

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LUIZA SCHWAMBACH

DESENVOLVIMENTO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS BIDIMENSIONAIS E
TRIDIMENSIONAIS NO 7º ANO: UMA ABORDAGEM À LUZ DA TEORIA
PIAGETIANA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Porto Alegre

2024

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Desenvolvimento de Conceitos Geométricos Bidimensionais e Tridimensionais no 7º Ano:
Uma Abordagem à Luz da Teoria Piagetiana
Luiza Schwambach

Banca examinadora:

Prof.º Dr.º Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

Prof.ª Dr.ª Maria Cecilia Bueno Fischer
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

Prof.º Msc Marcelo Antonio dos Santos
Colégio de Aplicação - UFRGS

AGRADECIMENTOS

É com imensa gratidão e emoção que dedico este espaço aos agradecimentos, expressando meu reconhecimento sincero a todos que desempenharam papéis fundamentais ao longo da minha jornada acadêmica e na concretização deste trabalho. Neste percurso tive a honra de contar com o apoio de pessoas que, de diversas maneiras, contribuíram para meu crescimento pessoal e profissional.

Aos meus pais por seu constante apoio e incentivo no meu percurso acadêmico, mesmo diante dos desafios de estudar em uma cidade distante de casa. Sua dedicação foi fundamental para minha jornada.

À minha irmã, expresso minha gratidão pelas conversas e compreensões compartilhadas nos momentos bons e ruins. Além disso, agradeço por ser minha "cobaia" durante as formulações das atividades de sala de aula, demonstrando paciência e colaboração.

Ao meu companheiro Rodrigo, pelas conversas, pela parceria, e pela leitura atenta deste trabalho antes mesmo de ser finalizado. Estendo meu agradecimento à sua família por me receber como filha, proporcionando um ambiente acolhedor e familiar.

Ao prof.º Dr.º Marcus Vinicius de Azevedo Basso, expresso minha profunda gratidão por sua orientação na pesquisa. e desde cedo ter reconhecido o potencial da proposta. Obrigada pela sabedoria, compreensão, paciência e pelas importantes contribuições para meu crescimento pessoal e principalmente como pesquisadora e professora.

A todos os professores que participaram da minha formação, pelos inúmeros aprendizados e saberes que contribuíram para meu desenvolvimento profissional.

Aos amigos e amigas que estiveram presentes ao longo dessa trajetória, meu sincero agradecimento. Em especial, destaco Andressa, Raíssa e Rafael, companheiros na disciplina de Laboratório de Ensino e Aprendizagem II, onde juntos elaboramos a confecção das formas geométricas.

À professora Ana Paula, aos diretores, funcionários e pais da escola na qual a prática foi realizada pela cordialidade e receptividade com que acolheram esta proposta. E em

especial, aos alunos, pelo empenho e pela prestação das valiosas informações que serviram de instrumento de estudo para este trabalho de conclusão de curso.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, meus mais sinceros agradecimentos. O apoio e colaboração de cada um foram fundamentais para o sucesso desta jornada acadêmica.

RESUMO

A presente pesquisa apresenta uma sequência didática que explora conceitos da Geometria Espacial através da utilização de materiais manipulativos de baixo custo financeiro. A proposta tem como objetivo ampliar a visualização da construção de figuras geométricas partindo da segunda dimensão para a terceira dimensão com a utilização de linha e papel confeccionando a planificação dessas figuras e seus respectivos sólidos geométricos. Para atingir tal propósito, foram realizados dois encontros, respectivamente, sobre a elaboração dos poliedros e a reflexão de questões de olimpíadas de Matemática. A análise da produção dos alunos é feita à luz das teorias de Inhelder e Piaget (1981). A metodologia de pesquisa é inspirada no Método Clínico Piagetiano e foi possível sinalizar que a atividade não apenas desafiou os estudantes na manipulação do material, mas também ressaltou a complexidade inerente à representação visual de figuras espaciais em um espaço bidimensional. Em suma, a presente pesquisa proporcionou uma abordagem prática e eficaz para o ensino de Geometria Espacial, enfatizando não apenas a manipulação de materiais, mas também a compreensão e a transposição de conceitos tridimensionais para o plano, contribuindo assim para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

ABSTRACT

The present research introduces a didactic sequence that explores concepts of Spatial Geometry through the use of low-cost manipulative materials. The proposal aims to enhance the visualization of constructing geometric figures, starting from the second dimension to the third dimension, using line and paper to create the planning of these figures and their respective geometric solids. To achieve this purpose, two meetings were conducted, respectively, focusing on the elaboration of polyhedra and the reflection on Mathematics Olympiad problems. The analysis of student production is conducted in light of the theories of Inhelder and Piaget (1981). The research methodology is inspired by the Piagetian Clinical Method, and it was possible to indicate that the activity not only challenged students in handling the material but also highlighted the inherent complexity in visually representing spatial figures in a two-dimensional space. In summary, this research provided a practical and effective approach to teaching Spatial Geometry, emphasizing not only the manipulation of materials but also the understanding and transposition of three-dimensional concepts to the plane, thereby contributing to the cognitive development of students.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Confeção Com Jornal.....	9
Figura 2: Processo de Pintura.....	10
Figura 3: Onze Planificações Possíveis do Cubo.....	14
Figura 4: Planificação e solidificação do cubo “1”.....	19
Figura 5: Planificação e solidificação do cubo “9”.....	20
Figura 3: Onze Planificações Possíveis do Cubo.....	24
Figura 6: Planificação e solidificação do cubo “10”.....	32
Figura 7: Disposições de quadrados que não formam cubo.....	39
Figura 8: Planificação e solidificação do cubo “5”.....	40
Figura 9: Desenvolvimento da Atividade 2.....	42
Figura 10: Desenvolvimento da Atividade 4.....	44
Figura 11: Desenvolvimento da Atividade 6.....	45
Figura 12: Tentativa de Planificação do Cubo.....	48
Figura 13: Planificação do cubo “1” confeccionada por André.....	50
Figura 14: Processo de Perfuração.....	51
Figura 15: Planificação do cubo “2” confeccionada por Floriano.....	52
Figura 16: Planificações dos cubos “3” e “4” dos Estudantes.....	53
Figura 17: Planificação do cubo “9” confeccionada por Tiago.....	54
Figura 18: Resolução apresentada pelo aluno Felipe para a Atividade 1.....	57
Figura 19: Resolução apresentada pelo aluno Matheus para a Atividade 2.....	58
Figura 20: Resolução apresentada pelo aluno Matheus para a Atividade 3.....	59
Figura 21: Resolução apresentada pelo aluno Lucas para a Atividade 4.....	60
Figura 22: Resolução apresentada pelo aluno Tiago para a Atividade 5.....	61
Figura 23: Resolução apresentada pelo aluno Felipe para a Atividade 5.....	62
Figura 24: Resolução apresentada pelo aluno Matheus para a Atividade 6.....	63
Figura 25: Resolução apresentada pelo aluno Lucas para a Atividade 6.....	64

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Nomes Fictícios.....	26
Tabela 2: Alternativas escolhidas pelos estudantes.....	55
Tabela 3: Microdados ENEM.....	64

SUMÁRIO

RESUMO.....	4
LISTA DE FIGURAS.....	6
LISTA DE TABELAS.....	7
SUMÁRIO.....	8
1. INTRODUÇÃO.....	9
1.1 Justificativa.....	11
1.2 Objetivos e Questão da Investigação.....	12
2. CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS.....	15
3. ABORDAGEM METODOLÓGICA.....	22
3.1 Método Clínico Piagetiano.....	24
4. DADOS PRODUZIDOS.....	26
4.1 Contexto Escolar.....	27
4.2 Planejamento.....	28
4.3 Primeiro Encontro.....	36
4.4 Segundo Encontro.....	39
5. ANÁLISE DE DADOS.....	44
5.1 Primeiras Noções Geométricas.....	45
5.2 Planificações.....	48
5.3 Questões de Olimpíadas de Matemática e ENEM.....	54
6. CONCLUSÕES.....	66
7. REFERÊNCIAS.....	68
APÊNDICES I - MODELO CARTA DE APRESENTAÇÃO.....	71
APÊNDICES II - MODELO TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO.....	73
APÊNDICES III - MODELO TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO.....	75

1. INTRODUÇÃO

Inicialmente no que tange às minhas motivações pessoais como docente em formação juntamente aos estudantes, destaco o início de minha trajetória em 2018 quando fui voluntária do projeto InterArte na Universidade do Vale do Taquari (UNIVATES). Nesta iniciativa, auxiliei e ministrei oficinas de criação de esculturas a partir da técnica de modelagem tridimensional que utiliza materiais simples, como jornal, fita, papel kraft, cola feita à base de farinha e água. Realizando-se, principalmente na Associação de Deficientes Físicos de Lajeado (ADEFIL) e em escolas públicas da região, nas quais tive a oportunidade de praticar o acolhimento de estudantes, com o objetivo de validar suas experiências e compreender seus processos de aprendizagem.

Na "Figura 1", demonstra-se a primeira etapa da construção, na qual o objetivo é moldar as formas utilizando apenas jornal e fita. Posteriormente, na "Figura 2", é apresentado o processo final de pintura, que ocorre após a colagem de papel pardo ao redor de toda a estrutura.

Figura 1: Confeção Com Jornal.



Fonte: Acervo pessoal, 2018.

Figura 2: Processo de Pintura.

Fonte: Acervo pessoal, 2018.

Em seguida, nos anos de 2020 e 2021 participei das disciplinas de Laboratório de Prática de Ensino e Aprendizagem de Matemática I, II e III ministradas pelo Professor Marcus Vinicius de Azevedo Basso. Nelas, acompanhei o mesmo grupo de estudantes e sua caminhada do oitavo ano para o nono ano juntamente com o Professor Marcelo A. dos Santos no Colégio de Aplicação e demais colegas futuros professores; sendo possível perceber os desafios do ensino remoto no âmbito da educação básica em duas turmas, assim como as particularidades de cada educando em seu processo de aprendizagem de Matemática.

Já durante uma das disciplinas de Laboratório II, no período de ensino remoto, o professor propôs a criação de um experimento prático de matemática. A partir disso, em conjunto com os demais colegas, elaboramos a confecção de formas geométricas, avançando da dimensão bidimensional para a tridimensional, empregando uma abordagem com papel, lápis e barbante a fim de desenvolver a representação plana dessas figuras e seus sólidos geométricos correspondentes.

Em um âmbito mais geral, vê-se que as dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao compreender sólidos geométricos, juntamente com a falta de motivação em aulas de Geometria Espacial, têm levado os professores a buscar maneiras de facilitar o ensino das propriedades geométricas desses sólidos e tornar as aulas mais envolventes e inspiradoras.

Assim, uma maneira de promover o pensamento lógico-geométrico é encorajar os estudantes a construir objetos sólidos. Essa estratégia possibilita que eles explorem conceitos espaciais por meio de experiências concretas. Ao criar modelos de sólidos, por exemplo, os estudantes têm a oportunidade de observar e aplicar diversas relações espaciais. Além disso, ao manipularem esses materiais, são motivados a agir e têm sua criatividade estimulada como era perceptível no projeto InterArte e possivelmente no experimento prático elaborado na disciplina de Laboratório.

Nos próximos subcapítulos, serão apresentados a justificativa, os objetivos da pesquisa e a pergunta diretriz, estabelecendo uma conexão entre o que foi exposto até o momento e o desenvolvimento subsequente do trabalho.

1.1 Justificativa

É notório que a maioria dos estudantes que chegam aos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio apresentam fragilidade em conceitos básicos de matemática. Essa constatação encontra respaldo nos dados fornecidos pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) de 2021, conduzido e supervisionado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP).

Os resultados divulgados pelo SAEB revelam que, dentre os 26 estados brasileiros e o Distrito Federal, 17 apresentaram índices de proficiência matemática no 9º ano abaixo da média nacional. Este cenário denota uma preocupante lacuna no entendimento de conceitos básicos dessa disciplina. A problemática se estende para o Ensino Médio, onde a maioria dos estados brasileiros também não alcançou a média desejada, conforme atestam os resultados do sistema de avaliação.

Assim, sob a perspectiva de Inhelder e Piaget (1991), o conhecimento é construído através da interação do sujeito com o objeto, a partir de suas experiências e curiosidades individuais. As estruturas de aprendizagem não são preexistentes no aprendiz, tampouco são formadas apenas por estímulos externos; elas são desenvolvidas ao longo de um processo em que o professor desempenha o papel de criar condições para que ocorram.

Nesse contexto, a utilização de materiais manipulativos pode ser extremamente valiosa em sala de aula. Esses recursos podem oferecer uma abordagem prática e tangível, permitindo que os estudantes interajam diretamente com os conceitos matemáticos de forma visual e tátil. Ao explorar e manusear esses materiais, os discentes podem assimilar conceitos abstratos de maneira mais concreta e significativa, o que pode facilitar a compreensão e a consolidação do conhecimento, além da possibilidade de proporcionar uma maior autonomia no processo de compreensão dos conteúdos matemáticos.

Quanto à importância de trabalharmos com Geometria na escola verifica-se que com base nos tópicos levantados anteriormente a proposta pode auxiliar na ampliação da argumentação, formulação e testagem de conjecturas dos estudantes assim como a apresentação de justificativas, respeitando a Competência Específica 5 do Ensino Médio na BNCC:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.(BRASIL, p. 531)

Isto é, ao refletir sobre o desenho, recorte e perfuração das planificações para obtenção dos sólidos, os estudantes são instigados a explorar e formular hipóteses sobre diversos conceitos e propriedades matemáticas, utilizando diferentes abordagens e ferramentas, como experimentações e identificação de padrões, para investigar e compreender os fundamentos da matemática de maneira mais abrangente e interativa.

1.2 Objetivos e Questão da Investigação

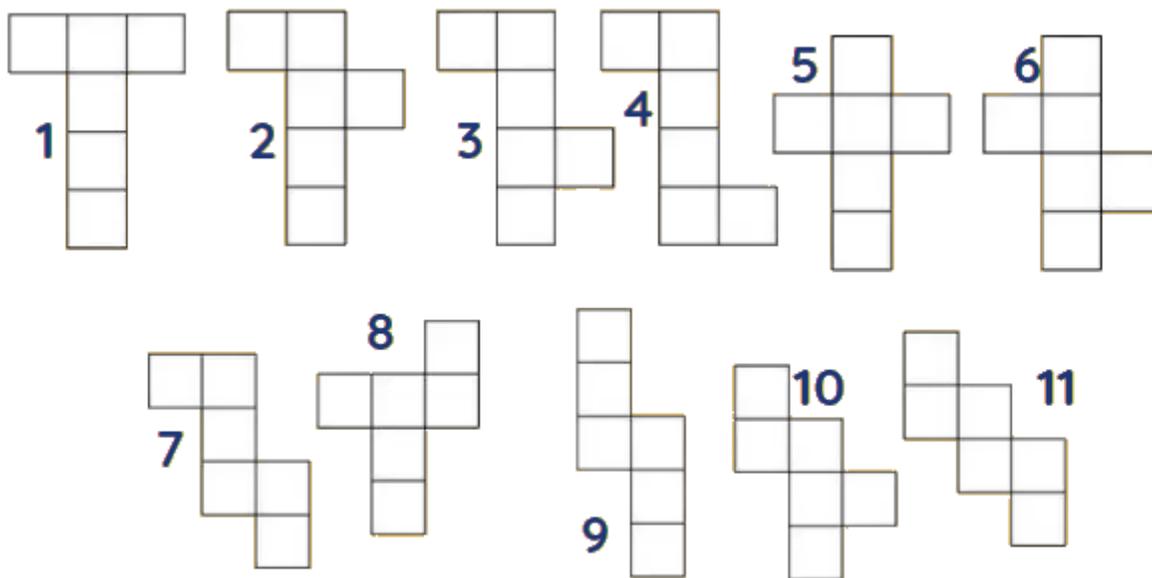
Dado o exposto, tem-se como objetivo ampliar a construção de figuras geométricas partindo da segunda dimensão para a terceira dimensão com a utilização de linha e papel confeccionando a planificação dessas figuras e seus respectivos sólidos geométricos. Com isso, procura-se refletir sobre a pergunta “**Qual o potencial da construção de poliedros de linha e papel no desenvolvimento do pensamento geométrico?**”. Assim propõe-se para estudantes do sétimo ano do ensino fundamental a ampliação e reflexão do pensamento geométrico, com a possibilidade de manipulação desses objetos. É válido destacar a Base Nacional Comum Curricular posto que

A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nesta unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. (BRASIL, p. 271)

Ou seja, objetiva-se explorar a posição e os deslocamentos no espaço, bem como as formas e as relações entre elementos de figuras planas e espaciais, tendo a possibilidade de desenvolver o pensamento geométrico dos estudantes através de materiais manipulativos e de baixo custo financeiro. Desta forma, explora-se a investigação de propriedades, formulação de hipóteses e apresentação de argumentos geométricos.

Com o intuito de assegurar a coesão neste trabalho, adotaremos uma numeração específica para as 11 possíveis planificações do cubo. Nesse contexto, o termo "Planificação 1" será atribuído à primeira configuração da Figura 3. Esta configuração consiste em quatro quadrados dispostos verticalmente, e mais dois quadrados que compartilham as arestas laterais com o primeiro quadrado. Essa lógica será mantida ao longo das demais planificações, proporcionando uma organização clara e sequencial para a análise das diferentes construções do cubo.

Figura 3: Onze Planificações Possíveis do Cubo.



Fonte: Produção autoral, 2023.

A solidificação das 11 planificações possíveis do Cubo pode ser observada no vídeo disponível em: https://youtu.be/o_L4fhDwUis. É válido observar que é possível realizar os furos em outras regiões para a obtenção dos sólidos desejados. Além disso, os rasgos foram mantidos propositalmente com o objetivo de mostrar a fragilidade do material utilizado.

