UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Matheus Erpen Benincá

CONSTRUINDO CONSONÂNCIAS:

UMA PRÁTICA INTERDISCIPLINAR ENTRE
MATEMÁTICA E MÚSICA NO ENSINO MÉDIO

Porto Alegre
2024

MATHEUS ERPEN BENINCÁ

CONSTRUINDO CONSONÂNCIAS:
UMA PRÁTICA INTERDISCIPLINAR ENTRE
MATEMÁTICA E MÚSICA NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera

Porto Alegre
2024

MATHEUS ERPEN BENINCÁ

CONSTRUINDO CONSONÂNCIAS: UMA PRÁTICA INTERDISCIPLINAR ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso

Aprovado pela Banca Examinadora em 07 de fevereiro de 2024.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera
Orientador

Prof.ª Dra. Andreia Dalcin
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Marcus Vinícius de Azevedo Basso
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Para Paola, com amor.

I know how much I lean on you
Only you can see
The changes that I've been through
Have left a mark on me

You've been as constant as a Northern Star
The brightest light that shines
It's been you, woman
Right down the line

AGRADECIMENTOS

Ao concluir este trabalho, em meio a tantos outros compromissos, dificuldades e superações, compreendi a verdadeira importância da seção de agradecimentos. Sem a ajuda de vocês, não sei se – ou quando – eu teria conseguido. Mas fico feliz em escrever que *conseguimos*.

Primeiramente, agradeço ao professor Alexandre, orientador deste trabalho. Nossos diálogos me despertaram momentos de reflexão que foram fundamentais no planejamento das atividades. Mas, mais do que isso, agradeço a liberdade que recebi na disciplina de História da Matemática, quando realizei o trabalho final avaliativo sobre as relações históricas entre matemática e música – temática que eu mesmo pude escolher. A desconstrução de metodologias tradicionais de avaliação foi fundamental para que eu desse os primeiros passos desta pesquisa. De fato, como um colega já havia me dito, você é um professor de “mão cheia”.

Agradeço à minha namorada, Paola, por estar ao meu lado em todos os momentos dessa trajetória, sempre incentivando que eu continuasse cursando a Licenciatura. As tuas ajudas com a viabilização do trabalho junto à escola, apesar de fundamentais, chegam a ser modestas perto do grande exemplo que tu me proporcionaste sendo a professora e a pessoa incrível que és. Obrigado por me ensinar a perceber os encantamentos da vida com maior atenção.

Ao grande amigo Guilherme Zaffari, agradeço a ajuda com a construção do monocórdio, trabalho impecável de valor inestimável. Mas, mais do que isso, te agradeço pela nossa amizade, desde os primeiros acordes compartilhados no violão, cerca de vinte anos atrás. Direta e indiretamente, a tua participação neste trabalho foi fundamental.

Agradeço à professora Laura Matte, por ter contribuído de forma tão significativa com o planejamento e a aplicação da prática no segundo encontro. Aproveito para agradecer aos professores Jader e Dennis, pela participação nos encontros; e à equipe da DPEI da Escola Liberato, em especial à professora Iula, pela ajuda com a viabilização do Curso de Extensão.

Agradeço à amiga Adriana Marcon e ao amigo João Marcon, pelo empréstimo do baixo elétrico e do ukulele, que foram fundamentais na prática do segundo encontro.

Agradeço a todas e todos os estudantes que participaram do Curso de Extensão: sem vocês, essa pesquisa não existiria. Obrigado por comparecerem na escola em dois sábados de manhã, apesar das chuvas torrenciais, e terem participado de forma tão efetiva. Vocês foram incríveis.

Agradeço a todas as professoras e a todos os professores que participaram de minha trajetória até aqui: cada um(a) de vocês influenciou de maneira singular a construção de minha identidade docente. Se hoje formalizo minha formação como professor, muito devo a vocês.

À minha família, agradeço o suporte e o incentivo ao estudo de música e de matemática durante minha infância e juventude. À minha madrinha, Jaqueline, formada em música, por ter me ensinado ritmos e notas musicais desde criança. Ao meu padrinho, Jackson, por ter me presenteado com o álbum *Wish You Were Here* e me apresentado o Pink Floyd, forte influência para este trabalho. Ao meu pai, Hermes, por ter me levado a inúmeros shows de *blues* e de *rock* e por ter incentivado que eu continuasse tocando e estudando violão e guitarra. À minha mãe, Juliana, por ter incentivado meu desenvolvimento matemático e musical, bem como por conduzir as primeiras bandas da época da escola a ensaios e shows. Ao meu avô, Décio, por ter me presenteado com o livro *O Homem que Calculava*, de Malba Tahan, e ter recomendado que eu lesse um conto por dia antes de dormir. À minha vó, Zaida, pelo exemplo diário e por ter sempre me acompanhado de perto nos estudos durante a infância.

Agradeço a todas e todos os colegas do curso de Licenciatura em Matemática que me motivaram a seguir em frente com o curso. Em especial, a Carlos Eduardo, Daniel, Elias e Roberta, pelos trabalhos em grupo e ótimas companhias. Ao colega e amigo Rodrigo Sato, agradeço por ter me ajudado a concluir o último estágio docente em momento tão conturbado de minha vida, bem como por me mostrar a importância social da docência na educação básica, a partir do exemplo como excelente professor que és.

Agradeço a todas e todos os colegas dos cursinhos pré-vestibulares populares dos quais participei. Com vocês, descobri o potencial transformador da educação em uma sociedade tão desigual, que urge mudanças estruturais. Em especial, agradeço a Bruno, Cassandra, Grace, Igor, Josué e Tatiane, colegas e amigos para a vida.

Por fim, mas não menos importante, agradeço às minhas alunas e aos meus alunos da UFRGS e dos cursinhos. Foram vocês que me apresentaram os desafios – mas também as alegrias – que a prática docente pode nos proporcionar.

Hay que trabajar para vivir.
El que no produce algo está viviendo
a costa de algunos que trabajan.

Pero la vida no es solo trabajar.
Hay que dejarle un buen capítulo
para las locuras que tenga cada uno.

Sos libre cuando gastas tiempo
de tu vida en cosas que a ti
te motivan, que te gustan.

Para uno puede ser jugar al fútbol,
para otro pescar, otro investigar
una molécula, otro el arte,
qué sé yo... somos distintos.

Pero tener una causa, tener
una pasión, eso lleva tiempo.

Es una filosofía de vida.

Pepe Mujica

RESUMO

A música e a matemática possuem uma relação milenar na busca por responder à questão fundamental dos intervalos consonantes, isto é, na tentativa de fundamentar cientificamente o fato de determinadas notas musicais soarem agradavelmente em conjunto. Se por um lado a matemática trouxe justificativas a essa questão, desde o experimento do monocórdio, passando por múltiplas interpretações ao longo da história, por outro tais explicações teriam pouco valor se desacompanhadas de percepções sonoras e musicais. Nesse sentido, entendemos que a construção de consonâncias – e das razões numéricas associadas a elas – propicia *experiências sensoriais matemáticas*. O presente trabalho busca realizar a transposição didática dessa construção para a sala de aula, em diferentes contextos históricos, com o objetivo de auxiliar na compreensão e na significação de conceitos matemáticos a alunos do ensino médio. Inicialmente, foi realizada uma pesquisa bibliográfica sobre relações entre matemática, música e educação. Após, uma prática interdisciplinar foi planejada e aplicada na Escola Técnica Liberato Salzano, na modalidade de um Curso de Extensão, e os resultados, reflexões e produções dos estudantes foram analisados e discutidos. O primeiro encontro foi contextualizado na Antiguidade Clássica, abordando a escola pitagórica e o experimento do monocórdio. O segundo encontro abordou a concepção moderna do som como fenômeno físico, a partir da mudança de perspectiva iniciada no Renascimento. As práticas contaram com momentos de percepção e reflexão, além de aulas teóricas e atividades práticas com o monocórdio – construído especificamente para esse trabalho – e outros instrumentos musicais. Dentre os conceitos matemáticos abordados, foi dado maior enfoque às operações com frações e à relação inversamente proporcional entre frequência sonora e comprimento de corda. Contudo, outros conteúdos foram explorados no desenvolvimento das atividades, como médias harmônicas e aritméticas, equações, expansões decimais, sequências e progressões. Com base na participação e nas produções dos estudantes, concluímos que a prática proposta pode contribuir com a compreensão e significação de conceitos matemáticos, embora novas experiências didáticas em outros contextos possam ser realizadas, objetivando conclusões mais abrangentes. Por fim, salientamos a importância de destacar as múltiplas interpretações acerca das consonâncias desenvolvidas ao longo da história: nesse sentido, este trabalho apresenta apenas uma pequena visão de um campo de estudo repleto de possibilidades docentes acerca da construção plural e coletiva por trás relações matemáticas presentes nos intervalos consonantes.

Palavras-chave: Matemática, Música, Consonâncias, Interdisciplinaridade.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

A – Amplitude;

f – Frequência;

k – Número de onda;

L – Comprimento de corda;

r – Razão;

T – Período;

t – Tempo;

v – Velocidade de propagação da onda;

x – Posição ou incógnita;

y – Deslocamento da posição de equilíbrio;

λ – Comprimento de onda;

μ – Densidade linear da corda;

τ – Força de tração aplicada à corda;

ω – Frequência angular.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Dizem que a vida é uma constante busca, mas, por muito tempo, eu não sabia ao certo o que estava buscando. Ainda assim, em meio a um mar de incertezas, a matemática e a música sempre estiveram presentes. Minha relação com a música se aprofundou na adolescência, quando passei a escutar bandas e artistas que fizeram parte da construção de minha identidade. Aos treze anos comecei a tocar violão, por incentivo de um amigo, que me ensinou minha primeira música: um trecho de *Come as you are*, do Nirvana – por coincidência, ou não, trata-se do mesmo amigo que ajudou a construir o monocórdio deste trabalho. Com o passar dos anos, a música adquiriu proporções cada vez maiores em minha vida: me matriculei em aulas de guitarra, montei bandas na escola, fiz amizades e fui a muitos shows. Escutava música praticamente o tempo todo, fosse em momentos felizes ou tristes. Meu pai também influenciou nesse processo, me levando a shows de *blues* e incentivando que eu continuasse tocando guitarra, de forma que, nessa época, pudemos reconstruir e fortalecer nossa relação. Não me tornei músico profissional, mas sigo tocando violão e escutando muita música até hoje.

Por outro lado, foi também na adolescência que comecei a criar gosto pela matemática, especialmente nas aulas de geometria. Ficava fascinado com os problemas propostos, tanto pela representação e visualização das formas geométricas – pois gostava muito de desenhar – quanto pelas múltiplas formas de resolvê-los. A escola, que muitas vezes havia me entediado durante a infância, começou a me despertar um interesse genuíno pelo estudo de conteúdos que me estimulavam a pensar.

Meus gostos pela matemática, por desenho e por artes em geral, inclusive pela música, acabaram sendo determinantes na escolha da Arquitetura como minha primeira graduação. Ingressei no curso muito jovem, aos dezessete anos, com a expectativa de relacionar matemática com artes. Nesse período, apesar de ter desenvolvido ainda mais o gosto pelo desenho e pelo trabalho com formas geométricas, além de cultivar uma certa admiração pela Arquitetura e seus processos criativos, acabei não me adaptando ao currículo proposto e, anos depois, optei por trocar de curso para a Engenharia Civil, área correlata, onde me disseram que estudaria mais matemática. Nessa época, as dúvidas sobre qual caminho seguir eram preponderantes em meus pensamentos, e inclusive cogitei ingressar na Licenciatura em Matemática, mas não segui o plano naquele momento porque tinha a ideia, que hoje avalio como errônea, de que um professor de matemática inevitavelmente acabaria por desempenhar tarefas repetitivas e pouco criativas.

Porém, paralelamente à engenharia, comecei a ministrar aulas de matemática em cursinhos pré-vestibulares populares, onde iniciei a mudar minha percepção: descobri meu gosto pela docência e visualizei o potencial transformador da educação, no qual acredito até hoje.

Os anos se passaram, me formei em engenharia, mas, dentre os diferentes empregos que eu tive, a atuação como professor foi a que mais despertou interesse, principalmente ao perceber que as relações humanas envolvidas na rotina docente transformavam cada dia em um desafio único. Assim, apesar de formado e trabalhando na área, cheguei à conclusão de que deveria direcionar minha carreira e minha formação para a docência, pois eu havia descoberto, ainda que um pouco tardiamente, algo que realmente gostava de fazer e que tinha um forte significado para mim. Foi nesse contexto, em 2017, que decidi trilhar dois caminhos paralelos rumo à carreira docente: o Mestrado em Engenharia, na área de Estruturas, que envolve muita matemática e, em minha visão, também possui um viés artístico e criativo nos processos de idealização e concepção estrutural; e a Licenciatura em Matemática, onde eu poderia aprofundar os conhecimentos lógico-dedutivos e, ao mesmo tempo, ampliar minha formação na área de educação, refletindo sobre a construção de minha identidade docente.

Já na etapa final da Licenciatura, ao cursar a disciplina de História da Matemática – ministrada pelo orientador deste trabalho – tive a liberdade de desenvolver um ensaio sobre as relações históricas entre matemática e música, e, nesse processo, li o brilhante livro do professor Oscar João Abdounur (2015), que me possibilitou visualizar os potenciais didáticos que a aproximação entre essas áreas poderia trazer para a sala de aula. Mais do que isso, fiquei fascinado com a ideia de que a aproximação entre matemática e artes, que eu havia vislumbrado aos dezessete anos, poderia ser finalmente concretizada, e, quem diria, dentro do curso de Licenciatura em Matemática. Ficou comprovado, assim, que as decisões de outrora haviam sido acertadas, apesar dos questionamentos de quem, dentro de uma lógica utilitarista, não compreendia as não-linearidades de minha trajetória. É nesse sentido que considero a concretização deste trabalho – e a conclusão do curso de Licenciatura – como um ato de resistência e perseverança, mas também repleto de beleza e encantamento.

Segundo Abdounur (2015, p. 9-10), tanto a matemática quanto a música estão presentes nas sociedades desde os primórdios da humanidade. Contudo, a interação entre essas áreas fortaleceu-se com a necessidade de equacionar e solucionar o problema da consonância, isto é, na busca de fundamentos científicos que justifiquem porque uma nota musical soa de forma agradável com determinadas notas, mas não tanto com outras.

Por exemplo, ao dividir o comprimento de uma corda em duas partes iguais e fazê-la vibrar, escutamos a mesma nota que era emitida pela corda solta, porém mais aguda. Ao intervalo entre essas notas damos o nome de intervalo de *oitava*, que está relacionado à razão 1/2. Por outro lado, o intervalo de *quinta* perfeita é caracterizado pela razão 2/3, e o intervalo de *quarta* pela razão 3/4. Tais intervalos geram notas consonantes entre si, isto é, que soam agradavelmente em conjunto, e as primeiras explicações racionais para esse fenômeno residiram na matemática, mais especificamente nas razões entre pequenos números inteiros.

A evolução da relação entre matemática e música ao longo da história ocorreu de forma bastante particular, pois ao mesmo tempo em que a matemática buscava trazer justificativas racionais para o fenômeno da consonância, estas dificilmente poderiam ser desenvolvidas sem estímulos musicais. Em outras palavras, podemos dizer que a busca por consonâncias – e pelas razões numéricas associadas a elas – propicia *experiências sensoriais matemáticas*.

A construção de consonâncias, e consequentemente de escalas musicais, foi tomando rumos ligeiramente distintos em diferentes contextos socioculturais, evidenciando tanto a matemática quanto a música como construções humanas. Deste modo, ao trabalhar com relações entre matemática e música, surge a oportunidade didática de abordar a história da matemática e suas potencialidades educacionais intrínsecas.

No campo da educação, estudar matemática e música permite, como elencado por Abdounur (2015), *sentir* o conhecimento matemático, isto é, trazer a questão afetiva e sensorial a uma aula de matemática, gerando sentidos e significados. Muitas potencialidades didáticas são elencadas por Granja (2005), que pondera, por outro lado, o fato de que, infelizmente, a música ainda está longe de ocupar um lugar de destaque nas escolas, especialmente nos anos finais do ensino básico, quando perde espaço para as disciplinas tradicionais. Sendo assim, entendemos que práticas educacionais interdisciplinares entre matemática e música podem potencializar aprendizados de conteúdos matemáticos e, ao mesmo tempo, auxiliar a trazer maior destaque à música nos currículos escolares.

Nesse contexto, o presente trabalho propõe abordar relações entre matemática e música, especialmente no que diz respeito à construção de consonâncias, buscando contribuir na proposição de práticas educacionais que enriqueçam os ambientes escolares.

As diretrizes para desenvolvimento do trabalho são descritas nos próximos itens.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo principal do trabalho é planejar, aplicar e avaliar uma prática de ensino e aprendizagem interdisciplinar, no contexto do ensino médio, envolvendo matemática e música. Mais especificamente, a prática abordará a construção de consonâncias, através da percepção musical e da determinação de relações matemáticas em intervalos e notas musicais.

Dentre os conteúdos matemáticos a serem trabalhados, objetiva-se dar maior enfoque às operações com frações na construção das consonâncias e à relação inversamente proporcional existente entre o comprimento de corda de um instrumento e a frequência de vibração da nota musical emitida. Porém, outros conteúdos da matemática escolar podem surgir no desenvolvimento da prática, como, por exemplo, sequências, médias e equações.

Os objetivos secundários do trabalho são:

a) Realizar uma pesquisa bibliográfica sobre relações entre matemática e música ao longo da história, com enfoque para a construção de consonâncias, intervalos e escalas musicais;
b) Construir um monocórdio para auxiliar os processos de ensino e aprendizagem, especialmente durante a construção de consonâncias e da escala pitagórica;
c) Pesquisar e dialogar com professores de física sobre a visão moderna do som como um fenômeno físico, buscando trazer esse outro olhar para a etapa final da prática proposta.

A pergunta norteadora da pesquisa é:

– A prática interdisciplinar entre matemática e música proposta, com enfoque na construção de consonâncias, pode contribuir para a compreensão e significação de conceitos matemáticos a alunos do ensino médio?

1.2 JUSTIFICATIVA

As relações entre matemática e música são múltiplas e permitem uma vasta gama de práticas educacionais aplicáveis ao ensino básico. Contudo, observa-se que o número de trabalhos envolvendo essa temática ainda não é tão significativo quanto o seu potencial didático. Além disso, dentre as práticas que são propostas, muitas vezes é dado maior enfoque ao estudo do ritmo, a partir de relações entre frações e figuras rítmicas, como, por exemplo, nos trabalhos de

Fernandes (2014), Silva (2015), Pizzi, Silva e Sasaki (2020), Tressino e Malaquias (2014), Silva, Castro e Ramos (2014), entre outros. Sem desmerecer esses trabalhos, que possuem muitas qualidades e grande potencial educacional, faz-se necessário, contudo, ponderar que as notas musicais e as consonâncias, que são importantes para o estudo da melodia e da harmonia, nem sempre são abordadas.

Porém, como será apresentado no próximo capítulo, a busca por consonâncias ao longo da história traça uma forte relação entre matemática e música. A partir das consonâncias propostas em diferentes períodos históricos – e das regras matemáticas utilizadas para construí-las – formam-se as escalas musicais, as quais também foram sofrendo variações e (re)construções ao longo dos séculos. São justamente essas construções que entendemos ter um grande potencial educacional, pois, como salientado por Abdounur (2015), permitem *sentir* a matemática, gerando possibilidades de significação.

Mendes (2017) defende que as matemáticas exploradas por investigações históricas podem ser dinamizadas e mobilizadas para a sala de aula, a partir de transposições didáticas, a fim de viabilizar a aprendizagem de conceitos matemáticos. Nesse contexto, entendemos que a construção de consonâncias e de escalas em contextos históricos permite o desenvolvimento de diferentes conhecimentos matemáticos, possibilitando ao professor ilustrá-los e aprofundá-los.

Por exemplo, ao se trabalhar com a construção da escala pitagórica, as operações com frações podem ser exploradas, possibilitando que os estudantes tenham contato com conceitos matemáticos de forma ilustrada e aplicada. Analogamente, ao se trabalhar com a relação entre o comprimento de corda de um instrumento e a frequência da nota musical emitida, que pode ser percebida sensorialmente através da altura sonora, o estudo de grandezas inversamente proporcionais pode ser desenvolvido. Muitos outros tópicos podem ser abordados, como o estudo de números irracionais a partir da insuficiência dos números racionais em gerar uma escala de igual temperamento. As possibilidades são vastas, e muitas ainda inexploradas.

O trabalho também encontra justificativa na obra de Gardner (1995), que desenvolve a teoria de inteligências múltiplas. Em particular, as inteligências musical e lógico-matemática podem ser trabalhadas em conjunto em uma prática interdisciplinar. A pluralização de inteligências permite o desenvolvimento integral do estudante, inclusive estimulando questões como criatividade e afetividade.

Cabe ressaltar, ainda, que os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000) estimulam a interdisciplinaridade e, em particular, a abordagem relacional de complementaridade entre disciplinas. Nesse contexto, Granja (2005) defende que a música, por envolver a percepção em vários níveis, pode favorecer a articulação entre as diferentes dimensões do conhecimento, possibilitando ampliar e diversificar a natureza das práticas educativas na escola.

Por último, mas não menos importante, o trabalho se justifica por ter um papel significativo na trajetória de construção da minha identidade docente, em função dos múltiplos significados que a música e a matemática adquiriram ao longo de minha vida.

1.3 CONTEXTUALIZAÇÃO DA PESQUISA

Como já mencionado, entendemos que o número de trabalhos envolvendo matemática, música e educação ainda está aquém do ideal, se considerarmos o potencial didático do tema. Contudo, é inegável que muitas contribuições e avanços já foram realizados, incluindo alguns trabalhos desenvolvidos na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, que cabem ser lembrados.

Linck (2010) elaborou uma proposta didática envolvendo matemática e música para o ensino de funções trigonométricas utilizando recursos digitais, que foi aplicada em uma turma de alunos do 3º ano do ensino médio.

Fernandes (2014) construiu e aplicou uma sequência didática no ensino médio explorando as relações entre ritmos musicais e frações por meio de oficinas, inclusive com a utilização de materiais manipulativos de baixo custo, compostos por copos plásticos. Dentre os conteúdos matemáticos abordados, destacam-se as representações de frações e o mínimo múltiplo comum.

Silva (2015) desenvolveu um trabalho de modelagem matemática e utilizou a bateria para estabelecer relações entre o conteúdo de frações e os padrões ritmos musicais, fundamentada nos cenários para investigação propostos por Skovsmose (2000).

Lange (2019) estudou relações existentes entre matemática e música e formas de realizar a sua transposição para a sala de aula sob a perspectiva da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval, planejando e aplicando uma sequência de atividades didáticas por meio de oficinas, incluindo tópicos envolvendo frações, razão, incomensurabilidade, ondulatória, acústica e teoria musical.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No capítulo 1 – *Introdução* – apresentamos ideias gerais sobre a temática abordada e as diretrizes da pesquisa, incluindo objetivos e justificativa.

No capítulo 2 – *Música, Matemática e Educação* – iremos abordar aspectos teóricos que embasaram a prática educacional proposta, aprofundando as relações históricas entre matemática e música e seus potenciais educacionais.

No capítulo 3 – *Metodologia* – iremos explicar como o trabalho foi delineado, incluindo a metodologia de pesquisa empregada, o planejamento das práticas, a construção do monocórdio e a etapa de divulgação e viabilização do curso de extensão proposto junto à Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha.

No capítulo 4 – *Resultados e Discussão* – iremos descrever e analisar as práticas realizadas nos dois encontros, trazendo relatos, fotos e produções dos participantes, elencando nossa percepção sobre resultados obtidos e as potencialidades didáticas de cada etapa.

No capítulo 5 – *Conclusões* – iremos tecer as considerações finais sobre os trabalhos realizados e elencar sugestões de continuidade da pesquisa.

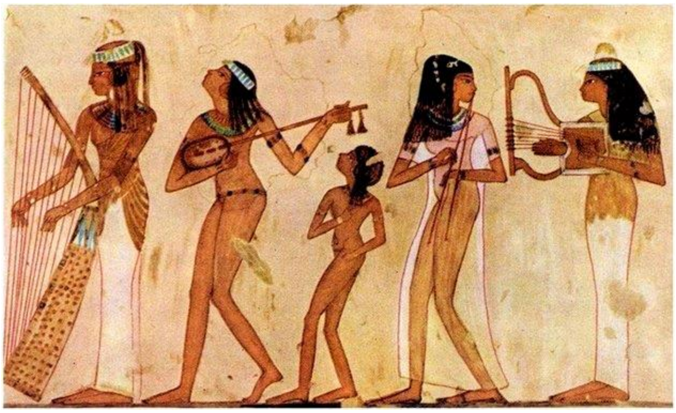
2 MATEMÁTICA, MÚSICA E EDUCAÇÃO

Neste capítulo iremos abordar aspectos históricos envolvendo as relações entre matemática e música, bem como referenciais teóricos de educação e interdisciplinaridade que serão utilizados na transposição didática para as práticas em sala de aula.

2.1 RELAÇÕES HISTÓRICAS ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA

No primeiro capítulo do seu livro, Abdounur (2015) traça um panorama histórico do desenvolvimento das relações entre matemática e música desde a antiguidade. Inicialmente, o autor apresenta o problema clássico pitagórico das consonâncias. Segundo Fallas (1992), atribui-se a Pitágoras a descoberta dos intervalos consonantes, muito embora eles provavelmente já fossem conhecidos de forma empírica por culturas mais antigas. Nesse contexto, Abdounur (2015, p. 28) ressalta que Pitágoras realizou distintas viagens ao Oriente, como, por exemplo, à Síria, Palestina, Arábia, Pérsia e ao Egito, onde permaneceu por alguns anos. Assim, é muito provável que ele tenha sido significativamente influenciado por essas culturas, notoriamente pela cultura egípcia, onde a música se fazia muito presente, conforme ilustrado na figura 2.1.

Figura 2.1 – Representação da música no Egito antigo.



(fonte: Aidar, 2024)

Contudo, segundo Abdounur (2015, p. 26), os primeiros sinais *registrados* da aproximação entre matemática e música surgem no séc. VI a.C., na Grécia Antiga, quando Pitágoras realiza seus experimentos com o monocórdio, buscando fundamentar a questão da consonância, conforme abordaremos em maiores detalhes no próximo item.

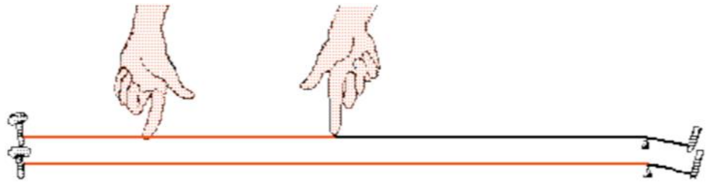
2.1.1 A visão pitagórica

Em um instrumento conhecido como *monocórdio*, Pitágoras (570 a.C. - 500 a.C.) buscou fundamentar matematicamente os intervalos consonantes, isto é, estabelecer relações aritméticas que explicassem as consonâncias musicais (ABDOUNUR, 2015). Basicamente, trabalhando com uma corda esticada e fixa em duas extremidades, ele deslizava um cavalete móvel (figura 2.2) e relacionava frações do comprimento da corda com as respectivas notas musicais emitidas. Dessa forma, percebeu que determinadas frações de corda geravam notas consonantes com a original, isto é, soavam agradavelmente em conjunto. Por exemplo, ao posicionar o cavalete móvel na metade do comprimento da corda e fazê-la vibrar, a nota resultante era consonante com a nota emitida pela vibração da corda inteira solta. Mais do que isso, metade do comprimento da corda gerava a *mesma nota* que a do comprimento total, só que mais aguda, isto é, distanciada em uma *oitava* na nomenclatura musical atual (figura 2.3). Por exemplo, se a nota emitida pela vibração da corda solta for a nota Dó (nesse caso dizemos que a corda está *afinada* em Dó), metade do seu comprimento irá emitir a nota Dó mais aguda. Assim, conclui-se que o intervalo de oitava está relacionado à razão 1/2.

Figura 2.2 – Monocórdio exposto no Museu Nacional Germânico de Nuremberg.

(fonte: Del Comune, 2014)

Figura 2.3 – Obtenção do intervalo de oitava no Monocórdio.



(fonte: Granja, 2005)

Analogamente, Pitágoras percebeu que posicionando o cavalete móvel a 2/3 do comprimento, a nota emitida por essa fração de corda seria consonante com a nota emitida pela corda solta. Hoje sabe-se que a fração 2/3 representa o intervalo de *quinta perfeita*. Por exemplo, se a nota emitida pela vibração da corda solta for a nota Dó, a fração da corda com 2/3 do seu comprimento total irá emitir a nota Sol.

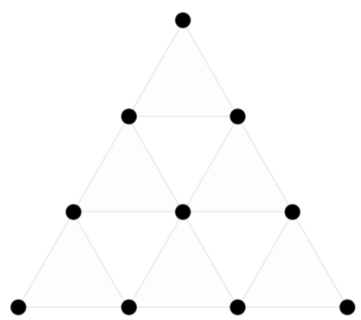
Algo semelhante ocorria ao posicionar o cavalete móvel a 3/4 do comprimento: outra consonância era obtida, nesse caso representando o intervalo que hoje é chamado de *quarta*. Por exemplo, se a nota emitida pela vibração da corda solta for a nota Dó, a fração da corda com 3/4 do seu comprimento total irá emitir a nota Fá. Contudo, ao posicionar o cavalete móvel em posições aleatórias, percebe-se que a obtenção de notas consonantes não é tão comum, isto é, as consonâncias só ocorrem em posições específicas do cavalete, às quais subjazem certas relações matemáticas particulares.

A partir dessas observações, Pitágoras criou a hipótese de que as consonâncias estariam relacionadas com *razões entre pequenos números inteiros*, como 1/2, 2/3 e 3/4. Tal hipótese ia ao encontro da filosofia pitagórica acerca da ideia de número como princípio formador de todas as coisas, conforme descrevem Duarte, Gonçalves e Nóbrega (2017, p. 100):

> “A escola pitagórica, como era conhecida, tinha o *número* como o princípio formador de tudo o que existe. Para eles, o número representava a essência das coisas, até mesmo coisas abstratas como a razão, a beleza e o sofrimento; tudo surgia a partir de alterações e associações de números, dando origem ao universo e a toda matéria que existe.”

Ainda, segundo Duarte, Gonçalves e Nóbrega (2017, p. 103) os pitagóricos associavam o número um ao ponto, o dois à reta, o três à superfície e o quatro ao volume, explicando, assim. que a composição dos *primeiros números* originava todo o Universo e a alma das coisas. Esses quatro números formavam, ainda, a representação pitagórica *tetraktys* (ou tétrade, figura 2.4), uma distribuição numérica triangular, cujos elementos, somados, formavam o número 10, que era considerado perfeito (1 + 2 + 3 + 4 = 10).

Figura 2.4 – *Tetraktys.*



(fonte: Hemenway, 2005)

É interessante perceber, conforme elencado por Granja (2005), que as proporções numéricas da harmonia musical (1/2, 2/3 e 3/4) eram formadas a partir dos elementos da tétrade, que tinha uma conotação simbólica. Nesse âmbito, o autor ressalta que a concepção musical pitagórica não reduzia a música a relações quantitativas, muito pelo contrário: ao relacionar a música com números, que tinham uma característica mítica, simbólica e figurada, os pitagóricos a relacionavam, indiretamente, a coisas mais diversas, como ao céu, ao casamento, à justiça, às formas geométricas, e, de forma mais abrangente, a todo o Universo.

De acordo com Abdounur (2015, p. 30-31), após as descobertas de Pitágoras com o experimento do monocórdio, um sistema musical foi desenvolvido na escola pitagórica a partir de relações simples entre números inteiros. Construindo uma sucessão de intervalos consonantes de quinta, obtém-se a sequência Fá-Dó-Sol-Ré-La-Mi-Si, cujos termos podem ser ordenados e remanejados à oitava inicial, a partir da equivalência de oitavas, gerando a sequência conhecida das sete notas musicais, Dó-Ré-Mi-Fá-Sol-La-Si.

Em nosso entendimento, essa construção possui grande potencial didático, podendo ser abordada em sala de aula de diferentes maneiras. Por essa razão, o processo é descrito em detalhes nos próximos parágrafos e equações.

Primeiramente relacionamos a nota emitida pela vibração da corda solta (que assumiremos, para fins de ilustração, que seja a nota Dó) com o número 1, que representa “uma unidade de comprimento de corda”, não importando a sua medida absoluta. Para construir a *quinta de Dó*, que é a nota Sol, tomamos 2/3 desse comprimento. Depois, para construir a *quinta de Sol*, que é a nota Ré, tomamos 2/3 do comprimento anterior, isto é, multiplicamos 2/3 por 2/3, obtendo 4/9 do comprimento original. Porém, percebe-se que 4/9 é menor do que 1/2, de modo que o Ré associado é mais agudo, estando posicionado uma oitava acima. Assim, a fim de remanejar o Ré para a oitava do Dó inicial, multiplicamos 4/9 por 2 (equivalência de oitavas), obtendo 8/9 do comprimento original. Depois, para construir a *quinta de Ré*, que é a nota La, tomamos 2/3 do comprimento anterior, isto é, multiplicamos 8/9 por 2/3, obtendo 16/27 do comprimento original. Para construir a *quinta de La*, que é a nota Mi, tomamos 2/3 do comprimento anterior, isto é, multiplicamos 16/27 por 2/3, obtendo 32/81, e, ao perceber que 32/81 é menor do que 1/2, multiplicamos por 2 para descer uma oitava, obtendo 64/81. Finalmente, para construir a *quinta de Mi*, que é a nota Si, tomamos 2/3 do comprimento anterior, isto é, multiplicamos 64/81 por 2/3, obtendo 128/243 do comprimento original.

