escolha, sendo que para cada dupla foi entregue um *Chromebook*, e a internet é disponibilizada através do roteador da escola.

Os jogos de corrida apresentam adições e subtrações de números inteiros, que estão no intervalo numérico do -20 a 20. O jogo envolve dois jogadores, sendo um deles programado a ficar sempre em movimento. Os estudantes, um de cada vez, ocupam o lugar do outro jogador. No painel digital surge uma operação de adição ou subtração em $\mathbb{Z}$ e começa a corrida. O jogador joga contra o computador e precisa acertar a operação para ir em frente e, conforme a rapidez com que responde, seu movimento também será mais rápido. Quando ele erra, como mostra a Figura 7, seu personagem fica estático e aparece uma mensagem para tentar novamente. Tudo isso importa, porque seu adversário nunca para de correr. Mas, também é importante destacar que o movimento do personagem virtual é programado para que possibilite que seu adversário ganhe o jogo.

Figura 7: Jogo da corrida quando o estudante erra.



Fonte: Elaborada pela autora – (https://www.geogebra.org/m/mfutd6t7)

O jogo digital (Jogo de Corrida) tem uma abrangência de operações possíveis e apresenta etapas sempre diferentes das anteriores, o que o torna instigante e desafiador para o jogador.

3.5 PROCEDIMENTOS PARA A ANÁLISE DOS DADOS

Conforme já explicitado, para a realização desta pesquisa escolho uma abordagem pedagógica a ser desenvolvida com meus alunos do sétimo ano, na qual incluo jogos para que eles aprendam as operações de adição e subtração com números inteiros. As estratégias utilizadas nessa proposta conduzem a uma grande aproximação entre pesquisador e estudantes e valorizam os acertos, os erros, as dificuldades que eles encontram, os obstáculos que enfrentam, com ênfase em observar o caminho traçado para evoluir no campo conceitual da adição e subtração em $\mathbb{Z}$. Tendo em vista a natureza dessa investigação qualitativa, é necessário que também se pense em um caminho metodológico específico para a análise dos dados obtidos.

Os dados para a análise são produzidos sempre durante as aulas e se materializam através das anotações da pesquisadora, das produções escritas dos estudantes e da exploração dos vídeos realizados, em algumas situações de jogo, com a câmera do celular. Esses dados são analisados com embasamento no referencial teórico, buscando indicadores que atendam ao objetivo central deste estudo.

A forma de tratamento dos dados ocorre através da transformação do material bruto em algo (um texto) que indique possíveis respostas à questão de pesquisa e aos objetivos relacionados a essa questão, sempre tendo em vista a fundamentação teórica escolhida.

Nesse processo analítico, é fundamental que se considere o contexto no qual a experiência ocorre, principalmente no que se refere às condições criadas para que os estudantes se expressem. Para tal, é imprescindível que se assista e ouça as gravações e que se retome os demais dados coletados, inúmeras vezes. Assim, a análise compreende uma descrição detalhada de cada atividade proposta, com as falas e os silêncios dos estudantes e, também, com as considerações, exemplos e argumentações tecidas pela professora pesquisadora. Essa descrição segue a ordem cronológica das atividades desenvolvidas e ressalta momentos importantes da prática desenvolvida junto aos estudantes e à professora, além de incluir todas as inferências realizadas pela pesquisadora sobre a prática, à luz da teoria. Mais precisamente, a análise consiste num relato focado na descrição interpretativa da aplicação dos jogos.

A análise qualitativa costuma ser maleável com relação à interpretação dos dados e, no caso desta pesquisa, ocorre a valorização do surgimento de ideias originais, de soluções rápidas e consistentes, de respostas similares, de referências a situações do cotidiano e de troca de experiências. Disso resulta que estudantes aprendendo matemática de maneira lúdica e sendo observados em termos de como pensam e de quais decisões tomam para resolver situações desafiadoras são alguns dos fatores que compõem a análise.

Sintetizando, em termos operacionais, a análise compreende a transcrição e revisão dos eventos filmados, a releitura das anotações e a observação detalhada das atividades que os estudantes realizaram, buscando recorrências e pontos de similaridade que possam ser significativos para o entendimento dos esquemas produzidos e do caminho de apropriação conceitual dos estudantes. Esse processo pode gerar novas conexões, hipóteses e pontos de discussão e interpretação.

Em termos teóricos, a ênfase reside na análise das possibilidades desencadeadas por jogos físicos e digitais, para a aprendizagem de conceitos e operações matemáticas. A partir da observação dos resultados apresentados pelos estudantes, busco identificar as diferentes formas como são mobilizados os esquemas ligados às operações de adição e de subtração com números inteiros. Assim, está em análise o processo de conceitualização que os estudantes realizam, relativo à natureza e estrutura do conjunto $\mathbb{Z}$, e o potencial pedagógico do uso de jogos no ensino desse campo conceitual.

O Campo Conceitual das Estruturas Aditivas, segundo a perspectiva de Vergnaud, consiste na base teórica primordial de toda a análise, de modo que o conjunto de situações propostas trata das operações de adição e de subtração com números inteiros ou, ainda, da combinação entre as duas. Nesse viés, os jogos elaborados para este estudo constituem situações instigantes e aplicáveis ao cotidiano das pessoas. Além disso, os jogos têm o potencial de oferecer aos estudantes a oportunidade de colocarem em ação conceitos matemáticos que podem ser complexos ou difíceis para eles, tendo que mobilizar diferentes esquemas de resolução, que podem ser eficazes ou não. Assim, através da análise dos dados, entendo que seja possível identificar como ocorre a construção de esquemas pelos estudantes, com ênfase, por exemplo, na capacidade de mobilizar conhecimentos durante a resolução de novos problemas.

4 ANÁLISE DOS DADOS

Ao analisar os dados produzidos para fins desta pesquisa, percebo que eles não são claros e de compreensão imediata. Após a observação do conteúdo dos vídeos, constato que deixei de fazer algumas perguntas específicas e de filmar detalhes da produção dos estudantes que poderiam ser esclarecedores, e que as falas e as escolhas dos estudantes possibilitam mais de uma interpretação. Também percebo a importância de entender os inúmeros momentos de silêncio dos estudantes durante a realização dos jogos, isso porque eles estavam muito concentrados e não tinham o menor interesse em conversar sobre como estavam pensando.

De modo geral, para realizar a descrição interpretativa dos dados, preciso estar atenta não apenas aos escritos e às falas dos estudantes, mas também a todos os pressupostos, inferências, iniciativas, sugestões e tentativas que utilizaram para chegar aos seus resultados. Muitas vezes o estudante também fazia referência a alguma situação de seu cotidiano que tinha semelhança com o que precisava resolver. Nestes momentos era importante entender qual o conhecimento que ele está trazendo de sua bagagem e como ele aplicaria isso na situação problema que estava sendo proposta. Justamente este estudo de como funciona o comportamento do estudante diante da ação de jogar, mobilizando diferentes esquemas que estão envolvidos nessa situação, é o que condiz com a TCC de Vergnaud e, portanto, é o que interessa nesta pesquisa.

A Teoria dos Campos Conceituais abrange aspectos do desenvolvimento da aprendizagem, em particular da construção do conhecimento matemático e, por isso, tem sido fundamental nesta pesquisa, fornecendo as bases para a produção das atividades e problemas propostos, bem como para a compreensão dos esquemas desenvolvidos pelos estudantes ao resolverem as tarefas.

Em muitas dessas situações os estudantes agiram rapidamente e sem esforço, porque já tinham construído as competências necessárias para resolvê-las, mas, em outros casos, eles precisaram fazer maior esforço para enfrentar as dificuldades, tiveram que tentar, se arriscar e até mesmo recomeçar. Minha forma de intervir foi orientada, em muitas ocasiões, exatamente por essas dificuldades, ou seja, provoquei os estudantes no sentido de acionar informações que ainda não tinham significado, mas que poderiam vir a ser esquemas eficazes para a resolução das situações. Para isso os estudantes precisaram construir seus esquemas de resolução, agindo de forma operatória e se organizando diante de uma gama de informações, atitudes que deram a eles a segurança e a competência necessárias para resolverem os problemas que foram surgindo.

De modo geral, é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito-em-ação adquire sentido para o estudante e pode-se dizer que a Teoria dos Campos Conceituais é importante para ressignificar as habilidades e as apropriações teóricas que vão se mostrando. Assim, desenvolvi a proposta didática sempre desafiando os meus estudantes a usarem os conhecimentos que já tinham, mas também a se abrirem a novas aprendizagens, ainda que isso exigisse deles uma desacomodação. Ao mesmo tempo, eu acompanhava o desempenho deles e, fundamentada na teoria de Vergnaud, procurava entender os esquemas que eles construíam, para poder mantê-los ativos nesse processo.

Ressalto que houve uma diversidade de situações relacionadas com o campo aditivo dos números inteiros, reforçando a premissa da Teoria dos Campos Conceituais de que o professor deve propor uma diversidade de situações em sala de aula, desafiadoras, abrangentes e contextualizadas, pois desta forma possibilitará a construção significativa dos conceitos.

> Essas ideias significam que, em cada Campo Conceitual, existe uma grande variedade de situações e os conhecimentos dos estudantes são moldados pelas situações que, progressivamente, vão dominando. Dessa forma, são as situações que dão sentido aos conceitos, tornando-se o ponto de entrada para um dado Campo Conceitual. Contudo, um só conceito precisa de uma variedade de situações para se tornar significativo. Da mesma maneira, uma só situação precisa de vários conceitos para ser analisada (Santana; Alves; Nunes, 2015, p. 1165).

Com relação ao processo que os estudantes desenvolveram, durante a prática de ensino, de apropriação das estruturas aditivas com o conjunto dos números inteiros, entendo que, mesmo numa primeira visita aos dados coletados, já foi possível encontrar vários indícios dos esquemas construídos, expressos através da produção de respostas aos problemas, da adaptação aos desafios para o entendimentos dos jogos e, principalmente, do envolvimento, interação e diálogo intensos, tudo isso revelando que a ação operatória não é decorrente apenas do conhecimento de um conceito ou propriedade, mas sim das múltiplas vivências de perspectiva da situação real, com pensamentos, ideias, percepções e inferências extremamente singulares, em um caminho que leva do desconhecimento de algo ao domínio parcial ou completo de um campo conceitual, ou seja, no caminho da conceitualização.

Os estudantes participantes do estudo, de modo geral, expressaram envolvimento, interesse e comprometimento com a proposta, e isso se refletiu na construção de esquemas, com mobilização de conceitos-em-ação e teoremas-em-ação no campo relativo à adição em $\mathbb{Z}$, para resolverem situações problemas. Além disso, minha atuação, como professora e pesquisadora, exigiu dinamismo e grande interação com os estudantes e, ainda que dirigida prioritariamente à coleta de dados e à interpretação dos mesmos, manteve o foco no propósito de provocar e problematizar as respostas dos estudantes.