No próximo capítulo, aborda-se as Considerações Teóricas feitas à luz das teorias de Inhelder e Piaget (1991) e de acordo com as diretrizes estabelecidas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Em seguida, no capítulo 3, verifica-se a Abordagem Metodológica inspirada no Método Clínico Piagetiano, seguido das seções 4 e 5, respectivamente, sobre os Dados Produzidos e a Análise de Dados. Por fim, na Conclusão enfatiza-se não apenas a manipulação de materiais, mas também a compreensão profunda e a transposição de conceitos tridimensionais para o plano, contribuindo assim para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

2. CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

Conforme Pavanello (1993), a geometria oferece um vasto campo para que os alunos exercitem sua criatividade ao interagir com as propriedades dos objetos, manipulando e construindo figuras, observando suas características, comparando-as e associando-as de diferentes maneiras, bem como concebendo formas de representá-las. Essas atividades de exploração e interação com os objetos geométricos possibilitam o desenvolvimento do raciocínio espacial e das habilidades essenciais para a compreensão do mundo ao redor, conforme destaca Fainguelernt (1999).

No contexto do desenvolvimento da visualização geométrica e da representação bidimensional de objetos tridimensionais, Inhelder e Piaget (1981), no livro "A representação do espaço na criança", destacam a evolução do pensamento correspondente a cada estágio do desenvolvimento. E quanto às noções projetivas os autores percebem que é impossível observar os objetos de uma forma que não seja através da perspectiva, ou seja, dependemos de sistemas intrincados de projeções e seções. Mesmo quando a percepção tridimensional confere uma constante grandeza euclidiana a esses objetos, essa visão permanece uma combinação de abordagens euclidianas e projetivas. Em outras palavras, mesmo que temos a deformação projetiva, a visualização sempre abrange tanto a perspectiva euclidiana quanto a projetiva simultaneamente.

Em seguida, destacam-se os estágios de Inhelder e Piaget (1981) conforme descrito no livro citado:

Estádio I (0 a 2 anos): Reconhecimento dos objetos familiares, depois das formas topológicas, mas ainda não das formas euclidianas.

Estádio II (2 a 7 anos): Reconhecimento progressivo das formas euclidianas.

Estádio III (7 a 12 anos): Coordenação operatória.

Estádio IV (a partir dos 12 anos): Coordenação formal.

O presente trabalho abordará, principalmente os Estádios II, III e IV no que tange às noções projetivas da criança, sendo válido ressaltar que os autores subdividem os estágios

em A e B de modo que se mantém a evolução progressiva das capacidades produtivas da criança ao longo desses estágios, considerando as nuances presentes nas subestádios.

Assim no capítulo “Os rebatimentos e desenvolvimentos de superfícies” os autores observam que:

“Esses duplos aspectos (motor e projetivo) das reações da criança, bem como a solidariedade expressa entre esses movimentos euclidianos e os pontos de vista projetivos, são encontrados nos dois tipos de resposta do nível III A. O primeiro tipo traduz sobretudo a intuição do caráter plano que apresentarão as superfícies rebatidas, mas sem que o sujeito consiga ligá-las em um todo coerente.”(INHELDER E PIAGET, 1981, p. 298)

Ou seja, no estágio III A, é notável o aspecto motor e o aspecto projetivo das reações manifestadas pela criança, juntamente com a inter-relação evidente entre os movimentos euclidianos e os pontos de vista projetivos. O primeiro tipo de resposta enfatiza especialmente a intuição a respeito da natureza plana que as superfícies rebatidas terão, no entanto, o sujeito não consegue conectá-las para formar uma representação coerente.

Por fim, no nível III B observa-se a transição para a resposta correta, ou seja, a organização operatória dos movimentos de rotação, que constituem o desdobramento das superfícies do objeto euclidiano, e a coordenação operatória dos rebatimentos projetivos, que consistem na correspondência entre os dois sistemas de operações.

É válido verificar que pode haver variações em relação às idades, mas que há uma evolução análoga com diversos intervalos possíveis. Nota-se que a mobilidade, já presente na atividade perceptiva, desempenha um papel crucial na formação do espaço, uma vez que se torna um componente essencial na elaboração da imagem representativa e, por conseguinte, nas construções de representações espaciais intuitivas conforme Inhelder e Piaget (1981).

Conforme discutido pelos autores no capítulo "Os rebatimentos e desenvolvimentos de superfícies", é apontado que "a transição entre os níveis II B e III A [...] existe, no entanto, um período significativo (6 a 8 anos) em que ambos os tipos coexistem e o sujeito transita frequentemente entre um e outro."(INHELDER E PIAGET, 1981, p.298) Essa observação

pode ser extrapolada para os demais estádios, especificamente para os níveis III e IV no contexto do presente estudo.

Além disso, as reflexões de Freire e Faundez (1982) salientam que na formação acadêmica, com exceções, prefere-se a descrição ou a perfilhação dos conceitos e não da apreensão do concreto. Ou seja, esquece-se que a verdadeira ciência é a que, partindo do concreto e mediada pelo conceito, retorna ao concreto.

Complementando que a realidade está em constante movimento, apresentando-se em transformações permanentes. Categorias e conceitos não são estáticos, nem em termos de quantidade, nem em termos de conteúdo. Ademais, o método adotado não deve consistir em um conjunto de dogmas imutáveis para a eternidade.

Ao considerar a dinâmica da realidade em constante transformação, procura-se introduzir atividades que coloquem os estudantes como os principais protagonistas, incentivando a investigação e a curiosidade, pois de acordo com Freire e Faundez (1982)¹ “No ensino esqueceram-se das perguntas, tanto o professor como o aluno esqueceram-nas, e no meu entender todo conhecimento começa pela pergunta. Começa pelo que você, Paulo, chama de *curiosidade*. Mas a curiosidade é uma pergunta!”.

Portanto, propõem-se no presente projeto que, a partir das perguntas da professora, os estudantes formulem as respostas, em vez do inverso, pois ao estabelecer respostas de início não há lugar para a curiosidade nem para o descobrimento uma vez que tudo se torna absoluto, pois conforme os autores

“E somente a partir de perguntas é que se deve sair em busca de respostas, e não o contrário; estabelecer as respostas, com o que todo o saber fica justamente nisso, já está dado, é um absoluto, não cede lugar à curiosidade nem elementos por descobrir. O saber já está feito, este é o ensino. Agora eu diria: “a única maneira de ensinar é aprendendo”, e essa afirmação valeria tanto para o aluno como para o professor.”
(FREIRE E FAUNDEZ, 1982, p. 46)

Além disso, os autores também ressaltam que a natureza desafiadora da pergunta muitas vezes é percebida como uma provocação à autoridade. Nesse contexto, o educador autoritário demonstra mais receio em relação à resposta esperada do que propriamente à

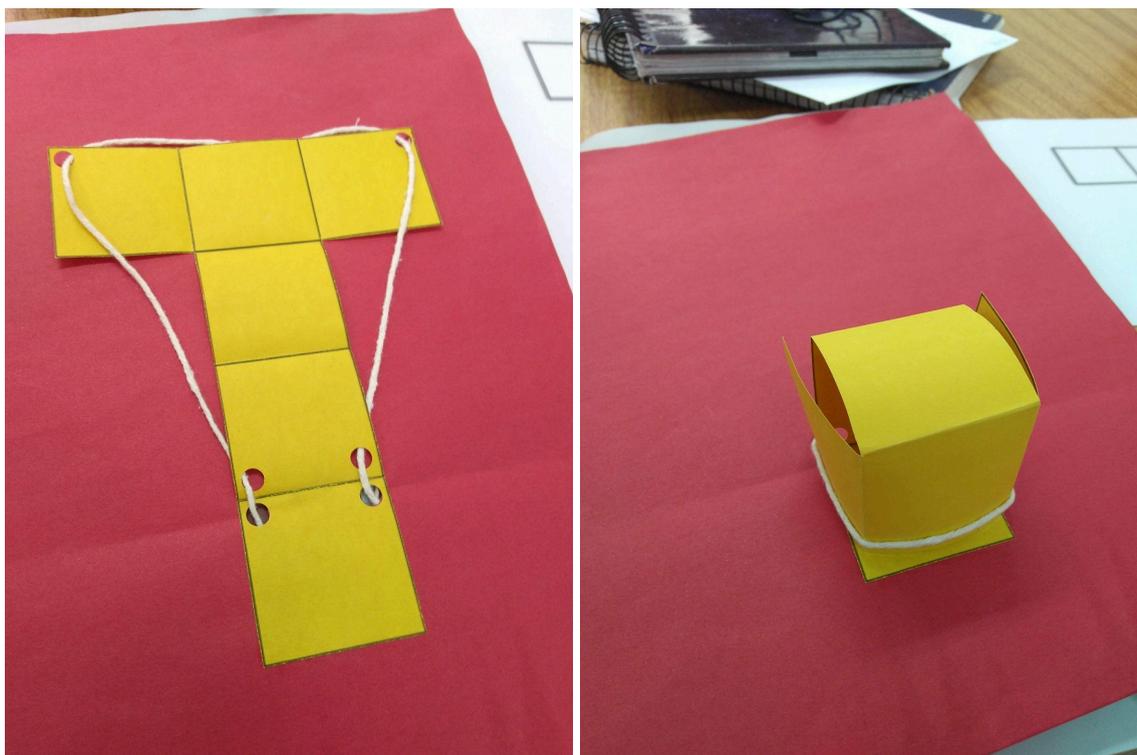
¹ A obra “Por Uma Pedagogia da Pergunta” se trata de um diálogo entre os autores, por isso observa-se o uso de pronomes pessoais.

pergunta em si. Essa dinâmica evidencia o temor que o educador autoritário experimenta diante da necessidade de fornecer uma resposta que esteja à altura do desafio apresentado pela pergunta, contribuindo para a complexidade da interação entre educador e aluno.

Considerando Inhelder e Piaget (1981) e Freire e Faundez (1982), a proposta didática tem como objetivo ampliar o pensamento geométrico com a construção de figuras geométricas partindo da segunda dimensão para a terceira dimensão. A atividade propõe a reflexão sobre as onze planificações do cubo, com o objetivo de não somente reconhecê-las, mas também compreender seus vértices, arestas e faces, de modo a incentivar a autonomia de cada estudante e torná-los agentes ativos em seu próprio processo de aprendizagem.

A seguir, apresentam-se alguns exemplos de planificações para esclarecer a proposta ao leitor. Na "Figura 3", é exibida uma possível planificação do cubo, na qual, ao puxar a linha que se encontra na parte inferior da folha, obtém-se o respectivo poliedro do cubo. Por sua vez, na "Figura 4", é apresentada outra possível planificação do cubo. Nessa abordagem, foi necessário o uso de dois barbantes para a obtenção do poliedro, uma vez que as faces estão em direções contrárias.

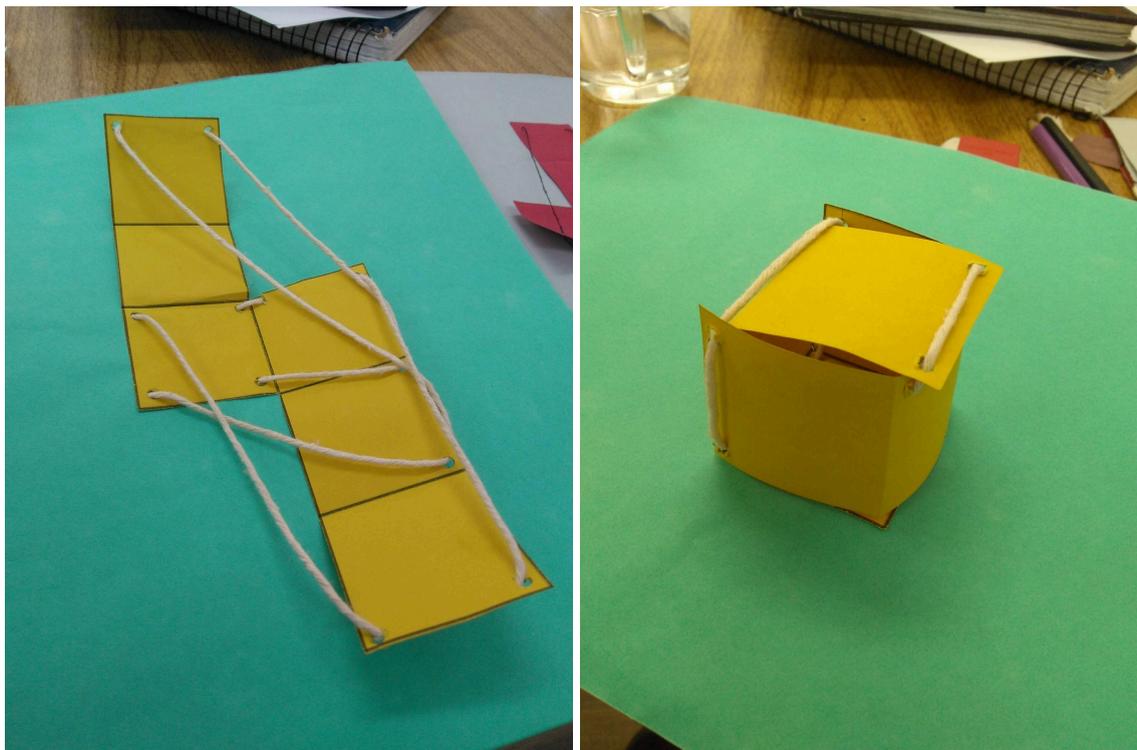
Figura 4: Planificação e solidificação² do cubo “1”.



Fonte: Produção autoral, 2023.

² Neste trabalho ressignifica-se a palavra "solidificação" como o processo de gerar um objeto tridimensional a partir de sua planificação.

Figura 5: Planificação e solidificação do cubo “9”.



Fonte: Produção autoral, 2023.

Em seguida, serão apresentadas algumas das produções já existentes sobre a manipulação geométrica, incluindo seus objetivos, metodologia e público-alvo. Esta revisão tem como propósito observar as semelhanças e diferenças em relação ao presente trabalho, proporcionando uma visão contextualizada das abordagens e contribuições já feitas nesse campo específico

2.1 Revisão Bibliográfica

Primeiramente, verifica-se o trabalho de Leonardo Guerini de Souza (2011) nomeado “Ensino-aprendizagem de Matemática através da Construção de Materiais Didáticos”, no qual objetivou-se avaliar a importância do uso de materiais didáticos construídos como estratégia para o ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Médio. Sendo abordados os materiais manipulativos, enfatizando sua relevância no ensino da Geometria. Durante essas atividades práticas, foi empregada uma adaptação do método clínico piagetiano, concluindo-se de forma afirmativa sobre a validade e eficácia dessa proposta de utilizar a

construção de materiais didáticos como uma abordagem significativa para o ensino-aprendizagem de matemática.

Utilizando materiais didáticos de fácil acesso, observa-se também o trabalho de Rebeca Ferreira da Costa de Castro (2017) “Construção de figuras tridimensionais a partir de representações planas: uma prática com alunos do ensino médio” no qual conduziu-se uma investigação com o objetivo de examinar como a construção de figuras tridimensionais a partir de figuras planas pode contribuir para o desenvolvimento das habilidades espaciais dos alunos, e também avaliar a importância dessas habilidades no ensino de geometria. Através da implementação do projeto, os alunos do Ensino Médio foram desafiados a criar figuras tridimensionais baseadas em fotografias de animais, personagens fictícios e objetos do mundo real, a partir de figuras planas.

Em contrapartida, utilizando manipulações virtuais, verificou-se a dissertação de Caroline Borsoi (2016) “Geogebra 3D no Ensino Médio: Uma possibilidade para a aprendizagem da Geometria Espacial”, na qual a autora explorou o desenvolvimento do pensamento geométrico espacial, utilizando os recursos de representação no software Geogebra, especialmente aqueles relacionados à interação dinâmica entre as representações de objetos tridimensionais e diferentes planos de corte, também com público alvo estudantes do Ensino Médio. A análise das produções dos alunos, por sua vez, foi conduzida considerando as teorias de Van Hiele, Duval e Gutiérrez. A metodologia de pesquisa se baseia na Engenharia Didática, permitindo identificar, por meio da comparação entre as análises a priori e a posteriori, o progresso dos alunos em relação ao desenvolvimento de habilidades de visualização espacial.

Já Tiago Schnornberger (2014) em seu trabalho “O uso da pletera de poliedros no ensino de geometria espacial” propôs uma série de atividades sequenciais que abrangem a visualização geométrica bidimensional e tridimensional, utilizando recursos computacionais, como a Pletora de Poliedros. Essas atividades foram fundamentadas em estudos sobre a teoria de aprendizado da geometria de Van Hiele e em outras abordagens práticas que empregam objetos digitais de aprendizagem, sendo seu público alvo estudantes do Ensino Médio. Assim, a Pletora de Poliedros mostrou-se uma ferramenta útil para melhorar a visualização dos objetos e o aprendizado da geometria espacial, desde que inserida em uma sequência didática bem planejada e estruturada. O uso adequado dessa abordagem proporcionou aos

estudantes uma experiência mais significativa e facilitou o processo de compreensão dos conceitos geométricos.

Por fim, destaca-se o artigo “Polígonos e poliedros: trabalhar a relação 2D-3D” de Conceição e Rodrigues (2020), no qual aprofunda-se as conexões que os alunos podem estabelecer ao imaginar/desenhar cada representação dos poliedros, sendo o objetivo compreender como os alunos do 1.º ano do ensino básico estabelecem relações entre poliedros e os polígonos presentes em suas faces, especialmente que tipo de conexões são estabelecidas entre as representações 2D e 3D desses sólidos.

As autoras observam a familiaridade dos alunos com as figuras geométricas no estabelecimento das relações entre diferentes formas de representação. Sendo essencial que eles manipulem essas figuras, analisando-as, explorando-as e estabelecendo relações que, ao serem compreendidas, se tornam propriedades percebidas. Embora haja uma tendência em acreditar que os alunos mais jovens devem começar com figuras tridimensionais, trabalhando posteriormente com figuras bidimensionais, as autoras argumentam que uma abordagem possível é refletir sobre a geometria espacial e a geometria plana de forma integrada.

Portanto, a presente pesquisa aproxima-se mais dos trabalhos de Souza (2011) e Castro (2017), uma vez que pretende-se explorar materiais didáticos de baixo custo financeiro como papel e barbante. Ao mesmo tempo, ao destacar as ideias de Inhelder e Piaget (1981), distancia-se dos referenciais teóricos de Schnornberger (2014) e Borsoi (2016), sendo válido salientar a não utilização de softwares na metodologia com o objetivo de manter o caráter de materiais de baixo custo financeiro na pesquisa. E por fim, busca-se uma abordagem integrada de modo a unir a geometria espacial e a geometria plana conforme Conceição e Rodrigues (2020), mesmo que para estudantes nos anos finais do Ensino Fundamental, os quais não foram público alvo de nenhuma proposta citada anteriormente.