O processo descrito acima pode ser representado pela sequência (2.1), onde a seta (→) representa um intervalo ascendente de quinta (multiplicação por 2/3) e o símbolo (≔) representa uma equivalência de oitava (multiplicação por 2).

$$1 \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \frac{4}{9} \coloneqq \frac{8}{9} \rightarrow \frac{16}{27} \rightarrow \frac{32}{81} \coloneqq \frac{64}{81} \rightarrow \frac{128}{243} \tag{2.1}$$

Percebe-se que a sequência (2.1) representa as notas Dó-Sol-Ré-Lá-Mi-Si, faltando ainda a nota Fá, que é originada a partir de um processo descendente: a nota Dó é a quinta de Fá. Escrevendo essa frase matematicamente, e chamando a razão relativa a Fá de x, temos:

$$x \cdot \frac{2}{3} = 1 \quad \therefore \quad x = \frac{3}{2} \tag{2.2}$$

Ou seja, a nota Fá é dada por 3/2 do comprimento da corda solta, se esta for afinada em Dó. Como 3/2 é maior do que 1, a nota obtida é mais grave do que desejamos, e, além disso, para poder escutá-la teríamos que trabalhar com uma corda maior do que a corda original, o que não é possível, em termos práticos, no monocórdio ou outro instrumento de corda. Assim, multiplicamos 3/2 por 1/2 (equivalência de oitavas), a fim de obter um Fá mais agudo, dentro do intervalo de oitava de interesse. Obtemos, então, a razão 3/4 associada à nota Fá.

Outra forma de obter a razão 3/4, mais simples, é considerar diretamente o Dó de uma oitava acima (mais agudo) na construção, isto é, tomar a razão 1/2 associada a Dó. Nesse caso, o fato de Dó ser a quinta de Fá pode ser escrito matematicamente conforme a equação (2.3).

$$x \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad x = \frac{3}{4} \tag{2.3}$$

Finalmente, podemos ordenar as razões obtidas e construir a tabela 2.1. Percebe-se que a nomenclatura *quinta*, usada para representar o intervalo de quinta entre as notas (como, por exemplo, na frase "*Sol é a quinta de Dó*") pode ser compreendida visualmente nessa tabela, uma vez que Dó é a primeira coluna e Sol é a quinta, ou seja, contam-se cinco notas de Dó até Sol. O mesmo ocorre entre Ré e Lá ou entre Mi e Si, por exemplo. Avaliamos que essa observação, apesar de simples, é bastante importante na transposição didática da escala pitagórica para a sala de aula, uma vez que nem todos os estudantes terão conhecimentos prévios de teoria musical, e pode ser necessário gerar significados para as nomenclaturas utilizadas, como *quinta* e *oitava*. O uso da tabela também é uma oportunidade de trabalhar com os símbolos utilizados na música para cada nota (C-D-E-F-G-A-B) e com o subíndice da oitava correspondente (nesse exemplo tomamos as oitavas de número 3 e 4).

Tabela 2.1 – Tabela de construção da escala pitagórica.

Nota	*Oitava de interesse*							*Oitava acima*		
	Dó	**Ré**	**Mi**	**Fá**	**Sol**	**Lá**	**Si**	**Dó**	**Ré**	**Mi**
Símbolo	C_3	D_3	E_3	F_3	G_3	A_3	B_3	C_4	D_4	E_4
Fração do comprimento de corda	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{32}{81}$

(fonte: adaptado de Abdounur, 2015, p. 32)

A descoberta pitagórica envolvendo a relação entre frações e os intervalos consonantes, segundo Abdounur (2015, p. 27), gerou uma dúvida fundamental que perdurou por milênios no desenrolar das relações entre matemática e música: "*Por que às consonâncias musicais subjazem razões de pequenos números inteiros? Qual é a causa e qual o efeito?*". Para além da explicação simbólica e especulativa acerca dos pequenos números proposta pelos pitagóricos, diversos músicos e matemáticos tentaram responder a essa questão, que norteou o desenvolvimento da ciência musical ao longo da história.

A escala pitagórica, contudo, tinha algumas limitações. Conforme já mencionado, sua construção é baseada em um ciclo de quintas, mas podemos observar que sucessivos intervalos de quinta justa nunca irão coincidir com um ciclo de oitavas, pois é possível demonstrar que, $\forall\ n, m \in N$, obtemos desigualdade (2.4).

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \neq \left(\frac{1}{2}\right)^m \tag{2.4}$$

Por exemplo, conforme explicado por Abdounur (2015, p. 33-34), partindo-se da nota Dó e traçando o percurso de quintas justas (multiplicações por 2/3), o ciclo aparentemente se fecharia novamente em Dó, sete oitavas acima: Dó-Sol-Ré-La-Mi-Si-Fa#-Dó#-Sol#-Ré#-La#-Fa-Dó. Ocorre que nesse caso chega-se a $(2/3)^{12}$, que, embora próximo, é diferente de $(1/2)^7$ por conta de (2.4). De fato, se calcularmos as expansões decimais dessas frações, obtemos, para uma aproximação de 4 casas decimais, 0,0077 e 0,0078, respectivamente. Apesar de parecer uma diferença pequena em termos de comprimentos de corda, a diferença de frequências geradas por essas notas é suficiente para gerar batimentos, sendo usualmente denominada como *coma pitagórica*. Para superar essa imprecisão e forçar o encontro dos dois ciclos ao final, uma prática era desajustar um dos intervalos de quinta do percurso, tomando uma razão ligeiramente diferente de 2/3, que não era consonante, e que ficou conhecida como *quinta do lobo* – ganhando esse nome em função de sua dissonância se assemelhar ao uivo de um lobo.

Outra limitação da escala pitagórica seria uma aparente contradição entre a ideia fundamental de intervalos consonantes serem representados por razões entre pequenos números inteiros e o fato de algumas das frações obtidas para as notas conterem números grandes, como por exemplo para a terça maior, representada por 64/81 (posteriormente, esse valor seria alterado em outras escalas). Por fim, cabe citar que dois intervalos de semitom pitagóricos não resultam em um intervalo de tom. Na tabela 2.1 é possível calcular que as razões entre notas consecutivas são iguais a 8/9 em intervalos de tom (por exemplo entre Ré e Mi) e a 243/256 em intervalos de semitom (por exemplo entre Mi e Fa). Porém, nota-se que $(243/256)^2 \neq 8/9$.

De todo modo, as ideias pitagóricas baseadas em relações aritméticas entre intervalos consonantes e razões de números inteiros perduram pela antiguidade e por grande parte da Idade Média. Muito embora esses períodos históricos tenham trazido inúmeras contribuições[1] e revisões à teoria pitagórica original, inclusive com alterações de algumas frações associadas às notas[2], a ideia fundamental de estudar as consonâncias com base em números e proporções, notoriamente em razões entre números inteiros, permaneceu viva e dominante por muito tempo. Data do período histórico conhecido como Renascimento, cerca de dois milênios depois de Pitágoras, o início de um novo olhar para as relações entre matemática e música, interpretando o som como um fenômeno físico, como veremos a seguir.

2.1.2 A mudança de perspectiva a partir do Renascimento

Com o Renascimento, a composição musical explorou novos rumos e a polifonia evoluiu, gerando campo para desenvolvimento da harmonia e sistematização das escalas musicais. Nesse contexto, um teórico musical bastante reconhecido foi Gioseffe Zarlino (1517-1590), que

[1] Caso o leitor se interesse por estudar algumas das contribuições desses períodos históricos, que não serão abordadas em detalhes aqui, recomendamos a leitura de Abdounur (2015, p. 36-48).

[2] Um exemplo é a terça maior, que passou a ser associada com 4/5 ao invés de 64/81. Na escala de Dó, a terça maior é a nota Mi. Nota-se que 64/81≅0,79, enquanto 4/5=0,8, isto é, tratam-se de números muito próximos entre si. Contudo, a nota emitida pela vibração de 4/5 do comprimento da corda soa melhor quando tocada em conjunto com a corda solta, fato que, milênios depois, seria justificado com base em fenômenos físicos e nos harmônicos. Segundo Abdounur (2015, p. 39), essa mudança já havia sido proposta por Arquitas de Tarento (430-360 a.C.), importante teórico musical da Grécia antiga, e foi fortalecida com o passar dos séculos, sendo resgatada posteriormente pelos estudos de Zarlino, no Renascimento.

publicou a obra *Le Istitutioni Harmoniche* (1558), de grande importância teórica, musical e educacional na época. Porém, apesar de representar uma evolução significativa no processo de construção de consonâncias, a visão de Zarlino ainda não foi a responsável por alterar a perspectiva aritmética dos intervalos consonantes herdada da Antiguidade Clássica: seu trabalho foi fortemente influenciado por Pitágoras e Arquitas, como veremos a seguir.

Do ponto de vista musical, segundo Abdounur (2015, p. 64-73), Zarlino mostrou-se um crítico do legado da Idade Média, quando se buscava especialmente consonâncias em linhas melódicas e harmônicas conhecidas e previsíveis. O autor, por outro lado, defendia a *diversidade musical*: segundo ele, a perfeita harmonia estava relacionada com a diversidade de movimentos, por vezes discordantes e contrários, e não de frases musicais completamente semelhantes. Por exemplo, o autor defendia o uso de dissonâncias como cortes momentâneos de movimentos consonantes, de forma a exaltar ainda mais a perfeição das consonâncias.

Do ponto de vista matemático-musical, Abdounur (2015) explica que Zarlino adicionou o número 5 como fator primo na geração de consonâncias e ampliou os números inteiros utilizados em razões simples, que Pitágoras sugerira ir até 4 (tétrade), para 6, que formariam o que ele chamaria de *Senário*. Assim, frações como 4/5 (terça maior), 5/6 (terça menor), 3/5 (sexta maior) e 5/8 (sexta menor) passaram a ser consideradas como consonantes com a primeira (1). No que diz respeito à fração 5/8, defendia que podemos multiplicá-la por 2, resultando na mesma nota uma oitava abaixo, mais grave (princípio de equivalência das oitavas), de forma que 5/8 : = 5/4, sendo assim composto pelos números do *Senário*.

Segundo Abdounur (2015), esse processo de multiplicação também foi generalizado por Zarlino, que passou a utilizar o que chamou de *composições* de notas. Por exemplo, ao multiplicar por 2, estaríamos fazendo uma composição com a oitava. Mas, também, compondo a quarta com a quinta, obtemos: (3/4)·(2/3) = 1/2 (oitava). Em muitos casos, Zarlino percebeu que a composição de duas consonâncias gerava uma nova consonância. Para ele, as consonâncias fariam parte do *Senário,* conjunto dos seis primeiros números inteiros, com os quais estabelecia relações com os planetas, com os sentidos dos movimentos, com as faces de um cubo, e, de uma forma mais geral, com a natureza e com o Universo, nos fazendo lembrar da explicação figurada pitagórica para os quatro números da tétrade. Essa forma de abordar as consonâncias ampliou em muito as possibilidades musicais da época. Contudo, também foi alvo de críticas, pois alguns argumentos utilizados por ele eram refutados com contraexemplos, como no caso da composição da quinta com a terça (2/3)·(4/5), que resulta em 8/15, sendo essa a sétima, que era considerada fortemente dissonante com a primeira pelos músicos da época.

Ainda, de acordo com Abdounur (2015), um ponto importante é que Zarlino obtinha intervalos por composição de notas, multiplicando-as ou dividindo-as, mas nunca invertendo-as. O movimento da inversão como processo gerador é uma possibilidade, mas não foi utilizado pelo teórico. Além das multiplicações já citadas, Zarlino também fazia divisões (a partir de médias aritméticas ou harmônicas) para obter determinadas notas. Por exemplo, as divisões harmônicas e aritméticas do intervalo de oitava (1 e 1/2) geram a quinta (2/3) e a quarta (3/4), respectivamente, conforme mostrado nas equações (2.5) e (2.6). Seguindo o mesmo processo, as divisões harmônicas e aritméticas do intervalo de quinta (1 e 2/3) geram a terça maior (4/5) e a terça menor (5/6), conforme mostrado nas equações (2.7) e (2.8).

$$MH\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1/2}} = \frac{2}{3} \tag{2.5}$$

$$MA\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{3}{4} \tag{2.6}$$

$$MH\left(1, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2/3}} = \frac{4}{5} \tag{2.7}$$

$$MA\left(1, \frac{2}{3}\right) = \frac{\left(1 + \frac{2}{3}\right)}{2} = \frac{5}{6} \tag{2.8}$$

Com as estratégias para obtenção de consonâncias do *Senário* de Zarlino, baseadas em composições e divisões, é possível montar a tabela 2.2, cuja construção, em nosso entendimento, também tem um potencial didático significativo a ser explorado em sala de aula. Nesse contexto, pode-se trabalhar, por exemplo, com frações e suas operações, bem como com o cálculo de médias harmônicas e aritméticas.

Tabela 2.2 – Tabela de construção da escala de afinação justa de Zarlino.

	Dó	**Ré**	**Mi**	**Fá**	**Sol**	**Lá**	**Si**	**Dó**
Símbolo	C_3	D_3	E_3	F_3	G_3	A_3	B_3	C_4
Fração do comprimento de corda	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$

(fonte: adaptado de Abdounur, 2015, p. 70)

Nota-se que os intervalos de tom não são constantes nessa escala, já que as razões entre as frações associadas a Dó e Ré e a Ré e Mi são iguais a 8/9 e 9/10, respectivamente. Ainda, o intervalo de semitom é caracterizado por 15/16, e dois intervalos de semitom não resultam em um intervalo de tom, pois $(15/16)^2 \neq 8/9$ e $(15/16)^2 \neq 9/10$.

A contribuição de Zarlino foi muito importante para a evolução das relações entre matemática e música, mas não rompeu com a visão aritmética acerca dos intervalos consonantes. A explicação fundamental por trás das consonâncias residia agora no *Senário*, o que, de certa forma, não diferia tanto assim da explicação pitagórica baseada na *Tetraktys* e no *número* como princípio gerador de todas as coisas.

Contudo, conforme explicam Abdounur e Pereira (2022), esse dogmatismo aritmético acerca das relações entre matemática e música passou por uma mudança de perspectiva no período Renascentista, notoriamente com os trabalhos de Vincenzo Galilei (1520-1591), pai de Galileu Galilei. Vincenzo defendia que as relações das notas musicais não variavam apenas segundo parâmetros medidos em cordas vibrantes, mas segundo parâmetros mais gerais e objetivos que pudessem ser medidos em qualquer fonte sonora. Surgia, assim, a necessidade de uma mudança de enfoque sobre a compreensão de conceitos acústico-musicais, passando de princípios aritméticos para uma perspectiva *físico-experimental*.

O texto *Ainda assim o som se move*[3], de Haag (2012), descreve em maiores detalhes essa passagem histórica do período Renascentista e os impactos de um novo olhar sobre a música e os fenômenos sonoros. Segunda a pesquisadora Carla Bromberg, entrevistada no texto citado, a partir da experimentação Vincenzo concluiu que, se a natureza do som era sensorial, a evidência experimental seria o caminho para sua investigação:

[3] Haag, Carlos. Ainda assim o som se move. Pesquisa FAPESP. Edição 197, 2012. Disponível em: https://revistapesquisa.fapesp.br/ainda-assim-o-som-se-move/. Acesso em: 06/01/2024.

> "Com seu alaúde, ele demonstrou que a altura de uma nota poderia variar não apenas em função do comprimento ou da tensão da corda, mas também quando se alterava a sua espessura ou o material do qual era feita. A legitimação dos intervalos musicais de acordo com a teoria pressupunha também que os intervalos excluídos do sistema não eram naturais. Contudo, para Galilei, um som era tão natural quanto outro: se ele agradava ou não o ouvido não podia ser explicado por um sistema numérico, mas pela própria audição particular e individual. A matemática não tinha poder sobre os sentidos. Vincenzo libertava a música do domínio dos números ao mostrar que a realidade empírica não combinava necessariamente com as antigas razões que, se acreditava, organizavam o Universo. A grande ousadia de Galilei foi trabalhar diretamente sobre os corpos sonoros, experimentando o som usando vasos de metal e outros objetos de tamanho, largura e volume diferentes, além de cordas feitas de materiais variados, observando que os sons sofriam alterações de acordo com o comportamento de cada material. 'Vincenzo demonstrava assim, de forma inédita, a relevância da matéria e de seu comportamento', analisa a pesquisadora" (Haag, 2012).

Esse novo olhar, mais amplo e amparado na ciência experimental, possibilitou aos estudiosos da época perceber o som como um fenômeno físico. O trabalho de Vincenzo influenciou seu próprio filho, Galileu Galilei, que também desenvolveu trabalhos na área e propôs uma resposta para o problema das consonâncias. Segundo Abdounur (2015, p. 51), Galileu escreveu, em 1638, que a explicação subjacente aos intervalos musicais residia "*nas razões dos números de vibrações e impactos de ondas sonoras que atingiam o tímpano*". Nesse contexto, o som passou, paulatinamente, a ser concebido como uma *onda*[4], e a altura musical passou a ser relacionada com o número de vibrações dessa onda em uma unidade de tempo, isto é, com a sua *frequência* de vibração.

Paralelamente, segundo Abdounur (2015), o pensador francês Marin Mersenne (1588-1648) também contribuiu para a evolução da compreensão físico-matemática dos fenômenos acústicos e musicais. A partir de experimentos práticos, Mersenne verificou que a frequência de vibração de um fio esticado era inversamente proporcional ao comprimento da corda, mas que essa frequência também seria proporcional à raiz quadrada da razão entre força aplicada à corda e a massa linear. Utilizando o SI e linguagem algébrica moderna, pode-se escrever a equação (2.9), conhecida como fórmula de Mersenne. É interessante observar que a frequência e o comprimento de corda são grandezas *inversamente proporcionais*, motivo pelo qual ambas as explicações subjacentes aos intervalos consonantes – razões entre comprimentos de corda ou razão entre frequências – acabam descrevendo de maneira semelhante os intervalos musicais em instrumentos de corda. Se a razão subjacente ao intervalo de quinta era 2/3 quando

[4] A ideia de interpretar o som como uma onda ganhou força no Renascimento, mas suas origens datam da antiguidade. Segundo Abdounur (2015, p. 42) o estoico grego Crisipo (280-208 a.C.) construiu a analogia entre som e onda na água, que posteriormente foi defendida no séc. I a.C. pelo arquiteto Vitrúvio, ao comparar sons de vozes às ondas que se propagavam na água, quando explicava as propriedades acústicas dos anfiteatros gregos.

pensávamos em comprimentos de corda, passa a ser 3/2 quando pensamos em frequências. Por exemplo, tomando um intervalo de quinta perfeita, a frequência da nota Sol tem que ser igual a 3/2 da frequência da nota Dó. Em nosso entendimento, esse pensamento também tem um potencial didático significo a ser explorado em sala de aula, envolvendo o estudo de grandezas inversamente proporcionais.

$$f = \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \qquad (2.9)$$

Sendo:

f = frequência de vibração fundamental, em Hertz;

L = comprimento da corda, em metros;

τ = força de tração aplicada à corda, em Newtons;

μ = densidade linear da corda, em kg/m.

Cabe ressaltar, ainda, que se por um lado a visão especulativa aritmética começou a ser superada nas justificativas subjacentes aos intervalos consonantes, por outro não é possível afirmar que a música e a matemática se desassociaram nesse período, muito pelo contrário: a matemática passa a aparecer ainda mais, e de forma mais complexa, na descrição física do som. A principal diferença ocorre no âmbito filosófico: se antes o *número* era o princípio formador dos intervalos consonantes (assim como de todo o Universo), agora a evidência experimental e a percepção sonora que passam a explicá-los. Porém, nesse contexto, ainda se faz necessária uma descrição matemática dos fenômenos, cada vez mais desenvolvida.

A perspectiva físico-experimental desencadeou avanços significativos na ciência musical. Em seu livro, Abdounur (2015, p. 54-121) traça um rico panorama das contribuições de diferentes personagens históricos nessa construção, passando por Kepler, Descartes, Rameau, Euler, D'Alembert, Bernoulli, Fourier, entre outros. Ao leitor interessado, recomendamos a leitura dessas passagens do livro. Contudo, para os fins do presente trabalho, o que cabe é destacar a importância de compreender a ciência como uma construção histórica, humana e coletiva. Ao trabalhar com relações entre matemática e música em sala de aula, o professor ganha a oportunidade de abordar conceitos matemáticos em diferentes contextos históricos, bem como incentivar que os estudantes sigam carreiras científicas, a fim de também poderem contribuir com essa construção.

Em particular, dois pontos que foram melhor compreendidos a partir da perspectiva físico-experimental devem ser citados aqui: (i) os *harmônicos*; e (ii) a possibilidade de construir uma *escala de igual temperamento*. Ambos os tópicos não poderiam ser desenvolvidos com base na visão aritmética anteriormente dominante.

No que diz respeito aos *harmônicos*, isto é, o conjunto de notas mais agudas que são emitidas juntamente com a frequência fundamental na vibração de uma corda ou de outra fonte sonora, Abdounur (2015) menciona que Mersenne já havia levantado o paradoxo de como poderia uma corda vibrar em várias frequências ao mesmo tempo, e com isso havia sugerido estudos mais criteriosos sobre o assunto. Posteriormente, já no séc. XVIII, D'Alembert afirmou que os sons naturais não eram puros, mas sim compostos pela superposição de diversos harmônicos em série. Após, Daniel Bernoulli (1700-1782) afirmou que a vibração de corpo era composta pela superposição de modos de vibração com distintas amplitudes. Finalmente, Abdounur (2015, p. 114-121) menciona a contribuição *indireta* de Fourier (1768-1830), que estudou a propagação de calor sob a ótica das equações diferenciais. Fourier propôs a transformação de qualquer função periódica em combinação infinita de termos, isto é, em uma série, conhecida hoje como Série de Fourier, possibilitando a caracterização de uma onda sonora pela superposição de funções trigonométricas com diferentes amplitudes e frequências de vibração, as quais são múltiplas da frequência natural fundamental. De forma mais intuitiva, pode-se enunciar o princípio de Fourier como:

> "Qualquer forma periódica de vibração pode ser obtida pela soma de vibrações simples com frequências multiplicadas por 1 (fundamental), 2, 3, 4, ... vezes a frequência do movimento dado" (Abdounur, 2015, p. 117).

Portanto, quando uma corda vibra e produz uma nota musical, ela também produz as notas com frequências iguais à frequência natural fundamental multiplicada por 2, 3, 4 e assim por diante. Essas notas "secundárias" que ressoam junto com a fundamental são chamadas de harmônicos, os quais são conhecidos, por percepção auditiva, desde a antiguidade, contudo até então não possuíam uma explicação científica (ABDOUNUR, 2015). Cabe destacar, nesse contexto, o papel da matemática, em especial da Série de Fourier, na viabilidade da compreensão e descrição do fenômeno físico dos harmônicos.

Por exemplo, considerando a nota Dó da terceira oitava (representado pelo símbolo C_3) como frequência principal da corda vibrante, e tomando as frequências relativas dos seus harmônicos em relação a ela, podemos montar a tabela 2.3, cuja construção foi baseada no estudo de Wright

(2009, p. 95-98), que desenvolveu uma abordagem dos números inteiros como intervalos. Porém, cabe ressaltar que o autor citado realizou considerou aproximações de escalas de igual temperamento, motivo pelo qual ele cita certas imprecisões. Aqui, estamos comparando com as razões da afinação justa, que coincidem *exatamente* com os intervalos mencionados, salvo no sétimo harmônico (que se aproxima da sétima menor, isto é, Si_b nesse exemplo, mas sem exatidão). Além disso, tomamos a relação inversa da frequência, transformando em razões de comprimentos de corda, e utilizamos o princípio de equivalência de oitavas (multiplicação por potências de 2), para melhor podermos comparar as razões da tabela 2.2.

Tabela 2.3 – Tabela de notas dos harmônicos da nota Dó C_3 e suas relações intervalares.

Frequência Relativa	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Nota	Dó	Dó	Sol	Dó	Mi	Sol	-	Dó	Ré
Símbolo	C_3	C_4	G_4	C_5	E_5	G_5	-	C_6	D_6
Razão entre comprimentos de corda	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9
Operação de equivalência de oitava	-	-	Descer uma oitava (x2)	Descer uma oitava (x2)	Descer duas oitavas (x4)	Descer duas oitavas (x4)	Descer duas oitavas (x4)	Descer duas oitavas (x4)	Descer três oitavas (x8)
Razão entre comprimentos de corda	1	1/2	2/3	1/2	4/5	2/3	4/7	1/2	8/9
Relação intervalar (afinação justa)	Primeira	Oitava	Quinta	Oitava	Terça Maior	Quinta	-	Oitava	Segunda

(fonte: elaborado pelo autor com base em Wright, 2009)

Nota-se, assim, que algumas das consonâncias estudadas (oitava, quinta, terça maior) aparecem já nos primeiros múltiplos, indo ao encontro de todo desenvolvimento musical de mais de 2000 anos. Com essa nova visão, é possível propor uma justificativa físico-matemática para o problema clássico das consonâncias: os intervalos consonantes são agradáveis pois fazem parte da própria nota musical, através de seus primeiros harmônicos! É nesse sentido que Abdounur (2015, p. 118) defende que o Princípio de Fourier organizou conceitos matemáticos-musicais em uma estrutura capaz de enxergar os fenômenos sonoros com lentes mais fortes.

No que diz respeito à possibilidade de se construir uma *escala de igual temperamento*, a visão físico-experimental da música também contribuiu para sua viabilidade. Abdounur (2015) explica que temperamento, em música, significa aumentar ou diminuir levemente alguns intervalos da escala, a fim de valorizar determinadas consonâncias. Como vimos anteriormente, os intervalos de tom e de semitom das escalas pitagórica e de afinação justa não são igualmente temperados, pois dois intervalos de semitom não resultam em um intervalo de tom. Ao longo da história da música, foram sendo realizados diferentes tipos de temperamentos, por exemplo a própria escala pitagórica, que valorizava as quintas, e por isso acabava por distorcer um pouco os intervalos de terça. Já outras escalas priorizaram os intervalos de terça, ou de sexta. Essa questão é bastante interessante e apresenta um grande potencial de pesquisa no campo da história da matemática: cada sociedade, aqui incluindo também povos orientais, tem como marca sociocultural o temperamento utilizado em sua música, de forma que a multiplicidade de temperamentos constitui numa riqueza da humanidade em sua mais ampla pluralidade.

Contudo, os temperamentos desiguais geravam dificuldades práticas de mudança de tonalidade em um instrumento. Abdounur (2015) explica que uma solução já proposta no séc. XVI, mas que ganhou força mais adiante, inclusive defendida por Rameau no séc. XVIII, foi de utilizar um temperamento *igualmente espaçado*, isto é, todas as notas ficariam levemente distorcidas, mas a distorção seria tão pequena que se tornaria imperceptível. Ora, se temos 12 semitons, a maneira de fazer isso é considerar que cada intervalo de semitom, em frequências, seja representado pela multiplicação por $\sqrt[12]{2}$. Assim, em 12 sucessivas multiplicações, teríamos o intervalo de oitava (2, em frequências). Desta forma, todas as notas distanciadas por um mesmo número de semitons teriam a mesma razão intervalar, o que facilitaria a troca de tonalidade.

Contudo, $\sqrt[12]{2}$ é um *número irracional*, o que seria inconcebível pela visão aritmética anterior, que justificava as consonâncias como razões entre pequenos números inteiros, isto é, trabalhava apenas com números racionais. Por outro lado, pensando em termos de frequências, é possível conceber a multiplicação por $\sqrt[12]{2}$. Por exemplo, a quinta (intervalo de dois tons e meio, isto é, sete semitons) seria dada pela expressão (2.10).

$$2^{7/12} = 1{,}498 \ldots \qquad (2.10)$$

Nota-se que 3/2=1,5 está de fato muito próximo desse valor. Mas, em termos de divisão de cordas, o processo se torna obrigatoriamente imperfeito, já que estamos tratando de incomensuráveis. Além disso, a questão da ligeira imprecisão trouxe à tona dúvidas sobre a sensibilidade em ouvidos mais apurados. Nesse contexto, a escala de igual temperamento só seria aceita se músicos viessem a dar o seu aval sobre a efetiva impossibilidade de distinguir, em termos auditivos, essas pequenas imprecisões. Segundo Abdounur (2015), J. S. Bach foi o principal responsável por fazer isso, a partir da composição da obra *Cravo Bem Temperado*, em dois volumes (1722 e 1744), na qual constam prelúdios e fugas em 24 tonalidades (12 maiores e 12 menores), fazendo uso de uma escala de igual temperamento.

Assim, ficou demonstrado a ampliação de possibilidades de composição, incluindo alterações de tonalidades, o que representou uma grande revolução musical. Com o tempo, a escala de igual temperamento passou a ser cada vez mais aceita pela comunidade musical, sendo amplamente utilizada atualmente.

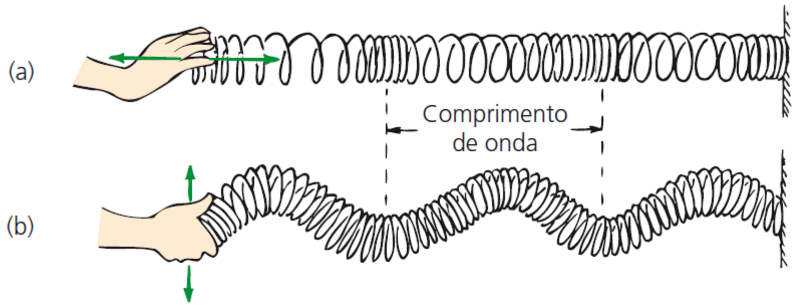
Do ponto de vista educacional, entendemos a escala de igual temperamento também pode passar por uma transposição didática para a sala de aula, com um grande potencial para abordar uma introdução aos números irracionais, tendo em vista a insuficiência do conjunto dos números racionais para a sua construção.

2.1.3 A visão moderna do som como fenômeno físico

A partir do desenvolvimento histórico da concepção do som como um fenômeno físico, baseado em evidências experimentais, conforme tratado no item anterior, atualmente a ideia de que o som pode ser descrito como uma onda é amplamente aceita pela comunidade científica, sendo abordada em livros didáticos do ensino básico e superior. Neste item, trataremos resumidamente de alguns conceitos que podem ser trabalhados em práticas interdisciplinares envolvendo matemática, música e física.

Uma onda é uma perturbação que se propaga, transportando energia sem transportar matéria. Segundo Hewitt (2015), o movimento ondulatório ocorre tanto no espaço quanto no tempo. O som e a luz são dois exemplos de ondas, porém distintos, pois o som é uma onda mecânica, que necessita de um meio de propagação; enquanto a luz é uma onda eletromagnética e pode se propagar no vácuo. As ondas também podem ser classificadas como longitudinais ou transversais. Com uma mola, é possível distinguir visualmente esses dois tipos de onda, como ilustrado na figura 2.5, onde cabe observar que em 2.5a o movimento oscilatório ocorre na mesma direção de propagação da onda, enquanto em 2.5b o movimento oscilatório ocorre transversalmente à direção de propagação da onda. No contexto deste trabalho, a vibração de uma corda de um instrumento musical é um exemplo de onda transversal, enquanto a propagação do som no ar é um exemplo de onda longitudinal.

Figura 2.5 – Ondas em uma mola: (a) onda longitudinal; (b) onda transversal.



(fonte: Hewitt, 2015)

Ainda, de acordo com Hewitt (2015), uma curva senoidal pode ser utilizada para representar graficamente uma onda. Alguns elementos importantes dessa descrição são:

- Comprimento de onda (λ): é a distância entre quaisquer duas partes idênticas e sucessivas de uma onda, medido em metros no SI, também ilustrado na figura 2.5;
- Cristas ou vales: são os pontos mais altos ou mais baixos de uma curva senoidal representativa do movimento oscilatório;
- Amplitude (A): é a distância entre o ponto médio da vibração e o vale (ou a crista), isto é, representa o máximo afastamento do ponto de equilíbrio, medido em metros no SI;
- Frequência (f): é o número de oscilações completas em um intervalo de tempo, sendo medida em Hertz (Hz) no SI, que representa o número de oscilações por segundo;
- Período (T): é o tempo que dura uma oscilação completa, medido em segundos no SI.

Pelas definições anteriores, fica claro que o período é o inverso da frequência, isto é, $f = 1/T$.