Ao contextualizar, por exemplo, dentro do estudo dos Números Inteiros o uso da reta numérica, apresentei o número zero como ponto de referência para distinguir a representação dos números positivos à direita e dos números negativos à esquerda, enfatizando a simetria entre dois números com sinais diferentes e mesmo valor absoluto, entre outros conceitos e propriedades desse conjunto. Ainda que a explicação tenha sido simples e objetiva, percebi que a grande maioria dos estudantes estava sem entender e não prestava atenção. Estava sendo difícil para eles entenderem o significado de antecessor e de sucessor neste conjunto numérico, além de não perceberem a distância entre um determinado número negativo e um positivo.

Dando continuidade à exposição do assunto, desenhei uma nova reta numérica, colocando o estudante Vic[7] na posição (-1) e me colocando na posição (+2), e perguntei aos estudantes qual a distância entre Vic e eu, considerando cada intervalo da reta como uma unidade de medida, e quais eram os antecessores e os sucessores dos números que ocupamos. Sentindo-se desafiados, alguns estudantes começaram a interagir e calcularam corretamente a distância, porque conseguiram visualizar os espaçamentos entre os dois números, mas nem todos ficaram convencidos a respeito do antecessor e sucessor do número negativo, pois insistiam

[7] Vic é um nome fictício para um aluno real da turma.

em pensar no valor absoluto desses números. Ainda explorei outro exemplo, posicionando Vic no número (+3) da reta numérica e Flor[8] no número (-5), e novamente perguntei quantos intervalos havia entre eles, e quem eram os antecessores e sucessores dessa vez. Alguns estudantes ainda ficaram confusos, mas instigados a acertar, e outros ficaram sem entender como que a distância entre Vic e Flor era de oito unidades de medida. Também continuava o desconforto em aceitar que o número (-6) era antes do (-5) e que o número (- 4) era depois do (-5).

Essa atividade envolveu o reconhecimento dos números negativos, o cálculo da distância entre pontos específicos na reta e a compreensão dos conceitos de antecessor e sucessor de um número inteiro, e entendo que a reflexão alcançada, apesar das resistências iniciais e de algumas dificuldades, ocorreu devido a experiência concreta de o estudante colocar a si mesmo (seu próprio corpo) sobre a reta. Isso aproximou o estudante da ideia de distância na reta real e desencadeou um processo de construção de esquemas cognitivos.

Segundo Vergnaud (2014), os esquemas são estruturas mentais que os estudantes desenvolvem para organizar e entender conceitos matemáticos complexos. No caso descrito, os estudantes não apenas aplicaram operações matemáticas básicas, como também começaram a formar esquemas para lidar com números negativos e suas relações espaciais na reta numérica. A persistência em solucionarem os desafios e se adaptarem ao novo campo conceitual demonstram um progresso na internalização desses conceitos.

A proposta pedagógica, em sua continuidade, esteve direcionada, através do uso de jogos, ao estudo das operações aditivas em $\mathbb{Z}$. Assim, novos desafios foram lançados aos estudantes com os jogos de Trilha Humana e de Corrida, jogos que foram criados com a intenção de promover aspectos e transformações cognitivos necessários aos estudantes. Ao integrar esses jogos na sala de aula, esperava-se que os estudantes não apenas fortalecessem suas habilidades matemáticas, mas também desenvolvessem esquemas cognitivos que facilitassem a aplicação prática dos conceitos aprendidos.

[8] Flor é um nome fictício para uma aluna real da turma.

A seguir apresento uma análise relacionada a transformações (esquemas) que os estudantes precisariam realizar em cada jogo, sempre tendo em vista a aprendizagem das estruturas aditivas no campo dos números inteiros.

4.1 COM RELAÇÃO AOS JOGOS UTILIZADOS

No jogo de Trilha Humana, os principais aspectos a serem destacados, referem-se à própria estrutura do jogo e a planejamentos estratégicos. Com relação às transformações ou esquemas necessários, cabe destacar a compreensão dos conceitos de distância, de simétrico, e de valores relativo e absoluto de um número inteiro, o reconhecimento da posição desse número na reta numérica e a habilidade de executar operações aditivas com números inteiros.

O tabuleiro representa uma reta numérica onde os estudantes movem-se de acordo com resultados de dados lançados. Um dos aspectos dessa estrutura refere-se ao cálculo da distância entre pontos no tabuleiro, utilizando conceitos de valor absoluto e distância na reta numérica, bem como, a distância de um número à origem (zero) e ao seu simétrico. Também é importante o reconhecimento dos números que precedem e sucedem uma posição específica na reta numérica. Em termos de planejamento estratégico, é necessário o desenvolvimento de habilidades de planejamento ao antecipar movimentos com base em cálculos matemáticos. Nesse sentido, destaca-se a capacidade de executar operações básicas com números positivos e negativos, requisito imprescindível para que o estudante possa avançar ou retroceder no jogo.

Nos jogos de Corrida com Números Inteiros, cabe destacar os aspectos relativos à interface interativa dos jogos, à competição virtual proposta e à aplicação de estratégias. Os esquemas que os estudantes precisariam realizar para obter sucesso nesses jogos referem-se diretamente à resolução de desafios matemáticos envolvendo adições e subtrações com números inteiros. No caso desses jogos, tendo em vista a teoria de Vergnaud, os esquemas podem ser classificados como competências, pois consistem essencialmente na utilização de algoritmos.

Para o alcance das competências operatórias no campo da adição em $\mathbb{Z}$, é importante que os estudantes reconheçam que na adição de números com sinais iguais, é necessário adicionar os valores absolutos e manter o sinal, e na adição com sinais diferentes, é necessário subtrair os valores absolutos e manter o sinal do número de maior valor absoluto.

O jogo estimula o engajamento dos estudantes ao competirem com o computador ou outros jogadores e requer a compreensão da representação gráfica de números inteiros em um contexto virtual. O jogo envolve adições e subtrações de números inteiros no intervalo de -20 a 20, exigindo a realização de cálculos matemáticos rápidos e precisos. Assim, os estudantes desenvolvem habilidades de resolução de problemas, através da criação e implementação de estratégias para superarem os desafios matemáticos que vão surgindo.

A resposta correta determina o movimento do personagem virtual de forma imediata e dinâmica, incentivando os estudantes a processarem mentalmente as operações matemáticas com agilidade. Cada partida apresenta etapas diferentes das anteriores, proporcionando um desafio renovado a cada jogada e a aplicação de estratégias adaptativas. A resposta imediata do software permite aos estudantes receberem *feedback* instantâneo sobre suas ações, facilitando o aprendizado através da correção rápida de erros. Também ocorre a possibilidade de os estudantes tentarem burlar o jogo, respondendo de forma impulsiva ou sem um empenho cognitivo genuíno, especialmente diante da pressão de competir com um adversário que nunca para.

Dentro desse contexto, a teoria de Vergnaud enfatiza a importância de desenvolver esquemas operatórios eficazes na construção de conceitos matemáticos. No jogo digital de corrida com números inteiros, os estudantes são desafiados a não apenas calcular corretamente, mas também a adaptar suas estratégias, conforme enfrentam novos cenários de jogo. A interatividade e a dinâmica do ambiente digital proporcionam uma plataforma envolvente para a aprendizagem matemática, embora exijam vigilância educacional para garantir que os estudantes se envolvam cognitivamente nas operações matemáticas propostas, minimizando respostas automáticas ou superficiais.

A seguir, apresento uma descrição dos encontros (de dois períodos cada) em que realizamos as atividades com jogos, ressaltando que sempre busquei, a partir da realização dessas atividades, o aprendizado das estruturas aditivas envolvendo os números inteiros. Durante a prática de ensino, os estudantes foram convidados a jogar em um tabuleiro 1x4, construído em papel pardo pela professora pesquisadora, para ser utilizado na sala de aula, e em outros dois jogos, construídos no GeoGebra.

4.2 COM RELAÇÃO À CONDUTA DOS ESTUDANTES

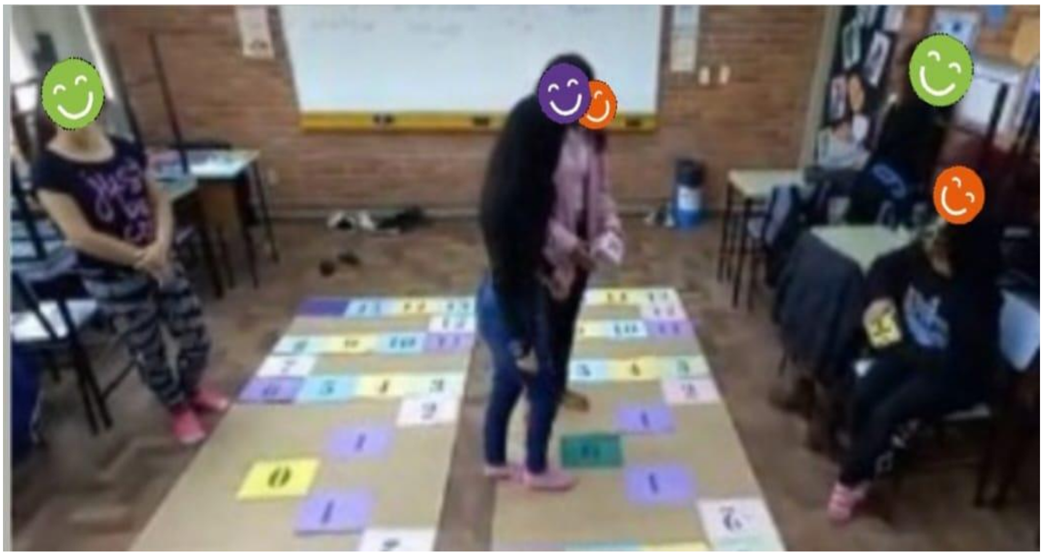
No primeiro encontro, após a apresentação inicial do assunto, através de uma abordagem sobre a expansão do campo numérico e uso da reta numérica, convidei os estudantes para realizarmos um jogo de trilha, denominado “Trilha Humana”, no qual eles seriam os “peões”. Todos ficaram motivados e empolgados, pois sabiam que iriam fazer algo diferente na aula. Solicitei que os estudantes colocassem as classes empilhadas na lateral da sala, junto com as cadeiras. Eles arrumaram rapidamente a nossa sala, abrindo o espaço de que necessitávamos. Depois disso, orientei que formassem dois grandes grupos, sem definir critérios para essa divisão e, enquanto se dividiam, fui colocando os tabuleiros no chão com os dados.