Em seguida, observa-se os aspectos metodológicos do trabalho, expondo o contexto em que a pesquisa foi conduzida, a prática que se desenvolveu, bem como as semelhanças e divergências em relação ao Método Clínico de Piaget, utilizado como base para a coleta e análise de dados.

3. ABORDAGEM METODOLÓGICA

A pesquisa é uma atividade que exige reflexão, rigor, método e ousadia. Nem toda atividade intelectual é científica, é necessária a conscientização de adotar abordagens e métodos adequados para cada tipo de pesquisa, de acordo com Marisa Vorraber Costa (2001) no artigo “Uma agenda para jovens pesquisadores”. Assim, tangendo a pesquisa e o pensamento matemático tem-se que, os contextos da descoberta e da justificação são fundamentados em reflexão, erro, rigor e visualização, sendo preciso diversas etapas em vez de argumentos prontos; conforme Gravina (2001):

Neles [os contextos da descoberta e da justificação] acontece o “pensar matemático”, caracterizado por experimentar, interpretar, visualizar, abstrair, conjecturar, errar e demonstrar muito superior à aceitação, passiva, de conhecimentos apresentados como sequência bem ordenada de “fatos” e argumentos “prontos”. (GRAVINA,2001, p. 32)

A partir disso, a atual pesquisa é de caráter qualitativo, posto que é uma tarefa social, verificando que a colaboração e a troca de ideias enriquecem o trabalho permitindo ampliar as perspectivas. Mantendo a humildade em relação ao conhecimento adquirido, e abertura a diferentes concepções e reconhecer a importância da ética e da colaboração através dos Termos de Consentimento e Assentimento. Esse trabalho é uma jornada social e reflexiva, onde compartilha-se as descobertas a partir da proposta para estudantes do sétimo ano do ensino fundamental de uma escola pública de Porto Alegre a ampliação e reflexão do pensamento geométrico.

Além disso, optou-se por essa faixa etária pois estão passando pelo final do Estádio III e iniciando o Estádio IV nos quais levantam uma série de problemas interessantes no que se refere às relações entre a percepção e a proporcionalidade (transposição perceptiva) e a gênese intelectual da noção de proporções, mas já há uma consolidação nas noções projetivas de acordo com Inhelder e Piaget (1981).

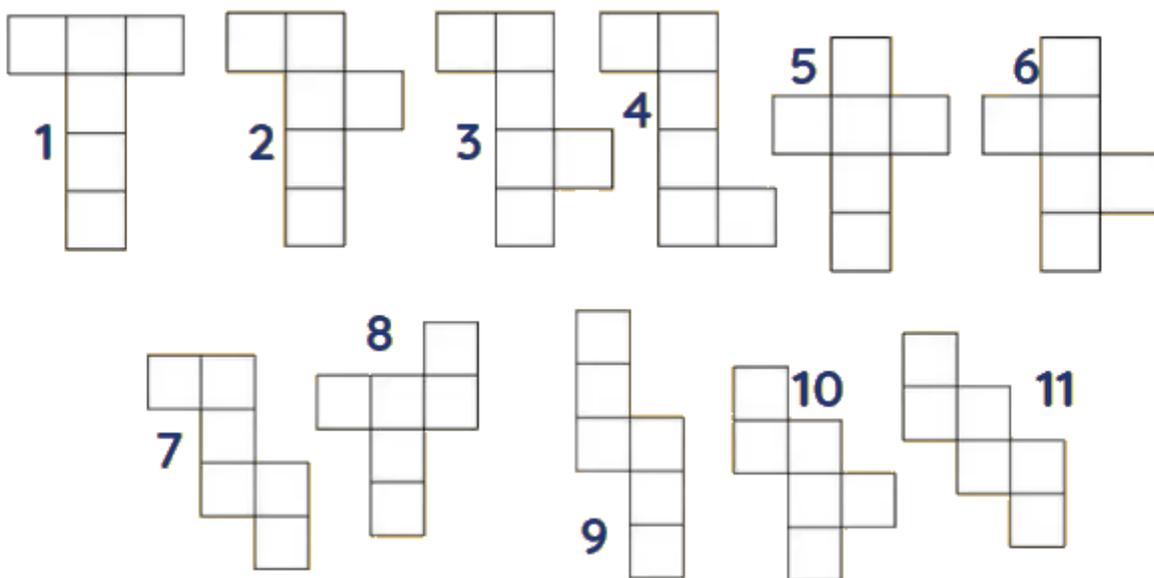
Inicialmente, foi feita uma exposição para os alunos, com o intuito de destacar a relevância do raciocínio geométrico no cotidiano e enfatizar a aplicação desse conhecimento nas provas de Vestibulares e Olimpíadas, onde as diversas planificações do cubo foram abordadas. Após essa etapa expositiva, os alunos efetivamente construíram os sólidos geométricos. Neste processo, adaptou-se o Método Clínico com o objetivo de observar o

entendimento e a assimilação dos conceitos abordados durante a atividade, sendo esse método explicitado no subcapítulo 3.1 Método Clínico Piagetiano. Essa etapa permitiu verificar a opinião dos alunos dada a abordagem utilizada, além de identificar possíveis pontos que necessitem de reforço ou esclarecimentos adicionais.

Nesta prática, iniciou-se construindo com os estudantes as onze possíveis planificações do cubo no quadro. Em seguida, cada aluno foi convidado a confeccionar seu próprio poliedro, de modo que, ao puxar o barbante, a planificação se transforme no sólido geométrico correspondente. Durante o trabalho, a professora-pesquisadora instigou a turma e ofereceu auxílio sempre que necessário, incentivando também a troca de ideias e interação entre os alunos. Visto que o objetivo é explorar conceitos relacionados à posição e deslocamentos no espaço, bem como as formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais, procura-se promover o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes por meio do uso de materiais manipulativos de baixo custo financeiro.

A seguir retoma-se às 11 possíveis planificações do cubo, as quais foram construídas com a turma no quadro. Lembrando que o termo "Planificação 1" será atribuído à primeira configuração da Figura 3 e assim sucessivamente.

Figura 3: Onze Planificações Possíveis do Cubo.



Fonte: Produção autoral, 2023.

A solidificação das 11 planificações possíveis do Cubo pode ser observada no vídeo disponível em: https://youtu.be/o_L4fhDwUis. Novamente, é válido observar que é possível realizar os furos em outras regiões para a obtenção dos sólidos desejados. Além disso, os rasgos foram mantidos propositalmente com o objetivo de mostrar a fragilidade do material utilizado.

Para a realização dessa atividade, foi necessário papel colorido, barbante, tesoura, cola, lápis e régua. O uso de perfuradores para fazer os furos no papel foi opcional, já que é possível utilizar a tesoura para a mesma finalidade. Já os estudantes foram responsáveis pelo desenho, recorte, colagem e manipulação dos poliedros, tornando-se protagonistas ativos em seu próprio processo de aprendizagem.

Já a coleta de dados foi realizada de forma a abranger diferentes fontes de informação. Para isso, utilizou-se diversos recursos incluindo um diário de campo da pesquisadora, registros das construções realizadas pelos estudantes, gravação da aula e fotografias dos processos.

O diário de campo desempenhou um papel fundamental, permitindo à pesquisadora registrar seus “insights”, observações e reflexões ao longo do processo. Nele, registrou-se informações relevantes sobre o desenvolvimento das atividades, os desafios enfrentados pelos estudantes, as estratégias utilizadas e quaisquer outras observações significativas que possam contribuir para a compreensão dos resultados.

Além disso, os registros das construções feitas pelos estudantes forneceram dados tangíveis e visuais sobre o processo de criação das figuras geométricas e dos sólidos correspondentes. Esses registros incluíram desenhos, modelos físicos ou até mesmo as tentativas de construções que não efetivamente concluíram a proposta.

As fotografias auxiliaram no entendimento dos raciocínios desenvolvidos pelos estudantes, de modo a corroborar com o Método Clínico, uma vez que não se trata simplesmente de contar o número de estudantes que construíram de forma correta, mas se indagar as justificativas que as próprias crianças ofereciam de seus raciocínios conforme Delval (2001).

Logo, ao combinar essas diferentes fontes de dados, obteve-se uma visão mais completa sobre os processos de aprendizagem e as percepções dos estudantes em relação às construções de sólidos geométricos. Essa abordagem variada da coleta de dados contribuiu para uma análise mais rica e embasada, fornecendo reflexões valiosas para a pesquisa e o desenvolvimento de práticas educacionais.

Por fim, procura-se promover a construção de sólidos geométricos e explorar suas propriedades por meio de experiências concretas, utilizando materiais acessíveis, buscando desenvolver o pensamento geométrico dos estudantes e torná-los protagonistas ativos em seu próprio processo de aprendizagem. Essa abordagem, tangerá teorias pedagógicas de Inhelder e Piaget (1981) e Freire e Faundez (1982) em conjunto com a Base Nacional Comum Curricular, tendo o potencial de tornar as aulas de geometria mais significativas, inspiradoras e eficazes.

3.1 Método Clínico Piagetiano

Considerando os objetivos do estudo, o método clínico piagetiano se apresenta como uma ferramenta crucial para aprofundar a compreensão do pensamento infantil, posto que procura-se as respostas espontâneas dos discentes assim como seus raciocínios sobre geometria espacial. Além disso, optou-se por utilizar o autor Jean Delval (2001) uma vez que o mesmo expôs com clareza e objetividade o método Clínico Piagetiano.

Conforme Delval (2001) no livro “Introdução à Prática do Método Clínico: descobrindo o pensamento da criança”, um dos primeiros pontos destacados no sentido de compreender como a criança pensa é não partir do pressuposto de que as crianças pensam da mesma maneira que os adultos, apenas carecendo de algo, mas sim de que é necessário buscar compreender um sentido próprio no que dizem e fazem.

“Desse modo, Piaget iniciou um método de conversas abertas com as crianças para tentar aprender o curso do seu pensamento. Não se tratava simplesmente de contar o número de sujeitos que respondiam de forma correta, mas de indagar as justificativas que as próprias crianças ofereciam de suas respostas. Esse foi o início do Método Clínico, que começou a utilizar em seus primeiros estudos sobre o pensamento da criança, como em seu trabalho sobre a noção da parte (Piaget, 1921), e que continuou utilizando em seus trabalhos posteriores” (DELVAL, 2001, p. 55)

Por outro lado, o autor observa que há uma grande dificuldade na prática desse método sendo muito fácil cometer erros. Os principais equívocos consistem em primeiro lugar, em sugerir a resposta ao sujeito, isto é, falar demais. E o segundo erro, não formular hipóteses para orientar o trabalho, sendo possível não encontrar nada, pois as respostas dos entrevistados podem parecer desinteressantes quando não há clareza do que se procura entender.

Além disso, conforme Piaget, as respostas espontâneas representam o aspecto mais precioso que um psicólogo procura obter durante uma entrevista clínica. A partir do princípio de que o sujeito está constantemente construindo modelos ou representações da realidade, “uma entrevista bem-realizada deve conseguir pôr em evidência essas crenças que o sujeito têm”(DELVAL, 2001, p.136). Mesmo que a criança não tenha consciência direta, ela está constantemente refletindo sobre a realidade ao seu redor, podendo ocorrer essa reflexão de maneira não explícita, sistemática e voluntária.

Por fim, destaca-se que o entrevistador-pesquisador deve evitar a perseveração das respostas das crianças, ou seja, tentar contornar que uma explicação, uma vez adotada, seja constantemente repetida pela criança, usando assim a mesma justificativa para diferentes questionamentos.

4. DADOS PRODUZIDOS

Neste capítulo, aborda-se o contexto escolar no qual a prática foi realizada e as atividades propostas para os estudantes. É fundamental ressaltar que, para garantir a confidencialidade dos participantes da pesquisa e cumprir os Termos de Consentimento e Assentimento, os nomes dos estudantes serão substituídos por nomes fictícios.

Além disso, na primeira aula estavam presentes 17 estudantes e na segunda aula 20 estudantes do total de 25 estudantes matriculados na turma. No entanto, somente 11 alunos entregaram as autorizações e compareceram nas duas aulas, por isso iremos analisar somente suas produções e questionamentos.

Abaixo, na Tabela 1, segue os nomes fictícios atribuídos a esses estudantes:

Tabela 1: Nomes Fictícios

	Nome Fictício	Aula 1	Aula 2	Autorização
1	Sophia	presente	presente	entregue
2	Lucas	presente	presente	entregue
3	Rafael	presente	presente	entregue
4	André	presente	presente	entregue
5	Matheus	presente	presente	entregue
6	Marcos	presente	presente	entregue
7	Guilherme	presente	presente	entregue
8	Felipe	presente	presente	entregue
9	Tiago	presente	presente	entregue
10	Amanda	presente	presente	entregue
11	Florianio	presente	presente	entregue
Soma		11	11	11

Fonte: Produção autoral, 2023.

Adicionalmente, este capítulo está organizado em quatro seções distintas: 4.1 Contexto Escolar: nesta seção, destaca-se o perfil dos estudantes e a realidade na qual a escola está inserida; 4.2 Planejamento: aqui, apresentaremos o Plano de Aula utilizado nos dois encontros. 4.3 Primeiro Encontro: nesta seção, descreveremos o desenvolvimento da prática das planificações com linha e papel. 4.4 Segundo Encontro: por fim, nesta seção, apresentaremos o desenvolvimento das questões propostas. Essa divisão em seções permitirá

uma análise mais aprofundada de cada aspecto relevante da pesquisa, mantendo a coesão e a clareza ao longo do capítulo.

4.1 Contexto Escolar

A escola na qual a prática foi realizada é uma instituição pública de Porto Alegre, localizada próximo a uma comunidade de moradores de classe média e baixa. Dentro da escola, foram observados diversos desafios de infraestrutura, tais como a falta de fechaduras nas portas, a ausência de lâmpadas e ventiladores nas salas de aula. Essas condições precárias tornaram necessário o uso de materiais financeiramente mais acessíveis, como papel colorido, barbante, tesoura, cola e lápis, enquanto a utilização de tecnologias digitais foi deixada de lado com o objetivo de exaltar a utilização de materiais exequíveis.

Outro aspecto notável da escola é o tamanho reduzido do refeitório, que só comporta duas turmas de cada vez. Em resposta a essa limitação, a estratégia escolar adotada é convocar as turmas para a merenda durante os períodos de aula, permitindo que os alunos se acomodem de maneira ordenada e evitando aglomerações.

Observa-se, adicionalmente, um notável empenho por parte da comunidade escolar em tornar o ambiente escolar o mais limpo e acolhedor possível, apesar das limitações da infraestrutura. Isso se manifesta através da presença de inúmeros cartazes motivacionais espalhados pela escola, que buscam inspirar e incentivar os alunos em seu percurso educacional.

Além disso, a instituição incentiva a presença de estagiários em sala de aula e a implementação de propostas pedagógicas que vão além da aula convencional. Isso demonstra um comprometimento em enriquecer a experiência de aprendizado dos estudantes, oferecendo abordagens educacionais diferentes e oportunidades de envolvimento prático. Essas ações refletem a determinação da comunidade escolar em proporcionar um ambiente mais estimulante para o desenvolvimento dos alunos.

No que diz respeito ao perfil da turma, é evidente a falta constante de alguns estudantes, especialmente em dias de chuva. Na pesquisa realizada, participaram 2 meninas e 9 meninos, totalizando 11 estudantes. Além disso, as idades dos alunos variam de 12 a 17 anos, refletindo uma faixa etária diversificada da turma.

Por fim, é importante ressaltar que inicialmente estava acordado que a professora regente da turma participaria como assistente no desenvolvimento das atividades, considerando a previsão de uma grande presença de alunos na aula. Contudo, devido à ausência de outro professor na escola, a professora regente teve que assumir a responsabilidade por outra turma durante os encontros. Isso resultou na professora-pesquisadora sendo a única a orientar os encontros em colaboração com os estudantes.

4.2 Planejamento

No presente subcapítulo apresenta-se o plano de aula aplicado na turma de 7º ano, o qual foi dividido em duas aulas: a primeira de 3 períodos (150 minutos) e a segunda de 2 períodos (100 minutos). Na primeira aula, o foco foi explorar as possíveis planificações de cubos e incentivar a participação ativa dos estudantes em uma atividade prática. Além disso, se fez necessário também a discussão de nomenclaturas do cubo e do quadrado como: vértice, face, lado, aresta entre outros, uma vez que foi o primeiro contato dos estudantes em sala de aula com Geometria Espacial.

Plano de Aula

Plano de trabalho desenvolvido para: 5 períodos - 7º ano

Resumo da atividade: As aulas abordarão conceitos geométricos de forma prática, incentivando a participação ativa e a reflexão crítica dos estudantes. O foco está na construção de planificações de cubos, exploração de possibilidades e na análise das experiências vivenciadas.

Objetivos: Ampliar a construção de figuras geométricas partindo da segunda dimensão para a terceira dimensão com a utilização de linha e papel confeccionando a planificação de formas planas geométricas e seus respectivos sólidos.

Conceitos de Matemática presentes na atividade:

- Medições com régua
- Classificações quanto ao número de vértices
- Medidas de lados e ângulos
- Paralelismo e perpendicularismo dos lados

Recursos ou materiais necessários: Papel colorido, barbante, tesoura, cola, lápis, régua, perfurador de papel.

Descrição:**Aula 1**

Tempo previsto: 150 minutos.

Atividades: Nesta primeira aula, o foco está em explorar planificações de cubos e incentivar a participação ativa dos estudantes em uma atividade prática.

Momento 1: Apresentação pessoal para a turma e entrega dos Termos de Assentimento e Consentimento.

Momento 2: Discussão das possíveis planificações do cubo (Figura 3), explorando os conhecimentos prévios dos estudantes. Além disso, procura-se explorar figuras de seis faces que não formam um cubo.

Momento 3: Proposta da construção das planificações observadas anteriormente com auxílio de barbante e papel colorido. Abaixo segue o passo a passo recomendado para sua construção:

1° - Desenho da planificação com a utilização de régua e lápis.

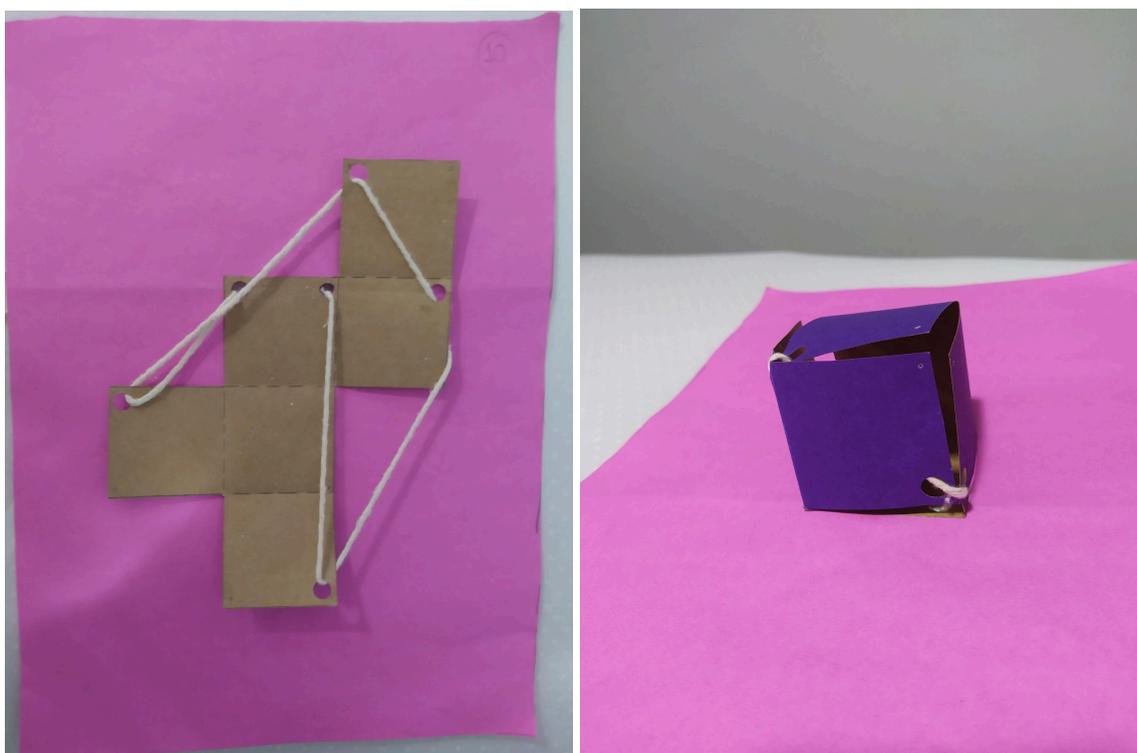
2° - Recorte da planificação.

3° - Dobra do papel nas arestas, com o objetivo de facilitar sua solidificação.

4° - Perfuração do papel com tampa de caneta, tesoura ou perfurador e transpasse do barbante.

5° - Colagem de uma face em outro papel colorido.

Figura 6: Planificação e solidificação do cubo “10”.



Fonte: Produção autoral, 2023.

Observação: Durante a prática prefere-se interrogar os estudantes sobre seus raciocínios, o porquê de escolherem tal planificação, e perguntas como: Você já conhecia essas planificações? Qual o seu critério para realizar os furos? Qual face você pretende colar na outra folha? O que você percebe com essa manipulação?

Momento 4: Reflexão e finalização em conjunto com todos os estudantes sobre proposta, com o objetivo de escutá-los e fazê-los refletir sobre a prática, destacando possíveis pensamentos geométricos.

Aula 2

Tempo previsto: 100 minutos.

Atividades: Dar continuidade ao tema, explorando as construções realizadas pelos estudantes e aprofundando a discussão sobre o processo de planificação.

Momento 1: Devolução dos Termos de Assentimento e Consentimento.

Momento 2: Discussão das construções realizadas pelos estudantes, pontos positivos e negativos.

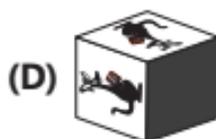
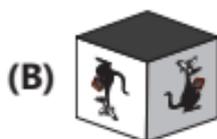
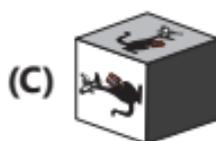
Momento 3: Reflexão sobre algumas questões envolvendo planificação e solidificação do cubo.

(Concurso Canguru de Matemática - 2023 - Nível B) **Atividade 1:**

Rosalinda tem a figura de papel ao lado, que ela vai dobrar para formar um cubo.



Qual dos seguintes cubos ela irá obter?



Justificativa da resposta:

(Concurso Canguru de Matemática - 2023 - Nível J) **Atividade 2:**

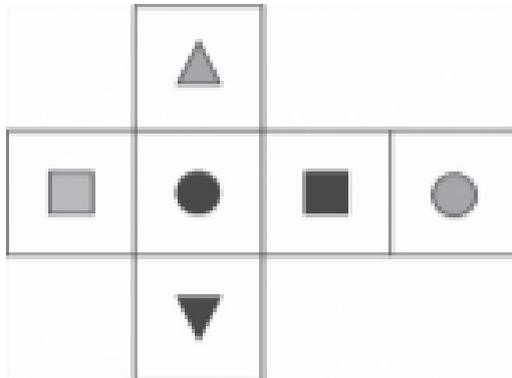
Leonardo desenhou uma linha fechada na superfície de uma caixa retangular de papelão e depois desdobrou a caixa. Qual das figuras a seguir **NÃO** representa a caixa planificada:



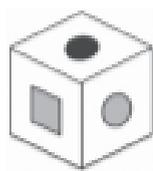
Justificativa da resposta:

(OBMEP - 2021 - Nível 2) **Atividade 3:**

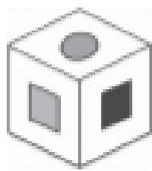
Janaína recortou a figura abaixo e montou um cubo.



Qual das figuras a seguir pode representar o cubo que Janaína montou?



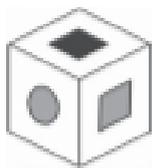
(A)



(B)



(C)



(D)



(E)

Justificativa da resposta:

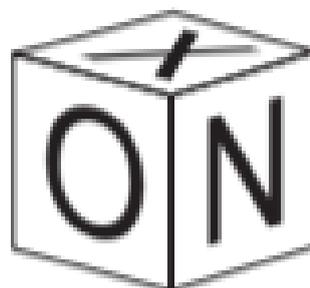
(OBMEP - 2019 - Nível 1) **Atividade 4:**

A figura mostra duas vistas de um mesmo cubo com as letras A, O, Y, X, N e E em suas faces.

Qual face oposta à face de letra E?

(A) O

(B) Y



(C)A

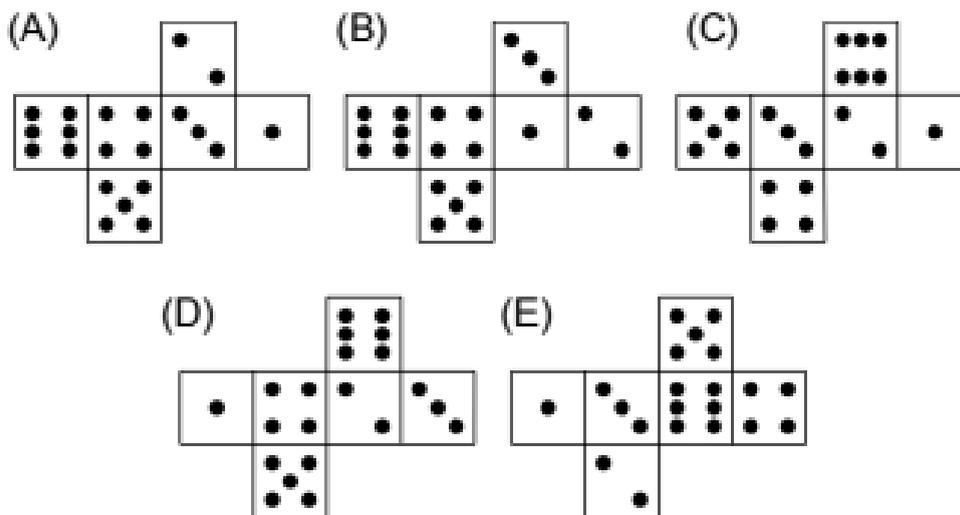
(D)X

(E)N

Justificativa da resposta:

(OBMEP - 2008 - Nível 1) **Atividade 5:**

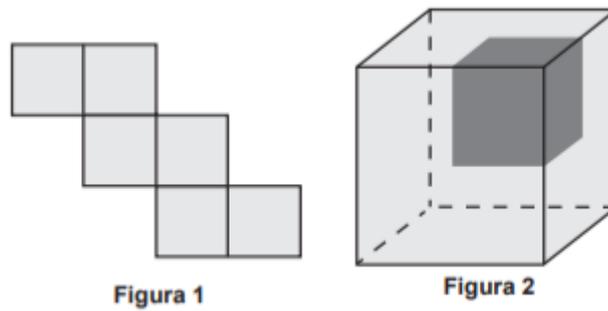
Com as figuras mostradas abaixo podemos montar cinco dados diferentes. Com qual delas podemos montar um dado no qual a soma do número de pontos em quaisquer duas faces opostas é 7?



Justificativa da resposta:

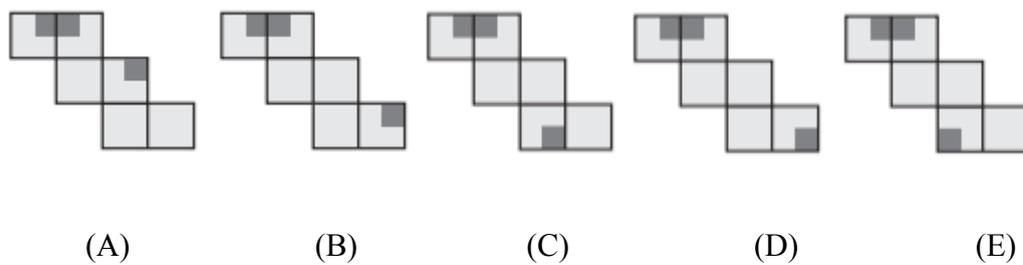
(ENEM - 2022) **Atividade 6:**

Dentre as diversas planificações possíveis para o cubo, uma delas é a que se encontra apresentada na Figura 1.



Em um cubo, foram pintados, em três de suas faces, quadrados de cor cinza escura, que ocupam um quarto dessas faces, tendo esses três quadrados um vértice em comum, conforme ilustrado na Figura 2.

A planificação do cubo da Figura 2, conforme o tipo de planificação apresentada na Figura 1 é



Justificativa da resposta:

4.3 Primeiro Encontro

Conforme o Plano de Aula, na primeira aula, a professora-pesquisadora apresentou aos estudantes os documentos de Consentimento e Assentimento, deixando claro que seus nomes e rostos não seriam divulgados no presente trabalho.

Em seguida, iniciou-se a discussão perguntando aos estudantes "o que é um cubo?" os mesmos responderam dando exemplos de figura como um cubo mágico, um cubo de gelo e os cubos do Minecraft³.

A professora-pesquisadora, em seguida, desenhou um cubo no quadro com caneta, com o objetivo de permitir que todos os estudantes visualizassem a figura. Posteriormente, perguntou-se aos estudantes quais eram os elementos do cubo, e a resposta imediata foi "quadrados". No entanto, como alguns estudantes estavam copiando o desenho em seus cadernos, a professora perguntou como se desenhava um cubo. Ao não obter respostas da turma, ela desenhou outro cubo no quadro e explicou uma estratégia possível.

A pergunta subsequente da docente aos estudantes foi "Qual é a diferença entre um cubo e um quadrado?" Algumas respostas destacaram que o cubo tem mais "lados" que um quadrado. Diante disso, a professora-pesquisadora debateu com a turma que o quadrado tem 2 dimensões, enquanto o cubo tem 3 dimensões.

A aula prosseguiu com a explicação dos elementos do cubo, incluindo as nomenclaturas de aresta, vértice e face, juntamente com os elementos do quadrado, como lado e vértice. Após essa formalização, perguntou-se aos estudantes como seria uma planificação de um cubo, ou seja, como seria a representação da figura tridimensional em duas dimensões. A primeira planificação sugerida pela turma foi a mais convencional, chamada neste trabalho de "planificação do cubo 5" ou popularmente conhecida como "cruz". Para testar a sugestão, propôs-se desenhá-la e cortá-la em uma folha de caderno.

Logo após, perguntou se havia outra planificação possível, e a turma respondeu prontamente que "não tem". Foi então sugerido mover uma das faces laterais para baixo, e a professora-pesquisadora questionou se isso fecharia um cubo, levantando as perguntas "Vai fechar? Se sim, porquê? Se não, por quê?"

Alguns estudantes expressaram suas opiniões, como Lucas afirmando que "vai fechar" e Guilherme explicando que "não vai fechar, porque a altura vai ficar diferente na hora de fechar." Mas depois de um tempo pensando acrescentou que "Tu vai girar a parte de cima, então vai dar certo."

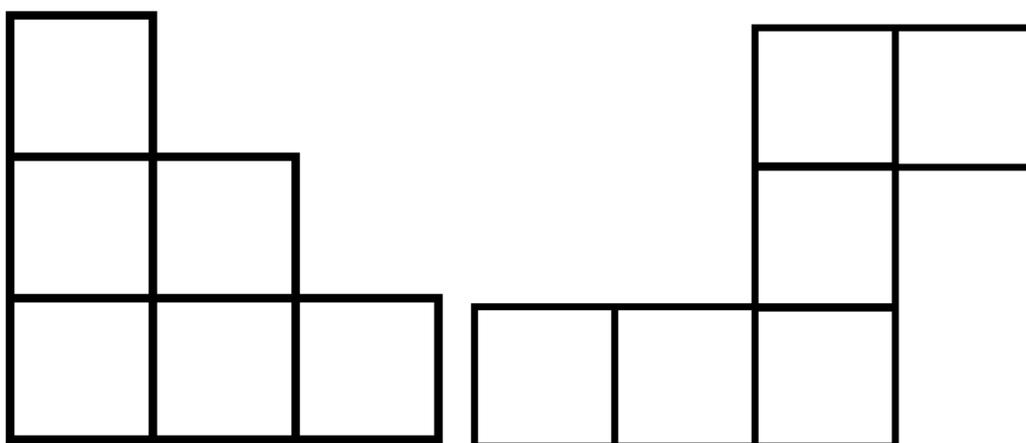
³ Minecraft é um popular jogo de construção de cubos e exploração de mundo aberto, onde os jogadores podem criar e interagir em um ambiente de blocos.

Outros estudantes também conseguiram concluir que era possível obter outra planificação do cubo através de seu desenho, recorte e montagem, mas tiveram dificuldades em explicar por que funcionava.

Após a reflexão sobre a possibilidade de movimentar as faces, a turma propôs as planificações de 1 até a 6, todas mantendo o padrão de quatro quadrados no meio e um quadrado em cada lado. Devido ao tempo e à complexidade das planificações, a professora expôs as demais 5 planificações no quadro, sugerindo que os estudantes as testassem em uma folha.

Em seguida, perguntou se toda a figura com seis quadrados poderia formar um cubo. O estudante Matheus prontamente respondeu que não, uma vez que poderia desenhar seis quadrados subsequentes formando uma linha. Além disso, a professora-pesquisadora entregou duas outras figuras geométricas para a turma questionando se os mesmos formariam um cubo (Figura 7), e mesmo respondendo de primeiro momento que formaria, após manipularem as formas, concluíram que não era possível.

Figura 7: Disposições de quadrados que não formam cubo.

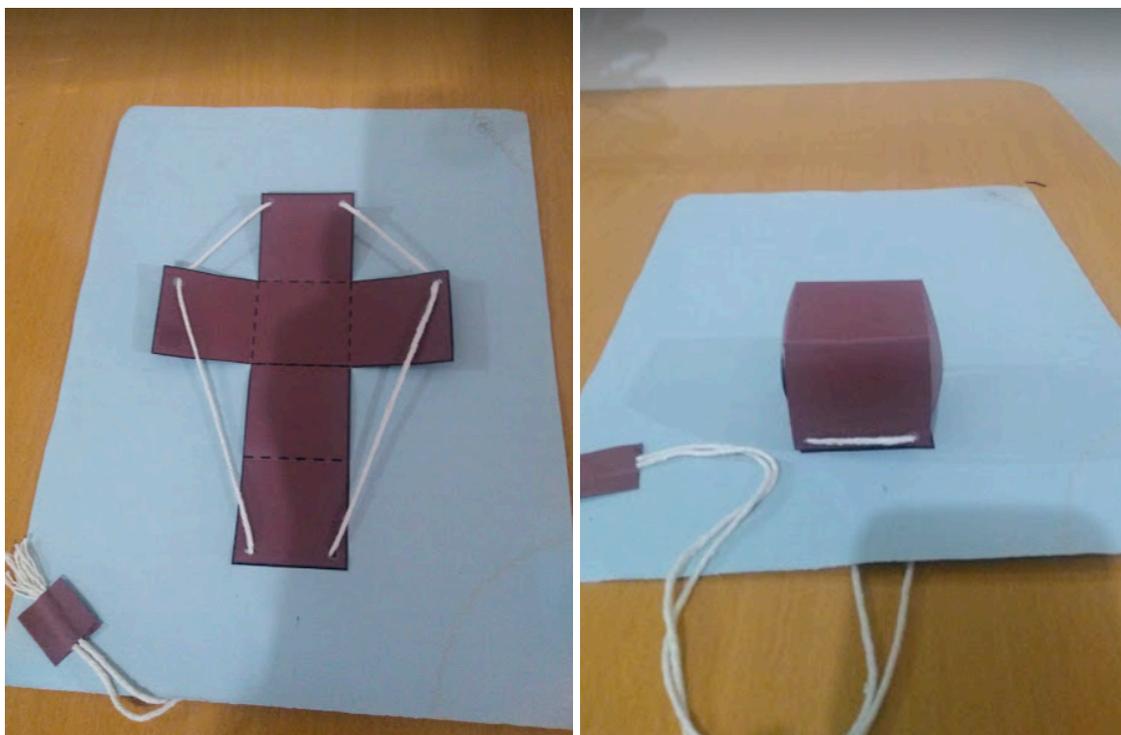


Fonte: Produção autoral, 2023

No próximo momento de aula, propôs-se a construção das planificações previamente observadas com o auxílio de barbante e papel colorido. Para esclarecer melhor a atividade, a professora demonstrou a construção de um cubo como exemplo (Figura 8), deixando os

estudantes livres para escolher uma planificação do cubo e tentar montá-lo perfurando o papel com o barbante, de modo que, ao puxá-lo, o cubo fosse montado.

Figura 8: Planificação e solidificação do cubo “5”.



Fonte: Produção autoral, 2023

Entretanto, a maioria dos estudantes preferiu reproduzir exatamente o que a professora-pesquisadora havia mostrado, apenas copiando o material apresentado. Para resolver essa situação, estabeleceu-se a regra de que ninguém poderia escolher a planificação 5, mas as demais estavam disponíveis para serem confeccionadas.

Como resultado, dos 17 estudantes presentes na aula, 12 optaram por fazer a planificação 1, uma vez que ela se assemelhava mais com o exemplo demonstrado pela professora. Os outros 5 estudantes escolheram diferentes planificações, as quais serão exploradas no Capítulo 5 deste trabalho.

No desfecho da aula, todas as construções, tanto as que foram concluídas com sucesso como aquelas que permaneceram incompletas, foram cuidadosamente recolhidas pela professora para fins de posterior análise. Essa coleta representou um importante passo no

processo de acompanhamento do progresso dos alunos na compreensão das planificações e na aplicação prática dos conceitos discutidos em sala de aula.

4.4 Segundo Encontro

No segundo encontro com a turma, a dinâmica proposta teve como principal objetivo aprofundar os conceitos previamente abordados, incentivando os alunos a aplicarem o que tinham aprendido. Isso se deu por meio da exploração das construções realizadas pelos estudantes e da ampliação da discussão sobre o processo de planificação, usando seis questões provenientes de diferentes fontes, como o Concurso Canguru de Matemática, a OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) e o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio).

As atividades ficaram dispostas na mesa da professora de modo que cada estudante pegava uma atividade, resolvia-a, devolvia e pegava a próxima. Dessa forma, verificou-se a movimentação dos estudantes em sala de aula e também a sua liberdade de poder conversar com outros colegas como haviam resolvido as atividades, e não somente com aqueles que estavam ao seu lado.

Ademais, considerando que a maioria dos alunos optou por uma mesma abordagem de planificação no primeiro encontro, foram disponibilizadas duas planificações para cada aluno, com a finalidade de auxiliá-los na realização das atividades. Eles tiveram a liberdade de recortá-las e desenhá-las conforme necessário, o que estimulou a criatividade e a compreensão dos conceitos abordados.

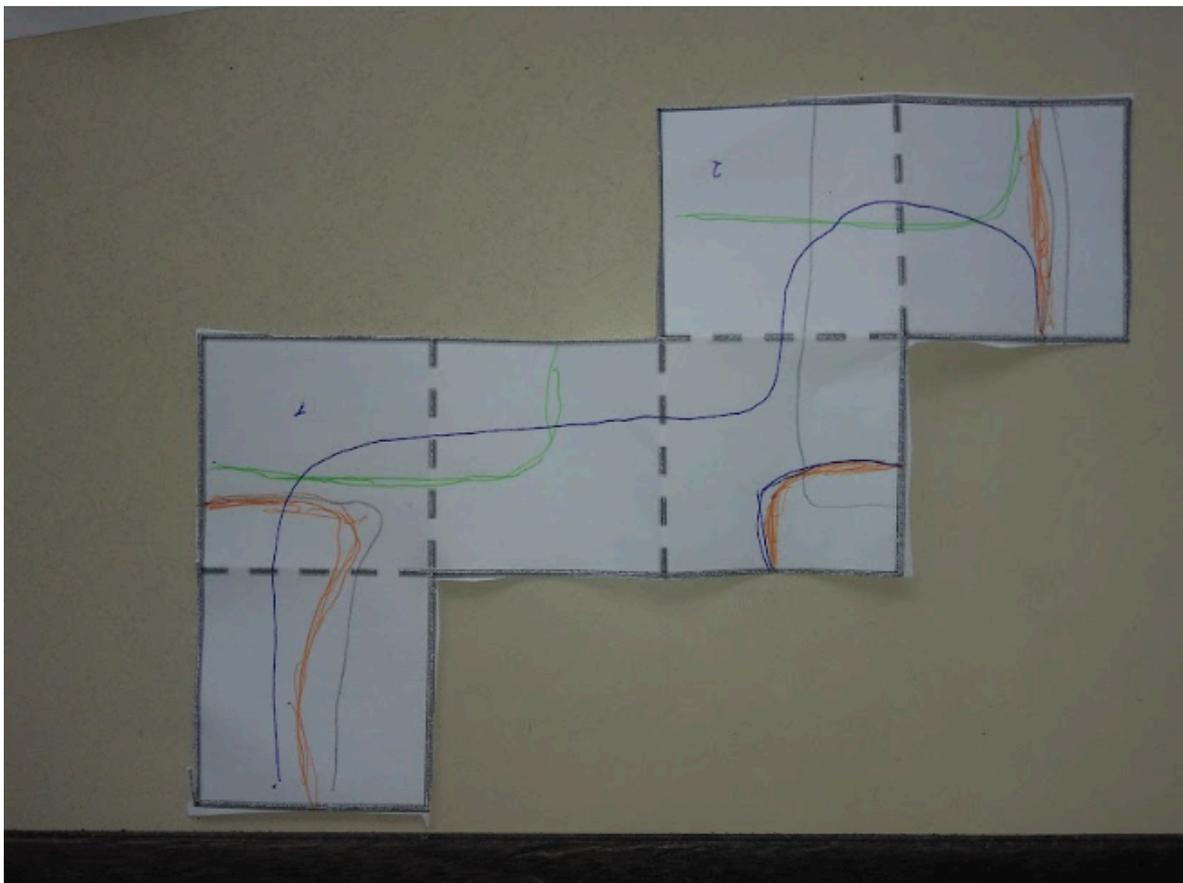
O encontro em questão foi planejado para durar 100 minutos, correspondendo a dois períodos de aula. No entanto, um desafio surgiu quando apenas 10 estudantes compareceram no primeiro período, enquanto os outros 10 chegaram no início do segundo período, resultando em uma diferença entre as abordagens adotadas nas atividades.

No que se refere às atividades específicas, nas questões 1 e 3, os estudantes demonstraram facilidade, uma vez que se tratavam de planificações mais familiares e as questões tinham pouca diferença entre si.

Porém, a atividade 2, referente a linha fechada na superfície de uma caixa retangular de papelão, revelou-se um desafio, levando a diversas discussões entre os estudantes na tentativa de resolver o problema. Posteriormente, em conjunto com a professora, os alunos desenvolveram o desenho e o recorte da planificação, usando canetas coloridas para destacar e compreender quais linhas estavam "abertas" ou "fechadas". Na Figura 9 observa-se o desenho realizado, dessa forma, desenhava-se a alternativa e fechava-se o cubo para verificar se a linha era contínua. Inicialmente, as principais suspeitas de alternativa correta dos estudantes eram a letra A e D, uma vez que “ não tem muito desenho” conforme o estudante Felipe, referindo que os traçados ocupavam menos faces que as demais alternativas.

A caneta de cor verde foi utilizada para representar a alternativa (A), a caneta de cor cinza para representar a alternativa (C), a caneta de cor laranja para representar a alternativa (D), a caneta de cor azul para representar a alternativa (E) e a alternativa (B) não foi representada no desenho.

Figura 9: Desenvolvimento da Atividade 2.

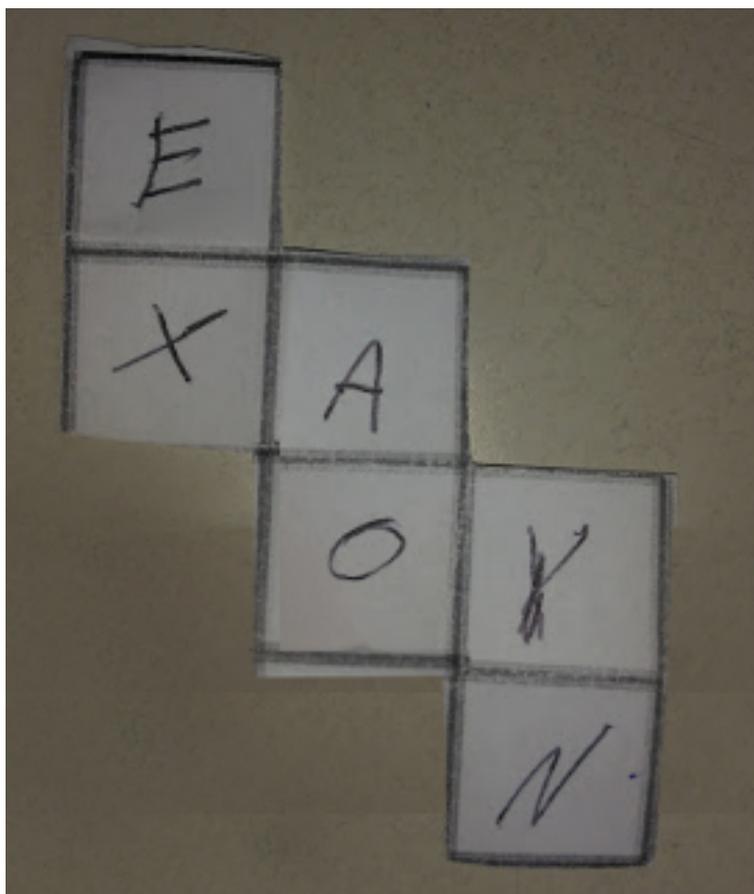


Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Na atividade 4, referente às letras A,O, Y, X, N e E nas faces do cubo, o principal palpite do mesmo grupo de estudantes mencionados anteriormente era a alternativa E, no entanto, em conjunto com a professora, buscaram desenhar a localização das letras no cubo fechado e depois abriram a planificação de modo a esclarecer a alternativa correta. Dessa forma, a professora questionava a localização da letra e os estudantes escreveram no quadrado que julgavam ser o correspondente.

- Quem [qual letra] vamos escrever bem em cima? - professora-pesquisadora.
- o “A”.
- Tá, pode ser. Quem está embaixo do A? - professora-pesquisadora.
- o “O”.
- então vamos escrever ali o “O”. Agora quem está do lado do “O”? - professora-pesquisadora.
- o “Y”
- então vamos escrever ali o “Y”. - professora-pesquisadora.
- Quem está do outro lado do “O”? - professora-pesquisadora.
- o “A”.
- não... - professora-pesquisadora.
- é o “X”
- É o “X” ou o “N”? - professora-pesquisadora.
- é o “X” porque ele está aparecendo aqui [aluno aponta para o desenho da questão]
- Agora quem está do lado do “N”? - professora-pesquisadora.
- o “N” está lá embaixo, porque ele faz divisa com o “O” e com o “X”.

Depois escreveu-se a letra “E” no quadrado restante e observou-se a letra oposta.

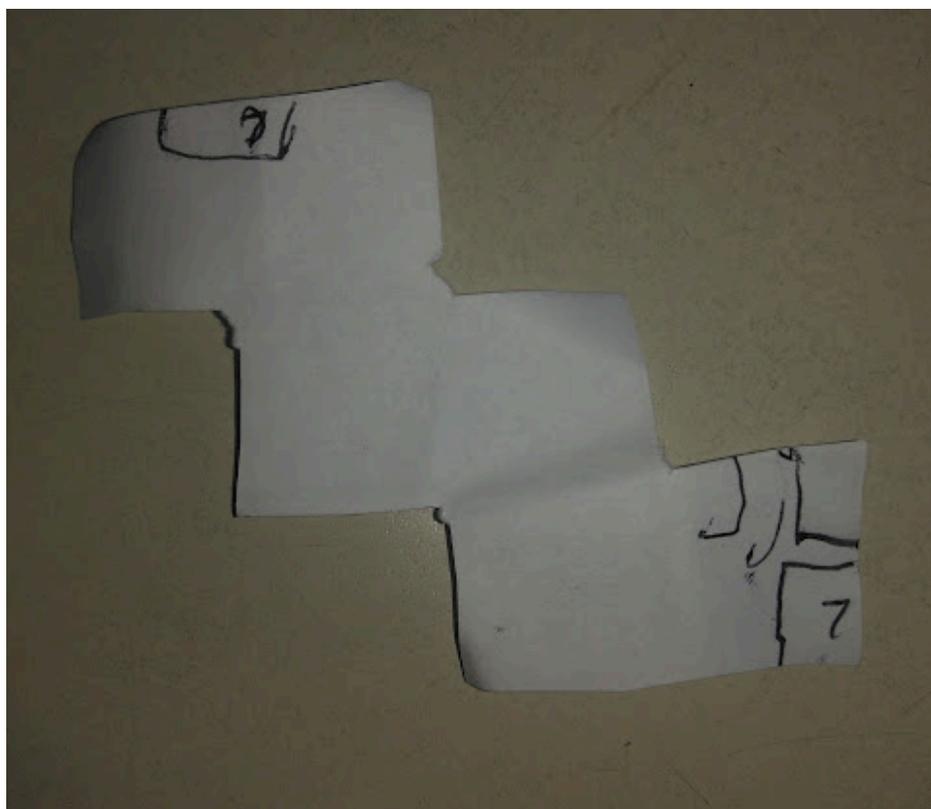
Figura 10: Desenvolvimento da Atividade 4.

Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Já na atividade 5, referente às faces opostas de um dado que somam o valor sete, se identificou que alguns estudantes talvez não soubessem o significado da palavra oposto, ou podem não ter levado em consideração os três conjuntos de faces opostas do cubo. Embora essa terminologia já tivesse sido introduzida em uma questão anterior, muitos estudantes ainda enfrentaram dificuldades em visualizar quais eram as duplas de faces opostas. É notável ressaltar que, nesse contexto, alguns alunos limitaram sua interpretação e consideraram apenas os quadrados dispostos nas posições superiores e inferiores da atividade para calcular seus valores. Possivelmente porque a conceituação de "faces opostas" ainda não estava clara para alguns estudantes, mesmo após a exposição inicial ao conceito. Essa observação destaca a necessidade de revisar e reforçar o entendimento de termos e conceitos fundamentais, a fim de evitar mal-entendidos que possam afetar a resolução de problemas subsequentes.

Na atividade 6, a qual tangia a planificação de um cubo com três regiões sombreadas, uma abordagem interessante foi adotada por alguns estudantes, que optaram por realizar as planificações das opções disponíveis e, em seguida, verificar qual delas se ajustava melhor ao desenho proposto na atividade. Esse método de tentativa e erro demonstra uma abordagem prática para a resolução do problema, na qual os alunos exploram fisicamente as possíveis soluções antes de tomar uma decisão final. Embora essa estratégia possa ser vista como uma tentativa de otimizar o processo de resolução, também sugere a necessidade de uma compreensão mais sólida dos conceitos subjacentes à planificação e à geometria tridimensional.

Figura 11: Desenvolvimento da Atividade 6.



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

5. ANÁLISE DE DADOS

No decorrer deste capítulo, concentra-se a atenção nas produções dos estudantes, bem como nas planificações que eles desenvolveram, permitindo destacar não apenas os resultados finais, mas também os processos subjacentes. Durante esse processo, torna-se evidente a importância de ressaltar as reflexões, raciocínios e os diversos desafios que os alunos enfrentaram ao longo de suas jornadas de aprendizado.

O Subcapítulo 5.1, intitulado "Primeiras Noções Geométricas", assume um papel de aprofundar a reflexão sobre as bases iniciais de geometria que os estudantes adquiriram. Neste subcapítulo, explora-se o uso da régua como uma ferramenta essencial na construção de figuras geométricas, ao mesmo tempo em que analisa-se as planificações discutidas em sala de aula. Adicionalmente, aborda-se conceitos fundamentais da geometria, como a compreensão de vértices, faces, lados, arestas, bem como o significado conceitual de figuras como o cubo e o quadrado.

No Subcapítulo 5.2, denominado "Planificações", direciona-se a atenção para as construções concretas realizadas pelos estudantes. Aqui, analisa-se o processo de criação de planificações, considerando aspectos como a precisão na medição e a habilidade na representação gráfica das formas geométricas. Isso nos permite avaliar o grau de compreensão dos conceitos abordados no Subcapítulo 5.1 e identificar áreas em que os alunos podem aprimorar suas habilidades.

Por fim, no Subcapítulo 5.3, intitulado "Questões de Olimpíadas", exploramos as respostas e justificativas fornecidas pelos estudantes em relação às atividades específicas relacionadas a desafios geométricos mais complexos, inspirados em problemas de competições matemáticas. Ao longo deste capítulo, nosso objetivo principal é fornecer uma análise abrangente das realizações dos estudantes de forma qualitativa, desde as noções básicas até a aplicação avançada, com o intuito de promover o crescimento contínuo de seu conhecimento e habilidades na área da geometria.

5.1 Primeiras Noções Geométricas

Conforme Inhelder e Piaget (1981) em "A representação do espaço na criança".