Matematicamente, segundo Halliday, Resnick e Walker (2011), o movimento ondulatório pode ser descrito pela função dada na equação (2.11), onde o deslocamento y da oscilação em relação ao seu ponto de equilíbrio fica em função da posição x e do instante de tempo t.

$$y(x,t) = A \cdot sen(k \cdot x - \omega \cdot t) \tag{2.11}$$

Sendo:

y = deslocamento, ou afastamento, da posição de equilíbrio;

x = posição;

t = tempo;

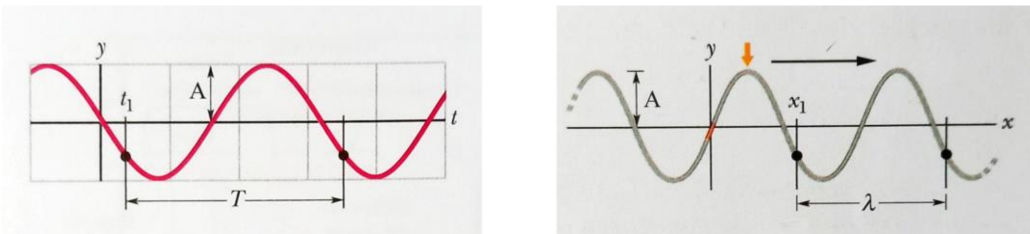
A = amplitude do movimento oscilatório;

k = número de onda, dado por $2\pi/\lambda$;

ω = frequência angular, dada por $2\pi/T$ ou $2\pi f$.

Pela descrição matemática anterior, observa-se que podemos representar graficamente a função $y(x,t)$ de diferentes maneiras. Uma delas, pouco utilizada, seria trabalhar com uma representação tridimensional. Contudo, mais comumente são utilizados gráficos bidimensionais de y em função de x ou de y em função t isoladamente, com a outra variável fixa. Nesse contexto, Halliday, Resnick e Walker (2011), chamam de “instantâneo” a representação de y em função de x para um instante de tempo fixo. Essa distinção entre os gráficos de $y(t)$ e $y(x)$ é bastante importante no estudo de ondas, pois no primeiro conseguimos observar o período e no segundo conseguimos medir o comprimento de onda, conforme figura 2.6.

Figura 2.6 – Representações bidimensionais de y(t) ou y(x).



(fonte: Halliday, Resnick e Walker, 2011, p. 119-120)

A velocidade de propagação da onda (v), em m/s, é obtida pela equação (2.12), conhecida como equação fundamental da ondulatória. Uma demonstração mais completa, com base na descrição senoidal da equação (2.11), pode ser encontrada em Halliday, Resnick e Walker (2011, p. 121). Contudo, para fins de transposição didática no ensino básico, uma alternativa para ilustrar essa equação é tomar a equação cinemática do movimento retilíneo uniforme, isto é, $d = v.t$, substituindo a distância (d) pelo comprimento de onda (λ) e o tempo (t) pelo período (T). Finalmente, utilizando a relação $f = 1/T$, obtemos a equação (2.12).

$$v = \lambda \cdot f \tag{2.12}$$

Halliday, Resnick e Walker (2011, p. 124-125) também apresentam uma dedução para a velocidade de propagação da onda em uma corda esticada, obtendo a equação (2.13), sendo τ o módulo da força de tração aplicada na corda, em N, e μ a densidade linear da corda, em kg/m.

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \tag{2.13}$$

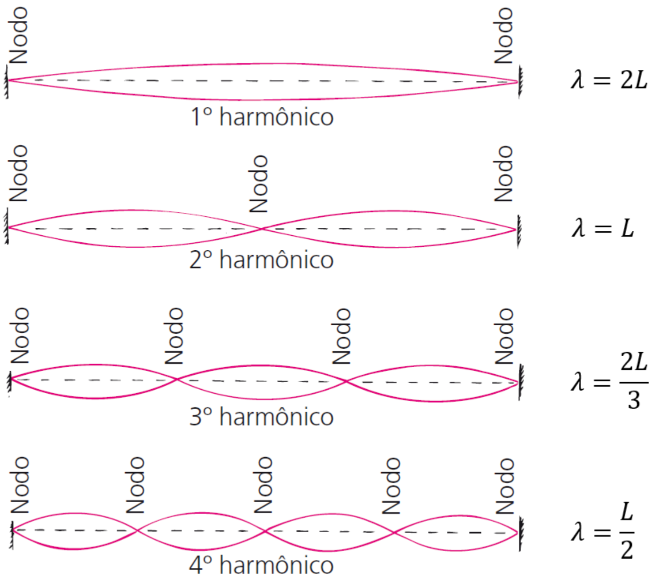
Ao comparar as equações (4.12) e (4.13) com a fórmula de Mersenne, da equação (4.9), podemos observar que o matemático francês já havia descoberto experimentalmente essas relações em 1637, ao menos no que diz respeito à frequência natural fundamental. Para as equações se igualarem, é necessário que o comprimento de onda seja igual a duas vezes o comprimento da corda vibrante, isto é, $\lambda = 2L$, o que ocorre no primeiro modo de vibração da corda, que vibra com a frequência fundamental (mais perceptível), onde o comprimento da corda representa metade do comprimento de onda, conforme ilustrado na primeira imagem da figura 2.7. Esse ponto é muito importante de ser destacado em práticas educacionais que trabalhem com vibrações de cordas.

Porém, como já mencionado, uma corda não vibra apenas no seu primeiro modo, mas em uma superposição de vários modos de vibração com diferentes amplitudes, chamados de harmônicos. Halliday, Resnick e Walker (2011, p. 134-137) explicam que *ondas estacionárias* são formadas a partir de interferências destrutivas e construtivas durante a vibração de uma corda esticada e presa em suas extremidades. Essas interferências geram nodos e antinodos em pontos específicos para cada modo de vibração, cada um com sua respectiva frequência de vibração e com o seu respectivo comprimento de onda. Nesse sentido, os autores apresentam as equações (2.14) e (2.15) para os comprimentos de onda e frequências do modo de vibração n da corda ($n = 1,2,3, \ldots$). Essas relações também são ilustradas na figura 2.7 para os quatro primeiros harmônicos de uma corda vibrante.

$$\lambda = \frac{2L}{n} \tag{2.14}$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = n \cdot \frac{v}{2L} \tag{2.15}$$

Figura 2.7 – Relação entre comprimentos de onda e de corda nos harmônicos.



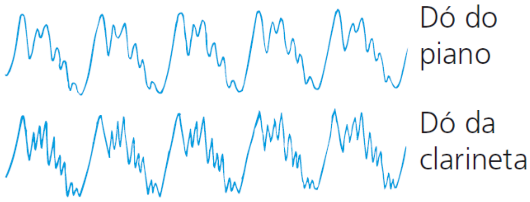
(fonte: adaptado de Hewitt, 2015)

Hewitt (2015) explica que a mesma nota musical, quando emitida por diferentes instrumentos, pode soar diferente, como, por exemplo, a nota Dó emitida por um piano ou por uma clarineta (ver figura 2.8), que irá apresentar diferenças facilmente perceptíveis, as quais estão relacionadas com a composição dos harmônicos, ou seja, com a composição espectral da nota:

> “A maioria dos sons musicais é formada pela superposição de muitos sons com frequências diferentes. Esses vários sons são chamados de componentes de frequência, ou simplesmente componentes. A frequência mais baixa deles, chamada de frequência fundamental, determina a altura da nota. Aquelas componentes de frequência que são múltiplas inteiras da frequência fundamental são chamadas de harmônicos. Diferentes harmônicos possuem alturas diferentes. Um tom com frequência duas vezes maior do que a frequência fundamental é o segundo harmônico, um tom com três vezes a frequência fundamental é o terceiro harmônico e assim por diante. É a variedade das componentes de frequência que dão a uma nota musical seu timbre característico. Assim, vemos que os instrumentos musicais possuem timbres característicos, cada qual com sua ‘cor’ própria” (Hewitt, 2015, p. 395).

O formato da onda composta no tempo pode ser observado por um osciloscópio. Um diapasão, por exemplo, irá emitir uma nota mais pura com a sua frequência natural, se aproximando de uma senoide perfeita. Já as notas emitidas por instrumentos musicais tendem a apresentar um formato composto, gerado pela superposição de seus harmônicos, com diferentes amplitudes, conforme ilustrado na figura 2.8.

Figura 2.8 – Ondas compostas no piano e na clarineta.



(fonte: Hewitt, 2015)

Hewitt (2015) explica, ainda, que o som precisa de um meio para se propagar, seja ele sólido líquido ou gasoso. Estamos mais acostumados a escutar o som no ar, onde ele se propaga por sucessivas compressões e rarefações, a uma velocidade de aproximadamente 340 m/s, que pode variar em função de vários fatores, como a temperatura. Quando a corda de um instrumento musical, por exemplo um violão, emite uma nota musical, a vibração da corda gera uma onda sonora no ar, que é amplificada na caixa de ressonância do violão e, posteriormente, alcança nossos ouvidos, fazendo nossos tímpanos vibrarem, os quais enviam impulsos elétricos ritmados que chegam em nosso cérebro, nos fazendo perceber o som. Entendemos que, ao trabalhar com práticas educacionais envolvendo música, o percurso do som desde a fonte sonora até a nossa percepção deva ser sempre ser mostrado e evidenciado em sala de aula, a fim de tornar os conceitos mais palpáveis e perceptíveis.

A nossa percepção do som e da música, por sua vez, é subjetiva, e vai além da matemática e da física envolvida nos fenômenos sonoros. Não obstante, podemos tecer uma relação entre as propriedades objetivas das ondas, que podem ser medidas, e a nossa percepção subjetiva. A tabela 2.4 apresenta algumas dessas relações.

Tabela 2.4 – Relações entre propriedades objetivas e subjetivas do som.

Propriedade física da onda (objetiva)	**Percepção individual (subjetiva)**
Frequência	Altura (grave/agudo)
Amplitude e intensidade	Volume sonoro
Composição espectral	Timbre (“cor” do som)

(fonte: elaborado pelo autor com base em Hewitt, 2015)

Por fim, cabe destacar que a interpretação do som como um fenômeno físico nos permite compreender o experimento do *monocórdio* de Pitágoras sob um olhar mais amplo. Quando alteramos o comprimento da corda com o cavalete móvel, estamos alterando os *comprimentos de onda* associados à frequência fundamental e aos seus harmônicos na mesma proporção, uma vez que, conforme a equação (2.14), λ e L são grandezas diretamente proporcionais. Ao alterar o comprimento de onda fundamental, a frequência de vibração também é alterada, mas na proporção inversa, conforme evidenciado pela equação (2.12). Isto é, quando reduzimos o comprimento da corda vibrante com o cavalete móvel, ela passa a vibrar com uma frequência maior, emitindo uma nota musical mais aguda. Nota-se que os pitagóricos, há mais de 2500 anos, já haviam percebido essa relação entre comprimento de corda e altura sonora, mas sem se valer de conceitos como frequência e comprimento de onda, uma vez que consideravam as relações aritméticas entre comprimentos uma justificativa suficiente, pois interpretavam o *número* como princípio gerador de todas as coisas, inclusive da música.

Do ponto de vista educacional, avaliamos que abordagens didáticas que evidenciem a multiplicidade de visões que a humanidade construiu acerca dos fenômenos sonoros apresentam um grande potencial educacional sob uma ótica interdisciplinar, uma vez que, como demonstrado, há margem para trabalhar conceitos envolvendo não apenas matemática e música, mas também física, história e filosofia.

2.1.4 As escalas ao longo do tempo

Os diferentes temperamentos utilizados nas escalas musicais em diversas culturas ao longo da história representam uma multiplicidade de sonoridades e identidades socioculturais. Nesse sentido, Abdounur (2015) constrói uma analogia interessante sobre a convergência dos distintos temperamentos para a escala de igual temperamento:

> "Poderíamos pensar os distintos temperamentos assumidos em música ao longo dos tempos em diferentes culturas convergindo para o temperamento igual como as diversas bases numéricas em matemática concebidas em distintos povos e épocas convergindo para a atual base dez" (Abdounur, 2015, p. 107).

Dando sequência a sua analogia, podemos afirmar que, do ponto de vista educacional, da mesma forma que pode ser interessante estudar as diferentes bases numéricas desenvolvidas ao longo da história para solidificar conhecimentos matemáticos e ampliar a visão a respeito dos sistemas de numeração, o estudo das diferenças entre as escalas desenvolvidas pela humanidade pode ser muito enriquecedor, tanto do ponto de vista matemático quanto musical.

No presente trabalho, por razões de escopo, delimitaremos as comparações entre as três escalas diatônicas abordadas nos itens anteriores: a escala pitagórica, a escala de afinação justa e a escala de igual temperamento, considerando escalas maiores, isto é, com sete intervalos sucessivos de tom-tom-semitom-tom-tom-tom-semitom. Cabe destacar, contudo, que essa ainda é uma pequena visão da multiplicidade de construções e temperamentos que podem ser abordadas ao se trabalhar com relações entre matemática e música.

A escala maior pitagórica, cuja construção é baseada no ciclo de quintas perfeitas, é representada na tabela 2.5, que mostra as relações entre comprimentos e frequências de cada nota em relação à fundamental, aqui representada pela nota Dó C_3 (com comprimento de corda L e frequência f), unicamente para fins de ilustração. Além disso, são apresentadas as razões intervalares entre notas sucessivas, evidenciando que nessa escala o intervalo de tom, em termos de frequências, é representado por 9/8, e o intervalo de semitom por 256/243. Nota-se que essas são as razões inversas às trabalhadas no item 2.1.1, pois naquele contexto estávamos tratando de razões entre sucessivos comprimentos de corda.

Tabela 2.5 – Escala maior pitagórica.

Nota musical	**Dó**	**Ré**	**Mi**	**Fá**	**Sol**	**La**	**Si**	**Dó**
Símbolo	C_3	D_3	E_3	F_3	G_3	A_3	B_3	C_4
Comprimento de corda	L	$\frac{8}{9}\cdot L$	$\frac{64}{81}\cdot L$	$\frac{3}{4}\cdot L$	$\frac{2}{3}\cdot L$	$\frac{16}{27}\cdot L$	$\frac{128}{243}\cdot L$	$\frac{1}{2}\cdot L$
Frequência	f	$\frac{9}{8}\cdot f$	$\frac{81}{64}\cdot f$	$\frac{4}{3}\cdot f$	$\frac{3}{2}\cdot f$	$\frac{27}{16}\cdot f$	$\frac{243}{128}\cdot f$	$2\cdot f$

$\times\frac{9}{8}$ $\times\frac{9}{8}$ $\times\frac{256}{243}$ $\times\frac{9}{8}$ $\times\frac{9}{8}$ $\times\frac{9}{8}$ $\times\frac{256}{243}$

(fonte: elaborado pelo autor com base em Li et al., 2018)

Seguindo o mesmo padrão de representação, as escalas de justa afinação e de igual temperamento são apresentadas nas tabelas 2.6 e 2.7, respectivamente. Cabe destacar que na escala justa existem dois intervalos distintos de tom (9/8 e 10/9), e que dois intervalos de semitom (16/15) não resultam em um intervalo de tom. Já a escala de igual temperamento é baseada em 12 intervalos de semitom com iguais espaçamentos: as razões entre frequências de notas espaçadas por um semitom são iguais a $\sqrt[12]{2} \cong 1{,}059$. Nessa escala, os intervalos de tom são formados por dois intervalos de semitom, isto é, são dados por $\left(\sqrt[12]{2}\right)^2 = \sqrt[12]{2^2} \cong 1{,}122$.

Tabela 2.6 – Escala maior de afinação justa.

Nota musical	**Dó**	**Ré**	**Mi**	**Fá**	**Sol**	**La**	**Si**	**Dó**
Símbolo	C_3	D_3	E_3	F_3	G_3	A_3	B_3	C_4
Comprimento de corda	L	$\frac{8}{9}\cdot L$	$\frac{4}{5}\cdot L$	$\frac{3}{4}\cdot L$	$\frac{2}{3}\cdot L$	$\frac{3}{5}\cdot L$	$\frac{8}{15}\cdot L$	$\frac{1}{2}\cdot L$
Frequência	f	$\frac{9}{8}\cdot f$	$\frac{5}{4}\cdot f$	$\frac{4}{3}\cdot f$	$\frac{3}{2}\cdot f$	$\frac{5}{3}\cdot f$	$\frac{15}{8}\cdot f$	$2\cdot f$

$\times\frac{9}{8}$ $\quad\times\frac{10}{9}$ $\quad\times\frac{16}{15}$ $\quad\times\frac{9}{8}$ $\quad\times\frac{10}{9}$ $\quad\times\frac{9}{8}$ $\quad\times\frac{16}{15}$

(fonte: elaborado pelo autor com base em Li et al., 2018)

Tabela 2.7 – Escala maior de igual temperamento.

Nota musical	**Dó**	**Ré**	**Mi**	**Fá**	**Sol**	**La**	**Si**	**Dó**
Símbolo	C_3	D_3	E_3	F_3	G_3	A_3	B_3	C_4
Comprimento de corda	L	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^2}}\cdot L$	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^4}}\cdot L$	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^5}}\cdot L$	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^7}}\cdot L$	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^9}}\cdot L$	$\frac{1}{\sqrt[12]{2^{11}}}\cdot L$	$\frac{1}{2}\cdot L$
Frequência	f	$\sqrt[12]{2^2}\cdot f$	$\sqrt[12]{2^4}\cdot f$	$\sqrt[12]{2^5}\cdot f$	$\sqrt[12]{2^7}\cdot f$	$\sqrt[12]{2^9}\cdot f$	$\sqrt[12]{2^{11}}\cdot f$	$2\cdot f$

$\times\sqrt[12]{2^2}$ $\quad\times\sqrt[12]{2^2}$ $\quad\times\sqrt[12]{2}$ $\quad\times\sqrt[12]{2^2}$ $\quad\times\sqrt[12]{2^2}$ $\quad\times\sqrt[12]{2^2}$ $\quad\times\sqrt[12]{2}$

(fonte: elaborado pelo autor com base em Li et al., 2018)

A tabela 2.8 mostra um resumo desses intervalos, com os valores exatos e suas respectivas expansões decimais (aproximadas para 3 casas decimais), para facilitar a comparação.

Tabela 2.8 – Comparações entre intervalos.

Intervalo	Razão intervalar	Pitagórica	Afinação Justa	Temperamento Igual
Tom	Valor exato	9/8	9/8 ou 10/9	$\sqrt[12]{2^2}$
	Expansão decimal (3 casas)	1,125	1,125 ou 1,111	1,122
Semitom	Valor exato	256/243	16/15	$\sqrt[12]{2}$
	Expansão decimal (3 casas)	1,053	1,066	1,059

(fonte: elaborado pelo autor com base em Li et al., 2018)

Com a publicação da ISO 16:1975, a frequência da nota La A_4 foi padronizada internacionalmente com o valor de 440 Hz. Seguindo esse padrão e considerando as razões intervalares das tabelas 2.5 a 2.7, podemos montar a tabela 2.9, com as frequências (aproximações com 2 casas decimais) das notas Dó C_4 a Dó C_5, nas três escalas maiores abordadas, partindo da nota La A_4 com a frequência de 440 Hz.

Tabela 2.9 – Tabela comparativa de frequências, em Hz (aproximação com 2 casas).

Nota musical	**Dó**	**Ré**	**Mi**	**Fá**	**Sol**	**La**	**Si**	**Dó**
Símbolo	C_4	D_4	E_4	F_4	G_4	$\mathbf{A_4}$	B_4	C_5
Pitagórica	260,74	293,33	330,00	347,65	391,11	**440,00**	495,00	521,48
Afinação Justa	264,00	297,00	330,00	352,00	396,00	**440,00**	495,00	528,00
Igual Temperamento	261,63	293,66	329,63	349,23	392,00	**440,00**	493,88	523,25

(fonte: elaborado pelo autor com base em Li et al., 2018)

É interessante perceber que, mesmo tomando a padronização da ISO 16 para a nota La, as escalas resultam em valores ligeiramente diferentes de frequências, muito embora estejam próximos. Podemos observar que a escala pitagórica, ainda que construída incialmente há mais de 2500 anos, não difere tanto da escala maior utilizada atualmente, fato que enaltece ainda mais o experimento do monocórdio e os registros antigos das relações entre matemática e música. As pequenas diferenças existentes, contudo, ressaltam as identidades culturais e históricas de cada período e de cada sociedade. Por outro lado, também é necessário ponderar que a tabela 2.9 foi construída apenas para fins de comparação numérica, pois nas épocas em que escala pitagórica e a escala de afinação justa foram desenvolvidas ainda não existia a padronização da nota musical La A_4 como 440 Hz, até porque ainda não se tinha clara a ideia de frequência sonora, conforme já tratado anteriormente. Assim, é possível que as diferenças, em termos de frequências absolutas, fossem ainda maiores, a depender da afinação utilizada em cada período histórico e em cada sociedade.

Por fim, apresentamos a tabela 2.10, que mostra as frequências atualmente utilizadas para as notas musicais, considerando a padronização do Lá A_4 como 440 Hz e as razões intervalares da escala de igual temperamento. Em práticas educacionais envolvendo matemática e música, é importante que o professor tenha a ciência de que esses valores são adotados pelos afinadores e demais aplicativos que meçam frequências das notas musicais, mas que, ao trabalhar com outras escalas, os valores teóricos de cada frequência podem ser ligeiramente diferentes.

Tabela 2.10 – Padrão atual de frequências, em Hz (aproximação com 1 casa).

	C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B	C
2	65,4	69,3	73,4	77,8	82,4	87,3	92,5	98,0	103,8	110,0	116,5	123,5	130,8
3	130,8	138,6	146,8	155,6	164,8	174,6	185,0	196,0	207,7	220,0	233,1	246,9	261,6
4	261,6	277,2	293,7	311,1	329,6	349,2	370,0	392,0	415,3	440,0	466,2	493,9	523,3
5	523,3	554,4	587,3	622,3	659,3	698,5	740,0	784,0	830,6	880,0	932,3	987,8	1046,5

(fonte: adaptado de Iazzetta, 2024)

2.2 PRÁTICAS INTERDISCIPLINARES NA SALA DE AULA

Thiesen (2008) apresenta o conceito de interdisciplinaridade como um fenômeno relevante na articulação dos processos de ensino e aprendizagem. Segundo o autor, há um consenso na literatura no que diz respeito à finalidade da interdisciplinaridade em responder à necessidade de superar a visão fragmentada dos processos de produção e socialização do conhecimento. Assim, defende que o movimento contemporâneo da interdisciplinaridade emerge na perspectiva de dialogicidade e da integração das ciências e dos saberes, podendo ser aplicado no contexto escolar na produção e (re)construção de conhecimentos, o que se justifica em um mundo cada vez mais interconectado e complexo.

É interessante observar que Thiesen (2008) aponta que as raízes da fragmentação dos saberes datam da Renascença, a partir de correntes de pensamento naturalista e mecanicista que buscavam construir uma concepção mais científica do mundo. Isto é, ao mesmo tempo em que a ciência pôde evoluir suas explicações sobre a natureza e o Universo, determinadas áreas passaram a se especializar e, com o passar dos séculos, a se fragmentar. Nesse sentido, cabe contextualizar a própria revolução da concepção de som como fenômeno físico ocorrida nesse período histórico, já elencada neste trabalho: se por um lado esse novo olhar permitiu ampliar a compreensão da natureza do som, por outro é possível que seja justamente a partir dessa nova perspectiva que o estudo da música tenha começado a perder um pouco do seu caráter interdisciplinar.

Cabe lembrar que na Antiguidade a música estava diretamente relacionada com a matemática e a outras áreas do saber, a partir dos sentidos figurados dos números e, consequentemente, das razões intervalares que originavam as consonâncias. Segundo Granja (2005), a partir da visão da escola pitagórica sobre a música, foi aberto um caminho para sua incorporação no currículo básico da escola grega, denominado *Quadrivium*:

> "O *Trivium* era formado pelas disciplinas literárias, a saber: a gramática, a retórica e a dialética. Já o *Quadrivium*, de caráter mais teórico, era composto por quatro disciplinas, cuja origem se encontra provavelmente na escola de Pitágoras: a aritmética, a geometria, a música e a astronomia.
>
> Essas disciplinas costumavam ser agrupadas em dois ramos distintos: as que tratavam dos números e as que tratavam das formas. Compunham as disciplinas numéricas a aritmética e a música. A aritmética era o estudo dos números em repouso, e a música, o estudo dos números em movimento. No âmbito das formas, a geometria tratava das formas em repouso e a astronomia do estudo das formas em movimento" (Granja, 2005, p. 35).

Portanto, percebe-se que o caráter interdisciplinar dos estudos de matemática e música no currículo tem origem milenar. Porém, segundo Granja (2005), ao final da Antiguidade o *Quadrivium* foi perdendo espaço para o *Trivium*, e, após o declínio da civilização grega e consolidação do Império Romano, as suas quatro disciplinas foram suprimidas da escola secundária e restringidas ao ensino superior. De todo modo, ainda que menos fortalecido do que em suas origens, o *Quadrivium* perdurou por muito tempo, sendo retomado com vigor na transição para Idade Média por Boécio (séc. V d.C.), tendo permanecido no currículo até o final da Idade Média, ainda que com modificações. Granja (2005, p. 37) explica, ainda, que a superação do *Quadrivium* se inicia a partir da nova visão da ciência moderna, quando música começa a perder seu caráter metafísico e filosófico, sendo estudada a partir de uma ótica mais objetiva, com maior enfoque no fenômeno sonoro:

> "O conhecimento perde sua integridade, fragmentando-se em um rol de disciplinas específicas. O pensamento analógico, que caracterizava as antigas disciplinas do *Quadrivium*, é suplantado pelo pensamento linear e objetivo das ciências clássicas" (Granja, 2005, p. 37-38).

Entendemos que essa fragmentação deva ser superada no currículo escolar. Reconhecemos que a concepção do som como fenômeno físico possibilitou ampliar a sua compreensão, e por isso deve ser valorizada em sala de aula, inclusive incorporada em práticas educacionais interdisciplinares. Por outro lado, entendemos que essa visão deva se somar a outras visões desenvolvidas ao longo da história, chamando a atenção para a multiplicidade de interpretações construídas pela humanidade acerca da música, que se trata de um fenômeno complexo, repleto de significados, os quais, em nossa concepção, transcendem a natureza física do som.

No que diz respeito aos documentos norteadores do currículo escolar brasileiro, Garcia (2008) argumenta que o conceito de interdisciplinaridade ocupa espaço fundamental no discurso de educação contemporânea articulado nos textos dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). O autor analisou diferentes significados associados ao conceito dentro desses textos, como, por exemplo, modo de articular conteúdos, forma de contribuição das disciplinas e instrumento para articular conhecimentos. Ainda, segundo Granja (2005, p. 41), os PCN reconhecem o valor das artes no currículo escolar, e, no caso da música, estabelecem três diretrizes principais, baseadas na promoção do fazer artístico, na apreciação e na reflexão.

Por outro lado, Mittitier e Lourençon (2017) trazem questionamentos sobre o papel da interdisciplinaridade na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Segundo as autoras, a interdisciplinaridade possui grande importância na superação da fragmentação dos conteúdos e no entendimento do conhecimento como um todo. Contudo, elas defendem que, com as revisões dos documentos da BNCC, as perspectivas para a aprendizagem interdisciplinar aparentam ter perdido em proporção, especialmente se comparados com documentos norteadores do currículo até então vigentes no país. No contexto desse trabalho, ao ler a BNCC (BRASIL, 2018), é possível constatar que existem referências às artes e à música na área de Linguagens e suas Tecnologias, mas não em Matemática, que conta apenas com uma menção a “obras de arte” em transformações isométricas e homotéticas, isto é, dentre as inúmeras possibilidades de relações entre arte e matemática, o documento menciona apenas a análise geométrica das artes visuais.

Neste trabalho, nós defendemos a importância de propor uma prática interdisciplinar, reforçando a busca por romper com a visão fragmentada do conhecimento e resgatando a forte interação existente entre matemática, música e outras áreas do saber ao longo da história. Em particular, concordamos com a posição de Granja (2005), que defende que a música pode apresentar papel central em práticas interdisciplinares, uma vez que, por envolver diferentes níveis de percepção, pode auxiliar significativamente nos processos de articulação entre as múltiplas dimensões do conhecimento.

Ainda, de acordo com D’Ambrosio (1986), a teoria adquire maior valor quando é transformada em prática. No caso da educação, as teorias adquirem significado quando seus efeitos são percebidos em sala de aula, a fim de serem legitimadas na prática educativa. Assim, cabe destacar trabalhos que já propuseram práticas educativas interdisciplinares entre matemática e música, como por exemplo Lange (2019), Fernandes (2014), Miritz (2015), Cabral (2015), entre tantos outros. É nesse contexto que o presente trabalho se propõe a contribuir com mais uma experiência para se somar com as já realizadas, na busca por construir um horizonte de possibilidades de (re)construção das relações entre matemática e música em sala de aula.

2.3 POSSIBILIDADES DE SIGNIFICAÇÃO

Segundo Santos e Gonçalves (2020), se por um lado artistas utilizam conhecimentos matemáticos, consciente ou inconscientemente, no desenvolvimento de suas obras; por outro os educadores matemáticos também podem se apropriar da arte para produzir novos olhares e conhecimentos da matemática e de suas práticas sociais.

Evidenciar relações entre a matemática e a arte em sala de aula possibilita a ampliação de significações do conhecimento matemático, chamando a atenção para a beleza e contemplação intrínsecas. Em especial, no caso da música, essa abordagem pode propiciar experiências sensoriais e afetivas da matemática, como elencando por Abdounur (2015) e Granja (2005).

Do ponto de vista pessoal, como já mencionado, a música sempre esteve presente de forma significativa em minha trajetória, e penso que, quando estudante do ensino médio, teria gostado muito de conhecer as relações históricas entre a matemática e a música. Essa aproximação poderia gerar significados, aumentando ainda mais meu interesse pela matemática, assim como hoje serve como motivação para seguir com a construção de minha identidade docente.

Do ponto de vista educacional, avaliamos que as múltiplas interpretações das relações entre matemática e música ao longo da história, apesar de aparentemente antagônicas, podem se somar, possibilitando a reflexão e a identificação dos estudantes não só com a matemática, mas também com a física e com as ciências em geral. Nesse sentido, concordamos com a fala do físico Richard Feynman ao tecer uma reflexão sobre *a beleza de uma flor*[5], e argumentar que a compreensão científica dos fenômenos físicos e biológicos por trás dos mistérios e encantamentos do crescimento de uma flor apenas acrescentam beleza à sua contemplação. É possível construir uma analogia com a música, a qual, em nossa interpretação, apenas se valoriza e adquire ainda maior encantamento a partir das compreensões matemáticas e físicas dos fenômenos sonoros. Evidentemente, reconhecemos que a fruição estética musical transcende a ciência, porém entendemos que o ato de enaltecer as relações entre essas áreas pode ser extremamente benéfica para a educação, desde que sob uma perspectiva verdadeiramente interdisciplinar, que não hierarquize saberes.

[5] The Feynman Series – Beleza. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=9VBM0dwDPFY. Acesso em: 15 de janeiro de 2024.

3 METODOLOGIA

A metodologia de pesquisa empregada neste trabalho tem caráter *qualitativo*. Segundo Bogdan e Biklen (1994, p.16), dados qualitativos são “ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico”, sem necessariamente ter que comprovar hipóteses ou medir variáveis, mas sempre buscando apreender as diversas perspectivas dos sujeitos e os fenômenos em sua complexidade.

Ainda, segundo Bogdan e Biklen (1994), na abordagem qualitativa o investigador frequenta os locais onde ocorrem os fenômenos nos quais está interessado, e os dados recolhidos estão associados aos comportamentos das pessoas e a suas interações com o meio, onde constroem seus repertórios de significados.

A presente pesquisa se insere nesse contexto elencado pelos autores, pois de fato foi realizada dentro da sala de aula, buscando apreender as perspectivas dos participantes acerca da prática educativa proposta em toda sua complexidade.

Neste capítulo serão detalhados os planejamentos das práticas, desde a construção do monocórdio, passando pelos trâmites de viabilização dos encontros junto à escola, e finalizando com planejamento específico dos dois encontros.

3.1 CONSTRUÇÃO DO MONOCÓRDIO

Buscando aproximar a primeira prática do contexto da escola pitagórica, a fim de permitir que os estudantes construíssem notas musicais a partir de razões entre comprimentos de corda, optamos por projetar e construir um monocórdio. Contudo, para poder escutar duas notas soando em conjunto, e assim melhor avaliar as consonâncias, fizemos uma adaptação à ideia original: ao invés de uma única corda, o instrumento proposto possui duas cordas, sendo ambas afinadas em Dó. Esse instrumento também foi inspirado na quarta Ação de Ensino Investigativa proposta por Merizio (2018), com algumas alterações e adaptações.

Além de melhor contextualizar o período clássico grego, entendemos que, do ponto de vista didático, a principal vantagem de trabalhar com um monocórdio adaptado é o fato de poder construir notas com qualquer razão entre comprimentos, uma vez que o cavalete móvel fica livre para se movimentar. Nesse sentido, a prática com esse instrumento amplia as possibilidades em relação a um violão, por exemplo, que possui trastes, limitando as razões que podem ser construídas a intervalos específicos. Essa liberdade no movimento do cavalete móvel permite ao estudante realizar ajustes finos na construção final das notas musicais, com base na percepção sonora e nas medições de comprimentos. Além disso, fica mais evidente que muitas posições do cavalete não irão gerar notas consonantes, isto é, a construção das consonâncias ocorre em posições específicas, que no violão já estariam pré-definidas pelos trastes.