Era grande a confiança dos estudantes nessa fase de preparação, ainda que nem soubessem como seria o jogo. Também era expressiva a atenção deles, enquanto explicava como deveriam proceder. Assim, posicionei as duas trilhas no chão, uma do lado da outra, de forma a poder demonstrar, com os dois dados, o que cada estudante teria que fazer. Objetivamente, apresentei as regras do jogo, enfatizando que o ponto de partida é o número zero do tabuleiro, que o primeiro dado (com números de 1 a 6) a ser lançado indica a quantidade de casas que o jogador deve andar e que o segundo dado (com sinais positivo e negativo) indica o sentido desse movimento.

A seguir, os estudantes atentamente ouviram minha explicação de que cada um dos dois grupos iria se subdividir em outros dois, de modo que um ficaria na trilha e o outro ficaria auxiliando nos cálculos e orientando os colegas “peões”, como mostra a Figura 8. Quando o primeiro subgrupo de “peões” alcançar o objetivo do jogo, deve ocorrer a troca de posição entre os estudantes dos dois subgrupos. Nesse momento das orientações, ainda que os estudantes soubessem que o objetivo de um jogo de trilha é chegar primeiro na linha de chegada, foi quando alertei sobre as características do nosso tabuleiro, salientando que o primeiro jogador a chegar em uma das casas do infinito, seja positivo ou negativo, seria o campeão da partida.

A Figura 8 expressa o primeiro momento em que os estudantes estiveram em contato com o jogo de trilha, alguns ainda colocando em prática o que estava sendo esclarecido sobre as regras do jogo.

Figura 8: Estudantes reconhecendo a Trilha Humana



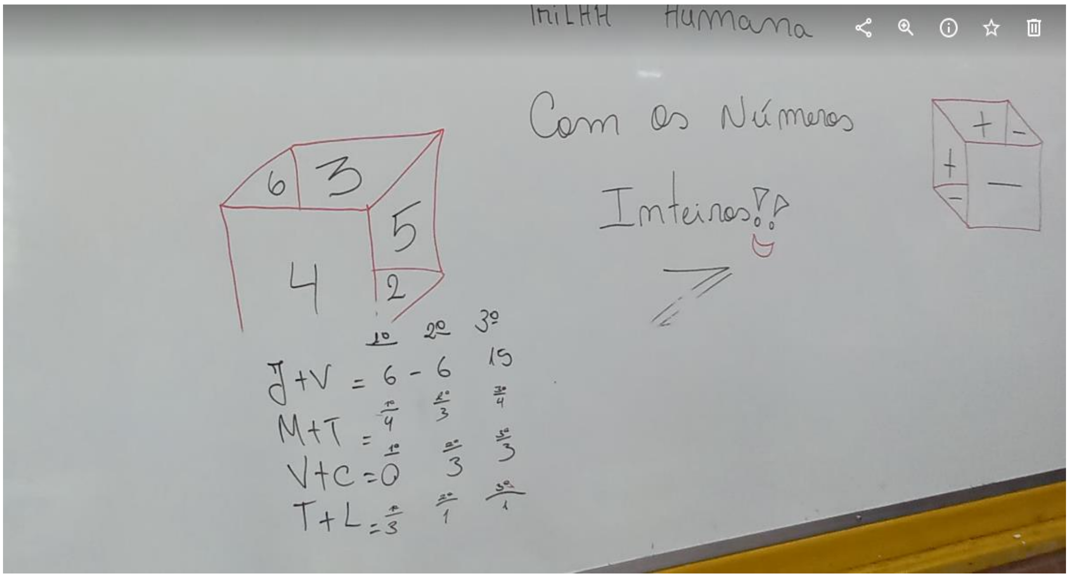
Fonte: Elaborada pela autora, 2022

É importante acrescentar que orientei todos os estudantes do subgrupo ativo a lançarem os dados e caminharem no tabuleiro, um de cada vez, na mesma rodada. E que o outro subgrupo poderia contar com minha orientação e apoio para discutirem entre si e indicarem a quantidade de casas e o devido sentido que cada estudante/peão deveria seguir. Isso estaria ocorrendo ao mesmo tempo nos dois grandes grupos.

Após todas as explicações e orientações, cada estudante sabia a qual grupo e subgrupo pertenciam, portanto sabia qual era sua função. Também já tinha se familiarizado com o tabuleiro e sabia o que os dados representavam no jogo. Portanto, o jogo poderia começar! Sempre lembrando que a colaboração entre eles era importante para o sucesso de cada um e que, ao final das trocas de posições entre eles, todos teriam tido a oportunidade de chegar ao final da trilha.

Enquanto explicava as regras do jogo, percebi o quanto todos estavam prestando atenção, diferente de quando eu explicava a reta numérica no quadro. E, logo que dei o comando para iniciarem a atividade, cada grupo se subdividiu em dois subgrupos e os participantes decidiram qual seria o subgrupo ativo e qual teria a função de discutir e registrar os cálculos numéricos. Ao iniciarem a partida, os grupos de apoio, com rapidez e dinamismo, já começaram a trocar ideias entre si e planejar os cálculos. Pediram, inclusive, uma caneta do quadro emprestada para anotarem os intervalos numéricos que cada um havia andado e os intervalos que faltavam para conseguir a vitória. Esses grupos também fizeram um placar com o número de vitórias dos vencedores e outros registros relativos ao jogo, conforme mostra a Figura 9. Essa prática de anotar no quadro foi muito eficiente, tanto para os estudantes do subgrupo de apoio, por compartilharem e poderem corrigir os cálculos, quanto para o grupo de peões, porque conseguiam acompanhar todo o raciocínio matemático que estava sendo realizado.

Figura 9: Anotações dos estudantes



Fonte: Elaborada pela autora, 2022

Basicamente, nesse encontro, tive como objetivo desenvolver habilidades de identificar os números como antecessor, sucessor, positivo e negativo, através da realização de desafios no espaço físico do jogo da Trilha Humana, ou seja, as primeiras orientações para funcionamento do jogo foram feitas com o intuito de que os estudantes identificassem o número antecessor e o sucessor de um determinado número do tabuleiro.

No entanto, ao observá-los, durante o primeiro período, e percebendo que estavam só andando pela trilha sem refletir sobre o sentido numérico da posição e sobre o deslocamento, a partir do resultado obtido no lançamento dos dados, lancei um questionamento aos estudantes sobre quem eram os antecessores e os sucessores de quem estava posicionado como peão na trilha.

Assim, ocorreu que, enquanto os estudantes de um subgrupo jogavam, os estudantes do outro subgrupo identificavam se algum colega/peão estava uma posição atrás ou uma posição à frente de outro colega, de modo a poderem falar em número (ou posição) antecessor ou sucessor, independentemente de estarem esses estudantes posicionados na trilha em números positivos ou negativos. Os estudantes começaram a se questionar, principalmente quando um colega estava posicionado no número negativo, e o subgrupo que estava auxiliando anotava no quadro algumas verbalizações do raciocínio elaborados por eles. Partindo dessas considerações, evoquei a representação da reta numérica, por meio de uma explicação verbal, e propus que observassem, na prática de jogar a "Trilha Humana", quem seria o sucessor e o antecessor do seu colega, como mostra a Figura 10.

Enquanto explicava, os estudantes iam se apropriando cada vez mais da trilha, e percebi que alguns estavam explicando o antecessor e o sucessor para quem não havia entendido.

Figura 10: Jogo da Trilha Humana

Fonte: Elaborada pela autora, 2022

Lembrando da surpresa e falta de entendimento expressa por eles, quando apresentei, pela primeira vez, os números negativos na reta numérica, percebi que nesse momento do jogo, falar algo como (-2) estar antes do (-1) e (zero) estar depois do (-1) não causou mais espanto. Até porque a posição dos estudantes nestas casas, tendo por referência chegar no (+∞), confirmava quem era o antecessor e o sucessor. Entendo que nesse momento os estudantes estavam colocando em ação o conceito de ordem e de valor relativo de um número, expandindo também muitas das propriedades dos números inteiros positivos.

Essa atividade acontecia simultaneamente com os dois grandes grupos e, quando um estudante tinha dúvidas e me perguntava, eu devolvia o questionamento, instigando-o a pensar, sem dar a resposta de forma direta. Em muitas ocasiões, compartilhamos com outros colegas do grupo as descobertas que estavam surgindo. Dessa maneira, trabalhamos os dois períodos (90 minutos).

Depois que eles se organizaram corretamente na trilha humana, auxiliando-se, quando necessário, fizeram a observação e leitura da posição de cada peão em relação ao zero. Quando analisei algumas das fotos e filmagens que registravam esses momentos, observei como eles estavam dialogando e interagindo entre si, detalhes que não havia percebido durante a prática. Assim foi o primeiro dia de jogo, tendo os estudantes curiosos e ativos no jogo. Mas, alguns deles ainda não desenvolviam esquemas eficazes de resolução propostos nas atividades, pois não estavam entendendo o valor do antecessor e do sucessor de um número negativo.

No primeiro dia os estudantes não realizaram as operações aditivas, apenas trabalharam na identificação do sucessor e do antecessor de alguns números que representavam a própria localização dos peões na Trilha Humana. Assim, os estudantes construíam esquemas ao se localizarem na trilha, tendo em vista o colega que estava antes e o que estava depois de cada peão do jogo. A ação de jogar fazia com que o estudante interagisse e se integrasse ao campo conceitual em estudo, ou seja, a experiência de ser peão facilitava a compreensão do conceito de antecessor e sucessor de um número negativo (conceito em ação). O lúdico fez com que os estudantes ficassem imersos na situação que estavam vivenciando e, com isso, acabaram automaticamente se ajudando e construindo estratégias que contribuíram para a evolução de novos esquemas e soluções para as questões trabalhadas.

A importância da experiência concreta de posicionar o próprio corpo sobre a trilha, na atividade Trilha Humana, é fundamental para entender o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, conforme discutido pela teoria de Vergnaud (2014). A interação direta com o espaço físico proporcionou aos estudantes uma experiência sensorial que facilitou a construção de invariantes operatórios ou esquemas relacionados à noção de distância na reta real.

Vergnaud (2014) enfatiza que a experiência corporal desempenha um papel crucial na formação de conceitos matemáticos. Nesse contexto, a ação física de mover-se ao longo da trilha permitiu aos estudantes não apenas visualizar, mas também internalizar as relações espaciais e numéricas implicadas no jogo. A vivência prática de calcular distâncias e posicionar-se estrategicamente no tabuleiro não só deu concretude à conceitos mais abstratos, como também facilitou a transferência desses conceitos para contextos matemáticos mais formais.

Assim, ao colocarem-se fisicamente sobre a trilha, os estudantes não apenas participaram de uma atividade lúdica, mas também se engajaram em um processo de aprendizagem que pode ter contribuído para a construção gradual de esquemas cognitivos relacionados à noção de distância e movimento na reta real, conforme preconizado pela teoria de Vergnaud.

No segundo encontro**,** cheguei na sala de aula e os estudantes já estavam se organizando, pois sabiam que iriam jogar novamente a Trilha Humana. Seguimos o mesmo jogo e as mesmas regras do dia anterior, porém trabalhando a distância entre os números, considerando os números negativos e positivos.

Como no primeiro dia, solicitei aos estudantes que se dividissem em dois grupos e, na sequência, montassem os subgrupos, como haviam realizado no dia anterior. Distribui as trilhas e os dados, e eles iniciaram o jogo. Percebi de imediato que estavam mais cuidadosos ao jogar e mais confiantes em relação ao conteúdo. Em seguida, chamei a atenção deles para a distância entre um peão e outro e apresentei um caso, como exemplo, no qual a distância a ser identificada era entre o (7) e o (-5), e continuei observando o diálogo dos estudantes nos subgrupos. Percebendo que não estavam conseguindo calcular, apresentei outro exemplo: se minha filha estiver na posição cinco e seu namorado na posição sete, qual a distância? A partir dessa pergunta instigava se eles conseguiram visualizar a solução da distância entre um estudante/peão e outro na posição simbólica.

Entendendo que esse cálculo é do grupo de situações que os estudantes dominam, já que envolve o conjunto dos números naturais. Em seguida, perguntei a eles o que era simetria? Eles não sabiam, então pedi para todos colocarem a mão esquerda em frente da sua mão direita e demonstrei a eles como os dedos eram simétricos ou opostos uns dos outros. Nesse mesmo momento perguntei aos estudantes qual era o oposto da noite, eles me responderam que é o dia, perguntei qual era o oposto da criança, responderam que era o adulto, o oposto do alto, o baixo; então perguntei qual é o oposto de um número positivo e eles me responderam que é um número negativo.

Essa explicação foi por meio verbal e a ela se juntaram outras explicações pertinentes ao momento. Após, expliquei o conceito de antecessor e sucessor, colocando três estudantes um atrás do outro. Perguntei quem era o estudante que vinha antes e quem estava depois, da esquerda para a direita, e utilizando como referência o estudante ao centro. No mesmo momento, propus a eles que observassem na prática, ao jogar a “Trilha Humana”, quais colegas são seu sucessor e antecessor, e quais colegas estão em posições opostas ou simétricas, tendo você mesmo como referência. Além dessas observações, solicitei que calculassem a distância entre o estudante e seu colega (entendida aqui como o número de casas entre vocês dois), como mostra a Figura 11. Durante a atividade todos os estudantes participaram, fizeram comentários sobre suas posições e prestaram atenção nas explicações feitas. Entendo que o fato de um professor utilizar materiais interativos, propositadamente escolhidos, pode tirar os estudantes da posição habitual de meros ouvintes, levando-os a se relacionarem uns com os outros, trocando ideias e construindo conhecimento, de modo também a refletirem sobre suas ações. Nesse contexto, é possível desenvolver habilidades e competências, levando os estudantes a ampliarem o entendimento do campo conceitual das estruturas aditivas no âmbito dos números inteiros. Acontecimento confirmado durante essa prática.

Figura 11: Anotações dos estudantes

Fonte: Elaborada pela autora, 2022

No segundo dia de trabalho, os estudantes estavam mais motivados e participativos, pois estavam conseguindo realizar os cálculos e compreender o conteúdo enquanto se engajaram no jogo. Cada vitória era celebrada, já que quem alcançasse o símbolo do infinito ganha a partida, conforme ilustrado na Figura 12. Durante os dois períodos de (90 minutos), foi particularmente gratificante observar as equipes colaborando entre si.

Figura 12: Anotações dos estudantes

Fonte: Elaborada pela autora, 2022

É importante salientar que todas as atividades que os estudantes realizaram envolvia o cumprimento de regras específicas (de organização do trabalho e outras próprias dos jogos), uma certa capacidade estratégica (talvez, em alguns casos, uma ação aleatória fosse possível) e um tipo de raciocínio lógico e operatório. Esse último é de grande importância nesta pesquisa, porque traz os indícios dos conceitos-em-ação e teoremas-em-ação mobilizados pelos estudantes. Assim, vão surgindo resoluções que pressupõem uma ordenação de números (talvez mentalmente em correspondência biunívoca com os pontos da reta numérica que representam os números inteiros), uma comparação (entre números positivos e negativos), uma hipótese sobre a infinidade do conjunto $\mathbb{Z}$ (considerando que existem muitos números que não estão no tabuleiro do jogo) e uma operação matemática (como achar uma diferença em condições não triviais, ou seja, tendo um dos valores negativos).

Também é possível considerar que a existência de um lugar físico no tabuleiro, simbolizado pelo símbolo do infinito, pode ter implicações epistemológicas significativas para os estudantes. A conceituação do infinito, sem dúvida, representa um desafio cognitivo, pois transcende a capacidade de contagem e visualização direta.

Ainda que os estudantes tenham se adaptado tranquilamente ao objetivo de alcançar uma das casas do infinito no jogo de trilha e que tenham aceitado minha explicação inicial de que a sequência numérica apresentada no tabuleiro desse jogo simbolizava o conjunto $\mathbb{Z}$ e, portanto, poderia ter infinitos números, ainda assim observei que ficou um estranhamento com relação a uma sequência de números que, de repente, saltava para o símbolo do infinito. Na ocasião em que começamos a jogar, percebi que esses “saltos” numéricos do tabuleiro, tanto no sentido positivo, como negativo, poderiam ter sido expressos através do símbolo de reticência.

De um modo geral, a prática do jogo Trilha Humana possibilitou aos estudantes um intenso envolvimento com o conteúdo “adições de números inteiros”, sem que isso fosse explicitado. Foi gratificante ver os estudantes que estavam com dificuldades começarem a entender e debater o conteúdo com seus colegas e, diante de dúvidas, poucos me perguntavam como era para fazer, pois os próprios colegas respondiam.

O campo conceitual das estruturas aditivas na abrangência do conjunto dos números inteiros compreende eventos que incluem operações de adição e subtração, o reconhecimento do valor absoluto e do valor relativo de um número, as ideias de antecessor e sucessor, assim como processos de ordenação numérica, união de elementos, diferença, distância, entre tantos outros. Isso tudo sem incluir o aspecto do simbolismo matemático, ou seja, de como representar adequadamente esses números, suas propriedades e suas operações.

Na situação problema criada pelo jogo da trilha foi colocado um ponto de referência para indicar o sentido positivo e negativo do caminho, mas isso não significa que o caminhante fazia seu movimento de forma positiva ou negativa, essa distinção só foi estabelecida para dizer a posição do caminhante dentro do sistema previamente estabelecido. Portanto, falar sobre isso com estudantes de sétimo ano não foi uma coisa simples. O uso de um referencial e de convenções para representar os números inteiros é de difícil compreensão até mesmo para estudantes de níveis mais avançados, porque é estritamente simbólico e abstrato, não havendo um objeto real e concreto que indique o que é ser um número negativo.

É sempre uma escolha arbitrária! No caso do jogo, foi combinado previamente como os números seriam ordenados no tabuleiro e como o lançamento dos dados iria determinar o número de casas a serem percorridas e o sentido desse percurso. Durante a experiência do jogo, rapidamente os estudantes perceberam que o ideal era que o sinal do dado fosse o mesmo do número onde estava posicionado o jogador. Ou seja, se o estudante estivesse numa posição com numeração positiva, era melhor que desse positivo no dado de sinais e se ele estivesse numa posição com numeração negativa, o melhor era sair negativo no dado, de modo que a próxima posição do jogador resultasse, respectivamente, da adição de dois números positivos, no sentido do ($+\infty$), ou da adição de dois números negativos, no sentido do ($-\infty$). Em ambos os casos, isso conduziria mais rapidamente ao objetivo do jogo. Com a oscilação de sinais o percurso seria alternado em um vai e vem e eles ficariam no entorno de um ponto médio. A partir dessa prática de avançar tantas casas quanto indica o dado com os números, no sentido orientado pelo dado com sinais (positivo é para frente, negativo é para trás), os estudantes acabaram por perceber que o sinal, tanto da casa em que o "peão" estava como do número determinado no lançamento dos dados, interfere na adição dos números, o que se expressava pela contínua alternância de sentido. Os estudantes ainda não compreendiam qual operação matemática estavam fazendo, tudo era muito abstrato e arbitrário para eles, mas estavam entendendo que aquele sinal (-) bagunçava tudo o que sabiam sobre adição, o que não os impedia de responderem ao desafio de seguir as regras e de se divertirem no jogo.

No terceiro encontro, antes da chegada dos estudantes, organizei a sala com as classes em duplas. Ao entrarem, solicitei que escolhessem seus parceiros e seus lugares, conforme a nova disposição, para realizarmos um novo jogo. Em seguida, entreguei um Chromebook e uma folha A4 para cada dupla. Também coloquei no quadro o site do GeoGebra e pedi que colocassem o meu nome para localizarem a minha página, tendo acesso aos jogos produzidos. Eles ficaram surpresos e orgulhosos ao ver os jogos que criei. Então, com todas as duplas na página do jogo, comuniquei que eles poderiam jogar a “Corrida dos Dinossauros” e a “Corrida dos Músculos e Esqueletos”, explicando que teriam de realizar as operações de adição e subtração com os números inteiros que surgissem no painel digital.

Os estudantes, desde o início, mostraram familiaridade no uso do computador e pareciam saber o que fazer no jogo, ainda assim, expliquei as regras, enfatizando que cada dupla estaria jogando contra o computador e que esse não erraria nos cálculos. Por outro lado, se a dupla errasse, teria chance de refazer os cálculos e “correr atrás”.

Também expliquei a dinâmica principal do dia: enquanto um estudante da dupla jogava, o colega auxiliava nos cálculos necessários. Com a devida agilidade, eles teriam tempo de ganhar do adversário. Orientei que deveriam construir seus esquemas de resolução, anotando os cálculos e se ajudando mutuamente, mas que não poderiam usar calculadora.

Assim, iniciaram o jogo! A Figura 13 retrata o primeiro momento em que os estudantes tiveram contato com o jogo de corrida, quando ainda estavam se familiarizando com a dinâmica do jogo e esclarecendo dúvidas sobre como jogar.

Figura 13: Estudantes no Jogo da Corrida

Fonte: Elaborada pela autora, 2022

Todos estavam com muita euforia para começar, mas poucas foram as duplas que não tiveram dificuldade em realizar os cálculos e ganhar as partidas. Algumas, inclusive, levaram algum tempo para esquematizar estratégias para conseguirem alcançar o objetivo.

As dificuldades foram, especialmente, para encontrar a soma ou a diferença entre dois números negativos. Quando eles solicitaram a minha orientação para esclarecimento de dúvidas, eu ia até o quadro e explicava para toda a turma, criando situações-problema, dentre as quais destaco:

"Joãozinho gastou R$ 20,00 no mercado e R$ 50,00 na farmácia. Quanto Joãozinho gastou? Esse gasto é positivo ou negativo para o saldo de Joãozinho?".

Esses exemplos auxiliaram os estudantes na elaboração de estratégias para lidar com as situações apresentadas no jogo. Ao longo dos dois períodos (90 minutos), os estudantes enfrentaram inúmeras dificuldades também para representar o que eles pensavam, ou seja, eles faziam cálculos mentais e algumas tentativas de escrita das operações numéricas, mas não sabiam uma forma prática e precisa de expressar os resultados obtidos.

Uma dupla chegou a me chamar para perguntar se poderiam não utilizar a folha A4 para anotar os cálculos, pois se calculassem contando nos dedos conseguiriam realizar o objetivo mais rápido e alcançar a vitória. Então, pedi para eles jogarem e observei o desempenho deles, percebendo que realmente havia esquematizado uma estratégia rápida e eficaz de contar nos dedos.

Outros resultados e representações foram sendo alcançados enquanto os estudantes faziam os cálculos que surgiam no painel digital do computador. A Figura 14 indica exercícios para adicionar ou subtrair números positivos e negativos. Cabe lembrar que o jogo mostrava na tela quando ocorria erro no cálculo, de forma que os estudantes poderiam corrigir mentalmente, mas sem a possibilidade de alterar a resposta dada, já que o jogo imediatamente dava uma outra questão a ser resolvida. Por várias situações que acompanhei, os estudantes estavam muito atentos e exerciam um intenso pensamento operatório.

Figura 14: Folhas de cálculo de uma dupla

Figura 14 – A

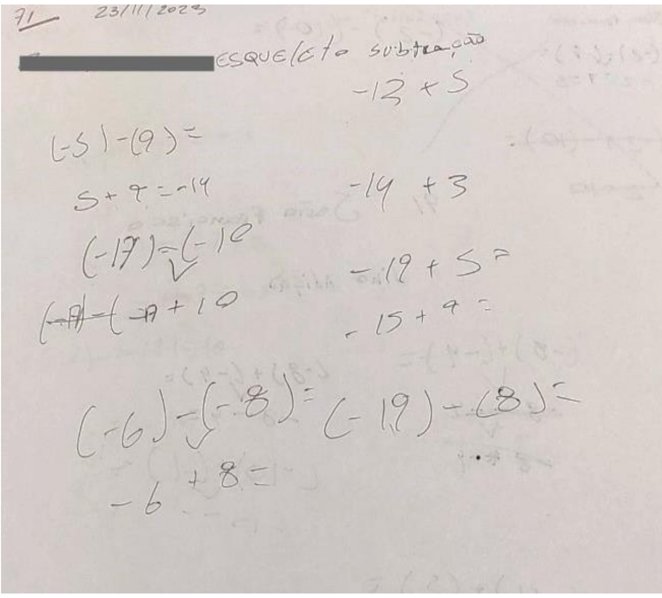
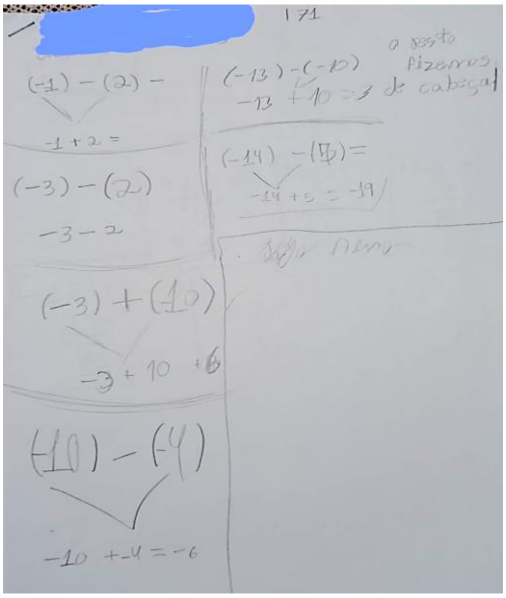


Figura 14 – B



Fonte: Elaborada pela autora, 2022

Como mostram os registros da Figura 14, alguns estudantes trabalharam com as combinações de sinais, utilizando o oposto do negativo, o que resulta em positivo, como no cálculo (- 6) - (- 8) = - 6 + 8, expresso na Figura 14 – A ou, como no cálculo de (-10) - (- 4) → -10 + - 4 = - 6, expresso na Figura 14 – B, onde aparece a adição de (-10) com o número negativo (- 4), ainda que o estudante pudesse estar pensando em adicionar o oposto do (- 4), acrescentando assim o sinal de adição na operação dada. É possível que tal representação decorra da dificuldade do estudante de expressar, numa linguagem formal, essa operação de subtração com dois números negativos, mas ele chegou ao resultado (- 6), o que indica o conhecimento de que não bastava apenas juntar os valores (- 10) e (- 4). O mesmo estudante, na operação (-14) - (5), Figura 14 – B, quando escreve (-14) + 5 = - 19, parece indicar novamente sua dificuldade em representar simbolicamente o processo de resolução que realiza mentalmente. Ainda que ele tivesse usado um teorema-em-ação verdadeiro, a saber: sinais iguais, adicionam-se os valores absolutos e conserva-se o sinal, mas sinais diferentes, subtraem-se os valores absolutos e mantém-se o sinal do número de maior valor, o seu resultado teria de passar pela expressão (-14) + (-5) para chegar a -19. Por outro lado, o mais cinco da segunda expressão pode estar significando que tem uma adição acontecendo entre o 14 e o 5 e a dificuldade do estudante não é com o cálculo, mas sim em usar o simbolismo de forma correta, o que provavelmente causou o equívoco.

Considerando uma abordagem colaborativa entre eles e tendo uma prática constante, possibilitada pelos Jogos de Corrida, os estudantes conseguiram calcular rapidamente e jogar de forma eficiente, obtendo, a cada vez, melhores resultados no jogo. Essa experiência mostrou a importância do trabalho em equipe e da utilização de estratégias simples para superar dificuldades em cálculos matemáticos.

No quarto encontro, assim como no anterior, organizei novamente as classes em duplas e solicitei a eles que se sentassem conforme a disposição previamente estabelecida, mantendo a mesma dupla do dia anterior. Após realizar a chamada, entreguei os Chromebooks e uma nova folha A4 para cada dupla construir suas resoluções. Retomei as orientações de que não era permitido usar calculadora, mas que poderiam continuar se ajudando.

Para assegurar que todos estivessem alinhados e acompanhando, mostrei novamente o site do GeoGebra e expliquei a dinâmica do jogo para uma dupla que não havia estado presente na aula anterior; reforçando que enquanto um estudante jogava, o colega ajudava com os cálculos. Notei que os estudantes estavam mais confiantes nesse dia, pois já haviam compreendido a dinâmica do jogo e sabiam como realizar os cálculos necessários.

Novamente reconheci o entusiasmo dos estudantes, as duplas iniciaram os jogos, algumas enfrentando dificuldades iniciais para realizar os cálculos e ganhar as partidas, outras levaram algum tempo para desenvolver estratégias eficazes. A mesma dupla abordou-me para questionar se poderiam dispensar a folha A4, optando por contar nos dedos para agilizar o processo e alcançar a vitória. Autorizei e, enquanto os estudantes jogavam, observei seu desempenho. Notei que haviam desenvolvido uma estratégia eficaz para realizar contagens usando os dedos. Quando os outros estudantes da turma perceberam que podiam contar com a ajuda do colega que era sua dupla, começaram a recorrer a ele para realizar os cálculos. Isso resultou em um aumento no desempenho no jogo. Outras duplas também solicitaram utilizar o mesmo método de contagem com os dedos, o que lhes proporcionou agilidade para calcular e jogar, levando-os à vitória.

A Figura 15 mostra o estudante utilizando seus dedos para calcular e fazendo anotações na folha. A mesma dupla percebeu que o jogo propunha o cálculo de subtração de um número positivo por um negativo e que, para resolver isso, era preciso somar os dois números e resultava em um número positivo, por exemplo: 4 - (- 5) = 9. Essa dupla chamou a atenção de outros colegas que foram até a classe deles para ver como eles jogavam e começaram a compartilhar o que haviam aprendido. Foi gratificante observar o envolvimento e motivação de todos.

Figura 15: As duplas trabalhando nos Jogos de Corrida

Fonte: Elaborada pela autora, 2022

A união entre os estudantes foi evidente, como mostra a Figura 16. Eles trocavam ideias, se ajudavam para entender como realizar os cálculos, explicando seus esquemas de resolução para alcançar o resultado necessário e, ao final, comemoravam cada vitória com muita euforia, embora mantivessem alta concentração durante as partidas. Ao término da aula, eles indagaram sobre a próxima oportunidade de aprendizado nesse formato. Ao questioná-los sobre o motivo, explicaram que esse método facilitava a compreensão da matéria e tornava o processo de aprendizagem mais divertido.

Figura 16: Estudantes no Jogo da Corrida

Fonte: Elaborada pela autora, 2022

Como educadora e pesquisadora, me senti feliz e impressionada com os resultados e com o desenvolvimento de cada estudante. Dedicamos dois períodos (90 minutos) ao trabalho, e foi gratificante testemunhar o avanço e a interação positiva entre todos. De modo geral, os estudantes estavam intensamente concentrados, ativos e participativos. Seus processos de pensamento eram visíveis, pois eles resolviam os problemas e tomavam decisões corretas, ainda que eles não falassem muito (provavelmente porque não era necessário). Importante destacar que, na maior parte do tempo, eles ficavam imersos no jogo, pois para eles não importava nada na sala, somente estavam focados em conseguir acertar o cálculo das adições e subtrações em $\mathbb{Z}$ para poder ganhar a partida.

4.3 TECENDO RELAÇÕES ENTRE A EXPERIÊNCIA E OS JOGOS UTILIZADOS

Ao analisar os dados coletados para esta pesquisa, percebo que a clareza e compreensão imediata da resolução dos estudantes são limitadas. Após a análise dos vídeos, apoiada na transcrição literal das poucas falas, na descrição de algumas situações e nas imagens produzidas através de prints, constato que as falas, as escolhas e as estratégias de cálculo utilizadas pelos estudantes permitem mais de uma interpretação. Além disso, percebo que deixei de fazer algumas perguntas específicas e de capturar detalhes da produção dos mesmos que poderiam fornecer esclarecimentos adicionais. Destaco, principalmente, a necessidade de compreender os momentos de silêncio dos estudantes durante os jogos. Eles estavam intensamente concentrados e demonstravam pouco interesse em conversar sobre seus processos de pensamento, focando exclusivamente em acertar os cálculos aditivos para vencer a partida.

Acredito que a disputa em jogos é saudável, pois o estudante está se auto desafiando e não, necessariamente, competindo com o colega. E, ainda que exista a competição, ela pode ser bem equilibrada, como algo justo e divertido, com respeito às regras. Ao jogar, percebo que o estudante pode aprender as operações aditivas no conjunto dos números inteiros. O jogo proporciona uma imersão pelos estudantes em uma determinada situação, levando-os a colaborar mutuamente e desenvolver novas estratégias e soluções para as questões apresentadas. Assim, entendo que a dinâmica do jogo em dupla pode facilitar, em particular, a compreensão do conceito de adição e subtração envolvendo números negativos e positivos.

É importante reforçar que o campo conceitual das operações com números inteiros muitas vezes é de difícil compreensão para os estudantes, devido ao caráter abstrato que evidencia. Quando a adição de números negativos é apresentada, normalmente se busca relações com perdas e ganhos e se enfatiza as regras de sinais. O sinal de menos é visto, por exemplo, como um artifício para expressar algo que se convencionou negativo, oposto ao que se convencionou positivo. No entanto, ainda que sejam abstratos, os números negativos sempre foram muito úteis na resolução de cálculos numéricos e no desenvolvimento teórico da Matemática. Mesmo em situações do nosso cotidiano esses números surgem constantemente como pontos de referência e como respostas de cálculos. Por tudo isso, destaco a necessidade de se estudar as propriedades e as características operatórias deste campo numérico.

Cada um dos jogos que apresentei aos estudantes teve como finalidade expor diferentes situações que ajudaram no entendimento do campo conceitual em estudo. Além disso, vários outros conceitos, também necessários para a resolução de problemas do campo aditivo, foram utilizados, já que quando tratamos de um conceito, outros estão interligados.

Os “Jogos de Corrida” priorizaram, por exemplo, a destreza de fazer adições e subtrações com números inteiros, ou seja, esses jogos estimularam o estudante a agilizar seu pensamento e incorporar aos seus mecanismos operatórios básicos a ideia de juntar quantidades positivas com negativas, de tirar algo positivo de algo negativo e até de diminuir uma quantia negativa de outra também negativa, enfim, tudo isso contribui para a flexibilização do pensamento operatório do estudante.

Após a descrição interpretativa de ambos os jogos e dos dados coletados, um aspecto relevante a ser explorado é a natureza dos esquemas e invariantes operatórios que os estudantes mobilizaram em cada uma das atividades, à luz da teoria do campo conceitual de Vergnaud. É plausível argumentar que as dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao jogarem podem derivar do número limitado de situações que eles haviam experimentado até então no campo conceitual aditivo em $\mathbb{Z}$. A partir das considerações apresentadas neste trabalho sobre a teoria de Vergnaud, destaco que o desenvolvimento de competências matemáticas requer exposição a uma variedade de contextos e problemas que permitam aos estudantes construir esquemas operatórios robustos e adaptáveis.

No caso dos jogos de corrida (Corrida dos Dinossauros e Corrida dos Músculos e os Esqueletos), os esquemas, conforme já foi destacado, são entendidos como competências, pois envolvem algoritmos estruturados que os estudantes aplicam de maneira sistemática para resolver as operações matemáticas propostas. Em contraste, no primeiro jogo (Trilha Humana), os esquemas são mais diversificados, não se restringindo a soluções algoritmizadas, uma vez que os estudantes buscavam soluções mais exploratórias, criativas e menos automatizadas. Portanto, as dificuldades que surgiram nessa etapa do trabalho, possivelmente têm relação mais com a adaptação às condições do jogo e com a falta de familiaridade com o campo conceitual em estudo, do que com habilidades operatórias específicas.

Para fortalecer a análise da primeira atividade, Trilha Humana, os dados coletados foram examinados à luz das categorias propostas por Vergnaud (2014), proporcionando uma estrutura robusta para a interpretação dos resultados. Este jogo permitiu aos estudantes aplicar esquemas de transformação direta no campo aditivo, conforme descrito por Vergnaud, onde os participantes operaram movimentos no tabuleiro com base nos resultados dos dados lançados. A análise focalizou não apenas os aspectos operacionais das transformações realizadas pelos estudantes, mas também a forma como eles perceberam e resolveram as situações de movimento e posicionamento no jogo.

Ao ancorar a análise nas categorias de Vergnaud, foi possível observar como os estudantes aplicaram conceitos como a relação entre adição e movimento no espaço, a compreensão das transformações numéricas envolvidas e a habilidade de comparar e calcular distâncias no contexto do jogo. Essa abordagem estruturada não só elucidou os processos cognitivos dos participantes, mas também destacou a relevância das estratégias empregadas e as conexões feitas pelos estudantes entre o jogo e conceitos matemáticos fundamentais.

Assim, a utilização das categorias de Vergnaud proporcionou uma base teórica sólida para explorar e interpretar profundamente os dados obtidos da atividade da trilha, enriquecendo a compreensão dos processos de aprendizagem matemática dos estudantes durante a resolução de problemas práticos e contextualizados.

No jogo Trilha Humana identifico esquemas de resolução de transformação direta (primeira categoria) no campo aditivo. Por exemplo, quando o estudante estava em uma determinada posição do tabuleiro e jogava o dado, ele operava de modo que, dado um valor inicial (posição do tabuleiro) e a transformação (envolvendo a jogada dos dois dados), o estudante encontrava o valor final (a nova posição no tabuleiro). Nesse jogo, também observo esquemas de resolução envolvendo a comparação entre os números (terceira categoria), ação necessária para o cálculo da distância entre os estudantes. Por exemplo, quando um estudante estava em uma posição diferente da posição do outro, para calcular a distância, era necessário comparar esses números, usando a diferença entre eles.

Nos jogos digitais de corrida também foram utilizados esquemas de resolução de transformação direta no campo aditivo, pois os estudantes trabalhavam de modo que dois números se compõem para resultar em um terceiro número, ou seja, aparecia na tela do computador situações do tipo “a $\pm$ b”, onde “a” e “b” são números inteiros, resultando em um número inteiro “c”, sendo que esse os estudantes precisavam encontrar. Além disso, identifico a comparação entre os números na localização dos jogadores em relação à linha de chegada, bem como na localização entre o estudante e o computador.

Ressalto que não identifiquei a transformação indireta nos três jogos utilizados, ou seja, não encontrei registro do esquema que consiste em, dado um todo e uma das partes, encontra-se a outra parte.

De modo geral, as atividades com jogos promoveram a aprendizagem ativa em diferentes situações que surgiram nas jogadas, fazendo com que os estudantes mobilizassem esquemas distintos, evidenciando a ampliação do campo conceitual relacionado aos números inteiros. Esse processo de construção de esquemas é essencial para uma compreensão profunda e duradoura dos princípios matemáticos, capacitando os estudantes a aplicarem seu conhecimento em diferentes contextos e situações.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir do estudo bibliográfico realizado, principalmente a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, e da pesquisa experimental realizada em 2022, com uma turma do sétimo ano de uma escola municipal de Porto Alegre/RS, identifico que ao transcender o uso de estratégias tradicionais de ensino, foi possível alcançar uma educação dinâmica e inovadora. Interpreto como exitosa esta experiência de abordagem das operações aditivas em $\mathbb{Z}$, através da utilização de jogos, tendo a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud como aporte teórico para planejar minha ação pedagógica e interpretar as condutas cognitivas dos estudantes. Nesses moldes, penso a sala de aula como um espaço que proporciona momentos de interação entre os estudantes, fator importante para a socialização e a construção significativa do conhecimento.

Os desafios relacionados a cada jogo ajudaram os estudantes a fazer suas próprias relações entre o jogo e os conceitos e teoremas envolvidos. As propriedades, situações e resoluções descobertas foram diversas, permitindo a utilização de diferentes formas de linguagem, tais como, desenhos, tabelas, contas, gestos, entre outras formas de expressão. Portanto, diante dos registros de cada situação problema, ao identificar e compreender os esquemas produzidos pelos estudantes, torna-se possível compreender as diferenciadas maneiras de evolução dos conceitos envolvidos na resolução das atividades propostas.

A análise dos dados revela uma diversidade de situações que exploram o campo aditivo dos números inteiros. Este estudo enfatiza a importância de apresentar aos estudantes uma variedade de propostas desafiadoras e significativas em sala de aula, facilitando assim uma construção conceitual robusta. Com relação ao desenvolvimento dos estudantes durante o processo de aprender, observo que a aquisição das estruturas aditivas com números inteiros não se limita ao conhecimento de conceitos ou propriedades isoladas. Pelo contrário, envolve múltiplas experiências e perspectivas que conduzem à compreensão gradual de conceitos e à aquisição de competências em um campo conceitual.

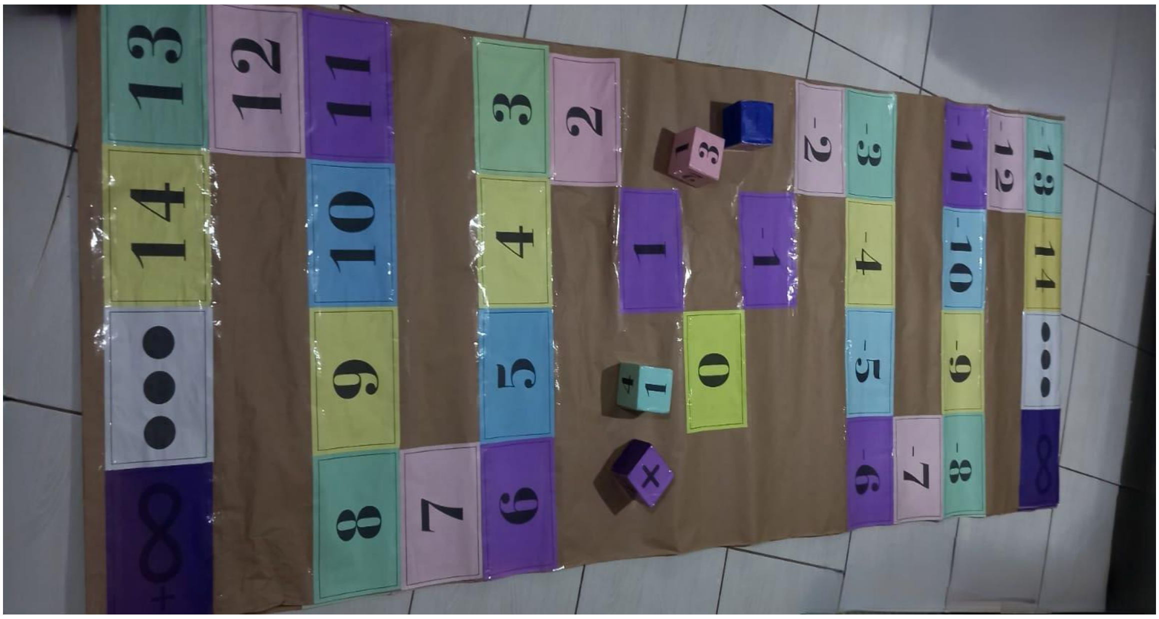
Adicionalmente, cada campo conceitual abrange uma variedade de símbolos, esquemas e situações que são fundamentais para o entendimento e utilização dos conceitos e teoremas pertinentes. Os esquemas observados durante a prática indicam a ocorrência de processos de representação simbólica e de transferência de conceitos, pertinentes e compatíveis com o campo investigado nesta pesquisa.

Enquanto os estudantes jogavam, eles mobilizavam conceitos matemáticos, desde conceitos básicos, como somar pontos para ver quem ganhou, até conceitos mais avançados, como aplicar regras de sinais que ainda não haviam aprendido formalmente. Concomitantemente, faziam descobertas, usavam hipóteses, deduções, tudo isso desenvolvendo raciocínio lógico que contribuiu para o desenvolvimento da proposta. Assim, posso afirmar que os estudantes, ao imergirem nos jogos, atingiram a compreensão do conteúdo, pois se entregaram sem preconceitos em relação à matemática e, principalmente, sem medo do julgamento de estar certo ou errado.

A experiência com os jogos possibilitou, inclusive, que conceitos matemáticos complexos pudessem ser abordados, como é o caso do próprio número negativo, de reta numérica e, também, de infinito. Relativo a esse último, quero reforçar o que disse anteriormente, acerca da ausência do símbolo de reticências, antes do sinal do infinito, no tabuleiro do jogo Trilha Humana. A reticência é um sinal de pontuação utilizada para representar a omissão de uma infinidade de números, mas, no caso do jogo, também cria uma lacuna que pode ser preenchida pela imaginação do estudante.

A inclusão desse símbolo de reticência é essencial para que os estudantes reconheçam que os números são infinitos, tanto no sentido positivo, quanto no negativo, ou seja, que não é possível escrever todos os números desse conjunto. Diante dessa necessidade, proponho um novo tabuleiro para a trilha, adicionando o símbolo de reticências antes do símbolo do infinito, como mostra a Figura 17.

Figura 17: Nova versão da Trilha Humana



Fonte: Elaborada pela autora, 2024

A presença do lugar físico do infinito pode ser vista como um obstáculo para iniciar sua compreensão, mas é essencial que o docente intervenha para facilitar essa transição do concreto para o abstrato. A intervenção pedagógica pode incluir atividades que ajudem os estudantes a entender que é impossível representar a infinidade de números do conjunto dos inteiros. Pois, mesmo tomando um número inteiro n positivo, sempre será possível encontrar um número sucessor inteiro n+1. Analogias, modelos visuais variados e discussões conceituais que conectem o símbolo com a ideia matemática podem ser utilizados pelo professor para auxiliar neste entendimento.

Portanto, enquanto o Jogo da Trilha Humana oferece uma oportunidade valiosa para os estudantes se engajarem com conceitos matemáticos complexos, como o infinito, a eficácia dessa experiência educacional depende da orientação atenta do docente para superar possíveis obstáculos epistemológicos e promover uma compreensão mais profunda e significativa.

A partir da prática pedagógica desenvolvida e analisada, ouso afirmar que os jogos na sala de aula podem desempenhar um papel crucial no aprimoramento do aprendizado da matemática, oferecendo um ambiente interativo que promove a compreensão conceitual e a aplicação prática dos conteúdos. Ao integrar jogos educativos, os estudantes são expostos a desafios matemáticos de maneira lúdica e envolvente, o que facilita a construção de conceitos e o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas. Além disso, os jogos fomentam a motivação e o engajamento, permitindo que os estudantes experimentem diferentes estratégias e recebam *feedback* imediato. Por outro lado, uma prática desta natureza também possibilita que o docente interaja de forma dinâmica com os estudantes, estimulando suas produções de esquemas e interpretando os resultados alcançados, seja através da comparação de respostas aos problemas e desafios, através da observação de cálculos e representações utilizados por eles e, até mesmo, através da identificação de atitudes de prazer e satisfação expressas por eles.

A partir da análise realizada, entendo que os jogos podem ser fortes aliados do docente em sala de aula, pois foi marcante o quanto os estudantes se envolveram com o conteúdo, buscando desenvolver seus esquemas e aprendendo enquanto se divertiam jogando. Os estudantes percebiam, constantemente, que estavam enfrentando suas dificuldades para resolver as situações que surgiam no jogo. Muitos conseguiam entender e superar os obstáculos, no decorrer da prática, e compartilhavam as dúvidas e as respostas com seus colegas.

Portanto, posso concluir que tanto a prática do jogo físico Trilha Humana, quanto dos jogos digitais/virtuais de Corrida são eficazes e válidos para o aprendizado e o desenvolvimento pedagógico de estudantes, visto que, durante a prática proposta para fins deste estudo, os estudantes participantes, ao jogarem, desenvolveram autonomia, raciocínio lógico e competências matemáticas.

Assim, ao analisar como uma proposta pedagógica, estruturada a partir de um jogo de tabuleiro e dois jogos digitais e direcionada ao campo conceitual das estruturas aditivas com números inteiros, mobiliza os estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental a desenvolverem esquemas conceituais, posso concluir de forma positiva sobre o alcance dos objetivos. A elaboração e utilização de jogos que promovem a construção de esquemas voltados às estruturas aditivas em $\mathbb{Z}$ resultam em uma prática eficaz, tornando possível a identificação de aspectos favoráveis à aprendizagem dos estudantes. Além disso, ao observar os esquemas utilizados pelos estudantes na resolução das atividades, fica evidente que essas abordagens não só facilitam a compreensão dos conceitos, mas também incentivam o desenvolvimento de habilidades cognitivas e estratégicas, de forma engajadora e motivadora.

REFERÊNCIAS

ALVES, F. G. **Como criar experiências de aprendizagem engajadoras.** Um guia completo: Do conceito à prática. 2. ed. São Paulo: DVS Editora, 2015.

BECK, M. M. **Campo Aditivo no Conjunto dos Números Inteiros:** um estudo a partir da Teoria dos Campos Conceituais. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Porto Alegre, BR – RS, 2019.

BINI, M. B. **Atividades Interativas como Geradoras de Situações no Campo Conceitual da Matemática.** Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande Do Sul, Porto Alegre, 2008.

BAUMGARTEL, P. **O uso de jogos como metodologia de ensino da Matemática.** Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Regional de Blumenau, Curitiba – PR, 12 a 14 de novembro de 2016. Acesso em: 12 de junho de 2022.

BORIN, C. **Jogos Digitais**: uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: USP, 2015.

CARVALHO Jr., G. D.; AGUIAR Jr. O. Os campos conceituais de Vergnaud como ferramenta para o planejamento didático, Belo Horizonte, MG, Faculdade de Educação UFMG, **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**., v. 25, n. 2: p. 207-227, ago. 2008.

CORDEIRO, M. J.; SILVA, V. N. da. A Importância dos Jogos para a Aprendizagem da Matemática. **Revista Científica Eletrônica de Ciências Sociais Aplicadas da Eduvale**. Publicação científica da Faculdade de Ciências Sociais Aplicadas do Vale de São Lourenço Jaciara/MT, 2017.

EISERMANN, J.; et al. **Ensino da Função Exponencial**: Explorando uma Abordagem Lúdica. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia. Farroupilha: Campus Santa Rosa, 2017.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FIOREZE, L. A. **Atividades Digitais e a Construção dos Conceitos de Proporcionalidade: Uma Análise a Partir da Teoria dos Campos Conceituais.** Uma tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito para obtenção do título de Doutora em Informática na Educação, 2010.

FLICK, U. **Qualidade na pesquisa qualitativa.** São Paulo: Artmed Editora S.A., 2009.

GAMA, R. F. **Uso de jogos digitais como artefatos para o ensino de função do primeiro e segundo graus.** 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade de Pelotas, Pelotas, 2016.

GEORGE, L.; *et al.* Matemática Financeira: Contextos e Aplicações por meio de jogos.II. **Encontro de Ludicidade e Educação -** Barreiras, BA, 2017.

GOMES, F.T.B. **ensino e aprendizagem de números inteiros utilizando o jogo “Cartas Matemáticas”.** 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Ciência, Tecnologia e Educação) – Faculdade do Vale do Cricaré, São Mateus – ES,2019.

GONZALEZ, J. L. *et al*. **Numeros Enteros**. Madrid : Editora Sintesis, S.A., 1990.

HAGUENAUER, C. J. ; FABRÍCIA, S. C. ; VICTORINO, A. L. Q. ; LOPES, M.C.A. ; Cordeiro, F. Uso de jogos na educação online: a experiência do LATEC/UFRJ. **Revista Educa online**, UFRJ, v. 1, nº 1, p.1-14, jan/abr, 2007.

HUIZINGA, J. **Homo Ludens**: o jogo como elemento da cultura. São Paulo: Perspectiva, 2000.

PINHEIRO, C. M. P. **Apontamentos para uma aproximação entre jogos digitais e comunicação**. Tese de Doutoramento. PUC, 2017.

LARA, I. M. de. **Jogando com a matemática na educação infantil e anos iniciais**. São Paulo: Respel, 1998.

LINARDI, P. R. **Quatro jogos para números inteiros: uma análise.** Dissertação de Mestrado, Curso de Pós - Graduação em Educação Matemática - Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos – Científicos. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro – SP, 1998.

MELO, S. A.; SARDINHA, M. O. B. Jogos no Ensino Aprendizagem de Matemática: Uma Estratégia para Aulas Mais Dinâmicas. **Revista F@pciência**, Apucarana-PR,v.4, n. 2, p. 5-15, 2009.

MIORIM, M. A.; FIORENTINI, D. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim da SBEM-SP**, São Paulo, v. 4, n. 7, p. 5-10, 2019.

MORAIS, A. D. **Fórmula (-1)**: **desenvolvendo objetos digitais de aprendizagem para as operações com números positivos e negativos**. Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2010.

MORAN, J. M.; MASETTO, M.T.; BEHRENS, M.A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica** - Campinas, SP: Papirus. 2000.

MOREIRA, M. A. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências,** v. 7, n.1, p. 7-29, 2002. Acesso em: 10 jan. 2022.

MUNIZ, C. A. **Brincar e jogar:** enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

MUSSI, *et al*. Pesquisa Quantitativa e/ou Qualitativa: distanciamentos, aproximações e possibilidades**. Revista SUSTINERE,** Rio de Janeiro, v. 7. n.2, p. 414-430, jul-dez, 2019.

NUERNBERG, I. da S. **GeoGebra**: um recurso na construção do conhecimento de área e perímetro. 2016. Trabalho de Graduação na Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Foz do Iguaçu, 2016.

PINHEIRO, P. G. R.. **Criação e adaptação de jogos para o GeoGebra.** Teófilo Otoni: UFVJM, 2007.

REZENDE JUNIOR, M. F.; CUSTÓDIO, J. F. **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud**: considerações para propostas de inserção da física moderna no ensino médio. IV. Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências. Bauru, SP, 25-29 de novembro, 2003.

ROCHA, E. **Estratégias de resolução de problemas do campo aditivo**: uma abordagem na perspectiva da teoria dos campos conceituais. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2019.

SANTAELLA, L,; FEITOZA, M. **Mapa do Jogo** - A diversidade cultural dos games. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

SANTANA E.; ALVES A. A.; NUNES C. B. A. Teoria dos Campos Conceituais num Processo de Formação Continuada de Professores. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 29, n. 53, p. 1162-1180, dez. 2015.

SMOLLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender Matemática. Porto Alegre: Artmed, 2011.

SAVI, R.; ULBRICHT, V. R. Jogos digitais educacionais**:** benefícios e desafios. CINTED-UFRGS, **Novas Tecnologias na Educação**, V. 6 Nº 2, Dez., 2008. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/renote/article/view/14405/8310>. Acesso em 8 nov. 2021.

SILVA, S. L. D.; SCHEFFER, N. F. O jogo digital *on-line* e as funções cognitivas de atenção e memória em Matemática: um estudo em neurociências**. RBECM - Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática,** Passo Fundo, v. 2 n. 1, p. 150-171, jan. / jul., 2019.

STAREPRAVO, A. R. **Jogando com a Matemática**: números e operações. Curitiba: Aymará, 2009.

VERGNAUD, G. Teoria dos Campos Conceituais. **Anais do 1º seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro.** Rio de Janeiro: IM / UFRJ, P.1-26, 1993.

VERGNAUD, G. Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. **Didáctica das matemáticas.** Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, P. 155–191, 1996.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução Maria Lucia Faria Moro; revisão técnica: Maria Tereza Carneiro Soares. ed. rev. Curitiba: Ed. da UFPR, 2014.

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu,______________________________________, R.G. ______________, declaro, por meio deste termo, que concordei que o(a) estudante ____ participasse da pesquisa intitulada "**JOGOS FÍSICOS E DIGITAIS: UM FACILITADOR DA APRENDIZAGEM DAS ESTRUTURAS ADITIVAS NO ÂMBITO DOS NÚMEROS INTEIROS"**, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) Eliane de Fraga Silveira. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pela Profª. Drª. Leandra Anversa Fioreze, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone (51) 995391963 ou e-mail: leandra.fioreze@gmail.com.

Tenho ciência de que a minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são: **compreender como os estudantes constroem sua aprendizagem ao fazer uso de jogo de trilha e dos jogos *online* envolvendo problemas e cálculos com números inteiros. Além disso, observar se a partir da ação de jogar *online* os estudantes conseguem resolver problemas e cálculos com números inteiros, através da utilização dos conceitos-em-ação e dos métodos-em-ação.**

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) estudante serão usados exclusivamente em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade. A colaboração com a produção de dados para a pesquisa se dará por meio de entrevista/questionário escrito, etc, bem como por meio da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que o(a) estudante será observado(a). Cabe ressaltar que a produção será analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a participação do(a) estudante(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades exclusivamente acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários, etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos(as) participantes ao precisarem responder a algumas perguntas sobre o desenvolvimento de seu trabalho. A fim de amenizar este desconforto será mantido o total anonimato dos(as) participantes. Além disso, asseguramos que o(a) estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação.

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre **a compreensão de novas metodologias de ensino que estimulem os estudantes no processo de construção do conhecimento e colaborem para a aprendizagem de Matemática** a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional. A colaboração do(a) estudante se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado. Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço: **Rod. Coronel Acrísio Martins Prates, 418 – Viamão, RS** /telefone **(51) 997234156** /e-mailprof.silveira.eliane@gmail.com.

Porto Alegre, ____ de _____________ de ______.

Assinatura do Responsável:____

Assinatura do(a) pesquisador(a): ____

Assinatura do Orientador(a) da pesquisa: __________________________________

APÊNDICE B – TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA UTILIZAÇÃO DE IMAGEM E SOM DE VOZ PARA FINS DE PESQUISA

Eu, ____, autorizo a utilização da minha imagem e som de voz, na qualidade de participante/entrevistado(a) no projeto de pesquisa intitulado **"JOGOS FÍSICOS E DIGITAIS: UM FACILITADOR DA APRENDIZAGEM DAS ESTRUTURAS ADITIVAS NO ÂMBITO DOS NÚMEROS INTEIROS**", sob responsabilidade de **Eliane de Fraga Silveira** vinculado(a) ao **Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)**.

Minha imagem e som de voz podem ser utilizados apenas para transcrição da minha participação e análise por parte da equipe de pesquisa. Tenho ciência de que não haverá divulgação da minha imagem nem som de voz por qualquer meio de comunicação, sejam elas televisão, rádio ou internet, exceto nas atividades vinculadas ao ensino e a pesquisa explicitadas anteriormente. Tenho ciência também de que a guarda e demais procedimentos de segurança com relação às imagens e sons de voz são de responsabilidade do(a) pesquisador(a) responsável.

Deste modo, declaro que autorizo, livre e espontaneamente, o uso para fins de pesquisa, nos termos acima descritos, da minha imagem e som de voz.

Este documento foi elaborado em duas vias, uma ficará com o(a) pesquisador(a) responsável pela pesquisa e a outra com o(a) participante.

Porto Alegre, _____ de _____________ de 2023.

____
Assinatura do (a) participante

____
Nome e Assinatura do(a) pesquisador(a)

APÊNDICE C – CARTA DE ANUÊNCIA DA ESCOLA

O(A) Diretor(a) da escola ____, localizada na cidade de ______________________________ declara estar ciente e de acordo com a participação dos estudante(s) e/ou professor(es) desta escola nos termos propostos no projeto de pesquisa intitulado **"JOGOS FÍSICOS E DIGITAIS: UM FACILITADOR DA APRENDIZAGEM DAS ESTRUTURAS ADITIVAS NO ÂMBITO DOS NÚMEROS INTEIROS**", que tem como objetivos **compreender como os estudantes constroem sua aprendizagem ao fazer uso de jogo de trilha e dos jogos *online* envolvendo problemas e cálculos com números inteiros. Além disso, observar se a partir da ação de jogar *online* os estudantes conseguem resolver problemas e cálculos com números inteiros, através da utilização dos conceitos-em-ação e dos métodos-em-ação.**

Este projeto de pesquisa encontra-se sob responsabilidade do(a) professor (a)/pesquisador(a) **profª. Drª.Leandra Anversa Fioreze**, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) e é desenvolvido pelo(a) acadêmico(a) **Eliane de Fraga Silveira,** vinculado(a) ao PPGEMAT (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática).

A presente autorização está condicionada ao cumprimento dos requisitos das resoluções 466/2012 e 510/2016 do Conselho Nacional da Saúde, Ministério da saúde, comprometendo-se os pesquisadores a usar os dados pessoais dos sujeitos da pesquisa exclusivamente para fins científicos, mantendo o sigilo e garantindo a não utilização das informações em prejuízo dos sujeitos.

Porto Alegre, _____ de ______________ de 2023.

Nome do(a) Diretor(a): ____

Assinatura____

Professor(a)/Pesquisador(a) responsável (UFRGS): **Leandra Anversa Fioreze**

Assinatura ____

APÊNDICE D – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TALE

Você está sendo convidado (a) a participar como voluntário do projeto de pesquisa **"JOGOS FÍSICOS E DIGITAIS: UM FACILITADOR DA APRENDIZAGEM DAS ESTRUTURAS ADITIVAS NO ÂMBITO DOS NÚMEROS INTEIROS**", sob responsabilidade do(a) professor/pesquisador(a) Leandra Anversa Fioreze, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). O estudo será realizado com estudantes do 7º ano que se disponibilizarem a participar da pesquisa, da turma 71 do Ensino Fundamental II.

Os seus pais (ou responsáveis) autorizaram você a participar desta pesquisa, caso você deseje. Você não precisa se identificar e está livre para participar ou não. Caso inicialmente você deseje participar, posteriormente você também está livre para, a qualquer momento, deixar de participar da pesquisa. O responsável por você também poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento.

Você não terá nenhum custo e poderá consultar o(a) pesquisador(a) responsável sempre que quiser, por e-mail ou pelo telefone da instituição, para esclarecimento de qualquer dúvida.

Todas as informações por você fornecidas e os resultados obtidos serão mantidos em sigilo, e estes últimos só serão utilizados para divulgação em reuniões e revistas científicas. Você será informado de todos os resultados obtidos, independentemente do fato de estes poderem mudar seu consentimento em participar da pesquisa. Você não terá quaisquer benefícios ou direitos financeiros sobre os eventuais resultados decorrentes da pesquisa.

Este estudo é importante porque seus resultados fornecerão informações sobre o uso de jogos *online* como ferramenta de ensino de Matemática, buscando proporcionar para os estudantes um ambiente pedagógico favorável ao raciocínio, à criatividade, à reflexão e à construção do conhecimento de modo que contribua para seu aprendizado de Matemática.

Diante das explicações, se você concorda em participar deste projeto de pesquisa, forneça o seu nome e coloque sua assinatura a seguir.

Nome:____

Data: __________________________, ____ de ________________ de 2023.

______________________________	______________________________
Participante	Pesquisador(a) responsável

OBS.: O termo apresenta duas vias, uma destinada ao participante e a outra ao pesquisador.