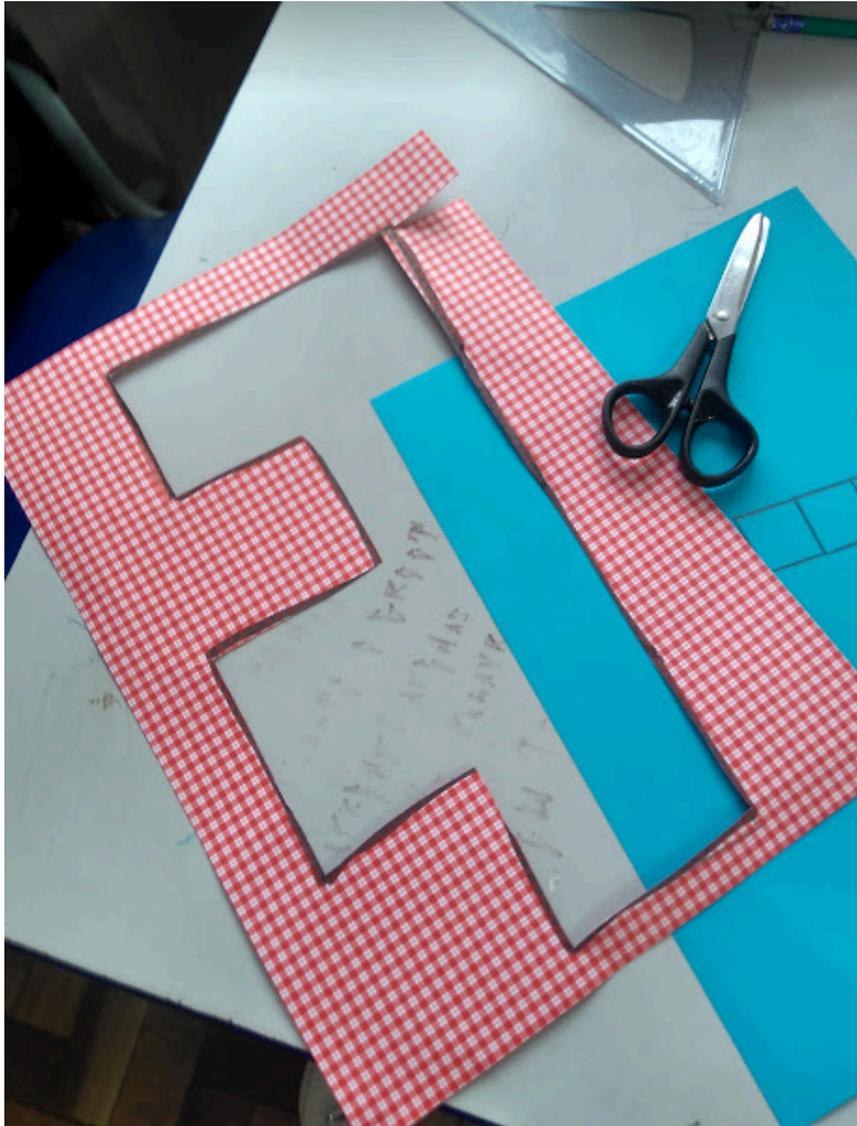
“A intuição de uma figura desenvolvida não é o produto da simples percepção: a percepção das seis faces quadradas de um cubo não é suficiente para engendrar a imagem desses seis lados rebatidos sobre o mesmo plano. O que intervém na imagem do desenvolvimento, além da percepção do volume não desdobrado, é uma ação, portanto uma modificação motriz de percepção, e é mesmo a antecipação representativa de uma ação não executada; portanto a passagem de um estado perceptivo a um estado perceptível, mas ainda não percebido” (INHELDER E PIAGET, 1981, p. 309)

Em outras palavras, conforme os autores, no processo de compreender a estrutura tridimensional, além da percepção do volume sem a sua representação planificada, envolve-se uma ação. Essa ação implica uma modificação ativa na percepção, caracterizada pela antecipação representativa de uma ação que ainda não foi realizada. Trata-se, então, da transição de ver algo como simples observadores para realmente entender e agir, embora essa ação ainda não tenha acontecido.

Diante disso, compreende-se de maneira mais explícita, as respostas dos estudantes quando questionados "o que é um cubo?", os mesmos responderam dando exemplos de figuras como um cubo mágico, um cubo de gelo e os cubos do Minecraft. Além disso, muitos estudantes respondem que um cubo é “um quadrado”, havendo uma assimilação das duas formas geométricas, mas distanciamento da nomenclatura correta dessas.

Outro ponto destacado, foi a dúvida em relação à solidificação de algumas planificações, sendo necessário a tentativa do desenho e recorte com o intuito de verificar se era válido ou não. Abaixo segue o desenho do estudante Rafael, na tentativa de validar uma planificação do cubo.

Figura 12: Tentativa de Planificação do Cubo.



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

No desenho, é evidente a presença de desafios relacionados à precisão das proporções dos quadrados desenhados e à destreza na utilização da régua para traçar linhas retas. De acordo com Inhelder e Piaget (1981) na seção A semelhança dos retângulos, no estágio III, a criança começa as tentativas espontâneas de medição, geralmente por volta dos 6-8 anos. Contudo, devido às dificuldades específicas relacionadas à proporcionalidade, a avaliação perceptiva, neste estágio, antecipa a habilidade de desenho e parece direcioná-la ou, pelo menos, servir como uma base mais sólida para esse processo.

Antes de explorar os subcapítulos subsequentes, que abordam as Planificações e as Questões de Olimpíadas de Matemática e ENEM, retoma-se a perspectiva de Juan Delval (2001). Conforme exposto, o autor destaca uma considerável dificuldade na aplicação do Método Clínico, identificando como um dos principais equívocos a sugestão direta de respostas aos sujeitos.

No entanto, durante a pesquisa se fez presente a dualidade entre pesquisadora e professora. Isto é, ao mesmo tempo que se buscava respostas espontâneas dos estudantes sentia-se, como professora, a necessidade de ensinar corretamente os conteúdos e intervir quando detectado algum equívoco, ao mesmo tempo que como pesquisadora buscava-se refletir sobre as afirmações e verificar em qual conclusão os alunos chegariam.

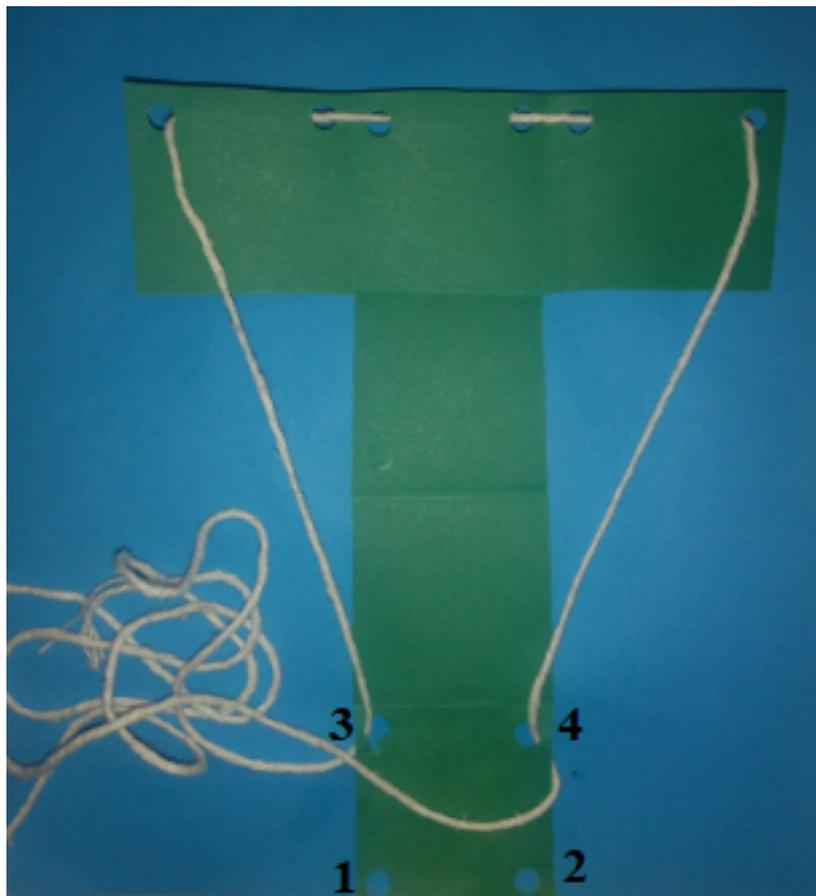
Tal fato, possivelmente, se deve ao trabalhar com conteúdo novo para a turma, havendo interações que direcionaram os raciocínios seguidos. Apesar dos esforços para minimizar intervenções nas respostas dos estudantes, inevitáveis interações surgiram em conjunto com uma certa dependência dos alunos, possivelmente motivada pelo desejo de aprovação do docente, influenciando algumas construções e respostas.

5.2 Planificações

Conforme mencionado anteriormente, dentre os 11 estudantes, 7 escolheram seguir a planificação 1, visto que ela se assemelhava mais ao exemplo apresentado pela professora. No entanto, a turma enfrentou algumas limitações no processo. O papel utilizado mostrou-se frágil, correndo o risco de rasgar ao ser perfurado muito próximo da borda. Ao mesmo tempo, devido sua gramatura ser 120g/m^2 , sua rigidez exigia dobrar nas arestas antes de fazer os furos para passar o barbante, apesar de, ao mesmo tempo, sua flexibilidade não permitir a união perfeita entre os vértices e as arestas.

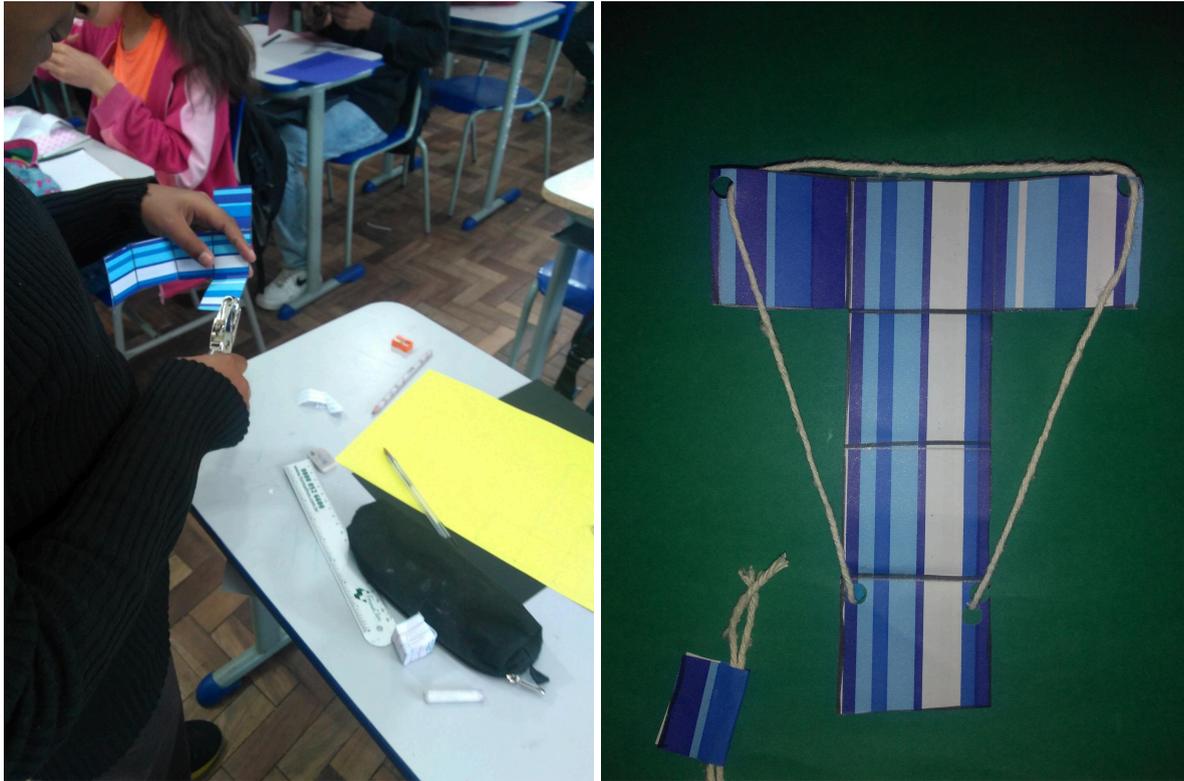
Os estudantes que escolheram a Planificação 1 enfrentaram desafios específicos. Ao perfurar e passar o barbante próximo a vértices não correspondentes, houve um travamento do sólido quando o barbante era puxado. Esse fenômeno pode ser observado na planificação feita por André, Figura 13, que inicialmente perfurou os pontos "1" e "2". Posteriormente, percebeu que o resultado não condizia com o esperado. Diante disso, optou por realizar novos furos e reposicionar o barbante para obter o resultado desejado.

Figura 13: Planificação do cubo “1” confeccionada por André.



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Abaixo, na Figura 14 segue o processo de perfuração da planificação, em que é possível verificar que um dos furos teve que ser refeito pois o primeiro foi realizado perto da borda do papel e rasgou. No entanto, o estudante Marcos conseguiu notar os vértices que se encontram, perfurando somente nos locais necessários.

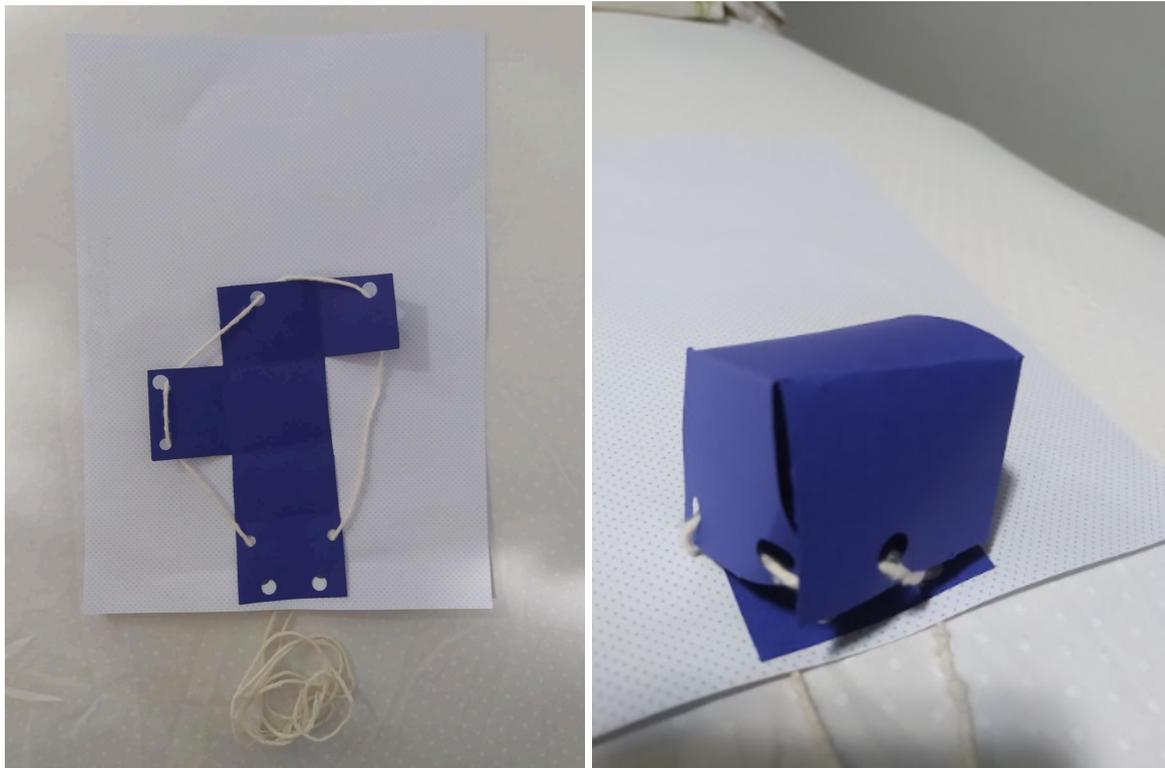
Figura 14: Processo de Perfuração.

Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Dos 5 estudantes que escolheram diferentes planificações, somente um foi capaz de completá-las dentro do prazo estabelecido para a aula. Essas planificações correspondem às Planificações “2”, “3”, “4”, “9” numeradas no Planejamento e a Figura 12, que não resulta em um cubo completo.

Na Figura 15, examina-se a planificação “2” criada por Floriano. Chama a atenção o fato de uma das perfurações ter sido feita próxima ao ponto médio de dois vértices, ao invés de ser próxima a um vértice específico. Isso sugere uma possível tentativa de representar o encontro das faces em vez dos vértices individuais. Floriano enfrentou um desafio semelhante ao de André, mostrando dois furos que não foram utilizados inicialmente, mas que mais tarde foram corrigidos. Esses padrões de perfuração demonstram a tentativa de compreender a estrutura tridimensional, porém, com ajustes para atingir o resultado desejado.

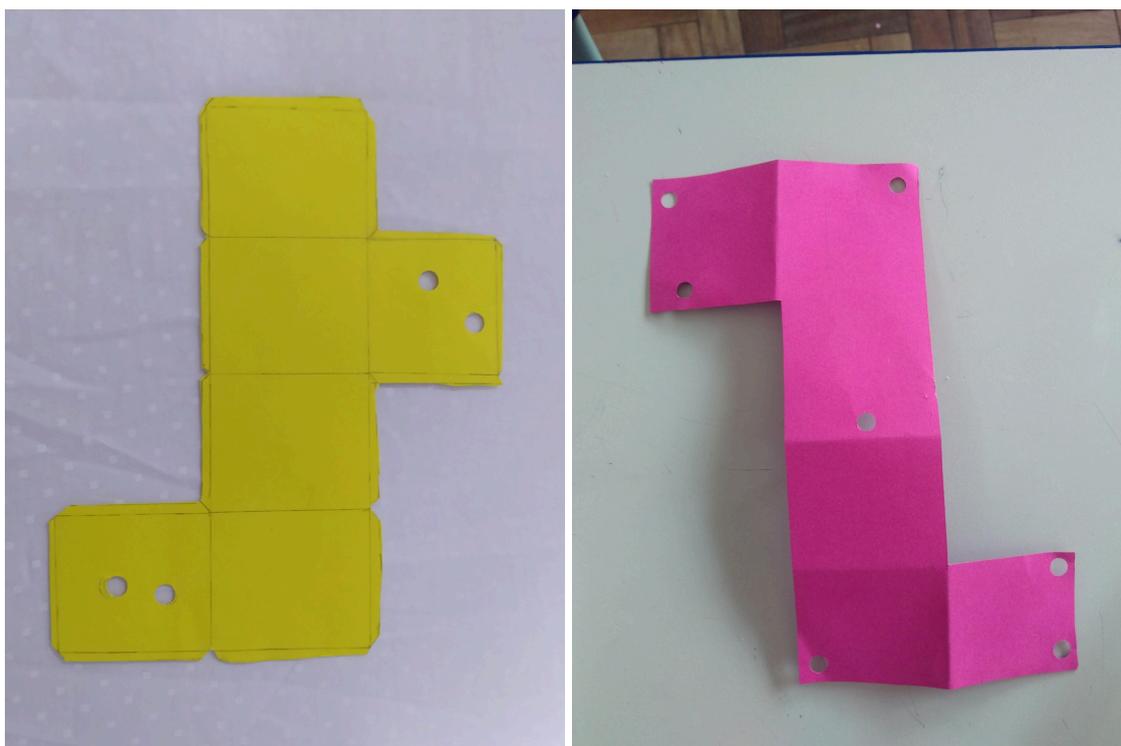
Figura 15: Planificação do cubo “2” confeccionada por Floriano.



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

O mesmo pode ser observado nas Planificações abaixo, nas quais os estudantes Matheus e Felipe, respectivamente, optaram por realizar alguns furos mais distantes dos vértices, Figura 16. Além disso, na construção de Matheus, à esquerda, é possível notar que desenhou e recortou propositalmente uma borda, pois conforme o relato do mesmo: inspirou nas planificações usuais do cubo na qual há essa borda para facilitar sua colagem e elasticidade do cubo.

Figura 16: Planificações dos cubos “3” e “4” dos Estudantes.



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Já o discente Tiago, ao elaborar a Planificação "9", escolheu criar um nó em um dos vértices para garantir a continuidade do barbante, Figura 17. Além disso, é possível observar perfurações nos pontos médios de outros dois vértices. Por fim, é interessante notar que muitos estudantes, como Tiago, poderiam ter desenhado suas planificações um pouco maiores, a fim de facilitar o processo de perfuração e reduzir o risco de rasgar o papel.

Figura 17: Planificação do cubo “9” confeccionada por Tiago.



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Em síntese, a atividade de planificação de figuras tridimensionais apresentou desafios aos alunos, evidenciando limitações no material utilizado, como a fragilidade do papel e sua rigidez. Além disso, como haviam quatro perfuradores disponíveis em sala de aula, os estudantes precisaram compartilhar o material e constantemente circular na sala de aula, proporcionando uma maior interação assim como a paciência de aguardar o colega utilizar o material, e a inspiração nas planificações uns dos outros.

Dessa forma, a atividade não apenas desafiou os estudantes na manipulação do material, mas também na compreensão e transposição de elementos tridimensionais para o plano, ressaltando a complexidade inerente à representação visual de figuras espaciais em um espaço bidimensional.

Assim, retomando Inhelder e Piaget (1981)

“é precisamente desse estado perceptível que os sujeitos dos níveis III B e IV têm a intuição, isto é, a representação figurada, ao passo que lhe fala totalmente no início dessa evolução, até o nível II A, inclusive. [...] Entre esse nível inicial e o sucesso

da antecipação intervêm uma série de processos que explica a passagem da simples intuição perceptiva do início à representação dos estados perceptíveis futuros e essa passagem, que implica, entre outras, a da ação simples às operações coordenadas entre si, é ao mesmo tempo reveladora da natureza da intuição figurada e da intuição das operações projetivas em geral” (INHELDER E PIAGET, 1981, p.309).

Isto é, entre o começo do estágio II e o alcance bem-sucedido da previsão, há vários processos que explicam a transição da simples percepção inicial para a representação dos futuros estados perceptíveis. Essa transição implica uma mudança da ação simples para a coordenação de diferentes operações, revelando ao mesmo tempo a essência das representações mentais e da percepção de como realizar operações planejadas de maneira geral.

5.3 Questões de Olimpíadas de Matemática e ENEM

Como anteriormente mencionado, durante o segundo encontro com a turma, a dinâmica proposta teve como foco principal aprofundar a compreensão de figuras geométricas, progredindo da segunda para a terceira dimensão. Isso foi realizado por meio de seis questões oriundas de diversas fontes, como o Concurso Canguru de Matemática, a OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) e o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio).

As atividades foram dispostas na mesa da professora, permitindo que cada estudante pegasse uma delas, a resolvesse e a devolvesse, em seguida, para pegar a próxima. Esse método possibilitou observar a interação dos estudantes na sala de aula, bem como sua liberdade para discutir com outros colegas como resolveram as atividades, não se limitando apenas aos que estavam ao seu lado.

Assim que a turma se mobilizou para realizar as atividades, enfrentou-se o primeiro desafio: a escrita da justificativa para suas respostas. Isso pode ter ocorrido devido ao fato de as questões serem de múltipla escolha, um formato com o qual não estavam acostumados. Além disso, possivelmente não estavam habituados a justificar suas respostas em Matemática por escrito, em vez de apenas realizarem cálculos. É relevante destacar que somente uma questão exigia cálculos matemáticos, enquanto as demais enfatizavam principalmente a visualização geométrica e o raciocínio lógico.

Além disso, é importante salientar que o foco da nossa análise recai sobre a compreensão e aplicação do raciocínio lógico-matemático pelos estudantes, e não sobre a correção ortográfica ou eventuais equívocos relacionados à grafia das palavras. O propósito principal é compreender a capacidade dos discentes de raciocinar matematicamente, identificar padrões, aplicar conceitos geométricos e deduzir soluções, independentemente de possíveis erros ortográficos que possam ser encontrados em suas explicações ou justificativas.

Abaixo, na Tabela 2 construída no aplicativo do Excel, mostra-se as alternativas escolhidas pela turma. As linhas representam as alternativas (de A até E), enquanto as colunas representam as atividades (de 1 até 6). Na última linha, há o total de respostas obtidas em cada atividade, ou seja, o número de estudantes que entregaram suas resoluções.

Tabela 2: Alternativas escolhidas pelos estudantes.

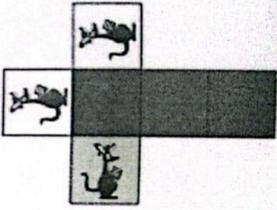
	Atividade 1	Atividade 2	Atividade 3	Atividade 4	Atividade 5	Atividade 6
ALTERNATIVA A	0	4	1	7	6	2
ALTERNATIVA B	17	0	1	0	0	2
ALTERNATIVA C	0	8	1	10	0	4
ALTERNATIVA D	3	0	1	0	0	8
ALTERNATIVA E	0	4	14	0	9	0
TOTAL DE RESPOSTAS	20	16	18	17	17	16

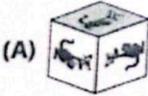
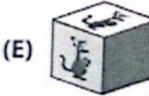
Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Em ordem crescente da realização das atividades, observa-se que na Atividade 1, na qual 17 estudantes escolheram a Alternativa B e somente 3 discentes escolheram a Alternativa D. Os estudantes que optaram pela alternativa “D” justificaram sua resposta com “é a que fecha”, por isso trazemos a justificativa do estudante Felipe, o qual inicialmente havia marcado a letra D, mas depois conclui em conjunto com os colegas que a alternativa correta era a letra B.

Figura 18: Resolução apresentada pelo aluno Felipe para a Atividade 1.

Atividade 1: Rosalinda tem a figura de papel ao lado, que ela vai dobrar para formar um cubo. Qual dos seguintes cubos ela irá obter?



(A)  (C)  (E) 

~~(B)~~  ~~(D)~~ 

Justificativa da resposta:

Porque os cangurus estão na posição certa e porque o preto está em cima que é aonde o preto vai ficar

Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

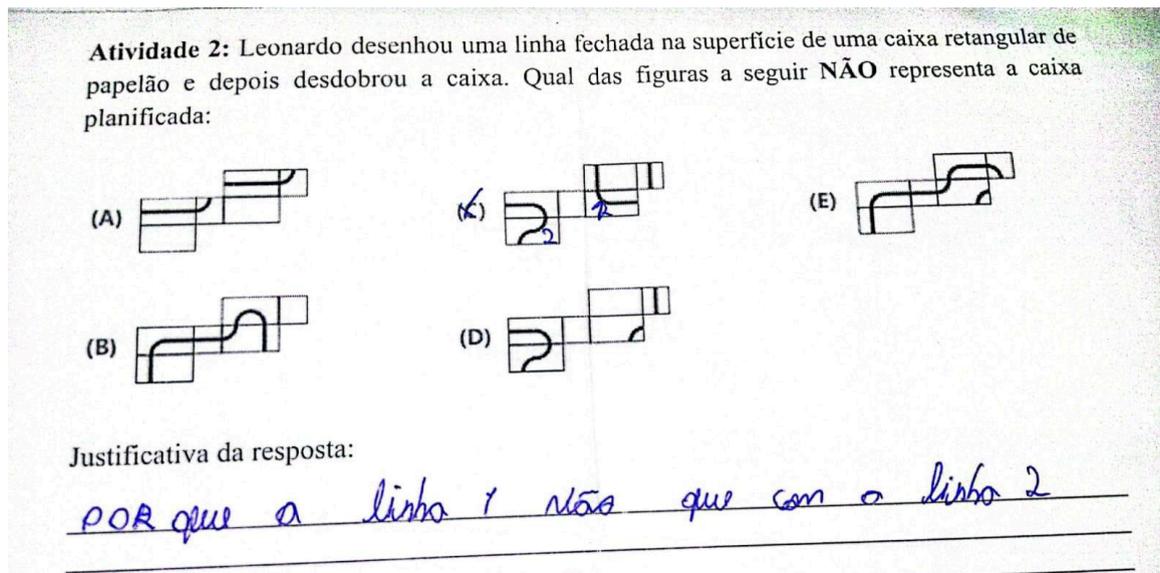
Em sua justificativa, o estudante escreve que “porque os cangurus estão na posição certa e porque o preto está em cima que é ‘aonde’ o preto vai ficar”. A partir disso, podemos supor que o estudante utilizou a face da cor preta como ponto de vista inicial e depois refletiu sobre as posições dos demais cangurus ao fechar o cubo. O que também pode ter ocorrido com os estudantes que escolheram a alternativa B, no entanto é possível que estes somente analisaram a face disposta mais à esquerda na planificação.

Assim conforme Inhelder e Piaget (1981), com início no estágio II B e desenvolvimento no III A, a criança exprime a ação exercida sobre os objetos em um de suas faces, no entanto traduz sobretudo a intuição do caráter plano que apresentarão as superfícies rebatidas, mas não conseguindo ligá-las de modo totalmente coerente. Diferenciando-se do estágio III B e IV, no qual há a organização operatória dos movimentos de rotação constituídos pelo desdobramento das superfícies do objeto euclidiano de forma correta.

Já na Atividade “2”, 8 estudantes marcaram a alternativa “C”, 4 estudantes optaram pela alternativa A, e 4 estudantes pela alternativa “E”. Como exposto anteriormente, na Figura 9, para resolver a questão alguns alunos desenvolveram o desenho e o recorte da

planificação, usando canetas coloridas para destacar e compreender quais linhas estavam "abertas" ou "fechadas". O que pode explicar o porquê da maioria dos estudantes terem respondido corretamente a questão, um exemplo pode ser visualizado na resolução do estudante Matheus (Figura 19), que nomeou as linhas em sua atividade e justificou respondendo que as duas não se encontrariam: “porque a linha 1 não que com a linha 2”.

Figura 19: Resolução apresentada pelo aluno Matheus para a Atividade 2.



Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Na análise das alternativas A e E, é perceptível que uma delas representa o primeiro palpite do estudante Felipe, pois na alternativa A ele mencionou que "não tem muito desenho", sugerindo que os traçados ocupavam menos faces do que as demais opções. Por outro lado, a alternativa E pode ter sido escolhida porque sua linha cobre todas as faces. Os estudantes que optaram pela última alternativa apenas justificaram suas respostas com a afirmação "porque não fecha".

Na terceira atividade, das 18 respostas dadas, 14 estudantes selecionaram a alternativa E, enquanto as demais alternativas foram escolhidas por apenas um estudante cada. Inicialmente, é relevante observar que as questões 1 e 3 se assemelham tanto na configuração do desenho quanto na pergunta formulada. Essa semelhança pode ser um dos motivos pelos quais a maior parte da turma acertou a questão 3. Além disso, a configuração do desenho nas planificações das duas questões era mais familiar para os alunos. Por outro lado, cada face

continha um desenho distinto, o que pode ter facilitado a transição da planificação para a representação em três dimensões. Por fim, nas alternativas incorretas, as figuras geométricas iguais (triângulos, quadrados e círculos) compartilhavam a mesma aresta ao passo que na resposta correta isso não ocorria.

Na Figura 20, tem-se a planificação realizada pelo estudante Matheus com o objetivo de manipular e visualizar as posições de cada face na transformação da segunda dimensão para a terceira dimensão, em conjunto há também sua resolução da questão 3.

Figura 20: Resolução apresentada pelo aluno Matheus para a Atividade 3.

Atividade 3: Janaína recortou a figura abaixo e montou um cubo. Qual das figuras a seguir pode representar o cubo que Janaína montou?

(A) (B) (C) (D) (E)

Justificativa da resposta:
 O cubo 1 e o cubo dois com dois triângulos 3
 ta para baixo e o 1 não ficam em cima

Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Na justificativa o estudante escreve que “O cubo 1 e o cubo dois com dois triângulos. 3 está para baixo e o 1 ficar em cima”, mesmo não sendo muito clara sua resposta podemos supor o que o estudante tentou explicar, que seria: a face denominada 1, correspondente ao desenho do círculo preto, faz fronteira com as faces que tem o desenho de um triângulo. Além disso, a face denominada 3, correspondente ao triângulo preto, ocupará a face frontal, enquanto que a face 1 ocupará a face superior na alternativa escolhida.

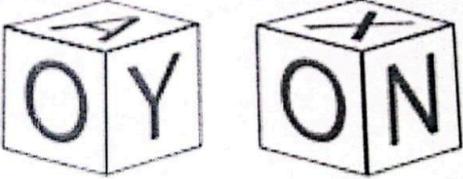
Em seguida na atividade 4, as alternativas mais escolhidas foram A e C, mas como já exposto anteriormente, em conjunto com a professora, alguns estudantes, buscaram desenhar a localização das letras no cubo fechado e depois abriram a planificação de modo a esclarecer a alternativa correta, conforme a Figura 10.

Abaixo, na Figura 21, está a resolução do estudante Lucas, que possivelmente pode ter considerado que a letra E está na face inferior do cubo desenho, uma vez que não é claramente mostrado essa face.

Figura 21: Resolução apresentada pelo aluno Lucas para a Atividade 4.

Atividade 4: A figura mostra duas vistas de um mesmo cubo com as letras A, O, Y, X, N e E em suas faces. Qual face oposta à face de letra E?

(A) O
 (B) Y
 (C) A X
 (D) X
 (E) N



Justificativa da resposta:
 Porque é a oposta

Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Na quinta atividade, 6 estudantes marcaram alternativa A e 9 estudantes marcaram alternativa E. Mesmo que a maioria tenha acertado, notamos que alguns estudantes podem ter interpretado erroneamente o significado da palavra "oposto", cometendo o mesmo equívoco observado na questão 4. Além disso, pode ser que não tenham considerado os três conjuntos de faces opostas do cubo, resultando em dificuldades para visualizar quais eram os pares de faces opostas. É evidente que vários alunos limitaram sua interpretação, focando apenas nos quadrados posicionados no topo e na base da atividade, totalizando sete, deixando de considerar outras combinações de faces opostas.

Um exemplo ilustrativo disso está na Figura 22, na qual o aluno Tiago responde que a alternativa A era a correta "pois $2+5=7$ ". Isso sugere a possibilidade de que tenha considerado apenas um par de faces opostas do cubo.

Figura 22: Resolução apresentada pelo aluno Tiago para a Atividade 5.

Atividade 5: Com as figuras mostradas abaixo podemos montar cinco dados diferentes. Com qual delas podemos montar um dado no qual a soma do número de pontos em quaisquer duas faces opostas é 7?

Justificativa da resposta:
 sim $5+2=7$

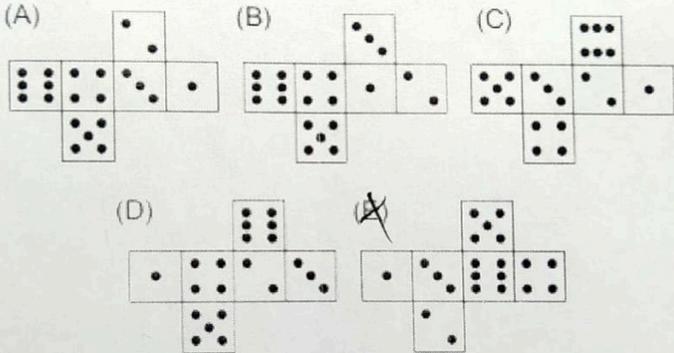
Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Adicionalmente, é plausível que a explicação dada pela professora-pesquisadora não tenha sido clara o suficiente. Ao abordar o conceito de faces opostas, ela optou por usar o exemplo do teto e do chão, em vez de apresentar um raciocínio mais formal e variado, o que poderia ter contribuído para a compreensão dos alunos.

Na Figura 23, é possível verificar a resposta do estudante Felipe, justificando “Porque é o único oposto que dá o mesmo resultado”. Neste caso, o estudante demonstrou a habilidade de visualizar todas as faces opostas da planificação e, com sucesso, concluiu a resposta de forma correta.

Figura 23: Resolução apresentada pelo aluno Felipe para a Atividade 5.

Atividade 5: Com as figuras mostradas abaixo podemos montar cinco dados diferentes. Com qual delas podemos montar um dado no qual a soma do número de pontos em quaisquer duas faces opostas é 7?



Justificativa da resposta:

Porque é o unico oposto que da o mesmo resultado.

Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Na última atividade, 8 alunos optaram pela alternativa D, enquanto 4 selecionaram a alternativa C. E tanto as alternativas A quanto B foram escolhidas por dois estudantes cada. Uma estratégia interessante foi adotada por alguns alunos, que consistiu em elaborar planificações das opções fornecidas. Em seguida, eles analisaram qual das planificações melhor se adequa ao desenho proposto na atividade, conforme evidenciado na Figura 11.

Na Figura 24, a solução proposta pelo aluno Matheus é apresentada, na qual ele identificou as faces do objeto como face "1" e face "2", esclarecendo que ambas compartilham a mesma aresta. Segundo a explicação correta do estudante, a alternativa D representaria o cubo desenhado.

Figura 24: Resolução apresentada pelo aluno Matheus para a Atividade 6.

Atividade 6: Dentre as diversas planificações possíveis para o cubo, uma delas é a que se encontra apresentada na Figura 1.

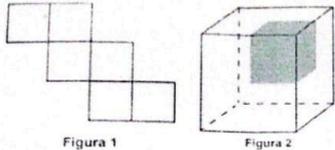
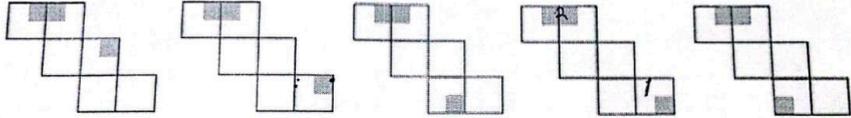


Figura 1 Figura 2

A planificação do cubo da Figura 2, conforme o tipo de planificação apresentada na Figura 1 é



(A) (B) (C) (D) (E)

Justificativa da resposta:

por que 1 e o 2 eles ficam

Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Na Figura 25, tem-se a solução proposta pelo aluno Lucas, na qual mesmo a justificativa sendo “Se for dobrado cubo vai formar o cubo”, pode-se compreender que a discente está se referindo, primeiramente, ao cubo maior e em seguida aos quadrados pintados.

Figura 25: Resolução apresentada pelo aluno Lucas para a Atividade 6.

Atividade 6: Dentre as diversas planificações possíveis para o cubo, uma delas é a que se encontra apresentada na Figura 1.

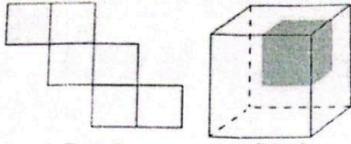
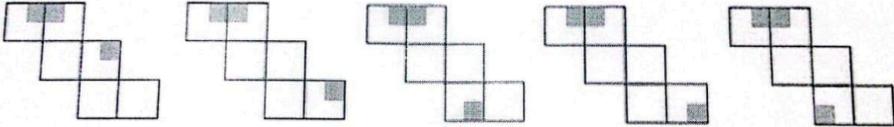


Figura 1 Figura 2

A planificação do cubo da Figura 2, conforme o tipo de planificação apresentada na Figura 1 é



(A) (B) (C) (D) (E)

Justificativa da resposta:

Se for dobrando cubo vai formar o cubo

Fonte: Acervo da pesquisa, 2023.

Diante disso, é pertinente ressaltar a análise dos Microdados do ENEM referentes à questão previamente mencionada. Foram considerados os tipos de provas Amarelo, Azul, Cinza, Rosa e Verde (Libras), tanto na Aplicação Digital quanto na Aplicação Regular. As únicas provas do ENEM 2022 ausentes no levantamento foram a Laranja (Ledor⁴) e as Reaplicações, pois não continham a questão. Em todas as provas analisadas, a alternativa correta foi identificada como a opção D.

Na Tabela 3, apresentada abaixo, é possível observar as escolhas feitas pelos candidatos do ENEM 2022 em relação à referida pergunta, conforme informações disponíveis no site do INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira). As colunas da tabela representam as alternativas possíveis, sendo a sigla D.M - Dupla Marcação e E.M. - Em Branco. As linhas apresentam a quantidade e o percentual de candidatos que selecionaram cada alternativa.

⁴ refere-se a um recurso de acessibilidade destinado a candidatos com deficiência visual ou baixa visão. O ledor é uma pessoa treinada e designada para ler as questões da prova para o participante.

Tabela 3: Microdados ENEM.

ALTERNATIVA	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	D.M	E.M	SOMA
Quantidade	146049	155465	120505	215667	102395	838	1189	742108
%	19,68%	20,95%	16,24%	29,06%	13,80%	0,11%	0,16%	100%

Fonte: Microdados do INEP⁵

Destaca-se que a opção mais frequente foi a alternativa D, escolhida por 29,06% dos candidatos, enquanto a segunda mais assinalada foi a alternativa B, com 20,95%. As alternativas A e C seguiram, com 19,68% e 16,24%, respectivamente. Por fim, a alternativa E foi marcada por 13,80% dos candidatos.

Diante da estreita proximidade nos percentuais de cada alternativa, é pertinente considerar que diversos candidatos possam ter feito escolhas de maneira aleatória, sem uma reflexão substancial sobre a opção marcada. Além disso, é crucial salientar que nosso propósito subsequente não consiste em comparar o desempenho da turma com os candidatos do ENEM, posto que as amostras não são equiparáveis dados o número de estudantes em cada uma. Dessa forma, tem-se o objetivo de explorar e levantar hipóteses sobre os diferentes raciocínios adotados pelos participantes ao enfrentar a questão em análise.

No entanto, evidencia-se que a opção mais assinalada foi a alternativa D, enquanto a menos escolhida foi a alternativa E em ambos os casos. Já ao contrário da turma do 7º ano, os candidatos do ENEM optaram mais pelas alternativas A e B do que pela C. Uma possível explicação para esse fenômeno é que os candidatos perceberam que o quadrado escuro localizado mais abaixo nas imagens não poderia estar adjacente a uma face completamente em branco. Em contraste, os alunos do 7º ano provavelmente identificaram quais faces compartilhariam arestas, embora possam ter cometido equívocos ao interpretar o posicionamento do quadrado escuro.

Durante as atividades, os alunos não apenas mostraram uma capacidade de adaptação diante dos desafios apresentados, mas também exibiram um progresso notável no desenvolvimento do pensamento geométrico espacial. Essas mudanças de abordagem

⁵ Tratamento de dados realizado pela autora da pesquisa a partir de microdados do INEP 2022 (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.). Microdados do Enem 2022. Brasília: Inep, 2023. Disponível em: <<https://www.gov.br/inep/ptbr/aceso-a-informacao/dados-abertos/microdados/enem>>. Acesso em: 10 de nov. de 2023.

revelaram não só uma maior autonomia, mas também um engajamento significativo entre eles, compartilhando e discutindo estratégias para resolver as tarefas propostas.

Uma análise das resoluções dos estudantes destacou que a transformação da segunda dimensão para a terceira dimensão foi mais predominante do que a transformação oposta. Enquanto as questões de 1 a 3 e 5 envolviam diretamente a primeira transformação, nas atividades 4 e 6, os estudantes optaram por essa transformação em detrimento da transformação da terceira para a segunda dimensão, o que os desafiou a visualizar a mudança de perspectiva mais do que reflexões de um objeto sobre uma superfície.

Retomando Inhelder e Piaget (1981) no capítulo “O relacionamento das perspectivas” verifica-se que

“a perspectiva sob a qual ela[criança] percebe o objeto (subestádio II A) [...] mostra-se fixo, de maneira mais restrita ao seu ponto de vista próprio e inapta para imaginar outra perspectiva além da sua. Em contrapartida, [...] no nível em que o sujeito acaba sua construção das perspectivas e das projeções em função do deslocamento de um objeto isolado (nível III B), ele se torna igualmente capaz de reconstruir sem dificuldades as perspectivas correspondentes a outros observadores” (INHELDER E PIAGET, 1981, p. 256)

Dessa forma, por meio das atividades, foi possível perceber o processo de transição do estágio II A, onde apenas um ponto de vista era considerado, para o estágio III B, no qual os estudantes conseguiram reconstruir facilmente perspectivas correspondentes a outros observadores.

No que diz respeito às análises realizadas durante e após os encontros, baseadas no desempenho dos alunos, constata-se que a proposta didática se mostra validada. As hipóteses iniciais sobre o uso de papel e barbante para criar planificação de formas geométricas demonstraram sua legitimidade ao permitir que os alunos explorassem dinamicamente situações geométricas. Isso contribuiu para a formação de representações mentais e para o aprimoramento das habilidades relacionadas ao raciocínio geométrico no espaço. Isso inclui a ampliação da visualização de figuras geométricas, indo da segunda para a terceira dimensão e vice-versa.

6. CONCLUSÕES

Retomando a pergunta norteadora da pesquisa “Qual o potencial da construção de poliedros de linha e papel no desenvolvimento do pensamento geométrico?”, observa-se que os dados coletados e a posterior análise não se limitaram às construções e às respostas finais dos estudantes, mas ao seus raciocínios lógicos e visualizações geométricas bidimensional e tridimensional.

No primeiro encontro, ao refletir e construir sólidos geométricos com linha e papel, explorou-se não apenas a posição e deslocamentos no espaço, mas também as formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais, notadamente no contexto do cubo. Adicionalmente, observou-se a distribuição de alguns quadrados que, ao serem unidos aos seus lados, não formavam um cubo, revelando novas indagações sobre as hipóteses construídas pela turma.

Além disso, dentre os 11 estudantes, 7 escolheram confeccionar a Planificação 1, posto que se assemelhava ao exemplo apresentado pela professora. Essa escolha proporcionou uma análise mais detalhada das dificuldades e facilidades enfrentadas por esse grupo específico.

Por outro lado, os 5 estudantes restantes escolheram diferentes planificações, revelando desafios específicos e estratégias distintas para o fechamento do poliedro. Destacou-se, por exemplo, a utilização da visualização do deslocamento das faces em conjunto com o deslocamento dos vértices como uma abordagem adotada por alguns.

Sobre o material utilizado, observou-se a fragilidade do papel e sua rigidez, por se tratar de uma espessura de 120g/m². Além disso, os estudantes precisaram compartilhar o material e constantemente circular na sala de aula, promovendo uma maior interação assim como, a paciência de aguardar o colega utilizar o material, e a inspiração nas planificações uns dos outros

Já, durante o segundo encontro, a análise das resoluções dos estudantes destacou que a transformação da segunda dimensão para a terceira dimensão foi mais prevalente do que a transformação inversa. Enquanto as questões de 1 a 3 e 5 envolviam diretamente a primeira transformação, nas atividades 4 e 6, os estudantes escolheram predominantemente a transição

da segunda para a terceira dimensão, o que os desafiou a visualizar a mudança de perspectiva mais do que reflexões de um objeto sobre uma superfície.

Por meio das atividades propostas, a turma pôde explorar diversas planificações do cubo, promovendo discussões conjuntas com os colegas para compartilhar seus raciocínios sobre os deslocamentos e deliberar sobre alternativas. Contudo, observou-se que, mesmo nesse ambiente colaborativo, os estudantes ainda enfrentavam desafios ao justificar suas respostas.

Essa reflexão destaca uma continuidade no processo de desenvolvimento da representação do espaço, indicando um aprimoramento ainda em progresso quanto à coordenação de diferentes operações, evidenciando a essência das representações mentais conforme proposto por Inhelder e Piaget (1981).

Já ao aplicar uma adaptação do Método Clínico, conforme discorrido no Capítulo 5, obteve-se “respostas espontâneas” dos estudantes, as quais representam o aspecto mais precioso na entrevista clínica, posto que essas crenças representam as reflexões constantes da criança sobre a realidade ao seu redor, podendo ser de forma consciente ou não.

Outro ponto saliente na pesquisa é a dualidade entre pesquisadora e professora. Apesar dos esforços para minimizar intervenções nas respostas dos estudantes, inevitáveis interações surgiram ao trabalhar com conteúdo novo para a turma. Além disso, notou-se uma certa dependência dos alunos, possivelmente motivada pelo desejo de aprovação da docente, influenciando algumas construções e respostas.

Concluindo, a atividade não apenas desafiou os estudantes na manipulação do material, mas também na compreensão e transposição de elementos tridimensionais para o plano, ressaltando a complexidade inerente à representação visual de figuras espaciais em um espaço bidimensional.

Em suma, a presente pesquisa promoveu uma abordagem prática para o ensino de Geometria Espacial, enfatizando não apenas a manipulação de materiais, mas também a compreensão e a transposição de conceitos tridimensionais para o plano, contribuindo assim para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

Como já mencionado, há diversas tentativas de promover o ensino significativo de Geometria Espacial na sala de aula. Nesse sentido, compreende-se a importância de disponibilizar materiais de baixo custo financeiro aos professores e escolas, visando enriquecer o aprendizado e promover uma compreensão mais significativa do pensamento geométrico.

7. REFERÊNCIAS

BORSOI, C. **GeoGebra 3D no Ensino Médio : uma possibilidade para a aprendizagem da geometria espacial**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre (RS), 2016. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/148179>

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Resumo Técnico: Censo Escolar da Educação Básica 2021**. Brasília, DF: Inep, 2021. Disponível em: https://download.inep.gov.br/institucional/apresentacao_saeb_ideb_2021.pdf

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CASTRO, Rebeca. F. da C. de. **Construção de figuras tridimensionais a partir de representações planas : uma prática com alunos do ensino médio**. Trabalho de conclusão de graduação (Licenciatura em Matemática) Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre (RS) 2017. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/179428>

CONCEIÇÃO, J.; RODRIGUES, M. **Polígonos e poliedros: trabalhar a relação 2D-3D. Educação e Matemática**, n. 156, p. 12–15, 2020. Disponível em: <https://repositorio.ipl.pt/handle/10400.21/15102>

COSTA. Marisa V. **O Diálogo entre a Ciência e o Mundo: Uma agenda para jovens pesquisadores e pesquisadoras**. Seminário de Iniciação Científica. Universidade Federal Fluminense. 2001. Disponível em:

<https://fdocumentos.tips/document/uma-agenda-para-jovens-pesquisadores-marisa-vorraber-costa.html?page=7>

DELVAL, Juan. **Introdução à Prática do Método Clínico: descobrindo o pensamento das crianças**. Fátima Murad. Paidós Ibérica, 2001

FAINGUELERNT, E.K. O ensino de geometria no 1º e 2º graus. **Educação Matemática em Revista**, Florianópolis, n. 4, p. 45-51, 30 dez. 1995.

FREIRE, Paulo; FAUNDEZ, Antonio. **Por uma pedagogia da pergunta**. 5 ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1982.

GRAVINA, Maria Alice. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/2545>

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Microdados do Enem 2022. Brasília: Inep, 2023. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/ptbr/acesso-a-informacao/dados-abertos/microdados/enem>.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências**. Zetetike, Campinas, SP, v. 1, n. 1, 2009. DOI: 10.20396/zet.v1i1.8646822. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646822>

PIAGET, Jean. INHELDER, Barbel. **A representação do espaço na criança** :trad. [de] Bernardina Machado de Albuquerque - Porto Alegre : Artes Médicas, 1993. 507p. : il. ; 23cm. Presses Universitaires de France, Paris, 1981.

SCHNORNBERGER, T. **O uso da pletora de poliedros no ensino de geometria espacial.** Trabalho de conclusão de graduação (Licenciatura em Matemática) Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre (RS), 2014. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/101394>

SOUZA, L. G. DE. **Ensino-aprendizagem de matemática através da construção de materiais didáticos.** Trabalho de conclusão de graduação (Licenciatura em Matemática) Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre (RS), 2011. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/37108>

APÊNDICES I - MODELO CARTA DE APRESENTAÇÃO

Neste apêndice está o modelo da Carta de Anuência, assinada pela Diretora da escola em que a pesquisa foi realizada.



UFRGS
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO GRANDE DO SUL

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL



Instituto de
MATEMÁTICA
E ESTATÍSTICA
UFRGS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Porto Alegre, de de 2023.

Prezada Professora _____, Diretora da Escola _____,

A aluna Luiza Schwambach, atualmente é graduanda regularmente matriculada no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Como parte das exigências do Departamento de Matemática Pura e Aplicada para obtenção do título de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a graduanda está desenvolvendo um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). O TCC produzido deve resultar em material didático de qualidade que possa ser utilizado por outros professores de Matemática. Neste sentido, torna-se extremamente importante realizar experimentos educacionais e, por esta razão, estamos solicitando a sua autorização para que este trabalho possa ser desenvolvido na escola sob sua Direção.

Em caso de manifestação de sua concordância, por favor, registre sua ciência ao final deste documento, o qual está sendo encaminhado em duas vias.

Enquanto pesquisador e professor responsável pela orientação do desenvolvimento do TCC pelo graduando, reitero nosso compromisso ético com os sujeitos dessa pesquisa

colocando-nos à disposição para quaisquer esclarecimentos durante e após a realização da coleta de dados.

Para tanto, deixo à disposição o seguinte telefone de contato: (xx) xxxx xxxx

Agradecemos a sua atenção

Cordialmente,

Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Professor do Departamento de Matemática Pura e Aplicada

APÊNDICES II - MODELO TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Neste apêndice está o modelo do Termo de Assentimento, assinado pelos estudantes participantes da pesquisa realizada.

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

O(a) sr(a) _____ está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar do projeto como uma atividade da disciplina Trabalho de Conclusão de Curso do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS.

A entrevista será conduzida pela estudante Luiza Schwambach sob a responsabilidade do Professor Marcus Vinicius de Azevedo Basso, a quem é possível contatar a qualquer momento que julgar necessário, via telefone (xx) xxxx xxxx.

A participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para fins acadêmicos. O objetivo, estritamente acadêmico do estudo, em linha geral, pretende ampliar a construção de figuras geométricas partindo da segunda dimensão para a terceira dimensão com a utilização de linha e papel confeccionando a planificação dessas figuras e seus respectivos sólidos geométricos. Os dados obtidos não serão divulgados, a não ser com prévia autorização e, nesse caso, será preservado o anonimato dos participantes, assegurando assim a privacidade do entrevistado. A colaboração do participante se fará por meio de uma entrevista gravada e transcrita.

Cabe ressaltar que a participação nesta entrevista não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar alguns riscos mínimos como algum constrangimento dos participantes ao precisarem responder a algumas perguntas. Asseguramos que a(o) entrevistada(o) poderá deixar de participar da entrevista a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação e, neste caso, os dados produzidos serão descartados.

A colaboração do(a) participante se iniciará apenas a partir da confirmação de concordância da(o) entrevistada(o).

Assim, _____, declaro, por meio deste termo, que concordo em participar do projeto.

Porto Alegre, ____ de _____ de 2023.

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa:

APÊNDICES III - MODELO TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Neste apêndice está o modelo do Termo de Consentimento Informado, assinado pelos responsáveis dos estudantes participantes da pesquisa realizada.

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, _____, R.G. _____, responsável pelo(a) aluno(a) _____, da turma _____, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada “ Desenvolvimento de Conceitos Geométricos Bidimensionais e Tridimensionais no 7º ano: uma abordagem à luz da teoria piagetiana ”, desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) Luiza Schwambach. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pelo Professor Marcus Vinicius de Azevedo Basso, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone (xx) xxxx xxxx ou e-mail xxxxx@xxxxx.xx.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- ampliar a construção de figuras geométricas partindo da segunda dimensão para a terceira dimensão com a utilização de linha e papel confeccionando a planificação dessas figuras e seus respectivos sólidos geométricos

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será

observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens e gravação de áudio obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos entrevistados ao precisarem responder a algumas perguntas sobre o desenvolvimento de seu trabalho na escola. A fim de amenizar este desconforto será mantido o anonimato das entrevistas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação.

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre as estratégias dos estudantes na construção de figuras geométricas sólidas, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço xx, xxxxxx, xxxxx - xxxxxxxxxxxx, Porto Alegre - RS, xxxxx-xxx / telefone (xx) xxxx xxxx/ e-mail xxxxx.xxxxxxxxxx.xx@xxxxx.xxx

Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av.Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e email etica@propesq.ufrgs.br

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, ____ de _____ de _____.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa: