UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

POTENCIALIDADES E LIMITAÇÕES DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE FRAÇÕES

RAFAEL MENGUER DA LUZ

Porto Alegre
2024

RAFAEL MENGUER DA LUZ

POTENCIALIDADES E LIMITAÇÕES DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE FRAÇÕES, COM BASE NA TEORIA DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.

Trabalho de Conclusão de Curso da Graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática

Orientadora
Prof.ª Dr.ª Marilaine de Fraga Sant'Ana

Porto Alegre
2024

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Potencialidades e Limitações da Metodologia de Resolução de Problemas no Ensino de Frações, apoiado na Teoria de Representação Semiótica.

Rafael Menguer da Luz

Banca examinadora:

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Marilaine de Fraga Sant'Ana
Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS

Prof.ª Dr.ª Luísa Rodriguez Doering
Instituto de Matemática e Estatística da UFRGS

Prof.ª Dr.ª Cristina Cavalli Bertolucci
Faculdade de Educação da UFRGS

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meus pais, por terem proporcionado todas as condições para que eu chegasse até onde estou hoje. A todos os sacrifícios que sei que tiveram de fazer, por mim. Agradeço ao amor da minha vida, Michelle, por ter me apoiado nessa jornada. Sem ela, eu também não teria chegado tão longe. Obrigado por me aturar! Agradeço a minha sogra, que escutou longas “palestrinhas” sobre como a teoria de registros semióticos era ótima! Acima de tudo, agradeço a Deus por ter me dado uma família tão incrível como esta que tenho.

Agradeço aos diversos grupos de estudos que se formaram ao longo dos anos de estudos, tudo começou com o G. A. San Hefez, e tanto aconteceu até aqui! Agradeço ao melhor grupo de Álgebra II que existe, o “Socorro Deus”.

Agradeço ao método D. S., que me permitiu escrever este trabalho, afinal “Amarelo é cor de batata”.

Agradeço aos meus amigos que me ajudaram a chegar até aqui. Com um lugar especial para meu trio Felipe e Gustavo, e a peste que eu chamo de vizinha, Diovana. Agradeço por todas as noites em claro, escutando Metallica para conseguir fazer os trabalhos da faculdade. Agradeço a minha amiga Catharina que ainda dá ouvidos às minhas ideias mirabolantes para a produção de artigos.

Por fim, agradeço à minha orientadora, Profª Drª Marilaine, por ter me ajudado a desenvolver este trabalho e me ensinado como aplicar a Resolução de Problemas na prática! Também agradeço às professoras Luísa Doering e Cristina Bertolucci, por terem aceitado fazer parte da banca examinadora, testemunhando o encerramento deste ciclo da minha vida.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo entender as potencialidades e limitações da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação em Matemática através da Resolução de Problemas, apoiado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, no ensino de frações para uma turma de sexto ano. Os dados produzidos para a pesquisa foram coletados em uma turma de sexto ano de escola pública, da rede estadual do município de Porto Alegre, no estado do Rio Grande do Sul. Sendo caracterizada como uma pesquisa qualitativa, e nos apoiando nos trabalhos de (Duval, 2009), (Onuchic *et al.*, 2021) e (Polya, 2006), foi analisado como a metodologia adotada permite um ensino em que o aluno faz parte do processo de construção do conhecimento, as ferramentas para uma avaliação contínua que são possíveis ao professor, como a não-congruência de registros semióticos dificulta a conversão por parte dos estudantes durante a resolução de problemas, as dificuldades de implementação desta metodologia e aprendizados podem ser desenvolvidos com um estudo a partir da resolução de problemas geradores. Em especial analisamos como , as ferramentas para uma avaliação contínua que são possíveis ao professor, como a não-congruência de registros semióticos dificulta a conversão por parte dos estudantes durante a resolução de problemas, as dificuldades de implementação desta metodologia e aprendizados podem ser desenvolvidos com um estudo a partir da resolução de problemas geradores

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Registros de Representação Semiótica. Ensino de Frações.

ABSTRACT

The present work aims to understand the potentialities and limitations of the Teaching-Learning-Assessment Methodology in Mathematics through Problem Solving, based on Raymond Duval's Theory of Registers of Semiotic Representation in teaching fractions to a sixth-grade class. The data for the research were collected in a sixth-grade class in a public school in the state network of Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brazil. Characterized as qualitative research and drawing on the works of (Duval, 2009), (Onuchic *et al.*, 2021), and (Polya, 2006), the study analyzed how the adopted methodology allows for teaching in which the student is involved in the knowledge construction process, the tools for continuous assessment available to the teacher, how the incongruence of semiotic registers hinders student conversion during problem-solving, the difficulties of implementing this methodology, and what learnings can be developed through a study based on the resolution of generative problems. We particularly analyze how tools for ongoing assessment available to the teacher, such as the incongruence of semiotic registers, hinder students' conversion during problem-solving, the challenges of implementing this methodology, and learnings that can be developed through a study based on the resolution of generator problems.

Key-words: Problem Solving. Registers of Semiotic Representation. Teaching of Fractions.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. Introdução

Logo no meu segundo semestre ingressei em uma bolsa de estudos para ser professor no Programa de Iniciação Científica (PIC), da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Dentro do programa era utilizada puramente a resolução de problemas nos encontros. Ao longo da primeira edição que participei pude perceber os resultados da metodologia, questões que antes eram difíceis haviam se tornado simples. Com base nisso comecei a aprofundar meus estudos na Resolução de Problemas conhecendo inicialmente os trabalhos de George Polya (Polya, 2006) e posteriormente, por meio da disciplina de Combinatória I ministrada por minha orientadora, conheci o Grupo de Trabalhos e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP), o qual desenvolve suas atividades no Departamento de Educação Matemática da UNESP - Rio Claro, coordenado pela professora Lourdes de la Rosa Onuchic (ONUCHIC, *et. al.*, 2021). Não demorou muito para que eu decidisse pesquisar sobre tal metodologia, indo atrás de artigos, livros, TCCs e cursos de extensão. Além da experiência como bolsista, tive oportunidades de ministrar aulas particulares para turmas do 6º ano do ensino fundamental, contemplando o conteúdo de frações. Ao longo desses encontros, foi possível perceber como os exercícios e livros didáticos abordavam esses conceitos, essas experiências contribuíram para a prática docente realizada neste trabalho.

Ao mesmo tempo, nas diversas disciplinas de educação matemática da graduação fui conhecendo os trabalhos de Raymond Duval e sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Após algumas leituras nas disciplinas de Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática III e Educação Matemática e Tecnologia, que traziam relatos práticos da aplicação desta teoria, percebi que já utilizava algumas ideias intuitivas em minhas aulas, me dando motivos empíricos para aprofundar meus conhecimentos sobre o tema. Novamente... não demorou muito para que eu decidisse pesquisar sobre tal metodologia, indo atrás de artigos, livros, TCCs e cursos de extensão.

Sendo assim, a partir das experiências que tive em minha trajetória de graduação, decidi elaborar essa pesquisa que se propõe a analisar uma prática de sala de aula, apoiada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas para ensinar frações, procurando entender quais as suas potencialidades e limitações. Inicialmente são apresentados os objetivos gerais e específicos, já dialogando com o referencial teórico adotado, em seguida é apresentada uma breve justificativa da relevância deste trabalho buscando apresentar ao leitor, brevemente, a importância de pesquisar sobre as teorias escolhidas, juntamente ao conteúdo de frações e como todos esses conceitos se interligam. Após as seções que buscam contextualizar sobre o que se trata a pesquisa, é apresentado uma seção contendo os principais aspectos teóricos utilizados na produção dos dados e da prática que será proposta em sala de aula, além de outra seção que explica os aspectos metodológicos da abordagem de pesquisa escolhida, que é a pesquisa qualitativa. Por fim, são apresentados os 30 problemas trabalhados com os alunos, contendo breves explicações dos objetivos de cada atividade, seguida pela análise dos dados coletados e finalizando com as conclusões a respeito da realização dessa pesquisa.

A partir do que foi exposto na introdução, espero que este trabalho cumpra o papel de explicar os objetivos de pesquisa e quais aspectos teóricos auxiliarão na conclusão dessas metas. Por fim, espero que a leitura fomente a curiosidade na metodologia apresentada para que outros, assim como eu, venham a conhecer quais as potencialidades, e limitações, da metodologia de Resolução de Problemas com apoiado na Teoria de Registros de Representação Semiótica no ensino de matemática.

2. Objetivos

Nesta seção, apresentamos os objetivos geral e específicos da pesquisa.

2.1 Objetivo geral

Nessa pesquisa, pretendemos entender as potencialidades e limitações da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação em Matemática através da Resolução de Problemas, seguindo a perspectiva apresentada em (ONUCHIC *et al.,* 2021), no ensino de frações em uma turma de 6° ano na escola pública, apoiado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval (DUVAL, 2009).

2.2 Objetivos específicos

Queremos saber os possíveis conhecimentos matemáticos que os alunos vão desenvolver, sobre o conceito de frações como parte de um todo, como um quociente e como um operador (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008), bem como as operações de adição e subtração, a partir da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação em Matemática através da Resolução de Problemas quando a prática está ligada a Teoria de Registros de Representação Semiótica. Nessa perspectiva, visa-se entender os processos cognitivos envolvidos na construção do conhecimento matemático (DUVAL, 2017) e quais estratégias docentes são relevantes quando se aplica esta metodologia (ONUCHIC, 2013), frente às adversidades da sala de aula.

Estando de posse do referencial teórico em questão, se faz interessante entender como a elaboração de um plano de aula voltado para a variabilidade de registros de representação semiótica (DUVAL, 2017) possibilita o desenvolvimento de certas habilidades/conceitos referentes ao ensino de frações na escola básica, tomando a Resolução de Problemas como abordagem central (POLYA, 2006, ONUCHIC *et al*., 2021).

3. Justificativa

Os baixos índices de desenvolvimento matemático são tema de preocupação de muitos educadores matemáticos, os referenciais adotados para esta pesquisa citam tais problemas diretamente em seus artigos (ONUCHIC, 2013; DUVAL, 2017) e buscam encontrar maneiras de lidar com tais problemas. No artigo citado, Onuchic faz uma breve análise de documentos educacionais sobre o currículo matemático e traz reflexões sobre como:

> a tecnologia está mudando, a matemática está mudando; portanto, a educação matemática, assim como a percepção da sociedade e o apoio concedido a essa disciplina escolar, precisa mudar para ir ao encontro das necessidades do século XXI (ONUCHIC, 2013, p. 93).

Já Duval (2017) afirma que os problemas de aprendizagem relacionados à matemática são de dois tipos. Globais e locais, ou seja, dificuldades ao longo do currículo (resolver problemas, inabilidade de transferir conceitos aprendidos para outras aplicações, etc.) e problemas rotineiros, relacionados à introdução de novos conceitos.

De fato, a matemática apresenta um grande potencial para desenvolver o raciocínio dos estudantes e cabe, muitas vezes, ao professor fazer o papel de instigador, de modo a permitir um melhor desenvolvimento dos discentes (POLYA, 2006). Em seu livro “A arte de resolver problemas”, George Polya diz:

> um estudante cujo curso inclui Matemática tem, também uma oportunidade única, que ficará evidentemente perdida se ele considerar esta matéria como uma disciplina com que precisa obter tantos créditos e a qual deverá esquecer, o mais rápido possível, assim que passar pelas provas finais. A oportunidade pode ser desperdiçada até mesmo se o estudante tiver algum talento natural para a Matemática, pois ele, como todos os outros, precisa descobrir seus talentos e seus gostos: ninguém poderá saber se gosta de torta de maçã se nunca a houver provado (POLYA, 2006, p. V).

Portanto é de grande interesse à comunidade acadêmica que sejam realizadas pesquisas nessa área e que propostas diferentes sejam apresentadas para abordar tal problema.

Dada a complexidade da sala de aula contemporânea não é possível continuar com as mesmas pedagogias do século passado, uma das soluções propostas são as pedagogias que tornam o aluno em sujeito central na construção do seu aprendizado visando “apresenta-se a metodologia ao professor numa forma prescritiva, ou seja, professor e alunos juntos desenvolvem esse trabalho, e a aprendizagem coparticipativo e colaborativo em sala de aula” (ONUCHIC, 2013, p. 101). Outro aspecto importante é a maneira como o aprendizado matemático se constitui e como o indivíduo interage com os objetos matemáticos, sendo necessário compreender tas relações cognitivas. Para tanto, nos voltamos para a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2017), chegando à conclusão de que a conversão entre diferentes sistemas de representações semióticas são um aspecto chave no fazer matemático (DUVAL, 2017).

Mas ainda fica a dúvida sobre o que tais teorias educacionais têm em comum e uma resposta pode ser encontrada ao entendermos que o cerne da resolução de problemas está em mobilizar diferentes heurísticas para obter as soluções (POLYA, 2006). Contudo ao analisar tais processos podemos identificar as operações básicas referentes a um sistema de representação semiótica (DUVAL, 2012), como quando reescrevemos um problema de maneira mais simples (tratamento do registro da língua materna), ou quando equacionamos um problema (conversão da língua materna para linguagem algébrica). Portanto, é de se pensar que seja interessante analisar na prática como essas teorias dialogam entre si. Para realizar tal análise, apoiado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), se faz pertinente trabalhar as seguintes habilidades com a turma:

> - **(EF06MA07)** Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
> - **(EF06MA09)** Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.
> - **(EF06MA10)** Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária. **(BRASIL, 2018)**

Com base nessas habilidades, serão propostos diferentes problemas geradores que permitam aos discentes realizar a conversão entre registros semióticos distintos, tendo foco nos registros da linguagem materna, registro pictórico e registro numérico (DUVAL, 2012), pois aparentam ser de fácil acesso aos discentes do 6° ano. Dentro das perspectivas teóricas adotadas, entende-se como uma Representação Semiótica todo conjunto de signos que possua regras de reconhecimento, regras de tratamento e seja possível realizar a conversão entre diferentes tipos de representações semióticas. Por exemplo, temos os registros aritmético e da língua materna, os quais são facilmente reconhecíveis (números e texto), podem ser realizadas transformações internas nestas representações (paráfrase e cálculo) e podemos converter um enunciado em uma igualdade matemática.

4. Considerações Teóricas

Qualificar o entendimento dos conhecimentos matemáticos é um dos objetivos na área da educação matemática. Por conta disso, diversos autores vêm propondo metodologias e teorias que ajudem a melhorar o desempenho do aprendizado dos discentes. Desde a década de 40 a resolução de problemas busca ser um meio para atingir este objetivo, enquanto as teorias de representação semiótica buscam explicar melhor como funciona o processo de aprendizagem, fazendo desta metodologia e teoria um foco de estudo interessante na Educação Matemática.

Para as considerações teóricas desse trabalho, além dos referenciais apresentados em seguida, foi feita uma pequena revisão de literatura, tanto no Google Acadêmico, quanto no Google, visando encontrar TCCs e artigos de temas similares, através de buscas com as palavras "resolução de problemas", "teoria das representações semióticas e frações" e "resolução de problemas e semiótica", além de contato direto com colegas de graduação que escreveram trabalhos nessa área, dentre estes destacamos os trabalhos de (PRADO; JAHN 2023), (WAGNER, 2023), (MONTEIRO; POSSAMAI; ALLEVATO, 2022), que trazem propostas com referenciais similares aos adotados aqui.

Buscando responder à pergunta "quais as potencialidades da metodologia de Resolução de Problemas envolvendo questões das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) na sala de aula", Wagner (2023) propôs uma análise de oficinas realizadas em um período extra classe, com alunas voluntárias, buscando entender como as alunas se relacionam com a metodologia com base no GTERP, através de questões da OBMEP, chegando a conclusão de que existem evidências de que a Metodologia colabora para o aprendizado dos conceitos matemáticos.

Não somente pautadas na Resolução de Problemas, mas também na TRRS, Prado e Jahn (2023) trazem uma experiência em sala de aula que relaciona a Metodologia à Teoria. Essa pesquisa foi realizada com três turmas do 1º ano do Ensino Médio de uma escola estadual de São Paulo, onde foram utilizados problemas do "Rali Matemático Transalpino" (uma competição entre turmas pautada na resolução de problemas matemáticos) para o ensino de conceitos matemáticos diversos. Tais problemas permitem diversas representações semióticas em suas resoluções, os mesmos envolviam lógica, geometria, álgebra e aritmética. É concluído que os alunos reconheceram a importância do uso de diferentes representações na resolução de problemas, mesmo que as turmas tenham apresentado dificuldades nas conversões de registro, e que o ensino matemático pode (e deve) ser baseado na Resolução de Problemas.

Por fim, destacamos trabalho de Monteiro, Possamai e Allevato (2022), de título "Ensino de frações através da Resolução de Problemas: construção de um Produto Educacional", onde é discutido a construção de um Produto Educacional orientado para o ensino de frações, orientado pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Nesse trabalho é inferido que a construção do conhecimento de frações pode se dar por meio de problemas geradores e se sistematizar com a formalização, dos objetos de conhecimento, pelo professor. Os autores ainda destacam que "pode-se discutir as sequências didáticas na perspectiva dos diferentes registros de representação semiótica de fração" (esse foi um grande achado, pois estávamos procurando por trabalhos relacionados ao ensino de frações e Resolução de Problemas e acabei encontrando uma motivação a mais para abordar a TRRS).

Assim podemos ver que existem trabalhos já realizados nessa área de pesquisa que se propõem a mobilizar tais aspectos teóricos como referencial para a realização das atividades. Vale destacar que em todos os trabalhos os autores destacam a importância da aprendizagem através da Resolução de Problemas e é possível notar que os diferentes registros semióticos fazem parte do processo de Ensino-Aprendizagem. Com isso, se faz pertinente abordar de maneira mais detalhada os autores que servem de referencial, buscando explicar ao leitor quais aspectos teóricos serão considerados neste trabalho.

4.1 Referencial Teórico

Aqui são apresentados os principais aspectos teóricos que foram utilizados na escrita deste trabalho. Inicialmente é feita a apresentação das perspectivas à respeito da Resolução de Problemas, seguida das considerações teóricas a sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

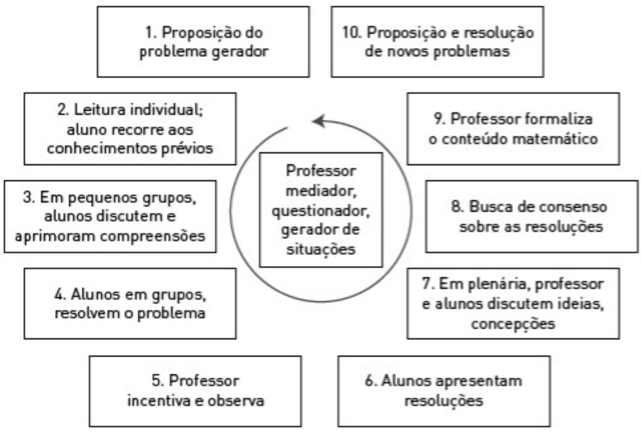
4.1.1 Metodologia de Resolução de Problemas

A Metodologia de Resolução de Problemas, ou simplesmente Resolução de Problemas (RP) surgiu por volta de 1945 com os trabalhos do lógico e matemático George Polya, com seu livro A Arte de Resolver Problemas (no inglês *How to solve it*), no qual o autor apresenta uma série de heurísticas para resolução de problemas matemáticos (POLYA, 2006), além de resumir o processo a quatro passos simples, sendo esses a *compreensão do problema,* o *estabelecimento de um plano*, a *execução do plano* e o *retrospecto*, ou seja, entender aquilo que é pedido pelo problemas, definir uma maneira de alcançar tal resultado com base nos dados e na condicionante apresentada, executar esse raciocínio e, sempre que possível, verificar se o resultado obtido faz sentido com o problemas em questão (POLYA, 2006). Vale ressaltar que, nesse momento, a RP ainda não se constituía como uma metodologia propriamente dita, mas sim algo similar a um conteúdo como funções, álgebra, entre outros (ONUCHIC, 2013). O trabalho em questão apresenta uma série de indagações ao leitor/professor que "*têm em comum duas características: bom senso e generalidade"* (POLYA, 2006, p.3), em outras palavras, tais sugestões poderiam ter ocorrido ao aluno de maneira espontânea e não "entregam a resposta" logo de cara permitindo que o discente tenha tanto trabalho de pensar quanto é possível. Em (ONUCHIC *et al*., 2021), na contracapa do livro temos uma citação que diz "*se a educação não contribui para o desenvolvimento da inteligência, ela está obviamente incompleta... o aluno desenvolve sua inteligência usando-a; ele aprende a resolver problemas resolvendo-os"* – GEORGE POLYA, aqui podemos perceber uma preocupação com o desenvolvimento cognitivo do aluno e como esse desenvolvimento pode ser atingido através da RP, isso traz à tona um importante aspecto das sugestões que o professor deve fazer aos seus alunos, sendo esse o fato de "*elas não nos podem fornecer soluções para todos os enigmas possíveis sem que haja algum esforço da nossa parte"* (Polya, 2006, p.84). Em resumo, a RP requer que o professor tome uma posição de instigador visando apresentar indagações que ajudem o estudante com naturalidade a resolver os problemas matemáticos.

Com o tempo a RP foi sofrendo alterações e atualizações de acordo com a perspectiva vigente de certos autores, em (ONUCHIC, 2013) a autora apresenta a complexidade da sala de aula contemporânea e trata sobre diferentes concepções de ensino e aprendizagem, além de abordar diversas metodologias que estão presentes na sala de aula, para tal é feita uma leitura histórica de pesquisas na teoria de Resolução de Problemas, a qual ajuda a entender a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da RP. Ainda nesse aspecto das mudanças de perspectiva para a Resolução de Problemas, (ONUCHIC, *et al.*, 2021) destaca que apenas após os anos 2000 os educadores matemáticos começaram a pensar em uma metodologia de ensino através da RP. Para este projeto de pesquisa destacamos o livro "Resolução de Problemas, Teoria e Prática" (ONUCHIC, *et al.*, 2021) onde é apresentado com detalhes a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Segundo as autoras esse termo composto foi cunhado visando indicar que os três aspectos devam ocorrer simultaneamente, em que o aluno é ator principal na construção de seu conhecimento e o professor atua como guia e mediador entre o discente e o saber matemático (ONUCHIC, 2013). "*Nessa Metodologia, o problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos"* (ONUCHIC, *et al*., 2021, p.47), essa frase resume muito bem o início das atividades em sala de aula durante a prática docente, sendo comum que o professor escolha uma série de problemas, dados determinados critérios, os quais instiguem os alunos a mobilizar seus conhecimentos matemáticos para a resolução dos enunciados e chegando à construção de determinados conceitos.

Segundo (ONUCHIC, *et al*., 2021) muitos autores tentam apresentar maneiras de trabalhar a resolução de problemas na prática, no texto em questão as autoras apresentam um roteiro de 9 passos com a intenção de orientar o professor na condução das aulas, a figura abaixo mostra um diagrama ilustrativo de tal roteiro.

Figura 1. Roteiro da metodologia.



Fonte: Onuchic, et. al. (2021, p. 51)

Detalhando um pouco mais cada passo, com base nas ideias apresentadas em (ONUCHIC, 2013) temos que:

1) Proposição do problema gerador: esse momento começa antes da aula, com o professor selecionando uma questão adequada para construir um novo conceito, ou aprofundá-lo, como esta atividade inicial que visa à construção de um novo conteúdo é chamado de problema gerador. As autoras recomendam que o conteúdo matemático seja inédito em sala de aula.

2) Leitura individual: as autoras sugerem que seja entregue uma cópia do problema, individualmente, aos alunos. Nesse momento o discente deve ler e tentar recorrer aos conhecimentos prévios na tentativa de resolução da questão.
3) Leitura em conjunto: os alunos são convidados a formar pequenos grupos para reler o problema e trocar ideias, aprofundando seus conhecimentos. É importante, nesse momento, que o professor ajude os alunos com eventuais dificuldades de interpretação do problema. Destacamos que é pertinente neste momento relembrar das contribuições apresentadas em (POLYA, 2006) para o trabalho docente.
4) Resolução do problema: tendo compreendido o problema, os discentes tentam resolvê-lo de maneira colaborativa. É importante que a questão abordada os conduza na construção dos conteúdos planejados.
5) Observar e incentivar: aqui o professor age como mediador e não transmissor do conhecimento, dando tempo necessário para tal e incentivando a troca de ideias. (Voltamos a destacar as indagações contidas em (POLYA, 2006) nessa etapa do processo docente.)
6) Apresentação na Lousa: um representante de cada grupo é convidado a apresentar sua resolução na lousa para que todos possam ver. Independente de certo, ou errado é importante que ocorra a troca de ideias entre toda a turma.
7) Plenária: momento de discussão sobre as diferentes resoluções apresentadas. Aqui é importante que ocorra o esclarecimento de dúvidas e que o professor sirva de mediador nas discussões, tanto como instigador quanto como guia.
8) Busca do consenso: frente às diversas ideias diferentes e as dúvidas sanadas, o docente busca que a turma chegue a um consenso sobre a resposta correta.
9) Formalização do Conteúdo: com base nas convenções do momento anterior o professor apresenta na lousa uma resposta "formal", estruturada na linguagem matemática, visando padronizar os conceitos construídos ao longo da resolução do problema.
10) Proposição de novos problemas: aqui o professor deve propor novos problemas geradores, ou problemas que aprofundem os conceitos trabalhados. (Destacamos que as heurísticas apresentadas em (POLYA, 2006) podem ajudar o professor a criar novos problemas que sejam variações do problema gerador.)

Uma ideia importante de se destacar é que não é uma tarefa fácil a de aplicar tal Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de matemática através da RP (ONUCHIC, 2013).

Vale ressaltar que a Resolução de Problemas é citada como estratégia de aprendizagem por documentos oficiais, como a BNCC, em que é dito que “os processos matemáticos de resolução de problemas [...] podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática” (BRASIL, 2018, p. 266), ou seja tal metodologia já tem reconhecimento consolidado no cenário educacional nacional. Além disso, nessa mesma seção do documento, a metodologia em questão é caracterizada não somente como um contexto onde se aplicam conteúdos, mas também uma estratégia para o aprendizado matemático, se alinhando muito com a perspectiva apresentada em (ONUCHIC *et al*,2021).

4.1.2. O Ensino de Frações e a Resolução de Problemas

Segundo (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008), os números racionais têm diferentes personalidades. Utilizamos a mesma representação numérica para diferentes situações, uma dada fração $\frac{a}{b}$, com b≠0 pode representar fração (partes de um todo), um quociente (divisão), um operador (fração de uma quantidade), etc. Para esse trabalho, as três ideias acima serão as mais utilizadas, servindo de referencial e inspiração quanto à elaboração dos problemas. Nesse sentido, a intenção é que os problemas sirvam de ponto de partida para o entendimento desses conceitos, assim como aspectos satélites ao seu entendimento, como o ordenamento de frações e a equivalência de frações.

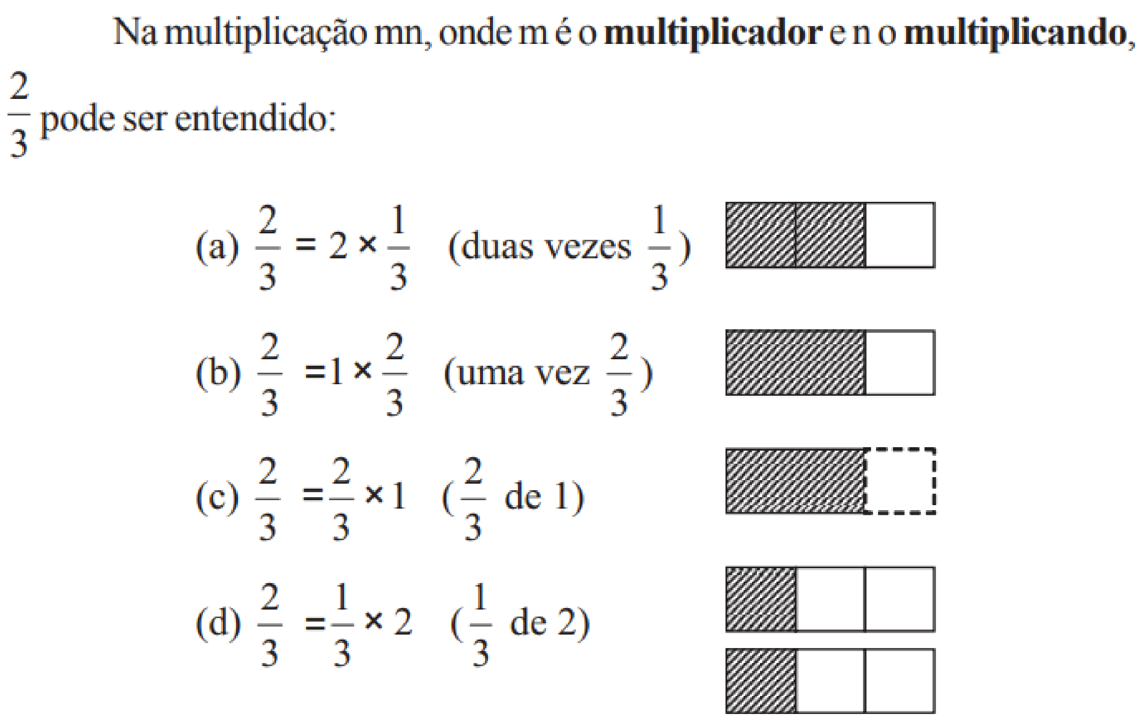
As autoras destacam que a personalidade fração, dos números racionais, é uma “**relação da parte com o todo**” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 90), em que a barra fracionária separa o numerador do denominador, sendo esses os números de cima e de baixo, respectivamente. Um aspecto importante que será trabalhado com os alunos é de que o número de baixo nomeia a fração (meios, terços, quartos, etc.) e como dá o nome é um denominador, buscando a relação entre a etimologia da palavra e sua função.

Outra personalidade abordada pelas autoras é a de quociente, “seu significado é percebido quando **um número de objetos precisa ser repartido igualmente num certo número de grupos**” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p.88), em que a barra fracionária significa o símbolo de divisão, em que o número em cima é o dividendo e o número embaixo é o divisor. Nesse trabalho essa personalidade será relacionada com processos realizados pelos alunos no dia a dia, como a repartição de materiais escolares, ou a distribuição de recursos em jogos digitais. Além de servir como base para os problemas de frações de uma quantidade que serão trabalhados mais a para o final das atividades.

Ambas as "personalidades" já citadas, colaboram para o aprendizado da habilidade "**(EF06MA07)** Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes." (BRASIL, 2018), permitindo analisar como o planejamento realizado, quando associado ao referencial adotado, possivelmente, potencializa o aprendizado dos discentes.

Por fim, a última personalidade definida pelas autoras, que será utilizada neste trabalho é a de operador, a qual "tem significado semelhante ao de 'encolher' ou 'esticar', de 'reduzir' ou 'ampliar'" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 94), nesse caso as autoras utilizam uma a seguinte figura como ilustração:

Figura 2. Personalidade Operador



Fonte: Onuchic e Allevato (2008, p. 94).

Podemos observar que as próprias autoras utilizam uma representação figural para ilustrar está "personalidade", sendo assim faz sentido utilizar problemas que misturem diferentes representações para desenvolver este conceito, além disso temos a habilidade "**(EF06MA09)**

Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.” (BRASIL, 2018), que servirá de base na análise do aprendizado dos discentes.

4.1.3 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) foi desenvolvida pelo pesquisador, filósofo, psicólogo e matemático Raymond Duval baseado em estudos da semiótica, aplicados à matemática, de outros autores antecessores ao mesmo (DUVAL, 2017). O autor destaca que “os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata” (DUVAL, 2012, p. 268), assim, diferente de outras ciências, o objeto de estudo da matemática não é palpável, mas sim algo abstrato. Duval ainda ressalta que acesso a tais objetos depende das representações semióticas para serem acessados, em que tais representações são constituídas de signos pertencentes a sistemas com suas próprias regras de significação e funcionamento (DUVAL, 2012). Segundo (DUVAL, 2017) os signos são representações, ou seja, são “coisas” que evocam à mente outras ideias, independentemente de como são percebidos pelos sentidos. Por conta dessa natureza dos objetos matemáticos, as representações semióticas se tornam indispensáveis na construção do conhecimento ao permitir que o indivíduo interaja com a matemática e internalize esses conceitos, além de realizar diferentes funções cognitivas, como o cálculo, e permitir que registros muito diferentes, mas que representam a mesma coisa, sejam mobilizados para consolidar o aprendizado, como, por exemplo a conversão do registro algébrico e gráfico no ensino de funções (DUVAL, 2012).

Para este trabalho é importante entender que “não há *noésis* sem *semiose*” (Duval, 2012, p. 270), ou seja, não há a apreensão conceitual de um objeto sem que haja a apreensão de uma representação semiótica. Dentro dessa afirmação acredito ser importante abordar as três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose que, segundo o autor, caracterizam um sistema semiótico como registro de representação. Primeiramente temos a formação de *uma representação identificável,* em que é possível identificar tal sistema a partir de suas regras de formação, por exemplo os símbolos matemáticos que constituem os números e operações, para o registro aritmético. Em seguida temos o *tratamento,* esta atividade se resume a uma transformação da representação, interna ao registro semiótico, por exemplo, realizar cálculos dentro do registro aritmético, ou reescrever uma frase no registro da língua materna. Por último, mas não menos importante, temos a *conversão*, esta se caracteriza por transformar uma representação em outro registro diferente, com toda, ou quase toda, informação sendo conservada, respectivamente, por exemplo, equacionar um enunciado escrito, convertendo entre registro da língua materna e algébrico. Vale ressaltar que a atividade de tratamento e conversão são duas atividades diferentes envolvendo a transformação da representação, em particular quando se fala em tratamento temos que “a transformação produz outra representação no mesmo registro” (DUVAL, 2009, p. 54), enquanto quando se fala em conversão temos que “a transformação produz uma representação de outro registro que a representação inicial” (DUVAL, 2009, p. 54).

Falando sobre a conversão de registros semióticos, “não podemos entender o raciocínio matemático, [...], sem nos conscientizarmos das operações específicas de cada um dos registros mobilizados” (DUVAL, 2017, p. 68, tradução nossa), ou seja, estar ciente das operações mobilizadas de cada registro é essencial para o entendimento matemático. Por exemplo, para entender o conceito de fração como parte de um todo, podemos utilizar o registro figural e aritmético para realizar este entendimento. Quando o aluno consegue olhar para uma pizza (figura de um círculo dividido em setores circulares) com 16 fatias, das quais sobraram apenas 4 unidades e dizer que os pedaços restantes são 4/16 (quatro dezesseis avos) da pizza percebemos uma mobilização do pensamento matemático por parte dos discentes, pois é necessário interpretar a figura apresentada e compreender o símbolo aritmético como sendo a representações do mesmo objeto. O autor ainda vai dizer que o pensamento matemático sempre mobilizará ao menos dois registros, pois é necessário discernir e reconhecer quais propriedades são matematicamente relevantes no primeiro registro para que ocorra a conversão ao segundo. Duval ainda afirma que não é suficiente apenas justapor diferentes registros para que os discentes vejam as correspondências, é necessário coordenar os registros para trabalharem em sinergia. Por esse motivo a conversão de representações é o primeiro marco no entendimento matemático, é nesse processo de transformação que os estudantes se dão conta da função representante de cada registro. Por exemplo, as partes pintadas de uma figura repartida em partes iguais são o numerador de uma fração com denominador igual ao número de partes totais, ou que a expressão “quatro dezesseis avos” significa que precisam pintar quatro partes de dezesseis em um desenho.

Baseado nas ideias de (DUVAL, 2012, 2017) é importante entender que, um dos motivos da dificuldade dos alunos na aprendizagem matemática é a falta de domínio das operações fundamentais de um registro semiótico, em específico não saber realizar a conversão de um registro para o outro. Por exemplo, temos experimentos relatados em Duval (2009) apresentando que os alunos conseguem, a partir de um enunciado, descobrir qual gráfico o representa, mas apresentam baixas taxas de desempenho ao escolher qual expressão algébrica corresponde ao mesmo gráfico. Tendo isso em mente é possível elaborar uma prática pedagógica que contemple tais dificuldades e contribua para a compreensão dos conceitos matemáticos, seguindo as ideias de (DUVAL, 2017), de um ponto de vista cognitivo, existem duas condições essenciais para que possamos falar de compreensão, os alunos precisam possuir ao menos dois sistema semióticos e saber converter livremente entre ambos, então devemos buscar desenvolver tais condições nos alunos através de atividades que transitem em diversos sistemas de representação semiótica. A figura 3, elaborada pelo autor da teoria em questão, apresenta um esquema que ilustra esse processo de apreensão do conceito matemático (seja qual for), quando pautado na coordenação de registros. As flechas 1 e 2 são os tratamentos internos a um registro, enquanto as flechas 3 e 4 se referem a conversão entre esses registros distintos, tal processo de conversão leva à flecha C que corresponde a uma compreensão integrativa (apreensão conceitual) que se dá a partir da convertibilidade dos representantes do conceito/objeto cognitivo.

Figura 3. Modelo de representação centrado sobre a função de objetivação.

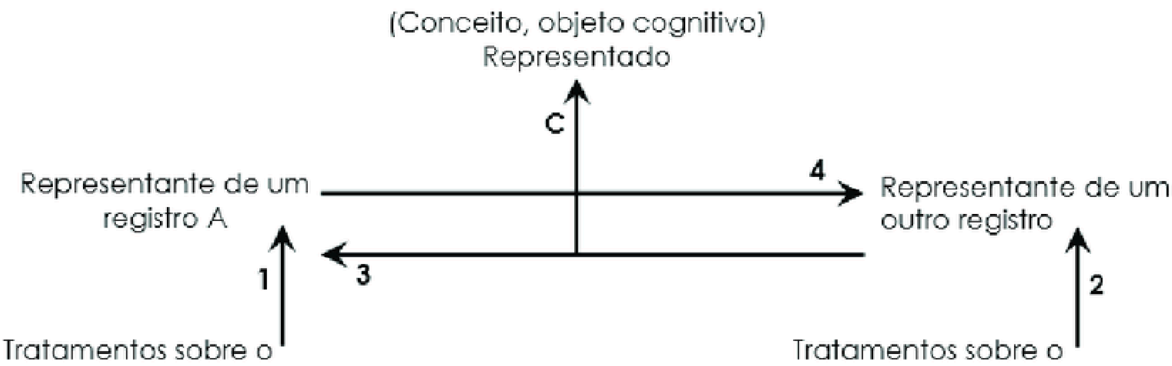


Figura 3. Modelo de representação centrado sobre a função de objetivação.
Fonte: Duval (2009, p. 89).

Inicialmente é importante que os alunos entendam a formação de um sistema semiótico, como a língua materna, os símbolos matemáticos, ou desenhos com alguma característica icônica. Esses sistemas devem possuir aquilo que o autor define como regras de conformidade, em que “as regras de conformidade são aquelas que definem um sistema de representação” (DUVAL, 2009, p. 55), tais regras são compostas por diversos fatores, como determinar unidades elementares de uma representação (símbolos, vocabulário, etc.) e como combinar tais unidades para comunicar informações mais complexas (gramática, regras de cálculo, etc.), em geral elas irão permitir aos discentes reconhecer que uma determinada representação está ligada a um determinado registro. Feito o reconhecimento do registro estudado, é importante que os alunos compreendam a função de tratamento atrelada ao mesmo, precisam saber como transformar a representação internamente, sem mudar de registro. Entretanto o tratamento possui regras próprias a cada registro, essas que são diferentes das regras de conformidade, como exemplos temos a paráfrase, para o registro da língua materna, o cálculo, para o registro aritmético, e as modificações mereológicas, para o registro figural, aqui a modificação mereológica é um tipo de tratamento em que uma figura é decomposta em sub figuras de mesma dimensão (DUVAL, 2012). Assim, a última, mas não menos importante, atividade cognitiva fundamental, à semiósis, seria a conversão, definida pelo autor como “transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro” (DUVAL, 2009, p. 58). Como exemplos temos a ilustração, conversão da língua materna para o registro figural, ou equacionamento para resolver problemas de adição dos elementos de uma figura, como conversão entre o registro figural e o aritmético. É claro, para que o aluno consiga realizar a conversão é necessário que o mesmo não confunda o representante e o representado, nas palavras do autor:

> Essa diferenciação é geralmente associada à compreensão do que uma representação representa e, então, à possibilidade de associar a ela outras representações e de integrá-la nos procedimentos de tratamento. Porém, tal diferenciação jamais é logo adquirida, qualquer que seja o registro de representação e qualquer que seja o estágio de desenvolvimento. (DUVAL, 2009, p. 38)

Busca-se, então, propor um ensino que permita ao aluno conseguir compreender essa diferença entre o símbolo e aquilo que ele busca representar, por exemplo: um “quadradinho” dentre seis outros que formam um retângulo maior, significa ⅙ daquele inteiro, independente de como foi desenhado. Segundo os trabalhos do autor, as observações apontam que grande parte dos alunos apresentam dificuldade não nas tarefas de reconhecimento e tratamento de um registro semiótico, mas sim na conversão, apontando essa atividade como a mais difícil e menos natural de se realizar (DUVAL, 2009), essas observações vão ao encontro daquelas vividas por mim dentro do âmbito escolar e por colegas de profissão, em todos os níveis do ensino base. Aqui, faz sentido tentar entender quais são as causas de tal dificuldade e como podemos ajudar os estudantes a obter um entendimento mais aprofundado dos conceitos estudados. Pensando nisto, o autor aponta a “não-congruência” como sendo a causa por trás deste problema, pois:

> numerosas observações, por sua vez, no âmbito de experiências de laboratório e no de trabalho em classe, mostram que, se a conversão das representações é quase imediata em caso de congruência, esse não é mais o caso desde que haja não-congruência, entre a representação inicial e a representação convertida. Em caso de não-congruência, não apenas o tempo de tratamento aumenta, mas a conversão pode se revelar impossível de efetuar, ou mesmo de compreender, se não houver uma aprendizagem prévia concernente às especificidades semióticas de formação e de tratamento de representação que são próprias a cada um dos registros em presença. (**Duval, 2009, p. 65).**

Com base nessas observações, o autor (DUVAL, 2009) propõe três “critérios de congruência”, regras gerais que buscam determinar o grau de congruência entre dois registros semióticos distintos e quanto mais não-congruentes forem indicam, geralmente, a dificuldade dos alunos nesse processo de conversão.

Tais regras são a possibilidade de uma correspondência “semântica” dos elementos significantes, ou seja, cada unidade significante simples em uma representação, se ligará a outra unidade simples do outro registro. Outra regra seria a univocidade “semântica” terminal, ou seja, o sentido de uma unidade significante no registro de partida terá o mesmo valor no registro de chegada, por exemplo a palavra “repartir” em um problema pode deve significar a operação de divisão (partir algo em partes iguais) ao transitar entre o enunciado e o registro aritmético, no entanto existem problemas onde este verbo pode significar uma subtração dependendo do enunciado, assim não teria univocidade “semântica” terminal. Por fim temos a ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das duas representações, ou seja, a maneira como as unidades significantes estão alocadas em um dado registro será a mesma que outras unidades em “correspondência semântica” estarão em outra representação. Vale destacar que a ordem das unidades significantes é importante devido à natureza dos problemas abordados neste trabalho, uma vez que muitas das estratégias utilizadas para resolução dos enunciados envolvem o uso de registros figurais em relação ao registro da língua materna, tornando a ordem das unidades significantes “neutra”.

5. Abordagem Metodológica

Com o objetivo de entender as potencialidades da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de problema no ensino de frações em uma turma de 6° ano na escola pública, da rede estadual, apoiado na TRRS (DUVAL, 2017), a abordagem metodológica escolhida para este trabalho é caracterizada como a de uma pesquisa qualitativa, porque serão coletadas "descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos" (GOLDENBERG, 2004, p. 53), o que, seguindo as ideias da autora, torna tal escolha adequada à pesquisa em questão. Devido a questões internas da escola, tive a liberdade de atuar como professor principal de matemática da turma, durante a aplicação da pesquisa.

Os alunos que participaram da pesquisa são aqueles que tiveram interesse em participar da mesma, com a devida autorização dos responsáveis. Antes do período da pesquisa, o professor pesquisador teve oportunidade de realizar um dos estágios obrigatórios da graduação na escola, então a turma já estava familiarizada com o docente. Foi ofertado abertamente a todos os integrantes da turma a participação na pesquisa, ressaltando que ninguém teria acesso a suas identidades, como consta nos termos dos anexos A, B e C. A pesquisa seria feita ao longo das aulas normais, mas apenas aqueles que fornecessem as autorizações teriam seus dados coletados para as análises.

Assim, foi feita a coleta de dados através de diversos registros diferentes, sendo esses diários de prática, do professor-pesquisador, fotos das resoluções discentes e gravações de conversas em sala de aula, seguindo todos os protocolos para manter a identidade dos participantes em segredo, por serem menores de idade, tais protocolos incluem utilização de letras arbitrárias como identificação e não mostrar rostos em fotos. Esses tipos de dados foram escolhidos porque auxiliam na "compreensão interpretativa das experiências dos indivíduos dentro do contexto em que foram vivenciadas" (GOLDENBERG, 2004, p. 19), aspectos importantes na pesquisa qualitativa.

Essa análise também busca entender como o processo de conversão e tratamento de registros semióticos influencia na assimilação dos conceitos abordados, com destaque para os registros da língua materna, aritmético e figural, de acordo com as ideias de (Duval, 2012). Para tanto, foi proposta uma prática integrada às aulas normais da turma, tentando entender como se dá o processo de aplicação da metodologia em questão em um contexto de "chão de sala de aula", tentando analisar situações mais "normais" na vida docente, sem ter o viés de trazer apenas participantes que já teriam uma inclinação a participar deste experimento, mas sim com alunos que concordaram em participar da pesquisa sem necessariamente estarem buscando aprofundar seus conhecimentos.

Dentre os alunos de uma turma com cerca de 18 alunos frequentes, 7 demonstraram interesse em fornecer registros para a análise. Ao longo de 7 encontros, com os alunos já tendo os conceitos de múltiplos, divisores, números primos, critérios de divisibilidade e fatoração de primos, relativamente, bem definidos foi abordado o conteúdo de frações, em primeiro contato. As aulas foram ministradas pelo professor pesquisador seguindo as perspectivas metodológicas apresentadas em (ONUCHIC *et al.*, 2021), tentando aplicar o roteiro de atividades elaborado pelas autoras. Em geral, as aulas tiveram a pretensão de abordar de três a quatro problemas que buscaram desenvolver diferentes conceitos, com dificuldade gradual, seguido pela formalização dos mesmos. Para facilitar o andamento das aulas, foi planejado entregar de maneira impressa os problemas aos discentes, para colarem no caderno de matemática e anotar suas resoluções.

5.1 Problemas trabalhados

Visando a compreensão por parte do leitor, esta seção se dedica a apresentar os problemas trabalhados ao longo das aulas. Os enunciados foram transcritos na íntegra, conservando eventuais erros de digitação, e as imagens ilustrativas, para que seja mantida a informação que os alunos tiveram acesso ao longo dos encontros. A formulação desses problemas foi feita com base no referencial adotado e possuem contextualizações baseadas em episódios de desenhos animados que os alunos relataram terem assistido. Tal escolha foi feita com a intenção de aumentar o engajamento discente na leitura dos enunciados. Todos os problemas trabalhados são de autoria do professor-pesquisador, com inspirações no referencial adotado, e foram criados com a intenção de promover uma aprendizagem propícia à coordenação de registros.

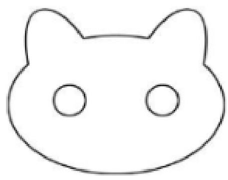
Após a transcrição de cada problema, existe um pequeno parágrafo destacando quais foram as intenções do professor-pesquisador em formulá-los. A criação de atividades ocorreu ao longo das semanas de planejamento das atividades, com base nas observações do professor-pesquisador.

Em geral, destaco que os Problemas 1 a 5 foram criados com a intenção de verificar o aprendizado de frações como parte de um todo, envolvendo representação e operação de frações. Também foram criados problemas que pretendiam exercitar a interpretação das unidades significantes à conversão entre registros (figural e aritmético, em grande parte), o conceito de frações equivalentes, a partir do registro figural, enquanto a ideia de fração como um quociente se deu através da conversão entre registros figurais, de língua materna e aritméticos. É importante destacar que muitos problemas trazem a ideia de valor de uma fração e frações equivalentes a partir da coordenação entre as unidades significantes dos registros figural e aritmético. Por fim, os problemas 14, 15 e 16 apresentam o registro figural, juntamente ao aritmético, numa sucessão de complexidade, para desenvolver o conceito de fração como um operador, ou fração de uma quantidade. Os conceitos evidenciados neste parágrafo são revisitados em outros momentos, por diferentes problemas ao longo das atividades, com a intenção de desenvolvê-los de maneira mais aprofundada pelos alunos.

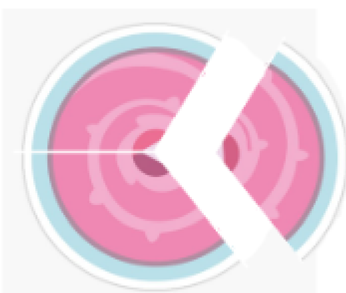
Problema 1: A aspirante a bruxa, Luz Noceda, decidiu comprar uma pizza família para a noite de jogos na casa da coruja. Essa pizza venho repartida em 16 pedaços iguais, sabendo que no início da noite de jogos comeram metade da Pizza e no final da noite comeram metade do que tinha sobrado, faça um desenho que represente quantos pedaços sobraram para o café da manhã no outro dia.

Este "problema gerador" visa introduzir as ideias iniciais de fração para a aula e a estratégia heurística de desenhar figuras, como indica (POLYA, 2006). O enunciado requer que os alunos convertam para o registro aritmético e realizem os tratamentos (cálculos) para descobrir "quanto de pizza sobrou", em seguida expressar esse resultado no registro figural. Utilizando os desenhos que os alunos podem criar, é possível formalizar a notação matemática aritmética e relacionar com a língua materna, as funções de numerador e denominador.

Problema 2: Steven Universo conseguiu achar um pacote do, agora, raro "biscoito gatinho" e queria dar um meio de "biscoito gatinho" para sua amiga Connie. Como ficaria a divisão do biscoito?



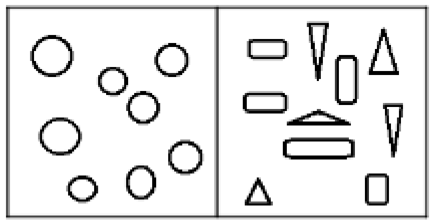
O problema 2 utiliza noções intuitivas de "metade", juntamente de uma figura com simetria, para aprofundar a noção de fração como parte de um todo estudada anteriormente, através da conversão da língua materna para o registro figural, seguido do tratamento desta figura. Além de apresentar a expressão "um meio" para começar a formalização da nomenclatura das frações.



Problema 3: durante a luta com a “vilã” Bismuto, Steven teve seu escudo quebrado. Antes de desaparecer, o escudo ficou da seguinte maneira, qual a fração que representa a parte inteira do escudo no desenho?

Para finalizar este momento os estudos iniciais da representação de frações como parte de um todo, é proposto um problema em que os alunos precisam identificar algumas unidades significantes em um registro figural e realizar a conversão ao registro aritmético. O “escudo” foi dividido em três partes e espera-se que os discentes consigam identificar que duas partes ficaram inteiras, enquanto uma terceira se “separou”, ou seja 2/3 de “escudo se mantém inteiro”. As atividades propostas até aqui oferecem oportunidades dos alunos explorarem a conversão entre representações semióticas distintas de um mesmo objeto matemático, buscando favorecer um ensino que favoreça a coordenação de registros semióticos ao longo dos próximos problemas.

Problema 4: querendo apresentar a cultura da América Latina para Amity, Luz preparou uma pizza uruguaia (pizza quadrada) de dois sabores. Para facilitar a divisão, elas partiram cada sabor ao meio verticalmente, quando elas finalmente iam comer, King roubou um quarto de pizza. Dito isso, qual é a fração que representa a quantidade de pizza que sobrou?



Utilizando de uma representação figural, o problema gerador em questão visa introduzir intuitivamente a ideia de que frações, de mesmo denominador, podem ser subtraídas. A intenção é que os alunos utilizem a figura para se guiar em sua resolução, possivelmente utilizando os conceitos estudados até então, para chegar ao resultado. Com base nas possíveis resoluções, busca-se coordenar o registro figural e aritmético para introduzir as operações de adição e subtração de frações com mesmo denominador, ressaltando que os “denominadores não se somam” com o auxílio dos procedimentos de interpretação da figura, pois a quantidade de “partes do total” não muda.

Problema 5: Finn, Jake, Marceline e Princesa Jujuba decidiram fazer um piquenique e combinaram de levar sanduíches diferentes. Jake levou 3 sanduíches de frango, Marceline levou 4 sanduíches de tomate, Princesa Jujuba levou 4 sanduíches doces, no entanto Finn esqueceu completamente de levar sua parte. Com pena do jovem humano, decidiram repartir todos os sanduíches em quatro partes iguais para facilitar a divisão entre todos eles, cada um dos que levaram sanduíches vão comer cinco quartos de seus lanches por que são seus sabores favoritos, em seguida vão dar 2 quartos para os outros dois amigos que tenham trazido sanduíches e, por fim, vão repartir o que sobrar com Finn, o humano.

a) Sabendo que Jake, o irmão de Finn, vai dar tudo que sobrou de seu lanche, Jujuba vai ceder 24 de sanduíche e Marceline vai dar, apenas, 14 de sanduíche, quantos quartos Finn irá comer?

b)Quantos quartos vão sobrar para Marceline e Jujuba?

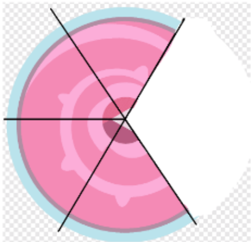
c) E se tivessem dividido em oito partes cada sanduíche?

O problema 5 tem grande inspiração no trabalho de (Onuchic; Allevato, 2008), servindo como atividade final neste momento inicial do aprendizado de frações como parte de um todo. Ele necessita que os alunos realizem diversas conversões entre o enunciado e um registro aritmético, ou figural, a depender da preferência de cada discente, requisitando que os estudantes realizem vários tratamentos nos respectivos registros. A existência de itens “a”, “b” e “c” devem servir como expansão do mesmo problema, para verificar se os alunos conseguiram obter um entendimento satisfatório do processo de resolução do mesmo.

Problema 6: durante a luta com Thanos, o escudo de vibranium do Capitão América foi quebrado em uma forma similar a figura abaixo. Aproveitando que estamos estudando frações, como podemos representar numericamente a fração de escudo, aproximadamente, restante representada abaixo?

O problema 6 é, em grande parte, análogo ao problema 3. A figura escolhida possui uma estrela com cinco extremidades e apresenta apenas as “partes restantes”, visando facilitar a interpretação das unidades significantes à conversão entre registros. Também foi pensado como uma maneira de exercitar os conceitos trabalhados no problema 3, sem apresentar a “quantidade de partes perdidas”

Problema 7: Pensando nos exercícios anteriores quais frações representam a quantidade de escudo restante nas figuras a seguir? O que mudou?

Esse problema foi elaborado visando introduzir o conceito de frações equivalentes nas primeiras aulas, por dois motivos: o tipo de problemas que poderiam ser trabalhados e a coordenação de registros. O conceito de frações equivalentes permite trabalhar problemas mais complexos, relacionando conteúdos e a conversão de registros precisa ser aprofundada para que os discentes consigam compreender os objetos matemáticos estudados.

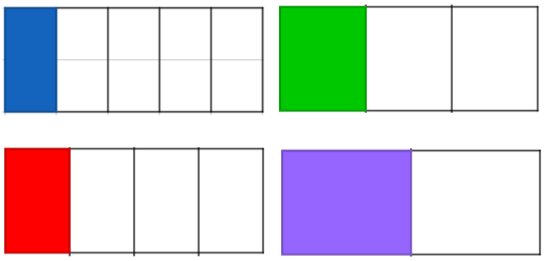
Problema 8: tendo 3 cartolinas, uma azul, uma amarela e uma rosa, para dividir igualmente entre quatro grupos de alunos, quanto de cartolina cada grupo receberá no total? Qual fração representa essa quantidade?

Este problema gerador também é baseado nos trabalhos de (Onuchic; Allevato, 2008), este visava introduzir a ideia de fração como um quociente, ou seja, que a fração representa um número que precisa ser repartido igualmente. A utilização de cartolinas coloridas na elaboração do problema foi feita porque os alunos tinham realizado trabalhos com esses materiais na semana anterior ao início das atividades desta pesquisa. Idealmente, os alunos utilizariam as heurísticas vistas em aula para tratar o problema a partir do registro figural.

Problema 9: em uma batalha pokémon para realizar ataques, os pokémon utilizam PP (Pontos de Poder), lutando contra a equipe Rocket, Pikachu tem apenas 8 PP para utilizar o choque do trovão, contra um pokémon de Jessie e outro de James. Sabendo que utilizará a mesma quantidade de golpes para nocautear cada pokémon, qual fração representa esse valor? Quanto é esse valor?

Este problema também trabalha a ideia de fração como quociente, servindo como expansão para o problema 8. Aqui, os discentes poderiam utilizar as mesmas estratégias de resolução da questão anterior, ou simplesmente converter para o registro aritmético, contudo a formalização planejada seria de utilizar o registro aritmético, juntamente ao registro figural para “repartir” um inteiro que “valia 8”, em 2 partes que “valiam 4”. Assim, formalizando a ideia de fração como quociente e introduzindo uma heurística que pretendia-se trabalhar mais a frente com os alunos.

Problema 10: todos os retângulos abaixo têm o mesmo tamanho. Sabendo disso, expresse cada parte colorida por uma fração, em seguida complete as lacunas, ordenando essas frações.
OBS.: o símbolo “<” significa “menor que”, por exemplo: 3<5.



O problema formulado foi baseado em (Monteiro; Possamai; Allevato, 2022), visando iniciar a discussão sobre ordenamento de frações sem propor uma “regra” antes que os alunos compreendessem o significado do “valor” de uma fração. Para tanto, a utilização do registro figural em coordenação com o registro aritmético foi a estratégia adotada durante a formulação deste problema, porque o registro figural possui uma unidade significante na “quantidade pintada” que é convertida em “valor do número” quando convertemos para o registro aritmético.

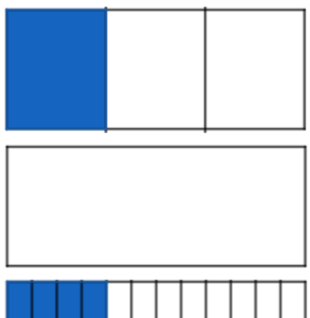
Problema 11: ordene as frações e represente elas por um desenho. 3/5, 3/6, 3/4, 3/10, 3/3

___ < ___ < ___ < ___

Para aprofundar o problema anterior, foi formulado para os alunos um problema que fornecia o registro aritmético e requisitava a conversão ao registro figural. Segundo (Duval, 2012), a *semiósis* está ligada à coordenação de múltiplos registros, então é necessário que os alunos tenham condições de identificar unidades significantes entre diferentes registros semióticos e realizar a conversão entre tais representações. Ao apresentar uma atividade análoga a anterior, porém com registros de partida e chegada distintos, esperava-se que os alunos adquiram um entendimento mais significativo do conteúdo trabalhado

Problema 12: resolva a charada: eu tinha ___ partes de ____ partes totais.

- Quando dobrei a quantidade de divisões, fiquei com 4 partes de

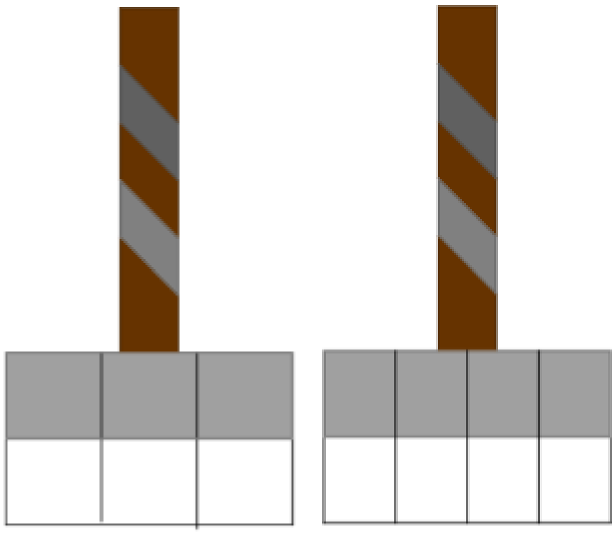


12 partes totais.

- Quando reduzi pela metade a quantidade de divisões, fiquei com 1 parte de 3 partes totais.
- Quais são os números que completam as lacunas? Como você completaria o desenho do meio?

Similar ao problema 7, esta questão utiliza da coordenação entre os registros figural e aritmético para representar frações equivalentes. Pensando no processo de obtenção de frações equivalentes, multiplicar/dividir numerador e denominador pelo mesmo número, foi elaborada esta "charada matemática". O intuito é que os alunos utilizem as informações no enunciado para tentar entender como funciona o tratamento do registro figural e, em seguida, relacionar ao processo aritmético análogo. Este problema apresenta em seu enunciado falta de univocidade semântica terminal em relação aos tratamentos figurais/aritméticos necessários para a resolução, pois 4/12 precisa ser simplificado para chegar no resultado 2/6, ao contrário da expressão "dobrei a quantidade de divisões" contida no texto do problema. Também é importante trabalhar a identificação das unidades significantes "dobrei a quantidade de divisões" e "reduzi pela metade" com respeito às operações matemáticas associadas, no processo de conversão entre a língua materna e o registro numérico.

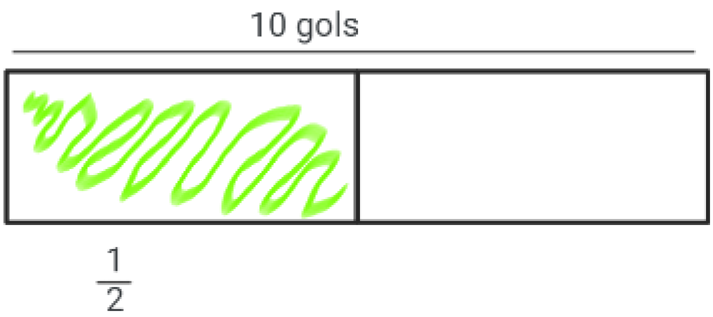
Problema 13: durante o filme Thor: Ragnarok, Hela (a irmã de Thor) quebra o lendário martelo Mjolnir. Isso acontece em muitas linhas do tempo, mas de maneiras um pouco diferentes. Tente descobrir em quantas partes o martelo foi quebrado na linha do tempo principal.



- Quando triplicou o número de pedaços, sobraram 3 partes;
- Quando quadruplicou o número de pedaços, sobraram 4 partes;
- Qual fração representa a quantidade de pedaços partidos e a quantidade de partes que sobraram?

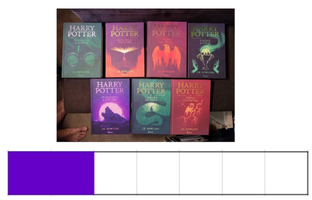
Este problema foi formulado com a intenção de ser uma expansão do problema 12. Novamente, existe um alto grau de não-congruência entre o registro da língua materna e o aritmético, mas apresentado de maneira similar ao problema anterior. Espera-se que os alunos consigam utilizar as heurísticas trabalhadas durante o período de formalização da atividade anterior e consigam identificar quais tratamentos realizar no registro aritmético. Após a plenária referente às duas questões de frações equivalentes, é esperado que os alunos consigam ter, em alguma medida, percebido o padrão entre numerador e denominador ao representar frações equivalentes, permitindo a formalização do algoritmo de “multiplicar/dividir em cima e embaixo”.

Problema 14: em uma partida de futebol, o time brasileiro ganhou de goleada, sendo que a artilheira Marta marcou metade dos gols. Sabendo que o time vencedor fez 10 gols, quantos foram de Marta?



Com o intuito de analisar as potencialidades da metodologia adotada, o problema 14 foi formulado para favorecer a coordenação entre os registros figural e aritméticos, visando desenvolver o que (Onuchic; Allevato, 2008) chamam de fração como operador, ou fração de uma quantidade. Nesse caso, foi aplicado um conceito já trabalhado em problemas anteriores, da “metade” de um todo, tomando o retângulo que representa o inteiro como “10 gols” e a parte hachurada em verde sendo o valor a ser determinado. Este problema, juntamente com o 15 e 16 foram pensados em sucessão de complexidade, para formalizar o conceito de fração como operador.

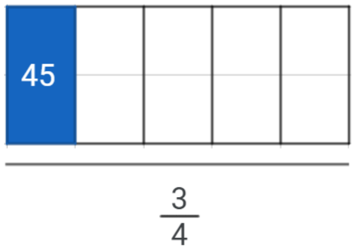
Problema 15: se 2/7 da coleção de Harry Potter custa R$80,00 na Shopee, quanto custa a coleção completa?



O problema 15 expandia o anterior ao adicionar mais de uma “parte do total” representando um determinado valor. Esta questão busca desenvolver de maneira intuitiva o pensamento para a fração de uma quantidade, neste caso o registro figural permite que os alunos resolvam um problema que poderia ser equacionado como $\frac{2}{7}.x = 80$, sem ter domínio do registro algébrico e suas regras de tratamento, ou conversão.

Problema 16: resolve a charada preenchendo a lacuna. Eu peguei 3/4 de ____ e obtive um número, em seguida peguei 1/5 desse número e obtive 45.

DICA: tente utilizar o desenho das barrinhas para ir descobrindo passo a passo a resposta

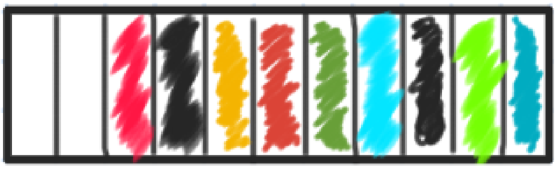


Por fim, o último problema planejado para o estudo inicial, das frações como operadores, poderia ser resolvido utilizando a heurística já trabalhada nos problemas anteriores, porém com a necessidade de utilizar duas figuras para a resolução do problema. O primeiro passo se assemelha bastante com os problemas anteriores, para avaliar se os alunos conseguiram entender como coordenar os registros para calcular a fração de uma quantidade. Em seguida, é necessário que os alunos repitam o processo, ou alguma forma de resolução análoga, para obter o valor total desejado, uma vez que, a figura disposta no enunciado contém informações a respeito de “3/4 do total”.

Os problemas 17 até 24 foram formulados e aplicados em uma “avaliação diagnóstica”, que visava identificar quais conceitos haviam sido desenvolvidos por cada aluno, individualmente. Tal avaliação, infelizmente, foi aplicada em um dia que o professor-pesquisador não pode comparecer a aula, portanto foram realizados sem a mediação necessária durante o momento de resolução.

Problema 17: segundo o site “tudogostoso.com.br”, oara fazer uma massa de pizza que sirva 5 porções, precisamos de 1kg de farinha de trigo, 3 xícaras de água morna, 1 colher (chá) de sal, 30g de fermento biológico, 3/4 xícaras de óleo e 1 colher (chá) de açúcar. Imaginando que você vá usar uma caneca “reta”, represente a fração de xícaras de óleo com um desenho.

Esta questão retoma os primeiros conceitos estudados nos problemas iniciais, referentes a frações como parte de um todo. O enunciado continha uma “aplicação” do conteúdo estudado, sendo baseado em dados reais. Tinha como critérios de diagnóstico: avaliar se o aluno conseguiria distinguir as informações desnecessárias, daquelas importantes para resolver o problema e perceber se o discente consegue fazer a conversão do registro numérico para o figural no contexto da fração como parte de um todo.



Problema 18: na prateleira da Proª Pires está separado o lugar para a coleção de livros "fundamentos de matemática elementar", quando ela empresta dois desses livros para seus colegas a prateleira fica organizada como mostra a figura. Sabendo disso, qual fração representa a quantidade de livros restantes?

Ainda trabalhando os conceitos iniciais desta pesquisa, este problema buscava entender se os alunos conseguiriam realizar a conversão do registro figural para o numérico, no contexto da fração como parte de um todo. As questões trabalhadas aqui, tem um grau de não-congruência muito baixo e, segundo (Duval, 2009), esse fato tende a ser relacionado com altas taxas de desempenho por parte dos discentes. Contudo, é importante relembrar que um problema se configura como tal, na relação com seu resolvedor, como é dito em (Onuchic *et al.*, 2021), ou seja, para alguns alunos essa tarefa pode vir a ser difícil e desafiadora, enquanto para outros será uma atividade trivial, facilmente relacionada às aulas anteriores.

Problema 19: se tenho 120m de arame para construir uma cerca em formato de quadrado, qual será o valor de cada lado? Qual fração representa esse número? **APRESENTE SEU RACIOCÍNIO** (dica: vale utilizar desenhos).

Seguindo os principais conteúdos trabalhados em problemas anteriores, busca-se identificar se os discentes conseguem realizar as conversões necessárias e observar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução para tentar compreender o pensamento matemático por trás da resolução. A "dica" incluída no enunciado está presente para relembrar das heurísticas trabalhadas problemas anteriormente abordados. Da mesma forma, o destaque para a apresentação de "raciocínio" está ligado ao fato de muitos alunos não registrarem como chegaram aos resultados, tendo um foco muito grande na "resposta final".

Problema 20: no setor da emergência de um hospital trabalham 30 pessoas como técnicas de enfermagem. Sabendo que metade dessas pessoas está de atestado/folga, quantas pessoas sobraram para trabalhar? E se um terço do que sobrou pedir demissão, quantas pessoas vão sobrar? **APRESENTE SEU RACIOCÍNIO** (dica: vale usar desenhos).

Este problema tinha como objetivo investigar se os alunos iriam optar por utilizar alguma das notações vistas em aula para a resolução de problemas da fração de uma quantidade. E, também, verificar se os alunos realizaram a conversão do registro da língua materna para o numérico, além de observar se os discentes conseguem interpretar que 1/3 pede demissão, sobrando, essencialmente, 2/3 das pessoas.

Problema 21: Nikaido, a proprietária do restaurante Hungry Bug, havia utilizado 1/4 do seu estoque de massa de “bolinho chinês” na primeira semana do mês. Na segunda semana, as vendas estouraram e ela usou mais dois quartos de seu estoque. Qual fração do estoque de massa de “bolinho chinês” sobrou para Nikaido até o final do mês? **APRESENTE SEU RACIOCÍNIO**

Visando avaliar se os alunos conseguem interpretar o texto, montar as expressões numéricas (conversão para o registro numérico), ou utilizar do registro figural para realizar as operações, este problema foi elaborado. A falta de univocidade semântica terminal contida em “usou mais dois quartos de seu estoque”, pode ser um ponto de dificuldade para os alunos porque o valor deve ser subtraído do total, ao invés de adicionado.

Problema 22: como você descreveria o processo para somar frações? E a subtração? Como você faria a subtração 4/5-3/5?

Problema 23: qual é a fração que é equivalente a 1/3 e tem denominador 12? Represente essas duas frações como um desenho e **explique qual estratégia utilizou para desenhar**.

Problema 24: qual fração é equivalente a 3/4 e tem denominador 100? **Apresente seu raciocínio**

Por fim, os problemas 22, 23 e 24 visam exercitar nos alunos a argumentação sobre os conceitos estudados em aula, referentes à soma/subtração de frações e frações equivalentes, visto que alguns discentes ainda apresentam grande dificuldade na resolução desse conteúdo.

Problema 25: Ao medir o Ki de Goku na forma Super Saiyajin obtiveram 150 mil de poder. Todos ficaram assustados, pois a transformação anterior de Goku, o Kaioken aumentado 20 vezes era apenas 2/5 desse valor. Sabendo disso, quanto é o poder de Goku utilizando o Kaioken x20?

O problema foi formulado para retomar o conceito de fração como operador. Aqui, os discentes poderiam utilizar estratégias heurísticas similares aos problemas 14, 15 e 16 para a resolução deste problema. A inclusão deste problema se justifica como um “reforço” para a formalização de fração como um operador.

Problema 26: Os piratas do Chapéu de Palha são uma tripulação de 11 membros. Após encontrar um tesouro de R$22.000,00 igualmente entre todos. No entanto, a navegadora Nami tentou pegar a quarta parte do tesouro de um de seus companheiros, mas foi bem sucedida em pegar apenas 3/4 do valor desejado. Quanto Nami conseguiu pegar?

Por fim, o problema 26 seria o último problema gerador proposto aos alunos, antes da realização de uma avaliação somativa. No momento da formalização, seria adotada a conversão entre o registro da língua materna diretamente ao registro aritmético, sem a utilização do registro figural, como foi feito tantas outras vezes, pois seria necessário à compreensão da fração como um operador.

Problema 27: Preencha a lacuna.
1/5 de 3/4 de _____ vale 45

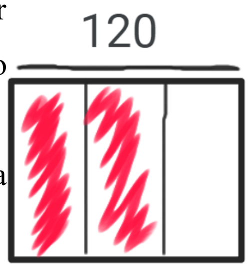
O problema 27 é análogo ao problema 12, e visava avaliar se os alunos conseguiriam, com mediação do professor-pesquisador, utilizar o registro figural para resolver um problema aritmético. Por mais que exista um baixo grau de não-congruência entre as representações, visto que cada signo no enunciado equivale a um único signo no registro de chegada, e que podemos evidenciar a univocidade semântica terminal, com apenas a organização das unidades significantes faltando, é esperado que os alunos tenham um pouco mais de dificuldade nesta questão. Tornando pertinente, caso ocorra esta dificuldade, uma revisão a respeito destes problemas no processo de ensino-aprendizagem-avaliação da turma.

Problema 28: Mutano e Ciborgue decidiram juntar os restos de pizza que tinham deixado espalhados pela base, para fazer um lanche. Todas as pizzas eram de tamanho médio, então vinham separadas em 6 pedaços.
- Mutano achou dois pedaços de pizza de tofu no seu quarto;
- Ciborgue achou três pedaços de pizza de calabresa na garagem;
- Os dois juntos acharam um pedaço de pizza de mussarela na geladeira.

a) Faça um desenho que represente o total de pizza que eles encontraram
b) Represente as frações de cada sabor, respectivamente. Em seguida, apresente uma fração que representa o total de pizza encontrada
c) Digamos que eles peçam mais uma pizza média, dividida no mesmo número de pedaços. Em seguida dividissem o total junto da Ravena, qual fração representa essa divisão e quantos pedaços cada um vai comer

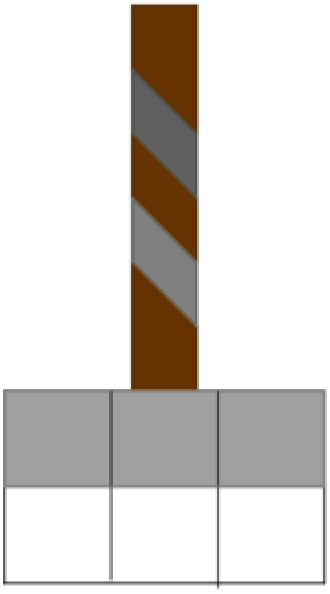
O problema 28 foi formulado para avaliar se os discentes conseguiram identificar as diversas informações dispostas e encontrar as unidades significantes importantes para a resposta de cada item. Nos itens “a” e “b”, o foco estava em entender a fração como parte de um todo e conseguir realizar a conversão para o registro figural e aritmético. O item “c” estava focado na avaliação do entendimento de frações como um quociente.

Problema 29: Eu tenho um salário de R$1200,00 e utilizo 2/3 para pagar despesas fixas de moradia. Do que sobra gasto 3/8 gasto comprando livros, quanto sobra no final do mês?
Dica: 2/3 de 1200 é o valor de dois quadradinhos pintados do desenho a seguir



O penúltimo problema formulado visava avaliar se os discentes conseguiram utilizar as heurísticas estudadas em aula para coordenar os registros aritmético e figural na resolução da situação problema. Assim como no problema 27, era necessário utilizar duas representações figurais distintas durante a resolução, no entanto aqui era fornecida esta primeira representação figural no enunciado da questão.

Problema 30: Qual fração representa a parte pintada do Mjolnir? Qual fração é equivalente é essa com denominador 4? Faça um desenho que representa tal fração.



Por fim, o último problema formulado visava entender se os discentes haviam entendido o algoritmo para obtenção de frações equivalentes, ou se conseguiriam desenvolver alguma estratégia similar. A coordenação entre os registros figural e aritmético é muito importante para a interpretação das informações fornecidas pelo enunciado, sendo necessário certo domínio da identificação das unidades significantes de ambos os registros.

6. Análise dos dados

Este capítulo se dedica a analisar os dados coletados durante a aplicação desta pesquisa. Foram coletados registros de áudio e fotos das atividades realizadas pelos 7 participantes, que foram identificados por letras arbitrárias (A, B, D, E, G, L e V), dentre estes D era um aluno que havia pulado um ano de escola por altas habilidades e A havia sido transferida à escola a menos de dois meses. O capítulo foi subdividido em seções referentes a cada aula em que foram realizadas as atividades, contendo o enunciado original dos problemas, seguido de comentários a respeito de sua resolução e/ou transcrição dos áudios gravados.

Foram selecionados 16 problemas, e alguns exercícios, para compor essa análise de acordo com a disposição dos dados coletados, visando entender as potencialidades e limitações da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação em Matemática através da Resolução de Problemas, apoiada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Para melhor contemplar esse objetivo, as análises estarão focadas em entender os processos cognitivos envolvidos na construção do conhecimento matemático por parte dos discentes e quais as estratégias docentes foram necessárias para promover o aprendizado.

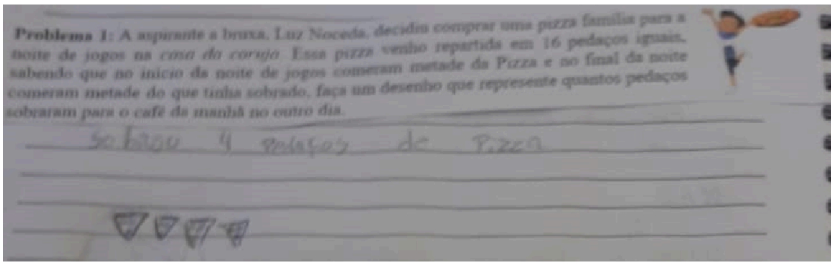
6.1 Análise da primeira aula

Problema 1: A aspirante a bruxa, Luz Noceda, decidiu comprar uma pizza família para a noite de jogos na casa da coruja. Essa pizza venho repartida em 16 pedaços iguais, sabendo que no início da noite de jogos comeram metade da Pizza e no final da noite comeram metade do que tinha sobrado, faça um desenho que represente quantos pedaços sobraram para o café da manhã no outro dia.

Este primeiro problema visava apresentar a estratégia de resolução que mais frequentemente seria utilizada nos problemas propostos, desenhar uma figura, pois figuras são "não apenas o objeto dos problemas geométricos, como também um importante auxílio para problemas de todos os tipos, que nada apresentam de geométrico na sua origem" (POLYA, 2006, p. 94), além disso, o registro figural foi adotado como estratégia pedagógica pois ela oferece procedimentos de interpretação.

Durante essa aula, os alunos trabalharam em grupos de dois a quatro alunos. Após serem distribuídos os problemas recortados entre os grupos, o pesquisador ficou circulando pela sala incentivando e indagando os alunos. A dupla dos alunos L e V apresentou a seguinte solução para o problema:

Figura 4. Resolução do problema 1 produzida pelo aluno L.


Problema 1: A aspirante a bruxa, Luz Noceda, decidiu comprar uma pizza família para a noite de jogos na *casa do coruja*. Essa pizza venho repartida em 16 pedaços iguais, sabendo que no início da noite de jogos comeram metade da Pizza e no final da noite comeram metade do que tinha sobrado, faça um desenho que represente quantos pedaços sobraram para o café da manhã no outro dia.

sobrou 4 pedaços de Pizza

Fonte: Acervo pessoal.

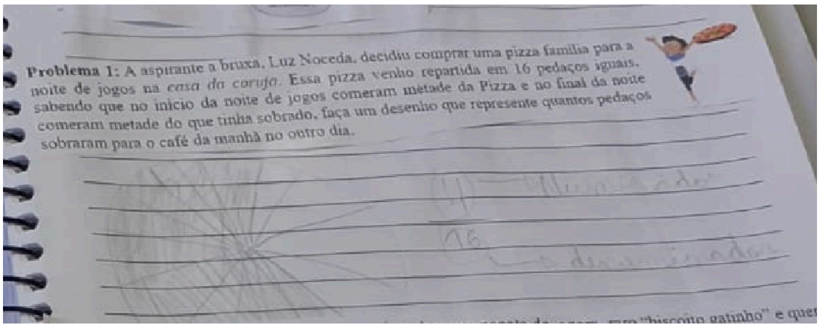
> Rafael: guris, como é que vocês fizeram pra resolver o problema?
> L: A gente pegou, hã, fizemos dezesseis menos oito que deu oito, daí…
> V: Que seria metade da pizza!
> L: E daí depois a gente dividiu, fez oito menos quatro, que sobrou quatro.
> (Áudio de 17/08/2023)

O enunciado do problema em questão trazia uma série de ações fictícias realizadas pelas personagens, os quais poderiam ser expressos aritmeticamente de várias maneiras, durante a resolução eles não registraram seus cálculos, mas com os relatos é possível verificar que houve uma coordenação entre registros, utilizando mentalmente a representação aritmética para realizar o tratamento em questão, nesse caso o cálculo de "quantas fatias sobraram".

Outro grupo também apresentou um caminho diferente para a resolução, nesse grupo a aluna A relatou:

> Rafael: A, só para eu saber, como vocês resolveram o problema 1?
> A: Hm?
> Rafael: Só pra eu saber como é que vocês resolveram o problema 1?
> A: A gente resolveu fazendo conta de vezes.
> Rafael: Tá
> A: Que, dois vezes oito é 16 daí a gente… aí colocou 8 menos 4, que é 4.
> ...
> Rafael: Ok, 4 fatias, né?
> A: Sim.
> (Áudio de 17/08/2023)

Figura 5. Resolução do problema 1 produzida pela aluna A, registrado após a correção

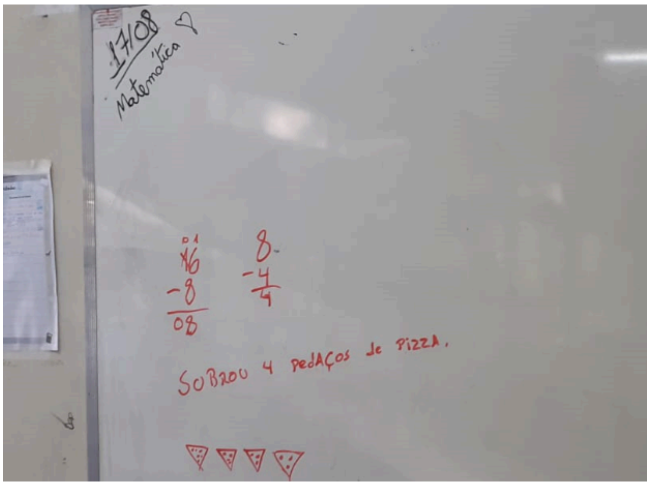


Fonte: Acervo pessoal.

Aqui é perceptível que a unidade significante "metade" é interpretada, aritmeticamente, de maneira diferente entre os alunos, enquanto alguns utilizam a operação de adição, outros preferem multiplicação, curiosamente, em nenhum momento foi relatado a opção de "dividir por dois" durante a realização desta tarefa.

Após alguns minutos, todos os alunos tinham terminado a tarefa e foi pedido aos discentes que colocassem suas resoluções no quadro. Com base nelas foi feita uma breve plenária sobre como poderíamos representar a situação problema.

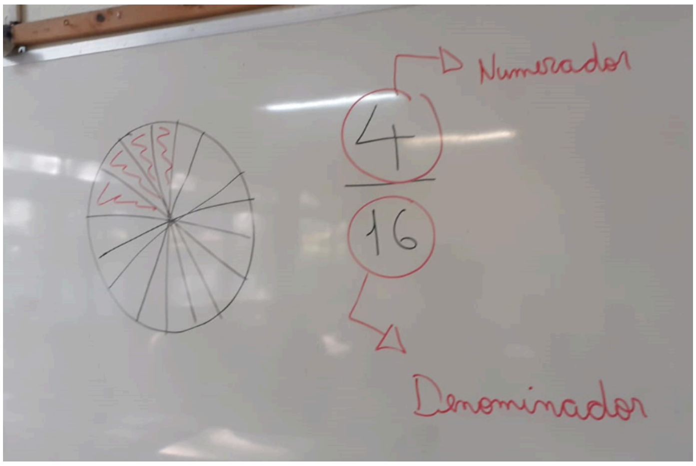
Figura 6. Resolução do problema 1 produzida pela aluno L, durante a plenária.



Fonte: Acervo pessoal.

Assim, foi possível formalizar com os alunos a representação aritmética de uma fração, destacando que o numerador (parte de cima) indica quantas partes se tem de um todo, enquanto o denominador (parte de baixo) indica quantas partes o todo foi dividido, como consta no registro da figura 7.

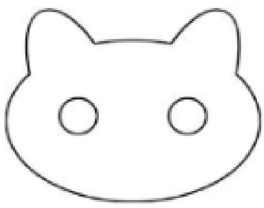
Figura 7. Formalização do Problema 1, produzida pelo professor.



Fonte: Acervo pessoal.

Um fator inicial interessante de se perceber é que os alunos prontamente reduziram a parte ao todo tomando as fatias de pizza que seriam uma parte da pizza, como sendo as unidades com as quais operaram os tratamentos (cálculos). Isso se evidencia pelo registro produzido pelo aluno L que contém quatro fatias de pizza desenhadas. De um ponto de vista da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, a questão elaborada pode ser chamado de problema gerador uma vez que "visa à construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento" (ONUCHIC *et al.*, 2021, p. 49). Neste caso, ele permite introduzir a notação fracionária necessária para a continuidade das atividades.

Problema 2: Steven Universo conseguiu achar um pacote do, agora, raro "biscoito gatinho" e queria dar um meio de "biscoito gatinho" para sua amiga Connie. Como ficaria a divisão do biscoito?

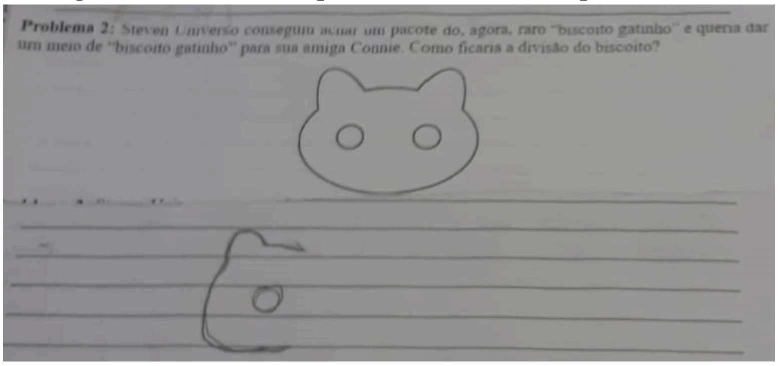


Este problema buscava ensinar a realizar o tratamento no registro figural e a ler frações, ao coordenar os registros da língua materna com o registro figural. Como os registros possuem formas de tratamento distintas e próprias (DUVAL, 2009), a representação figural permite que o discente desenhe nela como forma de tratamento, ao mobilizar esses conhecimentos, exercitando a *semiósis*, o aluno aproxima-se da *noésis* e desenvolve a estratégia heurística de utilizar figuras na resolução de problemas (POLYA, 2006).

Durante a etapa de incentivar e observar, os alunos L e V apresentaram dúvidas sobre a resolução do problema:

Rafael: Tá, vamos lá. Vocês me perguntaram se o Steven queria dar metade do biscoito gatinho pra Connie, certo? E daí vocês me sugeriram fazer um desenho.
L: Sim
Rafael: Como é que vocês fariam esse desenho?
L e V: Metade do biscoito!
Rafael: Por que metade do biscoito?
L: Porque ele vai devolver metade pra amiga dela.
Rafael: Tá escrito um meio ali, né?
V: A gente vai desenhar isso daqui né? [Desenha uma linha vertical no meio do desenho]
Rafael: Exatamente!
V: Aí então!
(Áudio de 17/08/2023)

Figura 8. Resolução do problema 2, elaborada pelo aluno L.



Fonte: Acervo pessoal.

Aqui podemos perceber uma congruência entre o enunciado e a representação figural, uma vez que as unidades significantes em um implicam os mesmos sentidos no registro de chegada, mesmo que a expressão "um meio" possua dois signos, enquanto desenhar uma metade, a rigor, só possua um signo (desenhar metade do objeto representado). Os alunos foram rápidos em identificar um eixo de simetria contido no desenho e, provavelmente de forma intuitiva, utilizaram desse fato para representar tal divisão. Existem evidências de que a representação figural apresentada, quando relacionada com a fração ½, cause essa intuição nos discentes, pois diversos outros grupos escolheram a mesma configuração ao tratar o desenho do biscoito gatinho. Transitando para o momento da plenária, após algumas resoluções serem apresentadas na lousa pelos estudantes, G explicou seu raciocínio e, assim como diversos estudantes, havia apresentado convicção na maneira de tratar o registro em questão, então o professor pesquisador decidiu indagar sobre o motivo de ter escolhido esta configuração na transformação do desenho:

Rafael: Mas é o seguinte, vamos lá, eu entendi o que tu falou, mas por que tu fez uma linha vertical e não uma linha horizontal, por exemplo?
[Discussão generalizada na turma sobre a questão]
G: Por que não seria o que está ali.
[Interrupção na explicação por conta de barulho disruptivo de conversas paralela]
G: É que se tu dividir na horizontal não vai ter as orelhas.
Rafael: Muito bem… Mas o que vocês estão pensando no fundo? É porque tem que ser partes iguais! As, e não seria justo se a divisão não fosse feita assim, se não fosse feita na vertical.

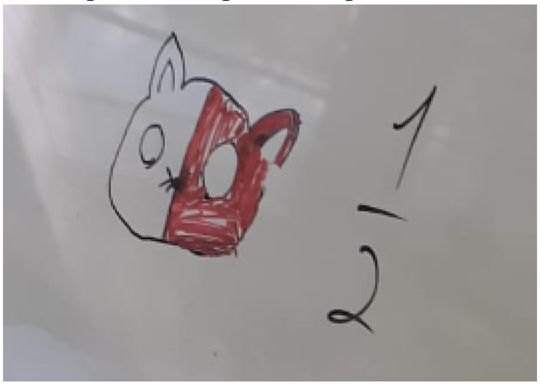
[Turma discutindo sobre se seria justo ou não dividir horizontalmente]

Após identificar alguns argumentos sobre como fazer a divisão seria mais difícil e deixar que os alunos debaterem entre si, foi utilizada a fala de algum dos alunos para formalizar o argumento:

> Rafael: Ia ser muito mais difícil, daí, tu dividir de uma maneira igual [na horizontal]. Esse é o jeito mais fácil. Mas o que eu quero que vocês foquem, tá? Que as frações, elas são, na ideia de parte todo, Elas são divididas todas em **partes iguais**, beleza?
> D: Certo!
> (Áudio de 17/08/2023)

Em seguida escrevi no quadro a formalização sobre como ler frações, com respeito a seu denominador.

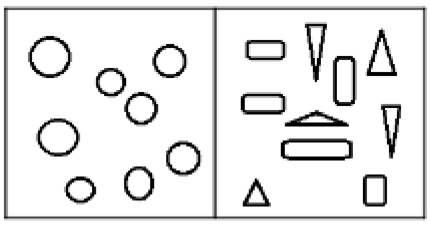
Figura 9. Resolução do problema 2 produzida pela aluno D, durante a plenária.



Fonte: Acervo pessoal.

Algumas ideias que podem ser destacadas desta seção de plenária é que os alunos aparentam relacionar a ideia de parte de um todo as frações, ao menos quando se trata de metades, visto que na imagem acima o registro aritmético está presente ao lado do registro figural, sem ter sido requisitado dos alunos tal ação e também que, nesse primeiro momento, a ideia de partes iguais se faz presente no raciocínio dos discentes, evidenciado pela unanimidade em repartir o desenho de maneira simétrica. De certa forma acreditamos que o problema cumpriu, em grande parte, sua função de desenvolver os conceitos iniciais referentes ao uso de frações e completando a proposição de novos problemas que se faz presente na metodologia apresentada (ONUCHIC *et al.,* 2021).

Problema 4: querendo apresentar a cultura da América Latina para Amity, Luz preparou uma pizza uruguaia (pizza quadrada) de dois sabores. Para facilitar a divisão, elas partiram cada sabor ao meio verticalmente,



quando elas finalmente iam comer, King roubou um quarto de pizza. Dito isso, qual é a fração que representa a quantidade de pizza que sobrou?

Analisando este problema, percebemos em seu enunciado uma série de instruções para o tratamento da figura dada, não existe possibilidade de correspondência semântica dos elementos porque temos mais de um signo que indica quantas partes o inteiro foi partido. Ainda assim, existe univocidade semântica terminal, visto que cada unidade significante elementar necessária para a resolução do problema se traduz na mesma unidade do registro de chegada, neste caso a partição do inteiro e a subtração de uma dessas partes. Sendo assim, podemos afirmar que existe um grau baixo de não-congruência entre os registros escrito e figural, já que as informações estão dispostas na maneira que os alunos precisam para a resolução do problema.

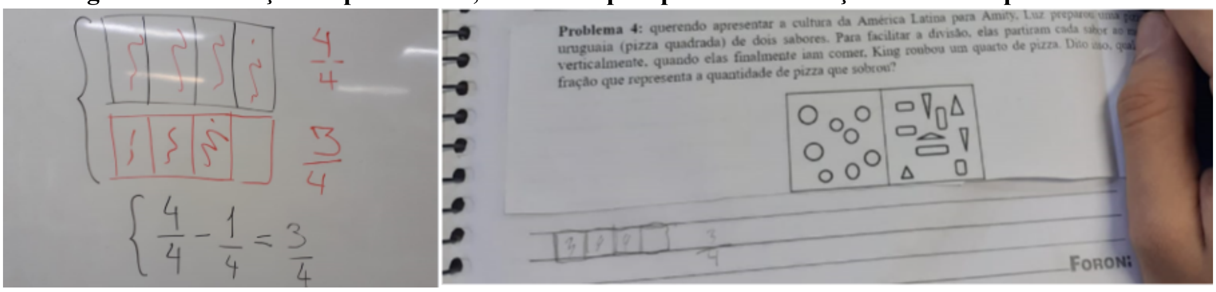
Durante a etapa de retirada de dúvidas dos alunos, foi constatado que muitos tinham questões a respeito da conversão do enunciado para a representação figural. Visando auxiliar na resolução do problema, registrei no quadro um desenho que representava a pizza dividida em quatro partes. Logo em seguida foi percebido que o aluno E, que havia conseguido interpretar corretamente as informações dispostas e chegado ao resultado correto, não havia registro do desenvolvimento da resolução em seu caderno, então o professor pesquisador o indagou sobre como ele fez para resolver o problema e aproveitei para fazer algumas formalizações a respeito do conteúdo:

> Rafael: … como é que a gente resolve numericamente, daí tu falou pra mim que fica…
> E: quatro menos um?
> Rafael: quatro menos um, tá, mas eu não quero saber os pedaços da pizza, eu quero saber da pizza toda.
> E: da pizza toda?
> Rafael: É. O que você está fazendo aí, eu posso te dizer, tem um nome para isso, você está reduzindo a parte ao todo, ou seja, você estava pensando em partes e depois pensou, tá, mas é mais fácil…
> E: Mas eu estava fazendo a pizza toda! Pra ser os quatro pedaços seria… oito dividido por…
> Rafael: eu acho que você está indo longe demais. Pensa comigo, ali é o seguinte, tem um desenho ali no quadro que eu fiz, da pizza inteira, certo? Qual a fração que representa uma pizza inteira, naquele caso ali?
> E: Quatro de quatro.
> Rafael: Quatro quartos, né? Ok, e daí quanto que tu tirou da pizza?
> E: Um.
> Rafael: Um o que?
> E: Um pedaço… um quarto!
> Rafael:Isso! E, daí, como é que fica?
> E: Três quartos.
> Rafael: Perfeito. E, daí, se a gente fosse escrever isso matematicamente, como é que ficaria?
> E: Como assim matematicamente?
> R: Tipo montar uma continha… tipo quatro sobre quatro… [gaguejo na explicação enquanto tento não dar a resposta]. Qual é a operação matemática que a gente está fazendo? Mais, menos, vezes, dividir?
> E: Não entendi, não.

> Rafael: Pensa aqui comigo, pensa aqui comigo! Quatro sobre quatro, tá? [Aponta para registro aritmético no caderno] Daí tem alguma continha que você vai fazer com um quarto, foi o que você me falou que era o pedaço, e que vai dar três quartos. Qual é a continha que vai no meio ali? Mais, menos, vezes, dividir?
> E: Se é… é menos!
> (Áudio de 17/08/2023)

Aqui percebemos um equívoco de parte do professor pesquisador ao apresentar para o aluno informações desnecessárias para o desenvolvimento do seu aprendizado e de maneira muito complexa para o vocabulário que estão acostumados, causando uma confusão desnecessária no discente. Felizmente, foi possível reformular a pergunta inicial para que ele conseguisse chegar à conclusão desejada de que 4/4-1/4=¾. No final cabe ao professor auxiliar "nas dificuldades, sem, contudo, fornecer respostas prontas, demonstrando confiança nas condições dos alunos" (ONUCHIC *et al.* 2021, p. 49) e durante este momento o aluno E ainda estava aprendendo as regras de tratamento do registro aritmético, assim, a coordenação entre o registro figural e o aritmético exige tempo para ser assimilado.

Figura 10. Resolução do problema 4, elaborada pelo professor e solução elaborada por aluno L.



Fonte: Acervo pessoal.

Problema 5: Finn, Jake, Marceline e Princesa Jujuba decidiram fazer um piquenique e combinaram de levar sanduíches diferentes. Jake levou 3 sanduíches de frango, Marceline levou 4 sanduíches de tomate, Princesa Jujuba levou 4 sanduíches doces, no entanto Finn esqueceu completamente de levar sua parte. Com pena do jovem humano, decidiram repartir todos os sanduíches em quatro partes iguais para facilitar a divisão entre todos eles, cada um dos que levaram sanduíches vão comer cinco quartos de seus lanches por que são seus sabores favoritos, em seguida vão dar 2 quartos para os outros dois amigos que tenham trazido sanduíches e, por fim, vão repartir o que sobrar com Finn, o humano.

a) Sabendo que Jake, o irmão de Finn, vai dar tudo que sobrou de seu lanche, Jujuba vai ceder 24 de sanduíche e Marceline vai dar, apenas, 14 de sanduíche, quantos quartos Finn irá comer?

b)Quantos quartos vão sobrar para Marceline e Jujuba?

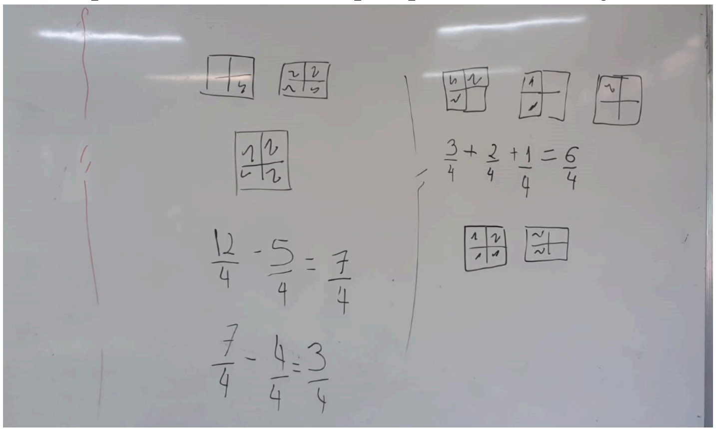
c) E se tivessem dividido em oito partes cada sanduíche?

Por conta de tempo, não foi possível fazer a sessão plenária com a turma, ainda assim os alunos E e G ficaram alguns minutos após o final da aula para conseguir terminar a tarefa, em específico o item a:

> Rafael: O que vocês estão tentando descobrir?
> G: O Jake tinha sete…
> Rafael: Vocês estão tentando descobrir quanto que sobrou do Jake? Era isso?
> E: É.
> G: O Jake é sete.
> E: O Finn comeu nove!
> Rafael: Tá, vamos lá. Vamos por partes…
> E: Não tem essa… o Finn comeu nove e a quanto sobrou pra Marceline e pra Jujuba?
> Rafael: É que eu acho que… tu falou que o Finn comeu nove… é que tá perto a resposta, mas eu acho que tu está errando alguma continha na cabeça.
> G: Ele comeu nove, sim, ou não, sor!?
> Rafael: Não, ele não comeu nove, mas é quase isso. Tá? Olha, tem três sanduíches do Jake. Vou desenhar aqui um quadradinho, tá?

Imediatamente E e G apresentaram dúvidas sobre sua resolução e começaram a revisar o enunciado do problema. É interessante notar que em nenhum momento eles optaram por produzir registros dos cálculos, preferindo resolver o problema contando nos dedos e mentalmente, anotando apenas os resultados obtidos. Aqui optamos por coordenar os registros figural e aritmético para facilitar a interpretação do problema (DUVAL, 2009):

Figura 11. Resolução do problema 5, elaborada pelo professor em conjunto com os alunos E e G.



Fonte: Acervo pessoal.

A figura 11 mostra o resultado final da discussão aqui analisada, que continuou da seguinte maneira:

> Rafael: Vou escrever aqui em número. Quatro partes, eu tenho doze quartos, certo?
> E: o Jake comeu cinco.
> Rafael: O Jake comeu cinco, então vou riscar aqui cinco partes que ele comeu e vou botar aqui em número. Comi cinco partes, cinco quartos. Sobrou… ?
> E: Sete.
> Rafael: Sete quartos, perfeito!
> E: Ele deu quatro quartos…

> Rafael: Dois quartos para Marceline e dois quartos para Jujuba?
> [Risca quatro quadradinhos na figura]
> E: Mas ele ganhou mais quatro das duas.

Aqui os discentes haviam interpretado que, ao distribuírem entre si os sanduíches, um dos personagens tinha ganhado sanduíches:

> Rafael: As, mas ele comeu esses aí. É por isso que tá dando confusão
> E: As, mas isso daí não é culpa nossa!
> G: É!
> E: Isso daí não tá explicado aqui que ele comeu. Mostrou aqui que ele "ganhou".
> Rafael: De fato, tem um erro no enun… Não é bem um erro, mas é uma coisa que deixa dúbia a interpretação. Mas eu explicando agora faz sentido, né? Enfim, vocês não estão errados, faz parte do processo que vocês estarem pensando isso…
> E: Tá, então isso daí tu tira quatro de todas as nossas anotações. G, tira quatro de todas as nossas anotações! Nove fica cinco, dez fica seis. E sete fica três
> Rafael: Tá, dez…
> E: O Jake deu todos que sobrou. Três!
> Rafael: Quantos que sobraram? Três? Tá, beleza.
> E: A Jujuba deu dois. Cinto.
> Rafael: Tá, peraí, deixa eu só ir anotando isso…
> [Anotamos as informações no quadro, riscando os "sanduíches"]
> (Áudio de 17/08/2023)

Este problema continha uma quantidade bem maior de informações, se comparado aos feitos em aula até então. Observamos que os alunos haviam conseguido resolver praticamente sem ajuda, sendo o único erro decorrente da escrita do enunciado. Por conta da dificuldade mais elevada e do grau de êxito dos alunos E e G em resolver o problema, observamos que os mesmos já conseguiam converter com certa naturalidade o registro da língua materna para o registro aritmético, como "a mudança de registro pressupõe uma coordenação de registro" (DIVAÇ, 2009, p. 83) existem, de fato, indícios de compreensão do conteúdo estudado. Vale ressaltar que os alunos E e G já apresentavam níveis similares de desenvolvimento matemático em outras atividades anteriores à pesquisa e tinham certa prática em trabalhar juntos, possivelmente essa parceria tornou o momento de resolução em grupo numa atividade muito mais proveitosa, uma vez que eles "exercitam a expressão de ideias, para o que necessitarão utilizar e aprimorar a linguagem, a fim de expressar-se com clareza e coerência e fazer-se entender" (ONUCHIC *et al.*, 2021, p; 49).

A correção deste problema foi realizada na aula seguinte, seguindo uma explicação análoga à expressa aqui, incluindo os itens b) e c). Poucos alunos conseguiram resolver sozinhos, demonstrando que o problema pode ter sido complexo demais para o momento do estudo. Cabe a autocrítica da escolha dos problemas, uma vez que, caso sejam muito difíceis, pouco, ou nenhum trabalho poderá ser realizado pelos discentes, tornando a atividade pouco proveitosa.

6.1.1 Observações gerais da primeira aula

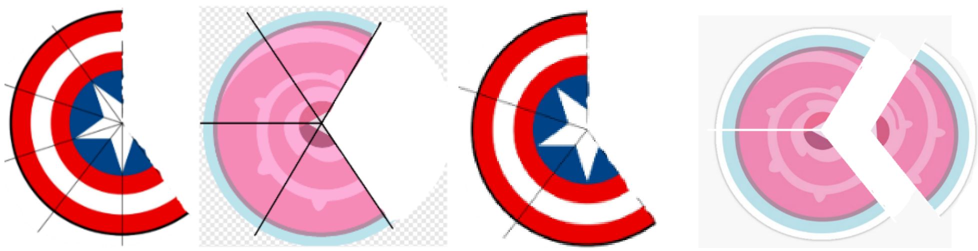
A observação é uma poderosa ferramenta no processo de avaliação do aprendizado dos alunos e é encorajado que o professor separe alguns minutos após as atividades para relatar tais observações. Sobre a óptica das ideias apresentadas em (ONUCHIC *et al.*, 2021), foi escrita uma espécie de "diário de classe" contendo algumas observações pertinentes a aula do dia 17/08/2023, dentre elas damos, a partir das respostas elaboradas pelos alunos, a representação da ideia de parte todo no registro figural e aritmético parece ter sido assimilada pelos alunos, mesmo que tenham surgido alguma dúvidas advindas da confusão entre a palavra inteiro e denominador 1. Muito provavelmente isso ocorre pela confusão entre representante e representado contida no registro figural, uma vez que o ato de reduzir a parte a unidade se mostrou bastante comum entre os alunos, em outras palavras, existe um equívoco ao entender as partes de um todo como sendo a unidade inteira, assim um quadrado dividido em quatro partes deixa de ser 4/4 e torna-se 4/1. Outro fato importante de se destacar durante este momento de análise é que a estrutura dos quatro passos para resolução de problemas apresentada em (POLYA, 2006) acabou sendo pouco utilizada na maioria dos momentos, pois os alunos, como visto na transcrição dos áudios, apresentavam dúvidas relativas à interpretação dos enunciados, muitas vezes sendo necessário que o professor-pesquisador interviesse no processo de resolução.

Ao final da aula, os alunos apresentavam-se muito dispersos, por conta disto, foi necessário empregar algumas mudanças na dinâmica dos encontros. Inicialmente os problemas não mais seriam entregues individualmente, mas sim em listas, uma vez que muitos alunos estavam ficando ociosos e acabavam se dispersando, pois eu não conseguia atender todas as demandas da turma de uma só vez (tirar dúvidas, entregar problemas, incentivar, resolver conflitos, etc.). Outra mudança foi a quantidade de integrantes dos grupos, pois eventualmente a conversa paralela ficava muito alta, o que fazia os outros alunos terem dificuldade para se concentrar. Por fim, foi decidido que seriam entregues "fichas" com exercícios simples de conversão entre os registros da língua materna, figural e aritmético para aqueles discentes que conseguissem completar as atividades antes do momento de formalização, ou que quisessem estudar em outros momentos.

6.2 Análise da segunda aula

É importante aqui contextualizarmos o ambiente em que ocorreu a segunda aula desta pesquisa. Os alunos tinham um passeio escolar no turno da tarde daquele dia e nosso encontro começou no 3º período, logo antes do recreio. Foi bastante difícil manter a atenção da turma nas atividades, visto que estavam empolgados para o evento, isso se refletiu diretamente no desempenho dos discentes, bem como na quantidade de dados coletados no dia. A demora para a correção do problema 5 foi outro fator que, possivelmente, causou essa desatenção na turma já que tinha um nível de complexidade bastante elevado e muitos alunos não estavam investidos em sua resolução, afinal um problema (e por consequência sua importância para o aprendizado) se configura através de sua relação com o resolvedor (Onuchic *et al.*, 2021).

Problema 7: Pensando nos exercícios anteriores quais frações representam a quantidade de escudo restante nas figuras a seguir? O que mudou?



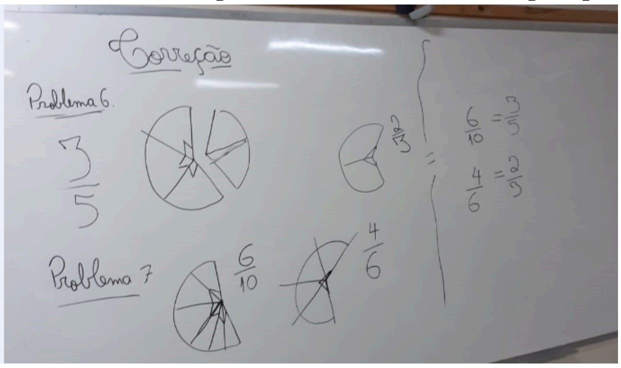
Os problemas 3 e 6 continham as figuras mais a direita, elas foram incluídas aqui para facilitar a leitura da análise.

A correção dos Problemas 6 e 7 foram feitas uma seguida da outra, no dia 24/08/2023 por que não foi possível realizar no dia 18/08/2023, durante o momento de formalização foi optado por reproduzir todas as representações no quadro para facilitar a visualização para os alunos. A intenção aqui era introduzir o conceito de frações equivalentes através do tratamento do registro figural, coordenado com o registro aritmético. Ao indagar sobre o que mudou o aluno G levantou a mão para falar:

> Rafael: O que mudou nos escudos?
> G: Mudou a quantidade de partes.
> Rafael: A quantidade de partes que foi reduzida. Mas a quantidade de escudo mudou?
> G: Não
> (Áudio de 24/08/2023)

Aqui a resposta inicialmente oferecida por G não revelava a totalidade do entendimento da questão, pois existiam mais unidades significantes que precisavam ser identificadas durante o tratamento da representação, por isso foi necessário a pergunta referente ao que "havia se mantido".

Figura 12. Resolução dos problemas 6 e 7, elaborada pelo professor.



Fonte: Acervo pessoal.

No decorrer da discussão, na tentativa de formalizar o conceito referente a frações equivalentes, foi repetida a indagação de outra forma para os alunos:

> Rafael: Vocês concordam comigo, então, que essas frações, tipo, a seis décimos… e a três quintos representam a mesma quantidade?
> Vários alunos: Não!
> Rafael: Ué, por que não?
> V: Porque tem mais. É seis quartos!
> D: As duas eram o mesmo escudo!
> Rafael: Oi? [Pedindo para que D repetisse]
> D: As duas eram um único escudo.
> (Áudio de 24/08/2023)

Para a resolução deste problema era necessário a coordenação entre os registros figural e aritmético, entender que a "quantidade de escudo" é equivalente ao "valor do número". Durante o momento de resolução, foi percebido que muitos alunos se depararam com um problema desafiador, tanto na identificação da quantidade de partes totais que ambos escudos haviam se partido (conversão entre registro figural e aritmético), quanto em dizer exatamente o que mudou entre as figuras, provavelmente, por causa de quão aberta era a pergunta e da configuração das figuras.

Ao revisar os áudios gravados da correção deste problema, foi percebido que diversas vezes os alunos se dispersaram ao fundo, no entanto a Metodologia utilizada busca ter o aluno como agente principal no processo de construção do conhecimento (ONUCHIC *et al.*, 2021), sendo assim é provável que mesmo após G ter apresentado o argumento correto os colegas não tenham escutado, dificultando seu aprendizado. Em geral, parece que a concepção mais tomada por eles seria de que teria aumentado/diminuído o "valor total" (dependendo de como olhasse as figuras) das frações, revelando uma falha na coordenação dos registros, ou na identificação das regras de tratamento da representação figural. As falas “mudou a quantidade de partes” e “as duas eram um único escudo” demonstram que os alunos G e D, possivelmente, conseguiram identificar os padrões no tratamento das figuras, algo essencial para que ocorra a conversão entre registros e, por consequência, a aprendizagem do objeto matemático em questão (DUVAL, 2009), que são as frações equivalentes.

Mesmo após revisar as respostas dos discentes, o professor pesquisador tefe dificuldades na formalização do conceito com o resto da turma, refletindo sobre isso acredito que esteja parcialmente ligado com a falta de congruência semântica para o signo de “=” do registro aritmético. No registro figural este signo está contido da semelhança entre duas figuras, não sendo possível separar essa unidade significante das outras (como a quantidade de partes que foi dividido). Em geral, foi possível perceber que apenas ver as informações apresentadas não é suficiente para que os discentes consigam realizar as conexões entre os aspectos que caracterizam a equivalência de frações no problema, sendo necessário mediação do professor em muitos momentos. Mas aqueles alunos que identificaram o padrão por si, ou buscaram participar ativamente da plenária, conseguiram dar os primeiros passos no entendimento deste conceito.

Problema 8: tendo 3 cartolinas, uma azul, uma amarela e uma rosa, para dividir igualmente entre quatro grupos de alunos, quanto de cartolina cada grupo receberá no total? Qual fração representa essa quantidade?

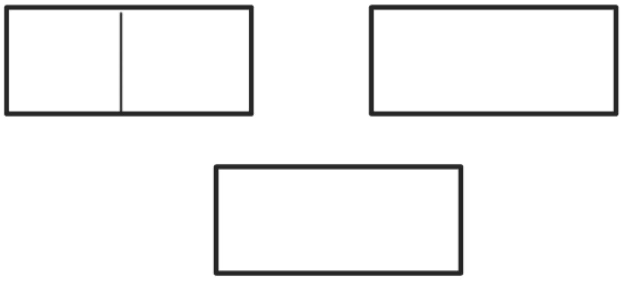
Esse problema não pode ser corrigido no dia 18/08, por falta de tempo. No encontro seguinte, foram feitas as correções e formalizações. No dia em questão, foi decidido corrigir o problema no quadro, perguntando aos alunos como realizaram a tarefa.

> Rafael: tá, vamos lá. Tem gente falando três, tem gente falando três quartos...
> V: eu falei três quartos!
> Rafael: eu ouvi em algum lugar um quatro. E aí, qual vocês acham?
> V: três quartos!
> Rafael: Por que três quartos, V?
> V: Por causa que... oh... Vai fazer... e aqui é cartolina, e aí sor... tu da... tinha quatro grupos né? Aí tu pega uma cartolina e parte no, ai tem meia cartolina... aí tu da pros quatro.

Nesse momento, muitos alunos ficaram confusos com a explicação e o professor pesquisador pediu que ele apresentasse o raciocínio no quadro. V então decidiu utilizar uma representação figural para explicitar aqui que havia pensado, inicialmente ele desenhou 3 quadrados que representavam as cartolinas do enunciado, em seguida aplicou uma modificação mereológica ao registro traçando um risco que dividia a primeira cartolina ao meio.

> V: Eu quero dar esse daqui, esse daqui, esse daqui, esse daqui, que dá quatro.
> Rafael: Ah, mas eu quero repartir... Eu entendi o que tu quis, mas eu quero repartir igualmente...
> (Áudio de 24/08/2023)

Figura 13. Representação do desenho de V, elaborado pelo professor.



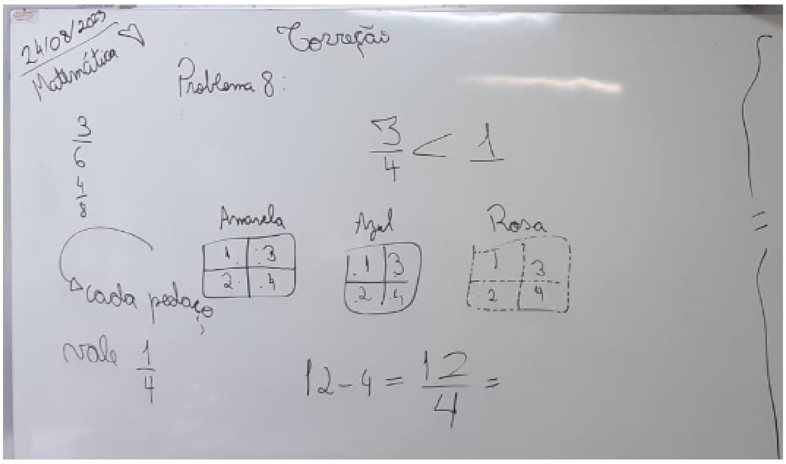
Fonte: Acervo pessoal.

Aqui, há evidências, pela apresentada pelos alunos, do entendimento de um conceito que (ONUCHIC e ALLEVATO, 2008, p. 88) vão chamar de personalidade do quociente, se referindo a uma fração, “[...] quando um número de objetos precisa ser repartido igualmente num certo número de grupos”. Isso se evidencia ainda mais com a fala do aluno B, que após alguma discussão, não muito organizada, com os colegas, defendeu que cada cartolina deveria ser repartida em quatro partes.

> Rafael: ah, por que tu acha que foi quatro partes, B?
> B: porque... [reparte os desenhos em quatro partes]... quatro partes, mais quadro dá oito, mais quatro dá doze. Doze dá pra dividir por três e dá quatro: 3, 6, 9, 12!
> Rafael: Tá, eu entendi!
> B: Daria 3 pra cada grupo.
> (Áudio de 24/08/2023)

Foi necessário uma pequena correção, pois B estava escrevendo 12/4, indicando que seria 3 partes para cada grupo. Mais uma vez, os alunos estavam reduzindo a parte ao todo, tomando os quartos como unidade. É interessante ver que os alunos já começavam converter entre a língua materna e o registro figural, possivelmente para fins de simplicidade de tratamento, uma vez que, nesse primeiro momento, converter diretamente ao registro aritmético se mostrava uma tarefa complexa, por não terem domínio de tal representação. É interessante analisar que essa conversão apresenta congruência entre o enunciado, caso o estudante perceba que a informação das “cores das cartolinas” é irrelevante para a resolução, tal congruência ocorre pois o desenho realizado se trata de um representação da descrição dada no enunciado, as unidades significantes de 3 cartolinas e repartidas entre quatro grupos são facilmente desenhadas como 3 quadrados repartidos em 4 partes. Olhando desta maneira, temos um caso de congruência entre registros, uma vez que a ordem das informações pouco importa ao registro figural, de acordo com as ideias de (DUVAL, 2009). Em geral esse problema parece ter introduzido o conceito de fração como um quociente, que era um dos objetivos do trabalho.

Figura 13.1. Resolução do problema 8, elaborada por V e B.



Fonte: Acervo pessoal.

Cabe aqui a autocrítica a respeito das observações iniciais de V, pois acreditamos que ao desenhar os três quadrados e partir um ao meio, a fração ¾ dita por ele no início da discussão não representava a "resposta correta" ao problema, em que as 4 partes não eram partes iguais. Infelizmente, um dos desafios do professor nesse momento do desenvolvimento da metodologia, na prática, é conseguir formalizar o conteúdo matemático de acordo com as necessidades da metodologia e da turma, ao mesmo tempo que realiza correções específicas e individuais a cada aluno. No caso desse momento, não foi possível fazer uma intervenção direta com V, devido às demandas da turma como garantir que a ordem seja mantida, por conta de conversas paralelas e brincadeiras maldosas, e que novos problemas sejam propostos para continuar o desenvolvimento dos conceitos matemáticos estudados.

6.2.1 Observações gerais da segunda aula

Como já dito no início da sessão referente a análise dos dados coletados, o contexto em que a turma estava inserida não favorecia a resolução de problemas, visto que esta é uma atividade cognitiva que demanda muito foco dos discentes. Também foi um ponto negativo a demora na correção do Problema 5, uma vez que muitos alunos tiveram dificuldade, mesmo com ajuda, de resolvê-lo, (ONUCHIC *et al.,* 2021) destaca a importância na escolha e preparo dos problemas no processo de ensino-aprendizagem-avaliação uma vez que eles compõem um aspecto central na Metodologia, assim, acreditamos que este problema não tenha sido o mais adequado para este momento no desenvolvimento dos alunos.

Durante o desenvolvimento das atividades, os alunos apresentaram um grau de dificuldade bastante saudável em relação aos problemas, exercitando as regras de tratamento e conversão do registro figural através dos problemas propostos em aula. Este desafio impelido aos discentes é destacado por (POLYA, 2006) e (ONUCHIC *et al.*, 2021) em momentos diferentes de suas obras para relatar as potencialidades da metodologia no desenvolvimento dos alunos, os fazendo refletir sobre suas heurísticas e seus aprendizados prévios.

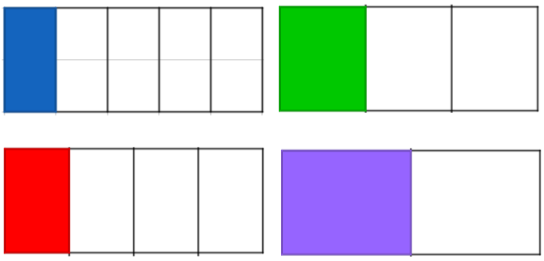
Por fim, pode-se dizer que essa aula foi bastante positiva, dada a situação, já que os alunos (na semana seguinte) conseguiram compreender os conceitos trabalhados nos problemas. Aqui é importante ressaltar que, como docente, demorar para corrigir as questões é um problema, visto que os alunos acabam esquecendo/se dispersando da resolução das atividades, reforçando na prática os passos sugeridos pelo GTERP em seu roteiro de aulas e como é necessário que o professor saiba lidar com trabalho em grupo dos estudantes, uma vez que esta forma de atividade é exigida para os estudantes poderem trocar ideias e aprenderem a expressarem-se. Mas também pode gerar ruídos muito altos, que atrapalham alunos que precisam silêncio para se concentrarem.

6.3 Análise da terceira aula

Para esta aula foram planejados oito problemas referentes ao ordenamento de frações, frações equivalentes e fração de uma quantidade. No entanto, devido ao encontro anterior ter sido influenciado negativamente por conta das adversidades de sala de aula, grande parte da terceira aula foi dedicada à correção dos problemas pendentes. Segundo (ONUCHIC *et al.*, 2021) a etapa de formalização é responsável por organizar de maneira formal os conceitos, princípios e procedimentos necessários para a resolução dos Problemas, no entanto foi observado que a quebra de sequência didática leva a um certo desânimo por parte dos alunos.

Problema 10: todos os retângulos abaixo têm o mesmo tamanho. Sabendo disso, expresse cada parte colorida por uma fração, em seguida complete as lacunas, ordenando essas frações.

OBS.: o símbolo “<” significa “menor que”, por exemplo: 3<5.

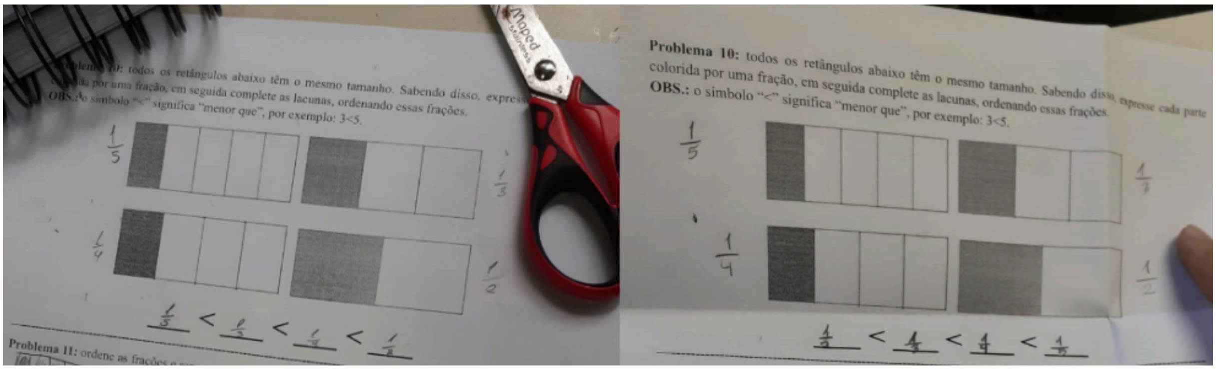


Assim como o problema 8, este não pode ser corrigido com a turma no dia 18/08/2023, no entanto, neste mesmo dia, foi possível ver o trabalho de alguns alunos. Em particular, V apresentou algumas dúvidas sobre a resolução deste problema.

> Rafael: Tá, qual é a tua dúvida? Já leu?
> V: Já
> Rafael: Tá, e o que tu acha?...
> [conversa é brevemente interrompida por alunos dispersos]
> V: … Eu suspeito que seja quase a mesma coisa que isso daqui [aponta para questão 7]
> Rafael: Tá, vamos olhar aqui, oh…
> [Realizei a leitura do enunciado com V]
> Rafael: … em seguida complete as lacunas ordenando essas frações. Ordenar é tipo… dizer qual é maior que a outra, né? Tipo aqui… [aponta para o enunciado] três é menor que cinco. Qual fração que representa cada um desses caras aqui? [Indico a imagem referente a fração ⅕]
> V: um, dois, três, quatro, cinco… Cinco na um? Um quinto!
> Rafael: Isso, um quinto! Um é a quantia de parte, 5 é quantas partes tem no total.
> V: Um quinto.
> Rafael: Isso, então é um quinto aqui. [Indico que ele anote a fração ao lado da figura]. … Tá, repete o processo para cada um desses [Aponto as outras figuras do enunciado], mas antes de tu fazer isso daí … eu vou te fazer uma pergunta. Cada um desses aqui [retângulos] vai ter uma fração, que é um número [Interrupção por conta de dispersão dos alunos] … Aí tu concorda comigo que, tipo, esse quadrado aqui da direita embaixo, ele é maior que esse aqui de cima, a parte pintada no caso, certo?
> V: Sim!
> Rafael: E tem uma ordem, certo? Tipo esse… [aponta para o representante de ⅕]
> V: Pequeno, médio, grande, gigante!
> …
> Rafael: É a ordem do tamanho deles. Então, essa vai ser a ordem dos números. Agora é descobrir quais são os números e qual que é essa ordem. E daí, tenta reparar algum padrão.
> (Áudio de 18/08/2023)

Infelizmente, durante a explicação, em muitos momentos o professor pesquisador sentiu que conduziu demais o raciocínio de V, dando pouco tempo para que ele conseguisse compreender o enunciado, pois as diversas interrupções decorrentes das demandas de sala de aula acabam, muitas vezes, quebrando a linha de raciocínio tanto do aluno, quanto do professor, tornando muito difícil seguir os passos sugeridos pela metodologia. Dificuldades didáticas a parte, aqui é perceptível um certo problema na compreensão do enunciado por parte de V, pois uma vez feita a leitura e indagado aquilo que se pede no enunciado, o discente rapidamente conseguiu identificar as unidades significantes necessárias para realizar a conversão entre registro figural para aritmético, muito devido a congruência de registros. As dificuldades residem, no entanto, em entender o ordenamento desses valores, uma vez que é necessário entender que a "quantidade pintada" representa o valor do número.

Figura 14. Resolução do problema 10 produzida pelos alunos V e L.



Fonte: Acervo pessoal.

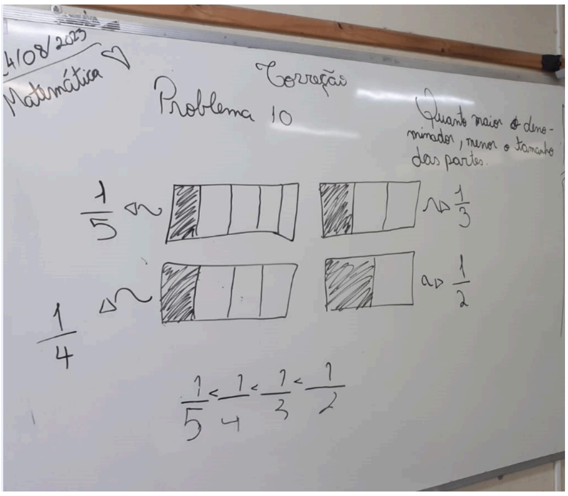
As imagens acima foram coletadas posteriormente dos cadernos dos alunos V e L, respectivamente. Na esquerda vemos a ordem correta das frações, "⅕ < ¼, < ⅓ <½", no entanto na direita tal ordem encontrasse incorreta, com as frações tendo sido ordenadas de acordo com os denominadores, "½ < ⅓ < ¼ < ⅕", isso, muito provavelmente, ocorre pelo fato do aluno não ter compreendido a relação entre "quantidade pintada" e "valor do número", tomando, assim, o valor dos denominadores como sendo a ordem a se utilizar.

No dia 24/08, então, foi possível realizar a correção junto com a turma. Muitos não conseguiram resolver o problema e apresentavam dificuldades em entender o enunciado.

> [Desenha as figuras do enunciado no quadro]
> Rafael: Qual é o pulo do gato aqui nessa questão? A ideia de maior e menor era ver qual **figura** que era maior. Por exemplo, a figura aqui do meio era gigantona, certo? A figura do quinto é a menorzinha de todas! A figura do terço era um pouco menor que o meio e a um quarto era a segunda menor.
> L; Sim!
> [Aponta para os desenhos]
> Rafael: Com isso, tu colocando na ordem de menor até o maior, fica um quinto, um quarto, um terço e um meio. Eu pergunto pra vocês, vocês repararam algum padrão nas frações?
> L: Sim!
> Rafael: Qual padrão, L?
> L: Em cima é tudo um.
> Rafael: Ok, em cima é tudo um, beleza. E embaixo?

D: É... Foi na ordem.
Rafael: Perfeito!
L: Foi diminuindo. Foi cinco, quatro, três, dois.
M: Contagem regressiva.
(Áudio de 24/08/2023)

Figura 15. Correção e formalização do problema 10, elaborada pelo professor



Fonte: Acervo pessoal.

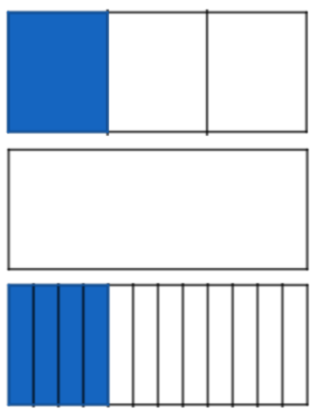
Em seguida foi feita a formalização do conceito, indicando que quanto maior o denominador, menor é o tamanho das partes, procurando coordenar a representação gráfica com o registro aritmético, dando a ideia de ordem às frações.

É interessante destacar que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação "através" da Resolução de Problemas, segundo as ideias contidas em (ONUCHIC et. al., 2021), trata-se de um processo onde o aprendizado das Matemáticas se dá juntamente com a resolução dos problemas propostos e, mesmo que o "problema 10" apresente um enunciado simples no contexto da matemática pura, dado o nível de aprendizado dos alunos esse se configurou como um problema bastante desafiador, para resolvê-lo seria necessário considerar "o que significa ordenar as frações" e não apenas isso o que o símbolo de "<" significa neste contexto. Segundo os relatos dos alunos, durante o momento de incentivar a resolução, muitos relataram não estar familiarizados com tal símbolo, mesmo que já tivessem sido expostos a tal notação em aulas anteriores às desta pesquisa.

Assim, seguindo os conselhos de G. Polya, tentei auxiliar os alunos na identificação do padrão contido nas figuras (ordem de crescimento), buscando evidenciar as unidades significantes contidas na representação (número de partições totais, número de partições pintadas e tamanho das partições), dando a ideia de ordenamento baseado na “quantidade que estava pintada”, contudo a conclusão tomada acerca do motivo desse ordenamento ficou por parte dos alunos. Aqui, essa dificuldade na coordenação dos registros figural e aritmético por parte dos alunos, possivelmente, ocorre por três fatores, a ideia de ordenar não ter sido abordada previamente, pois era minha intenção ver qual seria a intuição dos alunos durante a resolução, a falta de familiaridade com a notação utilizada, no caso o símbolo “<” (menor que), e a não-congruência entre os registros figural e aritmético, pois a ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das duas representações não é respeitada (DUVAL, 2009). A unidade significante referente a ordem de “maior para menor” no registro figural seria “quantidade pintada”, enquanto no registro aritmético seria “valor do número”, ou seja, na representação de partida as figuras estavam misturadas, na de chegada elas precisavam ser ordenadas da esquerda para a direita. Independentemente, essas observações corroboram para a importância do momento de sessão plenária no processo de ensino-aprendizagem, “esse é um momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemáticas e relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo” (ONUCHIC *et al.*, 2021, p. 50). Não apenas isso, mas no contexto deste problema se torna indispensável para o entendimento do objeto matemática (nesse caso, o ordenamento de frações), pois “é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis. É nestas duas condições que uma representação funciona” (DUVAL, 2012)

Problema 12: resolva a charada: eu tinha ___ partes de ____ partes totais.

- Quando dobrei a quantidade de divisões, fiquei com 4 partes de 12 partes totais.
- Quando reduzi pela metade a quantidade de divisões, fiquei com 1 parte de 3 partes totais.



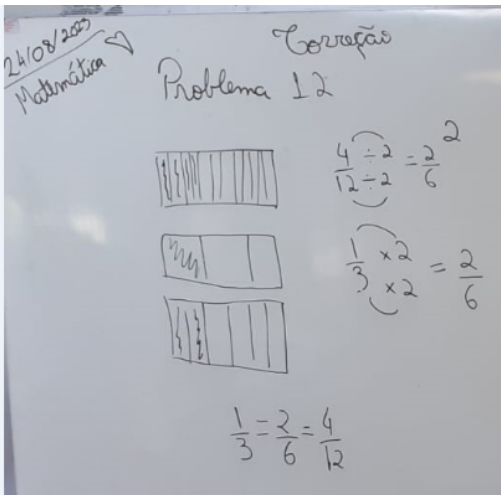
- Quais são os números que completam as lacunas? Como você completaria o desenho do meio?

O problema doze foi desenhado pensando em ser um tipo de charada para os alunos, apresentando uma quebra no paradigma dos enunciados trabalhados até então. No entanto, o problema apresenta um alto grau de não-congruência entre os registros aritmético, figural e escrito, pois não existe correspondência semântica, univocidade semântica terminal e nem ordem dentro da organização das unidades significantes, esta total falta de congruência segundo (DUVAL, 2009) leva a um baixo índice de êxito por parte dos alunos. Durante os momentos de mediação com os alunos, B apresentou dúvidas e, após ele realizar a leitura perguntei:

> Rafael: O que tu não entendeu?
> B: Sor, não, eu entendi… Como é que faz, mas é que não… vai, sabe? Não…
> Rafael: Tá, olha só. Qual o número que o dobro dele é doze?
> B: Vinte e quatro.
> Rafael: Não, qual o número que o dobro…Não o dobro de doze. Eu quero saber o número que o dobro dele é doze.
> D: Seis…
> B: Oito?
> Rafael: Oito mais oito é dezesseis!
> B: Seis!
> D: Dois sextos…
> Rafael: Ok.
> D: É dois sextos.
> (Áudio de 24/08/2023)

Neste momento foi necessário apresentar as informações contidas no enunciado de uma maneira diferente, essencialmente realizando um tratamento no enunciado para que B conseguisse formular seu raciocínio. A participação de D, por mais que seja sempre ótimo que os alunos trabalhem em equipe, acabou interrompendo o raciocínio de B, pois ao expressar a resposta final não permitiu que B construísse seu pensamento.

Figura 16. Correção e formalização do problema 12.



Fonte: Acervo pessoal.

Durante o momento de correção do problema, ao perguntar "o que o problema quer que a gente descubra" e "como resolver essa charada" , nenhum aluno se mostrou confiante para compartilhar sua resolução. Aqui, para resolver o problema, é observável a necessidade de uma coordenação entre os registros aritmético e figural similar ao Problema 10, em que a "quantidade pintada" representa o "valor do número", tal raciocínio também foi explorado na problema 7 em aulas anteriores, assim temos evidências de que os alunos demonstraram dificuldades ao identificar o valor de uma fração em ordem de grandeza, ou seja, não identificaram uma unidade significante crucial para o registro aritmético, visto que "a conversão das representações requer a identificação das unidades significantes nos registros de saída e chegada" (DUVAL, 2009, p. 99). Esta observação reforça a ideia de que apenas introduzir exercícios de conversão de casos não é o suficiente para que o aluno consiga coordenar os registros, tão pouco a proposição de problemas os quais os alunos não consigam realizar a resolução sem grande intervenção do professor. No contexto da metodologia adotada, as informações recebidas com base nas observações registradas permitem ao professor identificar o desempenho dos alunos, pois "é importante acompanhar as mudanças e o desenvolvimento de cada aluno para orientar sua prática e o modo como pode conduzi-lo ao sucesso na aprendizagem" (ONUCHIC *et al.*, 2021, p. 77), em particular perceber o fato dos alunos, em maioria, não estarem conseguindo identificar quanto vale"uma fração.

Em retrospecto, deveriam ter sido elaborados problemas que permitissem aos alunos aprofundar a coordenação entre as unidades significantes "quantidade pintada" e "valor da número" que partissem de um ponto similar ao apresentado no Problema 7 e, talvez, relacionar com a reta numérica. Infelizmente, durante o planejamento das atividades, por mais que tenha identificado a dificuldade dos estudantes neste aspecto, faltou ao pesquisador a experiência docente para perceber que tal representação (pictórica e aritmética) apresentava potencial na formulação de problemas para o aprendizado dos alunos.

6.3.1 Observações gerais da terceira aula

No diário de classe referente ao dia 24/08/2023 foram anotadas observações a respeito do desempenho dos alunos na resolução de problemas na sala de aula, destacando que os alunos não são muito participativos durante as plenárias, contudo este momento é rico para o aprendizado necessita do debate de ideias entre os alunos, com o professor sendo mediador e guia (ONUCHIC, 2023).

A respeito dos problemas trabalhados, foi observado que a maioria dos alunos conseguia converter com, relativa, rapidez entre os registros quando trabalhávamos frações como sendo partes de um todos.

6.4 Análise da quarta aula

A quarta aula foi dedicada ao estudo de frações como um operador. Inicialmente os problemas 14, 15 e 16 foram formulados para serem aplicados no dia 24/08/2023, contudo não foi possível trabalhá-los neste dia.

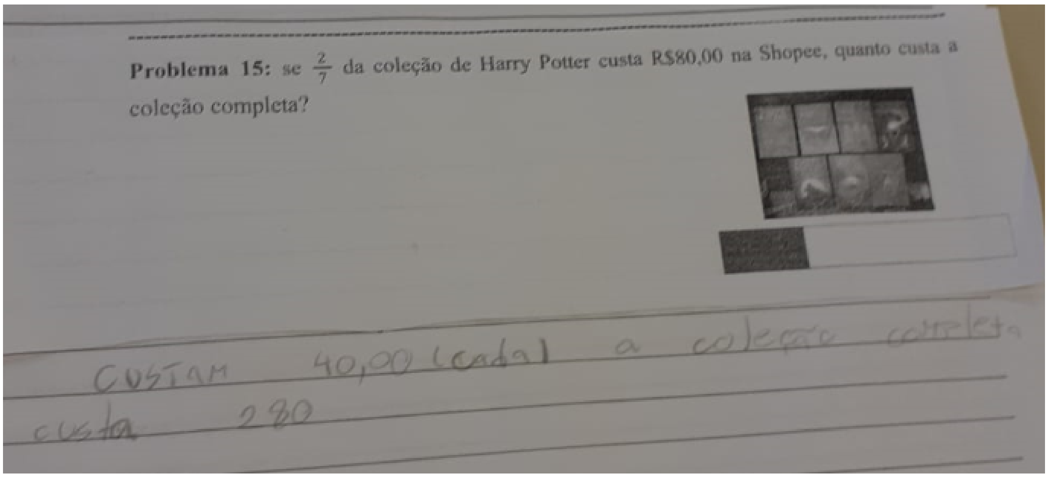
Problema 15: se 2/7 da coleção de Harry Potter custa R$80,00 na Shopee, quanto custa a coleção completa?

Este problema visava ensinar a ideia de fração de uma quantidade, ou fração como operador, como apresentado em (ONUCHIC e ALLEVATO, 2008). Ele servia como uma expansão direta do Problema 14, o qual os alunos não tiveram grandes dificuldades. Após alguns minutos de realização da tarefa, os alunos V e L resolveram o problema, mas não registraram o desenvolvimento da resolução. O professor pesquisador havia ajudado com alguns problemas na interpretação do enunciado, então foi decidido indaga-los para saber se eles de fato tinham entendido o processo de resolução:

> Rafael: … ô L, mas ali na… no problema quinze por que que cada livro dá quarenta reais?
> L: … porque esses dois sétimos da coleção do Harry Potter dá oitenta, então cada livro é quarenta.
> Rafael: Tá, mas qual foi a conta… como é que tu chegou nisso?
> L: Porque dois livros vai dar oitenta, daí eu diminui.
> Rafael: Ah, entendi! Então, tipo… a gente pode dizer que um sétimo da coleção vale quarenta reais. Por que seria um livro?
> L: Sim.

> Rafael: Beleza, e depois como é que você fez para descobrir o valor total?
> L: Eu fiz quarenta… quarenta reais vezes sete.
> Rafael: Perfeito, é isso!
> (Áudio de 25/08/2023)

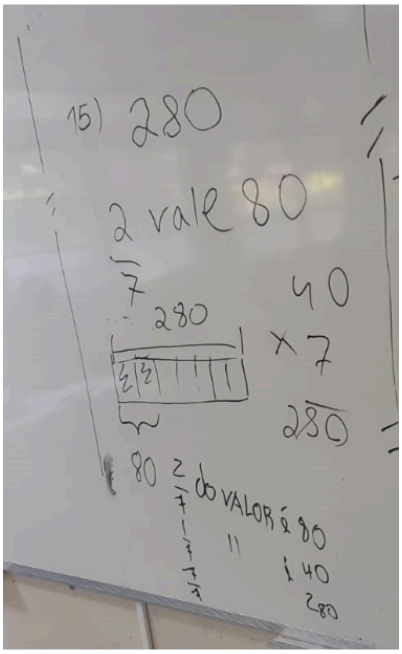
Figura 17. Registro do problema 15 elaborado por L.



Fonte: Acervo pessoal.

Para a resolução deste problema era necessário relacionar duas partes da figura ao número 80 e, assim, utilizar um tratamento (cálculo) para descobrir que uma parte valia 40. Nota-se na fala de L que a operação realizada que ele caracteriza como "diminui", muito provavelmente foi, na realidade, uma divisão por 2, já que eram duas partes que valiam 80. Isso, possivelmente, demonstra um alto nível de familiaridade com as atividades cognitivas fundamentais da *semiósis* (DUVAL, 2009), uma vez que ele não necessariamente precisa do signo representante (palavra dividir) para expressar a ideia de repartir um número (nesse caso, diminuir o valor total). A articulação com a qual L explica os passos para a resolução do problema sugerem um movimento na apreensão do objeto matemático estudado, visto que consegue verbalizar os passos utilizados na conversão dos dois sistemas semióticos, indicando o conhecimento das regras de tratamento inerentes a cada um e a habilidade de converter "espontaneamente" entre eles. Claro, como já mencionado, ainda houve uma certa mediação na identificação das unidades significantes que compunham o registro figural (interpretar o texto), mas parecem existir evidências de que a metodologia adotada colabora no aprendizado, visto que em nenhum momento foi dito como resolver problemas desse tipo e, até o momento, a formalização do problema ainda não havia sido realizada.

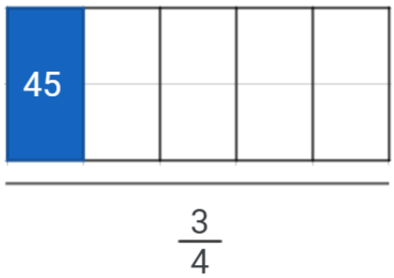
Figura 18. Resolução do problema 15 elaborado pelo Professor.



Fonte: Acervo pessoal.

Durante o momento de resolução com a turma, buscou-se destacar a maneira de se escrever a resposta no registro da língua materna, visando utilizar a congruência entre registros para facilitar o aprendizado.

Problema 16: resolve a charada preenchendo a lacuna. Eu peguei 3/4 de ____ e obtive um número, em seguida peguei 1/5 desse número e obtive 45.



DICA: tente utilizar o desenho das barrinhas para ir descobrindo passo a passo a resposta

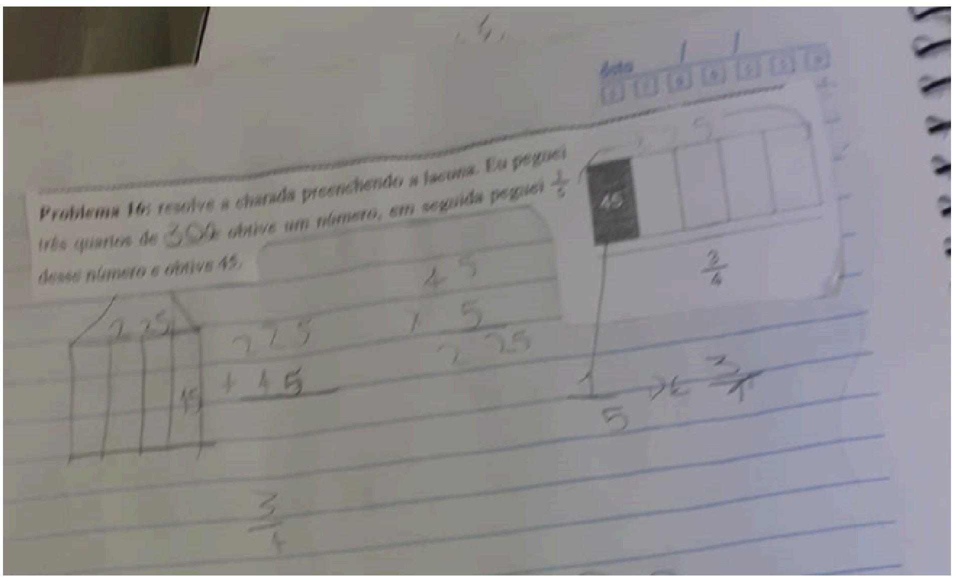
Este problema era uma expansão direta dos Problemas 14 e 15, sendo necessário utilizar os raciocínios utilizados em ambos, juntamente com a adição de uma segunda figura para representar o "total" que seria preenchido na lacuna. Ao andar pela sala vendo como os discentes estavam trabalhando, o aluno B pediu ajuda com a interpretação do enunciado. Após pedir para que ele realizasse a leitura, começamos os esclarecimentos:

> Rafael: O que isso significa, tá? TODO esse desenho, tudo isso aqui (apontando para a figura do enunciado), é o três quartos.
> B: Ah, tudo isso daqui é três quartos?
> Rafael: Isso tudo é três quartos da lacuna! Ok?

B: Tá…
Rafael: E daí aqui, tem um, dois, três, quatro, cinco partes, uma parte vale quarenta e cinco, ou seja, um quinto vale quarenta e cinco… Ok?
B: Uhm.
Rafael: Como é que a gente… agora… como é que a gente… o que a gente pode fazer pra tentar descobrir o valor da lacuna?
B: A lacuna pode ser quarenta e cinco vezes cinco!
Rafael? Qua daí a gente vai descobrir todo esse tamanho aqui? (aponta para a figura do enunciado)
B: É!
Rafael: Tá, beleza, daí a gente vai saber quanto que é três quartos do número. Certo?
B: Certo…
Rafael: Aí, a gente tem que descobrir quanto que vale o número todo. Tá? Mas é por ai…
B: Então…! Então, se isso daqui vale três quartos.
Rafael: Isso daqui tudo, todo quadradão vale…
B: Todo o quadrado aqui? (Se referindo ao desenho)
Rafael: Isso, os cinco quintos vale três quartos (do total).
B: Então, quarenta e cinco vezes cinco…
Rafael: Vale três quartos…
B: Que no caso daria duzentos e vinte e cinco…
Rafael: Pode anotar isso, por favor?
(Áudio de 25/08/2023)

Percebendo que a quantidade de informações a respeito da resolução do problema estava aumentando muito, foi pedido para que B registrasse em seu caderno aquilo que estávamos fazendo para que não se perdesse no raciocínio. Nesse momento o professor pesquisador tentou ensinar/reforçar a ideia de utilizar figuras para a resolução do problema (POLYA, 2006), dando algumas instruções de como ele poderia utilizar resoluções anteriores de maneira análoga nesse problema, em seguida deixei que ele tentasse resolver o problema sozinho como mostrado na figura 19:

Figura 19. Registro do problema 16 elaborado por B.



Fonte: Acervo pessoal.

Na figura 19, o retângulo repartido em quatro partes que se encontra à esquerda representa o valor que iria na lacuna, podemos perceber que o aluno, com auxílio, indicou que três quartos do total era 225, mas ao tentar determinar o valor do último "quarto" ele se confundiu e escreveu o número 45, que representava 1/5 de 3/4 do total. É esperado que os alunos cometam equívocos como esse durante o processo de aprendizagem, isso provavelmente por conta do aluno não estar familiarizado com os tratamentos do registro figural necessários para este tipo de resolução, em que temos a fração de uma fração. Seria possível que esse problema fosse resolvido com até menos passos, utilizando o registro algébrico, mesmo com a não-congruência entre o enunciado e sua representação matemática, no entanto ao coordenar os registros figural e aritmético é possível que os alunos resolvam problemas como esse sem a necessidade de conhecimentos algébricos. Percebemos aqui evidências de um aprendizado parcial do conceito de fração de uma quantidade, já que o aluno conseguiu identificar, através da observação da figura, que os "3/4 dos total" valiam 45x5=225, ainda que fosse necessário que o problema fornecesse a representação inicial a ser tratada e convertida. É difícil dizer, neste momento, se tal dificuldade é oriunda da falta de familiaridade com a heurística de utilizar figuras na resolução deste tipo de problema, ou por falta de compreensão das regras de conversão entre uma representação escrita e outra figural.

No momento da plenária, B se mostrou animado para participar e exibir sua resolução para os colegas, nesse momento o professor pesquisador ainda não tinha apresentado a resposta correta do problema o que pode ter sido um fator que ajudou na confiança do discente em frente a turma:

> B: Então a gente resolveu primeiramente que a gente tinha que fazer a soma, que é quarenta e cinco vezes cinco. Que dá…[anota as contas no quadro]... duzentos e vinte e cinco.
> [Alguns colegas realizam comentários ao fundo]
> Rafael: Isso, tá! Só recapitulando, cada quadradin… cada retangulozinho daqueles ali, são uns cinco, cada um vale quarenta e cinco, o quadrado todo vai valer duzentos e vinte e cinco, é isso?
> B: Isso!
> Rafael: Tá, beleza.
> D: [fala baixo ao fundo] aí tem que fazer duzentos e vinte e cinco…
> Rafael: Tá, então o que a gente tem de… (tentando manter a turma engajada) Turma! Disso aqui, o que a gente tem?
> B: Que equivale a três quartos?
> Rafael: Três quartos do número que a gente quer descobrir é…
> D: É setenta e cinco…
> Rafael:... duzentos e vinte e cinco. (se repetindo) Três quartos do número que a gente quer descobrir é duzentos e vinte e cinco. É isso que a gente chegou aqui, certo? … Tá, continuando agora…
> B: Eu achei mais fácil fazer… um quadradinho com quatro (partes).
> Rafael: Tá, pegou… O que esse quadradinho aí… esse retângulo aí representa?
> [Alguns alunos começam a fazer perguntas paralelas e a se dispersar na aula]

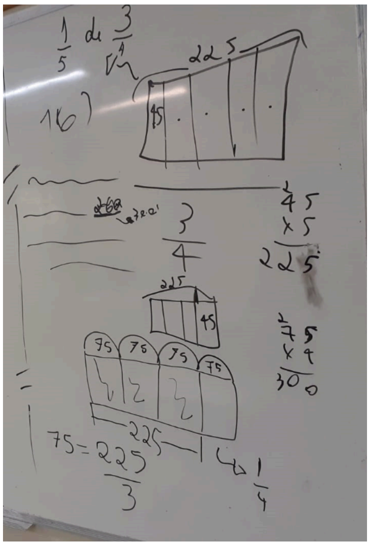
B: ENTÃO, aqui tem três quartos (marca três partes do desenho) é o último que tem que ser quarenta e cinco (marca a última parte do desenho). Então aqui é duzentos e vinte e cinco (marcando as três partes)... então a resposta daqui é duzentos e vinte e cinco mais quarenta e cinco, que dá duzentos e sessenta!
Rafael: Tá…e por que que tem um quadrado… e por que que aquele cara ali vale quarenta e cinco? (última parte do desenho).
B: Porque aqui tem três quartos! Três quartos equivale a duzentos e vinte e cinco…
Rafael: Perfeito…
B: Então, como é três quartos, o último equivale a quarenta e cinco!
Rafael: Tá…então vam… chega aí comigo. Vou só aumentar aqui um pouquinho o desenho (que B tinha feito)... para todo mundo poder enxergar.
E: Tem ódio no coração, né? Pra passar isso aí numa sexta-feira! (Reclamando da dificuldade do problema.)

Nesse momento muitos alunos começaram a discutir sobre as aulas estarem, ou não, difíceis e foi necessário parar por alguns momentos para resolver conflitos entre os alunos. Alguns relataram que gostavam da dinâmica da aula, pois podiam “escrever no quadro”, enquanto outros expressaram descontentamento com alguns problemas mais complexos. Após a turma se acalmar, o aluno D levantou de sua classe para falar que tinha notado um erro na resolução (o 1/4 valer 45), aqui foi muita sorte outro aluno ter percebido de primeira o erro cometido pelo colega, pois tiveram que debater entre si para entender a resposta:

Rafael: Tá… tu notou que tem um erro aqui nessa resolução?
D: Sim…
Rafael: Tá, fica aí do ladinho (do colega)...
[Pede para que os outros alunos prestem atenção na fala de D e B]
Rafael: Tá, o colega tinha falado aqui que três partes valem duzentos e vinte e cinco, é isso?
B: Isso!
Rafael: Ok, e daí tu chegou que esse último pedacinho é quarenta e cinco…
B: Isso. Porque aqui cada quadradinho tinha quarenta e cinco (apontando para a representação de um quinto, que era composta por cinco barras).
Rafael: Opa, mas esses caras aqui são um quinto (Representação. Um quinto de três quartos.
B: Que equivale a mesma coisa! (Que a barra de um quarto do total)
Rafael: Só que esse cara aqui é um quarto… (Aponta para a representação do total dividido em quatro partes) … do valor total.
B: Que é o que falta do duzentos e vinte e cinco…
Rafael: Exato! Só que, olha uma coisa…
[D levanta a mão para fala]
D: E como é três quartos… o duzentos e vinte e cinco representa três quartos, teria que dividir o duzentos e vinte e cinco por três para saber o resultado (de um quarto) e somar mais o duzentos e vinte e cinco.
Rafael: Isso mesmo! Isso daqui tudo… (aponto para a figura toda)
B: Dividido por… dividido por três?
Rafael: Isso, porque a gente tem três partes. Então, duzentos e vinte e cinco…
B: E dá… setenta e cinco!
D: Sim, daí é só fazer setenta e cinco…
[Professor, B e D fazendo cálculos]
Rafael: Isso aqui é 75? (Apontando para uma das quatro partes.)
B e D: Isso!
Rafael: Tá, então cada pedacinho desses vale 75?
D: Sim.
B: setenta e cinto mais setenta e cinco mais setenta e cinco. (Somando todos os quartos)
Rafael: Tá, só que se todos esses pedacinhos aqui, todos esses quatro pedaços são iguais e cada pedacinho vale setenta e cinco, quanto que vai valer esse último pedacinho?

B: Mais setenta e cinco!
D: Setenta e cinco também!.
Rafael: Isso!
D: Por causa que… por causa que o três quartos é duzentos e vinte e cinco…
Rafael: Perfeito.
D: … Ou seja, o último que sobra tem que valer setenta e cinco para dar o resultado final.
Rafael: Exatamente
D: Dá 300.
[Percebo alguns alunos conversando ao fundo]
Rafael: Vocês (turma) estão entendendo o que foi feito!?
G: Professor, ninguém está prestando atenção!
(Áudio de 25/08/2023)

Figura 20. Resolução do problema 16 elaborado por B, D e Professor.



Fonte: Acervo pessoal

Após finalizar com os alunos que participaram da plenária, infelizmente foi necessário repassar a correção para aqueles alunos que não estavam prestando atenção. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas busca “superar práticas ultrapassadas de transmissão de conhecimento e transferir para o aluno grande parte da responsabilidade por sua própria aprendizagem” (ONUCHIC *et al.*, p. 43). Durante esta correção podemos observar isto se dando na prática, os alunos que estavam envolvidos na plenária, de uma maneira ou de outra, demonstraram uma compreensão maior do problema abordado e das ideias de fração de uma quantidade, seja resolvendo a questão, ou apresentando dúvidas para serem retiradas. Também podemos perceber a importância da interação entre alunos, uma vez que a intervenção de D foi de grande ajuda para que B entendesse melhor os tratamentos necessários para coordenar o registro figural, com sua representação numérica. A estratégia utilizada necessitava de não apenas uma figura, mas sim duas e com isso, uma série de signos eram introduzidos na resolução do problema, o aluno B conseguia perceber nas unidades significantes da representação de “1/5 de 3/4 de _ é 45” que todas aquelas partes desenhadas eram de mesmo tamanho e, portanto, ao somar cinco vezes o mesmo valor obteria o resultado desejado referente a figura do enunciado. As dificuldades surgiam quando a segunda figura necessária para a resolução não estava mais sendo dada, ou seja, quando tiveram de desenhar um “inteiro” (retângulo) que representava os 3/4 do total, não há evidências concretas do motivo disto acontecer no processo cognitivo do aluno B, além de uma provável falta de familiaridade com as regras de tratamento do registro figural, empregadas nesta resolução, como visto na fala “Isso. Porque aqui cada quadradinho tinha quarenta e cinco (apontando para a representação de um quinto, que era composta por cinco barras).” Por outro lado, o aluno D conseguiu fazer essa diferenciação entre as duas unidades significantes e foi capaz de coordenar os registros figural e aritmético uma segunda vez durante a resolução da questão, desenhando um retângulo dividido em quatro partes, e identificar que cada 1/4 do total valia 75, portanto a resposta final era 300.

Vale ressaltar que, de um ponto de vista cognitivo, a atividade conceitual, ou seja a aquisição da compreensão do objeto matemático, frente a atividade semiótica de representação entre diferentes registros supõe que “as aquisições não sejam mais estimadas apenas sobre os critérios de sucesso (obtenção de uma ‘boa resposta’), mas sobre critérios de ‘maturidade’: rapidez de tratamento, espontaneidade das conversões, potência das transferências” (DUVAL, 2009, p. 92), dentro deste contexto ambos os alunos B e D apresentam um alto índice de aprendizado do conteúdo estudado, a diferença sendo que D apresenta uma certa maturidade a mais no trabalho envolvendo a ideia de “frações de uma quantidade”, ou “fração como um operador” (ONUCHIC e ALLEVATO, 2008).

Durante esta plenária também foi possível observar uma das dificuldades da metodologia na prática, o diferente nível de investimento por parte dos alunos na resolução dos problemas. De fato as questões apresentavam um nível de dificuldade mais elevado se comparados aos do início das atividades, mas ainda se apresentavam uma compatibilidade com o nível dos alunos (POLYA, 2006) visto que alguns conseguiram resolver com pouca ou nenhuma assistência, com a maioria das intervenções sendo a respeito da interpretação dos dados apresentados. Ainda assim, é preciso levar em consideração a pluralidade da sala de aula contemporânea, como visto em (ONUCHIC *et al.*, 2021), pois existem fatores únicos a cada aluno que levam a essa falta de interesse nos objetos de estudo, sejam por problemas pessoais, ou escolares, tais questões fogem ao controle do professor. Conversando com o aluno E depois, ele relatou que os problemas vinham demonstrando um alto grau de complexidade, que tornava massante as aulas, o que é compreensível já que as atividades desenvolvidas nesta pesquisa tinham uma estrutura bastante diferente daquelas que eles estavam acostumados, com vários exercícios de rotina e jogos matemáticos, com o eventual problema matemático. Dadas as condições, parece plausível que o docente deva tomar uma atitude “no meio termo” frente a situações como essa, seria de pouca utilidade ter parado a plenária e interrompido o raciocínio que os alunos estavam tendo durante a resolução, mas também nada adiantaria para o resto da turma se, após a resolução apresentada pelos alunos, o professor-pesquisador não tivesse retomado as condições passo a passo e, no futuro, mudar o tipo de problemas vistos em sala de aula para tentar contemplar as demandas gerais dos alunos.

6.4.1 Observações gerais da quarta aula

Durante a aplicação das atividades, foi possível perceber que muitos alunos apresentaram grande dificuldade em resolver os problemas 15 e 16. Analisando, posteriormente, os enunciados é provável que problemas intermediários ajudassem no sentido de progressão de dificuldade dos alunos, dando-lhes mais tempo para se familiarizarem com os enunciados.

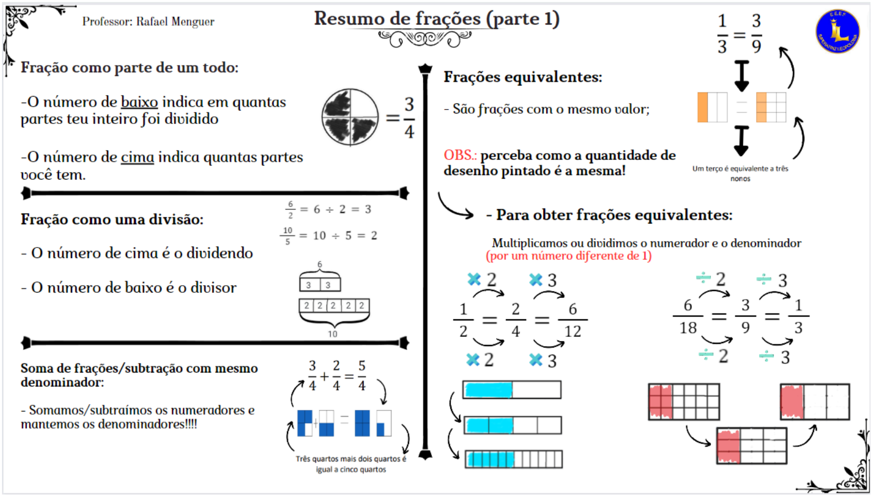
Infelizmente, devido ao tempo e a agitação da turma, não foi possível realizar a formalização da ideia de fração como operador, como estava planejado. Ainda assim, as observações mostram que os alunos D, E e G já começaram a mobilizar a ideia de que basta multiplicar e dividir para obter o resultado da fração de uma quantidade. Conversando com D, ele relatou que já estudava frações em casa, possivelmente por isso ele vinha apresentando bons resultados.

6.5 Análise da quinta aula

Nesta aula não foi possível o comparecimento do professor-pesquisador, e com o final do tempo para a realização das atividades de pesquisa, foi elaborada uma “avaliação diagnóstica”, a qual nada mais era do que uma lista de problemas dos conteúdos já trabalhados que serviria para tentar identificar quais conceitos ainda não estavam bem compreendidos pela turma. Tal avaliação foi feita individualmente pelos alunos, sem intervenção da colega professora que aplicou a atividade (substituindo o professor pesquisador), pois nesse momento era necessário averiguar a capacidade de resolução de problemas individual de cada aluno, enquanto ainda havia espaço para mediações no aprendizado (ONUCHIC *et al.,* 2021).

Neste dia também foi fornecido uma folha contendo um resumo do conteúdo visto até então, pois muitos alunos haviam faltado às aulas e não tinham copiado os textos de consulta referentes a formalização dos conceitos estudados, ou tinham perdido o caderno de matemática.

Figura 21. Resumo do conteúdo, elaborado pelo Professor.



Fonte: Acervo pessoal

Problema 17: segundo o site "tudogostoso.com.br", oara fazer uma massa de pizza que sirva 5 porções, precisamos de 1kg de farinha de trigo, 3 xícaras de água morna, 1 colher (chá) de sal, 30g de fermento biológico, 3/4 xícaras de óleo e 1 colher (chá) de açúcar. Imaginando que você vá usar uma caneca "reta", represente a fração de xícaras de óleo com um desenho.

Este problema trazia um contexto real do conteúdo estudado, o mesmo buscava identificar se os alunos conseguiam perceber as unidades significantes pertinentes para a resolução deste problema, em meio às diversas informações dispostas, e converter ao registro figural. A maioria das respostas obtidas estavam corretas, geralmente sendo o desenho de uma caneca dividida em quatro partes, com três pintadas, ou uma barra retangular.

Os resultados mais inusitados ficaram por conta dos alunos G e A, que adotaram medidas de resolução diferentes dos demais.

Figura 22. Resolução do Problema 17, elaborada por G.

Fonte: Acervo pessoal

Na resolução elaborada por G temos quatro xícaras, das quais apenas três estão pintadas. Esta confusão é bastante inusitada, visto que as observações demonstraram que G tinha um grande domínio dos processos de tratamento e conversão durante a resolução dos problemas, conseguindo resolver muitos sem mediações por parte do professor. Observando o enunciado, é provável que o aluno tenha lido “3/4 xícaras” e entendido que eram “3 xícaras de 4 xícaras totais”, escrever a palavra xícara no plural é comum em sites de receitas (de onde este problema foi retirado), pois, pensando em termos de senso comum, não faria sentido as instruções se referirem a “3 xícaras **inteiras** de 4 xícaras totais”.

Figura 23. Inspiração original para a formulação do Problema.

Ingredientes (5 porções)

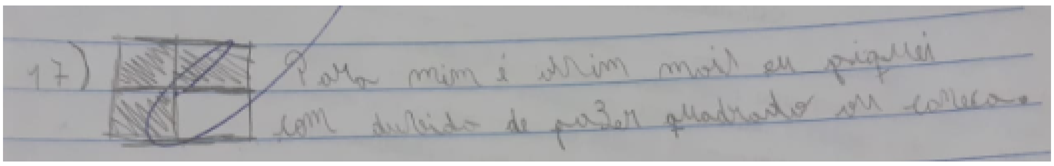
1 kg de farinha de trigo	30 g de fermento biológico
3 xícaras de água morna	3/4 xícaras de óleo
1 colher (chá) de sal	1 colher (chá) de açúcar
1 colher (sopa) de pinga	

Fonte: site: tudogostoso.com.br

É importante destacar que “indicações de que um estudante entende, interpreta mal ou não entende ideias matemáticas específicas surgem, com frequência, quando ele resolve um problema” (ONUCHIC *et al.,* 2021, p. 52), assim este erro, aparentemente, se caracteriza mais como um problema de interpretação do enunciado do que falha na apreensão conceitual do aprendizado matemático.

Outro caso curioso foi o da aluna A, que apresentou uma solução correta, porém demonstrava insegurança em relação ao seu resultado.

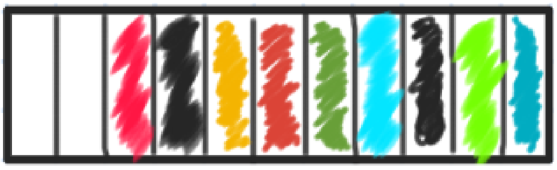
Figura 24. Resolução do Problema 17, elaborada por A.



Fonte: Acervo pessoal

Na imagem está escrito “para mim é assim mais eu fiquei com duvida de fazer quadrado ou caneca”, de fato um dos aspectos que era esperado de se trabalhar com os discentes, durante o momento de formalização, era a “estimativa” visual que é feita ao utilizar uma caneca que não tenha medidas gravadas nela (esta discussão não teve muito engajamento discente durante a correção dos problemas), no entanto ainda pode ser considerado que houve um aprendizado na representação de frações como parte de um todo pela aluna A, visto que conseguiu apresentar uma representação que continha as unidades significantes pertinentes à conversão, sem precisar se prender a um modelo fixo de desenho.

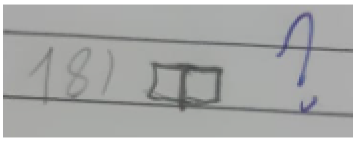
Problema 18: na prateleira da Proª Pires está separado o lugar para a coleção de livros "fundamentos de matemática elementar", quando ela empresta dois desses livros para seus colegas a prateleira fica organizada como mostra a figura. Sabendo disso, qual fração representa a quantidade de livros restantes?



Este problema, visando fornecer as condições de uma aprendizagem fundada sobre a coordenação dos registros, invertia o processo de conversão entre registros de chegada e partida. Se antes era realizada a conversão saindo de um registro aritmético (a fração 3/4) para o registro figural, agora a gravura é fornecida aos discentes, tendo um enunciado não possui informações pertinentes a resolução do problema, exceto pela formulação da pergunta final.

Novamente, grande parte da turma obteve êxito, mas destaca-se duas resoluções elaboradas por L e A, respectivamente.

Figura 25. Resolução do Problema 18, elaborada por L.

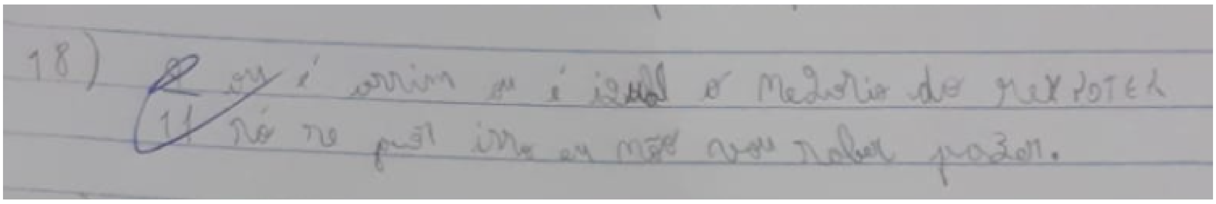


Fonte: Acervo pessoal

Assim como no problema anterior, o aluno L apresentava domínio nos processos de conversão e tratamento das representações trabalhadas, frequentemente conseguindo verbalizar o passo a passo de seu raciocínio durante a resolução dos problemas. A hipótese levantada seria de que ocorreu uma falha na compreensão do problema, levando o aluno a não compreender aquilo que (POLYA, 2006) chamaria de incógnita do problema, confundindo, então, os dados do problema por sua resposta e, provavelmente, tentando representar os "dois livros faltantes" por uma gravura de dois quadrados.

Por outro lado, temos a resolução de A que, embora esteja correta, novamente apresenta insegurança com relação a sua resolução. Na imagem está escrito "9/11 ou é assim ou é igual o negosio do Rey Porter só se for isso eu não vou saber fazer", a escrita da aluna faz referência ao Problema 15, considerado difícil por ela. Aqui podemos teorizar que tal ligação foi feita devido a ambos terem unidades significantes similares no registro figural apresentado.

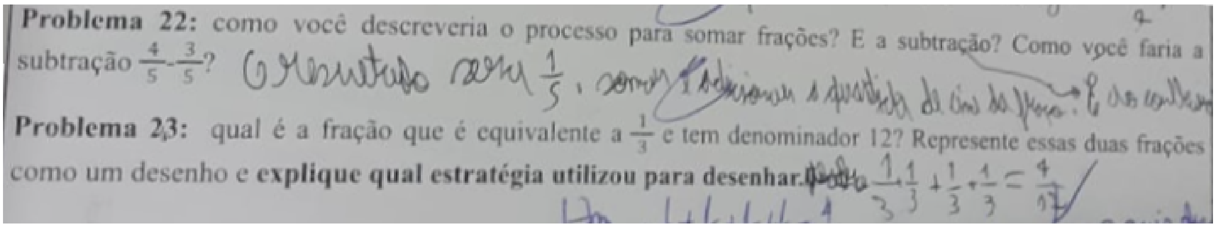
Figura 26. Resolução do Problema 18, elaborada por A.



Fonte: Acervo pessoal

Em geral, os resultados dos outros problemas desta atividade não apresentaram respostas muito divergentes por parte dos alunos analisados, exceto pela compreensão, ou não, dos enunciados. O aluno B apresentou soluções curiosas referentes aos Problemas 22 e 23. O Problema 22 tinha como intenção levar o aluno a refletir sobre o processo de soma e subtração de frações que já vinha sido estudado a algum tempo, visto que este problema possibilitaria analisar se os conceitos foram aprendidos e exercitar a argumentação escrita dos discentes, porque a proposição de novos problemas faz parte fundamental do processo de ensino-aprendizado-avaliação na metodologia utilizada (ONUCHIC *et al.,* 2021). O Problema 23 estava nesta lista, em grande parte, pela mesma razão, mas também era um incentivo para que os discentes utilizassem a folha de "resumo" fornecida a eles.

Figura 27. Resolução do Problema 18, elaborada por A.



Fonte: Acervo pessoal

Falando especificamente sobre as respostas de B, no Problema 22 está escrito: "o resultado sobra 1/5. somar é adicionar a quantidade de cima da fração. [Flecha apontando para a palavra subtração] É do contrário." Em seguida, a resposta do Problema 23 está expressa como "1/3+1/3+1/3+1/3=4/12", o que parece ser dissonante com a resposta anterior, onde o discente claramente conseguiu operar com frações de mesmo denominador corretamente.

Aqui existem duas possibilidades para este, provável, equívoco, o primeiro sendo aquilo chamado de "isolamento de registros de representação" (DUVAL, 2012), em que o aluno não consegue enxergar um mesmo objeto em representações semióticas distintas. Nesse caso B estaria falhando em identificar as diferenças entre uma soma de frações e a equivalência delas, o que seria esperado visto que muitos alunos tiveram dúvidas nas atividades de equivalência e ordenação de frações. Outra explicação se daria muito mais por um abuso de linguagem, porque o aluno B estaria realizando a operação matemática (1/3)*(4/4), como ensinado durante o momento de formalização, para obter a fração 4/12, o que também seria esperado visto que B participou ativamente de grande parte das plenárias envolvendo este conteúdo. De fato é impossível o professor saber essas informações sem estar ali, presente e avaliando continuamente os alunos, essa é tanto uma vantagem, quanto uma limitação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, pois fornece claras ferramentas de análise do aprendizado dos discentes, mas caso não possa ser executada da maneira correta muito é perdido, principalmente se tratando de alunos do sexto ano que muitas vezes esquecem o que estavam pensando especificamente durante a escrita de uma determinada resolução.

6.5.1 Observações gerais da quinta aula

Dentre as avaliações analisadas foi possível observar que os alunos conseguem resolver e interpretar problemas referentes ao reconhecimento de frações como parte de um todo e como um quociente, pois conseguiram identificar unidades significantes pertinentes à resolução da tarefa e converter para registros aritméticos, ou figurais. Houve erros de interpretação das informações contidas nos enunciados, uma provável causa destes acontecimentos foi a falta de um momento em que o docente“ajuda os grupos na compreensão do problema e na resolução de problemas secundários” (ONUCHIC *et al.,* 2021, p. 49), pois, como analisado acima, mesmo as soluções equivocadas possuíam elementos pertinentes a sua resolução.

Por outro lado, os Problemas referentes a equivalência de frações precisam ser abordados com mais ênfase durante o momento de correção com a turma, pois não apresentam dados suficientes, referentes ao processo cognitivo utilizado pelos estudantes. Essa dúvida se justifica porque a maioria das respostas não apresenta nenhum tipo de desenvolvimento, apenas a resposta final.

6.6 Sobre a sexta aula

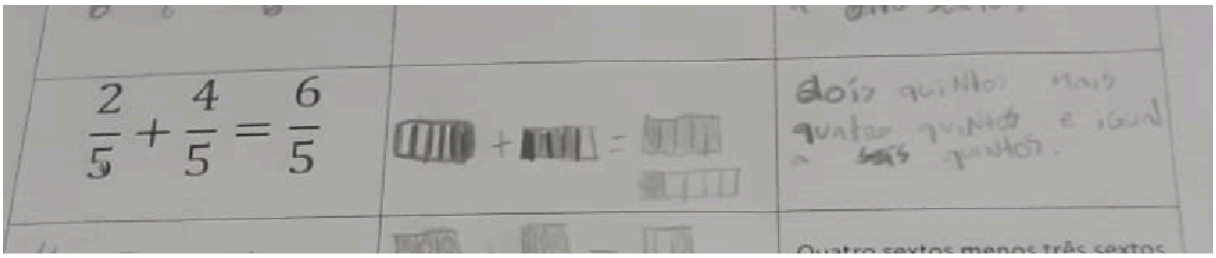
A aula que ocorreu no dia 01/09/2023 teve como foco a correção dos problemas trabalhados no encontro anterior e, infelizmente, não foi possível produzir gravações de áudios que apresentassem ideias pertinentes aos objetivos deste trabalho referentes aos problemas trabalhados. Alguns exercícios propostos aos discentes como “fichas de conversão" renderam resultados interessantes de analisar para entender melhor quais as potencialidades e limitações da metodologia adotada, frente a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

7.6.1 Fichas de conversão.

As fichas em questão continham exercícios de repetição para o treinamento da conversão dos registros aritmético, figural e da língua materna. Essas atividades serviram para perceber algumas dificuldades por parte dos discentes, o que guiou o percurso das atividades para um momento de retirada de dúvidas. Essas tarefas foram entregues em aulas anteriores, mas só foi possível corrigir efetivamente nesta aula.

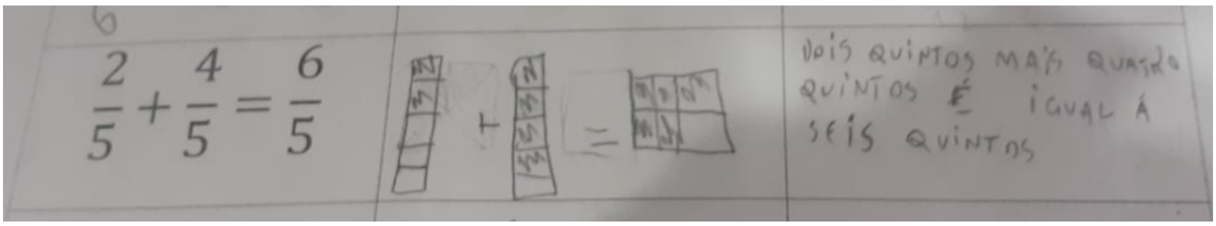
Inicialmente podemos observar que a representação produzida por A para a fração 6/5 confunde o numerador com denominador, apresentando 5 partes de 6 partes totais, quando era necessário utilizar mais de um "inteiro", nesse caso representado por um retângulo dividido em 5 partes, como na resposta da L.

Figura 28. Ficha produzida por L.



Fonte: Acervo pessoal

Figura 29. Ficha produzida por A.

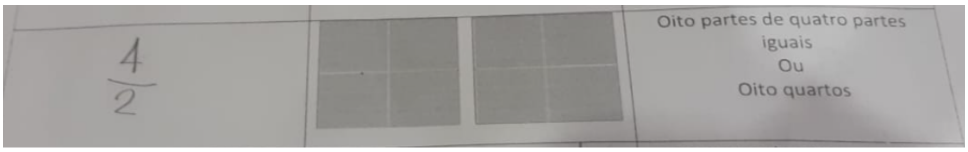


Fonte: Acervo pessoal

Durante as atividades, poucas foram as vezes em que as "frações impróprias", aquelas com numerador maior que denominador, foram contempladas na ideia de "parte de um todo", A expressou grande dúvida em relação a esse tipo de representação, com a aluna acreditando que havia um erro com a atividade. Nos casos em que são estudadas soma, ou subtração de frações, utilizando o registro figural é necessário que os discentes apliquem um tratamento específico ao registro figural que é a mereologia, caracterizada pelo autor como sendo o processo em que "uma figura se decompõe em diferentes unidades figurais: elas podem ser combinadas em outra figura ou em diferentes sub-figuras" (DUVAL, 2012, p. 288), então, para conseguir resolver os exercícios propostos, os alunos precisam primeiramente adquirir familiaridade com as regras de tratamento próprias ao registro em que se trabalha.

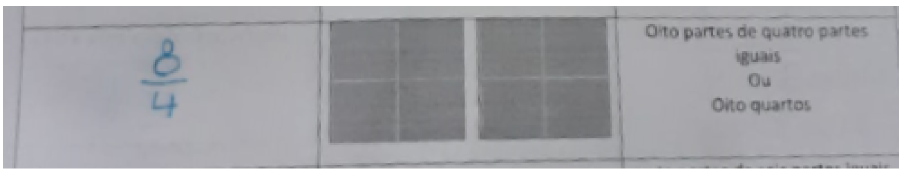
Outro erro observável está na questão contida nas figura 31, referente a fração 8/4, em um primeiro momento o leitor pode ser levado a crer que ocorreu a simplificação da fração original, contudo as conversas com A demonstram o contrário. Neste caso, ocorreu uma confusão similar ao "denominador 1" nas aulas iniciais desta pesquisa, ou seja o número 2 "em baixo" da fração representa que existem "2 inteiros", algo que não foi propriamente assimilado pela discente.

Figura 30. Ficha produzida por A.



Fonte: Acervo pessoal

Figura 31. Ficha produzida por V.

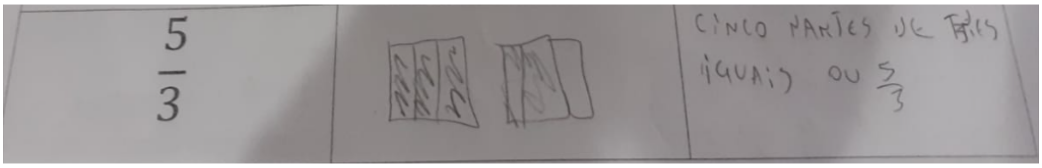


Fonte: Acervo pessoal

Pensando nessas questões foi feito um momento a mais de retirada de dúvidas referentes a esse processo de conversão de registros, bem como operações de adição/subtração de frações e frações equivalentes. Momento este que ocorreu após o horário normal de aula (durante um período vago) para a aluna A e outros colegas que não participaram da pesquisa, por conta disso são poucos os dados que podemos analisar a respeito desta atividade.

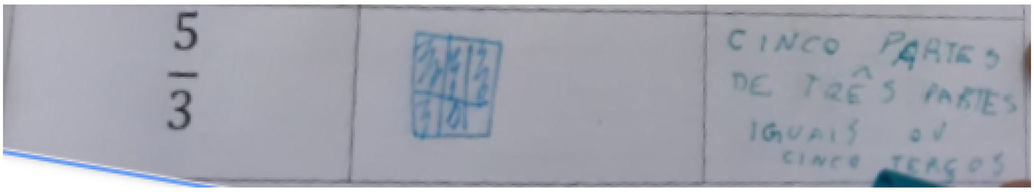
Abaixo podemos ver alguns dos resultados a respeito desse momento de formalização com A, em comparação com a produção de V, que não estava, nesse momento, em aula.

Figura 32. Ficha produzida por A.



Fonte: Acervo pessoal

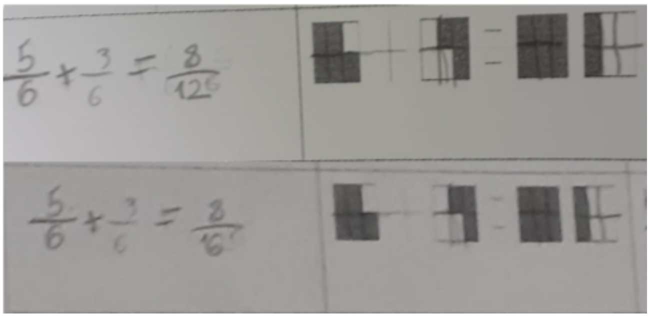
Figura 33. Ficha produzida por V.



Fonte: Acervo pessoal

Por fim, é interessante analisar a produção de L, que consegui fotografar durante a resolução das atividades. Em um primeiro momento, foi utilizado o denominador 12 como resposta a uma adição de frações com mesmo denominador, provavelmente porque o representante figural relacionado possuía um total de doze pequenos retângulos como unidades figurais que representavam 1/6.

Figura 34. Ficha produzida por L, fotografada em dois momentos diferentes.



Fonte: Acervo pessoal

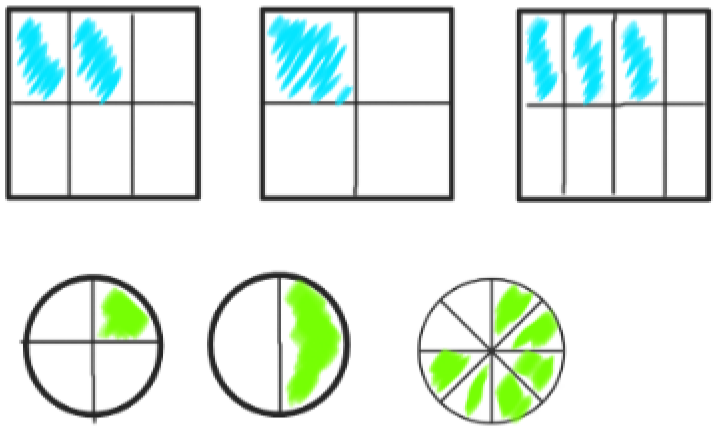
Em geral “os tratamentos puramente figurais, têm uma importância muito particular na medida em que eles são decisivos para a utilização heurística da figura” (DUVAL, 2012, p. 289), ou seja, aprender a modificar os registros figurais pode ser um fator muito importante para a resolução de problemas deste tipo. Particularmente, é possível perceber a poderosa ferramenta cognitiva que configura este registro, pois permite aos discentes identificar visualmente unidades significantes pertinentes ao registro aritmético observando o desenho.

6.7 Análise da sétima aula

Esta foi a última aula referente a aplicação da pesquisa com a turma, visando compreender quais conhecimentos matemáticos foram consolidados e por demandas internas da escola, foi elaborada uma avaliação somativa para a turma. Esta avaliação trazia problemas similares aos já estudados, porém com contextos diferentes, sendo formulados problemas que refletissem os aprendizados dos alunos como produto da avaliação contínua aplicada ao longo das aulas, juntamente aos dados obtidos pela análise das "avaliações diagnósticas". Tais problemas possuíam alto grau de não-congruência nas conversões exigidas, principalmente no ordenamento das unidades significantes e na falta de correspondência semântica do enunciado.

Antes, no entanto, foram trabalhados alguns exercícios com os alunos, uma vez que como um problema se define na relação com seu resolvedor (ONUCHIC *et al.,* 2021), todas as atividades propostas já tinham sido feitas e os procedimentos necessários para sua resolução haviam sido formulados e esquematizados com os alunos, como visto nas análises contidas neste trabalho. Aqui, apenas o exercício 1 foi destacado, pois durante a correção o aluno L apresentou uma observação muito pertinente aos objetivos desta pesquisa.

Exercício 1: represente as frações e ordene elas



Durante a correção deste exercício o aluno L apresentou alguns comentários para a turma que estava tendo dificuldades em entender o que significa ordenar as frações, ainda não conseguindo converter a unidade significante "quantidade pintada" para "valor do número". Após a correção pedi para que ele repetisse a explicação para mim, para averiguar com mais calma seu raciocínio:

> Rafael: Você pode repetir a sua fala sobre o porquê que um quarto é menor que um meio, mesmo que os dois tenham uma parte pintada só?
> L: Porque um quarto é dividido em quatro partes, e as quatro partes são menores de um meio.

> Rafael: Isso… e daí, a quantidade pintada é menor?
> L: Sim!

A resposta obtida não foi muito extensa, mas apresenta informações o suficiente para entender que, pelo menos, naquele momento o aluno L havia assimilado o conceito sobre ordenamento de frações. O processo para ordenar frações, sem que seja dada a regra antes, não é fácil de ser feito, precisando utilizar da conversão entre os registros figural e aritmético, enquanto usa as propriedades visuais das representações figurais para deduzir a ordem das frações e não apenas olhar para quais são os maiores algarismos que compõem o registro aritmético de uma fração, de fato “o que é importante não é a mudança de registro a ser efetuada, mas os tratamentos que poderão ser realizados na representação obtida após a mudança de registro” (DUVAL, 2012, p. 285), nesse caso os tratamentos são realizados antes da mudança do registro, mas ainda é uma operação cognitivamente custosa para os alunos.

A avaliação somativa foi elaborada contendo alguns exercícios de múltipla escolha e problemas similares aos trabalhados em aula. Os problemas escolhidos trabalhavam conteúdos já analisados neste trabalho e serviram como questões avaliativas referentes aos aprendizados dos alunos, seguindo a sugestão de que “sempre que possível, problemas tomem o lugar dos exercícios repetitivos que não fornecem informações relevantes e possuem baixo valor informativo, embora necessários como prática.” (ONUCHIC *et al.,* 2021, p. 76). Foi atribuída uma nota a cada questão com critérios de correção referentes aos diversos passos necessários para a resolução de cada problema, pois atribuir uma nota avaliativa aos discentes era uma exigência interna da escola. Contudo não serão analisados estes aspectos quantitativos, visto que este não é o objetivo do presente trabalho.

Dentre os 7 alunos participantes da pesquisa, apenas 5 compareceram no dia da avaliação somativa. Durante a realização da avaliação, a turma teve acesso ao resumo entregue na quinta aula e, de maneira similar aos encontros normais, o professor-pesquisador realizou mediações a respeito da interpretação dos enunciados e problemas secundários. Os dados coletados no dia restringem-se aos registros escritos de cada estudante, então muito do processo cognitivo dos discentes não foi possível de registrar. Contudo ainda podemos perceber alguns padrões na resolução dos problemas.

Os problemas 27 e 30 não contêm registros que possam evidenciar o processo cognitivo dos discentes ao ponto de uma análise com base no referencial adotado, mas é seguro dizer que nenhum dos alunos teve êxito total e quase todos apresentaram dúvidas no processo de resolução destes problemas.

Problema 28: Mutano e Ciborgue decidiram juntar os restos de pizza que tinham deixado espalhados pela base, para fazer um lanche. Todas as pizzas eram de tamanho médio, então vinham separadas em 6 pedaços.

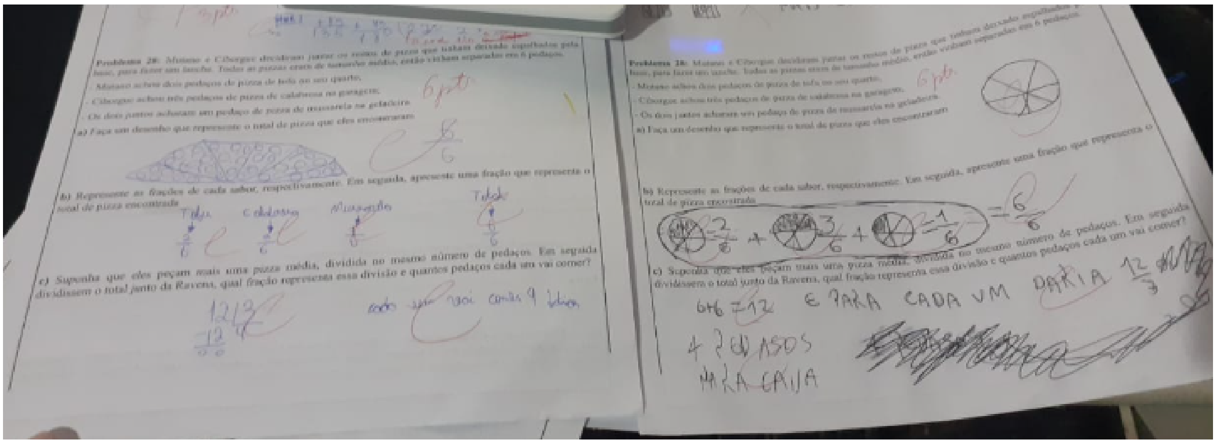
- Mutano achou dois pedaços de pizza de tofu no seu quarto;
- Ciborgue achou três pedaços de pizza de calabresa na garagem;
- Os dois juntos acharam um pedaço de pizza de mussarela na geladeira.

a) Faça um desenho que represente o total de pizza que eles encontraram

b) Represente as frações de cada sabor, respectivamente. Em seguida, apresente uma fração que representa o total de pizza encontrada

c) Digamos que eles peçam mais uma pizza média, dividida no mesmo número de pedaços. Em seguida dividissem o total junto da Ravena, qual fração representa essa divisão e quantos pedaços cada um vai comer

Figura 35. Resolução do problema 28 produzida por V e A, respectivamente.

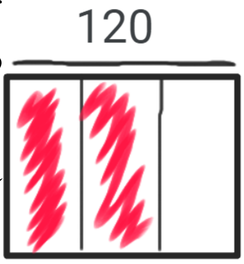


Fonte: Acervo pessoal

O problema 28 apresentava um baixo grau de não-congruência, não respeitando apenas a correspondência semântica dos elementos significantes, mas ainda assim era mínima essa falta. Assim, podemos observar nos registros produzidos que, por mais que tenham adotado estratégias de resolução, ambos os estudantes conseguiram obter resultados corretos na resolução.

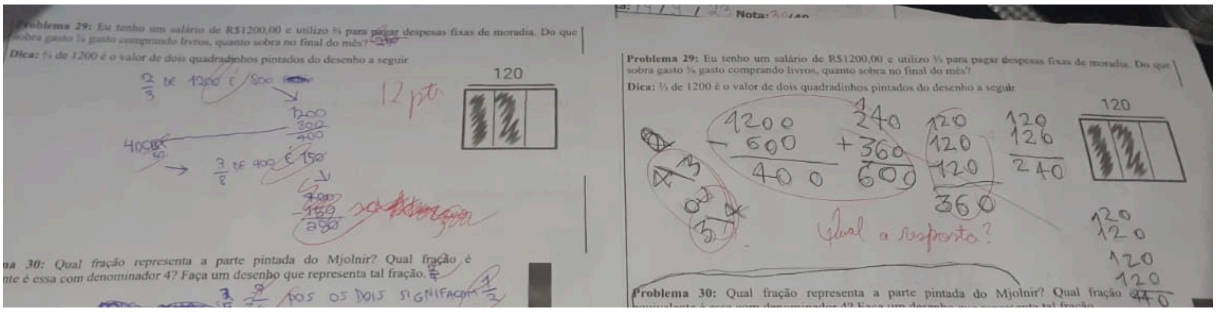
O estudante V optou por utilizar mais o registro aritmético em suas resoluções e representou o "total de pizza" por um "semicírculo" dividido em 6 partes (fatias). Por outro lado, A escolheu utilizar uma representação mais similar às utilizadas durante os momentos de formalização, colocando lado a lado cada uma das representações gráficas e aritméticas. Também podemos observar que ela representou corretamente a fração 12/3, para expressar a divisão descrita no item "c". Com base nas questões já analisadas e nas observações contidas nestes problemas, existem evidências da capacidade de converter entre dois sistemas semióticos distintos, demonstrando certa "maturidade" neste conteúdo, de acordo com as ideias de (DUVAL, 2009). É importante dizer que todos os alunos analisados obtiveram êxito no problema 28, sendo assim, é provável que os discentes tenham compreendido o objeto cognitivo estudado.

Problema 29: Eu tenho um salário de R$1200,00 e utilizo 2/3 para pagar despesas fixas de moradia. Do que sobra gasto 3/8 gasto comprando livros, quanto sobra no final do mês?
Dica: 2/3 de 1200 é o valor de dois quadradinhos pintados do desenho a seguir



Para a resolução deste problema, os discentes precisavam demonstrar domínio sobre as heurísticas estudadas em aula, em particular da "personalidade de fração como operador" (Onuchic; Allevato, 2008), trabalhadas no quarto e sexto encontros. Na figura existe um erro de digitação que foi avisado para os alunos durante a leitura da avaliação, onde temos 120 deveria ser 1200, de acordo com o enunciado.

Figura 36. Resolução do problema 29 produzida por D e A, respectivamente.



Fonte: Acervo pessoal

Podemos perceber no esquema produzido por D que o aluno conseguiu utilizar apenas o registro aritmético para compor sua resolução, apresentando uma escrita similar a trabalhada em aula, como visto na Figura 18, na resolução do problema 15. D apresenta a capacidade de converter entre registro da língua materna e aritmético de maneira adequada, em seguida realizar diversos tratamentos para obter o resultado desejado.

Por outro lado, A apresenta dificuldade em encontrar a maneira correta de interpretar as unidades significantes contidas no enunciado. Podemos ver isso em sua resolução, ao somar 120 três vezes, ao invés de dividir, também utilizou 120, mesmo com os avisos dados à turma sobre utilizar 1200. Em seguida, ela somou mais duas vezes 120 (operação bem à direita) e somou os resultados anteriores (centro da gravura), não há evidências o suficiente para entender quais foram os processos cognitivos que levaram a esta resposta, exceto a fração 2/3 contida no enunciado. Mas é seguro dizer que não houve assimilação, satisfatória, por parte da discente, do conteúdo estudado.

Sendo assim, comparando o nível de dificuldade apresentado pelos alunos ao longo da avaliação e dos registros elaborados, existem evidências de que o conceito de fração como operador não foi apreendido pelos alunos, pelo menos com grande domínio. Pode ser dito que os alunos não apresentam a “maturidade” nos processos de tratamento e conversão, como nas ideias de (DUVAL, 2009), mas conseguiram conceitualizar parte do objeto conceitual estudado.

7. Conclusões

Buscando entender quais as potencialidade e limitações da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação em Matemática através da Resolução de Problemas, no ensino de frações em uma turma de 6º ano na escola pública, com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, procuramos por evidências que destacam a metodologia adotada e seus, possíveis, insuficiências.

Para tanto, a análise feita procurou entender os processos cognitivos envolvidos durante a construção do conhecimento por parte dos discentes e destacar estratégias docentes necessárias para o andamento das aulas. Dentre os conteúdos estudados, pode-se perceber que a maioria dos alunos apresentou um desenvolvimento satisfatório na resolução das situações problemas e exercícios propostos nas ideias referentes a frações como parte de um todo, como um quociente e nas operações de adição/subtração de frações com mesmo denominador. Porém, os resultados não foram tão positivos ao estudar o ordenamento de frações, equivalência de frações e frações como um operador. As evidências apontam a coexistência entre o grau de não-congruência da conversão dos registros semióticos necessários à resolução de um problema e as dificuldades dos alunos analisados, possivelmente indicando uma relação de causalidade. Dentre essas dificuldades, foi perceptível que a participação dos alunos durante os momentos de plenária e formalização, possivelmente, levou a um desempenho positivo nas atividades mais complexas.

Com base nas análises realizadas, percebemos que a metodologia adotada possui algumas limitações a respeito do processo de aprendizagem dos alunos. Visto que a escolha e formulação dos problemas, por parte do professor, impactam em grande parte o desenvolvimento dos alunos, principalmente quando os enunciados apresentam um alto grau de não-congruência entre as conversões dos registros semióticos. Também sofre quando o engajamento da turma é menor que o ideal, pois os momentos de plenária e formalização se tornam cruciais para o desenvolvimento dos conceitos estudados e acabam sendo fortemente prejudicados. As evidências coletadas apontam que, caso a turma não deseje participar das aulas, dificilmente algum trabalho eficaz poderá ser feito, necessitando de grandes mediações por parte do professor. Finalmente, a utilização de problemas em grande quantidade, pode causar um certo desânimo nos estudantes devido a constante dificuldade imposta durante as aulas, sendo, possivelmente, necessário mesclar outras atividades pedagógicas.

Apesar das limitações identificadas nesta pesquisa, são perceptíveis as potencialidades. O trabalho em grupo desenvolvido pelos alunos, permite aos discentes exercitar suas capacidades comunicativas e argumentativas, ajudando colegas a entender suas resoluções, assim, tornando o estudo um ato mais divertido. Os momentos de plenária, dão a possibilidade de que todos aqueles que se sintam confortáveis participar ativamente das aulas, expondo suas ideias para todos, não mais sendo agentes passivos. Ao que aparenta, os conceitos desenvolvidos conseguem ser aplicados a diversos problemas diferentes, visto que a maior variedade de formato dos problemas apresentados, foram daqueles conteúdos mais dominados pela turma.

Para o professor, são ainda maiores as potencialidades, pois a metodologia fornece ferramentas concretas para a realização de uma avaliação contínua, que destaca os pontos fortes e fracos dos alunos ao longo da resolução dos problemas. Isso ocorre porque os registros de observação, realizados pelo professor, fornecem um parecer qualitativo dos alunos ao decorrer do desenvolvimento das atividades. Além do momento de mediação para a compreensão dos enunciados servir de grande indicador para o entendimento, por parte dos discentes, dos conceitos estudados. O ensino a partir de problemas geradores também permite que o professor compreenda melhor os processos de ensino-aprendizagem dos alunos ao realizar a mediação nos momentos de compreensão dos problemas e na resolução de problemas secundários. Ao juntar a metodologia em questão com a TRRS, o professor ganha uma lista de ferramentas que permitem a escolha e formulação de problemas geradores, os quais fornecem informações importantes a respeito dos aspectos cognitivos da aprendizagem matemática. Isso se dá por meio de uma teoria com grande suporte teórico, para diversos conteúdos da matemática básica, permitindo analisar os sistemas semióticos inerentes ao fazer matemático, com critérios e regras gerais que guiam o docente em sua prática pedagógica, sempre que possível.

Dentre as observações é importante destacar que o trabalho de (POLYA, 2006) consiste em uma rica fonte de heurísticas que, se adaptadas para a linguagem atual, auxiliam os discentes na compreensão e resolução dos problemas. Dentre as estratégias docentes presentes nas análises realizadas, além das heurísticas, o professor pode utilizar o desempenho dos alunos, ao longo das aulas, como métrica ao decidir os tamanhos dos grupos formados pelos discentes. A respeito do processo de resolução dos problemas e compreensão por parte do educando, muitas vezes se faz necessário ler os enunciados junto ao aluno para auxiliar na interpretação do texto. Ainda, ressaltamos que prezar pelo diálogo com os alunos, atento às questões disciplinares, em particular ter pouco barulho na sala de aula, é essencial para que os discentes consigam tirar dúvidas sobre as resoluções e formalizações.

Por fim, podemos dizer que os materiais coletados apontam que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação em Matemática através da Resolução de Problemas pode ser considerada por professores de matemática que buscam trazer um ensino em que o aluno participa ativamente da construção de seu conhecimento e buscam ferramentas para avaliar o desempenho de maneira contínua, tendo foco no processo de aprendizagem e não apenas nas "respostas finais". Também é importante entender como a metodologia adotada conversa com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, para propor um aprendizado baseado na coordenação de registros, permitindo aos alunos aplicar os conhecimentos adquiridos em situações que fogem da sala de aula.

Para futuros estudos, fica a reflexão a respeito da proposição de novas sequências didáticas, adotando outra ordem de abordagem dos conteúdos estudados, com finalidade de propor uma aprendizagem mais sólida dos conceitos que não foram contemplados aqui. Levando em consideração o uso de outras ferramentas pedagógicas, além dos problemas matemáticos como propostos aqui e dedicando mais tempo em sala de aula para que os alunos adquiram domínio das regras de reconhecimento e tratamento dos diferentes registros semióticos.

Referências

BRASIL. MEC. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Educação é a Base. Versão Completa. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2018.

DUVAL, R. **Understanding the Mathematical Way of Thinking** – The Registers of Semiotic Representations. eBook: Proem, 2017.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Moretti M. T. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266. Acesso em: 20 jul. 2023.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano.** Registros semióticos e aprendizagens intelectuais, Tradução de Lênio Fernandes Levy, - 1. ed. - São Paulo, SP: Livraria da Física, 2009

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais – 8. Ed. – Rio de Janeiro: Record, 2004.

MONTEIRO, Edson Junior; POSSAMAI, Janaína Poffo; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Ensino de frações através da Resolução de Problemas:** construção de um Produto Educacional. Ens. Tecnol. R., Londrina, v. 6, n. 2, p. 68-82, jul./dez. 2022. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/etr/article/view/16022>. Acesso em: 09 ago. 2023

ONUCHIC, L. de la R. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos?. **Revista Espaço Pedagógico**, [S. l.], v. 20, n. 1, 2013. Disponível em: ttps://seer.upf.br/index.php/rep/article/view/3509. Acesso em: 20 jul. 2023.

ONUCHIC, L. de la R., et. al. **Resolução de Problemas.** Teoria e Prática - 2. ed. – Jundiaí-SP: Paco Editorial, 2021.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G.. As diferentes "personalidades" do número racional. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 79-102, 2008

PRADO, M.; JAHN, A. P. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS: UMA EXPERIÊNCIA NUMA ESCOLA PÚBLICA PAULISTA. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [S. l.], v. 12, n. 27, p. 363–385, 2023. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/7325. Acesso em: 20 jul. 2023.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução de Araújo, H. L. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

WAGNER, G. D. **Análise de experiências produzidas em uma oficina de resolução de problemas a partir de questões da OBMEP**. Porto Alegre, 2023. Fonte: acervo pessoal

APÊNDICE A - Modelo de Termo de Consentimento Informado.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) _____________________________________, da turma 61 , declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada "Potencialidades da metodologia de Resolução de Problemas no ensino de frações, com base na teoria da representação semiótica", desenvolvida pelo(a) pesquisador(a) Rafael Menguer da Luz. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Marilaine de Fraga Sant'Ana, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone (51)XXXXX-XXXX ou e-mail xxxxxxxxx@mat.ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Entender como a metodologia escolhida ajuda no aprendizado do conteúdo de frações;

- Realizar as análises baseado em uma teoria de aprendizagem (teoria da representação semiótica).

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em aula, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos entrevistados ao precisarem responder a algumas perguntas sobre o desenvolvimento de seu trabalho na escola. A fim de amenizar este desconforto será mantido o anonimato das entrevistas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação

Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre as potencialidades de usar diferentes metodologias no ensino de frações, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço XXXXXXXX /telefone: (51)XXXXX-XXXX /e-mail:XXXXXX@gmail.com.

Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av.Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e email etica@propesq.ufrgs.br

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa:

APÊNDICE B - Termo de Assentimento informado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

TERMO DE ASSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, aluno(a) da turma 61, declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada: "Potencialidades da metodologia de Resolução de Problemas no ensino de frações, com base na teoria da representação semiótica", desenvolvida pelo(a) pesquisador Rafael Menguer da Luz. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Marilaine de Fraga Sant'Ana, professora acadêmica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Tenho ciência de que a minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação, a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) do objetivo estritamente acadêmico do estudo, que é:

- Entender como a metodologia escolhida ajuda no aprendizado do conteúdo de frações;

- Realizar as análises baseado em uma teoria de aprendizagem (teoria da representação semiótica).

A minha colaboração se fará por meio de questionário, bem como da participação nas aulas, em que serei observado(a) e minha produção analisada. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a minha participação, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos 5 anos após o término da investigação.

Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. Porém, para que não ocorram constrangimentos, estou ciente de que será mantido o anonimato dos dados. Além disso, estou ciente de que poderei deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação.

Como benefícios, é esperado desde estudo, produzir informações importantes sobre Tecnologias Digitais na Educação Matemática, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes à educação.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável pelo e-mail XXXXXXXX@gmail.com

Porto Alegre, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do aluno:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa:

APÊNDICE C - Carta de apresentação para a escola.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Porto Alegre, __ de ______ de _____.

Prezada Professora XXXXXX

Diretora da E.E.E.F. XXXXXX

O(A) aluno(a) Rafael Menguer da Luz atualmente é graduando(a) regularmente matriculado(a) no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Como parte das exigências do Departamento de Matemática Pura e Aplicada para obtenção do título de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, o(a) graduando(a) está desenvolvendo um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). O TCC produzido deve resultar em material didático de qualidade que possa ser utilizado por outros professores de Matemática. Neste sentido, torna-se extremamente importante realizar experimentos educacionais e, por esta razão, estamos solicitando a sua autorização para que este trabalho possa ser desenvolvido na escola sob sua Direção.

Em caso de manifestação de sua concordância, por favor, registre sua ciência ao final deste documento, o qual está sendo encaminhado em duas vias.

Enquanto pesquisador(a) e professor(a) responsável pela orientação do desenvolvimento do TCC pelo(a) graduando(a), reitero nosso compromisso ético com os sujeitos dessa pesquisa colocando-nos à disposição para quaisquer esclarecimentos durante e após a realização da coleta de dados. Para tanto, deixo à disposição o seguinte telefone de contato: (51)XXXX-XXXX.

Agradecemos a sua atenção.

Cordialmente,

____

Marilaine de Fraga Sant'Ana

Professora do Departamento de Matemática Pura e Aplicada