A seguir segue uma lista dos principais materiais utilizados:

- Chapas de MDF: usadas para a construção do corpo do instrumento, foram obtidas diretamente com uma madeireira, que nos doou retalhos de sua produção. Dessa forma, conseguimos as chapas sem custo de material, mas optamos por pagar um valor ao operador da máquina de corte, que gentilmente se voluntariou a cortar as chapas em pedaços menores, apropriados ao instrumento;

- Cordas de violão de aço: compramos duas cordas fabricadas para a afinação Ré (quarta corda do violão), uma vez que era a que melhor se aproximava da nota Dó, na qual iríamos afinar o monocórdio;

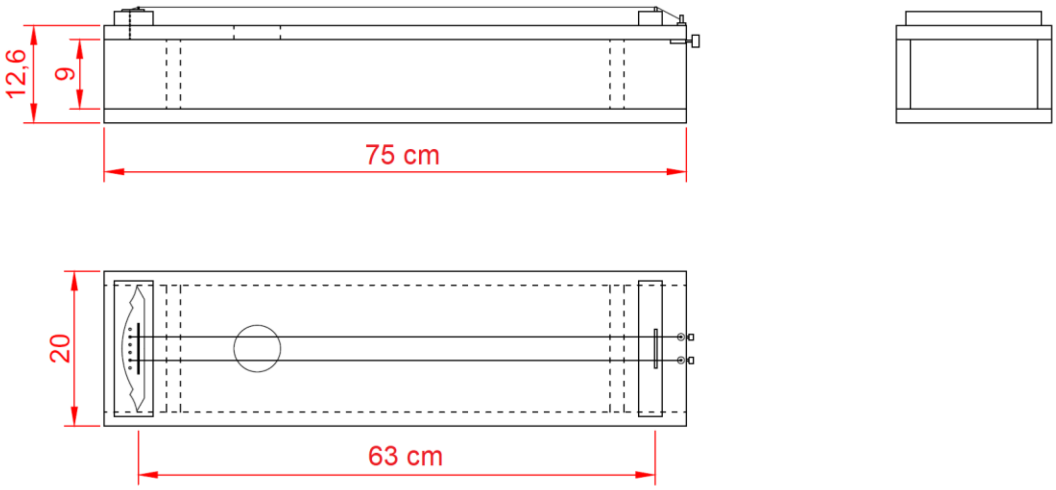
- Cavalete, rastilho e pestana: compramos peças específicas de um violão para construir os cavaletes fixos das extremidades do monocórdio. Para os cavaletes móveis também foram usados rastilhos adaptados;

- Tarrachas: compramos tais dispositivos, utilizados para tracionar as cordas do violão, garantindo a sua afinação. e os adaptamos ao monocórdio;

- Verniz: por fim, quando o instrumento estava quase pronto, compramos verniz para um melhor acabamento e durabilidade.

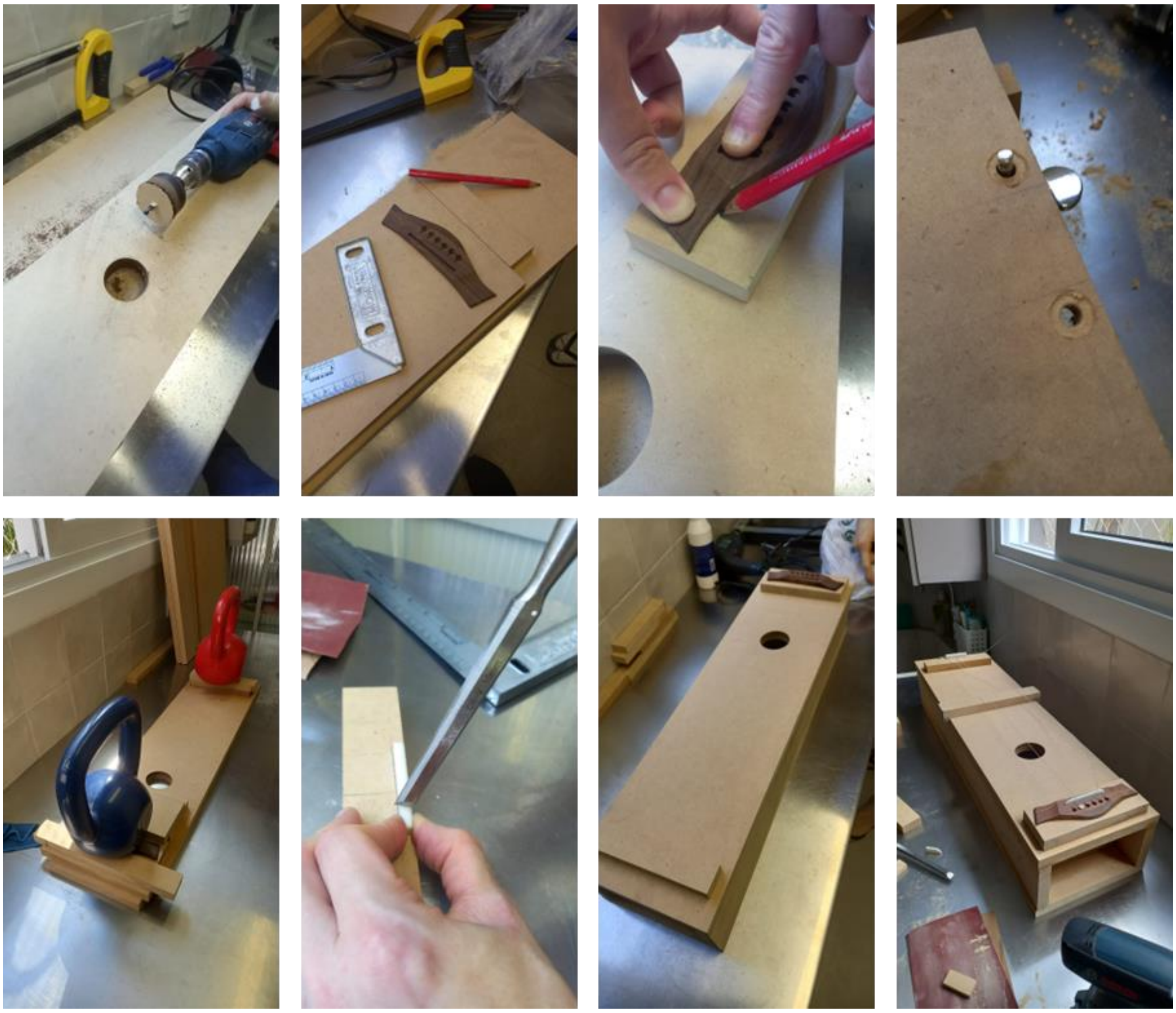
O projeto do monocórdio que nós elaboramos consta na figura 3.1, a seguir. Ressaltamos que esse projeto foi adaptado às dimensões das chapas de MDF que conseguimos com a madeireira. Além disso, ele foi sendo ligeiramente alterado durante a construção, em função de dificuldades executivas que foram surgindo. De todo modo, avaliamos que o projeto, ainda que a nível esquemático, foi bem importante e acabou norteando toda a construção do instrumento.

Figura 3.1 – Projeto do monocórdio.



(fonte: elaborado pelo autor)

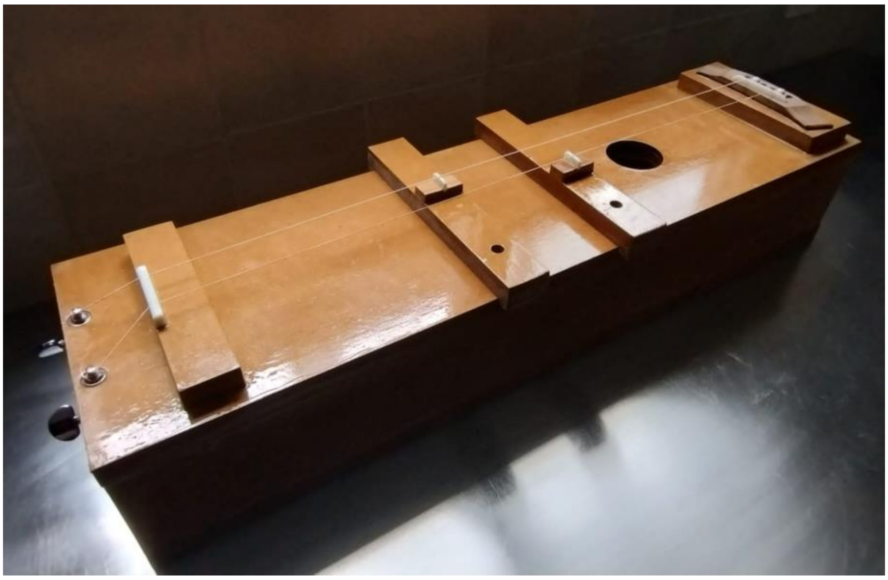
Figura 3.2 – Processo executivo do monocórdio.



(fonte: acervo pessoal do autor)

A construção do instrumento propriamente dita foi realizada com a essencial colaboração de um amigo de infância, Guilherme Pozueco Zaffari, que gentilmente nos auxiliou na condução de todo o processo, incluindo cortes, colagem, envernizamento e demais trabalhos com equipamentos específicos, como furadeira e serra copo. Médico como profissão, Guilherme tem como *hobby* a marcenaria e os trabalhos manuais. Sem dúvidas, a execução do monocórdio não teria sido viabilizada sem a sua ajuda. Na figura 3.2 mostramos algumas imagens do processo executivo, e na figura 3.3 mostramos o instrumento concluído.

Figura 3.3 – Monocórdio finalizado, já com os cavaletes móveis.



(fonte: acervo pessoal do autor)

Ressaltamos que os cavaletes móveis foram construídos de forma a poderem ser livremente movimentados ao longo do instrumento, bem como facilmente removidos. Dessa maneira, é possível escutar duas notas em conjunto, podendo estar uma corda solta ou não. Tal liberdade de movimentos é interessante para ampliar a gama de possibilidades na construção das razões intervalares das consonâncias. Além disso, foi deixado um pequeno furo em cada um deles para marcar as posições das notas musicais em um papel que pode ser fixado abaixo dos cavaletes.

Cabe destacar que os materiais utilizados, ainda que tenham trazido aspectos estéticos e funcionais bastante interessantes ao instrumento, poderiam, em sua maioria, ser substituídos por itens de baixo custo, que provavelmente cumpririam a mesma função, caso haja restrições no orçamento. Por exemplo, as tarraxas poderiam ser substituídas por ganchos, e o cavalete fixo poderia ser constituído por um modelo de rastilho mais simples e econômico. Outro ponto que poderia sofrer revisões é a espessura da chapa de MDF, que sem dúvida poderia ser mais fina, a fim de reduzir o peso total do instrumento. Porém, ressaltamos que essa espessura adotada foi definida em função das chapas de retalho disponíveis, sem custo, junto à madeireira. Por fim, avaliamos que o instrumento, apesar de apresentar notáveis qualidade estéticas e funcionais em seu manuseio, poderia receber aprimoramentos em sua acústica, pois as notas não soam com um volume tão intenso quanto gostaríamos. Assim, sugerimos que em próximas construções a parte acústica seja melhor avaliada, talvez executando furos maiores ou em maior número no corpo do instrumento, ou mesmo repensando o tipo e a espessura de madeira utilizada.

3.2 DADOS DA ESCOLA E DO CURSO PROPOSTO

A prática educacional foi aplicada na Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha[6], localizada no município de Novo Hamburgo, no Rio Grande do Sul. A escola tem, aproximadamente, três mil alunos matriculados, advindos de mais de 50 municípios do estado, e disponibiliza duas modalidades de ensino: nos turnos da manhã e tarde, cursos técnicos integrados ao ensino médio, com duração de quatro anos (seriação anual), e, no turno da noite, cursos técnicos posteriores ao ensino médio, com duração de dois a três anos.

A escola conta atualmente com uma estrutura organizacional complexa, incluindo uma Diretoria de Pesquisa, Extensão e Inovação (DPEI), que, entre várias outras atribuições, promove cursos de extensão abertos a alunos, ex-alunos, professores e comunidade em geral. Optamos por propor as atividades no formato de um Curso de Extensão, com o título “*Construindo Consonâncias: relações entre matemática e música*”, em função de uma maior flexibilidade nos horários e possibilidade de contemplar estudantes de diferentes turmas. As inscrições foram abertas para alunos da Liberato e outras escolas da região, com a única restrição de que fossem alunos regulares do ensino médio, sendo definido o limite de 20 inscritos. Os encontros foram programados para dois sábados pela manhã, das 08:30 às 12:30, nos dias 18/11 e 02/12/2023, os quais foram definidos em função das datas disponibilizadas pela DPEI, compatibilizadas com as disponibilidades dos professores.

Nesse contexto, cabe destacar que dois professores de física, uma de química e um de design se interessaram pelo tema e se disponibilizaram a participar das atividades, de modo que a escola também se envolveu ativamente com o curso. O professor de física Jader participou com

[6] Mais informações sobre a escola disponíveis em: https://www.liberato.com.br/sobre-a-liberato/. Acesso em 14 de janeiro de 2024.

observações pontuais e auxiliou os estudantes nas práticas do primeiro encontro. A professora de física Laura esteve presente nos dois sábados, mas participou mais ativamente do segundo encontro, tanto durante nossa experiência de docência compartilhada quanto auxiliando os estudantes na atividade prática com os instrumentos. A professora de química Paola participou dos dois encontros, auxiliou nas atividades práticas e teceu observações interessantes relacionando outros tópicos, como, por exemplo, as funções de onda aplicáveis aos elétrons de um átomo, durante a aula de ondas no segundo encontro. O professor Dennis, que também é músico, esteve presente no segundo encontro, quando levou seu baixo elétrico e auxiliou os estudantes durante as atividades práticas com os instrumentos musicais. A participação desses professores foi fundamental para elevar ainda mais o caráter interdisciplinar dos encontros.

A etapa de divulgação foi bastante importante para garantir que as vagas fossem preenchidas. Cartazes de divulgação foram enviados aos alunos por e-mail e fixados nas paredes da escola, para além da divulgação oficial no site. Ao final, ficamos felizes em verificar que as vagas disponibilizadas foram preenchidas.

Cabe ressaltar que o formato do curso e a maneira como se deram as inscrições facultou aos estudantes a escolha de participar. Para fins de pesquisa, essa informação é muito relevante, uma vez que os estudantes inscritos efetivamente queriam estar lá e se interessavam pelo tema. No caso de turmas regulares, é possível que o interesse pelo assunto não fosse unanimidade entre os presentes. Ainda, cabe destacar que a Escola Liberato é reconhecida por proporcionar um ensino de qualidade e com rigorosa avaliação, além de contar com prova de seleção para ingresso. Assim, em geral, os estudantes da escola tendem a possuir uma base matemática bastante desenvolvida, o que também deve ser considerado durante a avaliação dos resultados observados na prática proposta.

Por fim, é importante mencionar que, para fins de divulgação da pesquisa, os participantes preencheram e assinaram o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido e, no caso dos menores de idade, o Termo de Consentimento Informado. Além disso, o Diretor da DPEI assinou a Carta de Anuência da Escola. Os modelos dos documentos estão disponibilizados como Apêndices.

3.3 PLANEJAMENTO DOS ENCONTROS

Os dois encontros foram planejados com base em dois momentos históricos distintos tratados no capítulo 2: o primeiro explora as relações entre matemática e música da Antiguidade

Clássica, no contexto da escola pitagórica e do experimento do monocórdio; e o segundo explora as relações entre matemática, física e música sob a concepção moderna do som como um fenômeno físico.

Entendemos que, desta forma, ao trabalhar com distintas interpretações, podemos ampliar a visão interdisciplinar do tema, e trazer efetivamente a ideia da ciência como construção humana e coletiva, que passou por diferentes fases e entendimentos. O artigo de Abdounur e Pereira (2022) explica em maiores detalhes a mudança de perspectiva ocorrida entre as duas visões elencadas, além de apresentar as potencialidades interdisciplinares dessa abordagem.

Do ponto de vista matemático, o primeiro encontro possibilita, principalmente, o trabalho de conteúdos envolvendo frações. Podem ser exploradas noções sobre relações de equivalência e ordem, bem como operações, em especial a multiplicação de frações. O segundo encontro, por outro lado, permite o trabalho com médias harmônicas e aritméticas, e, em especial, possibilita o trabalho de grandezas inversamente proporcionais, ao relacionar frequência com comprimento de corda. Muitos outros conteúdos matemáticos podem ser abordados durante o desenvolvimento das atividades, como, por exemplo, equações, sequências e progressões. Do ponto de vista musical, os encontros foram planejados para ter momentos de percepção, apreciação e reflexão.

Os recursos didáticos utilizados permitem diferentes formas de abordar os conteúdos, desde recursos audiovisuais, passando por instrumentos musicais, cordas, molas, instrumentos de medição, e envolvendo também recursos mais tradicionais, como quadro, papel e caneta. Boa parte das atividades foram planejadas para ter um caráter prático e investigativo, de forma que os próprios estudantes, ao manipular o monocórdio e os outros instrumentos musicais, fossem (re)construindo suas visões sobre as relações entre matemática e música. O primeiro encontro apresentou como principal recurso o monocórdio, enquanto o segundo deu maior enfoque aos instrumentos musicais disponibilizados, incluindo violão, baixo elétrico e ukulele. Também foram planejados momentos de conversa e reflexão, tanto na introdução quanto na finalização dos encontros, para que pudéssemos, juntos, construir significados a respeito das temáticas abordadas.

Os planos de aula completos constam como Apêndices deste trabalho, juntamente com os roteiros das atividades práticas de cada dia.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo serão descritas as experiências em sala de aula dos dois encontros, bem como discutidas e analisadas as produções e a participação dos estudantes.

4.1 PRIMEIRO ENCONTRO

No primeiro sábado, dia 18/11/2023, o curso contou com dezoito alunos presentes, além de três professores da escola, dois de física e uma de química, que também optaram por participar voluntariamente. Antes de iniciar as atividades, foram recolhidos os Termos de Consentimento Informado e de Assentimento Livre e Esclarecido devidamente preenchidos pelos participantes, conforme modelos que constam como Apêndices. Nos itens a seguir são descritos os acontecimentos do primeiro encontro em maiores detalhes.

4.1.1 Dinâmica de apresentação

O curso foi iniciado com atividades de apresentação. Primeiramente os participantes receberam um questionário com perguntas sobre a sua afinidade com matemática e com música, conforme modelo que consta como Apêndice. Após, foi realizada uma roda de conversa sobre a importância da música e da matemática na vida de cada participante.

Com o questionário inicial foi possível conhecer melhor o perfil da turma, o que era importante em função de se tratar de um curso de extensão com matrículas abertas para a comunidade. Com as respostas, verificou-se que todos os estudantes presentes estudavam no ensino médio/técnico da Escola Liberato, sendo três do 1º ano; seis do 2º ano; cinco do 3º ano e quatro do 4º ano (ensino técnico). Deste modo, ficou evidente que essa diferença de seriações deveria ser considerada na dinâmica dos encontros, especialmente no planejamento do segundo dia, onde seriam abordados conceitos de física e de ondas, que muitos estudantes ainda não tinham estudado na escola.

Cabe destacar que todos os participantes responderam que gostavam de escutar música, conforme detalhado na tabela 4.1. Em relação ao gênero musical preferido, houve respostas das mais variadas, passando por pop, pop rock, rock, folk, metal, k-pop, música clássica, bossa nova, MPB, indie, música gaúcha, eletrônica, rap, samba, gospel, hip-hop, punk rock e hard rock. Desses gêneros, citaram inúmeros artistas e bandas de sua preferência. Tais respostas evidenciaram que de fato a turma estava muito conectada à música, mas que cada estudante possuía suas singularidades.

Tabela 4.1 – Número de respostas para a pergunta “você gosta de escutar música?”.

Você gosta de escutar música?	**Nº de respostas**
Gosto muito. Escuto quase todos os dias, por iniciativa própria.	16
Gosto. Escuto de vez em quando, às vezes por iniciativa própria.	2
Indiferente, não escuto por iniciativa própria e não presto muita atenção quando toca.	0
Não gosto de escutar música.	0

(fonte: elaborado pelo autor)

Em relação a cantar e/ou tocar instrumentos musicais, 11 responderam que sim e 7 que não. Entre os que responderam sim, também houve uma grande diversidade nas respostas: cantam e/ou tocam violão, guitarra, flauta doce, acordeon, violino, ukulele, piano, teclado, cavaco, baixo, bateria ou saxofone.

Sobre gostar de matemática, a maioria também respondeu que gostava, porém as respostas foram mais heterogêneas do que o gosto por música, conforme detalhado na tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Número de respostas para a pergunta “você gosta de matemática?”.

Você gosta de matemática?	**Nº de respostas**
Gosto muito. Estudo os conteúdos da escola e outros, por iniciativa própria.	7
Gosto, mas estudo apenas os conteúdos da escola.	6
Gosto de alguns conteúdos, mas outros não.	3
Indiferente, estudo apenas o necessário para ser aprovado(a).	1
Não gosto de matemática.	1

(fonte: elaborado pelo autor)

Dos conteúdos favoritos de matemática, os que mais se destacaram foram geometria e trigonometria, com dez citações cada. Outros conteúdos citados foram matrizes, equações, funções, polinômios, gráficos, números complexos e probabilidade. Três estudantes, dentre os que estudavam conteúdos por iniciativa própria, também disseram que gostavam de tópicos do ensino superior, como topologia, teoria dos números, cálculo e álgebra. Essas respostas evidenciam que boa parte da turma possuía interesse genuíno em matemática, o que é característico de um curso de extensão, e pode não representar o perfil de uma turma regular.

Em relação à autopercepção das facilidades/dificuldades no aprendizado de matemática, as respostas foram diversas, conforme detalhado na tabela 4.3. Novamente observa-se um perfil um pouco distinto de turmas regulares, pois a maior parte da turma informou que avaliava ter facilidade no aprendizado de matemática, pelo menos em alguns conteúdos.

Tabela 4.3 – Autopercepção do processo de aprendizado de matemática.

Você avalia que tem facilidade/dificuldade no aprendizado de matemática?	**Nº de respostas**
Tenho facilidade, aprendo todos os conteúdos sem dificuldades.	6
Tenho facilidade em alguns conteúdos, mas dificuldade em outros.	9
Indiferente, não tenho facilidade nem dificuldade.	1
Em geral, tenho dificuldades em aprender matemática.	2

(fonte: elaborado pelo autor)

Cabe ressaltar que a única participante que havia respondido que não gostava de matemática na questão anterior informou que avaliava ter dificuldades no aprendizado. Essa mesma estudante, posteriormente, disse que gostava mais de matemática quando enxergava relações com outras matérias como física, química, biologia e artes. Nesse contexto, entendemos que a sua participação no curso possuía um significado singular e deveria ser analisada com atenção.

As últimas perguntas do questionário, dissertativas, tratavam sobre a importância da música e da matemática em suas vidas, bem como se já conheciam relações entre essas áreas. Essas mesmas perguntas foram feitas na roda de conversa, que ocorreu logo após o preenchimento do questionário.

Sobre o conhecimento prévio de relações entre matemática e música, quatro participantes disseram que não sabiam que existiam relações entre essas áreas, mas os outros quatorze disseram que conheciam pelo menos alguma relação. Foram citadas de forma mais genérica relações em compassos, tempos, ritmos, escalas, partituras, propagação de som, notas musicais, melodias, ondas, frequências, período, amplitude, nodos, harmônicos, intervalos musicais, construção de instrumentos e comprimento de cordas. Algumas frases foram um pouco mais desenvolvidas e chamaram a atenção, como “sei que há uma relação entre o comprimento de corda e a frequência produzida por ela, e isso pode ser calculado”, ou “sei de pouquíssimas coisas, somente o que eu aprendia na aula de piano em relação ao tempo e como se formularam as questões de musicalidade no passado”, ou “cada nota tem uma frequência específica para ser emitida, alterando a frequência se altera a nota”, ou “além de ter tido aulas sobre isso com o professor de música, já estudei isso por conta própria em casa, pois tinha curiosidade em saber a relação entre matemática e escalas/modais", ou "com o dedo, utilizando uma harpa, por exemplo, podemos alterar o comprimento de uma onda alterando o seu som, pois alterando o comprimento de onda a frequência se altera também", ou ainda "as ondas sonoras, que podem ser produzidas por instrumentos musicais, têm propriedades que são abordadas na matemática, como período, comprimento, amplitude, etc.". Em resumo, ficou claro que quem tinha um conhecimento mais avançado sobre essas relações já havia as estudado nas aulas de música ou de física, o que ficou evidente nas múltiplas citações sobre ondas e suas propriedades. Porém, de uma forma geral, as respostas passaram a impressão de que, apesar de conhecerem a existência de muitas relações entre matemática e música, esse conhecimento se dava mais a nível de informação do que de compreensão, e ainda era necessário conectar todos esses conceitos com argumentações mais precisas e concretas: talvez daí tenha vindo o interesse da maior parte da turma em participar do curso.

No que diz respeito à importância da música em suas vidas, nos chamou bastante a atenção a sinceridade e a profundidade das respostas, tanto as escritas do questionário quanto as verbalizadas da roda de conversa. Falas como "gosto de pensar na música como um potencializador de emoções", "a música intensifica sentimentos" ou "a música me ajuda quando estou triste ou ansiosa" ou "a música fala algo que não consigo falar" mostraram o quão relevante a música é para adolescentes ou jovens adultos, que estão passando por uma etapa da vida repleta de sentimentos e emoções. A seguir reproduzo algumas respostas do questionário, (muitas delas também foram verbalizadas na roda de conversa), que ilustram um pouco mais desse momento profundo e repleto de significados que aconteceu no início do encontro.

- "*A música sempre fez parte de minha vida, mesmo antes de eu aprender a falar. Sinto que, sem ela, meus dias ficam incompletos*";
- "*É boa para intensificar os sentimentos e torná-los mais claros*";
- "*A música, muitas vezes, acaba servindo como um refúgio para mim. Seja quando eu estou triste, feliz, ansiosa... a música sempre está presente*";
- "*A música para mim é o meio mais eficiente de expressão dos sentimentos, pensamentos e ideologias. Muitas vezes não consigo verbalizar o que sinto, e a música faz isso por mim*";

- "*A música é muito importante para mim. É a minha terapia e minha forma de me expressar para o mundo. Com a música eu vivi muitos sentimentos importantes na minha vida e conheci muitas pessoas. A música também sempre esteve presente em minha família*";

- "*É algo que me faz feliz e que, por vezes, expressa coisas que eu não consigo expressar na fala*";

- "*A música é importante para mim pois gosto de ouvir, cantar e tocar. Inclusive toco violão na igreja. Ouvir música me faz muito bem*";

- "*Música é importante pra mim porque me ajuda a estudar e desestressar, principalmente na pandemia, que foi quando aprendi a tocar teclado*";

- "*A música me ajuda a relaxar, me animar e a expressar meus sentimentos*";

- "*Eu gosto, me acalma e me faz bem*";

- "*A música me ajuda a me acalmar. Ter mais força e é o que eu mais tenho interesse em trabalhar*";

- "*Em momentos de grande ansiedade e nervosismo, a música me ajuda no processo de relaxamento. Ela me traz, conforme o meu humor, algum tipo de conforto*";

- "*É muito importante*";

- "*Música é muito show de bola. É algo (quase) universal, e é praticamente uma materialização do sentimento de uma pessoa para com um grupo de pessoas. É expressão pura, e não há quem não fique feliz escutando Black Dog bem alto*";

- "*Minha família tem a música como parte importante desde que eu nasci e a partir disso pude pegar gosto pelos mesmos estilos musicais que meus pais ouviram quando eu era pequena como MPB, rock gaúcho e internacionais. A música acabou se tornando um refúgio para os dias ruins e parte da comemoração para os dias bons. Cantar também é uma atividade que me faz muito feliz*";

- "*Eu passo basicamente o dia todo ouvindo música, a todo momento. Estou com ela em momentos tristes e felizes, e ela sempre potencializa tal emoção*";

- "*Quando estou muito triste, às vezes só a música consegue me ajudar*";

- "*Acredito que a música tem o poder de nos transportar para os lugares mais únicos possíveis, ela fortalece o que sentimos e ainda tem o poder de nos fazer sentir vistos e pertencentes, pois sempre haverá um estilo que você irá se relacionar ou uma letra que você irá sentir que fala de você e que alguém te entende, assim como pode ajudar a simplesmente extravasar*".

Em relação à importância da matemática em suas vidas, também nos chamou atenção a profundidade e sinceridade das respostas, muito embora, nesse caso, nem todas fossem tão positivas. A maior parte da turma mostrou uma certa afinidade com matemática por sua utilidade, e alguns citaram até uma admiração por sua beleza. Também houve menções à matemática como um passatempo e até mesmo como um alívio. Porém, durante as falas na roda de conversas, alguns participantes citaram que há momentos em que a matemática os cansa, especialmente na escola. Um participante disse que em função do seu curso (eletrotécnica) ter muita matemática com muita cobrança, ele acabou perdendo um pouco o gosto no ensino médio. Outra estudante também falou que gostava mais da matemática no Ensino Fundamental, mas acabou perdendo um pouco o interesse após algumas dificuldades no aprendizado. As respostas escritas do questionário são reproduzidas abaixo.

- *"Matemática também é um alívio para mim, às vezes faço exercícios para 'descansar' um pouco e por isso percebi que é com isso que quero trabalhar! Vou ser professora de matemática";*

- "*A matemática pode me trazer reflexões muito interessantes. Pretendo, no futuro, seguir uma carreira que tem uma forte relação com matemática, uma carreira na área de física*";

- *"A matemática é bem importante para mim pois gosto* muito da relação dela *com a natureza, o que me faz querer pesquisar e estudar mais o mundo";*

- *"Acho que matemática é importante para praticamente tudo em minha vida, como na escola e fora dela";*

- "*É grande (a importância), desde pequeno gostei muito de matemática, já ganhei prêmios em olimpíadas e hoje sou voluntário como monitor de matemática, o que só faz o meu amor por números crescer*";

- "*Já disse Galileo matemática ser 'a língua em que Deus escreveu o Universo', e acho que é isso mesmo. Pretendo seguir, na faculdade, estudando-a, quero fazer licenciatura em Matemática, então presume-se que matemática seja algo muito importante para mim, e no caso é muito. Gosto de tudo, desde álgebra de 1º grau até os Teoremas de Incompletude de Gödel... tirando probabilidade... não curto probabilidade...";*

- *"No fundamental eu costumava gostar de alguns conteúdos de matemática, mas sempre tive dificuldades no aprendizado. Vejo a matemática muito mais como algo a entender por ser necessário academicamente do que por utilizar no meu dia a dia. Apesar disso, quando a matemática é utilizada relacionando-se a outras matérias como física, química, biologia e artes, eu consigo gostar dos conhecimentos e aplicações na vida que essa união proporciona";*

- *"Às vezes*[7] *é algo que traz prazer por ser mais regrado e lógico, já que funciono melhor com ideias assim. É algo interessante e se prova necessário para o entendimento da forma em que funcionam as coisas";*

- "*É uma das únicas coisas que eu gosto de fazer atualmente. Nada tem muita graça*";

- *"A matemática facilita a compreensão de muitas coisas e do porquê de elas serem como são. A humanidade só chegou aonde chegou graças a ela (associada ou não com outras ciências)";*

- *"Preciso saber para ir bem na prova";*

- *"É muito importante";*

- *"É útil para raciocínios lógicos do cotidiano, além de, por exemplo, na geometria espacial melhorar a projeção/visão no imaginário";*

[7] Grifo da participante.

- *“Desde pequena sempre gostei muito de matemática por influência do meu pai. Acredito que a matemática vai muito além de fazer cálculos, com ela podemos resolver muitos desafios”;*

- *“A matemática tem uma grande influência na vida de todo mundo desde muito cedo. Aprendemos a contar desde criança, seja contando quantas letras têm nosso nome quando entramos na escola, até realmente aprender a fazer cálculos. Está presente em nosso dia a dia, gostando ou não de matemática, faz parte de coisas que nem imaginamos. Não só é importante em minha vida, mas também essencial na vida de todos”;*

- *“A matemática me ajuda na escola e em momentos do meu dia a dia”;*

- *“Sempre me relacionei muito mais com exatas do que humanas, pois sinto que faz sentido, tudo tem motivo e consegue ser explicado pelos números, e isso é magnífico”;*

- *“Desde pequena, sempre achei a matemática interessante, nunca perdia a graça. Sim, até hoje gosto, mas agora encontro dificuldade em alguns conteúdos. Contudo, isso não me abala, pois tenho vários amigos que são monitores de matemática e sempre estão dispostos a me ajudar”.*

A roda de conversa foi um momento muito bonito e profundo do encontro, onde muitas das respostas do questionário, listadas acima, foram verbalizadas e, por vezes, complementadas e debatidas. Por exemplo, logo de início houve um contraste entre a resposta de um aluno que gostava e admirava a matemática por sua beleza intrínseca e de uma aluna que só gostava da matemática quando visualizava suas aplicações em outras ciências ou nas artes. Com as respostas seguintes, foi possível observar que, embora cada participante tivesse a sua própria relação com a música e com a matemática, este momento de construção coletiva possibilitou que muitos relatos fossem fortalecidos, como, por exemplo, a associação com sentimentos e emoções, que foi citada diversas vezes. Assim, entendemos que a roda de conversa foi fundamental para gerar reflexões e criar um ambiente de pertencimento para toda a turma.

Após as falas dos estudantes, os professores participantes também fizeram seus próprios relatos, o que avaliamos como positivo para os processos de reconhecimento e aproximação entre educadores e educandos.

Conforme defendido por Granja (2005), momentos de escuta e apreciação musical são de extrema importância em atividades educacionais que envolvam música. Nesse contexto, optamos por mostrar, ao final da dinâmica de apresentação, dois vídeos contendo músicas para um momento de escuta coletivo.

O primeiro vídeo escolhido foi da música *The Great Gig in The Sky*[8], do show *Us + Them* de Roger Waters (2019), cofundador da banda Pink Floyd, com participação especial das cantoras Jess Wolfe e Holly Laessig, da banda Lucius (figura 4.1). O vídeo chama atenção pela interpretação das cantoras e pela beleza da música e do cenário ao fundo. Um professor de física da escola comentou sobre o caráter catártico dessa música, representando uma libertação de sentimentos e indo ao encontro dos relatos anteriores dos estudantes.

Após a apresentação desse vídeo, inspirados no cenário do céu noturno estrelado ao fundo, aproveitamos para comentar da proximidade entre matemática, música e astronomia presentes no currículo *Quadrivium* da Antiguidade Clássica, e que perdurou até a Idade Média. A matemática, representada pela aritmética e pela geometria, estudava os números e as formas em repouso, respectivamente; já a música e a astronomia representavam os números e as formas em movimento (GRANJA, 2005). Nesse contexto, foi estabelecido um diálogo sobre como a proximidade entre essas áreas do conhecimento acabou perdendo um pouco a evidência no currículo escolar atual.

Figura 4.1 – Turma apreciando a música *The Great Gig in The Sky*.

(fonte: acervo pessoal do autor)

[8] Roger Waters – The Great Gig in The Sky (Us +Them). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=YrdX2aYIf10. Acesso em: 18 de novembro de 2023.

O segundo vídeo escolhido foi um trecho do quarto episódio da quarta temporada do seriado Stranger Things (2022). Na cena em questão[9], a personagem Max está presa no mundo invertido pelo monstro Vecna, e, ao escutar a sua música favorita (*Running Up That Hill* de Kate Bush) relembra de momentos importantes de sua vida, ganhando forças para escapar daquela situação. A cena é muito bonita e impactante, mostrando como a música pode ter um efeito significativo em nossas emoções e em nossas reações. Apesar de ser um seriado de ficção, foi possível traçar várias analogias entre o monstro Vecna e as adversidades que podem surgir ao longo de nossas vidas. Nesse contexto, entendemos que a apresentação do vídeo conversou muito bem com os relatos anteriores dos estudantes. Ainda, cabe ressaltar que trata-se de um seriado recente e conhecido entre os participantes – cerca de metade da turma respondeu que já o tinha assistido – o que facilitou a sua apropriação. Avaliamos, assim, que a apresentação desse vídeo também contribuiu para a etapa inicial de conversas e apresentações, auxiliando na construção de significados para a prática proposta.

4.1.2 Matemática e música: introdução teórica

A segunda etapa da aula tinha como objetivo adentrar no estudo das relações entre matemática e música na Antiguidade Clássica, para que posteriormente a turma construísse a escala pitagórica com o auxílio do monocórdio.

Essa etapa foi iniciada com a apresentação de um trecho do vídeo Donald no País da Matemágica (1959) que trata de matemática e música de uma maneira mais informal. No trecho em questão[10], Donald viaja para a Grécia antiga, onde lhe são apresentados os pitagóricos e as relações entre intervalos musicais e razões entre números inteiros. Além de auxiliar na introdução do tópico que seria estudado, o vídeo também convidou os participantes a mais um momento de escuta e contemplação, pois traz trechos musicais muito bonitos. O final do trecho também traz um ar nostálgico, quando os pitagóricos desaparecem com um apertar de mãos e relembramos que essa história aconteceu há mais de dois milênios.

Após, foi realizada uma breve aula expositiva, na qual apresentamos o contexto histórico da escola pitagórica, conforme os tópicos abordados no item 2.1.1, sempre chamando a atenção

[9] Max’s Song (Full Scene) | Kate Bush – Running Up That Hill | Stranger Things.
Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=bV0RAcuG2Ao. Acesso em: 18 de novembro de 2023.

[10] Pitágoras e a Música – Donald no País da Matemágica.
Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=66l6MBQgcRg. Acesso em: 18 de novembro de 2023.

para a influência de civilizações orientais e africanas, notoriamente os egípcios, durante as viagens que Pitágoras realizou nessas regiões, inclusive mostrando mapas. Também foram apresentados tópicos básicos sobre o pitagorismo e o significado dos números 1, 2, 3 e 4 (*tetraktys*), que explicariam o Universo sob uma ótica especulativa. Nesse momento foi introduzido o conceito de consonância musical, mostrando, com o auxílio de um instrumento disponibilizado pela escola (figura 4.2), que algumas notas soavam bem em conjunto, e citando que para os pitagóricos tais consonâncias eram geradas pela razão entre pequenos números inteiros da *tetraktys*, mas ponderando que outras explicações viriam a surgir com o desenvolvimento da matemática e da física ao longo dos séculos. Aproveitando o formato do instrumento e a característica de poder martelar as barras metálicas que emitiam sons, contamos a lenda dos martelos do ferreiro retratada na obra Theorica Musicae, de Gaffurio, e frequentemente relacionada com a descoberta do conceito de consonância. Por fim foram apresentados conceitos sobre o monocórdio, cuja criação também é atribuída a Pitágoras, partindo-se para a demonstração de alguns intervalos no monocórdio que havia sido posicionado no centro da sala, especialmente de oitava e de quinta.

Figura 4.2 – Instrumento utilizado para introduzir o conceito de consonância musical.

(fonte: acervo pessoal do autor)

Coube destacar, durante as explanações, que no currículo atual da matemática escolar Pitágoras é muito lembrado pelo teorema do triângulo retângulo, em geometria (e nesse momento relembramos tal teorema no quadro, com auxílio dos estudantes), mas sua contribuição matemática à música nem sempre é abordada. Porém, em realidade, essa contribuição teve um impacto expressivo na história da matemática e da ciência musical: segundo Abdounur (2015), foi a primeira tentativa de fundamentar cientificamente a música de que temos registro. Avaliamos tais ponderações como importantes para que os estudantes pudessem relacionar os conceitos que estavam sendo apresentados com outros tópicos que já haviam estudado na escola, o que possibilita uma visão mais ampla do desenvolvimento da matemática e da ciência. Outro ponto que coube destaque foi que, tanto nas contribuições à geometria quanto à música, fica evidente a influência que Pitágoras recebeu de outras civilizações, pois também há registros de triângulos retângulos utilizados por egípcios, por exemplo. Nesse contexto, coube uma primeira reflexão sobre a matemática como construção humana e coletiva, que viria a ser reiterada em momentos posteriores dos encontros.

Nessa etapa também foram apresentadas noções básicas sobre teoria musical, incluindo nomenclatura e simbologia de notas musicais, escuta de intervalos (oitava, quinta), sons graves e agudos, entre outros. Um violão e um piano virtual foram utilizados para auxiliar as explicações. Muito embora vários participantes já tivessem conhecimentos sobre teoria musical, avaliamos essa parte como fundamental para a sequência das atividades, uma vez que cerca de metade da turma não tocava instrumentos musicais e desconhecia tais conceitos. Tendo em vista que em turmas regulares a tendência é um percentual ainda maior de estudantes não estar familiarizado com a teoria musical, recomendamos que, em práticas como essa, seja sempre reservado um tempo para introduzir noções sobre conhecimentos musicais.

Essa etapa foi finalizada em torno das 10:30, mais tarde do que havia sido planejado, em função principalmente da dinâmica de apresentação, que durou mais tempo do que imaginávamos. Contudo, tendo em vista a riqueza daquele momento, avaliamos que a alteração do cronograma proposto foi positiva, pois englobou vivências para além de nossas expectativas. Nesse contexto, ao final da exposição teórica sobre noções de teoria musical foi iniciado o intervalo de 20 minutos, com *coffee break*, propiciando um momento de descanso aos participantes.

4.1.3 Construção da escala pitagórica

No retorno do intervalo, demos início à construção coletiva da escala pitagórica com o monocórdio. Para tanto, apresentamos dois princípios de construção – ciclos de quintas e de oitavas – com base no que já havíamos estudado:

1) Equivalência (intervalo de oitava): 1/2 ou 2.
    - Dividir o comprimento da corda na metade (mesma nota, mais aguda);
    - Duplicar o comprimento da corda (mesma nota, mais grave).

2) Intervalo de quinta: 2/3.
    - Tomar 2/3 do comprimento da corda (uma quinta acima).

Com base nesses dois princípios, toda a escala pitagórica pode ser construída, a partir de um ciclo sucessivo de quintas, por vezes mesclado com equivalências de oitavas. Assim, a atividade ganha um padrão sequencial, envolvendo raciocínios e argumentações matemáticas, ao mesmo tempo em que os estudantes puderam escutar cada nota e apreciar as consonâncias (figura 4.3).

No quadro, desenhamos a tabela 4.4 para guiar a construção, mas preenchendo apenas a primeira nota e a sua oitava. Cabe ressaltar que o monocórdio construído estava afinado em Dó e o seu comprimento de corda solta era de 63 cm, por isso que foram inseridos esses valores na tabela. A partir daí, os estudantes foram divididos em grupos e cada grupo ficou responsável por construir a próxima nota musical, mas com toda a turma acompanhando o processo.

Tabela 4.4 – Tabela desenhada no quadro para facilitar o processo de construção.

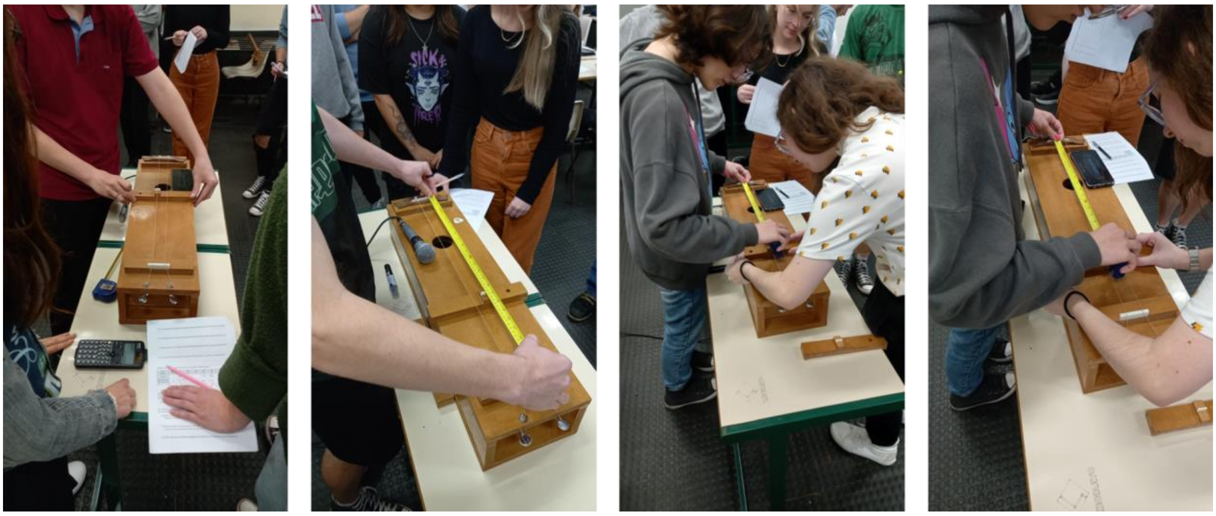
Nota	**Dó**	**Ré**	**Mi**	**Fá**	**Sol**	**La**	**Si**	**Dó**	**Ré**	**Mi**
Símbolo	**C_3**	**D_3**	**E_3**	**F_3**	**G_3**	**A_3**	**B_3**	**C_4**	**D_4**	**E_4**
Fração	1							1/2		
Comprimento de corda [cm]	63							31,5		

(fonte: elaborado pelo autor)

O primeiro grupo que participou construiu a quinta de Dó, isto é, a nota Sol. Este procedimento é o mais direto, pois basta multiplicar 63 cm por 2/3, e o grupo conseguiu fazer isso sem grandes dificuldades, resultando em 42 cm. Ao medir os 42 cm na corda e posicionar o cavalete móvel, fizeram um ajuste fino após escutarem a nota juntamente com a primeira nota da corda solta. Quando verificaram que as duas notas soavam bem em conjunto, completaram a coluna da nota Sol na tabela. Uma estudante que tocava violão comentou que de fato as notas soavam bem, como um acorde, e nós complementamos que de fato se tratava de um *power chord*, que é formado justamente pela primeira e pela quinta.

O próximo grupo construiu a nota Ré, que é a quinta de Sol. Inicialmente multiplicaram 42 cm por 2/3, obtendo o comprimento de 28 cm. Com o auxílio de um afinador do celular, que passaram a usar por iniciativa própria, verificaram que era a nota Ré, mas bem aguda, pois estava uma oitava acima. Após mostrarmos na tabela que na verdade se tratava do Ré D_4, perguntamos o que tinha que ser feito para obter o Ré D_3, dentro da oitava em análise. Um dos estudantes respondeu rapidamente que tinha que multiplicar por 2, obtendo o valor de 56 cm. Porém, nesse momento outros participantes do grupo não entenderam muito bem, e passaram a debater todo o processo, pensando também em frações, até se convencerem que de fato se partia de 2/3 (Sol G_3), multiplicando novamente por 2/3 e obtendo o valor de 4/9 (Ré D_4), para então multiplicar por 2 e obter 8/9 (Ré D_3). Essa conclusão, contudo, não foi tão linear quanto aqui descrita, e o grupo ficou alguns minutos debatendo e conversando sobre o processo. Foi interessante observar os estudantes questionando uns aos outros, evidenciando que para esse tipo de construção a atividade em grupos pode ser profícua.

Figura 4.3 – Grupos construindo as notas da escala pitagórica com o monocórdio.



(fonte: acervo pessoal do autor)

Porém, após compreenderem matematicamente o processo, surgiu um problema prático: ao medir a corda com 56 cm, tocá-la, escutar a nota gerada e verificar no afinador, a nota Ré D_3 não era perfeitamente obtida. Nesse momento pensaram que o processo deveria ter algum erro, porém nós intervimos dizendo que eles tinham chegado no valor teórico correto, porém havia acontecido uma falha experimental, relacionada com a construção do instrumento: como o cavalete móvel ficava muito próximo da extremidade fixa quando travava a corda com 56 cm de comprimento, ele acabava levantando um pouco a corda e a tensionando, alterando sua nota por outros motivos. De fato, trata-se de uma falha na construção do instrumento, pois as extremidades fixas não ficaram exatamente na mesma altura, o que gerou essa pequena distorção ao posicionar o cavalete móvel, mais alto, perto de uma extremidade mais baixa. Porém, avaliamos essa "falha" como uma oportunidade de aprendizado de todos, pois nós podemos visualizar possíveis melhorias no processo de construção do monocórdio e os estudantes puderam compreender na prática que dados experimentais sempre poderão sofrer influências de outros fatores além dos planejados, o que possibilitou ampliar a discussão sobre o método científico. Na prática, nesse monocórdio, o grupo chegou à conclusão de que a nota Ré só era obtida com o comprimento próximo a 57 cm, embora o valor teórico fosse 56 cm.

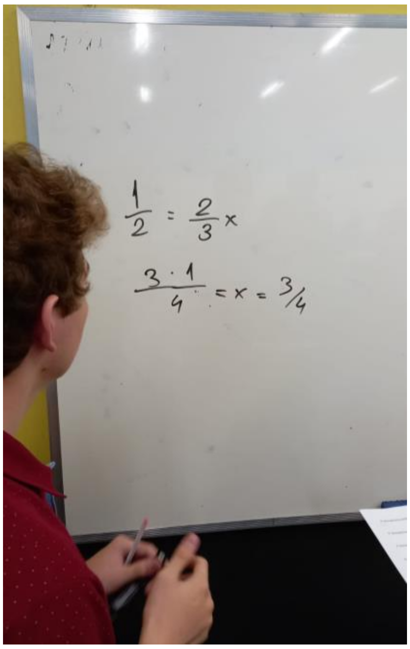
O próximo grupo construiu a nota La, que é a quinta de Ré. Para tanto, multiplicaram a fração de 8/9 por 2/3, obtendo 16/27, o que resultava em um comprimento de cerca de 37,3 cm. Após, os grupos construíram as notas Mi e Si, com argumentos semelhantes, obtendo as frações 64/81 e 128/243, respectivamente.

Cabe ressaltar que, durante as construções, uma aluna perguntou por que o comprimento da corda do monocórdio era 63 cm. Trata-se de uma excelente pergunta, uma vez que não precisa necessariamente ser 63 cm: foi apenas uma dimensão escolhida na construção do instrumento, tendo em vista as peças de madeira que tínhamos à disposição. Porém, essa pergunta abriu margem para conversar cobre a diferença entre comprimento absoluto e fração relativa. Independente do comprimento da corda, a fração associada a cada nota seria sempre a mesma, já que o número "um", associado a Dó, representava "uma unidade de comprimento de corda". Portanto, se o comprimento da corda fosse 66 cm, por exemplo, a nota Sol estaria a 2/3 de 66 cm, representando 44 cm ao invés de 42 cm. Tal raciocínio é bastante importante na compreensão de conceitos matemáticos envolvendo frações, e pôde ser desenvolvido junto com a turma a partir da pergunta da estudante.

Por fim, chegamos na nota Fá, que era a única que faltava para completar a tabela. Comentamos brevemente que essa nota seria diferente das demais, mas sem explicar o porquê. Logo alguns estudantes com maior familiaridade com a música perceberam que a quinta de Si era Fá#, e não Fá. Após observar a turma discutir sobre isso e verificar que a sequência que estava sendo usada anteriormente não poderia ser mais aplicada, perguntamos: "*o Dó C4 é a quinta de qual nota?*". A resposta veio rapidamente: o Dó C_4 é a quinta de Fá F_3, isto é, para construir a nota Fá seria necessário fazer o raciocínio inverso – construir a nota cuja quinta era o Dó.

Caímos, por consequência, em um problema de modelagem, ainda que simples. Era necessário primeiramente equacionar a descoberta anterior, para então determinar a fração representativa da nota Fá. Essa questão foi colocada como desafio e acabou incentivando a descoberta por parte de alguns estudantes, que logo tentaram equacionar em seus cadernos ou no quadro. Na figura 4.4 pode-se verificar um dos alunos equacionando a questão, nomeando como x a incógnita da fração relativa a Fá, e descobrindo que x tem que ser igual a 3/4, pois 3/4 multiplicado por 2/3 resulta em 1/2, isto é, a quinta de Fá é Dó uma oitava acima.

Figura 4.4 – Estudante equacionando a questão para determinar a fração da nota Fá.



(fonte: acervo pessoal do autor)

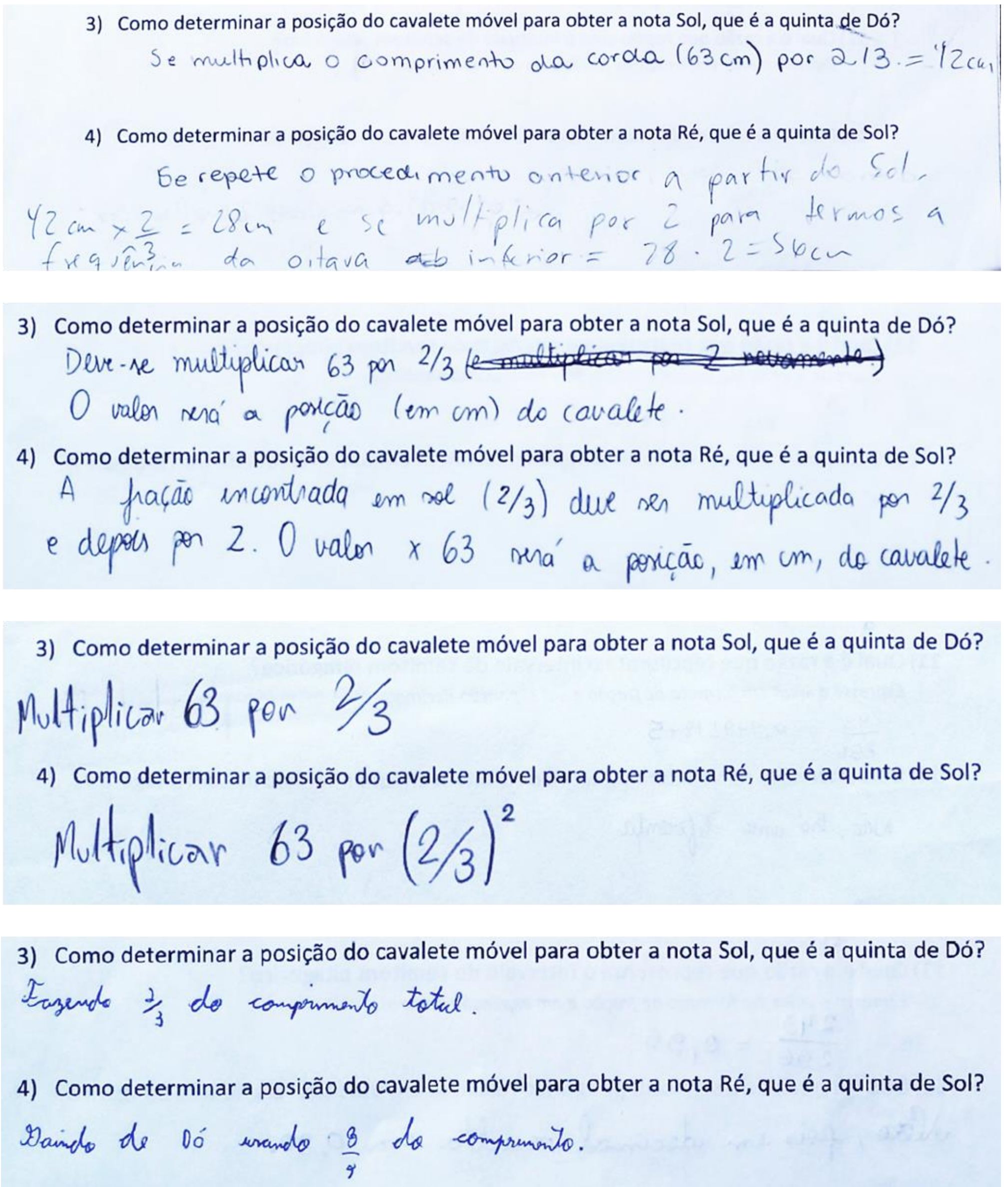
4.1.4 Atividade escrita

Após a construção da tabela ter sido finalizada, os grupos se dividiram nas mesas (figura 4.6) para desenvolver o roteiro da atividade (disponível como Apêndice deste trabalho), que tinha por objetivo registrar e sintetizar a construção, bem como incentivar raciocínios adicionais.

Sobre a percepção das oitavas e quintas, os quatro grupos responderam de forma semelhante. Comentaram que a corda solta e a corda dividida pela metade soavam agradáveis, reconhecendo o intervalo de oitava, sendo que dois grupos complementaram dizendo se tratar da mesma nota, uma mais grave e outra mais aguda. No caso da nota emitida pela corda com 2/3 do comprimento, também reconheceram o intervalo de quinta e disseram que soa agradável com a corda solta, ainda que não fosse a mesma nota.

Na explicação de como determinar a posição do cavalete móvel para a geração de cada nota, houve respostas bem distintas, algumas mais completas, e outras mais diretas. Na figura 4.5 mostramos as respostas dos quatro grupos para a construção das notas Sol e Ré.

Figura 4.5 – Respostas dos quatro grupos para as construções das notas Sol e Ré.


3) Como determinar a posição do cavalete móvel para obter a nota Sol, que é a quinta de Dó?

Se multiplica o comprimento da corda (63 cm) por $2/3$ = 42 cm

4) Como determinar a posição do cavalete móvel para obter a nota Ré, que é a quinta de Sol?

Se repete o procedimento anterior a partir do Sol. $42\text{ cm} \times \frac{2}{3} = 28\text{ cm}$ e se multiplica por 2 para termos a frequência da oitava ~~ab~~ inferior = $28 \cdot 2 = 56\text{ cm}$

3) Como determinar a posição do cavalete móvel para obter a nota Sol, que é a quinta de Dó?

Deve-se multiplicar 63 por $2/3$ ~~(e multiplicar por 2 novamente)~~

O valor será a posição (em cm) do cavalete.

4) Como determinar a posição do cavalete móvel para obter a nota Ré, que é a quinta de Sol?

A fração encontrada em sol ($2/3$) deve ser multiplicada por $2/3$ e depois por 2. O valor $\times$ 63 será a posição, em cm, do cavalete.

3) Como determinar a posição do cavalete móvel para obter a nota Sol, que é a quinta de Dó?

Multiplicar 63 por $2/3$

4) Como determinar a posição do cavalete móvel para obter a nota Ré, que é a quinta de Sol?

Multiplicar 63 por $(2/3)^2$

3) Como determinar a posição do cavalete móvel para obter a nota Sol, que é a quinta de Dó?

Fazendo $\frac{2}{3}$ do comprimento total.

4) Como determinar a posição do cavalete móvel para obter a nota Ré, que é a quinta de Sol?

Saindo de Dó usando $\frac{8}{9}$ do comprimento.

(fonte: produções dos estudantes)

Percebe-se que os dois primeiros grupos descreveram em maior detalhe as construções. O terceiro grupo utilizou uma notação matemática, inclusive com expoentes, porém esqueceu que teríamos que descer uma oitava (multiplicar por dois) na construção do Ré. E o último grupo utilizou diretamente os resultados das frações obtidas durante a construção coletiva, sem justificar o processo. A explicação para as demais notas seguiu o mesmo padrão.

Figura 4.6 – Divisão da turma em grupos para desenvolvimento da atividade.

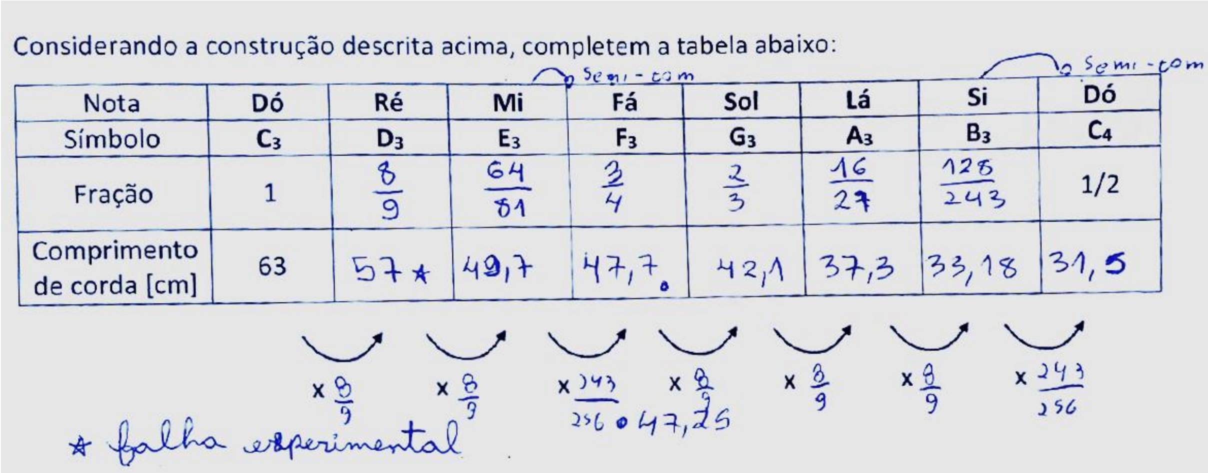
(fonte: acervo pessoal do autor)

Ao observar as respostas, avaliamos que todos os grupos conseguiram estabelecer um raciocínio para justificar as construções, ainda que, por exemplo, o quarto grupo tenha omitido alguns passos. De todo modo, parece ter ficado clara a ideia de que a fração associada a cada nota representa um valor relativo ao comprimento total da corda, e não um valor absoluto.

Observamos um preenchimento coerente da tabela de notas por parte de todos os grupos. A figura 4.7 mostra o preenchimento do quarto grupo, evidenciando que eles preferiram utilizar os valores absolutos ajustados obtidos experimentalmente do que os valores teóricos oriundos do processo puramente matemático: em alguns casos, como nas notas Ré e Fá, houve diferenças maiores entre esses valores. Cabe ressaltar que eles destacaram essa diferença, chamando, inclusive, de “falha experimental” na nota Ré, em função da questão do tensionamento da corda já mencionado anteriormente. Já na nota Fá, eles anotaram, mais abaixo, o valor teórico correto, de 47,25 cm, um pouco diferente do valor obtido experimentalmente, de 47,7 cm. Cabe destacar que, para além de pequenas falhas de experimentais ou de medição, um fator que pode ter influenciado nessas variações foi o ajuste fino realizado pelos estudantes ao escutar as notas e/ou ao fazer uso dos afinadores, os quais não são calibrados pela escala pitagórica, mas sim pela escala de igual temperamento.

A tabela preenchida também nos mostra que o grupo determinou corretamente os intervalos de tom e semitom pitagórico, de 8/9 e 243/256, inclusive destacando que os intervalos de semitom ocorriam apenas entre Mi e Fá e entre Si e Dó, tecendo relações com a teoria musical, que provavelmente fez mais sentido aos já familiarizados com algum instrumento.

Figura 4.7 – Tabela preenchida pelo quarto grupo.



Considerando a construção descrita acima, completem a tabela abaixo:

Nota	Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
Símbolo	C_3	D_3	E_3	F_3	G_3	A_3	B_3	C_4
Fração	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	1/2
Comprimento de corda [cm]	63	57 *	49,7	47,7	42,1	37,3	33,18	31,5

(fonte: produção dos estudantes)

O primeiro grupo mostrou um rascunho no canto da folha de como que encontrou o intervalo de semitom entre Mi e Fá, equacionando o problema e resolvendo o valor de x, conforme equação (4.1). Isto é, foi possível observar que o grupo desenvolveu o raciocínio de que o intervalo de semitom é representado pela razão x, a ser multiplicada pela fração correspondente a Mi (64/81) para obter a fração correspondente a Fá (3/4).

$$\frac{64}{81} \cdot x = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad x = \frac{3 \cdot 81}{4 \cdot 64} = \frac{243}{256} \tag{4.1}$$

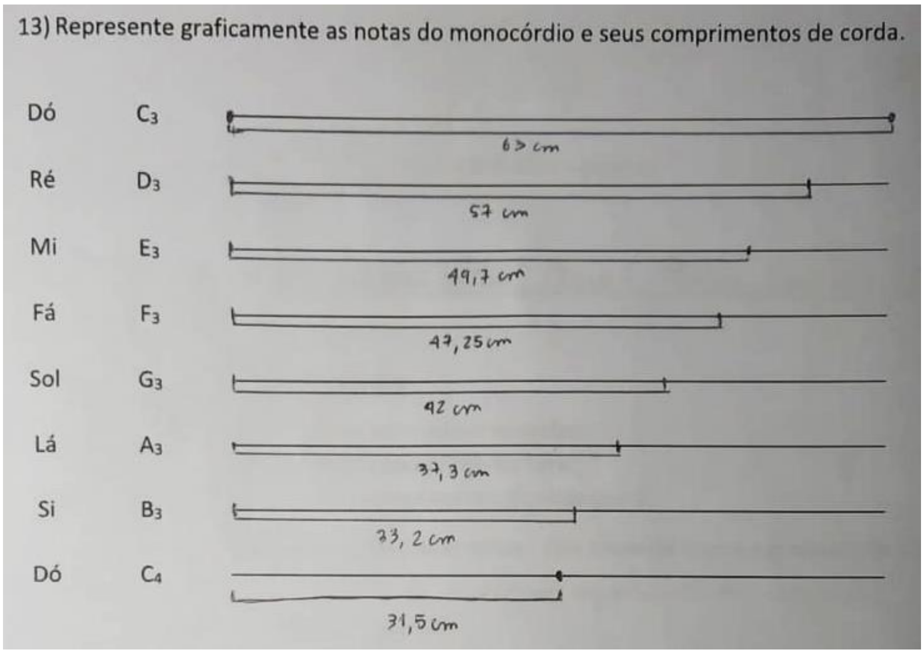
Para expressar essas frações dos tons e semitons como expansões decimais, os grupos verificaram que o tom de 8/9 resultava na dízima periódica 0,888..., porém a resposta apareceu em quatro formas distintas: 0,89, 0,889, 0,8889, e $0,88\overline{8}$. Já o semitom de 243/256 foi apresentado nas formas 0,95, 0,9492 e 0,94921875.

Três grupos conseguiram perceber que dois intervalos de semitom pitagóricos não resultam em um intervalo de tom, uma vez que, conforme mostrado na equação (4.2), a multiplicação entre eles não resulta exatamente em 8/9. Um dos grupos mostrou iniciou essa demonstração a partir da multiplicação de frações, mas a finalizou comparando os valores das expressões decimais conforme a equação (4.2). Outros dois grupos multiplicaram diretamente as expansões decimais, chegando na mesma conclusão, ainda que de forma aproximada. Porém, um dos grupos não percebeu a diferença e respondeu que dois semitons resultavam em um tom, talvez por conta da formação musical prévia com a escala de igual temperamento, na qual isso ocorre.

$$\frac{243}{256} \cdot \frac{243}{256} = \frac{59049}{65536} \cong 0{,}901 \neq 0{,}\bar{8} = \frac{8}{9} \qquad (4.2)$$

Por fim, três grupos ainda conseguiram representar graficamente os comprimentos de corda, mas um grupo não chegou a essa etapa a tempo. A figura 4.8 mostra a representação do segundo grupo. Avaliamos essas representações como bastante importantes, pois é uma outra forma de sintetizar toda a construção e ao mesmo tempo visualizar os princípios básicos de construção dos instrumentos de corda, como por exemplo o violão. Muito embora a maior parte dos instrumentos atuais não seja afinada na escala pitagórica, mas sim na escala de igual temperamento, a diferença é pequena e a ideia fundamental de posicionamento dos trastes é muito semelhante a essa representação do processo de construção da escala.

Figura 4.8 – Representação gráfica das notas musicais pelo segundo grupo.



(fonte: produção dos estudantes)

Com base em todos esses raciocínios estabelecidos, verificamos que a atividade proposta pode abrir muitas portas para trabalhar com frações, equivalências, relações de ordem, operações, equações, expansões decimais, representações gráficas, entre muitos outros conceitos da matemática escolar. Em função do tempo limitado do encontro, não foi possível aprofundar muito o trabalho desses temas, mas foi possível observar que os grupos conseguiram, de uma forma geral, compreender a construção da escala e as operações matemáticas envolvidas.

Cabe destacar novamente as singularidades do curso de extensão proposto, incluindo a heterogeneidade da turma, com alunos do 1º ao 4º ano, bem como o perfil diferenciado de uma turma majoritariamente interessada em música e em matemática. Em turmas regulares, entendemos que ainda é necessário realizar novas experiências didáticas para melhor compreender e estimar o tempo ideal para as atividades propostas.

Ao final do primeiro encontro, passamos ainda uma síntese de tudo que foi feito, apresentando a escala pitagórica nos slides e revendo os passos de sua construção. Comentamos também, ainda que brevemente, de algumas limitações da escala pitagórica, tratadas em maior detalhe no item 2.1.1 deste trabalho. A primeira delas é o fato de algumas notas não serem representadas por razões de números pequenos, como por exemplo a nota Mi, representada por 64/81, o que aparentemente seria uma contradição na explicação pitagórica para as consonâncias. A segunda é o fato de dois semitons não resultarem em um tom, conforme demonstrado em aula. A terceira seria a dita *coma pitagórica*, oriunda da impossibilidade de ciclos de quinta e de oitavas se encontrarem. Por fim, ainda há a limitação conceitual de toda a explicação das notas estar baseada em medidas e proporções, em especial de comprimentos de corda. Essa parte da aula acabou sendo abordada bem rapidamente, em função do tempo limitado, mas entendemos que foi fundamental para deixar uma provocação na mente dos estudantes, convidando-os para o próximo encontro, no qual seria abordada uma visão mais ampla sobre o som, trazendo também o olhar da física. Também convidamos os grupos a pensarem em músicas que gostassem, para serem apresentadas ao final do segundo encontro.

4.2 SEGUNDO ENCONTRO

Iniciamos o segundo encontro com um momento de escuta musical, pois, em nossa concepção, que vai ao encontro do que é defendido por Granja (2005), não é possível falar sobre música em uma prática educacional sem efetivamente escutar a apreciar música. Escolhemos a apresentação de *Hijos del Sol*[11], da dupla Hermanos Gutiérrez, por se tratar de uma música instrumental muito bonita que conversa com momentos de estudos e reflexões. Além disso, na apresentação o guitarrista Alejandro traz uma *lap steel guitar*, uma espécie de guitarra que é tocada deitada, de certa forma lembrando o monocórdio utilizado na aula anterior.

[11] Hermanos Gutiérrez. Música: Hijos del Sol. Montreux Jazz Festival Spotlight Session. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=8VtsFK3anpg. Acesso em: 27/12/2023.

4.2.1 Introdução histórica

Logo após essa introdução, partimos para uma revisão no quadro do que havia visto no encontro anterior, pois já haviam se passado duas semanas. Refizemos toda a construção da escala pitagórica, passo a passo, multiplicando sucessivamente os intervalos de quinta e descendo oitavas quando necessário. Ao final da construção, chamamos a atenção para a explicação pitagórica das consonâncias, que estariam baseadas na razão entre números inteiros, em especial a quinta (2/3), a quarta (3/4) e a oitava (1/2), lembrando também da filosofia pitagórica acerca dos significados dos números e em especial da *tetraktys*, 1, 2, 3, 4, que explicaria todo o Universo. Reiteramos algumas das limitações, já mencionadas, dessa abordagem.

Seguindo no quadro, apresentamos a escala justa, que paulatinamente substituiu a escala pitagórica ao longo da Idade Média, e desenvolvemos os argumentos matemáticos e filosóficos que Zarlino (1517 – 1590), utilizou para modificar a razão da nota Mi de 64/81 para 4/5; da nota Lá de 16/27 para 3/5 e da nota Si de 128/243 para 8/15, conforme detalhado no item 2.1.2 deste trabalho. Nesse contexto, comentamos sobre o *Senário* proposto por Zarlino, com a adição do número 5 como fator primo na produção de consonâncias, salientando que agora estávamos falando de contribuições do Renascimento, cerca de dois milênios depois de Pitágoras.

Também comentamos sobre a determinação das terças maiores e menores, obtidas por Zarlino a partir das médias harmônica e aritmética, respectivamente, entre a 1ª (1) e a 5ª (2/3). O cálculo dessas médias foi desenvolvido no quadro, com participação dos estudantes, obtendo-se os valores de 4/5 e 5/6, o que avaliamos como positivo para relacionar mais um conteúdo matemático escolar com a música. Nesse momento ocorreu uma dúvida interessante por parte dos estudantes: ao verificarem que a *terça maior* estava relacionada com 4/5 e a *terça menor* com 5/6, estranharam o fato de que 4/5 é *menor* do que 5/6 – "*não deveria ser o contrário?*". Naquele momento essa pergunta me surpreendeu, pois eu nunca havia pensado sob esse viés. Deixamos essa questão em aberto por alguns instantes, e a resposta só foi desenvolvida quando percebemos que em realidade os termos terça *maior* e *menor* estavam relacionados com a *altura* do som, isto é, a terça maior era mais aguda do que a terça menor, mais grave. Como a altura sonora é inversamente proporcional ao comprimento da corda, ocorre essa inversão nas frações. Tal discussão não havia sido planejada, mas acabou sendo muito proveitosa para a aula, pois serviu como introdução de um dos objetivos didáticos do encontro, que consistia justamente em observar, na prática, a relação inversa entre frequência e comprimento de corda.

Embora tenhamos destacado as importantes contribuições de Zarlino, mostrando, inclusive com o exemplo dos cálculos das médias, como sua obra abordava fortes relações entre a matemática e a música, ponderamos que, do ponto de vista conceitual, conforme a visão de Abdounur (2015), ele não conseguiu romper com o caráter especulativo pitagórico na explicação das consonâncias. Se antes Pitágoras utilizava os números 1, 2, 3, 4 para explicar o Universo e a música, a obra de Zarlino usava os números 1, 2, 3, 4 e 5 no *Senário*, com o mesmo objetivo. Salientamos que nessa época começou a se ter o entendimento de que ainda seria necessária uma visão mais ampla, a fim de compreender a música como um fenômeno físico e natural.

Para contextualizar essa passagem histórica, falamos sobre personagens importantes da época, como Vincenzo Galilei e seu filho, Galileu Galilei, que passaram a estudar o som sob uma perspectiva físico-experimental, inclusive relacionando altura musical com frequência de vibração, conforme já detalhado no item 2.1.2 deste trabalho. Nesse contexto, o comprimento de corda seria apenas um dos parâmetros a se analisar no estudo da vibração de uma corda, que também depende da sua densidade linear e da tensão aplicada a ela, como ficaria evidente nos instrumentos musicais com os quais iríamos trabalhar na sequência. Além disso, outras fontes sonoras que não fossem cordas vibrantes também poderiam ser estudadas a partir de critérios objetivos. Isto é, a partir dessa época houve uma mudança de perspectiva que aos poucos passou a compreender o som como uma onda, que é a visão aceita pela ciência hoje.

Também mencionamos brevemente as contribuições de Mersenne, Kepler, Descartes, D’Alembert. Bernoulli e Fourier, chamando a atenção de que, assim como em outras áreas da ciência, as relações entre matemática, música e física foram construídas paulatinamente, como parte de um processo histórico e coletivo. Essa etapa foi interessante pois abriu toda uma discussão sobre a ciência como construção coletiva, e de como as verdades aceitas em uma determinada época podem ser constantemente revistas pelo método científico. A professora de física contribuiu ativamente nesse debate, e finalizamos dizendo que eles, estudantes, também poderiam ter o seu papel na ciência trazendo contribuições a essa constante evolução.

4.2.2 O olhar da física

Após a introdução histórica, a aula contou com a participação da professora de física da escola, Laura Matte, que nos auxiliou a introduzir noções básicas sobre ondas, abordando suas definições, classificações e seus elementos, com destaque para o comprimento de onda, o período e a frequência de vibração. Essa parte da aula foi contou com uma apresentação em slides, elaborada em conjunto pelos docentes, com base no material didático desenvolvido e utilizado pela professora Laura em suas turmas. Também foram realizados experimentos com cordas, molas (figura 4.9) e animações para tornar a apresentação dos conceitos mais dinâmica.

Figura 4.9 – Apresentação de ondas transversais e longitudinais em uma mola.

(fonte: acervo pessoal do autor)

As explicações teóricas sobre ondas foram adicionadas ao planejamento após conhecermos o perfil da turma, no primeiro encontro. Como havia muitos estudantes que ainda não tinham estudado ondas na escola, avaliamos que seria fundamental abordar tais conceitos, ainda que brevemente, a fim de que todos pudessem acompanhar a sequência das atividades. Nesse contexto, o conceito de frequência de vibração foi trabalhado em maiores detalhes pois seria fundamental durante a atividade prática, quando eles iriam medir, com afinadores dos celulares, as frequências das notas musicais dos instrumentos.

Outra parte importante que foi desenvolvida nessa etapa foi a equação fundamental da ondulatória dada por $v = \lambda \cdot f$, que relaciona velocidade de propagação da onda (v), frequência (f) e comprimento de onda (λ). Essa equação foi deduzida a partir da equação cinemática do MRU, $d = v.t$, considerando tempo como o período de oscilação e a distância percorrida como o comprimento de onda, além da relação entre frequência e período, $f = 1/T$. Chamamos a atenção aqui para a importância desse desenvolvimento, uma vez que ele seria abordado novamente ao final da atividade prática com os instrumentos musicais.

Para finalizar a aula teórica, falamos um pouco especificamente sobre ondas sonoras, as quais, quando propagadas no ar, são compostas por sucessivas rarefações e compressões. Abordamos diversos conceitos por trás dos fenômenos sonoros, como meios de propagação, a velocidade do som no ar, espectro audível, frequência natural, ressonância, harmônicos e ondas estacionárias. Para auxiliar o estudo dessa etapa, trabalhamos com dois diapasões para mostrar o efeito da ressonância, além de tocar alguns instrumentos musicais e conversar sobre todo o percurso do som desde a corda vibrante do violão até o ouvido de quem escuta o som.

Relacionamos, ainda, as propriedades físicas das ondas – frequência, amplitude/intensidade, composição espectral – com a respectiva percepção subjetiva do som – altura, volume e timbre. Chamamos a atenção de que, embora essas propriedades estejam relacionadas, a percepção subjetiva é individual, e é isso que faz com que a música seja uma experiência tão singular. Isto é, existe matemática e física na música, mas também existe arte e subjetividade, de forma que o olhar científico para a música, apesar de contribuir com sua compreensão, não explica integralmente o que sentimos.

Nessa etapa também utilizamos um osciloscópio do *software* educacional *Soundcard Oscilloscope*, de autoria de Christian Zeitnitz, instalado no computador. Com ele, mostramos os formatos de diferentes ondas: desde uma senoide perfeita obtida com o diapasão até uma onda composta de uma nota do violão. Aproveitamos essa demonstração para discutir, ainda que informalmente, um pouco mais sobre harmônicos, timbre e composição espectral.

A parte teórica foi finalizada em torno das 10h, quando optamos por fazer um intervalo de 20 minutos, novamente com um *coffee break*, para que, posteriormente, fosse dado início às atividades práticas com os instrumentos musicais.

4.2.3 Experimentos com instrumentos musicais

No retorno do intervalo cada grupo escolheu um instrumento musical dentre os disponíveis: dois violões, um ukulele e um baixo elétrico, conforme mostrado na figura 4.10.

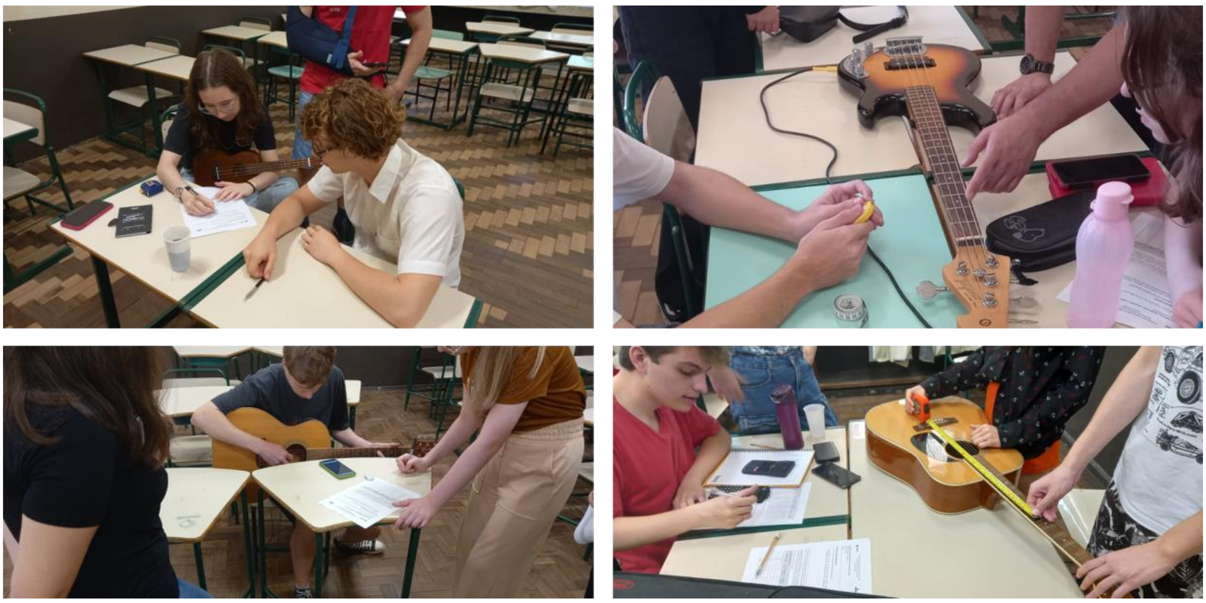
Para que o som de cada instrumento não interferisse nas medições dos demais, cada grupo foi alocado em uma sala diferente durante o desenvolvimento da atividade, cujo roteiro consta como Apêndice. Durante essa etapa, os professores foram se alternando de sala em sala para auxiliar os grupos. A figura 4.11 mostra os quatro grupos trabalhando com os respectivos instrumentos escolhidos. Ao final, todos voltariam para a mesma sala para compartilhar com a turma as suas descobertas.

Figura 4.10 – Instrumentos disponibilizados para a atividade prática.

(fonte: acervo pessoal do autor)

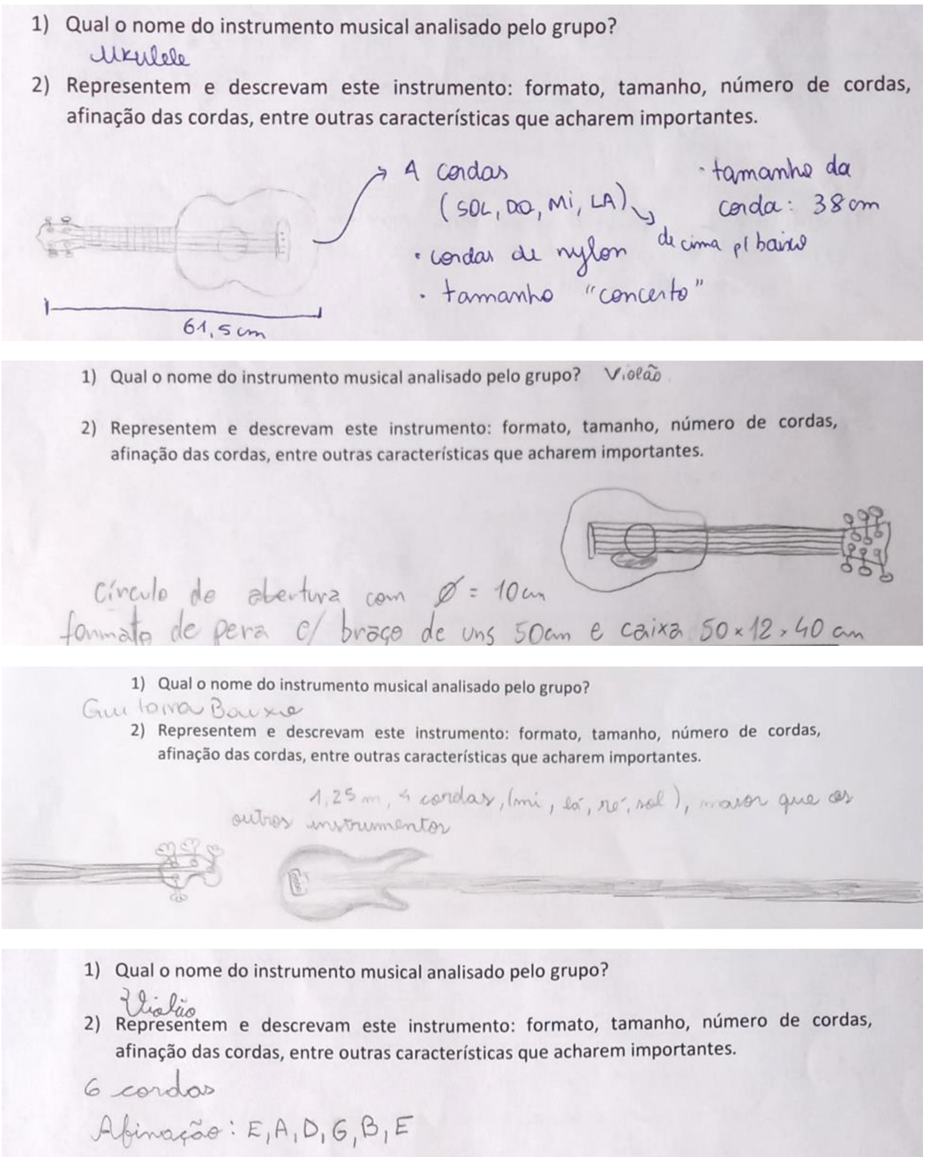
Percebemos que antes de começar a preencher as tabelas das notas, os grupos permaneceram um tempo reconhecendo os instrumentos, o que possivelmente tenha sido estimulado pelas duas primeiras perguntas do roteiro, que pediam para descrever/representar o instrumento escolhido. Nesse contexto, nos chamaram a atenção os desenhos e descrições realizados da Figura 4.12. Cabe destacar a forma que o grupo do baixo elétrico o representou, com o braço atravessando a folha, de forma a destacar seu comprimento muito maior do que os demais. Um dos grupos fez uma descrição mais suscinta, sem desenhos, e optou por iniciar a etapa das frequências.

Figura 4.11 – Grupos trabalhando com os instrumentos.



(fonte: acervo pessoal do autor)

Figura 4.12 – Representações dos instrumentos.



(fonte: produções dos estudantes)

Os quatro grupos se dedicaram bastante nas medições dos comprimentos de corda com trenas, e das frequências com afinadores dos celulares. Escolheram duas cordas de cada instrumento e preencheram todas as linhas e colunas das tabelas solicitadas na atividade, conforme ilustrado nas figuras 4.13 a 4.16.

Cabe destacar que alguns valores ficaram com pequenas imprecisões, seja por erros de medida, aproximações e/ou por pequenas desafinações dos instrumentos. Mas, em geral, os valores obtidos experimentalmente pelos grupos e organizados nas tabelas conseguem cumprir o objetivo didático almejado, isto é, dar condições para que os participantes estudem os padrões e as relações matemáticas entre as grandezas envolvidas.

Figura 4.13 – Tabelas preenchidas pelo grupo do ukulele – cordas 1 e 4.

Número e afinação da corda: 1, SOL					
Casa pressionada	**Nota**	**Comprimento *L*** *Unidade: m*	**Frequência *f*** *Unidade: Hz*	**Produto *f.L***	**Razão *f/L***
Nenhuma (corda solta)	SOL	0,380	391,5	148,77	1030,26
2ª casa	LA	0,340	444,8	151,23	1308,24
4ª casa	Si	0,305	495,8	151,22	1625,57
5ª casa	DO	0,290	528,5	153,27	1822,41
7ª casa	RE	0,255	587,8	149,90	2305,10
9ª casa	Mi	0,230	660,4	151,89	2871,30
11ª casa	FA#	0,205	742,4	152,19	3621,46
12ª casa	SOL	0,195	786,2	153,31	4031,79

Número e afinação da corda: 4, LA					
Casa pressionada	**Nota**	**Comprimento *L*** *Unidade: m*	**Frequência *f*** *Unidade: Hz*	**Produto *f.L***	**Razão *f/L***
Nenhuma (corda solta)	LA	0,380	440,7	167,47	1159,74
2ª casa	Si	0,340	495,9	168,61	1458,53
4ª casa	DO#	0,305	560,3	170,89	1837,05
5ª casa	RE	0,290	591,0	171,39	2037,93
7ª casa	Mi	0,255	666,2	169,88	2612,55
9ª casa	FA#	0,230	749,8	172,45	3260,0
11ª casa	SOL#	0,205	841,0	172,41	4102,44
12ª casa	LA	0,195	891,2	173,78	4570,26

(fonte: produção dos estudantes)

Figura 4.14 – Tabelas preenchidas pelo grupo do primeiro violão – cordas 1 e 4.

Número e afinação da corda: 1					
Casa pressionada	**Nota**	**Comprimento *L*** *Unidade: m*	**Frequência *f*** *Unidade: Hz*	**Produto *f.L***	**Razão *f/L***
Nenhuma (corda solta)	E	0,65	330,8	215,02	508,92
2ª casa	F#	0,577	371,7	214,47	644,19
4ª casa	G#	0,514	417,0	214,34	811,28
5ª casa	A	0,485	442,4	214,56	912,16
7ª casa	B	0,433	495,6	214,59	1144,97
9ª casa	C#	0,386	554,9	214,19	1437,56
11ª casa	D#	0,344	620,8	213,55	1804,65
12ª casa	E	0,324	660,4	213,97	2038,27

Número e afinação da corda: 4					
Casa pressionada	**Nota**	**Comprimento *L*** *Unidade: m*	**Frequência *f*** *Unidade: Hz*	**Produto *f.L***	**Razão *f/L***
Nenhuma (corda solta)	D	0,65	146,5	95,22	225,38
2ª casa	E	0,577	164,8	95,09	285,60
4ª casa	F#	0,514	184,6	94,88	359,14
5ª casa	G	0,485	196,1	95,11	404,33
7ª casa	A	0,433	220,7	95,56	509,70
9ª casa	B	0,386	247,4	95,50	640,93
11ª casa	C#	0,344	276,9	95,25	804,94
12ª casa	D	0,324	293,9	95,22	907,10

(fonte: produção dos estudantes)

Figura 4.15 – Tabelas preenchidas pelo grupo segundo violão – cordas 1 e 6.

	Número e afinação da corda:					
	Casa pressionada	**Nota**	**Comprimento *L*** *Unidade: m*	**Frequência *f*** *Unidade: Hz*	**Produto *f.L***	**Razão *f/L***
1,12	Nenhuma (corda solta)	Mi	0,68m	329,6	214,24	607,08
1,12	2ª casa	Solb	0,58m	370,4	214,83	638,62
1,06	4ª casa	Láb	0,52 m	415,4	216,01	798,85
1,12	5ª casa	Lá	0,49m	440,8	215,99	899,59
1,10	7ª casa	Sí	0,44m	492,3	216,61	1 118,86
	9ª casa	Réb	0,39m	553,6	215,90	1 419,49
1,12	11ª casa	Mib	0,35 m	622,5	217,88	1 778,6
1,06	12ª casa	Mi	0,33	658,2	217,21	1 994,55

Número e afinação da corda:					
Casa pressionada	**Nota**	**Comprimento *L*** *Unidade: m*	**Frequência *f*** *Unidade: Hz*	**Produto *f.L***	**Razão *f/L***
Nenhuma (corda solta)	Mi	0,66m	82,5HZ	54,45	125
2ª casa	Solb	0,62	92,5HZ	57,35	149,19
4ª casa	Láb	0,55m	104,5HZ	57,475	190
5ª casa	Lá	0,52m	110,2HZ	57,30	211,92
7ª casa	Si	0,44m	123HZ	54,12	279,54
9ª casa	Réb	0,39m	139HZ	54,21	356,40
11ª casa	Mib	0,35m	155HZ	54,25	442,86
12ª casa	Mi	0,33m	163,8HZ	54,05	496,36

(fonte: produção dos estudantes)

Figura 4.16 – Tabelas preenchidas pelo grupo do baixo elétrico – cordas 3 e 4.

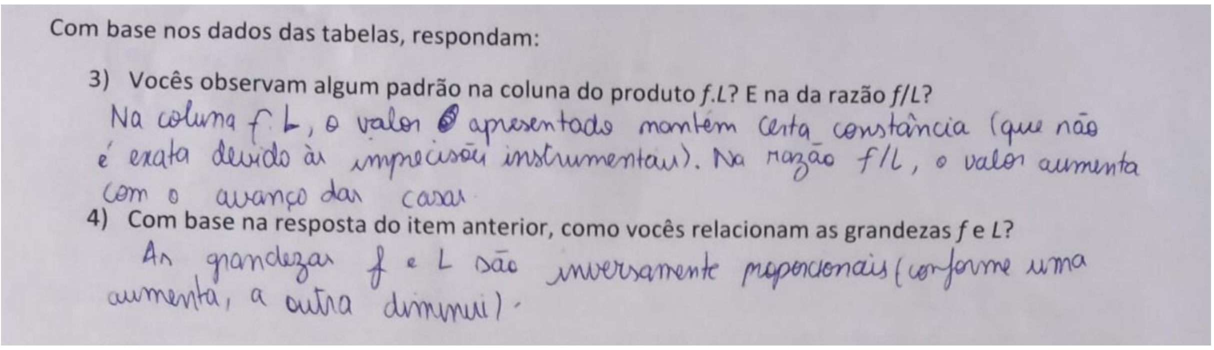
Número e afinação da corda: terceira corda, afinação A					
Casa pressionada	**Nota**	**Comprimento *L*** *Unidade: m*	**Frequência *f*** *Unidade: Hz*	**Produto *f.L***	**Razão *f/L***
Nenhuma (corda solta)	A	0,87	55	47,85	63,22
2ª casa	B	0,78	61	47,58	78,2
4ª casa	C#	0,69	69	47,61	100
5ª casa	D	0,65	73	47,45	112,3
7ª casa	E	0,583	82	47,806	140,6
9ª casa	F#	0,53	92	48,76	173,6
11ª casa	G#	0,465	103	47,9	221,5
12ª casa	A	0,44	110	48,4	250

Número e afinação da corda: Quarta corda, Afinação Mi					
Casa pressionada	**Nota**	**Comprimento *L*** *Unidade: m*	**Frequência *f*** *Unidade: Hz*	**Produto *f.L***	**Razão *f/L***
Nenhuma (corda solta)	E	0,88	41	36,08	46,59
2ª casa	F#	0,79	46	36,34	58,23
4ª casa	G#	0,70	51	35,7	72,86
5ª casa	A	0,66	55	36,3	83,33
7ª casa	B	0,59	61	35,99	103,4
9ª casa	C#	0,53	69	36,57	130,2
11ª casa	D#	0,47	77	36,19	163,83
12ª casa	E	0,44	82	36,08	186,36

(fonte: produção dos estudantes)

No que diz respeito à relação entre as grandezas frequência (f) e comprimento da corda (L), os quatro grupos conseguiram concluir que o produto $f \cdot L$ se mantinha aproximadamente constante nas diferentes linhas de cada tabela, enquanto a razão f/L aumentava cada vez mais. Porém, o caminho para chegar a essas conclusões não foi linear: observamos os integrantes debatendo entre si, por exemplo, sobre as pequenas variações que ocorriam na coluna do produto, inclusive refazendo algumas medições a fim de obter valores mais precisos e buscando padrões nessas pequenas variações. Após algum tempo, verificaram que essas variações eram muito pequenas, oriundas de imprecisões experimentais, e não representavam nenhuma tendência de mudança, ainda mais comparando com as variações das razões, que mostravam outro tipo de comportamento, bem distinto, com os valores aumentando significativamente a cada linha. Também verificaram que o comprimento L diminuía praticamente na mesma proporção que a frequência f aumentava, como observamos, por exemplo, nas flechas ao lado da tabela na figura 4.15, que representam razões. Dessa forma, tendo em vista que o produto $f.L$ permanecia constante, com uma grandeza aumentando quando outra diminui, todos os grupos concluíram que se f e L são grandezas *inversamente proporcionais*. Um dos grupos resumiu bem o processo de construção dessa conclusão, conforme figura 4.17.

Figura 4.17 – Conclusão sobre as grandezas serem inversamente proporcionais.



Com base nos dados das tabelas, respondam:

3) Vocês observam algum padrão na coluna do produto $f.L$? E na da razão f/L?

Na coluna f.L, o valor apresentado mantém certa constância (que não é exata devido às imprecisões instrumentais). Na razão f/L, o valor aumenta com o avanço das casas

4) Com base na resposta do item anterior, como vocês relacionam as grandezas f e L?

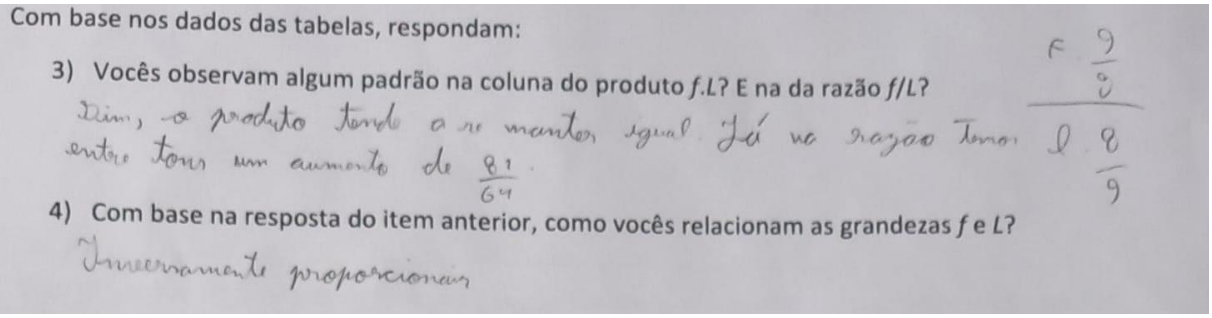
As grandezas f e L são inversamente proporcionais (conforme uma aumenta, a outra diminui).

(fonte: produção dos estudantes)

Cabe destacar os termos que foram usados pelos grupos para caracterizar o produto $f \cdot L$ aproximadamente constante: "*certa constância*", "*mais ou menos constante*" ou "*tende a se manter igual*". Avaliamos como positiva essas pequenas variações ocorridas na coluna do produto $f \cdot L$, pois assim os estudantes compreenderam que os valores teóricos, muitas vezes perfeitos, acabam não alcançando tamanha exatidão em dados experimentais; mas, ainda assim, é possível observar certas regularidades e comportamentos. Nesse sentido, a atividade prática possibilitou uma visão não apenas teórica e matemática sobre a música, mas também físico experimental, indo ao encontro da passagem histórica que mencionamos antes.

Outro grupo utilizou os conhecimentos da aula anterior, sobre a escala pitagórica, para justificar o porquê do produto ser aproximadamente constante e da razão aumentar cada vez mais, conforme figura 4.18. Após debates internos entre os participantes, o grupo percebeu que a frequência aumentava aproximadamente na razão de 9/8 a cada intervalo de tom, isto é, o inverso do que o comprimento de corda diminuía, aproximadamente 8/9. Assim, tomando $f_2 = (9/8).f_1$ e $L_2 = (8/9).L_1$, verificaram que $f_2 \cdot L_2 = f_1 \cdot L_1$ e $f_2/L_2 = (81/64) \cdot f_1/L_1$. Tais conclusões foram observadas nos dados experimentais de forma aproximada, mas não exata, já que o violão não estava afinado na escala pitagórica, e sim na escala de igual temperamento. De todo modo, trata-se de uma boa aproximação. Além disso, avaliamos que o processo de descoberta dessas relações foi interessante para o aprendizado matemático dos participantes, em função das argumentações desenvolvidas. Nesse momento foi possível inclusive observar uma comemoração do grupo, quando verificaram que de fato a razão entre linhas sucessivas de f/L se aproximavam de 81/64, o que em nosso entendimento caracteriza a *alegria da descoberta*, mencionada por Lorenzato (2010).

Figura 4.18 – Desenvolvimento da relação entre f e L por um dos grupos.


Com base nos dados das tabelas, respondam:

3) Vocês observam algum padrão na coluna do produto $f.L$? E na da razão f/L?

Sim, o produto tende a se manter igual. Já na razão temos entre tons um aumento de $\frac{81}{64}$.

F $\frac{9}{8}$

L $\frac{8}{9}$

4) Com base na resposta do item anterior, como vocês relacionam as grandezas f e L?

Inversamente proporcionais

(fonte: produção dos estudantes)

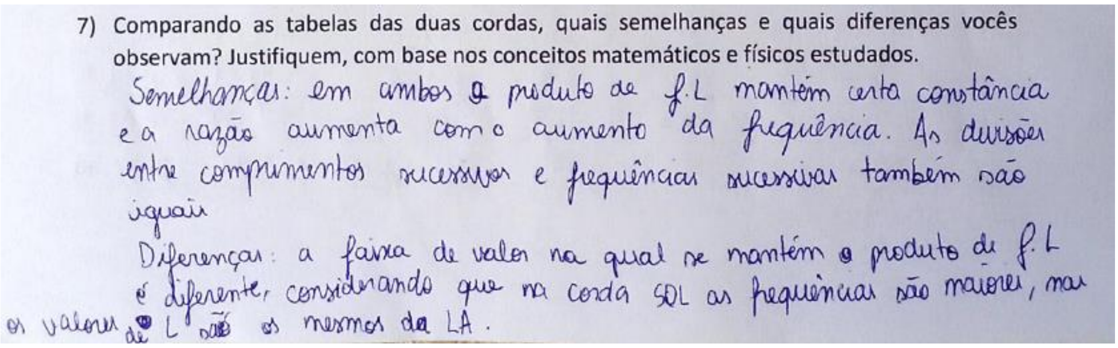
A próxima pergunta da atividade buscava relacionar os dados experimentais com as propriedades físicas do som estudadas no início da aula. O produto $f \cdot L$ estaria relacionado com a velocidade de propagação da onda na corda vibrante, e a razão f/L, a princípio, não teria significado físico. Todos os grupos conseguiram concluir isso: alguns usaram análise dimensional e outros lembraram da equação fundamental da ondulatória estudada em aula. Porém, ainda era necessário um ajuste para se obter a velocidade: em realidade, a velocidade é dada por $f \cdot \lambda$, onde λ é o comprimento de onda. No caso da onda estacionária nos instrumentos estudados, o primeiro harmônico, que é medido pelo afinador, possui $\lambda = 2L$, pois na corda é formada apenas metade do comprimento de onda. Assim, o produto $f \cdot L$ representa a velocidade dividida por 2.

Ao conversar com os grupos durante a atividade, verificamos que, apesar de terem visualizado uma relação do produto com a velocidade, nenhum deles tinha percebido a necessidade desse ajuste. Assim, mediamos tal processo, dando dicas de como relacionar o comprimento de onda com o comprimento de corda. Porém, mesmo com as dicas, as conclusões sobre como obter a velocidade de propagação na corda ficaram um pouco confusas e/ou incompletas, provavelmente em função do pouco tempo que tiveram para desenvolver essa questão. Em futuras atividades, recomendamos que seja adicionada uma questão específica sobre a relação entre λ e L, para que os estudantes possam descobri-la de forma mais independente, além de reservar um tempo maior para essa parte de interpretação das grandezas físicas.

Sobre os intervalos de tom e semitom, diferentes respostas surgiram, até porque os dados experimentais não eram exatos. Assim, obtiveram que para o intervalo de tom a razão frequências era de 9/8, ou 1,119, ou 1,12 ou 1,1; e para o intervalo de semitom era de 1,05, 1,06, 1,057 ou 1,067. Todas as respostas estavam muito próximas aos valores teóricos da escala de igual temperamento, iguais a $\sqrt[12]{2^2} \cong 1{,}122$ e $\sqrt[12]{2} \cong 1{,}059$, respectivamente, sendo que as variações experimentais são naturais em função de imprecisões de medição ou da própria afinação dos instrumentos. Avaliamos que essa questão foi importante para eles verem na prática os valores aproximados das razões dos intervalos, que seriam revistos com um olhar mais teórico ao final da aula, quando apresentaríamos a escala de igual temperamento.

Sobre a última questão, de semelhanças e diferenças entre as duas cordas observadas, os grupos conseguiram visualizar que as razões entre frequências sucessivas nas duas cordas eram iguais, mas que os valores dessas frequências variavam. Um dos grupos concluiu que, ao mudar a corda, a frequência e a velocidade de propagação da onda na corda se alteravam. Outro grupo explicou que “uma corda aguda vibra mais”, sendo uma forma simplificada de dizer que o número de vibrações em um dado intervalo de tempo na corda mais aguda é maior do que na corda mais grave, isto é, a sua frequência de vibração é maior. Esse mesmo grupo justificou que na corda mais aguda a frequência é maior porque o seu comprimento é menor, mas em realidade isso ocorre porque sua espessura é menor, já que os comprimentos das cordas soltas são praticamente iguais. O grupo que estudou as duas cordas da nota Mi justificou que a proporcionalidade semelhante se dava em função das cordas estarem afinadas no mesmo tom, mais agudo e mais grave, porém, em realidade as mesmas proporções ocorrem entre outras notas também: se tivessem escolhido cordas com outras afinações teriam percebido isso. Por fim, o grupo do ukulele escreveu uma resposta bastante completa, elencando semelhanças e diferenças, conforme figura 4.19, e verificando que o produto $f \cdot L$, apesar de constante na mesma corda, variava ao mudar a corda – o que ocorre em função da alteração da velocidade de propagação da onda na corda, que é uma característica do meio. Porém, o grupo se equivocou ao escrever que as frequências da corda Sol eram maiores, provavelmente por desatenção, já que a nota Sol possui frequências menores por ser mais grave do que Lá, conforme eles já tinham observado nas tabelas da figura 4.13. De uma forma geral, essa questão foi interessante pois fez os grupos pensarem e sintetizarem vários conceitos estudados. Contudo, novamente ficou a impressão de que seria necessário mais tempo para desenvolverem algumas conclusões com maior clareza. De todo modo, foi uma etapa importante como preparação para o momento da aula de conversa coletiva sobre as descobertas, que ocorreria na sequência.

Figura 4.19 – Diferenças e semelhanças observadas nas duas cordas por um dos grupos.



7) Comparando as tabelas das duas cordas, quais semelhanças e quais diferenças vocês observam? Justifiquem, com base nos conceitos matemáticos e físicos estudados.

Semelhanças: em ambos o produto de f.L mantém certa constância e a razão aumenta com o aumento da frequência. As divisões entre comprimentos sucessivos e frequências sucessivas também são iguais

Diferenças: a faixa de valor na qual se mantém o produto de f.L é diferente, considerando que na corda SOL as frequências são maiores, mas os valores de L são os mesmos da LA.

(fonte: produção dos estudantes)

Ao finalizar as atividades com os instrumentos, todos os grupos voltaram para a mesma sala do início da aula para um momento de conversa coletiva e finalização do encontro.

4.2.4 Síntese coletiva e finalização

Após o retorno para a sala inicial, quando questionados sobre as frequências medidas em cada corda, ficou clara a diferença entre os instrumentos. O baixo elétrico gerava frequências muito inferiores às do ukulele, por exemplo. Já o violão apresentava frequências intermediárias. Com todos os instrumentos na mesma sala, ficou visível que isso acontecia em função dos tamanhos dos braços de cada um. O baixo possui um braço comprido, muito maior do que os demais instrumentos (conforme o grupo já havia relatado na figura 4.12), e por isso conseguia gerar frequências menores. Por outro lado, o ukulele tem um braço pequeno, possibilitando frequências maiores. Assim, nesse momento foi incentivado que todos os grupos observassem os instrumentos e verificassem que a proporção inversa entre f e L, que eles já haviam descoberto na atividade, era um dos princípios usados na construção dos instrumentos musicais. Um estudante fez a observação de que, além do braço maior, o baixo também possui cordas muito mais espessas, o que permite frequências mais baixas – o que é verdade, pois a espessura influencia a velocidade de propagação da onda na corda, que por sua vez interfere na frequência, já que $f = v/\lambda$. Nesse momento passamos o baixo e o ukulele por toda a turma para que todos pudessem observar isso.

Sobre os intervalos de tom e semitom, houve uma comparação dos valores encontrados, e o grupo que havia escrito o valor de 9/8 na atividade ponderou que essa era uma aproximação baseada na escala pitagórica, mas que esse valor não era exato no violão. De fato, 9/8 = 1,125, e o intervalo de tom parecia estar mais próximo de 1,12 pelos resultados experimentais. Essa conversa abriu margem para falar sobre as mudanças nas escalas ao longo do tempo.

Apresentamos, então, um material final com as escalas estudadas até aqui – pitagórica e escala justa – mas agora trazendo tabelas com razões entre frequências também, e não apenas comprimentos de corda (ver item 2.1.4 deste trabalho), utilizando a relação inversa entre L e f. Nesse momento ouvimos alguns comentários positivos de alguns estudantes, dizendo que estavam compreendendo as relações dos intervalos entre frequências e conseguiam relacioná-los com a atividade prática. Porém, com as tabelas apresentadas, chamamos a atenção de que em ambas as escalas apresentadas dois intervalos de semitom não resultavam em um tom; e que na escala justa os próprios intervalos de tom variavam entre si. Nesse contexto, deixamos como desafio qual deveria ser o intervalo de semitom para que os intervalos fossem *igualmente espaçados*, isto é, os intervalos de tom fossem constantes e dois intervalos de semitom resultassem em um intervalo de tom. Para auxiliar a resolução do desafio, deixamos a figura 4.20 projetada no quadro.

Figura 4.20 – Desafio proposto para a turma projetado no quadro.

Nota	**Dó**	**Ré**	**Mi**	**Fá**	**Sol**	**Lá**	**Si**	**Dó**
Símbolo	**C_3**	**D_3**	**E_3**	**F_3**	**G_3**	**A_3**	**B_3**	**C_4**
Comprimento de corda	L							$\frac{1}{2} \cdot L$
Frequência	f_0							$2 \cdot f_0$

$\times\ r^2$ $\times\ r^2$ $\times\ r$ $\times\ r^2$ $\times\ r^2$ $\times\ r^2$ $\times\ r$

Desafio! Qual deve ser a razão r?

(fonte: elaborado pelo autor)

Rapidamente alguns estudantes começaram a equacionar a questão, e chegaram na resposta de que r tem que ser igual à “raiz duodécima de 2”. Ao questionarmos como chegaram nessa equação, um estudante explicou que com base no problema apresentado, escreveu a equação $r^{12} = 2$. Logo, chega-se em $r = \sqrt[12]{2}$. Debatemos com o restante da turma para ver se todos entenderam a resolução, chamando a atenção de r representava o intervalo de semitom, e r^2 o intervalo de tom. Logo, nessa construção de igual temperamento modelamos juntos as equações (4.3) a (4.5), uma vez que para retornar a mesma nota mais aguda (com frequência $2 \cdot f$), temos que subir, em uma escala maior, intervalos sucessivos de tom-tom-semitom-tom-tom-tom-semitom, conforme já estudado nas aulas.

$$f \cdot r^2 \cdot r^2 \cdot r \cdot r^2 \cdot r^2 \cdot r^2 \cdot r = f \cdot 2 \tag{4.3}$$

$$f \cdot r^{12} = f \cdot 2 \tag{4.4}$$

$$r^{12} = 2 \tag{4.5}$$

Após, mostramos que dessa forma obtemos os intervalos de semitom e tom, respectivamente, iguais a $\sqrt[12]{2} \cong 1{,}06$ e $\sqrt[12]{2^2} \cong 1{,}12$. A turma mostrou um contentamento ao observar que esses valores se aproximavam dos valores experimentais obtidos, e avaliamos que essa etapa foi importante por desenvolver argumentos matemáticos e relacioná-los com as descobertas da atividade prática. A colocação da determinação da razão como um desafio foi importante por incentivar a construção do conhecimento no lugar da simples informação. Caso houvesse mais tempo, entendemos que seria interessante inserir essa parte no roteiro da atividade em grupos.

Mostramos, então, tabelas completas de frequências, partindo da padronização do Lá A_4 com a frequência de 440 Hz, e obtendo-se as frequências das outras notas a partir dos intervalos da escala de igual temperamento (ver item 4.1.4 deste trabalho). Essa etapa teve caráter informativo, mas avaliamos como importante por mostrar um quadro geral das padronizações atuais das frequências das notas musicais, ponderando a construção histórica por trás disso.

Trouxemos, ainda, uma breve explicação das consonâncias a partir de conceitos físicos, baseada nos harmônicos e suas frequências. Mostramos o som de cada harmônico de uma frequência fundamental com a utilização do recurso computacional "*Fourier: Construindo Ondas*"[12], do programa PhET da Universidade de Colorado, e desenvolvemos os raciocínios dos itens 2.1.2 e 2.1.3 deste trabalho, trazendo uma outra explicação para a razão de certas notas soarem agradavelmente em conjunto, isto é, para o problema clássico das consonâncias, para além das justificativas aritméticas pitagóricas envolvendo razões entre pequenos números inteiros. Em função do tempo reduzido, acabamos não conseguindo explorar muito o recurso, mas disponibilizamos o link aos estudantes, a fim de que eles pudessem, posteriormente, interagir com a superposição de ondas e geração dos harmônicos. Entendemos que essa atividade, ainda que breve, foi importante para completar o ciclo teórico e histórico dos dois encontros, consumando a passagem de uma abordagem aritmética para uma abordagem físico experimental, inclusive nas justificativas para o problema das consonâncias.

Como finalização, os grupos foram convidados a apresentar a música que escolheram para o restante da turma, conforme já haviam sido orientados ao final do encontro anterior. As músicas[13] escolhidas são listadas abaixo:

- Grupo 1: Queen – Killer Queen;
- Grupo 2: Brooklyn Duo feat. Dover Quartet – Bohemian Rhapsody;
- Grupo 3: Hozier – Shrike;
- Grupo 4: Laufey and the Iceland Symphony Orchestra – Let You Break my Heart Again.

Essa etapa foi muito bonita, pois caracterizou um momento de apreciação musical, ao mesmo tempo que permitiu aos estudantes compartilhar o seu gosto musical com o restante da turma, criando significados e identidades. Em função do tempo, acabou não sendo possível concretizar a ideia inicial, de trabalhar um pouco em cima da harmonia e melodia das músicas escolhidas,

[12] Simulação por PhET Simulações Interactivas, Universidade do Colorado Boulder, licenciada sob CC-BY-4.0. Disponível em: https://phet.colorado.edu. Acesso em: 02/12/2023.
[13] Músicas escolhidas pelos grupos:
- Queen – Killer Queen. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=2ZBtPf7FOoM.
- Brooklyn Duo feat. Dover Quartet – Bohemian Rhapsody. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=i1nGx4DX83U.
- Hozier – Shrike. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=07iEOPoS2Hw.
- Laufey and the Iceland Symphony Orchestra – Let you break my heart again. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=PK02xDT_RWA.

Acesso em: 02/12/2023.

tendo por base o que foi trabalhado nos encontros, ficando essa atividade com sugestão para futuros trabalhos.

Durante essa etapa final, também apresentamos a música El Invento, de José González[14], que foi uma escolha do professor em função do seu gosto musical, mas, principalmente, por toda a atmosfera do vídeo, que foi gravado em meio à natureza, combinando com a bonita melodia da música e com a sua letra, que propõe inúmeras reflexões. Sendo assim, avaliamos que essa música também contribuiu para esse momento de apreciação e reflexão, inclusive em conversas que se sucederam sobre a letra da canção.

Após a escuta das músicas, nos despedimos e o curso foi finalizado. Alguns estudantes disseram que gostariam de participar de mais cursos assim, e deram sugestões para uma eventual sequência, como, por exemplo, o trabalho com instrumentos de sopro. Pensando em registrar essas manifestações, propus um questionário final via formulário virtual, a ser preenchido posteriormente, onde eles poderiam escrever sobre suas percepções do curso com calma.

A seguir mostramos as perguntas do questionário e algumas das respostas recebidas.

1. As atividades do curso te ajudaram a compreender melhor algum conceito matemático, físico ou musical? Qual(is)?

    - *Sim. Teoria musical e ondas;*

    - *Sim! Eu não fazia ideia de metade dos conteúdos porque ainda estou no primeiro ano, porém, entendi melhor a teoria musical que aprendi anteriormente beeeem melhor, tudo fez mais sentido. Como a relação do tamanho e espessura da corda em instrumentos como o violão;*

    - *Sim, as relações entre as notas musicais, as escalas diferentes utilizadas pela história da música e a relação entre a matemática e música que nunca haviam me mostrado;*

    - *Sim, frequências e relações entre as notas de uma escala;*

[14] José González – El Invento. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=iKMukv0vqTM. Acesso em: 02/12/2023.

- *Sim, as atividades práticas principalmente, tanto a das razões no monocórdio como a da frequência nos instrumentos;*

- *Sim. As relações entre as notas musicais, a escala e suas frações, como uma escala é construída, e alguns conceitos físicos de onda (significado de período, comprimento de onda, amplitude e suas consequências no que é ouvido);*

- *Me ajudaram a compreender o conceito de Pitágoras e o funcionamento de ondas.*

2. As atividades do curso te ajudaram a visualizar relações entre matemática e música? Caso positivo, cite uma ou mais relações que te chamaram a atenção.

- *Sim, não entendia as aulas de teoria musical porque nunca me ensinaram o passado e os aprimoramentos que sofreram;*

- *Sim, me chamou atenção a relação entre as frequências das notas e os cálculos necessários para se chegar em uma nota específica a partir de outra;*

- *Sim, como citei anteriormente as escalas das notas com comprimento de onda e frequência, e a taxa de aumento que pode ser feita de diferentes maneiras a medida do conhecimento visto na história;*

- *Sim, a história entrelaçada da matemática e música e o modelo atual da relação entre as notas próximas, por exemplo semitom x 1,06 e tom x 1,12;*

- *Com certeza; no segundo dia, quando tivemos que fazer relações entre o comprimento da corda e a frequência da nota emitida, onde percebíamos que o produto destes era uma constante, por exemplo;*

- *Sim. A relação das distâncias matemáticas (entre notas musicais - tom e semitom) e o fato do comprimento de uma corda sem inversamente proporcional à frequência (se diminuímos o comprimento pela metade, a frequência passa a ser o dobro);*

- *Sim. As relações entre as notas musicais e a maneira de se calcular cada uma usando as escalas.*

3. Em sua opinião, o estudo integrado de matemática e música pode ajudar a fornecer novos significados para conceitos matemáticos? Justifique.

   - *Sim. Música é bom pra entendimento e memória;*
   - *Acredito que faria uma grande diferença em como a matemática se aplica em diferentes áreas, como um exemplo;*
   - *Eu acredito que sim, porque matemática e música estão muito ligados, então acredito que novas descobertas no ramo musical podem acarretar em novas descobertas matemáticas;*
   - *Com certeza, a música muitas vezes é vista como uma ciência puramente humana, mas existe muita exatidão, números e matemática também na criação das notas que possibilitam a música ser agradável;*
   - *Sim, com certeza, além de tornar mais participativo e interessante para ambas as áreas;*
   - *Claro! Misturar Campos da matemática/física geralmente resulta em algo muito maior e mais entendível do que eles individualmente, tal qual Geometria Analítica, que fundiu Álgebra e Geometria. Creio que pode ser um grande potencial juntar estas duas áreas do conhecimento;*
   - *Sim, pois podemos ver ela sendo aplicada em outras áreas;*
   - *Sim. A música é uma das aplicações da matemática. Quando a matemática é aplicada, as chances de serem observadas possíveis irregularidades é maior - neste caso, poderíamos escutar as irregularidades. Isso pode incentivar os estudos na área para que sejam estabelecidos novos significados para conceitos matemáticos já existentes;*
   - *Sim, já que ao unir esses dois conceitos há um significado por trás do estudo matemático que faz com que pessoas com menos familiaridade com a matemática se interessem em aprender esses conceitos apesar disso*[15].

[15] Resposta da única participante que, no questionário inicial, havia respondido que não gostava de matemática.

4. Você gostou de estudar áreas do conhecimento aparentemente distintas sob uma perspectiva interdisciplinar? Gostaria de estudar outros tópicos dessa forma?

    - *Acredito que a junção dos conteúdos pode ser positiva já que você consegue juntar diversas informações em um único "bolinho";*
    - *Gostei bastante! Ia ser muito interessante estudar outras áreas dessa forma;*
    - *Foi uma ótima experiência e adoraria estudar mais;*
    - *Muito; adoraria, gosto muito quando alguns livros/canais de matemática vem com aproximações assim, interdisciplinares, para conteúdos mais complexos;*
    - *Sim, gostei. Gostaria muito de estudar outros tópicos dessa forma, pois ajudam a clarificar conceitos teóricos.*

5. Você gostou de participar do curso? Se sim, cite as atividades ou momentos que mais gostou.

    - *Sim, a atividade dos instrumentos;*
    - *Sim! Preferi a atividade do segundo dia, já que foi possível experimentar com os instrumentos;*
    - *Gostei bastante do curso, principalmente as partes práticas e como elas se relacionavam com a teoria;*
    - *Sim, entre meus favoritos estão achar as notas no monocórdio, demonstrar o que são ondas e a atividade de estudo das cordas nos instrumentos;*
    - *Sim, as atividades experimentais com os instrumentos;*
    - *Sim; além das partes práticas, o conteúdo teórico era muito completo e detalhado, passando desde o início do estudo da música até a concepção mais moderna de som, condensando alguns conteúdos que já vimos durante o ano em física e acrescentando informações novas, criando um resultado final muito show de bola;*
    - *Sim, a parte que mais me chamou a atenção foi a introdução histórica;*

- *Sim. Gostei muito da construção da escala pitagórica, as atividades com os instrumentos (para encontrar relações entre frequência, comprimento da corda, etc.) e também o momento de compartilhar músicas do nosso gosto;*

- *Gostei bastante, em especial a parte das atividades no segundo encontro onde cada grupo se responsabilizava por um instrumento.*

6. Espaço livre para críticas/sugestões!

- *Acho que seria interessante fazer a mesma relação de matemática e música com outros tipos de instrumentos, por exemplo os de sopro;*

- *Parabéns Matheus, adorei o curso!*

- *Amei o curso! Sou meio suspeito para falar pois gosto muito das duas áreas kkkkkkkkk mas realmente foi muito bacana;*

- *Acho que isso é um pouco que falta em professores hoje em dia, ter consciência de que a matemática não é algo da sala de aula, mas sim do mundo, que o conhecimento não teve início DENTRO dos locais de estudo, mas FORA destes. Se tivesse mais professores como vocês, creio que o ensino seria melhor <3 não tem como fazer alguém se apaixonar por algo se não mostramos a beleza do que ensinamos;*

- *Enfim, parabéns e boa sorte com a Licenciatura!*

- *Excelente!*

- *Gostei muito de participar do curso. Acho que seria muito interessante estender esse tipo de estudo para outros tópicos também! :)*

Ficamos muito felizes e satisfeitos com as percepções dos estudantes. Em particular, é interessante observar que mesmo a participante que havia mencionado que que não gostava de matemática no questionário inicial acabou respondendo que gostou do curso, e que os significados por trás dos conceitos matemáticos podem aumentar o seu interesse pela disciplina.

Sobre um dos comentários, acerca dos “professores de hoje em dia”, ponderamos que essa é a visão pessoal de um aluno, que deve ser considerada e respeitada. Contudo, em nosso entendimento, uma transformação na educação não perpassa apenas por iniciativas individuais, mas sim por mudanças no sistema educacional e nos documentos norteadores do currículo escolar. Defendemos que é necessário um caminho conjunto e coletivo para que os professores se sintam mais confortáveis em propor atividades inovadoras e interdisciplinares, e esse caminho perpassa, necessariamente, por uma política pública efetiva que valorize os estudantes e os profissionais da educação.

Como resposta à pergunta de pesquisa, tendo como base na participação e nas produções dos estudantes ao longo das múltiplas atividades, entendemos que a prática interdisciplinar entre matemática e música proposta, com enfoque na construção de consonâncias, pode sim contribuir para a compreensão e significação de conceitos matemáticos a alunos do ensino médio. Essa resposta ficou evidenciada pelas múltiplas construções e argumentações matemáticas ao longo das atividades, bem como nos momentos de reflexão e conversas coletivas, que mostraram todo o potencial de significação e a importância que a música pode desempenhar em suas vidas e em sala de aula.

Evidentemente, é necessário ponderar que os participantes do curso compunham um perfil diferenciado, se comparado com turmas regulares, uma vez que todos possuíam um interesse genuíno no tema e optaram por participar das atividades por escolha própria. Deste modo, os resultados devem ser analisados com cautela, ainda que, ao nosso ver, tenham sido bastante positivos. Nesse contexto, sugerimos que novas experiências didáticas sejam aplicadas em turmas regulares, a fim de que seja possível tecer conclusões mais amplas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma prática interdisciplinar envolvendo relações entre matemática e música foi planejada e aplicada na Escola Liberato Salzano, em Novo Hamburgo, em dois encontros presenciais ocorridos no final do ano de 2023, na modalidade de um Curso de Extensão, direcionado a estudantes do ensino médio de diferentes seriações.

As práticas propostas tiveram por base uma revisão bibliográfica acerca das relações históricas entre essas áreas, e os dois encontros foram contextualizados em períodos históricos distintos, a saber, a Antiguidade Clássica grega (séc. VI a.C.), com as interpretações da escola pitagórica e o experimento do monocórdio; e a mudança de perspectiva da concepção do som como fenômeno físico, que se iniciou durante o período Renascentista (a partir do séc. XVI d.C.). Contudo, ambos os encontros tiveram o mesmo pano de fundo: a construção e a interpretação dos intervalos consonantes, que nortearam o desenvolvimento das relações entre matemática e música ao longo da história.

As atividades dos dois encontros se alternaram entre apresentações teóricas; atividades práticas com o monocórdio (que foi construído especificamente para essa prática) e outros instrumentos musicais; e momentos de conversas coletivas, apreciação musical e/ou reflexão. Foi possível trabalhar com diferentes conteúdos matemáticos, desde operações com frações, passando por médias harmônicas e aritméticas, equações, sequências, relações inversamente proporcionais, entre outros tópicos que surgiram durante o avanço dos trabalhos. Os estudantes conseguiram desenvolver construções e argumentações matemáticas com base nas atividades propostas, e puderam gerar significados aos conceitos matemáticos abordados.

Em diversos momentos das atividades ficou evidente a importância da música na vida dos estudantes, desde os relatos iniciais do primeiro encontro, passando pelo envolvimento efetivo nas atividades práticas com os instrumentos musicais e finalizando com a etapa de apreciação das músicas escolhidas por eles.

Com base na participação dos estudantes, nas produções em sala de aula e nos momentos de conversa coletiva, concluímos que a prática proposta pode contribuir de forma efetiva na compreensão e na significação de conceitos matemáticos. Porém, novas experiências didáticas podem e devem ser realizadas, inclusive em turmas regulares, com diferentes perfis de estudantes, a fim de que seja possível tecer conclusões mais abrangentes.

Em especial, entendemos que uma visão histórica das relações entre essas áreas é fundamental no que tange à necessidade de explorar a ciência como uma construção humana e coletiva, que passou por diferentes interpretações ao longo da história. Nesse sentido, a prática interdisciplinar proposta abre margem para abordar não apenas conteúdos da matemática e da música, mas também da física, história, filosofia, psicologia, entre outras diferentes áreas do conhecimento.

Após a pesquisa bibliográfica, e com o desenvolvimento das práticas e reflexões sobre as atividades realizadas, concluímos que se por um lado a visão moderna do som como fenômeno físico-experimental foi essencial para uma compreensão mais completa de sua natureza, por outro o caráter mais universal e naturalmente interdisciplinar que o estudo da música possuía desde a antiguidade, inclusive com sentidos simbólicos e figurados das razões pitagóricas, acabou se perdendo no tempo e na hiperespecialização dos saberes, de forma que hoje a música só entra na escola – quando entra – em atividades de artes ou de física, mas muito raramente em aulas de matemática. Esse fato nos desperta a atenção para a necessidade de destacar a multiplicidade de interpretações e construções históricas das relações entre matemática e música, sem negar a visão científica atual dos fenômenos sonoros, mas transcendendo os significados dos intervalos consonantes para uma esfera ainda mais ampla e que leve em conta toda a complexidade de pensamento da história humana. Nesse sentido, entendemos que ainda é possível ir muito além dos tópicos abordados neste trabalho, que representam apenas uma pequena visão de todo o rico desenvolvimento histórico, matemático e musical em diferentes contextos históricos e sociais.

Como sugestão de futuras pesquisas, salientamos a importância de tentar desenvolver as atividades com mais tempo, a fim de que seja possível incluir a música em mais dimensões, aliando o estudo da harmonia e da melodia – e das consonâncias – com o estudo do ritmo, em práticas integradas que permitam, também, a criação e a produção musical, contemplando assim, juntamente com práticas de percepção e reflexão, as principais diretrizes trazidas pelos PCN no ensino de música, conforme elencado por Granja (2005). Em função das limitações de tempo do pesquisador e do calendário atípico do semestre letivo de 2023/2 da UFRGS, acabamos limitando a prática a dois encontros, em duas manhãs, o que hoje avaliamos como pouco tempo para que fosse possível aprofundar todos os temas que foram abordados. Em especial, a atividade final, que buscava relacionar as músicas que os grupos escolheram com os conteúdos estudados, acabou ficando restrita à dimensão de apreciação, que ainda assim avaliamos como muito relevante, mas que poderia ter sido ainda mais, caso houvesse tempo para desenvolver relações com a matemática e com as consonâncias previamente construídas.

Estudos com outros instrumentos e fontes sonoras, como, por exemplo, instrumentos de sopro, também podem diversificar e ampliar as possibilidades de trabalho em sala de aula, conforme sugerido por um dos participantes dessa pesquisa.

Outra sugestão diz respeito a trabalhar com escalas e intervalos consonantes construídos em diferentes contextos socioculturais, a fim de ampliar a visão da música – e de suas relações com a matemática – como uma construção humana e social, enfatizando ainda mais a sua diversidade e multiplicidade de interpretações.

Por fim, saliento que a concretização deste trabalho – que também representa o fechamento de um ciclo na Licenciatura em Matemática – me traz uma grande alegria e esperança por tempos vindouros, agora com algumas certezas mais consolidadas em um caminho que, inevitavelmente, continuará com as suas não-linearidades intrínsecas. Mas, seja como for, tenho a convicção de que a matemática e a música continuarão sempre presentes nessa trajetória, que não termina aqui, e continuará sendo constantemente (re)construída na prática docente, rumo a uma educação verdadeiramente transformadora.

Figura 5.1 – Foto da turma ao final do segundo encontro.

(fonte: acervo pessoal do autor)

REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, O. J. **Matemática e música**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

ABDOUNUR, O. J., PEREIRA, R. A. A física da música no ensino médio: uma abordagem histórico-epistemológica. **Brazilian Journal of Development**, Curitiba, v.8, n.1, pp. 7601-7618, 2022.

AIDAR, L. História da Música. Toda Matéria, [s.d.]. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/historia-da-musica/. Acesso em: 15 jan. 2024.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília, 2000.

CABRAL, R. B. **Música e Matemática**: uma proposta de aprendizagem. 2015. 65 f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Goiás, Jataí, 2015.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação**: reflexões sobre educação e matemática. Campinas: Editora Universidade Estadual de Campinas, 1986.

DEL COMUNE, Agnes. **Arquitetura + Música**: Pitágoras e a harmonia. WordPress, 2014. Disponível em: https://arquiteturaemusica.wordpress.com/2014/01/01/pitagoras-e-a-harmonia/. Acesso em: 14 jan. 2024.

DONALD no País da Matemágica. Direção de Hamilton Luske, Les Clark, Joshua Meador, Wolfgang Reitherman. Produção de Walt Disney. Roteiro: Milt Banta, Bill Berg, Heinz Haber. 1959. Son., color.

DUARTE, C. L.; GONÇALVES, H. H.; NÓBREGA, N. P. Tudo é número: uma análise conceitual da ideia de número em Pitágoras. **Revista Principia**, n. 33, pp. 99-107, 2017.

FALLAS, L. A. La Analogia Pitagorica: estudio interpretativo del pensamiento de Arquitas de Tarento. **Revista de Filosofía de la Universidad de Costa Rica**, v. 30, n. 73, pp. 241-336, 1992.

FERNANDES, R. S. **Música e matemática:** explorando relações entre ritmos musicais e frações. Trabalho de Conclusão de Curso. Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2014.

GARCIA, J. A Interdisciplinaridade segundo os PCNs. **Revista de Educação Pública**, v. 17, n. 35, p. 363–378, 2012.

GARDNER, H. **Inteligências múltiplas**: a teoria na prática. Porto Alegre: Artmed, 1995.

GRANJA, C. **Música, conhecimento e educação**: harmonizando os saberes na escola. Dissertação de mestrado. Faculdade de Educação, USP, São Paulo, 2005.

HAAG, C. **Ainda assim o som se move.** Pesquisa FAPESP. Edição 197, 2012. Disponível em: https://revistapesquisa.fapesp.br/ainda-assim-o-som-se-move/. Acesso em: 06 jan. 2024.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física**: gravitação, ondas e termodinâmica. v. 2, 8ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

HEMENWAY, P. **Divine Proportion**: Phi in Art, Nature, and Science. New York: Sterling Publishing, 2005.

HEWITT, P. G. **Física Conceitual**. 12ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2015.

IAZZETTA, F. **Tabela de frequências, períodos e comprimentos de onda**. Disponível em: <https://iazzetta.eca.usp.br/tutor/acustica/introducao/tabela1.html>. Acesso em: 18 jan 2024.

ISO 16:1975. **Acoustics**: Standard tuning frequency (Standard musical pitch). International Organization for Standardization, 1975.

LANGE, C. H. **Música e Matemática**: possibilidades no ensino médio. 2019. 162 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.

LI, H. L.; CHAKRABORTY, K.; KANEMITSU, S. Music as Mathematics of Senses. **Advances in Pure Mathematics**, v. 8, n. 12, pp. 845-862, 2018.

LINCK, F. G. **Música e Matemática**: experiências didáticas em dois diferentes contextos. Monografia (Especialização) – Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 3ª ed. Campinas: Autores Associados, 2010.

MENDES, I. A. História para o ensino da matemática: uma reinvenção didática para a sala de aula. **Revista COCAR**, Belém, Ed. Especial n.3, pp. 145-166, 2017.

MERIZIO, A. D. **Guia didático para o ensino de ondas sonoras**: ensino por investigação e uso das tecnologias móveis. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2018.

MIRITZ, J. C. D. M. **Música e matemática.** Dissertação (Mestrado Profissional). Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Matemática, Estatística e Física, FURG, Rio Grande, 2015.

MITTITIER, J., G.; LOURENÇON, B., N. Interdisciplinaridade na BNCC: Quais Perspectivas? In: VI SEMATED – Semana da Matemática e Educação - Tendências em Educação Matemática. **Anais**... Araraquara, 2017.

PIZZI, M.; SILVA, M. C.; SASAKI, D. O ritmo dos conjuntos: uma experiência interdisciplinar entre música e matemática. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 15, n. 2, p. 1-21, 10 dez. 2020.

ROGER Waters: **Us + Them**. Direção de Roger Waters, Sean Evans. Intérpretes: Holly Laessig, Jess Wolfe. Roteiro: Roger Waters. Música: The Great Gig in The Sky. 2019. DVD, son., color.

SANTOS, E. F.; GONÇALVES, H. J. L. A Interface entre Arte e Matemática: em busca de perspectivas curriculares críticas e criativas. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, v. 34, n. 68, p. 1144-1173, dez. 2020.

SILVA, G. M. **Matemática e música**: a bateria na construção de um ambiente de aprendizagem no estudo de frações. Trabalho de Conclusão de Curso. Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2015.

SILVA; A. S.; CASTRO, E. S.; RAMOS, L. C. Música e ritmo no contexto de uma matemática inclusiva. In: I SEMINÁRIO INTERNACIONAL E INCLUSÃO ESCOLAR: PRÁTICAS EM DIÁLOGO. **Anais…**. Rio de Janeiro: UERJ, 2014.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema**, n. 14 pp.66-91, 2000.

STRANGER Things: **Max's Song** (Full Scene). Direção de Shawn Levy. Roteiro: Matt Duffer, Ross Duffer, Paul Dichter. Música: Running Up That Hill. 2022. Son., color. Legendado. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=bV0RAcuG2Ao. Acesso em: 22 dez. 2022.

THIESEN, J. S. A interdisciplinaridade como um movimento articulador no processo ensino-aprendizagem. **Revista Brasileira de Educação**, v. 13, n. 39, pp. 545–554, 2008.

TRESSINO, C. I. F.; MALAQUIAS, A. M. Música e matemática no ensino de frações. **Cadernos PDE**, Secretaria de Educação do Paraná, v. 1, 2014.

WRIGHT, D. **Mathematics and Music.** Providence: American Mathematical Society, 2009.

GLOSSÁRIO

Atendendo à sugestão dos membros da banca examinadora, inserimos o presente glossário para facilitar a compreensão de termos musicais utilizados ao longo do trabalho. Todas as definições foram obtidas ou adaptadas do glossário de termos musicais disponível no site da orquestra sinfônica brasileira[16] – ao leitor interessado, recomendamos sua consulta na íntegra.

Acorde: emissão simultânea de três ou mais notas musicais, com base nas leis da consonância e da dissonância que regem os mecanismos da Harmonia;

Bemol: alteração que baixa em um semitom a nota em frente da qual se encontre;

Consonância: combinação de duas ou mais notas musicais emitidas simultaneamente, produzindo uma sensação de equilíbrio ou repouso;

Diapasão: aparelho que se utiliza para afinar os instrumentos e a entoação da voz. Atualmente, considerando o padrão aceito internacionalmente, emite um som cuja frequência é 440 Hz;

Dissonância: combinação de notas musicais simultâneas não consonantes, ou seja, cujo efeito provoca uma sensação de choque e instabilidade, que reclama resolução para um intervalo ou acorde de repouso;

Escala: sucessão de notas musicais segundo um determinado modelo de construção;

Escala diatônica: escala composta por sete notas (considera-se que a oitava é a mesma nota que a primeira, porém mais aguda);

Escala maior: modelo dado pela sucessão das notas dó, ré, mi, fá, sol, la, si, dó (estas notas coincidem com as teclas brancas do piano). A partir deste modelo, conservando a mesma ordem de intervalos que caracterizam o modo maior (tom, tom, semitom, tom, tom, tom, semitom), pode reproduzir-se – com as consequentes alterações – a partir de qualquer nota;

Harmonia: ciência da formação e encadeamento dos acordes que obedecem às leis da tonalidade. Têm nela papel fundamental o sentido da consonância (acordes perfeitos) e o da dissonância (acordes que exigem uma resolução e criam um dinamismo);

[16] Orquestra sinfônica brasileira. Glossário. Disponível em: https://www.osb.com.br/glossario. Acesso em: 24 de fevereiro de 2024.

Intervalo: distância entre duas notas musicais em função da sua altura. Neste trabalho, um intervalo pode ser expresso (I) como a razão entre as frequências das notas musicais ou (II) como a razão entre os seus comprimentos de corda associados. Deve-se observar que as razões obtidas com (I) ou (II) são inversas entre si;

Intervalo de meio-tom: é igual à metade de um tom diatônico ou à duodécima parte da oitava;

Intervalo de semitom: na escala de igual temperamento, é igual ao intervalo de meio-tom. Em outras escalas, como na pitagórica ou de justa afinação, representa um intervalo menor do que um intervalo de tom, porém não exatamente igual à sua metade;

Intervalo de tom: representa a unidade de divisão da escala diatônica. Equivale ao intervalo de uma segunda maior. Exemplo: dó - ré;

Melodia: Emissão de notas sucessivas e de altura diferentes que, mediante a articulação do ritmo, criam motivos, frases e períodos com sentido;

Modulação: Mudança de tom ao longo de um trecho musical;

Nota musical: figura representativa da altura do som;

Oitava: intervalo existente entre duas notas do mesmo nome, a uma distância igual ao dobro ou a metade da frequência da que for tomada por referência (mais aguda ou mais grave);

Polifonia: pluralidade de vozes. Nome que se dá à música contrapontística em geral, na qual se sobrepõem ao mesmo tempo várias melodias;

Quinta: intervalo entre as notas extremas de um grupo de cinco consecutivas. Exemplo: dó - sol (dó, ré, mi, fá, sol);

Ritmo: princípio de ordem e simetria em que se apresenta a sucessão de sons fortes e fracos ao longo do tempo. É a resultante, no tempo, da divisão de um todo em várias partes;

Sustenido: alteração que eleva em um semitom a nota em frente da qual se encontre;

Tônica: A nota mais importante de uma tonalidade e que atua como eterno ponto de referência dentro dela. A primeira nota da escala, que dá o nome à tonalidade.

APÊNDICES

Plano de aula: primeiro encontro

Título:
Explorando o monocórdio na construção de consonâncias musicais.

Responsável pelo plano de aula:
Matheus Erpen Benincá.

Dados da escola:
Nome: Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha;
Endereço: R. Inconfidentes, 395 - Primavera, Novo Hamburgo – RS.

Dados da aula:
Data: 18/11/2023;
Turno: matutino;
Horário: das 08:40 às 12:30;
Sala: 239;
Número de alunos: 20 (vinte).

Recursos a serem utilizados:
Audiovisual;
Quadro;
Monocórdio e fita métrica;
Questionários e roteiros das atividades impressos.

Objetivos:
Evidenciar algumas das relações entre matemática e música ao longo da história e criar significados na prática de ensino proposta. Trabalhar com o monocórdio. Estabelecer relações entre comprimentos de corda e notas musicais. Trabalhar com operações com frações na construção de consonâncias e da escala pitagórica.

Descrição detalhada das atividades:
Primeiramente será entregue um questionário individual para que os participantes respondam sobre sua relação com a matemática, com a música e o que sabem sobre as conexões entre essas duas disciplinas. Esse questionário tem por objetivo conhecer um pouco mais sobre o perfil dos participantes antes da aplicação da prática e auxiliará a posterior análise das produções.

Logo após será aberto um espaço inicial de conversa com a turma, para cada um se apresente e fale um pouco sobre sua relação com a matemática e com a música. Durante a conversa, serão apresentados vídeos de músicas e trechos de vídeos sobre matemática e música, como, por exemplo, os listados a seguir. O objetivo dessa parte inicial conhecer a turma e ao mesmo tempo que criar um ambiente descontraído, mas com significados. Aos poucos, são introduzidos os conteúdos que serão abordados na prática.

Stranger Things – S04E04 - Cena da Max - Running Up That Hill
https://www.youtube.com/watch?v=bV0RAcuG2Ao

O vídeo do episódio 04 da 4ª temporada de *Stranger Things* será usado para mostrar um exemplo simbólico da importância e dos significados que a música pode ter. No vídeo, o monstro *Vecna* toma conta da personagem Max, que só consegue se libertar após escutar a música *Running up That Hill* de Kate Bush. Apesar de ser uma história de ficção, é possível tecer uma analogia da importância da música na nossa rotina diária, para superar adversidades reais que a vida proporciona. Nesse momento, o professor pode fazer um relato da importância da música em sua vida e convidar os estudantes a fazerem o mesmo. Convém ressaltar que o seriado *Stranger Things* é atual e bastante conhecido entre adolescentes, de forma que possivelmente ajudará na construção de significados.

Donald no país da matemágica:
https://www.youtube.com/watch?v=66l6MBQgcRg

O vídeo Donald no país da matemágica introduz de forma lúdica o assunto que será tratado, incluindo a escola pitagórica, comprimentos de corda, intervalos musicais, entre outros. No link acima, o vídeo já está recortado na parte de maior interesse. Também pode auxiliar na construção de significados e, ao mesmo tempo, já traz alguns conteúdos que serão trabalhados em maior detalhe na prática.

Noções sobre teoria musical, incluindo notas musicais e notação simplificada, devem ser apresentadas. Recomenda-se o uso de um piano virtual (há muitos disponíveis na internet). As sete notas Dó-Ré-Mi-Fá-Sol-La-Si podem ser representadas por C-D-E-F-G-A-B. Ideias como intervalo de oitava e intervalo de quinta podem ser apresentadas (e escutadas) com o uso do monocórdio. Deve-se mostrar que após um intervalo de oitava retorna-se à mesma nota: no monocórdio, esse intervalo é dado pela divisão da corda em duas partes iguais. Os alunos devem ser convidados a escutar esse intervalo e de fato escutar que são a mesma nota, mas uma mais aguda do que outra. O intervalo de quinta (2/3) também pode ser apresentado, mostrando que é de fato uma consonância: a primeira e a quinta soam muito agradavelmente em conjunto. Nesse momento também cabe introduzir o problema milenar da consonância e citar a explicação pitagórica para ele, baseada em razões entre números inteiros 1, 2, 3 e 4, os quais, segundo Pitágoras, explicariam todo o Universo.

Na sequência, será feita uma dinâmica com o uso do monocórdio. A turma será dividida em 4 grupos e cada grupo será responsável por construir 2 notas musicais da escala Pitagórica de Dó Maior no monocórdio. Enquanto cada grupo constrói suas notas, os outros também estarão observando a construção e poderão fazer intervenções, a fim de garantir um caráter de continuidade. Ao final, terão sido construídas as notas listadas abaixo, em uma fita colada no monocórdio.

C (1); D (8/9); E (64/81); F (3/4); G (4/5); A (16/27); B (128/243); C (1/2);

O padrão de construção envolve o ciclo das quintas e é descrito em detalhes no capítulo 2.

A construção será orientada pelo professor, mas a ideia é estimular que os estudantes consigam construir as notas de forma independente, e principalmente, escutar as consonâncias durante a construção de cada nota, relacionando o som com o comprimento de corda. Após a construção coletiva, será feito um intervalo de 20 minutos.

No retorno do intervalo, os grupos deverão preencher perguntas do roteiro de atividade com base na construção anterior. Para tanto, o monocórdio permanecerá à disposição de toda turma para consultas que sejam necessárias.

A atividade trará perguntas sobre o processo de construção, além de perguntas adicionais, como por exemplo o intervalo de tom pitagórico (8/9) e semitom pitagórico (243/256). Assim, será possível trabalhar mais de forma mais aprofundada com a escala maior, com a sequência de intervalos tom-tom-semitom-tom-tom-tom-semitom, o que justifica, por exemplo, as doze notas musicais (incluindo acidentes) e as teclas brancas e pretas de um piano. O roteiro da atividade deve ser impresso em folhas que serão entregues aos grupos.

Após o preenchimento da atividade, o professor fará um resumo do que foi visto no encontro e contextualizará historicamente as mudanças de percepções que foram ocorrendo ao longo da história, mostrando que outras escalas, distintas da pitagórica, foram sendo construídas. Nessa parte não será dado grande aprofundamento teórico, até pelo limite de tempo, porém é importante chamar atenção que outras construções existem e inclusive falar um pouco sobre a relação entre multiplicidade de escalas e variáveis socioculturais de cada civilização. Durante a fala cabe citar um pouco das limitações da abordagem pitagórica, introduzindo um pouco do que será visto no próximo encontro, como a impossibilidade de fechar um ciclo de oitavas com um ciclo de quintas perfeitas (citando a “coma pitagórica”) e a pequena diferença existente entre dois intervalos de semitom pitagórico e um intervalo de um tom. Para essa etapa, será montada uma pequena apresentação de slides.

Os grupos ainda serão convidados a escolher uma música para apresentarem ao final do segundo encontro. A música poderá ser apresentada por vídeo ou até mesmo por uma apresentação ao vivo, caso haja integrantes que toquem algum instrumento. A ideia é finalizar o segundo encontro com um momento de apreciação musical e tentando estabelecer conexões com o que foi estudado nos dois encontros.

Cronograma previsto:

Previsão horária	Tipo	Resumo da Atividade
08:40 – 09:00	Individual	Preenchimento de questionário inicial.
09:00 – 09:40	Coletiva	Apresentação, conversa inicial, apreciação de vídeos e músicas.
09:40 – 10:20	Coletiva	Introdução ao monocórdio. Noções de teoria musical. Construção coletiva de consonâncias.
10:20 – 10:40	-	Intervalo.
10:40 – 11:30	Grupos	Desenvolvimento da atividade: produção escrita sobre construção de consonâncias, ciclo de quintas, escala pitagórica, intervalos.
11:30 – 12:00	Coletiva	Entrega das produções, resumo, discussão sobre outras escalas, limitações da abordagem, introdução ao próximo encontro.
12:00 – 12:30	Grupos	Escolha de músicas para apresentar no próximo encontro.

Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Curso de extensão

Construindo consonâncias: relações entre matemática e música
Professor: Matheus Erpen Benincá
Data: 18/11/2023

Questionário inicial

Por favor responda às questões abaixo para que possamos conhecer o perfil da turma. Obrigado!

Nome:

Idade:

Escola:

Curso:

Série:

1) **Você gosta de escutar música?**
   ( ) Gosto muito. Escuto quase todos os dias, por iniciativa própria.
   ( ) Gosto. Escuto de vez em quando, às vezes por iniciativa própria.
   ( ) Gosto, mas escuto apenas o que já está tocando, não por iniciativa própria.
   ( ) Indiferente, não escuto por iniciativa própria e não presto muita atenção quando toca.
   ( ) Não gosto de escutar música.

2) **Caso tenha respondido que gosta de escutar música na questão anterior:**
   a. Qual(is) gênero(s) musical(is) você mais gosta de escutar?

   b. Cite artistas, compositores(as) e/ou bandas que você goste.

3) **Você canta ou toca algum instrumento musical? Qual(is)? Há quanto tempo?**

4) **Você gosta de matemática?**
   ( ) Gosto muito. Estudo os conteúdos da escola e outros, por iniciativa própria.
   ( ) Gosto, mas estudo apenas os conteúdos da escola.
   ( ) Gosto de alguns conteúdos, mas outros não.
   ( ) Indiferente, estudo apenas o necessário para ser aprovado(a).
   ( ) Não gosto de matemática.

5) Caso tenha respondido que gosta de matemática, cite o(s) seu(s) conteúdo(s) favorito(s).

6) Você avalia que tem facilidade/dificuldade no aprendizado de matemática?

( ) Tenho facilidade, aprendo todos os conteúdos sem dificuldades.
( ) Tenho facilidade em alguns conteúdos, mas dificuldade em outros.
( ) Indiferente, não tenho facilidade nem dificuldade.
( ) Em geral, tenho dificuldades em aprender matemática.

7) Antes de iniciar o curso, você já sabia que existiam relações entre matemática e música?

( ) Não.
( ) Sim. Quais? Explique.

8) Comente brevemente sobre a importância da música em sua vida.

9) Comente brevemente sobre a importância da matemática em sua vida.

Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Curso de extensão

Construindo consonâncias: relações entre matemática e música
Professor: Matheus Erpen Benincá
Data: 18/11/2023

Nomes: ____

<u>Roteiro da Atividade: primeiro encontro</u>

1) No monocórdio, escute as notas musicais emitidas:
    a. Pela corda solta, com o comprimento total;
    b. Pela corda com o seu comprimento dividido por 2.

    Qual a sua percepção sobre essas duas notas? Elas soam de forma agradável em conjunto?

    Qual é o nome dado ao intervalo entre essas duas notas?

---

2) Escute as notas musicais emitidas:
    a. Pela corda solta, com o comprimento total;
    b. Pela corda com o seu comprimento reduzido a 2/3 do comprimento total.

    Qual a sua percepção sobre essas duas notas? Elas soam de forma agradável em conjunto?

    Qual é o nome dado ao intervalo entre essas duas notas?

Com o auxílio do monocórdio, escutamos e construímos a escala pitagórica a partir de sucessivos intervalos de quinta. Em alguns casos, também foi necessário descer uma oitava, pois o cavalete móvel só pode ser posicionado na primeira metade do instrumento.

Considerando que a nota emitida pela **corda solta** do monocórdio é a **nota Dó**, e que o comprimento total da corda solta é de 63 cm, respondam:

3) Como determinar a posição do cavalete móvel para obter a nota Sol, que é a quinta de Dó?

4) Como determinar a posição do cavalete móvel para obter a nota Ré, que é a quinta de Sol?

5) Como determinar a posição do cavalete móvel para obter a nota La, que é a quinta de Ré?

6) Como determinar a posição do cavalete móvel para obter a nota Mi, que é a quinta de La?

7) Como determinar a posição do cavalete móvel para obter a nota Si, que é a quinta de Mi?

8) Como determinar a posição do cavalete móvel para obter a nota Fá, cuja quinta é Dó?

Considerando a construção descrita acima, completem a tabela abaixo:

Nota	**Dó**	**Ré**	**Mi**	**Fá**	**Sol**	**La**	**Si**	**Dó**
Símbolo	C_3	D_3	E_3	F_3	G_3	A_3	B_3	C_4
Fração	1							1/2
Comprimento de corda [cm]	63							

x x x x x x x

Abaixo da tabela, junto às setas indicadas, completem as razões entre comprimentos de notas sucessivas. Essas razões representam o intervalo entre duas notas consecutivas na escala pitagórica. Note que essa razão é a mesma entre algumas notas, mas diferente em duas delas.

9) Em quais notas a razão difere das demais?

Da teoria musical, sabemos que a escala maior é formada por intervalos sucessivos de tom-tom-semitom-tom-tom-tom-semitom. Nesse contexto, responda:

10) Qual é a razão que representa o intervalo de **tom** pitagórico?
Expresse o valor em formato de fração e em expansão decimal.

11) Qual é a razão que representa o intervalo de **semitom** pitagórico?
Expresse o valor em formato de fração e em expansão decimal.

12) Dois intervalos de semitom pitagórico resultam em um intervalo de tom pitagórico?

13) Represente graficamente as notas do monocórdio e seus comprimentos de corda.

Dó	C_3	
Ré	D_3	
Mi	E_3	
Fá	F_3	
Sol	G_3	
Lá	A_3	
Si	B_3	
Dó	C_4	

Plano de aula: segundo encontro

Título:
Um novo olhar: o som como fenômeno físico.

Responsável pelo plano de aula:
Matheus Erpen Benincá.

Dados da escola:
Nome: Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha;
Endereço: R. Inconfidentes, 395 - Primavera, Novo Hamburgo – RS.

Dados da aula:
Data: 02/12/2023;
Turno: matutino;
Horário: das 08:30 às 12:30;
Sala: 239;
Número de alunos: 20 (vinte).

Recursos a serem utilizados:
Audiovisual;
Quadro;
Computador com Osciloscópio;
4 trenas e/ou fitas métricas;
Diapasões;
Mola para mostrar diferença entre onda transversal e longitudinal;
Aplicativo no celular para medir frequências (GuitarTuna ou outro);
Instrumentos musicais (violão, baixo, ukulele, e/ou outros disponíveis);
Roteiros das atividades impressos.

Objetivos:
Perceber a música como um fenômeno físico, com a introdução do conceito de onda propagando-se em um meio e dos conceitos de comprimento de onda, frequência, amplitude, intensidade e timbre. Contextualizar a mudança de perspectiva ocorrida após o Renascimento (cerca de dois milênios após Pitágoras), desde as limitações apontadas por estudiosos da época na abordagem puramente aritmética da música até a aceitação pela comunidade musical da escala de igual temperamento. Trabalhar matematicamente com a relação inversamente proporcional entre frequência e comprimento de onda. Comentar sobre os harmônicos e a explicação física para o problema da consonância.

Descrição detalhada das atividades:

Momento inicial de escuta musical: Hijos Del Sol, de Hermanos Gutierrez
https://www.youtube.com/watch?v=8VtsFK3anpg

Inicialmente será feita uma breve revisão no quadro do que fora visto no encontro anterior, lembrando da construção da escala pitagórica com o monocórdio. Com o violão, mostrar que a espessura das cordas e a tensão aplicada também determina a altura do som, o que indica que o comprimento de corda, sozinho, pode não ser suficiente para explicar a complexidade do som.

Após, será dado início a uma pequena aula expositiva mesclada com experimentos. Na primeira parte será tratado o contexto histórico do Renascimento, iniciando com algumas contribuições de Zarlino e exploração no quadro de relações matemáticas do *Senário*, passando para a visão crítica da abordagem aritmética pitagórica apontada por Vincenzo Galilei e seu filho, Galileu Galilei, e finalizando com a amostra de inúmeros matemáticos e físicos que trabalharam na concepção do som como onda, chamando a atenção para a ciência como construção humana. Na segunda parte será trabalhado o conceito de onda sob a perspectiva física, em uma experiência de docência compartilhada com os professores de física da escola, que se disponibilizaram a participar, mesclando explicações e experimentos simples. Aos poucos, será dada maior importância ao conceito de frequência, que será alvo de um trabalho mais aprofundado na próxima etapa da aula.

Após essa introdução teórica, a turma será convidada a uma prática com os instrumentos musicais disponíveis. Cada grupo ficará com um instrumento, e deverá medir frequências das notas (pelo aplicativo) em comparação com o comprimento de corda L (com fita métrica). Os dados coletados deverão ser organizados, na ideia de tentar descobrir a relação inversamente proporcional entre as grandezas. Com a atividade também será possível relacionar o produto entre L e f com a velocidade de propagação da onda na corda, ainda que seja necessário um ajuste considerando a relação entre L e λ, conforme abordado no capítulo 2. A velocidade, por sua vez, depende da espessura da corda e a força de tração na corda. As grandezas poderão não apenas ser medidas/calculadas, mas também percebidas sensorialmente. Para essa etapa, será impresso um roteiro que será entregue aos grupos.

Após a entrega da atividade será feita uma roda de conversa entre toda a turma para compartilhar as descobertas de cada grupo com cada instrumento. Serão incentivadas as comparações do tipo: o baixo tem um braço mais longo e cordas mais espessas, para possibilitar a emissão de notas mais graves. Já o ukulele tem cordas finas e braço curto, para possibilitar a emissão de notas agudas. Discussões sobre outros assuntos e relações com a matemática poderão ser estabelecidas. Por fim cabe dar ênfase à influência dos harmônicos no som de cada instrumento, alterando o timbre da nota, e trazendo uma resposta da física ao problema da consonância.

Uma terceira etapa da aula será dedicada aos grupos apresentarem as músicas escolhidas na aula anterior, com abertura para comentários buscando relações com o que foi estudado nas aulas. Todos serão convidados a participar no sentido de discutirem o que aprenderam nos dois encontros.

Ao final será apresentado o vídeo da música El Invento de Jose González, abrindo um debate sobre a letra e reflexões sobre a beleza da música, da ciência e da natureza.

José González – El invento
https://www.youtube.com/watch?v=iKMukv0vqTM

Também será enviado um questionário (formulário online), por e-mail, para que os estudantes preencham suas impressões/aprendizados e sugestões após os dois encontros.

Cronograma previsto:

Previsão horária	Tipo	Resumo da Atividade
08:30 – 08:45	Coletiva	Apresentação e escuta musical
08:45 – 09:00	Coletiva	Breve revisão do encontro passado (no quadro e monocórdio).
09:00 – 09:50	Coletiva	Aula sobre ondas com a participação de professores de física da escola.
09:50 – 10:00	Coletiva	Enunciado da atividade e divisão da turma em grupos.
10:00 – 10:20	Grupos	Intervalo
10:20 – 11:20	Grupos	Atividade prática: medida de frequências com instrumentos musicais.
11:20 – 11:40	Coletiva	Roda de conversa sobre o que foi descoberto por cada grupo.
11:40 – 12:30	Coletiva	Apresentação das músicas e finalização.

Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Curso de extensão

Construindo consonâncias: relações entre matemática e música
Professor: Matheus Erpen Benincá
Data: 02/12/2023

Nomes: ____

<u>**Roteiro da Atividade: segundo encontro**</u>

1) Qual o nome do instrumento musical analisado pelo grupo?

2) Representem e descrevam este instrumento: formato, tamanho, número de cordas, afinação das cordas, entre outras características que acharem importantes.

Na aula de hoje estudamos algumas propriedades físicas do som, entre elas a frequência sonora. Agora iremos escutar as notas musicais geradas por cordas vibrantes e medir as suas frequências.

Escolham <u>duas cordas</u> do instrumento recebido. Em cada corda escolhida, meçam o comprimento de vibração para cada casa pressionada (do traste até a extremidade fixa) com trena ou fita métrica e verifiquem as frequências das notas geradas com o aplicativo. Completem as tabelas.

Obs.: As cordas são numeradas de baixo para cima.

Número e afinação da corda:					
Casa pressionada	**Nota**	**Comprimento *L*** *Unidade: m*	**Frequência *f*** *Unidade: Hz*	**Produto *f.L***	**Razão *f/L***
Nenhuma (corda solta)					
2ª casa					
4ª casa					
5ª casa					
7ª casa					
9ª casa					
11ª casa					
12ª casa					

Número e afinação da corda:					
Casa pressionada	**Nota**	**Comprimento *L*** *Unidade: m*	**Frequência *f*** *Unidade: Hz*	**Produto *f.L***	**Razão *f/L***
Nenhuma (corda solta)					
2ª casa					
4ª casa					
5ª casa					
7ª casa					
9ª casa					
11ª casa					
12ª casa					

Com base nos dados das tabelas, respondam:

3) Vocês observam algum padrão na coluna do produto $f.L$? E na da razão f/L?

4) Com base na resposta do item anterior, como vocês relacionam as grandezas f e L?

5) Expliquem a resposta dos itens anteriores com base nos conceitos físicos estudados na aula. O produto $f.L$ e/ou a razão f/L representam alguma grandeza física estudada? Qual(is)?

6) A sequência de casas pressionadas, indicadas na tabela, gera uma escala maior. Efetuem a divisão entre frequências sucessivas e entre comprimentos sucessivos para encontrar os intervalos de tom e de semitom usados na construção do instrumento.
Obs.: Lembrando que a escala maior é composta por intervalos de tom-tom-semitom-tom-tom-tom-semitom.

7) Comparando as tabelas das duas cordas, quais semelhanças e quais diferenças vocês observam? Justifiquem, com base nos conceitos matemáticos e físicos estudados.

CARTA DE ANUÊNCIA DA ESCOLA

O Diretor da Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha, localizada na cidade de Novo Hamburgo, declara estar ciente e de acordo com a participação dos estudantes e professores desta escola nos termos propostos no trabalho de conclusão de curso intitulado "CONSTRUINDO CONSONÂNCIAS: RELAÇÕES ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA", que tem como objetivos planejar, aplicar e avaliar uma prática de ensino e aprendizagem interdisciplinar, no contexto do ensino médio, envolvendo matemática e música. Esta pesquisa encontra-se sob responsabilidade do professor orientador Alexandre Tavares Baraviera, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, e será desenvolvida pelo acadêmico e pesquisador Matheus Erpen Benincá, vinculado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

A presente autorização está condicionada ao cumprimento dos requisitos das resoluções 466/2012 e 510/2016 do Conselho Nacional da Saúde, Ministério da saúde, comprometendo-se os pesquisadores a usar os dados pessoais dos sujeitos da pesquisa exclusivamente para fins científicos, mantendo o sigilo e garantindo a não utilização das informações em prejuízo dos sujeitos.

Novo Hamburgo, _____ de ________________ de _______.

Nome do(a) Diretor:

Assinatura____

Professor responsável (UFRGS): Alexandre Tavares Baraviera

Assinatura ____

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TALE

Você está sendo convidado(a) a participar como voluntário da pesquisa “CONSTRUINDO CONSONÂNCIAS: UMA PRÁTICA INTERDISCIPLINAR ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA NO ENSINO MÉDIO” sob responsabilidade do professor orientador Alexandre Tavares Baraviera e do acadêmico e pesquisador Matheus Erpen Benincá, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). O estudo será realizado com base na participação dos estudantes em dois encontros voluntários, aos sábados, fora do horário de aula, nos quais serão utilizados instrumentos musicais, vídeos, áudios e materiais para registro das atividades, dinâmicas e produções. As produções dos estudantes, descrições e fotografias das dinâmicas de sala de aula poderão ser utilizadas em trabalhos de conclusão de curso e em artigos/congressos, exclusivamente para fins científicos de divulgação da pesquisa, nos quais os nomes dos estudantes serão mantidos em sigilo. Os objetivos principais da pesquisa são planejar, aplicar e avaliar uma prática de ensino e aprendizagem interdisciplinar, no contexto do ensino médio, envolvendo matemática e música. Mais especificamente, a prática abordará a construção de consonâncias musicais, através da percepção musical e da determinação de relações matemáticas entre notas musicais. A metodologia de pesquisa empregada tem caráter qualitativo, isto é, os dados recolhidos são ricos em pormenores, descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, buscando apreender as perspectivas dos participantes acerca da prática educativa proposta em toda sua complexidade. Poderá haver um risco de você se sentir cansado(a) ou desconfortável durante o desenvolvimento da prática com instrumentos musicais, vídeos, áudios ou durante o registro de atividades. Os seus pais (ou responsáveis) autorizaram você a participar desta pesquisa, caso você deseje. Você não precisa se identificar e está livre para participar ou não. Caso inicialmente você deseje participar, posteriormente você também está livre para, a qualquer momento, deixar de participar da pesquisa. O responsável por você também poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. Você poderá consultar o pesquisador responsável sempre que quiser, por e-mail ou pelo telefone da instituição, para esclarecimento de qualquer dúvida. Todas as informações por você fornecidas e os resultados obtidos serão mantidos em sigilo, e estes últimos só serão utilizados para divulgação em trabalhos de conclusão de curso, reuniões e revistas científicas. Você será informado de todos os resultados obtidos, independentemente do fato de estes poderem mudar seu consentimento em participar da pesquisa. Você não terá quaisquer benefícios ou direitos financeiros sobre os eventuais resultados decorrentes da pesquisa. Este estudo é importante porque seus resultados fornecerão informações para o desenvolvimento e aprimoramento de práticas de ensino e aprendizagem interdisciplinares, no contexto do ensino médio, envolvendo matemática e música, contribuindo, assim, para a educação básica. Diante das explicações, se você concorda em participar deste projeto de pesquisa, forneça o seu nome e coloque sua assinatura a seguir.

Nome:____

Local e Data: Novo Hamburgo, 18 de novembro de 2023

____ ____

Participante Pesquisador(a) responsável

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) ______________________________________, da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada CONSTRUINDO CONSONÂNCIAS: UMA PRÁTICA INTERDISCIPLINAR ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA NO ENSINO MÉDIO, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) Matheus Erpen Benincá. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é orientada por Alexandre Tavares Baraviera, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone __________ ou e-mail

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são: planejar, aplicar e avaliar uma prática de ensino e aprendizagem interdisciplinar, no contexto do ensino médio, envolvendo matemática e música.

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários, trabalhos de conclusão de curso etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de produções escritas, bem como da participação em dinâmicas em sala de aula, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários, trabalhos de conclusão de curso etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos participantes ao precisarem responder a algumas perguntas sobre o desenvolvimento de seus trabalhos na escola. A fim de amenizar este desconforto será mantido o anonimato de todas as respostas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação.

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre práticas interdisciplinares entre matemática e música, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável pelo telefone _______________ ou e-mail _______________.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Novo Hamburgo, 18 de novembro de 2023.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa: