UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Eduardo Henrique Philippsen

ESTIMATIVAS PARA SOLUÇÕES E EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES OPTIMAIS PARA PROBLEMAS ENVOLVENDO O p-LAPLACIANO FRACIONÁRIO

Porto Alegre, RS
2024

Eduardo Henrique Philippsen

ESTIMATIVAS PARA SOLUÇÕES E EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES OPTIMAIS PARA PROBLEMAS ENVOLVENDO O p-LAPLACIANO FRACIONÁRIO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Equações Diferenciais Parciais, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS, RS), como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino

Porto Alegre, RS

2024

Eduardo Henrique Philippsen

ESTIMATIVAS PARA SOLUÇÕES E EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES OPTIMAIS PARA PROBLEMAS ENVOLVENDO O p-LAPLACIANO FRACIONÁRIO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Equações Diferenciais Parciais, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS, RS), como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Professor Orientador:

Dr. Leonardo Prange Bonorino (UFRGS)

Banca Examinadora:

Dra. Celene Buriol (UFSM)

Dr. Damião Júnio Gonçalves Araújo (UFPB)

Dr. Diego Marcon Farias (UFRGS)

Dr. Paulo Ricardo de Ávila Zingano (UFRGS)

Data da Apresentação:

RESUMO

ESTIMATIVAS PARA SOLUÇÕES E EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES OPTIMAIS PARA PROBLEMAS ENVOLVENDO O p-LAPLACIANO FRACIONÁRIO

Neste trabalho, obtemos estimativas L^∞ de soluções de equações diferenciais não lineares em termos do primeiro autovalor do domínio. Demonstramos que, para certas classes de problemas, se o primeiro autovalor for grande, o valor máximo da solução é pequeno. Posteriormente, conseguimos obter estimativas L^∞ locais para soluções de um problema usando, entre outras coisas, o processo de interação de Moser. Como consequência, provamos que, dentre todas as soluções de um problema com medida do domínio prescrita, existe um subconjunto em $\mathbb{R}^n$ com essa medida, onde está definida uma subsolução que atinge a altura máxima.

Palavras-Chave: p-Laplaciano fracionário; Problemas elípticos não lineares; Problema de autovalor; Estimativas optimais;

ABSTRACT

ESTIMATES FOR SOLUTIONS AND EXISTENCE OF OPTIMAL SOLUTIONS FOR PROBLEMS INVOLVING THE FRACTIONAL p-LAPLACIAN

In this work, we obtain L^∞ estimates of solutions to nonlinear differential equations in terms of the first eigenvalue of the domain. We show that for certain classes of problems, if the first eigenvalue is large, the maximum value of the solution is small. Subsequently, we are able to obtain local L^∞ estimates for solutions to a problem using, among other things, Moser's iteration process. As a consequence, we prove that among all solutions of a problem with prescribed domain measure, there exists a subset in $\mathbb{R}^n$ with that measure, where a subsolution is defined that reaches the maximum height.

Keywords: Fractional p-Laplacian; Nonlinear elliptic problems; Eigenvalue problem; Optimal estimates;

LISTA DE SÍMBOLOS

$\rightharpoonup$ significa convergência fraca;

$\to$ significa convergência forte;

$\lfloor x \rfloor$ representa o maior inteiro menor ou igual a x;

$A\Delta B = (A \setminus B) \cap (B \setminus A)$;

$B(x,r) = B_r(x)$ representa a bola aberta de centro x e raio $r > 0$ em $\mathbb{R}^n$;

$\partial\Omega$ representa a fronteira do conjunto Ω;

$\overline{\Omega}$ representa o fecho de Ω;

Ω^c denota $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$;

$A \Subset B$ significa que $A \subset B$ e $\overline{A} \subset B$;

$|A|$ representa a medida de Lebesgue do conjunto A;

q.t.p. significa em quase todo ponto;

$\inf\limits_X u\,(\sup\limits_X u)$ representa o ínfimo (supremo) da função u sobre o conjunto X;

$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p}$;

$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } ; \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\right\}, 1 \leq p < \infty$;

$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{a > 0\,; |\{x \in \Omega\,;\ |u(x)| > a\}| = 0\}$;

$L^\infty(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty\right\}$;

$\operatorname{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega\ ;\ u(x) \neq 0\}}$;

$C_c(\Omega) = \{u \in C(\Omega);\ \mathrm{supp}(u) \subset \Omega \text{ é compacto}\};$

$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é k vezes continuamente diferenciável}\};$

$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega);$

$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega);$

$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ w \in L^p(\Omega)\ ;\ \frac{w(x)-w(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\},\ s \in (0,1),\ p \in (1,\infty)\ ;$

Sumário

INTRODUÇÃO **8**

1 PRELIMINARES **13**

1.1 Espaços de Sobolev fracionários e o p-Laplaciano Fracionário 13

1.2 Propriedades das soluções 18

1.3 Resultados Auxiliares 24

2 ESTIMATIVA ENVOLVENDO O PRIMEIRO AUTOVALOR **26**

3 LOCALIZAÇÃO DAS SOLUÇÕES **33**

4 SUBSOLUÇÃO QUE MAXIMIZA A ALTURA **54**

INTRODUÇÃO

Em diversas áreas da ciência, como engenharia, física, biologia e economia, a resolução de equações diferenciais é fundamental para modelar e compreender diversos fenômenos. Neste contexto, o estudo da existência, multiplicidade e comportamento de soluções para diferentes tipos de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) torna-se crucial.

Nos últimos anos, uma atenção considerável tem sido dedicada ao estudo de problemas envolvendo o p-Laplaciano fracionário. Este operador surge na descrição de fenômenos como transições de fase, processamento de imagens, teoria dos jogos, entre outros, conforme discutido em [1] e suas referências. Motivados por essa relevância, este trabalho se dedica ao estudo do comportamento das soluções de uma classe específica de equações diferenciais elípticas que envolvem este operador.

Mais precisamente, investigamos o seguinte problema:

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = f(x,u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $s \in (0,1)$, Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ e o operador não-linear e não-local p-Laplaciano fracionário é definido, em um espaço adequado, por

$$(-\Delta)_p^s u(x) = 2 \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{\left|u(x)-u(y)\right|^{p-2}\big(u(x)-u(y)\big)}{|x-y|^{n+sp}}\, dy\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

O estudo de operadores desse tipo tem sido um campo de pesquisa ativo nos últimos anos, com diversos autores dedicando-se à investigação de suas propriedades e aplicações. Inicialmente, o foco foi no caso $p = 2$, onde o operador se reduz, a menos de uma constante multiplicativa, ao Laplaciano fracionário, que, por sua vez, é linear. Podemos mencionar, por exemplo, a descrição deste operador por meio de um problema de extensão elaborado por Caffarelli e Silvestre [9], a investigação de soluções conduzida por Servadei e Valdinoci [32], e o trabalho realizado por Silvestre [33], que trata da regularidade do problema de obstáculo associado.

No caso do p-Laplaciano fracionário, destacamos os estudos sobre a existência de soluções conduzidos por Balaadich e Azroul [3] e Iannizzotto e Squassina [14], que garantem a existência de soluções sob a condição de que f seja uma função de Carathéodory com um crescimento específico. Além disso, os trabalhos de Kovenpää, Kuusi e Palatucci [20, 21, 22, 18, 19] fornecem contribuições significativas sobre supersoluções fracionárias, problema do obstáculo, método de Perron e Hölder continuidade.

Castro, Kuusi and Palatucci [11] demonstraram a regularidade local para soluções de equações homogêneas, enquanto Iannizzotto, Mosconi e Squassina [16] estabeleceram a regularidade global de Hölder para equações não homogeneas. Palatucci [27] contribuiu para o problema de Dirichlet e resultados de comparação. Para uma análise mais detalhada das motivações por trás do estudo desses operadores, consulte Palatucci e Valdinocci [26] e Iannizzotto, Liu e Squassina [14].

Neste trabalho, exploramos duas questões distintas. Na primeira parte, obtemos estimativas para o supremo das soluções fracas do problema não linear (0.1) em termos do primeiro autovalor, considerando condições apropriadas de crescimento da não linearidade.

Embora pesquisas anteriores, como a de Iannizzotto, Liu e Squassina [14] e Di Castro, Kussi e Palatucci [11] já tenham identificado limitações para as soluções desse problema, elas não se baseavam no inverso do primeiro autovalor. Nossa contribuição reside em estabelecer uma relação entre o supremo das soluções e essa importante medida espectral.

De forma mais específica, generalizamos para o caso fracionário o resultado estabelecido anteriormente para o p-Laplaciano por Bonorino e Montenegro [5, Corolario 7.4]. Para isso, fundamentamo-nos nas ideias dos autores e nos resultados de Brasco e Parini [7], assim como nas contribuições de Iannizzotto, Mosconi e Squassina [16]. O resultado principal desta parte é o seguinte:

Teorema 0.1. Sejam $s \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$ tais que $sp < n$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Se $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ é solução fraca limitada de (0.1) com $f \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ satisfazendo a condição

$$|f(x,t)| \leq \alpha\,|\,t\,|^{p-1} + \beta$$

para algum $\beta \geq 0$ e $0 \leq \alpha < \lambda_1(B)$, então

$$\begin{aligned} \|\,u\,\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \leq \quad \max \Bigg\{ & C_1\,\beta^{\frac{1}{p-1}} \left(\frac{1}{\lambda_1(\Omega)-\alpha}\right)^{\frac{sp^2}{n(p-1)^2+s(p-1)p^2}} |\Omega|^{\frac{sp}{n(p-1)+sp^2}}\,, \\ & C_2\,\alpha^{\frac{n}{sp^2}} \left(\frac{\beta}{\lambda_1(\Omega)-\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}} |\Omega|^{\frac{1}{p}} \Bigg\}, \end{aligned}$$

onde $C_1 = C_1(n,s,p)$ e $C_2 = C_2(n,s,p)$ são constantes positivas.

Este resultado nos permite concluir que, quando um domínio de volume prescrito possui um primeiro autovalor significativamente grande, o supremo de uma solução associada a este domínio se aproxima de zero. Além disso, comprovamos que essa conclusão se mantém válida para os casos em que $sp > n$ e, quando $f(x,t) = f(x)$, também para $sp = n$.

Na segunda parte do trabalho, demonstramos a existência de um conjunto de medida prescrita em $\mathbb{R}^n$, cuja subsolução para um determinado prolema atinge a altura máxima M, onde:

$$M = \sup_{w \in \mathcal{A}} \left(\sup_{x \in \Omega} w(x) \right)$$

e $\mathcal{A}$ é o conjunto de todas as soluções do problema (0.1), onde $f \equiv 1$ e a medida de Ω é igual a 1.

No caso local, Talenti demonstrou em [34] que o máximo é pontual e ocorre na bola. No entanto, no caso do Laplaciano fracionário, estudos prévios sobre esta questão indicam que a bola é o domínio que maximiza o problema somente no sentido de concentração de massa. Essa comparação não é pontual e não garante que o máximo ocorra na bola, conforme discutido nos trabalhos de Vázquez e Volzone [29], Di Blasio e Volzone [30] e Ferone e Volzone [31].

Nosso resultado principal contribui para a compreensão do problema ao mostrar que, no caso do p-Laplaciano fracionário, existe um conjunto, onde está definida uma subsolução que maximiza a altura. O teorema principal é o seguinte:

Teorema 0.2. Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in (1,\infty)$. Existe um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ tal que $|F| = 1$ e uma função $w_0 \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ cujo suporte é exatamente F, com $\|w_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = M$ e que satisfaz

$$(-\Delta)_p^s w_0 \leq \chi_F \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Para prová-lo, primeiramente demonstramos o seguinte resultado de localização:

Teorema 0.3. Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in (1,\infty)$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e seja $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ solução fraca não negativa de (0.1) com $f(x,t) = f(x)$. Então, para qualquer $x \in \Omega$ e $R > 0$, existe uma constante $C = C(n,s,p,\|f\|_{L^\infty(\Omega)},\|u\|_{L^\infty(\Omega)},R) > 0$ e $\sigma_0 = \sigma_0(n,s,p) > 0$, tal que

$$\sup_{\Omega \cap B_{\frac{R}{2}}(x)} u \;\leq\; C\, |\Omega \cap B_R(x)|^{\sigma_0}.$$

A prova se baseia em uma estimativa para a seminorma da função localização, que permite realizar o processo de iteração de Moser.

Organizamos o trabalho em quatro capítulos. No Capítulo 1, desenvolvemos a teoria preliminar, explorando o espaço onde as soluções são definidas, examinando o operador estudado no trabalho e revisitando algumas propriedades das soluções.

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo da norma L^∞ das soluções, relacionando-as ao inverso do primeiro autovalor. Além de provamos o teorema principal para $sp < n$, estendemos para o caso $sp > n$ e apresentamos uma versão aplicável a $sp = n$, especificamente quando $f(x,t) = f(x)$.

O Capítulo 3 é destinado à demonstração do resultado de localização para soluções do problema quando $f = f(x)$. No capitulo 4 consolidamos a investigação ao aplicar esses resultados na demonstração do teorema principal de otimização.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos a teoria preliminar essencial para uma compreensão mais profunda dos capítulos seguintes. Na Seção 1.1, discutimos os espaços de Sobolev fracionários e o operador p-Laplaciano fracionário. Na Seção 1.2, exploramos as propriedades das soluções para o problema em questão. Na última seção, apresentamos estimativas importantes para os nossos propósitos.

1.1 Espaços de Sobolev fracionários e o p-Laplaciano Fracionário

Nesta seção, exploramos aspectos essenciais dos Espaços de Sobolev fracionários, onde estão as soluções do problema, e do operador não local com o qual estamos trabalhando, conceitos que desempenham um papel fundamental no desenvolvimento deste trabalho. Para mais referências sobre estes tópicos, veja [2, 26, 6, 28, 23, 25].

Sejam $s \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. O espaço de Sobolev fracionário $W^{s,p}(\Omega)$ é definido por

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \; ; \; \frac{|\, u(x) - u(y) \,|}{|\, x - y \,|^{\frac{n}{p}+s}} \in L^P(\Omega \times \Omega) \right\}.$$

O termo

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|\, u(x) - u(y) \,|^p}{|\, x - y \,|^{n+ps}} \, dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.1}$$

é denominado *seminorma de Gagliardo* de u, e a expressão

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + [u]_{W^{s,p}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.2}$$

define uma norma em $W^{s,p}(\Omega)$, tornando-o um espaço de Banach (veja [12, Proposição 4.24]).

Assim como no caso clássico, onde s é um inteiro, o espaço $W^{s,p}(\Omega)$ está continuamente mergulhado em $W^{s',p}(\Omega)$, quando $s' \leq s$. Esta propriedade, enunciada a seguir, é demonstrada em [26, Proposição 2.1].

Lema 1.1. Sejam $p \in [1,\infty)$ e $0 < s' \leq s < 1$. Seja Ω aberto em $\mathbb{R}^n$ e u função mensurável, então

$$\|u\|_{W^{s',p}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

para alguma constante $C = C(n, s', p) \geq 1$. Em particular,

$$W^{s,p}(\Omega) \subseteq W^{s',p}(\Omega)$$

Adaptando a demonstração do Lema 1.1 apresentada em [26], obtemos o seguinte resultado:

Lema 1.2. Sejam $p \in [1,\infty)$ e $0 < s' < s < 1$. Para qualquer $\varepsilon > 0$ e u função mensurável, temos que

$$[\, u\,]_{W^{s',p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\varepsilon^{1-\frac{s}{s'}}[\, u\,]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

onde $C = C(n, s, s', p) = \left(\frac{2^p\omega_n}{ps'}\right)^{\frac{s-s'}{s'}} > 0$.

Demonstração. Seja $M > 0$, podemos decompor

$$[\, u\,]^p_{W^{s',p}(\mathbb{R}^n)} \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\{|x-y|\geq M\}} \frac{|\, u(x) - u(y)\,|^p}{|\, x-y\,|^{n+ps'}}\,dxdy + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\{|x-y|<M\}} \frac{|\, u(x) - u(y)\,|^p}{|\, x-y\,|^{n+ps'}}\,dxdy$$

A primeira integral pode ser estimada por

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\{|x-y|\geq M\}} \frac{|\, u(x) - u(y)\,|^p}{|\, x-y\,|^{n+ps'}}\,dxdy &\leq 2^{p-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\{|x-y|\geq M\}} \frac{|u(x)|^p + |u(y)|^p}{|\, x-y\,|^{n+ps'}}\,dxdy \\
&= 2^p\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_{|z|\geq M} \frac{1}{|z|^{n+ps'}}\,dx\right)|u(y)|^p dy \\
&= 2^p\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\omega_n\int\limits_M^\infty r^{-ps'-1}\,dr\right)|u(y)|^p dy \\
&= \frac{2^p\omega_n}{ps'}M^{-ps'}\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

Por outro lado, quando $\frac{|x-y|}{M} < 1$ temos $\left(\frac{|x-y|}{M}\right)^{n+ps'} > \left(\frac{|x-y|}{M}\right)^{n+ps}$, assim

$$\frac{1}{|x-y|^{n+ps'}} < \frac{M^{p(s-s')}}{|x-y|^{n+ps}}$$

E, deste modo,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\{|x-y|<M\}} \frac{|\,u(x)-u(y)\,|^p}{|\,x-y\,|^{n+ps'}}\,dxdy \;\leq\; M^{p(s-s')}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\{|x-y|<M\}} \frac{|\,u(x)-u(y)\,|^p}{|\,x-y\,|^{n+ps}}\,dxdy$$
$$\leq\; M^{p(s-s')}[\,u\,]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.4}$$

Combinando (1.3) e (1.4), obtemos

$$[\,u\,]^p_{W^{s',p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 M^{-ps'}\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + M^{p(s-s')}[\,u\,]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.5}$$

onde $C_1 = C_1(n,s',p) = \frac{2^p\omega_n}{ps'}$. Elevando a $1/p$, usando a relação $(a^p+b^p)^{\frac{1}{p}} \leq a+b$ e considerando $\varepsilon = C_1^{\frac{1}{p}}M^{-s'}$, concluímos que

$$[\,u\,]_{W^{s',p}(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + C\varepsilon^{1-\frac{s}{s'}}[\,u\,]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.6}$$

provando o resultado com $C = C_1^{\frac{s-s'}{s'}}$. □

Além disso, o espaço fracionário $W^{s,p}(\Omega)$ é fechado em relação a multiplicação por funções Lipschitz, isto é

Lema 1.3. Seja Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$, $s \in (0,1)$ e $p \in [1,\infty)$. Considere $u \in W^{s,p}(\Omega)$ e $\psi \in C^{0,1}(\Omega)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$. Então $u\psi \in W^{s,p}(\Omega)$ e

$$\|u\psi\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)},$$

onde $C = C(n,p,s,\Omega)$.

Demonstração. [26, Lema 5.3] □

Denotamos por $W_0^{s,p}(\Omega)$ o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Este espaço pode ser definido de forma equivalente como o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ com respeito à seminorma $[\,\cdot\,]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$, conforme estabelecido pela seguinte desigualdade do tipo Poincaré para a seminorma de Gagliardo, disponível em [8, Lema 2.4].

Lema 1.4. Sejam $s \in (0,1)$, $p \in [1,\infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado. Vale

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq C\,[\,u\,]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.7}$$

para toda $u \in C_c^\infty(\Omega)$, onde $C = C(n,s,p,\Omega) > 0$.

Portanto, vamos sempre considerar o espaço $W_0^{s,p}(\Omega)$ equipado com a norma equivalente

$$\|\cdot\|_{W_0^{s,p}(\Omega)} := [\,\cdot\,]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

A seguinte desigualdade de Sobolev para o espaço fracionário, quando $sp < n$, é apresentada em [26, Lema 6.5].

Teorema 1.5. Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in [1,\infty)$ tais que $sp < n$. Então existe uma constante positiva $C = C(n,s,p)$ tal que, para toda função mensurável e com suporte compacto $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, temos

$$\|u\|^p_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\, u(x) - u(y)\,|^p}{|\, x-y\,|^{n+ps}}\, dxdy,$$

onde $p* = np/(n-sp)$. Em particular, vale para toda $u \in W^{s,p}_0(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto limitado.

Observação 1.6. Mais geralmente, podemos mostrar por contradição que esta constante $C = C(n,s,p)$ fica uniformemente limitada em compactos de $(0,\frac{n}{p})$. Isto é, se $[a,b] \subset (0,\frac{n}{p})$, então existe $C = C(n,p,a,b) > 0$ tal que,

$$\|u\|^p_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C[\, u\,]_{W^{s',p}(\mathbb{R}^n)}$$

para todo $s' \in [a,b]$ e $u \in W^{s,p}_0(\Omega)$, onde $p' = np/(n-s'p)$.

A partir da estimativa anterior e do Lema 1.2, podemos provar o seguinte mergulho para $sp = n$.

Proposição 1.7. Sejam $0 < s' < s < 1$, $p \in (1,\infty)$ tais que $sp = n$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado. Então existe $C = C(n,s',p) > 0$ tal que, para toda $u \in W^{s,p}_0(\Omega)$,

$$C\|u\|^p_{L^{p'}(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{(s-s')p}{n}}[\, u\,]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.8}$$

onde $p' = np/(n-s'p)$. Em particular $u \in L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1,\infty)$. Mais geralmente, se $[a,b] \subset (0,\frac{n}{p})$, então existem $C^* = C^*(n,p,a,b)$ e $D^* = D^*(n,p,a,b)$ tais que $0 < C^* \leq C(n,s',p) \leq D^*$ para todo $s' \in [a,b]$.

Demonstração. Como $u \in W^{s,p}_0(\Omega)$ e $s'p < sp = n$, o Teorema 1.5 garante que existe $C_1 = C_1(n,s',p) \geq 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C_1[\, u\,]_{W^{s',p}(\mathbb{R}^n)}$$

E, por Lema 1.2, existe $C_2 = C_2(n,s',p) > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$

$$\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C_1\left(C_2\varepsilon^{1-\frac{s}{s'}}[\, u\,]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon\|u\|_{L^p(\Omega)}\right) \tag{1.9}$$

Mas, pela desigualdade de Hölder com os expoentes p'/p e $n/s'p$, temos

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{s'p}{n}}\|u\|^p_{L^{p'}(\Omega)}$$

Deste modo,

$$\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C_1C_2\varepsilon^{1-\frac{s}{s'}}[\, u\,]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon C_1|\Omega|^{\frac{s'}{n}}\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} \tag{1.10}$$

Considerando $\varepsilon = (2C_1|\Omega|^{\frac{s'}{n}})^{-1}$ obtemos

$$\frac{1}{2}\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C_1^{\frac{s}{s'}} C_2 2^{\frac{s}{s'}-1} |\Omega|^{\frac{s-s'}{n}} [\, u\,]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.11}$$

o que prova o resultado com $C = \left(C_1^{\frac{ps}{s'}} C_2^p 2^{\frac{ps}{s'}}\right)^{-1}$. Para o intervalo $[a,b] \subset (0, \frac{n}{p})$, como C_1 e C_2 estão limitados uniformemente por cima e por baixo por constantes positivas conforme a Observação 1.6 e o Lema 1.2, segue o resultado.

□

Como destacado em [8, Proposição 2.9], quando $sp > n$ temos:

Proposição 1.8. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado. Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in (1,\infty)$ tais que $sp > n$. Então para toda $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ vale $u \in C^{0,\alpha}$ com $\alpha = s - n/p$. Além disso, existe uma constante $\gamma = \gamma(n,s,p) > 0$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq \gamma\, [\, u\,]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\, |x-y|^{\alpha}, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{1.12}$$

e

$$\|\, u\,\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma\, [\, u\,]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\, \mathrm{diam}(\Omega)^{\alpha}. \tag{1.13}$$

Observação 1.9. Como Ω é limitado, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ é possível encontrar $y \in B_{R_0}(x) \setminus \Omega$. Basta considerar $R_0 = 2\left(\frac{|\Omega|}{w_n}\right)^{\frac{1}{n}}$, uma vez que o volume de B_{R_0} é maior que o volume de Ω. Utilizando este y obtido, a partir de (1.12) temos

$$|u(x)| \leq C\, [\, u\,]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\, |\Omega|^{\frac{\alpha}{n}}, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.14}$$

onde $C = \gamma\, 2^{\alpha}/w_n^{\frac{\alpha}{n}}$.

Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in (1,+\infty)$, o operador p-Laplaciano fracionário $(-\Delta)_p^s$ é definido, a menos de uma constante multiplicativa, por

$$(-\Delta)_p^s\, u(x) \;=\; \mathrm{P.V.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\, u(x) - u(y)\,|^{p-2}\,\big(u(x) - u(y)\big)}{|\, x - y\,|^{n+sp}}\, dy\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.15}$$

para cada $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, onde P.V. é o valor principal da integral.

No caso particular, e muito importante, em que $p = 2$ o operador $(-\Delta)_p^s$ se reduz ao Laplaciano Fracionário, o qual é denotado simplesmente por $(-\Delta)^s$. Uma característica típica destes operadores é a não-localidade, no sentido de que o valor $(-\Delta)_p^s u(x)$, em qualquer ponto $x \in \Omega$, não depende somente dos valores de u na vizinhança de x, mas sobre todo $\mathbb{R}^n$. Nesse sentido, é natural expressar a condição de Dirichlet em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ ao invés de $\partial\Omega$.

Recordamos que o operador Laplaciano, $-\Delta$, é linear, assim como o Laplaciano Fracionário $(-\Delta)^s$. Por outro lado, no caso geral em que $p \neq 2$, os operadores $p-$Laplaciano $-\Delta_p$, bem como o $p-$Laplaciano Fracionário $(-\Delta)_p^s$ não são lineares. Entretanto destacamos que $(-\Delta)_p^s$ é um operador $(p-1)$-homogêneo, isto é, para toda w e $\alpha > 0$ temos $(-\Delta)_p^s(\alpha w) = \alpha^{p-1}(-\Delta)_p^s w$.

1.2 Propriedades das soluções

Nesta seção, apresentamos propriedades básicas das soluções do problema, que serão úteis nos próximos capítulos. Finalizamos com a demonstração de uma estimativa L^∞ para essas soluções.

Uma função $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ é solução fraca de

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} \tag{1.16}$$

onde f é mensurável, se, para toda função teste $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+ps}}\,dxdy = \int_\Omega f\,v\,dx. \tag{1.17}$$

Todas soluções mencionadas neste trabalho são interpretadas no sentido fraco. O seguinte resultado, apresentado em [7, Teorema 3.1], mostra que as soluções fracas do problema (1.16) são limitadas se $f \in L^q(\Omega)$ para $q > n/sp$.

Teorema 1.10. Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in (1,\infty)$ tais que $sp < n$. Seja $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ solução fraca de (1.16). Se $f \in L^q(\Omega)$ para $q > n/sp$, então $u \in L^\infty(\Omega)$ e

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\left[\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |u|\,dx + \left(|\Omega|^{\frac{sp}{n}-\frac{1}{q}}\,\|f\|_{L^q(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right] \tag{1.18}$$

onde $C = C(n,s,p) > 0$.

Se a fronteira de Ω é de classe $C^{1,1}$, então toda solução fraca u do problema (1.16) é contínua em Ω.

Teorema 1.11. Seja Ω aberto limitado tal que $\partial\Omega$ é $C^{1,1}$ e $f \in L^\infty(\Omega)$. Existe $\alpha \in (0,s]$ que depende de n, p e s e C_Ω dependendo de n, p, s e Ω, tal que, para toda solução fraca $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ do problema (1.16), então $u \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ e

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \le C_\Omega \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}.$$

Demonstração. [16, Teorema 1.1] □

Além disso, se $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$, podemos dizer que $(-\Delta)_p^s u \le (-\Delta)_p^s v$ em Ω, no sentido fraco, caso

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{n+ps}}\,dxdy \\ \le \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v(x)-v(y)|^p(v(x)-v(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{n+ps}}\,dxdy$$

para toda $\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$.

Definimos também, para Ω limitado,

$$\widetilde{W}^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)\, ;\, \|u\|_{W^{s,p}(U)} + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^{p-1}}{(1+|x|)^{n+sp}} dx < \infty, \text{ para algum } U \Supset \Omega \right\}.$$

Note que $W_0^{s,p}(\Omega) \subset \widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$. Um princípio de comparação útil para $(-\Delta)_p^s$ foi demonstrado em [24, Lema 9] e [16, Proposição 2.10]

Teorema 1.12 (Princípio da Comparação)**.** Seja Ω limitado, $u, v \in \widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$ satisfazendo $u \leq v$ em Ω^c e, para toda $\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ em Ω,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\, u(x) - u(y)\, |^p\, (\, u(x) - u(y)\,)(\, \varphi(x) - \varphi(y)\,)}{|\, x - y\, |^{n+ps}}\, dxdy \tag{1.19}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\, v(x) - v(y)\, |^p\, (\, v(x) - v(y)\,)(\, \varphi(x) - \varphi(y)\,)}{|\, x - y\, |^{n+ps}}\, dxdy. \tag{1.20}$$

Então $u \leq v$ em Ω.

Mencionamos também outra propriedade do problema (1.16), que será fundamental para o teorema principal do último capítulo. No caso particular em que $f \equiv 1$, as soluções fracas são subsoluções em todo $\mathbb{R}^n$:

Lema 1.13. Sejam $s \in (0, 1)$, $p \in (1, \infty)$ e Ω limitado. Seja $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ solução fraca de

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s\, u = 1 & \text{em } \Omega \\ \qquad u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases} \tag{1.21}$$

então $(-\Delta)_p^s\, u \leq 1$ em $\mathbb{R}^n$ no sentido fraco.

Demonstração. [17, Lema 2.4] □

Utilizamos o seguinte resultado na demonstração do próximo Teorema:

Lema 1.14. Seja $1 < p < \infty$ e $\beta \geq 1$. Para quaisquer $a, b, M \geq 0$ vale

$$|a - b|^{p-2}(a - b)(a_M^\beta - b_M^\beta) \geq \frac{\beta\, p^p}{(\beta + p - 1)^p} \left| a_M^{\frac{\beta+p-1}{p}} - b_M^{\frac{\beta+p-1}{p}} \right|^p, \tag{1.22}$$

onde $a_M = min\{a, M\}$ e $b_M = min\{b, M\}$.

Demonstração. [8, Lema C.2] □

Para finalizar, suponha $f \geq 0$ de modo que $f \in L^\infty(\Omega)$. Se $sp < n$ ou $sp > n$ podemos afirmar, com base no Teorema 1.10 e na Proposição 1.8 que as soluções do problema (1.16) pertencem a $L^\infty(\Omega)$. No próximo resultado, demonstraremos que a mesma conclusão é válida quando $sp = n$, utilizando o processo de interação de Moser que foi apresentado em [8, Teorema 3.3] para se obter uma estimativa da primeira autofunção, com adaptações específicas para contemplar as particularidades do nosso problema.

Teorema 1.15. Sejam $s \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$ tais que $sp = n$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Se $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ é solução fraca não negativa de (1.16), então $u \in L^\infty(\Omega)$ e existe uma constante $C = C(n,s,p) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{\sigma_1}|\Omega|^{\sigma_2}\|u\|_{L^1(\Omega)}^{\eta} \tag{1.23}$$

onde $\eta, \sigma_1, \sigma_2 \in (0,1)$.

Demonstração. Para cada $M > 0$ consideramos a função $u_M = \min\{u, M\}$ e observamos que u_M pertence a $W_0^{s,p}(\Omega)$ pois é a composição de u com uma função Lipschitz, conforme o Lema 1.3. Além disso, dado $\beta \geq 1$, como u_M também é limitada, temos $u_M^\beta \in W_0^{s,p}(\Omega)$. Ao utilizar u_M^β como função teste em (1.17), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p\,(u(x)-u(y))(u_M^\beta(x)-u_M^\beta(y))}{|\,x-y\,|^{n+ps}}\,dxdy &= \int_\Omega f\,u_M^\beta\,dx \\ &\leq \int_\Omega f\,u^\beta\,dx, \end{aligned} \tag{1.24}$$

onde usamos o fato de que $u_M^\beta \leq u^\beta$. Agora, podemos obter uma estimativa inferior para o lado esquerdo ao utilizar a desigualdade (1.22),

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p\,(u(x)-u(y))(u_M^\beta(x)-u_M^\beta(y))}{|\,x-y\,|^{n+ps}}\,dxdy \\ &\qquad \geq \frac{\beta\,p^p}{(\beta+p-1)^p}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left|u_M^{\frac{\beta+p-1}{p}}(x)-u_M^{\frac{\beta+p-1}{p}}(y)\right|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Para $\beta > p-1$, podemos definir

$$s' = s\frac{(\beta-p+1)}{2\beta} = \frac{n(\beta-p+1)}{p2\beta}$$

que satisfaz $0 < s' < s < 1$. Seja $j \in \mathbb{N}$ tal que $2^j > p-1$. Note que, para $\beta \geq 2^j$, $s' \in [a,b] \subset (0, \frac{n}{p})$ onde $a = n(2^j - p + 1)/(p2^{j+1})$ e $b = n/2p$. A Proposição 1.7 garante então que existe $C_1 = C^*(n,p,a,b)/|\Omega|^{\frac{(s-s')p}{n}} > 0$ ($C^*(n,p,a,b) = C^*(n,p,j) = C^*(n,p)$), tal que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left|u_M^{\frac{\beta+p-1}{p}}(x)-u_M^{\frac{\beta+p-1}{p}}(y)\right|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy &\geq C_1\left(\int_\Omega\left(u_M^{\frac{\beta+p-1}{p}}\right)^{p'}dx\right)^{\frac{p}{p'}} \\ &= C_1\left(\int_\Omega\left(u_M^{\frac{\beta+p-1}{p}}\right)^{\frac{np}{n-s'p}}dx\right)^{\frac{n-s'p}{n}}.\end{aligned}$$

A definição de s' implica que $\frac{np}{n-s'p} = \frac{2\beta p}{\beta+p-1}$. Portanto

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\left|u_M^{\frac{\beta+p-1}{p}}(x)-u_M^{\frac{\beta+p-1}{p}}(y)\right|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy \geq C_1\left(\int_\Omega u_M^{2\beta}\,dx\right)^{\frac{\beta+p-1}{2\beta}}. \tag{1.26}$$

Agora, combinando (1.25) e (1.26) em (1.24), obtemos

$$\left(\int_{\Omega} u_M^{2\beta}\,dx\right)^{\frac{\beta+p-1}{2\beta}} \leq \frac{1}{C_1}\frac{(\beta+p-1)^p}{\beta\,p^p}\int_{\Omega} f\,u^{\beta}\,dx. \tag{1.27}$$

Além disso, como $\beta-1 \leq (\beta-1)p$, então $\beta-1+p \leq (\beta-1)p+p$, logo

$$\frac{\beta+p-1}{\beta\,p} \leq 1.$$

Passando ao limite quando M tende a ∞ em (1.27), usando a relação acima e o fato de que $f \in L^{\infty}(\Omega)$, obtemos a seguinte relação

$$\left(\int_{\Omega} u^{2\beta}\,dx\right)^{\frac{\beta+p-1}{2\beta}} \leq \frac{1}{C_1}\left(\frac{\beta+p-1}{p}\right)^{p-1}\|f\|_{L^{\infty}(\Omega)}\int_{\Omega} u^{\beta}\,dx.$$

Ou seja,

$$\|u\|_{L^{2\beta}(\Omega)}^{\beta+p-1} \leq \frac{1}{C_1}\left(\frac{\beta+p-1}{p}\right)^{p-1}\|f\|_{L^{\infty}(\Omega)}\|u\|_{L^{\beta}(\Omega)}^{\beta}.$$

Note que ambos os membros são finitos pois, pela Proposição 1.15, $u \in L^q(\Omega)$ para todo $q > 1$. Denotando $\eta = \beta+p-1$, a relação pode ser escrita como

$$\|u\|_{L^{2\beta}(\Omega)} \leq \left(\frac{\eta}{p}\right)^{\frac{p-1}{\eta}}\left(\frac{\|f\|_{L^{\infty}(\Omega)}}{C^*}\right)^{\frac{1}{\eta}}|\Omega|^{\frac{(s-s')p}{n}\cdot\frac{1}{\eta}}\|u\|_{L^{\beta}(\Omega)}^{\frac{\beta}{\eta}}.$$

Note que $\frac{(s-s')p}{n}\cdot\frac{1}{\eta} = \frac{1}{2\beta}$. Seja $j \in \mathbb{N}$ tal que $2^j > p-1$. Vamos iterar a desigualdade anterior, tomando a sequência de expoentes

$$\beta_i = 2^i, \qquad \text{para } i \geq j.$$

Começando com $\beta_j = 2^j$, denotando $A_i = \|\, u\,\|_{L^{2^i}(\Omega)}$ e $\eta_i = 2^i+p-1$, obtemos

$$A_{j+1} \leq \left(\frac{\eta_j}{p}\right)^{\frac{p-1}{\eta_j}}(C_2)^{\frac{1}{\eta_j}}|\Omega|^{\frac{1}{\beta_{j+1}}}A_j^{\frac{\beta_j}{\eta_j}}$$

onde $C_2 = \|f\|_{L^{\infty}(\Omega)}/C^*$. Após $k+1$ iterações temos, por indução

$$\begin{aligned} A_{j+k+1} \;\leq\; & \left(\frac{\eta_{j+k}}{p}\right)^{\frac{p-1}{\eta_{j+k}}}\left(\frac{\eta_{j+k-1}}{p}\right)^{\frac{(p-1)\beta_{j+k}}{\eta_{j+k-1}\eta_{j+k}}}\cdots\left(\frac{\eta_j}{p}\right)^{\frac{(p-1)\beta_{j+1}\beta_{j+2}\cdots\beta_{j+k-1}\beta_{j+k}}{\eta_j\eta_{j+1}\cdots\eta_{j+k-1}\eta_{j+k}}} \\ & \times(C_2)^{\frac{1}{\eta_{j+k}}+\frac{\beta_{j+k}}{\eta_{j+k-1}\eta_{j+k}}+\cdots+\frac{\beta_{j+1}\beta_{j+2}\cdots\beta_{j+k-1}\beta_{j+k}}{\eta_j\eta_{j+1}\eta_{j+2}\cdots\eta_{j+k-1}\eta_{j+k}}} \\ & \times|\Omega|^{\frac{1}{\beta_{j+k+1}}+\frac{1}{\eta_{j+k}}+\frac{\beta_{j+k}}{\eta_{j+k-1}\eta_{j+k}}+\cdots\frac{\beta_{j+2}\beta_{j+3}\cdots\beta_{j+k-1}\beta_{j+k}}{\eta_{j+1}\eta_{j+2}\cdots\eta_{j+k-1}\eta_{j+k}}} \\ & \times A_j^{\frac{\beta_j\beta_{j+1}\cdots\beta_{j+k-1}\beta_{j+k}}{\eta_j\eta_{j+1}\cdots+\eta_{j+k-1}\eta_{j+k}}}. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Observamos que, para todo $i \geq j$

$$\frac{\beta_i}{\eta_i} = \frac{2^i}{2^i+p-1} < 1, \qquad \frac{1}{\eta_i} = \frac{1}{2^i+p-1} < \frac{1}{2^i} \qquad \text{e} \qquad \frac{\eta_i}{p} = \frac{2^i+p-1}{p} > 1.$$

Logo

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\eta_{j+k}}{p}\right)^{\frac{p-1}{\eta_{j+k}}}\left(\frac{\eta_{j+k-1}}{p}\right)^{\frac{(p-1)\beta_{j+k}}{\eta_{j+k-1}\eta_{j+k}}}\cdots\left(\frac{\eta_j}{p}\right)^{\frac{(p-1)\beta_{j+1}\beta_{j+2}\cdots\beta_{j+k-1}\beta_{j+k}}{\eta_j\eta_{j+1}\cdots\eta_{j+k-1}\eta_{j+k}}}\\
&\qquad\qquad \leq \left(\frac{\eta_{j+k}}{p}\right)^{\frac{p-1}{\eta_{j+k}}}\left(\frac{\eta_{j+k-1}}{p}\right)^{\frac{p-1}{\eta_{j+k-1}}}\cdots\left(\frac{\eta_{j+1}}{p}\right)^{\frac{p-1}{\eta_{j+1}}}\left(\frac{\eta_j}{p}\right)^{\frac{p-1}{\eta_j}}\\
&\qquad\qquad = \prod_{i=j}^{j+k}\left(\frac{\eta_i}{p}\right)^{\frac{p-1}{\eta_i}}\\
&\qquad\qquad = \exp\left[\ln\prod_{i=j}^{j+k}\left(\frac{\eta_i}{p}\right)^{\frac{p-1}{\eta_i}}\right]\\
&\qquad\qquad = \exp\left[\sum_{i=j}^{j+k}\ln\left(\frac{\eta_i}{p}\right)^{\frac{p-1}{\eta_i}}\right]\\
&\qquad\qquad = \exp\left[\sum_{i=j}^{j+k}\frac{(p-1)}{\eta_i}\ln\left(\frac{\eta_i}{p}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Usando a propriedade de que $\ln(x) < \sqrt{x}$ para $x > 0$, concluímos que o segundo fator da desigualdade (1.28) pode ser estimado por

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\eta_{j+k}}{p}\right)^{\frac{p-1}{\eta_{j+k}}}\left(\frac{\eta_{j+k-1}}{p}\right)^{\frac{(p-1)\beta_{j+k}}{\eta_{j+k-1}\eta_{j+k}}}\cdots\left(\frac{\eta_j}{p}\right)^{\frac{(p-1)\beta_{j+1}\beta_{j+2}\cdots\beta_{j+k-1}\beta_{j+k}}{\eta_j\eta_{j+1}\cdots\eta_{j+k-1}\eta_{j+k}}}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \leq \exp\left[\frac{(p-1)}{\sqrt{p}}\sum_{i=j}^{j+k}\frac{1}{\sqrt{\eta_i}}\right]. \qquad (1.29)
\end{aligned}
$$

Denotando o expoente de C_2 por γ_{j+k}, e usando a relação $\beta_i/\eta_i < 1$ observamos que

$$
\begin{aligned}
\gamma_{j+k} = \frac{1}{\eta_{j+k}} + \frac{\beta_{j+k}}{\eta_{j+k-1}\eta_{j+k}} + \cdots + \frac{\beta_{j+1}\beta_{j+2}\cdots\beta_{j+k-1}\beta_{j+k}}{\eta_j\eta_{j+1}\eta_{j+2}\cdots\eta_{j+k-1}\eta_{j+k}}\\
\leq \frac{1}{\eta_{j+k}} + \frac{1}{\eta_{j+k-1}} + \cdots + \frac{1}{\eta_j}\\
\leq \frac{1}{2^{j+k}} + \frac{1}{2^{j+k-1}} + \cdots + \frac{1}{2^j}. \qquad (1.30)
\end{aligned}
$$

Observe que $\gamma_{j+k} < 1$ e que

$$
\gamma_{j+k} = \frac{\beta_{j+k}}{\eta_{j+k}}\gamma_{j+k-1} + \frac{1}{\eta_{j+k}}
$$

Daí, $|\gamma_{j+k} - \gamma_{j+k-1}| \leq p/2^{j+k}$ e, portanto, γ_{j+k} é uma sequência de Cauchy. Logo γ_{j+k} converge e $\lim_{k\geq\infty}\gamma_{j+k} \leq 1$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
\gamma_{j+k} &\geq \frac{\beta_{j+1}\beta_{j+2}\cdots\beta_{j+k-1}\beta_{j+k}}{\eta_j\eta_{j+1}\eta_{j+2}\cdots\eta_{j+k-1}\eta_{j+k}}\\
&= \frac{\prod_{i=1}^{k}2^{j+i}}{\prod_{i=0}^{k}(2^{j+i}+p-1)}\\
&= \frac{1}{2^j}\frac{1}{\prod_{m=0}^{j+k}(1+(p-1)2^{-m})}
\end{aligned}
$$

Logo

$$\lim_{k\to\infty}\gamma_{j+k} \geq \frac{1}{2^j}\frac{1}{\prod_{m=0}^{\infty}(1+(p-1)2^{-m})} = \eta_0(n,p)$$

Portanto $\lim_{k\to\infty}\gamma_{j+k} = \sigma_1$ onde $\eta_0(n,p) \leq \sigma_1 \leq 1$. De modo análogo, podemos concluir que o expoente de $|\Omega|$,

$$\theta_{j+k} = \frac{1}{\beta_{j+k+1}} + \frac{1}{\eta_{j+k}} + \frac{\beta_{j+k}}{\eta_{j+k-1}\eta_{j+k}} + \cdots \frac{\beta_{j+2}\beta_{j+3}\cdots\beta_{j+k-1}\beta_{j+k}}{\eta_{j+1}\eta_{j+2}\cdots\eta_{j+k-1}\eta_{j+k}}$$

converge a σ_2, onde $\eta_0'(n,p) \leq \sigma_2 \leq 1$, para algum $\eta_0'(n,p) > 0$. Combinando as convergências dos expoente de C_2 e $|\Omega|$, com (1.29) em (1.28) e tomando o limite quando k tende a ∞, obtemos

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \exp\left[\frac{(p-1)}{\sqrt{p}}\sum_{i=j}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\eta_i}}\right](C_2)^{\sigma_1}|\Omega|^{\sigma_2}\|u\|_{L^{2^j}(\Omega)}^{\prod_{i=j}^{\infty}\frac{\beta_i}{\eta_i}}. \tag{1.31}$$

Observamos que

$$\sum_{i=j}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\eta_i}} \leq \sum_{i=j}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^i \leq \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^i = \sqrt{2}+1.$$

Além disso, dado que $\beta_i/\eta_i < 1$ para todo i, então $\prod_{i=j}^{j+k}\frac{\beta_i}{\eta_i}$ é uma sequência decrescente em k. Podemos limitar inferiormente a sequência por uma constante positiva. Para isso, reescrevemos

$$\begin{aligned}\prod_{i=j}^{j+k}\frac{\beta_i}{\eta_i} = \exp\left[\ln\left(\prod_{i=j}^{j+k}\frac{\beta_i}{\eta_i}\right)\right] &= \exp\left[\sum_{i=j}^{j+k}\ln\left(\frac{\beta_i}{\eta_i}\right)\right]\\ &= \exp\left[\sum_{i=j}^{j+k}\ln\left(\frac{2^i}{2^i+p-1}\right)\right]\\ &= \exp\left[\sum_{i=j}^{j+k}\ln\left(1-\frac{p-1}{2^i+p-1}\right)\right].\end{aligned}$$

A partir do fato que

$$-1 < -\frac{p-1}{p} \leq -\frac{p-1}{2^i+p-1} < 0,$$

para qualquer $i \geq j$, e considerando a propriedade de que $\ln(1+x) \geq Ax$ para $x \in \left[-\frac{p-1}{p}, 0\right)$ e algum $A > 0$, temos a seguinte limitação

$$\prod_{i=0}^{j+k}\frac{\beta_i}{\eta_i} \geq \exp\left[\sum_{i=j}^{j+k} -A\frac{p-1}{2^i+p-1}\right] = \exp\left[-A(p-1)\sum_{i=j}^{j+k}\frac{1}{2^i+p-1}\right] > 0.$$

Assim, concluímos que $\prod_{i=j}^{\infty}\frac{\beta_i}{\eta_i} = \tilde{\eta} \in (0,1)$.

Portando, na desigualdade (1.31), temos

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tilde{C}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{\sigma_1}|\Omega|^{\sigma_2}\|u\|_{L^{2^j}(\Omega)}^{\tilde{\eta}}, \tag{1.32}$$

onde

$$\tilde{C} = \exp\left[\frac{(p-1)}{\sqrt{p}}(\sqrt{2}+1)\right]\frac{1}{(C^*)^{\sigma_1}}$$

Como $u \in L^{2^j}(\Omega)$, concluímos que $u \in L^\infty(\Omega)$. Desta forma, podemos estimar

$$\|u\|_{L^{2^j}(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{2^j-1}{2^j}} \|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{2^j}}.$$

Ao substituir essa expressão em (1.32) e dividir ambos os membros por $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}^{\tilde{\eta}\frac{2^j-1}{2^j}}$, obtemos

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}^{1-\tilde{\eta}\frac{2^j-1}{2^j}} \leq \tilde{C}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{\sigma_1}|\Omega|^{\sigma_2}\|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{\tilde{\eta}}{2^j}}.$$

Finalmente, elevando ambos os membros a potência $\frac{2^j}{2^j-\tilde{\eta}(2^j-1)} > 1$, concluímos que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{\sigma_1'}|\Omega|^{\sigma_2'}\|u\|_{L^1(\Omega)}^{\eta},$$

onde $C = \tilde{C}^{\frac{2^j}{2^j-\tilde{\eta}(2^j-1)}}$, $\sigma_1' = \sigma_1^{\overline{2^j-\tilde{\eta}(2^j-1)}}$, $\sigma_2' = \sigma_2^{\overline{2^j-\tilde{\eta}(2^j-1)}}$ e $\eta = \frac{\tilde{\eta}}{2^j-\tilde{\eta}(2^j-1)}$. Note que o expoente η é menor que 1 pois $\tilde{\eta}2^j < 2^j$, logo $\tilde{\eta} < 2^j - \tilde{\eta}(2^j-1)$. O que prova o resultado. $\square$

1.3 Resultados Auxiliares

Nesta seção, apresentamos resultados técnicos essenciais para as demonstrações subsequentes.

Sejam $a, b \geq 0$, valem as seguintes desigualdades

$$(a+b)^q \leq 2^{q-1}(a^q + b^q) \qquad q \geq 1 \tag{1.33}$$

$$(a+b)^q \leq a^q + b^q \qquad q \in (0,1], \tag{1.34}$$

Considerando $C_q = 1$ se $q \leq 1$ e $C_q = 2^{q-1}$ se $q \geq 1$, as desigualdades (1.33) e (1.34) podem ser escritas como

$$(a+b)^q \leq C_q\,(a^q + b^q) \qquad q > 0. \tag{1.35}$$

Lema 1.16. Se $a, b \geq 0$ e $q \geq 1$

$$|a^q - b^q| \leq q\left(|a|^{q-1} + |b|^{q-1}\right)|a-b|. \tag{1.36}$$

Demonstração. O caso $a = b$ é imediato. Se $a \neq b$, então podemos aplicar o Teorema do Valor Médio à função $f(x) = x^q$ no intervalo $[a, b]$, isso implica que existe c entre a e b tal que $|b^q - a^q| = q|c^{q-1}||b-a|$. Note que $|c^{q-1}| \leq \max\{|a|^{q-1}, |b|^{q-1}\} \leq (|a|^{q-1} + |b|^{q-1})$, o que prova a desigualdade. $\square$

Lema 1.17. Se $a \geq b \geq 0$ e $q \geq 1$

$$\left(a^{q-1} + b^{q-1}\right)(a-b) \leq 2(a^q - b^q). \tag{1.37}$$

Demonstração. Quando $q = 1$ ou $q = 2$ a relação é imediata. Suponha $q \geq 2$, então $q - 2 \geq 0$ e $b^{q-2} - a^{q-2} \leq 0$, assim

$$\begin{aligned} \left(a^{q-1} + b^{q-1}\right)(a-b) &= a^q - ba^{q-1} + ab^{q-1} - b^q \\ &= a^q - b^q + ab(b^{q-2} - a^{q-2}) \\ &\leq a^q - b^q \\ &\leq 2(a^q - b^q), \end{aligned}$$

concluindo a desigualdade. Caso $1 < q < 2$, observe que (1.37) pode ser escrito na forma $(t^{q-1}+1)(t-1) \leq 2(t^q - 1)$ onde $t = a/b \geq 1$. A função $f(t) = (t^q - 1)/((t^q - t^{q-1} + t - 1)$ satisfaz

$$\lim_{t \to 1^+} f(t) = \lim_{t \to 1^+} \frac{t^q - 1}{t^q - t^{q-1} + t - 1} = \lim_{t \to 1^+} \frac{qt^{q-1}}{qt^{q-1} - (q-1)t^{q-2} + 1} = \frac{q}{2} > \frac{1}{2}.$$

Além disso,

$$f'(t) = \frac{(q-1)t^q - t^{2q-2} - (q-1)t^{q-2} + 1}{(t^q - t^{q-1} + t - 1)^2},$$

se denotarmos $g(t) = (q-1)t^q - t^{2q-2} - (q-1)t^{q-2} + 1$, observamos que $g(1) = 0$ e $g'(t) = t^{q-3}(q-1)h(t)$, onde $h(t) = qt^2 - 2t^q - (q-2)$ satisfaz $h(1) = 0$ e $h'(t) = 2qt^{q-1}(t^{2-q} - 1) > 0$ para $t > 1$. Portanto $h(t) > 0$ para $t \geq 1$, logo $g(t) > 0$ e assim $f'(t) > 0$ para $t > 1$. Como f é crescente em para $t > 1$ e $\lim_{t \to 1^+} f(t) > 1/2$, podemos concluir que $f(t) > 1/2$ para $t > 1$, o que prova o lema. □

Lema 1.18. Para cada $q \in (1, 2]$ existe $C > 0$ tal que, para $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$||x|^{q-2}x - |y|^{q-2}y| \leq C|x-y|^{q-1}. \tag{1.38}$$

No caso em que $q \in [2, \infty)$, existe $C > 0$, de modo que

$$||x|^{q-2}x - |y|^{q-2}y| \leq C|x-y|(|x| + |y|)^{q-2}. \tag{1.39}$$

Demonstração. Veja [10, Lema 2.1]. □

Lembramos também da conhecida *desigualdade de Young com* ε, a qual afirma que, para quaisquer a e b não negativos, e se $1/p + 1/p' = 1$, a seguinte relação é válida:

$$ab \leq \frac{\varepsilon a^{p'}}{p'} + \frac{b^p}{\varepsilon^{\frac{p}{p'}} p}. \tag{1.40}$$

Capítulo 2

ESTIMATIVA ENVOLVENDO O PRIMEIRO AUTOVALOR

Neste capítulo, revisitamos propriedades básicas do primeiro autovalor associado ao operador e demonstramos que, sob condições específicas para a função f, o supremo de uma solução para o problema

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = f(x,u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

é limitado por alguma potência negativa do primeiro autovalor. Assim, quando um domínio possui um primeiro autovalor grande, o maximo da solução é pequeno.

Iniciamos lembrando que o problema de autovalor associado ao operador p-Laplaciano fracionário é definido como

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \lambda\, |\, u\, |^{p-2}\, u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

Se existe um valor $\lambda \in \mathbb{R}$ para o qual a equação (2.2) possui uma solução fraca não nula u, então dizemos que λ é um autovalor de Ω. Nesse caso, u é chamada de *autofunção associada* a λ. O problema de autovalor (2.2) foi primeiramente introduzido por Lindgren e Lindqvist em [24] e investigado por vários autores posteriormente, citamos, por exemplo, [8, 13] e [15].

O conjunto de todos autovalores associados a um domínio, é um conjunto fechado de números positivos. Definimos $\lambda_{s,p}^1(\Omega)$ como o menor autovalor associado ao problema (2.2). Nesse contexto, vale a seguinte caracterização variacional

$$\lambda_{s,p}^1(\Omega) = \min_{u \in W_0^{s,p}(\Omega)} \left\{ [\, u\,]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p \; ; \; \|\, u\,\|_{L^p(\Omega)} = 1 \right\}. \tag{2.3}$$

Note que o primeiro autovalor corresponde ao inverso da melhor constante na desigualdade de Poincaré (1.7). Para simplificar a notação ao longo do trabalho, vamos denotar $\lambda_1(\Omega) := \lambda^1_{s,p}(\Omega)$.

O seguinte resultado, encontrado em [8, Teorema 3.5], é conhecido como desigualdade de Faber-Krahn. Essa desigualdade estabelece que, entre todos os domínios com volume fixo, a bola é o que possui o menor primeiro autovalor.

Teorema 2.1. Seja $s \in (0,1)$ e $p \in (1,\infty)$. Para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, temos

$$\lambda_1(\Omega) \geq \left(\frac{|B|}{|\Omega|}\right)^{\frac{sp}{n}} \lambda_1(B) \tag{2.4}$$

onde B é qualquer bola de dimensão n. Além disso, se vale a igualdade em (2.4), então Ω é uma bola.

Desta forma, o primeiro autovalor é uma possível forma de medir a diferença entre um domínio e a bola correspondente. Seja B a bola aberta em $\mathbb{R}^n$ centrada na origem, tal que $|B| = |\Omega|$. Vamos impor a seguinte condição de crescimento sobre a função f:

- Existe $\beta \geq 0$ e $0 \leq \alpha < \lambda_1(B)$ tal que

$$|\, f(x,t)\,| \leq \alpha\,|\,t\,|^{p-1} + \beta. \tag{2.5}$$

Com f satisfazendo essa condição, temos a seguinte estimativa para a norma L^p de soluções do problema

Proposição 2.2. Sejam $s \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$ e Ω um conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$. Se $u \in W^{s,p}_0(\Omega)$ é uma solução não nula do problema (2.1) e a condição (2.5) é satisfeita, então

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \left(\frac{\beta}{\lambda_1(\Omega) - \alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}} |\Omega|^{\frac{1}{p}}. \tag{2.6}$$

Demonstração. Utilizando a solução u como função teste na equação (1.17) e a condição de crecimento de f, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|\,x-y\,|^{n+ps}}\,dxdy &= \int_\Omega f(x,u)\,u\,dx \\
&\leq \int_\Omega \left(\alpha|\,u\,|^{p-1} + \beta\right)|u|\,dx \\
&= \alpha\,\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \beta\int_\Omega |u|^p\,dx \\
&\leq \alpha\,\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \beta\,\|u\|_{L^p(\Omega)}\,|\Omega|^{\frac{p-1}{p}},
\end{aligned}$$

onde, na ultima estimativa, utilizamos a desigualdade de Hölder. Pela caracterização variacional do primeiro autovalor, temos $\lambda_1(\Omega)\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq [\,u\,]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$, logo

$$(\lambda_1(\Omega) - \alpha)\,\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \beta\,\|u\|_{L^p(\Omega)}\,|\Omega|^{\frac{p-1}{p}}.$$

Por hipótese $\alpha < \lambda_1(B)$ e, de acordo com a desigualdade (2.4) temos $\lambda_1(B) \leq \lambda_1(\Omega)$, o que implica em $\alpha < \lambda_1(\Omega)$. Além disso, como a função u é não nula, podemos dividir a desigualdade anterior por $(\lambda_1(\Omega) - \alpha)\|u\|_{L^p(\Omega)}$, obtendo

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \leq \frac{\beta\,|\Omega|^{\frac{p-1}{p}}}{\lambda_1(\Omega) - \alpha}, \tag{2.7}$$

o que conclui o resultado. $\square$

Como consequência, é possível expressar a estimativa (1.23) em termos dos parametros n, s, p, $|\Omega|$ e $\|f\|_{L^\infty}$. Isso nos permite obter a primeira estimativa para o supremo das soluções em termos de uma potência negativa do primeiro autovalor, no caso em que $sp = n$.

Teorema 2.3. Sejam $s \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$ tais que $sp = n$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Se $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ é solução fraca não negativa de (2.1), onde $f = f(x)$ pertence a $L^\infty(\Omega)$, então $u \in L^\infty(\Omega)$ e existe uma constante $C = C(n,s,p,|\Omega|,\|f\|_{L^\infty}) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\left(\frac{\|f\|_{L^\infty}}{\lambda_1(\Omega)}\right)^{\frac{\eta}{p-1}} |\Omega|^{\frac{\eta(p-1)+1}{p}} \tag{2.8}$$

onde $\eta \in (0,1)$.

Demonstração. Com base no Teorema 1.15 sabemos que existe uma constante positiva C que depende de n, s, p, $|\Omega|$ e $\|f\|_{L^\infty}$, tal que $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|u\|^\eta_{L^1(\Omega)}$. Utilizando a desigualdade de Hölder segue que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|u\|^\eta_{L^p(\Omega)}|\Omega|^{\frac{\eta(p-1)}{p}}.$$

Considerando a Proposição 2.2, com $\alpha = 0$ e $\beta = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$, temos

$$\|\, u \,\|_{L^p(\Omega)} \leq \left(\frac{\|f\|_{L^\infty(\Omega)}}{\lambda_1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p-1}} |\Omega|^{\frac{1}{p}}.$$

Ao combinar as duas estimativas, provamos o resultado. $\square$

Como outra consequência da Proposição 2.2, no caso em que $sp < n$, quando a função f é L^∞, podemos obter a seguinte estimativa para a norma L^∞ das soluções.

Teorema 2.4. Sejam $s \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$ tais que $sp < n$ e Ω um conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$. Se $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ é uma solução fraca não nula do problema

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \ f & \text{em } \Omega \\ \qquad u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} \tag{2.9}$$

Então existe $C = C(n,s,p) > 0$ tal que

$$\|\, u \,\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\,|\Omega|^{\frac{sp}{n(p-1)}}\,\|\, f \,\|^{\frac{1}{p-1}}_{L^\infty(\Omega)}. \tag{2.10}$$

Demonstração. A partir do Teorema 1.10 podemos concluir que a função u pertence a $L^\infty(\Omega)$ e a estimativa (1.18) é válida. Aplicando a desigualdade de Hölder a essa estimativa, obtemos, para qualquer $q > n/sp$

$$\begin{aligned}
\| u \|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C_1 \left[\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega | u | \, dx + \left(|\Omega|^{\frac{sp}{n} - \frac{1}{q}} \| f \|_{L^\infty(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{q}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right] \\
&\leq C_1 \left[\frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{p}}} \| u \|_{L^p(\Omega)} + \left(|\Omega|^{\frac{sp}{n}} \| f \|_{L^\infty(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right]
\end{aligned}$$

onde $C_1 = C_1(n, s, p)$. A função constante $f(x,t) = f(x)$ satisfaz a condição (2.5) com $\alpha = 0$ e $\beta = \| f \|_{L^\infty(\Omega)}$. Então, de acordo com a Proposição 2.2, temos

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq \left(\frac{\| f \|_{L^\infty(\Omega)}}{\lambda_1(B)} \right)^{\frac{1}{p-1}} |\Omega|^{\frac{1}{p}}.$$

Consequentemente

$$\| u \|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 \left[\left(\frac{\| f \|_{L^\infty(\Omega)}}{\lambda_1(B)} \right)^{\frac{1}{p-1}} + \left(|\Omega|^{\frac{sp}{n}} \| f \|_{L^\infty(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right].$$

Conforme [24], vale a propriedade de escala dos autovalores, $\lambda_1(t\Omega) = t^{-sp}\lambda_1(\Omega)$ para $t > 0$. Além disso, se B tem raio R, então $R = (|B|/\omega_n)^{\frac{1}{n}} = (|\Omega|/\omega_n)^{\frac{1}{n}}$ onde ω_n é a área da esfera unitária $\partial B_1(0)$ em $\mathbb{R}^n$. Portanto, podemos expressar $\lambda_1(B)$ como

$$\lambda_1(B) = R^{-sp}\lambda_1(B_1) = |\Omega|^{-\frac{sp}{n}} \omega_n^{\frac{sp}{n}} \lambda_1(B_1).$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\| u \|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C_1 \left[\left(\frac{\| f \|_{L^\infty(\Omega)}}{|\Omega|^{-\frac{sp}{n}} \omega_n^{\frac{sp}{n}} \lambda_1(B_1)} \right)^{\frac{1}{p-1}} + \left(|\Omega|^{\frac{sp}{n}} \| f \|_{L^\infty(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right] \\
&= C |\Omega|^{\frac{sp}{n(p-1)}} \| f \|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}
\end{aligned}$$

onde $C = C_1 \omega_n^{-\frac{sp}{n(p-1)}} \lambda_1(B_1)^{-\frac{1}{p-1}} + C_1$. □

Com base nesses resultados, podemos demonstrar o teorema principal que estabelece uma relação entre o supremo das soluções e o primeiro autovalor associado ao domínio, quando $sp < n$.

Teorema 0.1 Sejam $s \in (0,1)$, $p \in (1, \infty)$ tais que $sp < n$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Se $w \in W_0^{s,p}(\Omega)$ é solução fraca limitada de (2.1) com f satisfazendo a condição (2.5), então

$$\begin{aligned}
\| w \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max \Bigg\{ & C_1 \, \beta^{\frac{1}{p-1}} \left(\frac{1}{\lambda_1(\Omega) - \alpha} \right)^{\frac{sp^2}{n(p-1)^2 + s(p-1)p^2}} |\Omega|^{\frac{sp}{n(p-1)+sp^2}}, \\
& C_2 \, \alpha^{\frac{n}{sp^2}} \left(\frac{\beta}{\lambda_1(\Omega) - \alpha} \right)^{\frac{1}{p-1}} |\Omega|^{\frac{1}{p}} \Bigg\}, \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

onde $C_1 = C_1(n,s,p)$ e $C_2 = C_2(n,s,p)$ são constantes positivas.

Demonstração. Seja $M = \|w\|_{L^\infty(\Omega)}$ e $\Omega_2 = \{x \in \Omega : |w(x)| > M/2\}$, então

$$\| w \|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |w|^p \, dx \geq \int_{\Omega_2} |w|^p \, dx \geq \left(\frac{M}{2}\right)^p |\Omega_2|. \tag{2.12}$$

Por outro lado, como w é uma solução fraca e f satisfaz a condição (2.5), temos a seguinte relação para toda $\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega_2) \subset W_0^{s,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\, w(x) - w(y)\,|^p \,(\, w(x) - w(y)\,)(\,\varphi(x) - \varphi(y)\,)}{|\, x - y\,|^{n+ps}} \, dxdy &= \int_\Omega f(x,u)\,\varphi\, dx \\
&\leq \int_\Omega (\alpha M^{p-1} + \beta)\,\varphi\, dx \\
&= \int_{\Omega_2} (\alpha M^{p-1} + \beta)\,\varphi\, dx.
\end{aligned}$$

Se u é uma solução fraca de $(-\Delta)^s_p u = \alpha\, M^{p-1} + \beta$ em Ω_2 e $u = M/2$ em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_2$, então, de acordo com a desigualdade anterior, temos $(-\Delta)^s_p w \leq (-\Delta)^s_p u$ em Ω_2 no sentido fraco. Além disso, $u \in \widetilde{W}^{s,p}(\Omega_2)$ e $w \leq u$ em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_2$. Utilizando então o princípio da comparação, Teorema 1.12, obtemos $|w| \leq u$ em Ω_2, o que implica em $M = \|w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega_2)}$.

Considerando agora a função $v = u - M/2$, temos que v é solução fraca de $(-\Delta)^s_p v = \alpha\, M^{p-1} + \beta$ com $v = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_2$. Pelo Teorema 2.4 existe uma constante $C = C(n,s,p) > 0$ tal que

$$\| v \|_{L^\infty(\Omega_2)} \leq C|\Omega_2|^{\frac{sp}{n(p-1)}} (\alpha M^{p-1} + \beta)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Consequentemente, temos

$$M \leq \| v \|_{L^\infty(\Omega_2)} + \frac{M}{2} \leq C|\Omega_2|^{\frac{sp}{n(p-1)}} (\alpha M^{p-1} + \beta)^{\frac{1}{p-1}} + \frac{M}{2}.$$

Podemos usar a relação (2.12) e a desigualdade (1.35) na expressão acima para obter

$$\frac{M}{2} \leq C \left[\left(\frac{2}{M}\right)^p \|w\|^p_{L^p(\Omega)} \right]^{\frac{sp}{n(p-1)}} C_p \left(\alpha^{\frac{1}{p-1}} M + \beta^{\frac{1}{p-1}} \right).$$

Se $\alpha^{\frac{1}{p-1}} M \leq \beta^{\frac{1}{p-1}}$, então temos

$$M^{1+\frac{sp^2}{n(p-1)}} \leq 4\,C\,C_p \left(2^p \,\|w\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{sp}{n(p-1)}} \beta^{\frac{1}{p-1}},$$

o que implica em

$$M \leq (4\,CC_p)^{\frac{n(p-1)}{n(p-1)+sp^2}} \, 2^{\frac{sp^2}{n(p-1)+sp^2}} \, \|w\|^{\frac{sp^2}{n(p-1)+sp^2}}_{L^p(\Omega)} \, \beta^{\frac{n}{n(p-1)+sp^2}}.$$

Por meio da desigualdade (2.6), concluímos que

$$M \leq (4\,CC_p)^{\frac{n(p-1)}{n(p-1)+sp^2}}\, 2^{\frac{sp^2}{n(p-1)+sp^2}}\, \beta^{\frac{1}{(p-1)}} \left(\frac{1}{\lambda_1(\Omega)-\alpha}\right)^{\frac{sp^2}{n(p-1)^2+s(p-1)p^2}} |\Omega|^{\frac{sp}{n(p-1)+sp^2}}.$$

Caso $\alpha^{\frac{1}{p-1}}\, M \leq \beta^{\frac{1}{p-1}}$, temos

$$\frac{M}{2} \leq C\left[\left(\frac{2}{M}\right)^p \|w\|^p_{L^p(\Omega)}\right]^{\frac{sp}{n(p-1)}} C_p\, 2\, \alpha^{\frac{1}{p-1}}\, M.$$

Portanto

$$M^{\frac{sp^2}{n(p-1)}} \leq 4\,C\,C_p\, 2^{\frac{sp^2}{n(p-1)}}\, \alpha^{\frac{1}{p-1}}\, \|w\|^{\frac{sp^2}{n(p-1)}}_{L^p(\Omega)}.$$

A partir da desigualdade (2.6) segue que

$$M \leq 2\,(4\,C\,C_p)^{\frac{n(p-1)}{sp^2}}\, \alpha^{\frac{n}{sp^2}} \left(\frac{\beta}{\lambda_1(\Omega)-\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}} |\Omega|^{\frac{1}{p}}$$

concluindo o resultado com $C_1 = (4\,CC_p)^{\frac{n(p-1)}{n(p-1)+sp^2}}\, 2^{\frac{sp^2}{n(p-1)+sp^2}}$ e $C_2 = 2\,(4\,C\,C_p)^{\frac{n(p-1)}{sp^2}}$. $\square$

O seguinte resultado mostra que uma relação semelhante é válida quando $sp > n$, além de estimar também a norma $C^{0,\alpha}$ em termos do inverso do primeiro autovalor.

Teorema 2.5. Sejam $s \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$ tais que $sp > n$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Se $u \in W^{s,p}_0(\Omega)$ é solução fraca de (2.1) com f satisfazendo a condição (2.5), então

$$\|\, u \,\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_1\, \beta^{\frac{1}{p-1}}\, |\Omega|^{\frac{s}{n}} \left(\frac{\alpha}{(\lambda_1(\Omega)-\alpha)^{\frac{p}{p-1}}} + \frac{1}{(\lambda_1(\Omega)-\alpha)^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.13}$$

onde $C_1 = C_1(n,s,p) > 0$. Além disso,

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq \beta^{\frac{1}{p-1}} \left(C_1|\Omega|^{\frac{s}{n}} + C_2|\Omega|^{\frac{1}{p}}\right) \left(\frac{\alpha}{(\lambda_1(\Omega)-\alpha)^{\frac{p}{p-1}}} + \frac{1}{(\lambda_1(\Omega)-\alpha)^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.14}$$

onde $C_2 = C_2(n,s,p) > 0$.

Demonstração. Dado que $u \in W^{s,p}_0(\Omega)$ com $sp > n$, temos, a partir da relação (1.14) que para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$|u(x)| \leq C\,[\,u\,]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\, |\Omega|^{\frac{\alpha}{n}}, \tag{2.15}$$

onde $C = C(n,s,p) > 0$ e $\alpha = s - n/p$. Ao utilizar a própria solução u como função teste em (1.17) e aplicar a condição de crescimento de f, temos

$$[\,u\,]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = \int_\Omega f(u,x)\,u\,dx \leq \alpha\,\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \beta\,\|u\|_{L^p(\Omega)}\,|\Omega|^{\frac{p-1}{p}}.$$

Pela estimativa (2.6) obtemos

$$
\begin{aligned}
[\,u\,]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} &\leq \alpha\left(\frac{\beta}{\lambda_1(\Omega)-\alpha}\right)^{\frac{p}{p-1}}|\Omega| + \beta\left(\frac{\beta}{\lambda_1(\Omega)-\alpha}\right)^{\frac{1}{p-1}}|\Omega|^{\frac{1}{p}}\,|\Omega|^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \beta^{\frac{p}{p-1}}|\Omega|\left(\frac{\alpha}{(\lambda_1(\Omega)-\alpha)^{\frac{p}{p-1}}} + \frac{1}{(\lambda_1(\Omega)-\alpha)^{\frac{1}{p-1}}}\right). \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

Deste modo, a partir de (2.15) e do fato que $1+\alpha/n = s/n$, concluímos que

$$
|u(x)| \leq C\,\beta^{\frac{1}{p-1}}|\Omega|^{\frac{s}{n}}\left(\frac{\alpha}{(\lambda_1(\Omega)-\alpha)^{\frac{p}{p-1}}} + \frac{1}{(\lambda_1(\Omega)-\alpha)^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (2.17)
$$

provando (2.13).

Além disso, a partir de (1.12) e da estimativa (2.16), temos

$$
\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq \gamma\,\beta^{\frac{1}{p-1}}|\Omega|^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\alpha}{(\lambda_1(\Omega)-\alpha)^{\frac{p}{p-1}}} + \frac{1}{(\lambda_1(\Omega)-\alpha)^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (2.18)
$$

onde $\gamma = \gamma(n,s,p) > 0$. Combinando essa estimativa com (2.17) obtemos a expressão (2.14) com $C_1 = C$ e $C_2 = \gamma$. $\square$

Decorre das relações estabelecidas em Corolário 2.3, Teoremas 0.1 e 2.5, juntamente com a desigualdade de Faber-Krahn (2.4) que, quando um domínio possui uma forma complexa e afasta-se consideravelmente de uma bola, resultando em um primeiro autovalor grande, as soluções relacionadas a esse domínio tendem a ter um valor supremo pequeno.

Capítulo 3

LOCALIZAÇÃO DAS SOLUÇÕES

Neste capítulo, demonstramos que o supremo das soluções do problema (1.16), em uma vizinhança de um ponto, é controlado pela medida de Ω nesse local. Além de sua relevância intrínseca, estes resultados também desempenham um papel crucial na demonstração do teorema principal no capítulo conclusivo.

Para obter essa localização, utilizamos três resultados auxiliares. O primeiro estabelece um resultado técnico que será útil nos passos seguintes.

Lema 3.1. Sejam $q \geq 2$ e $N = \lfloor q \rfloor - 1$. Para qualquer função $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ vale

$$\begin{aligned} h^q(x) - h^q(y) &= (h(x) - h(y)) \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{h^{q-k}(x)h^{k-1}(y) + h^{k-1}(x)h^{q-k}(y)}{2} \right) \\ &\quad + (h^{q-N}(x) - h^{q-N}(y)) \left(\frac{h^N(x) + h^N(y)}{2} \right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Além disso,

$$\frac{h^{q-1}(x) + h^{q-1}(y)}{2} \leq \sum_{k=1}^{N} \frac{h^{q-k}(x)h^{k-1}(y) + h^{k-1}(x)h^{q-k}(y)}{2} \leq \frac{N}{2} \left(h^{q-1}(x) + h^{q-1}(y) \right). \tag{3.2}$$

Demonstração. Inicialmente observamos que, somando e subtraindo o termo $h^{q-1}(x)h(y)$, obtêm-se

$$\begin{aligned} h^q(x) - h^q(y) &= h^q(x) + h^{q-1}(x)h(y) - h^{q-1}(x)h(y) - h^q(y) \\ &= (h(x) - h(y))\, h^{q-1}(x) + \left(h^{q-1}(x) - h^{q-1}(y) \right) h(y). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Se $q \in [2, 3)$ paramos o processo aqui. Caso $q \geq 3$, ou seja $N > 1$, expandimos o fator $h^{q-1}(x) - h^{q-1}(y)$ como

$$\begin{aligned} h^{q-1}(x) - h^{q-1}(y) &= h^{q-1}(x) + h^{q-2}(x)h(y) - h^{q-2}(x)h(y) - h^{q-1}(y) \\ &= (h(x) - h(y))\, h^{q-2}(x) + \left(h^{q-2}(x) - h^{q-2}(y) \right) h(y), \end{aligned}$$

gerando em 3.3

$$\begin{aligned}
h^q(x)-h^q(y) &= (h(x)-h(y))\,h^{q-1}(x)+\\
&\quad+\left[(h(x)-h(y))\,h^{q-2}(x)+\left(h^{q-2}(x)-h^{q-2}(y)\right)h(y)\right]h(y)\\
&= (h(x)-h(y))\left(h^{q-1}(x)+h^{q-2}(x)h(y)\right)\\
&\quad+\left(h^{q-2}(x)-h^{q-2}(y)\right)h^2(y).
\end{aligned}$$

Agora expandimos o fator $h^{q-2}(x)-h^{q-2}(y)$ usando o mesmo racioncínio. Repetindo este processo de expansão para cada $h^{q-k}(x)-h^{q-k}(y)$, com $k\in\{2,...,N-1\}$, obtemos a expressão

$$h^{q-k}(x)-h^{q-k}(y)=(h(x)-h(y))\,h^{q-k-1}(x)+\left(h^{q-k-1}(x)-h^{q-k-1}(y)\right)h(y),$$

o que implica que

$$h^q(x)-h^q(y)=(h(x)-h(y))\left(\sum_{k=1}^{N}h^{q-k}(x)h^{k-1}(y)\right)+\left(h^{q-N}(x)-h^{q-N}(y)\right)h^N(y).$$

De maneira similar, trocando x por y nos termos que são somados e subtraídos nas expressões, encontramos

$$h^q(x)-h^q(y)=(h(x)-h(y))\left(\sum_{k=1}^{N}h^{k-1}(x)h^{q-k}(y)\right)+\left(h^{q-N}(x)-h^{q-N}(y)\right)h^N(x).$$

Somando as duas igualdades e dividindo por dois, obtêm-se (3.1).

Como $h(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$, então

$$\frac{h^{q-1}(x)+h^{q-1}(y)}{2}\leq\sum_{k=1}^{N}\frac{h^{q-k}(x)h^{k-1}(y)+h^{k-1}(x)h^{q-k}(y)}{2}.$$

Para verificar a segunda desigualdade de (3.2), aplicamos a desigualdade de Young com os expoentes $p=\frac{q-1}{q-k}$ e $p'=\frac{q-1}{k-1}$, resultando em

$$h^{q-k}(x)h^{k-1}(y)\leq\frac{q-k}{q-1}h^{q-1}(x)+\frac{k-1}{q-1}h^{q-1}(y),$$

e

$$h^{k-1}(x)h^{q-k}(y)\leq\frac{k-1}{q-1}h^{q-1}(x)+\frac{q-k}{q-1}h^{q-1}(y).$$

Portanto

$$\sum_{k=1}^{N}h^{q-k}(x)h^{k-1}(y)+h^{k-1}(x)h^{q-k}(y)\leq\sum_{k=1}^{N}h^{q-1}(x)+h^{q-1}(y)=N\left(h^{q-1}(x)+h^{q-1}(y)\right)$$

o que prova a validade de (3.2) ao dividirmos ambos os membros por 2. $\square$

Com a relação dada pelo Lema 3.1, podemos provar a seguinte estimativa:

Lema 3.2. Sejam $s \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Seja $u \in W_0^{s,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ solução fraca do problema (1.16) e $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$. Para todo $\gamma > \frac{p+1}{p}$, defina $\theta = p(\gamma-1)+1$ e $N = \lfloor \theta \rfloor - 1$. Então a seguinte desigualdade é válida

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p\,(\psi^p(x)+\psi^p(y))^p((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y))}{|x-y|^{n+ps}}\,dxdy \qquad (3.4)\\
&\leq 2^{p+2}\int_\Omega f(u\psi^p)^\theta\,dx\\
&\quad +2^{p+1}C_1 \iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^p\,\left((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y)\right)}{|x-y|^{n+ps}}dxdy\\
&\quad +2^{p+2}C_2 \iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)|\psi(x)-\psi(y)|^p\left((u\psi^p)^N(x)+(u\psi^p)^N(y)\right)}{|x-y|^{n+ps}}dxdy
\end{aligned}$$

onde $C_1 = NM(4M(p-1)NC_p)^{p-1}$ e $C_2 = M(16M(p-1)C_p)^{p-1}$, sendo que $M > 0$ satisfaz $u \leq M$ e C_p é definida em (1.35).

Demonstração. Considerando que u pertence a $W_0^{s,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e que ψ^p é uma função de Lipschitz que satisfaz $0 \leq \psi^p \leq 1$, concluímos, com base no Lema 1.3, que $(u\psi^p)^\theta$ também pertence a $W_0^{s,p}(\Omega)$, onde $\theta = p(\gamma-1)+1$. Tomando $(u\psi^p)^\theta$ como função teste em (1.17),

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}\,(u(x)-u(y))((u\psi^p)^\theta(x)-(u\psi^p)^\theta(y))}{|x-y|^{n+ps}}\,dxdy = \int_\Omega f(u\psi^p)^\theta\,dx. \quad (3.5)$$

Vale observar que $\theta > 2$ pois $\gamma > (p+1)/p$. Assim, podemos utilizar a relação (3.1) com $h = (u\psi^p)$ e $q = \theta$, obtendo

$$\begin{aligned}
&(u\psi^p)^\theta(x) - (u\psi^p)^\theta(y)\\
&\quad = ((u\psi^p)(x)-(u\psi^p)(y))\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{(u\psi^p)^{\theta-k}(x)(u\psi^p)^{k-1}(y)+(u\psi^p)^{k-1}(x)(u\psi^p)^{\theta-k}(y)}{2}\right)\\
&\quad + ((u\psi^p)^{\theta-N}(x)-(u\psi^p)^{\theta-N}(y))\left(\frac{(u\psi^p)^N(x)+(u\psi^p)^N(y)}{2}\right), \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

onde $N = \lfloor\theta\rfloor - 1$. Podemos expandir o fator $(u\psi^p)(x)-(u\psi^p)(y)$ somando e subtraindo o termo $u(y)\psi^p(x)$, assim

$$(u\psi^p)(x)-(u\psi^p)(y) = (u(x)-u(y))\psi^p(x) + u(y)(\psi^p(x)-\psi^p(y)).$$

Da mesma forma, somando e subtraindo o termo $u(x)\psi^p(y)$, vale

$$(u\psi^p)(x)-(u\psi^p)(y) = (u(x)-u(y))\psi^p(y) + u(x)(\psi^p(x)-\psi^p(y)).$$

Juntando as igualdades, concluímos que

$$(u\psi^p)(x) - (u\psi^p)(y) = \frac{1}{2}(u(x) - u(y))(\psi^p(y) + \psi^p(x)) + \frac{1}{2}(u(x) + u(y))(\psi^p(x) - \psi^p(y)).$$

Também podemos expandir o fator $(u\psi^p)^{\theta-N}(x) - (u\psi^p)^{\theta-N}(y)$ de modo análogo, utilizando os termos $u^{\theta-N}(x)\psi^{p(\theta-N)}(y)$ e $u^{\theta-N}(y)\psi^{p(\theta-N)}(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}(u\psi^p)^{\theta-N}(x) - (u\psi^p)^{\theta-N}(y) \quad = \quad & \frac{1}{2}(u^{\theta-N}(x) - u^{\theta-N}(y))(\psi^{p(\theta-N)}(x) + \psi^{p(\theta-N)}(y)) \\ & + \frac{1}{2}(u^{\theta-N}(x) + u^{\theta-N}(y))(\psi^{p(\theta-N)}(x) - \psi^{p(\theta-N)}(y)).\end{aligned}$$

Agrupando essas relações em (3.6), temos

$$\begin{aligned}&(u\psi^p)^{\theta}(x) - (u\psi^p)^{\theta}(y) \\ &\quad = \frac{1}{2}(u(x) - u(y))(\psi^p(y) + \psi^p(x))F(x,y) \\ &\quad\quad + \frac{1}{2}(u(x) + u(y))(\psi^p(y) - \psi^p(x))F(x,y) \\ &\quad\quad + \frac{1}{4}(u^{\theta-N}(x) - u^{\theta-N}(y))(\psi^{p(\theta-N)}(x) + \psi^{p(\theta-N)}(y))((u\psi^p)^N(x) + (u\psi^p)^N(y)) \\ &\quad\quad + \frac{1}{4}(u^{\theta-N}(x) + u^{\theta-N}(y))(\psi^{p(\theta-N)}(x) - \psi^{p(\theta-N)}(y))((u\psi^p)^N(x) + (u\psi^p)^N(y)),\end{aligned}$$

onde denotamos

$$F(x,y) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(u\psi^p)^{\theta-k}(x)(u\psi^p)^{k-1}(y) + (u\psi^p)^{k-1}(x)(u\psi^p)^{\theta-k}(y)}{2}.$$

Substituindo em (3.5) obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega} f(u\psi^p)^{\theta}\, dx \\ &= \iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))^2(\psi^p(x) + \psi^p(y))F(x,y)}{2\,|x-y|^{n+ps}}\, dxdy \\ &+ \iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))(u(x) + u(y))(\psi^p(y) - \psi^p(x))F(x,y)}{2\,|x-y|^{n+ps}}\, dxdy \\ &+ \iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{L(x,y)(u^{\theta-N}(x) - u^{\theta-N}(y))(\psi^{p(\theta-N)}(x) + \psi^{p(\theta-N)}(y))((u\psi^p)^N(x) + (u\psi^p)^N(y))}{4\,|x-y|^{n+ps}} dxdy \\ &+ \iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{L(x,y)(u^{\theta-N}(x) + u^{\theta-N}(y))(\psi^{p(\theta-N)}(x) - \psi^{p(\theta-N)}(y))((u\psi^p)^N(x) + (u\psi^p)^N(y))}{4\,|x-y|^{n+ps}} dxdy\end{aligned}$$

onde denotamos $L(x,y) = |u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))$. Isolando o primeiro e o terceiro termo do lado direito e usando a desigualdade triangular, temos

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p\,(\psi^p(x)+\psi^p(y))F(x,y)}{2\,|x-y|^{n+ps}}\,dxdy$$
$$+\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{L(x,y)(u^{\theta-N}(x)-u^{\theta-N}(y))(\psi^{p(\theta-N)}(x)+\psi^{p(\theta-N)}(y))((u\psi^p)^N(x)+(u\psi^p)^N(y))}{4\,|x-y|^{n+ps}}dxdy$$
$$\leq \int_\Omega f(u\psi^p)^\theta\,dx \tag{3.7}$$
$$+\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}\,|u(x)+u(y)||\psi^p(y)-\psi^p(x)||F(x,y)|}{2\,|x-y|^{n+ps}}\,dxdy$$
$$+\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|L(x,y)||u^{\theta-N}(x)+u^{\theta-N}(y)||\psi^{p(\theta-N)}(x)-\psi^{p(\theta-N)}(y)||(u\psi^p)^N(x)+(u\psi^p)^N(y)|}{4\,|x-y|^{n+ps}}dxdy.$$

Pela definição de $F(x,y)$ e a relação (3.2) sabemos que

$$\frac{(u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y)}{2} \leq F(x,y) \leq \frac{N}{2}\left((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y)\right).$$

Vamos aplicar a estimativa inferior de F no lado esquerdo da desigualdade (3.7), e a estimativa superior de F no lado direito. Além disso, na segunda integral do lado esquerdo, utilizaremos a relação (1.37), que nos garante que, se $u(x)>u(y)$, então

$$\left(u^{\theta-N}(x)-u^{\theta-N}(x)\right)(u(x)-u(y)) \geq \frac{1}{2}\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)(u(x)-u(y))^2.$$

Ao trocar x por y observamos que ambos os lados da desigualdade não se alteram. Logo, ela também é válida quando $u(x)\leq u(y)$.

Deste modo, a partir de (3.7) obtemos

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p\,(\psi^p(x)+\psi^p(y))((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y))}{4\,|x-y|^{n+ps}}\,dxdy$$
$$+\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)(\psi^{p(\theta-N)}(x)+\psi^{p(\theta-N)}(y))(u\psi^p)^N(x)}{8\,|x-y|^{n+ps}}dxdy$$
$$+\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)(\psi^{p(\theta-N)}(x)+\psi^{p(\theta-N)}(y))(u\psi^p)^N(y)}{8\,|x-y|^{n+ps}}dxdy$$
$$\leq \int_\Omega f(u\psi^p)^\theta\,dx \tag{3.8}$$
$$+\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{N\,|u(x)-u(y)|^{p-1}\,|u(x)+u(y)||\psi^p(y)-\psi^p(x)|((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y))}{4\,|x-y|^{n+ps}}\,dxdy$$
$$+\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|L(x,y)||u^{\theta-N}(x)+u^{\theta-N}(y)||\psi^{p(\theta-N)}(x)-\psi^{p(\theta-N)}(y)||(u\psi^p)^N(x)+(u\psi^p)^N(y)|}{4\,|x-y|^{n+ps}}dxdy.$$

Vamos estimar agora as duas últimas integrais dessa relação. Dado que $u\in L^\infty(\Omega)$, podemos considerar $u\leq M$ em quase todo ponto, para algum $M>0$. Assim $|u(x)+$

$u(y)| \leq 2M$. Além disso, pela desigualdade (1.36) temos

$$|\psi^p(x) - \psi^p(y)| \leq p\,(\psi^{p-1}(x) + \psi^{p-1}(y))|\psi(x) - \psi(y)|.$$

Usando estas relações e a desigualdade de Young com ε (1.40), obervamos que

$$\begin{aligned}
&\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}\,|u(x)+u(y)||\psi^p(y)-\psi^p(x)|\,\left((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y)\right)}{|x-y|^{n+ps}}\\
&\leq 2Mp\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}\,(\psi^{p-1}(x)+\psi^{p-1}(y))|\psi(x)-\psi(y)|\,\left((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y)\right)}{|x-y|^{n+ps}}\\
&\leq 2Mp\frac{\varepsilon_1}{\frac{p}{p-1}}\left[\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}\,(\psi^{p-1}(x)+\psi^{p-1}(y))\,\left((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y)\right)^{\frac{p-1}{p}}}{|x-y|^{(n+ps)\frac{p-1}{p}}}\right]^{\frac{p}{p-1}}\\
&\quad+2Mp\frac{1}{p\varepsilon_1^{p-1}}\left[\frac{|\psi(x)-\psi(y)|\,\left((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y)\right)^{\frac{1}{p}}}{|x-y|^{(n+ps)\frac{1}{p}}}\right]^{p}\\
&= 2M(p-1)\varepsilon_1\frac{|u(x)-u(y)|^{p}\,(\psi^{p-1}(x)+\psi^{p-1}(y))^{\frac{p}{p-1}}\,\left((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y)\right)}{|x-y|^{n+ps}}\\
&\quad+2M\frac{1}{\varepsilon_1^{p-1}}\frac{|\psi(x)-\psi(y)|^{p}\,\left((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y)\right)}{|x-y|^{n+ps}}.
\end{aligned}$$

De acordo com (1.35) existe $C_p > 0$ tal que $(\psi^{p-1}(x) + \psi^{p-1}(y))^{\frac{p}{p-1}} \leq C_p(\psi^p(x) + \psi^p(y))$. Ao usar essa estimativa e escolher $\varepsilon_1 = (4NM(p-1)C_p)^{-1}$ concluímos que

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}}\frac{N|u(x)-u(y)|^{p-1}\,|u(x)+u(y)||\psi^p(y)-\psi^p(x)|\,\left((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y)\right)}{4\,|x-y|^{n+ps}}dxdy\\
&\leq \iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p}\,(\psi^{p}(x)+\psi^{p}(y))\,\left((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y)\right)}{8\,|x-y|^{n+ps}}dxdy \qquad (3.9)\\
&\quad+\frac{NM}{2}(4M(p-1)NC_p)^{p-1}\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}}\frac{|\psi(x)-\psi(y)|^{p}\,\left((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y)\right)}{|x-y|^{n+ps}}dxdy.
\end{aligned}$$

Para a estimativa da última integral de (3.11) observamos que

$$|u^{\theta-N}(x) + u^{\theta-N}(y)| \leq M\left(u^{\theta-N-1}(x) + u^{\theta-N-1}(y)\right), \qquad (3.10)$$

uma vez que $0 \leq u \leq M$. Além disso, a partir da desigualdade (1.36), podemos afirmar que

$$|\psi^{p(\theta-N)}(x) - \psi^{p(\theta-N)}(y)| \leq p\,(\psi^{(p-1)(\theta-N)}(x) + \psi^{(p-1)(\theta-N)}(y))|\psi^{\theta-N}(x) - \psi^{\theta-N}(y)|.$$

Em seguida, usamos (1.36) novamente e exploramos as restrições $\theta - N \leq 2$ e $0 \leq \psi \leq 1$ para obter

$$|\psi^{\theta-N}(x) - \psi^{\theta-N}(y)| \leq (\theta - N)\,(\psi^{\theta-N-1}(x) + \psi^{\theta-N-1}(y))|\psi(x) - \psi(y)| \leq 4\,|\psi(x) - \psi(y)|,$$

Substituindo essa última desigualdade na expressão anterior, chegamos a

$$|\psi^{p(\theta-N)}(x)-\psi^{p(\theta-N)}(y)| \leq 4\,p\,(\psi^{(p-1)(\theta-N)}(x)+\psi^{(p-1)(\theta-N)}(y))|\psi(x)-\psi(y)|. \quad (3.11)$$

Utilizando as relações (3.10) e (3.11) na última integral em (3.11), e aplicando a desigualdade de Young com ε, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{|L(x,y)||u^{\theta-N}(x)+u^{\theta-N}(y)||\psi^{p(\theta-N)}(x)-\psi^{p(\theta-N)}(y)||(u\psi^p)^N(x)+(u\psi^p)^N(y)|}{|x-y|^{n+ps}} \\
&\quad\leq \frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}\,M\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)4p\left(\psi^{(p-1)(\theta-N)}(x)+\psi^{(p-1)(\theta-N)}(y)\right)}{|x-y|^{n+ps}} \\
&\quad\quad\times|\psi(x)-\psi(y)|\left((u\psi^p)^N(x)+(u\psi^p)^N(y)\right) \\
&\quad\leq 4Mp\frac{\varepsilon_2}{\frac{p}{p-1}}\left[\frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)^{\frac{p-1}{p}}}{|x-y|^{(n+ps)\frac{p-1}{p}}}\right. \\
&\quad\quad\left.\times(\psi^{(p-1)(\theta-N)}(x)+\psi^{(p-1)(\theta-N)}(y))\left((u\psi^p)^N(x)+(u\psi^p)^N(y)\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]^{\frac{p}{p-1}} \\
&\quad\quad+4Mp\frac{1}{p\varepsilon_2^{p-1}}\left[\frac{\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)^{\frac{1}{p}}|\psi(x)-\psi(y)|\left((u\psi^p)^N(x)+(u\psi^p)^N(y)\right)^{\frac{1}{p}}}{|x-y|^{(n+ps)\frac{1}{p}}}\right]^p.
\end{aligned}$$

Ao utilizar a estimativa

$$(\psi^{(p-1)(\theta-N)}(x)+\psi^{(p-1)(\theta-N)}(y))^{\frac{p}{p-1}} \leq C_p(\psi^{p(\theta-N)}(x)+\psi^{p(\theta-N)}(y)),$$

e escolher $\varepsilon_2=(16M(p-1)C_p)^{-1}$ concluímos que

$$\begin{aligned}
&\frac{|L(x,y)||u^{\theta-N}(x)+u^{\theta-N}(y)||\psi^{p(\theta-N)}(x)-\psi^{p(\theta-N)}(y)||(u\psi^p)^N(x)+(u\psi^p)^N(y)|}{|x-y|^{n+ps}} \qquad (3.12)\\
&\leq\frac{1}{4}\left[\frac{|u(x)-u(y)|^p\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)\left(\psi^{p(\theta-N)}(x)+\psi^{p(\theta-N)}(y)\right)(u\psi^p)^N(x)}{|x-y|^{n+ps}}\right] \\
&+\frac{1}{4}\left[\frac{|u(x)-u(y)|^p\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)\left(\psi^{p(\theta-N)}(x)+\psi^{p(\theta-N)}(y)\right)(u\psi^p)^N(y)}{|x-y|^{n+ps}}\right] \\
&+\frac{4M}{(16M(p-1)C_p)^{1-p}}\left[\frac{\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)|\psi(x)-\psi(y)|^p((u\psi^p)^N(x)+(u\psi^p)^N(y))}{|x-y|^{n+ps}}\right].
\end{aligned}$$

Juntando as estimativas (3.9) e (3.12) na desigualdade (3.8) chegamos a

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p\,(\psi^p(x)+\psi^p(y))((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y))}{4\,|x-y|^{n+ps}}\,dxdy$$

$$+\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)(\psi^{p(\theta-N)}(x)+\psi^{p(\theta-N)}(y))(u\psi^p)^N(x)}{8\,|x-y|^{n+ps}}dxdy$$

$$+\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)(\psi^{p(\theta-N)}(x)+\psi^{p(\theta-N)}(y))(u\psi^p)^N(y)}{8\,|x-y|^{n+ps}}dxdy$$

$$\leq \int_\Omega f(u\psi^p)^\theta\,dx$$

$$+\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p\,(\psi^p(x)+\psi^p(y))\left((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y)\right)}{8\,|x-y|^{n+ps}}dxdy$$

$$+\frac{NM}{2}(4M(p-1)NC_p)^{p-1}\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^p\,\left((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y)\right)}{|x-y|^{n+ps}}dxdy$$

$$+\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)\left(\psi^{p(\theta-N)}(x)+\psi^{p(\theta-N)}(y)\right)(u\psi^p)^N(x)}{16\,|x-y|^{n+ps}}dxdy$$

$$+\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)\left(\psi^{p(\theta-N)}(x)+\psi^{p(\theta-N)}(y)\right)(u\psi^p)^N(y)}{16\,|x-y|^{n+ps}}dxdy$$

$$+\frac{4M}{(16M(p-1)C_p)^{1-p}}\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)|\psi(x)-\psi(y)|^p(u\psi^p)^N(x)}{4\,|x-y|^{n+ps}}dxdy$$

$$+\frac{4M}{(16M(p-1)C_p)^{1-p}}\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)|\psi(x)-\psi(y)|^p(u\psi^p)^N(y)}{4\,|x-y|^{n+ps}}dxdy.$$

Passando as integrais iguais para o lado esquerdo da desigualdade, temos

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p\,(\psi^p(x)+\psi^p(y))((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y))}{8\,|x-y|^{n+ps}}\,dxdy$$
$$+\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)(\psi^{p(\theta-N)}(x)+\psi^{p(\theta-N)}(y))(u\psi^p)^N(x)}{16\,|x-y|^{n+ps}}dxdy$$
$$+\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)(\psi^{p(\theta-N)}(x)+\psi^{p(\theta-N)}(y))(u\psi^p)^N(y)}{16\,|x-y|^{n+ps}}dxdy$$
$$\leq \int_\Omega f(u\psi^p)^\theta\,dx \tag{3.13}$$
$$+\frac{NM}{2}(4M(p-1)NC_p)^{p-1}\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^p\,\left((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y)\right)}{|x-y|^{n+ps}}dxdy$$
$$+M(16M(p-1)C_p)^{p-1}\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)|\psi(x)-\psi(y)|^p(u\psi^p)^N(x)}{|x-y|^{n+ps}}dxdy$$
$$+M(16M(p-1)C_p)^{p-1}\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)|\psi(x)-\psi(y)|^p(u\psi^p)^N(y)}{|x-y|^{n+ps}}dxdy.$$

Como u e ψ são não-negativas, podemos observar que

$$0\leq \iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)(\psi^{p(\theta-N)}(x)+\psi^{p(\theta-N)}(y))(u\psi^p)^N(x)}{16\,|x-y|^{n+ps}}dxdy$$
$$+\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)(\psi^{p(\theta-N)}(x)+\psi^{p(\theta-N)}(y))(u\psi^p)^N(y)}{16\,|x-y|^{n+ps}}dxdy.$$

Além disso, uma vez que $\psi\leq 1$ temos $(\psi^p(x)+\psi^p(y))/2\leq 1$. Como consequência

$$\left(\frac{\psi^p(x)+\psi^p(y)}{2}\right)^p\leq\left(\frac{\psi^p(x)+\psi^p(y)}{2}\right).$$

A partir desta desigualdade obtemos

$$\frac{1}{2^{p+2}}\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p\,(\psi^p(x)+\psi^p(y))^p((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y))}{|x-y|^{n+ps}}\,dxdy \tag{3.14}$$
$$\leq \iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p\,(\psi^p(x)+\psi^p(y))((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y))}{8\,|x-y|^{n+ps}}\,dxdy.$$

Com estas relações, podemos concluir que o lado esquerdo de (3.13), pode ser estimado inferiormente por

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p\,(\psi^p(x)+\psi^p(y))((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y))}{8\,|x-y|^{n+ps}}\,dxdy$$
$$+\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)(\psi^{p(\theta-N)}(x)+\psi^{p(\theta-N)}(y))(u\psi^p)^N(x)}{16\,|x-y|^{n+ps}}dxdy$$
$$+\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p\left(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\right)(\psi^{p(\theta-N)}(x)+\psi^{p(\theta-N)}(y))(u\psi^p)^N(y)}{16\,|x-y|^{n+ps}}dxdy$$
$$\geq \iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p\,(\psi^p(x)+\psi^p(y))^p((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y))}{2^p\,4\,|x-y|^{n+ps}}\,dxdy$$

Por fim, substituindo essa última desigualdadde em (3.13) provamos o resultado.

□

Em seguida, provamos uma estimativa para a seminorma de uma solução u, multiplicada por uma função de localização. Essa relação nos permitirá realizar o processo de iteração de Moser no teorema principal.

Proposição 3.3. Sejam $s \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Seja $u \in W_0^{s,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ solução fraca do problema (1.16). Dados $x \in \Omega$ e $R > 0$ considere $\psi \in C_c^\infty(B_R(x))$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, $|\nabla \psi| \leq 4/R$ em $\mathbb{R}^n$ e $\psi = 1$ em $B_{\frac{R}{2}}(x)$. Então para todo $\gamma > \frac{p+1}{p}$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\,(u\psi^p)^\gamma(x)-(u\psi^p)^\gamma(y)\,|^p}{|\,x-y\,|^{n+ps}}\,dxdy \leq \gamma^{2p} K\,|\Omega\cap B_R(x)|^{\frac{p+1}{p\gamma}}\,\|\,u\psi^p\,\|_{L^{p\gamma}(\Omega)}^{p(\gamma-1)-1}, \quad (3.15)$$

onde $K = K(n,s,p,\|f\|_{L^\infty(\Omega)},\|u\|_{L^\infty(\Omega)},R) > 0$.

Demonstração. Utilizando a desigualdade (1.36) temos, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
&|(u\psi^p)^\gamma(x)-(u\psi^p)^\gamma(y)|^p\\
&\qquad\leq \gamma^p\left((u\psi^p)^{\gamma-1}(x)+(u\psi^p)^{\gamma-1}(y)\right)^p|(u\psi^p)(x)-(u\psi^p)(y)|^p\\
&\qquad\leq \gamma^p\,2^{p-1}\left((u\psi^p)^{p(\gamma-1)}(x)+(u\psi^p)^{p(\gamma-1)}(y)\right)|(u\psi^p)(x)-(u\psi^p)(y)|^p. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

onde, na última desigualdade, usamos (1.33). Além disso, somando e subtraindo o termo $u(y)\psi^p(x)$, podemos observar que

$$\begin{aligned}
(u\psi^p)(x)-(u\psi^p)(y) &= u(x)\psi^p(x)+u(y)\psi^p(x)-u(y)\psi^p(x)-u(y)\psi^p(y)\\
&= (u(x)-u(y))\,\psi^p(x)+u(y)\,(\psi^p(x)-\psi^p(y))\,,
\end{aligned}$$

ou, somando e subtraindo o termo $u(x)\psi^p(y)$, também vale

$$\begin{aligned}
(u\psi^p)(x)-(u\psi^p)(y) &= u(x)\psi^p(x)+u(x)\psi^p(y)-u(x)\psi^p(y)-u(y)\psi^p(y)\\
&= (u(x)-u(y))\,\psi^p(y)+u(x)\,(\psi^p(x)-\psi^p(y))\,.
\end{aligned}$$

Ao somar estas decomposições e dividirmos por dois, chegamos a

$$(u\psi^p)(x) - (u\psi^p)(y) = \frac{1}{2}\left(u(x) - u(y)\right)\left(\psi^p(x) + \psi^p(y)\right) + \frac{1}{2}(u(x) + u(y))\left(\psi^p(x) - \psi^p(y)\right).$$

Aplicando a desigualdade triangular e (1.33), obtemos

$$\begin{aligned}
|(u\psi^p)(x) - (u\psi^p)(y)|^p &\leq 2^{p-1}\frac{|u(x) - u(y)|^p|\psi^p(x) + \psi^p(y)|^p}{2^p} \\
&\quad + 2^{p-1}\frac{|u(x) + u(y)|^p|\psi^p(x) - \psi^p(y)|^p}{2^p} \\
&= \frac{1}{2}|u(x) - u(y)|^p|\psi^p(x) + \psi^p(y)|^p \\
&\quad + \frac{1}{2}|u(x) + u(y)|^p|\psi^p(x) - \psi^p(y)|^p.
\end{aligned}$$

Substituindo essa expressão em (3.16), temos a estimativa

$$\begin{aligned}
&|(u\psi^p)^\gamma(x) - (u\psi^p)^\gamma(y)|^p \\
&\quad \leq \gamma^p\, 2^{p-2}\left((u\psi^p)^{p(\gamma-1)}(x) + (u\psi^p)^{p(\gamma-1)}(y)\right)|u(x) - u(y)|^p|\psi^p(x) + \psi^p(y)|^p \\
&\qquad + \gamma^p\, 2^{p-2}\left((u\psi^p)^{p(\gamma-1)}(x) + (u\psi^p)^{p(\gamma-1)}(y)\right)|u(x) + u(y)|^p|\psi^p(x) - \psi^p(y)|^p.
\end{aligned}$$

A partir desta relação, temos até o momento

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|(u\psi^p)^\gamma(x) - (u\psi^p)^\gamma(y)|^p}{|\, x - y\,|^{n+ps}}\, dxdy \qquad (3.17)\\
&\leq \gamma^p\, 2^{p-2} \iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{\left((u\psi^p)^{p(\gamma-1)}(x) + (u\psi^p)^{p(\gamma-1)}(y)\right)|u(x) - u(y)|^p|\psi^p(x) + \psi^p(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dxdy \\
&\quad + \gamma^p\, 2^{p-2} \iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{\left((u\psi^p)^{p(\gamma-1)}(x) + (u\psi^p)^{p(\gamma-1)}(y)\right)|u(x) + u(y)|^p|\psi^p(x) - \psi^p(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dxdy.
\end{aligned}$$

Observando que $p(\gamma - 1) = \theta - 1$, podemos estimar a primeira integral do lado direito utilizando o Lema 3.2, o que nos leva a

$$\iint_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|(u\psi^p)^\gamma(x) - (u\psi^p)^\gamma(y)|^p}{|\, x-y\,|^{n+ps}}\, dxdy$$

$$\leq \gamma^p\, 2^{2p} \int_\Omega f(u\psi^p)^\theta\, dx \tag{3.18}$$

$$+\gamma^p\, 2^{2p} NM(4M(p-1)NC_p)^{p-1} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^p\, \big((u\psi^p)^{\theta-1}(x) + (u\psi^p)^{\theta-1}(y)\big)}{|x-y|^{n+ps}} dxdy$$

$$+\gamma^p\, 2^{2p} M(16M(p-1)C_p)^{p-1} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{\big(u^{\theta-N-1}(x) + u^{\theta-N-1}(y)\big)\, |\psi(x)-\psi(y)|^p (u\psi^p)^N(x)}{|x-y|^{n+ps}} dxdy$$

$$+\gamma^p\, 2^{2p} M(16M(p-1)C_p)^{p-1} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{\big(u^{\theta-N-1}(x) + u^{\theta-N-1}(y)\big)\, |\psi(x)-\psi(y)|^p (u\psi^p)^N(y)}{|x-y|^{n+ps}} dxdy$$

$$+\,\gamma^p\, 2^{p-2} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{\big((u\psi^p)^{\theta-1}(x) + (u\psi^p)^{\theta-1}(y)\big)\, |u(x)+u(y)|^p |\psi^p(x)-\psi^p(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy.$$

Vamos estimar cada uma das integrais à direita. Primeiramente, segue do fato de $u \leq M$, $\psi \leq 1$ e $f \in L^\infty(\Omega)$ que

$$\int_\Omega f(u\psi^p)^\theta\, dx \leq M^2 \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega (u\psi^p)^{\theta-2}\, dx. \tag{3.19}$$

Para estimatimar a segunda integral, trocamos as variáveis x e y, e observamos que devido à simetria da integral dupla, temos

$$\iint_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^p\, (u\psi^p)^{\theta-1}(x)}{|x-y|^{n+ps}} dxdy = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^p\, (u\psi^p)^{\theta-1}(y)}{|x-y|^{n+ps}} dxdy.$$

Além disso, usando o fato de que $|\nabla\psi| \leq 4/R$, vale a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dx &= \int_{B_R(y)} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R(y)} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dx \\
&\leq \frac{4^p}{R^p} \int_{B_R(y)} \frac{|x-y|^p}{|x-y|^{n+ps}} dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R(y)} \frac{1}{|x-y|^{n+ps}} dx \\
&= \frac{4^p}{R^p}\omega_n \int_0^R r^{p-sp-1} dr + \omega_n \int_R^\infty r^{-sp-1} dr \\
&= \frac{4^p\,\omega_n}{R^p} \frac{R^{p-sp}}{p-sp} + \omega_n \frac{R^{-sp}}{sp} \\
&= \frac{C'}{R^{sp}},
\end{aligned} \tag{3.20}$$

onde $C' = \dfrac{4^p\,\omega_n}{p-sp} + \dfrac{\omega_n}{sp}$. Assim

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^p \, \big((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y)\big)}{|x-y|^{n+ps}}dxdy$$

$$= 2\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u\psi^p)^{\theta-1}(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}}dxdy$$

$$\leq 2M\,\frac{C'}{R^{sp}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u\psi^p)^{\theta-2}(y)dy. \tag{3.21}$$

Para a terceira integral em (3.18), observamos que $u^{\theta-N-1} \leq (M+1)^{\theta-N-1} \leq M+1$, pois $\theta - N - 1 < 1$. Além disso, como $(u\psi^p)/M \leq 1$ e $\theta - 2 \leq N$, então

$$\frac{(u\psi^p)^N}{M^N} \leq \frac{(u\psi^p)^{\theta-2}}{M^{\theta-2}},$$

o que implica em $(u\psi^p)^N \leq M^{N-\theta+2}(u\psi^p)^{\theta-2} \leq (M+1)(u\psi^p)^{\theta-2}$, uma vez que também temos $N-\theta+2 = \lfloor\theta\rfloor - \theta + 1 < 1$. Usando estas relações e a estimativa (3.20) podemos concluir que

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{\big(u^{\theta-N-1}(x)+u^{\theta-N-1}(y)\big)\,|\psi(x)-\psi(y)|^p(u\psi^p)^N(y)}{|x-y|^{n+ps}}dxdy$$

$$\leq 2(M+1)\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u\psi^p)^N(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}}dxdy$$

$$\leq 2(M+1)^2\frac{C'}{R^{sp}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u\psi^p)^{\theta-2}(y)dy. \tag{3.22}$$

Quanto ao último fator de (3.18), com base na desigualdade (1.36) sabemos que

$$\begin{aligned}
|\psi^p(x)-\psi^p(y)|^p &\leq p^p(\psi^{p-1}(x)+\psi^{p-1}(y))^p|\psi(x)-\psi(y)|^p \\
&\leq p^p\,2^p|\psi(x)-\psi(y)|^p.
\end{aligned}$$

Logo, usando a simetria da integral dupla em x e y, a limitação de u, a desigualdade anterior e a estimativa (3.20), obtemos

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{\big((u\psi^p)^{\theta-1}(x)+(u\psi^p)^{\theta-1}(y)\big)\,|u(x)+u(y)|^p|\psi^p(x)-\psi^p(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy$$

$$\leq 2(2M)^p\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u\psi^p)^{\theta-1}(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|\psi^p(x)-\psi^p(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}}dxdy$$

$$\leq 2^{p+1}M^{p+1}p^p\,2^p\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u\psi^p)^{\theta-2}(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{|\psi(x)-\psi(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}}dxdy$$

$$\leq 2^{2p+1}M^{p+1}\,p^p\,\frac{C'}{R^{sp}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u\psi^p)^{\theta-2}(y)dy. \tag{3.23}$$

Agrupando as estimativas (3.19), (3.21), (3.22) e (3.23) em (3.18) chegamos a

$$\iint_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{|(u\psi^p)^\gamma(x) - (u\psi^p)^\gamma(y)|^p}{|\, x-y\,|^{n+ps}} dxdy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} (u\psi^p)^{\theta-2}(y)dy \Bigg[\gamma^p\, 2^{2p} M^2 \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \gamma^p\, 2^{2p+1} N M^2 (4M(p-1)NC_p)^{p-1} \frac{C'}{R^{sp}}$$

$$+ \gamma^p\, 2^{2p+2} M (16M(p-1)C_p)^{p-1}(M+1)^2 \frac{C'}{R^{sp}} + \gamma^p\, 2^{3p-1} M^{p+1}\, p^p \,\frac{C'}{R^{sp}} \Bigg].$$

Como $N = \lfloor \theta \rfloor - 1 \leq \theta - 1 \leq p\gamma$, então $N^p \leq p^p \gamma^p$. Além disso, $\gamma^p \leq \gamma^{2p}$ e $(p-1)^{p-1} \leq p^p$. Usando estas relações e considerando

$$K_1 = \max\left\{ 2^{2p}\|f\|_\infty,\, 2^{4p-1}p^2 p,\, 2^{6p-2}p^p,\, 2^{3p-1}p^p \right\},$$

$$K_2 = \max\left\{ M^2,\, M^{p-1},\, M^p(M+1)^2 \right\},$$

$$K_3 = \max\left\{ 1,\, C',\, C'C_p^{p-1} \right\},$$

$$K_4 = \max\left\{ 1,\, \frac{1}{R^{sp}} \right\}.$$

Obtemos

$$\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|(u\psi^p)^\gamma(x) - (u\psi^p)^\gamma(y)|^p}{|\, x-y\,|^{n+ps}} dxdy \leq 4\gamma^{2p} K_1K_2K_3K_4 \int_{\mathbb{R}^n} (u\psi^p)^{\theta-2}(y)dy. \tag{3.24}$$

Por fim, observamos que $\theta - 2 = p(\gamma-1) - 1$ e o suporte de $u\psi^p$ está contido em $\Omega \cap B_R(x)$. Deste modo, usando a desigualdade de Hölder com os expoentes $\frac{p\gamma}{p(\gamma-1)-1}$ e $\frac{p\gamma}{\gamma+1}$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (u\psi^p)^{p(\gamma-1)-1}(y)dy \;&\leq\; \left(\int_{\Omega\cap B_R(x)} 1^{\frac{p\gamma}{\gamma+1}} dy \right)^{\frac{\gamma+1}{p\gamma}} \left(\int_{\Omega} (u\psi^p)^{p\gamma}(y)dy \right)^{\frac{p(\gamma-1)-1}{p\gamma}} \\ &\leq\; |\Omega \cap B_R(x)|^{\frac{\gamma+1}{p\gamma}} \|u\psi^p\|_{L^{p\gamma}(\Omega)}^{\frac{p(\gamma-1)-1}{p\gamma}}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Substituindo em (3.24) e considerando $K = 4K_1K_2K_3K_4$, provamos (3.15).

□

Com base nos lemas anteriores, estamos agora preparados para demonstrar o Teorema 0.3. Vamos dividir a demonstração em três casos: quando $sp < n$, $sp = n$ e $sp > n$. O Lema a seguir prova a localização no caso em que $sp < n$.

Lema 3.4. Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in (1,\infty)$ tais que $sp < n$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Se $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ é solução fraca não negativa de (1.16) então, para qualquer $x \in \Omega$ e $R > 0$, existe uma constante $C = C(n,s,p,\|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, R) > 0$ e $\sigma_0 = \sigma_0(n,s,p) > 0$, tal que

$$\sup_{\Omega \cap B_{\frac{R}{2}}(x)} u \;\leq\; C\; |\Omega \cap B_R(x)|^{\sigma_0}. \tag{3.26}$$

Demonstração. Com base no Teorema 1.10, sabemos que a solução u pertence a $L^\infty(\Omega)$. Dado um ponto $x \in \Omega$ e um raio $R > 0$, consideramos uma função de localização $\psi \in C_c^\infty(B_R(x))$ satisfazendo $0 \leq \psi \leq 1$, $|\nabla\psi| \leq 4/R$ em $\mathbb{R}^n$ e $\psi = 1$ em $B_{\frac{R}{2}}(x)$. O Lema 3.3 garante que, para todo $\gamma > \frac{p+1}{p}$, vale

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\,(u\psi^p)^\gamma(x) - (u\psi^p)^\gamma(y)\,|^p}{|\,x-y\,|^{n+ps}}\, dxdy \leq \gamma^{2p} K\, |\Omega \cap B_R(x)|^{\frac{p+1}{p\gamma}} \,\|\, u\psi^p \,\|_{L^{p\gamma}(\Omega)}^{p(\gamma-1)-1} \tag{3.27}$$

onde $K = K(n,s,p,\|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, R) > 0$.

Como $sp < n$, segue da desigualdade de Sobolev, Lema 1.5, que existe uma constante positiva $K' = K'(n,s,p)$ tal que

$$\|(u\psi^p)^\gamma\|_{L^{p*}(\Omega)}^p \leq K' \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\,(u\psi^p)^\gamma(x) - (u\psi^p)^\gamma(y)\,|^p}{|\,x-y\,|^{n+ps}}\, dxdy,$$

onde $p* = np/(n-sp)$. Além disso, podemos reescrever o fator da esquerda como

$$\begin{aligned}
\|(u\psi^p)^\gamma\|_{L^{p*}(\Omega)}^p &= \left(\int_\Omega (u\psi^p)^{\gamma p*}\right)^{\frac{p}{p*}} \\
&= \left(\int_\Omega (u\psi^p)^{\gamma\frac{np}{n-sp}}\right)^{\frac{p(n-sp)}{np}} \\
&= \left(\int_\Omega (u\psi^p)^{\gamma\frac{np}{n-sp}}\right)^{\frac{(n-sp)}{\gamma np}\gamma p} \\
&= \|u\psi^p\|_{L^{\gamma\frac{np}{n-sp}}(\Omega)}^{\gamma p}.
\end{aligned}$$

Usando a estimativa em (3.27), chegamos a

$$\frac{1}{K'}\|\, u\psi^p \,\|_{L^{\gamma\frac{np}{n-sp}}(\Omega)}^{\gamma p} \leq \gamma^{2p} K\, |\Omega \cap B_R(x)|^{\frac{p+1}{p\gamma}} \,\|\, u\psi^p \,\|_{L^{p\gamma}(\Omega)}^{p(\gamma-1)-1}.$$

Denotando $\chi = n/(n-sp)$ e elevando ao expoente $1/\gamma p$, podemos reescrever

$$\|\, u\psi^p \,\|_{L^{\gamma p\chi}(\Omega)} \leq \gamma^{\frac{2}{\gamma}} (K'K)^{\frac{1}{\gamma p}}\, |\Omega \cap B_R(x)|^{\frac{p+1}{(p\gamma)^2}} \,\|\, u\psi^p \,\|_{L^{p\gamma}(\Omega)}^{\frac{p\gamma-p-1}{\gamma p}}. \tag{3.28}$$

Vamos iterar essa desigualdade. Para isso, observamos que, como $\chi > 1$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $i \geq j$, $\chi^i > p+1$. Tomamos então a seguinte sequência de expoentes

$$\gamma_i = \frac{\chi^i}{p}, \qquad \text{para } i \geq j.$$

Por construção, temos $\gamma_i > \frac{p+1}{p}$ para todo $i \geq j$. Começando com $\gamma_j = \chi^j/p$, denotando $A_i = \| u\psi^p \|_{L^{\chi^i}(\Omega)}$ e $\rho_i = (\chi^i - p - 1)/\chi^i$, obtemos

$$A_{j+1} \leq \left(\frac{\chi^j}{p}\right)^{\frac{2p}{\chi^j}} (K'K)^{\frac{1}{\chi^j}} |\Omega \cap B_R(x)|^{\frac{p+1}{\chi^{2j}}} A_j^{\rho_j}.$$

Após $k+1$ iterações temos, por indução

$$\begin{aligned} A_{j+k+1} \quad \leq \quad & \left(\frac{\chi^{j+k}}{p}\right)^{\frac{2p}{\chi^{j+k}}} \left(\frac{\chi^{j+k-1}}{p}\right)^{\frac{2p}{\chi^{j+k-1}}\rho_{j+k}} \cdots \left(\frac{\chi^{j+1}}{p}\right)^{\frac{2p}{\chi^{j+1}}\rho_{j+2}\rho_{j+3}\cdots\rho_{j+k}} \left(\frac{\chi^{j}}{p}\right)^{\frac{2p}{\chi^{j}}\rho_{j+1}\rho_{j+2}\cdots\rho_{j+k}} \\ & \times (K'K)^{\frac{1}{\chi^{j+k}} + \frac{1}{\chi^{j+k-1}}\rho_{j+k} + \cdots + \frac{1}{\chi^{j+1}}\rho_{j+2}\rho_{j+3}\cdots\rho_{j+k} + \frac{1}{\chi^j}\rho_{j+1}\rho_{j+2}\cdots\rho_{j+k}} \\ & \times |\Omega \cap B_R(x)|^{\frac{p+1}{\chi^{2(j+k)}} + \frac{p+1}{\chi^{2(j+k-1)}}\rho_{j+k} + \cdots + \frac{p+1}{\chi^{2j+1}}\rho_{j+2}\rho_{j+3}\cdots\rho_{j+k} + \frac{p+1}{\chi^{2j}}\rho_{j+1}\rho_{j+2}\cdots\rho_{j+k}} \\ & \times A_j^{\rho_j\rho_{j+1}\cdots\rho_{j+k}}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Observamos que $\rho_i < 1$ e $\chi^i/p > 1$ para todo $i \geq j$, desta forma

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\chi^{j+k}}{p}\right)^{\frac{2p}{\chi^{j+k}}} \left(\frac{\chi^{j+k-1}}{p}\right)^{\frac{2p}{\chi^{j+k-1}}\rho_{j+k}} \cdots \left(\frac{\chi^{j+1}}{p}\right)^{\frac{2p}{\chi^{j+1}}\rho_{j+2}\rho_{j+3}\cdots\rho_{j+k}} \left(\frac{\chi^{j}}{p}\right)^{\frac{2p}{\chi^{j}}\rho_{j+1}\rho_{j+2}\cdots\rho_{j+k}} \\ & \qquad \leq \left(\frac{\chi^{j+k}}{p}\right)^{\frac{2p}{\chi^{j+k}}} \left(\frac{\chi^{j+k-1}}{p}\right)^{\frac{2p}{\chi^{j+k-1}}} \cdots \left(\frac{\chi^{j+1}}{p}\right)^{\frac{2p}{\chi^{j+1}}} \left(\frac{\chi^{j}}{p}\right)^{\frac{2p}{\chi^{j}}} \\ & \qquad = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\chi^{j+i}}{p}\right)^{\frac{2p}{\chi^{j+i}}} \\ & \qquad = \exp\left[\ln \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\chi^{j+i}}{p}\right)^{\frac{2p}{\chi^{j+i}}}\right] \\ & \qquad = \exp\left[\sum_{i=1}^{k} \ln \left(\frac{\chi^{j+i}}{p}\right)^{\frac{2p}{\chi^{j+i}}}\right] \\ & \qquad = \exp\left[\sum_{i=1}^{k} \frac{2p}{\chi^{j+i}} \ln \left(\frac{\chi^{j+i}}{p}\right)\right]. \end{aligned}$$

Usando a propriedade que $\ln(x) < \sqrt{x}$ para $x > 0$, concluímos que o primeiro fator da desigualdade (3.29) pode ser estimado por

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\chi^{j+k}}{p}\right)^{\frac{2p}{\chi^{j+k}}} \left(\frac{\chi^{j+k-1}}{p}\right)^{\frac{2p}{\chi^{j+k-1}}\rho_{j+k}} \cdots \left(\frac{\chi^{j+1}}{p}\right)^{\frac{2p}{\chi^{j+1}}\rho_{j+2}\rho_{j+3}\cdots\rho_{j+k}} \left(\frac{\chi^{j}}{p}\right)^{\frac{2p}{\chi^{j}}\rho_{j+1}\rho_{j+2}\cdots\rho_{j+k}} \\ & \qquad \leq \exp\left[2\sqrt{p}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{\chi^{j+i}}}\right]. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Além disso, como $\rho_i < 1$ para todo i, então $\prod_{i=0}^{k} \rho_{j+i}$ é uma sequência decrescente em k. Podemos limitar inferiormente a sequência por uma constante positiva. Para isso, reescrevemos

$$\begin{aligned}\prod_{i=0}^{k}\rho_{j+i}=\exp\left[\ln\left(\prod_{i=0}^{k}\rho_{j+i}\right)\right] &= \exp\left[\sum_{i=0}^{k}\ln\left(\rho_{j+i}\right)\right]\\ &= \exp\left[\sum_{i=0}^{k}\ln\left(\frac{\chi^{j+i}-p-1}{\chi^{j+i}}\right)\right]\\ &= \exp\left[\sum_{i=0}^{k}\ln\left(1-\frac{p+1}{\chi^{j+i}}\right)\right].\end{aligned}$$

A partir do fato que

$$-1<-\frac{p+1}{\chi^{j}}\leq-\frac{p+1}{\chi^{j+i}}<0,$$

para qualquer $i\geq 1$, e observando que $\ln(1+x)\geq Ax$ para $x\in\left[-\frac{p+1}{\chi^j},0\right)$ e algum $A>0$, temos a seguinte limitação

$$\prod_{i=0}^{k}\rho_{j+i}\geq\exp\left[\sum_{i=0}^{k}-A\frac{p+1}{\chi^{j+i}}\right]\geq\exp\left[-A(p+1)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\chi^{j+i}}\right]=\exp\left[-A(p+1)\frac{\chi}{\chi^{j}(\chi-1)}\right].$$

Assim, concluímos que $\prod_{i=0}^{\infty}\rho_{j+i}=\eta\in(0,1)$.

Para estimar o segundo membro, denotamos

$$\theta_k^1=\frac{1}{\chi^{j+k}}+\frac{1}{\chi^{j+k-1}}\rho_{j+k}+\cdots+\frac{1}{\chi^{j+1}}\rho_{j+2}\rho_{j+3}\cdots\rho_{j+k}+\frac{1}{\chi^{j}}\rho_{j+1}\rho_{j+2}\cdots\rho_{j+k}.$$

Como $\rho_i<1$ para todo $i\geq j$, podemos limitar θ_k^1 por

$$\frac{1}{\chi^{j}}\rho_{j+1}\rho_{j+2}\cdots\rho_{j+k}<\theta_k^1<\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\chi^{j+i}}.$$

Assim, quando $k\to\infty$, θ_k^1 converge para σ_1, que está no intervalo $\left[\frac{\eta}{\chi^j\rho_j},\frac{\chi}{\chi^j(\chi-1)}\right]$.

De modo semelhante, podemos denotar o expoente de $|\Omega\cap B_R(x)|$ como

$$\theta_k^2=\frac{p+1}{\chi^{2(j+k)}}+\frac{p+1}{\chi^{2(j+k-1)}}\rho_{j+k}+\cdots+\frac{p+1}{\chi^{2j+1}}\rho_{j+2}\rho_{j+3}\cdots\rho_{j+k}+\frac{p+1}{\chi^{2j}}\rho_{j+1}\rho_{j+2}\cdots\rho_{j+k}.$$

Vale a seguinte limitação para esta soma

$$\frac{p+1}{\chi^{2j}}\rho_{j+1}\rho_{j+2}\cdots\rho_{j+k}<\theta_k^2<\sum_{i=0}^{k}\frac{p+1}{\chi^{2(j+i)}}.$$

Logo θ_k^2 converge para σ_2, que está no intervalo $\left[\frac{(p+1)\eta}{\chi^{2j}\rho_j},\frac{(p+1)\chi^2}{\chi^{2j}(\chi^2-1)}\right]$

Concluímos assim, fazendo $k\to\infty$ em (3.29), que

$$\|\,u\psi^p\,\|_{L^\infty(\Omega)}\leq\exp\left[\frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\chi^j}(\sqrt{\chi}-1)}\right](K'K)^{\sigma_1}|\Omega\cap B_R(x)|^{\sigma_2}\|\,u\psi^p\,\|^{\eta}_{L^{\chi^j}(\Omega)}$$

onde usamos também o fato que $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{\chi^{j+i}}} = \frac{1}{\sqrt{\chi^j}(\sqrt{\chi}-1)}$. Além disso,

$$\| u\psi^p \|_{L^{\chi^j}(\Omega)} \leq M|\Omega \cap B_R(x)|^{\frac{1}{\chi^j}},$$

portanto temos

$$\| u\psi^p \|_{L^\infty(\Omega)} \leq C|\Omega \cap B_R(x)|^{\sigma_2 + \frac{\eta}{\chi^j}},$$

o que prova (3.27) com $C = \exp\left[\frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\chi^j}(\sqrt{\chi}-1)}\right](K'K)^{\sigma_1} M^\eta$ e $\sigma_0 = \sigma_2 + \frac{\eta}{\chi^j}$. □

Observação 3.5. O expoente σ_0 do Teorema anterior é definido como $\sigma_2 + \frac{\eta}{\chi^j}$, onde $\eta \in (0,1)$, $\chi = n/(n-sp)$, $j \in \mathbb{N}$ é tal que $\chi^j > p+1$ e σ_2 pertence ao intervalo $\left[\frac{(p+1)\eta}{\chi^{2j}\rho_j}, \frac{(p+1)\chi^2}{\chi^{2j}(\chi^2-1)}\right]$.

Observação 3.6. Como já vimos no Teorema 0.1, $\|u\|_{L^\infty}$ depende de $|\Omega|$ e λ_1^{-1}. Então a constante C é da forma $C = C(n,s,p,\|f\|_{L^\infty(\Omega)}, |\Omega|, \lambda_1(\Omega), R) > 0$. De modo que, quando o primeiro autovalor cresce, o supremo de u em $\Omega \cap B_{\frac{R}{2}}(x)$ diminui. Para uma estimativa menos precisa, podemos considerar $C = C(n,s,p,\|f\|_{L^\infty(\Omega)}, |\Omega|, R) > 0$.

O seguinte resultado prova que o Teorema 0.3 é válido quando $sp = n$.

Lema 3.7. Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in (1,\infty)$ tais que $sp = n$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Se $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ é solução fraca não negativa de (1.16) então, para qualquer $x \in \Omega$ e $R > 0$, existe uma constante $C = C(s,p,\|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, R) > 0$ e $\sigma_0 = \sigma_0(n,s,p) > 0$, tal que

$$\sup_{\Omega \cap B_{\frac{R}{2}}(x)} u \ \leq \ C\ |\Omega \cap B_R(x)|^{\sigma_0}. \tag{3.31}$$

Demonstração. Dado $x \in \Omega$ e $R > 0$, consideramos uma função de localização $\psi \in C_c^\infty(B_R(x))$ satisfazendo $0 \leq \psi \leq 1$, $|\nabla\psi| \leq 4/R$ em $\mathbb{R}^n$ e $\psi = 1$ em $B_{\frac{R}{2}}(x)$. Com base no Teorema 1.15, sabemos que a solução u pertence a $L^\infty(\Omega)$. A Proposição 3.3 garante então que, para todo $\gamma > \frac{p+1}{p}$, vale

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(u\psi^p)^\gamma(x) - (u\psi^p)^\gamma(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dxdy \leq \gamma^{2p} K\,|\Omega \cap B_R(x)|^{\frac{p+1}{p\gamma}} \| u\psi^p \|_{L^{p\gamma}(\Omega)}^{p(\gamma-1)-1} \tag{3.32}$$

onde $K = K(n,s,p,\|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, R) > 0$.

Seja $s' < s$, pela Proposição 1.7 existe $C_1 = C_1(n,s',s,p,\Omega) > 0$ tal que

$$C_1\|(u\psi^p)^\gamma\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}^p \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(u\psi^p)^\gamma(x) - (u\psi^p)^\gamma(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}} dxdy, \tag{3.33}$$

onde $p' = np/(n - s'p)$. Além disso, podemos reescrever o fator da esquerda como

$$
\begin{aligned}
\|(u\psi^p)^\gamma\|^p_{L^{p'_*}(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}(u\psi^p)^{\gamma p'_*}\right)^{\frac{p}{p'_*}} \\
&= \left(\int_\Omega (u\psi^p)^{\gamma\frac{np}{n-s'p}}\right)^{\frac{p(n-s'p)}{np}} \\
&= \left(\int_\Omega (u\psi^p)^{\gamma\frac{np}{n-s'p}}\right)^{\frac{(n-s'p)}{\gamma np}\gamma p} \\
&= \|u\psi^p\|^{\gamma p}_{L^{\gamma\frac{np}{n-s'p}}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Logo, substituindo em (3.33) e usando a estimativa em (3.32) obtemos

$$\|u\psi^p\|^{\gamma p}_{L^{\gamma p\frac{n}{n-s'p}}(\Omega)} \leq \frac{1}{C_1}\gamma^{2p}K\,|\Omega\cap B_R(x)|^{\frac{p+1}{p\gamma}}\parallel u\psi^p\parallel^{p(\gamma-1)-1}_{L^{p\gamma}(\Omega)}.$$

Denotando $\overline{\chi} = n/(n-s'p)$

$$\|u\psi^p\|_{L^{\gamma p\overline{\chi}}(\Omega)} \leq \left(\frac{K}{C_1}\right)^{\frac{1}{\gamma p}}\gamma^{\frac{2}{\gamma}}\,|\Omega\cap B_R(x)|^{\frac{p+1}{(p\gamma)^2}}\parallel u\psi^p\parallel^{\frac{p(\gamma-1)-1}{p\gamma}}_{L^{p\gamma}(\Omega)} \tag{3.34}$$

Vamos iterar a desigualdade anterior. Para isso observamos que $\overline{\chi} > 1$, então existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{\chi}^i > p+1$, para todo $i \geq j$. Consideramos a seguinte sequência de expoentes

$$\gamma_i = \frac{\overline{\chi}^i}{p}, \qquad \text{para } i \geq j.$$

Por construção, cada γ_i, com $i \geq j$, é maior que $\frac{p+1}{p}$. Começando com $\gamma_j = \overline{\chi}^j/p$ e denotando $A_i = \parallel u\psi^p\parallel_{L^{\overline{\chi}^i}(\Omega)}$ e $\rho_i = (\overline{\chi}^i - p - 1)/\overline{\chi}^i$, obtemos

$$A_{j+1} \leq (K')^{\frac{1}{\overline{\chi}^j}}\left(\frac{\overline{\chi}^j}{p}\right)^{\frac{2p}{\overline{\chi}^j}}|\Omega\cap B_R(x)|^{\frac{p+1}{\overline{\chi}^{2j}}}A_j^{\rho_j},$$

onde $K' = \frac{K}{C_1}$. Após $k+1$ iterações temos, por indução

$$
\begin{aligned}
A_{j+k+1} \leq\; & (K')^{\frac{1}{\overline{\chi}^{j+k}}+\frac{1}{\overline{\chi}^{j+k-1}}\rho_{j+k}+\cdots+\frac{1}{\overline{\chi}^{j+1}}\rho_{j+2}\rho_{j+3}\cdots\rho_{j+k}+\frac{1}{\overline{\chi}^j}\rho_{j+1}\rho_{j+2}\cdots\rho_{j+k}} \\
& \times\left(\frac{\overline{\chi}^{j+k}}{p}\right)^{\frac{2p}{\overline{\chi}^{j+k}}}\left(\frac{\overline{\chi}^{j+k-1}}{p}\right)^{\frac{2p}{\overline{\chi}^{j+k-1}}\rho_{j+k}}\cdots\left(\frac{\overline{\chi}^{j+1}}{p}\right)^{\frac{2p}{\overline{\chi}^{j+1}}\rho_{j+2}\rho_{j+3}\cdots\rho_{j+k}}\left(\frac{\overline{\chi}^j}{p}\right)^{\frac{2p}{\overline{\chi}^j}\rho_{j+1}\rho_{j+2}\cdots\rho_{j+k}} \\
& \times|\Omega\cap B_R(x)|^{\frac{p+1}{\overline{\chi}^{2(j+k)}}+\frac{p+1}{\overline{\chi}^{2(j+k-1)}}\rho_{j+k}+\cdots+\frac{p+1}{\overline{\chi}^{2j+1}}\rho_{j+2}\rho_{j+3}\cdots\rho_{j+k}+\frac{p+1}{\overline{\chi}^{2j}}\rho_{j+1}\rho_{j+2}\cdots\rho_{j+k}} \\
& \times A_j^{\rho_j\rho_{j+1}\cdots\rho_{j+k}}.
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

Como $\rho_i < 1$ e $\overline{\chi} > 1$ para todo $i \geq j$, podemos concluir, de modo análogo a estimativa de (3.29), que, quando $k \to \infty$, obtemos

$$\parallel u\psi^p\parallel_{L^\infty(\Omega)} \leq (K')^{\sigma_1}\exp\left[\frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\overline{\chi}^j}(\sqrt{\overline{\chi}}-1)}\right]|\Omega\cap B_R(x)|^{\sigma_2}\parallel u\psi^p\parallel^\eta_{L^{\overline{\chi}^j}(\Omega)},$$

onde $\eta \in (0,1)$, σ_1 pertence ao intervalo $\left[\frac{\eta}{\overline{\chi}^j \rho_j}, \frac{\overline{\chi}}{\overline{\chi}^j(\overline{\chi}-1)}\right]$ e σ_2 pertence a $\left[\frac{(p+1)\eta}{\overline{\chi}^{2j}\rho_j}, \frac{(p+1)\overline{\chi}^2}{\overline{\chi}^{2j}(\overline{\chi}^2-1)}\right]$. Visto que $\| u\psi^p \|_{L^{\overline{\chi}^j}(\Omega)} \leq M|\Omega \cap B_R(x)|^{\frac{1}{\overline{\chi}^j}}$, temos

$$\| u\psi^p \|_{L^\infty(\Omega)} \leq C|\Omega \cap B_R(x)|^{\sigma_2 + \frac{\eta}{\overline{\chi}^j}}$$

o que prova (3.31) com $C = (K')^{\sigma_1} \exp\left[\frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\overline{\chi}^j}(\sqrt{\overline{\chi}}-1)}\right] M^\eta$ e $\sigma_0 = \sigma_2 + \frac{\eta}{\overline{\chi}^j}$. □

Finalizamos este capítulo, comprovando que o resultado permanece válido mesmo quando $sp > n$.

Lema 3.8. Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in (1,\infty)$ tais que $sp > n$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Se $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ é solução fraca não negativa de (1.16), então para qualquer $x \in \Omega$ e $R > 0$, existe uma constante $C = C(s, p, \|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, |\Omega|, R) > 0$ e $\sigma_0 = \sigma_0(p) > 0$, tal que

$$\sup_{\Omega \cap B_{\frac{R}{2}}(x)} u \; \leq \; C \; |\Omega \cap B_R(x)|^{\sigma_0}. \tag{3.36}$$

Demonstração. Dado $x \in \Omega$ e $R > 0$, consideramos uma função de localização $\psi \in C_c^\infty(B_R(x))$ satisfazendo $0 \leq \psi \leq 1$, $|\nabla \psi| \leq 4/R$ em $\mathbb{R}^n$ e $\psi = 1$ em $B_{\frac{R}{2}}(x)$.

Seja $\gamma > (p+1)/p$. Como $(u\psi^p)^\gamma \in W_0^{s,p}(\Omega)$ e $sp > n$, então pela desigualdade (1.14) temos

$$|(u\psi^p)^\gamma(y)| \leq C_1 \, [\, (u\psi^p)^\gamma \,]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \, |\Omega|^{\frac{\alpha}{n}} \qquad y \in \mathbb{R}^n, \tag{3.37}$$

onde $C_1 = \gamma \, 2^\alpha / w_n^{\frac{\alpha}{n}}$.

Além disso, o Lema 3.3 garante que vale

$$[\, (u\psi^p)^\gamma \,]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma^{2p} K \, |\Omega \cap B_R(x)|^{\frac{p+1}{p\gamma}} \, \| u\psi^p \|^{p(\gamma-1)-1}_{L^{p\gamma}(\Omega)} \tag{3.38}$$

onde $K = K(n, s, p, \|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, R) > 0$.

Juntando as estimativas (3.37) e (3.38) temos, para todo $y \in \mathbb{R}^n$,

$$|(u\psi^p)^\gamma(y)| \leq C_1 \, \gamma^2 K^{\frac{1}{p}} \, |\Omega \cap B_R(x)|^{\frac{p+1}{p^2\gamma}} \, \| u\psi^p \|^{\frac{p(\gamma-1)-1}{p}}_{L^{p\gamma}(\Omega)} \, |\Omega|^{\frac{\alpha}{n}}$$

elevando a p e integrando em Ω obtemos

$$\|u\psi^p\|^{p\gamma}_{L^{p\gamma}(\Omega)} \leq C_1^p \, \gamma^{2p} K \, |\Omega \cap B_R(x)|^{\frac{p+1}{p\gamma}} \, \| u\psi^p \|^{p(\gamma-1)-1}_{L^{p\gamma}(\Omega)} \, |\Omega|^{\frac{p\alpha}{n}+1}.$$

Dividindo ambos os membros por $\| u\psi^p \|^{p(\gamma-1)-1}_{L^{p\gamma}(\Omega)}$ temos

$$\|u\psi^p\|^{p+1}_{L^{p\gamma}(\Omega)} \leq C_1^p \, \gamma^{2p} K \, |\Omega \cap B_R(x)|^{\frac{p+1}{p\gamma}} \, |\Omega|^{\frac{p\alpha}{n}+1}.$$

Logo,

$$\|u\psi^p\|_{L^{p\gamma}(\Omega)} \leq C_1^{\frac{p}{p+1}} \, \gamma^{\frac{2p}{p+1}} K^{\frac{1}{p+1}} \, |\Omega \cap B_R(x)|^{\frac{1}{p\gamma}} \, |\Omega|^{\frac{p\alpha+n}{n(p+1)}}.$$

Substituindo a desigualdade em (3.38).

$$\begin{aligned}
[\,(u\psi^p)^\gamma\,]^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} &\leq \gamma^{2p} K\,|\Omega \cap B_R(x)|^{\frac{p+1}{p\gamma}} \left[C_1^{\frac{p}{p+1}} \gamma^{\frac{2p}{p+1}} K^{\frac{1}{p+1}} |\Omega \cap B_R(x)|^{\frac{1}{p\gamma}}\,|\Omega|^{\frac{p\alpha+n}{n(p+1)}}\right]^{p\gamma-p-1} \\
&= \gamma^{\frac{2p^2\gamma}{p+1}} K^{\frac{p\gamma}{p+1}} C_1^{\frac{p(p\gamma-p-1)}{p+1}} |\Omega \cap B_R(x)|\,|\Omega|^{\frac{(p\alpha+n)(p\gamma-p-1)}{n(p+1)}}
\end{aligned}$$

usando esta estimativa em (3.37) temos

$$\begin{aligned}
|(u\psi^p)^\gamma(y)| &\leq C_1 \left[\gamma^{\frac{2p^2\gamma}{p+1}} K^{\frac{p\gamma}{p+1}} C^{\frac{p(p\gamma-p-1)}{p+1}} |\Omega \cap B_R(x)|\,|\Omega|^{\frac{(p\alpha+n)(p\gamma-p-1)}{n(p+1)}}\right]^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{\frac{\alpha}{n}} \\
&= C_1^{\frac{p\gamma}{p+1}} \gamma^{\frac{2p\gamma}{p+1}} K^{\frac{\gamma}{p+1}} |\Omega \cap B_R(x)|^{\frac{1}{p}}\,|\Omega|^{\frac{p^2\alpha\gamma+n(p\gamma-p-1)}{np(p+1)}}. \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

A partir desta relação e do fato de $\psi = 1$ em $B_{\frac{R}{2}}(x)$ podemos concluir que

$$\sup_{\Omega \cap B_{\frac{R}{2}}(x)} u \leq C_1^{\frac{p}{p+1}} \gamma^{\frac{2p}{p+1}} K^{\frac{1}{p+1}} |\Omega \cap B_R(x)|^{\frac{1}{p\gamma}}\,|\Omega|^{\frac{p^2\alpha\gamma+n(p\gamma-p-1)}{np\gamma(p+1)}}.$$

O que prova (3.36) com $\sigma_0 = \frac{1}{p\gamma}$ e $C = C_1^{\frac{p}{p+1}} \gamma^{\frac{2p}{p+1}} K^{\frac{1}{p+1}}\,|\Omega|^{\frac{p^2\alpha\gamma+n(p\gamma-p-1)}{np\gamma(p+1)}}$. □

Ao juntarmos estes resultados obtemos a demonstração do Teorema de localização

Teorema 0.3. Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in (1,\infty)$ tais que $sp < n$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Se $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ é solução fraca não negativa de (1.16) então, para qualquer $x \in \Omega$ e $R > 0$, existe uma constante $C = C(n,s,p,\|f\|_{L^\infty(\Omega)},\|u\|_{L^\infty(\Omega)},R) > 0$ e $\sigma_0 = \sigma_0(n,s,p) > 0$, tal que

$$\sup_{\Omega \cap B_{\frac{R}{2}}(x)} u \leq C\,|\Omega \cap B_R(x)|^{\sigma_0}. \qquad (3.40)$$

Demonstração. Segue dos Lemas 3.4, 3.7 e 3.8. □

Capítulo 4

SUBSOLUÇÃO QUE MAXIMIZA A ALTURA

Neste capítulo, provamos que, dentre todas as soluções do problema

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = 1 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

onde Ω é um aberto com fronteira $C^{1,1}$ e $|\Omega| = 1$, existe uma subsolução que maximiza a altura.

O primeiro resultado prova que todas soluções do problema (4.1) também são subsoluções da função característica de Ω em todo $\mathbb{R}^n$.

Lema 4.1. Sejam $s \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$ e Ω aberto limitado. Se $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ é solução fraca não negativa de (4.1), então $(-\Delta)_p^s u \leq \chi_\Omega$ em $\mathbb{R}^n$ no sentido fraco.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ seja $U_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, dist(x,\Omega) < \varepsilon\}$. Consideramos $\psi_\varepsilon \in C_c^\infty(U_\varepsilon)$ de modo que $0 \leq \psi_\varepsilon \leq 1$ em $\mathbb{R}^n$ e $\psi_\varepsilon = 1$ em Ω.

Dada qualquer função teste $\varphi \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi \geq 0$ podemos decompor φ em duas partes: $\varphi_1 = \varphi\psi_\varepsilon$ e $\varphi_2 = \varphi(1-\psi_\varepsilon)$. Deste modo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} &\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}\,(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|\,x-y\,|^{n+ps}}\,dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}\,(u(x)-u(y))(\varphi_1(x)-\varphi_1(y))}{|\,x-y\,|^{n+ps}}\,dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}\,(u(x)-u(y))(\varphi_2(x)-\varphi_2(y))}{|\,x-y\,|^{n+ps}}\,dxdy.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Como u é solução fraca de (4.1), o Lema 1.13 garante que $(-\Delta)_p^s u \leq 1$ em $\mathbb{R}^n$. Daí, usando $\varphi_1 \geq 0$ como função teste, podemos afirmar que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}\,(u(x)-u(y))(\varphi_1(x)-\varphi_1(y))}{|\,x-y\,|^{n+ps}}\,dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\psi_\varepsilon dx. \tag{4.3}$$

Para estimar o último termo de (4.2) observamos que o suporte de φ_2 está contido em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, e o suporte de u esta contido em Ω. Assim, se ambos x e y pertencem a Ω ou a Ω^c, temos $|u(x)-u(y)|^p\,(u(x)-u(y))(\varphi_2(x)-\varphi_2(y))=0$. Caso $x \in \Omega$ e $y \in \Omega^c$ temos

$$|u(x)-u(y)|^p\,(u(x)-u(y))(\varphi_2(x)-\varphi_2(y)) = |u(x)|^p\,u(x)(-\varphi_2(y)) \leq 0$$

pois u e φ são não negativas. Por fim, quando $x \in \Omega^c$ e $y \in \Omega$ temos

$$|u(x)-u(y)|^p\,(u(x)-u(y))(\varphi_2(x)-\varphi_2(y)) = |-u(y)|^p\,(-u(y))\varphi_2(x) \leq 0.$$

Portanto

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}\,(u(x)-u(y))(\varphi_2(x)-\varphi_2(y))}{|\,x-y\,|^{n+ps}}\,dxdy \leq 0. \tag{4.4}$$

A partir de (4.2), usando (4.3) e (4.4) concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}\,(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|\,x-y\,|^{n+ps}}\,dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\psi_\varepsilon dx. \tag{4.5}$$

Agora, notamos que ψ_ε é decrescente em ε e converge a χ_Ω quando $\varepsilon \to 0$. Segue então, a partir do Teorema da convergência monótona, que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\psi_\varepsilon\,dx \to \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\chi_\Omega\,dx.$$

Com isto, fazendo $\varepsilon \to 0$ em (4.5), concluímos que $(-\Delta)_p^s u \leq \chi_\Omega$ em $\mathbb{R}^n$. $\square$

Denotando por $\mathcal{A}$ o conjunto de todas as soluções do problema (4.1) tais que a medida de Ω é igual a 1 e $\partial\Omega$ é $C^{1,1}$, definimos

$$M = \sup_{w \in \mathcal{A}} \left(\sup_{x \in \Omega} w(x) \right). \tag{4.6}$$

A seguinte estimativa estabelece uma relação entre o valor M e o supremo das soluções do problema, independente da medida do domínio. Essa relação será util na demonstração do Teorema 0.2.

Proposição 4.2. Sejam $s \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$ e $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado tal que $|U| = \theta$. Se $w \in W_0^{s,p}(U)$ é solução de

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = 1 & \text{em } U \\ u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus U \end{cases}$$

então

$$\sup_{x \in U} w \leq M\,\theta^{\frac{sp}{p-1}}. \tag{4.7}$$

Demonstração. Seja $\widetilde{U} = \{x/\theta \,|\, x \in U\}$ então $|\widetilde{U}| = 1$. Considere

$$v(x) = \frac{1}{\theta^{\frac{ps}{p-1}}} w\left(\theta x\right).$$

Note que v pertence a $W_0^{s,p}(\widetilde{U})$ e satisfaz, por [16, Lema 2.9],

$$(-\Delta)_p^s v = \left(\frac{1}{\theta^{\frac{ps}{p-1}(p-1)}}\right)\theta^{ps} = 1.$$

Então, pela definição de M temos $\sup_{x\in\widetilde{U}} v(x) \leq M$. Além disso, observe que

$$\sup_{x\in\widetilde{U}} v = \frac{1}{\theta^{\frac{ps}{p-1}}} \sup_{x\in\widetilde{U}} w\left(\theta x\right) = \frac{1}{\theta^{\frac{ps}{p-1}}} \sup_{x\in U} w(x).$$

Portanto, isolando o supremo de w e usando a estimativa anterior, obtemos

$$\sup_{x\in U} w(x) = \theta^{\frac{ps}{p-1}} \sup_{x\in\widetilde{U}} v \leq \theta^{\frac{ps}{p-1}} M.$$

□

Agora, demonstramos o teorema principal deste capítulo, que assegura a existência de um conjunto com medida 1 e de uma subsolução da característica definida neste conjunto, a qual atinge o valor M, definido em (4.6).

Teorema 0.2. Sejam $s \in (0,1)$ e $p \in (1,\infty)$. Existe um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ tal que $|F| = 1$ e uma função $w_0 \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ cujo suporte é exatamente F, com $\|w_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = M$ e que satisfaz

$$(-\Delta)_p^s w_0 \leq \chi_F \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Seja $(w_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tal que $M_k := \sup_{x\in\Omega_k} w_k(x) \to M$. Como cada conjunto Ω_k tem fronteira $C^{1,1}$, conforme estabelecido em [16, Teorema 1.1], cada solução w_k é contínua em Ω_k. Assim, existe um ponto $p_k \in \Omega_k$ tal que $w_k(p_k) = M_k$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $p_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, mediante uma translação apropriada.

Afirmação 1: Existe uma subsequência (w_k) e $w_0 \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{aligned} &(i)\, w_k \rightharpoonup w_0 \text{ em } W^{s,p}(\mathbb{R}^n);\\ &(ii)\, w_k \to w_0 \text{ em } L^p(B_j), \text{ para todo } j \in \mathbb{N};\\ &(iii)\, w_k \to w_0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

De fato, note que a sequência (w_k) é limitada em $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ pois $W_0^{s,p}(\Omega_k)$ está contido em $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ e, além disso, pela Proposição 2.2, com $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, podemos concluir que

$$[\,w_k\,]_{s,p}^p \leq \|w_k\|_{L^p(\Omega_k)},$$

e

$$\|w_k\|_{L^p(\Omega_k)} \leq \left(\frac{1}{\lambda_1(\Omega_k)}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Ou seja, existe $A > 0$ tal que

$$\|w_k\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq A \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.8}$$

A partir da limitação da sequência e da reflexividade de $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, demonstrada em [4, Proposição 2.11], segue que existe uma subsequência $(w_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ que converge fracamente em $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Seja w_0 tal que

$$w_{k_l} \rightharpoonup w_0 \text{ em } W^{s,p}(\mathbb{R}^n). \tag{4.9}$$

Renomeando a subsequência por (w_k) provamos (i).

Uma vez que a sequência é limitada em $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, ela também é limitada em $W^{s,p}(B_j)$, onde $B_j = B_j(0)$. Então, pelo Teorema de compacidade, demonstrado em [26, Teorema 7.1], existe uma subsequência, denotada por (w_k^j), que converge para u_j em $L^p(B_j)$.

Em particular $w_k^j \rightharpoonup u_j$ em $L^p(B_j)$. Com base em (4.9) e no fato de que $W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^p(B_j)$, podemos concluir que $w_k^j \rightharpoonup w_0$ em $L^p(B_j)$. Pela unicidade do limite na convergência fraca em espaços de Hausdoff, podemos concluir que $u_j = w_0$ em B_j. Ou seja, $w_k^j \to w_0$ em $L^p(B_j)$.

Utilizando o argumento da diagonalização, encontramos uma subsequência, denotada por (w_k) tal que

$$w_k \to w_0 \text{ em } L^p(B_j), \text{ para todo } j \in \mathbb{N}. \tag{4.10}$$

Provando (ii). Além disso, existe subsequência (w_{k_m}) de (w_k) tal que $w_{k_m}^j \to w_0$ q.t.p. em B_j. Repetindo o argumento de diagonalização, obtemos subsequência (w_k) tal que

$$w_k \to w_0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^n. \tag{4.11}$$

O que implica a validade de (iii) e a existência de um conjunto $H \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $|\mathbb{R}^n \backslash H| = 0$ e $w_k(x) \to w_0(x)$ para todo $x \in H$.

Afirmação 2: $\|w_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = M$.

A partir da definição de M, que assegura $w_k \leq M$, e combinando com a convergência em quase todo ponto (4.11), podemos concluir que $0 \leq w_0 \leq M$ em quase todos os pontos. Assim, obtemos a estimativa $\|w_0\|_{L^\infty} \leq M$.

Por outro lado, para qualquer $t \in (0, M)$, se a medida do conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \mid w_0(x) \geq t\}$ for positiva, então $\|w_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \geq t$. Para demonstrar isso, é suficiente mostrar, em particular, que a medida de $D_0 = \{x \in B_1 \cap H \mid w_0(x) \geq t\}$ é maior que zero.

De fato, sejam $D_k = \{x \in B_1 \cap H \,|\, w_k(x) > t\}$ e $A_m = \bigcup_{k=m}^{+\infty} D_k$. Então

$$D_0 \supseteq \bigcap_{m=1}^{+\infty} A_m$$

pois, se $x \in \bigcap_{m=1}^{+\infty} A_m$ então, para qualquer $m \in \mathbb{N}$, $x \in A_m$. Logo, existe $k_m \geq m$ tal que $x \in D_{k_m}$ ou seja, $w_{k_m}(x) > t$. Fazendo $m \to \infty$ temos $k_m \to \infty$ e, sabendo que $w_k(x) \to w_0(x)$, podemos concluir que $w_0(x) \geq t$, ou seja, $x \in D_0$.

Assim

$$|D_0| \geq \left| \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \right| = \lim_{m\to\infty} |A_m| \geq \lim_{m\to\infty} |D_m|$$

pois (A_m) é uma sequência decrescente de conjuntos e $|A_m| \geq |D_m|$. Para estimar a medida de D_m consideramos o conjunto $\Omega_{m,t} = \{x \in \Omega_m \cap B_1 \,|\, w_m(x) > t\}$ que é aberto, pois w_m é contínua, e tem medida menor que D_m. Note que $w_m - t \in \widetilde{W}^{s,p}(\Omega_{m,t})$ é solução de

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s w = 1 & \text{em } \Omega_{m,t} \\ w = -t & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus \Omega_{m,t} \end{cases}$$

Seja $v_m \in \widetilde{W}^{s,p}(\Omega_{m,t})$ solução de

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s w = 1 & \text{em } \Omega_{m,t} \\ w = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus \Omega_{m,t}. \end{cases}$$

Pelo princípio da comparação, Teorema 1.12,

$$w_m - t \leq v_m \text{ em } \mathbb{R}^n. \tag{4.12}$$

Além disso, aplicando os resultado de localização, Teorema 0.3, e usando o ponto $x = 0$ e raio $R = 1$, concluímos que

$$\sup_{\Omega_{m,t} \cap B_{\frac{1}{2}}} v_m \leq C\, |\Omega_{m,t} \cap B_1|^{\sigma_0}.$$

Suponhamos que existe uma sequência $m_j \to \infty$ tal que

$$|\Omega_{m_j,t} \cap B_1| = |\Omega_{m_j,t}| < \left(\frac{M-t}{2C}\right)^{\frac{1}{\sigma_0}} \quad \text{para todo } m_j.$$

Então teríamos

$$\sup_{\Omega_{m_j,t} \cap B_{\frac{1}{2}}} v_{m_j} \leq C \left[\left(\frac{M-t}{2C}\right)^{\frac{1}{\sigma_0}} \right]^{\sigma_0} = \frac{M-t}{2}.$$

Usando esta relação, a partir de (4.12), concluímos que

$$\sup_{\Omega_{m_j,t} \cap B_{\frac{1}{2}}} w_{m_j} \leq \sup_{\Omega_{m_j,t} \cap B_{\frac{1}{2}}} v_{m_j} + t \leq \frac{M+t}{2}.$$

Isso implica que $M_{m_j} = \sup_{\Omega_{m_j,t}\cap B_{\frac{1}{2}}} w_{m_j} < \frac{M+t}{2} < M$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Logo M_{k_j} não converge a M, o que é uma contradição. Assim, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $m \geq m_0$

$$|\Omega_{m,t}| \geq \left(\frac{M-t}{2C}\right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Consequentemente, temos $|D_0| \geq \lim_{m\to\infty} |D_m| \geq \lim_{m\to\infty} |\Omega_{m,t}| > 0$. Dessa forma, $\|w_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \geq t$ para qualquer $t \in (0, M)$, o que implica em $\|w_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = M$, provando a afirmação 2.

$\frac{1}{2}$

Seja $F = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, w_0(x) \neq 0\}$, resta provarmos que $(-\Delta)_p^s w_0 \leq \chi_F$ em $\mathbb{R}^n$ e que $|F| = 1$. Cada w_k é uma solução do problema (4.1), e o Lema 4.1 garante que $(-\Delta)_p^s w_k \leq \chi_{\Omega_k}$ em $\mathbb{R}^n$. Ou seja, para qualquer $\varphi \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi \geq 0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|w_k(x) - w_k(y)|^p\,(w_k(x) - w_k(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|\,x-y\,|^{n+ps}}\,dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\chi_{\Omega_k}\,dx. \tag{4.13}$$

<u>Afirmação 3</u>: Quando $k \to \infty$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|w_k(x) - w_k(y)|^{p-2}(w_k(x) - w_k(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|\,x-y\,|^{(n+ps)}}dxdy$$
$$\to \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|w_0(x) - w_0(y)|^{p-2}(w_0(x) - w_0(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|\,x-y\,|^{n+ps}}dxdy. \tag{4.14}$$

Sabemos, a partir de (4.8) que a sequência (w_k) é limitada em $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Portanto existe $A > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|w_k(x) - w_k(y)|^p}{|\,x-y\,|^{n+ps}}\,dxdy \leq A. \tag{4.15}$$

Denotando $h_k(x,y) = \frac{|w_k(x)-w_k(y)|^{p-2}(w_k(x)-w_k(y))}{|\,x-y\,|^{(n+ps)\frac{p-1}{p}}}$, a estimativa (4.15) assegura que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |h_k(x,y)|^{\frac{p}{p-1}}\,dxdy \leq A$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Ou seja, a sequência (h_k) é limitada em $L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Como esse espaço é reflexivo, existe uma subsequência (h_{k_j}) tal que $h_{k_j} \rightharpoonup h$ em $L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Em particular, para toda $\rho(x,y) \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ vale a seguinte convergência

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} h_k(x,y)\rho(x,y)dxdy \to \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} h(x,y)\rho(x,y)dxdy. \tag{4.16}$$

Dada qualquer $\varphi \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ podemos considerar $\rho(x,y) = \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{(n+sp)\frac{1}{p}}}$, que pertence ao espaço $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Usando esta função na convergência (4.16) e a definição de h_k

obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|w_k(x)-w_k(y)|^{p-2}(w_k(x)-w_k(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|\, x-y\,|^{(n+ps)}}dxdy$$

$$\to \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} h(x,y)\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{(n+sp)\frac{1}{p}}}dxdy. \quad (4.17)$$

Denotando $q(x,y)=\frac{|w_0(x)-w_0(y)|^{p-2}(w_0(x)-w_0(y))}{|\,x-y\,|^{(n+ps)\frac{p-1}{p}}}$, basta demonstrarmos que $h=q$ em quase todos os pontos de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ para concluir a Afirmação 3.

Para isso, consideramos, a partir de uma $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, a função $\eta(x,y)=\psi(x,y)|x-y|^{(n+sp)\frac{(p-1)}{p}}$ na convergência (4.16). Note que η pertence a $L^p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ pois tem suporte compacto, já que ψ também possui, e $|x-y|^{(n+ps)\frac{p-1}{p}}$ é limitada em conjuntos compactos. Obtemos assim

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |w_k(x)-w_k(y)|^{p-2}(w_k(x)-w_k(y))\psi(x,y)dxdy$$

$$\to \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} h(x,y)\psi(x,y)|x-y|^{(n+sp)\frac{p-1}{p}}dxdy. (4.18)$$

Por outro lado, podemos demonstrar a seguinte convergência:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |w_k(x)-w_k(y)|^{p-2}(w_k(x)-w_k(y))\psi(x,y)dxdy$$

$$\to \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |w_0(x)-w_0(y)|^{p-2}(w_0(x)-w_0(y))\psi(x,y)dxdy. \quad (4.19)$$

De fato, se $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é dada por $g(l)=|l|^{p-2}l$, então

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(w_k(x)-w_k(y))\psi(x,y)dxdy - \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(w_0(x)-w_0(y))\psi(x,y)dxdy\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |g(w_k(x)-w_k(y))-g(w_0(x)-w_k(y))|\,|\psi(x,y)|dxdy. \quad (4.20)$$

Caso $1<p\leq 2$, pelas desigualdades (1.38) e (1.33), existe $C_1>0$ tal que

$$\begin{aligned} |g(w_k(x)-w_k(y))-g(w_0(x)-w_k(y))| &\leq C_1|(w_k(x)-w_k(y))-(w_0(x)-w_0(y))|^{p-1} \\ &= C_1|(w_k(x)-w_0(x))-(w_k(y)-w_0(y))|^{p-1} \\ &\leq C_1C_p\left(|w_k(x)-w_0(x)|^{p-1}+|w_k(y)-w_0(y)|^{p-1}\right) \end{aligned}$$

Portanto, em (4.20) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |g(w_k(x)-w_k(y))-g(w_0(x)-w_k(y))|\,|\psi(x,y)|dxdy$$

$$\leq C_1C_p\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |w_k(x)-w_0(x)|^{p-1}|\psi(x,y)|dxdy + C_1C_p\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |w_k(y)-w_0(y)|^{p-1}|\psi(x,y)|dxdy.$$

Para a estimativa da primeira integral do lado direito, observamos que $supp(\psi) \subseteq B_j \times B_j$ para algum $j \in \mathbb{N}$. Assim, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{B_j}\int\limits_{B_j} |w_k(x) - w_0(x)|^{p-1}|\psi(x,y)|dxdy \\
&\qquad\qquad \leq \int\limits_{B_j}\left(\int\limits_{B_j}\left(|w_k(x) - w_0(x)|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\int\limits_{B_j}|\psi(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy \\
&\qquad\qquad = \|w_k - w_0\|^{p-1}_{L^p(B_j)}\int\limits_{B_j}\left(\int\limits_{B_j}|\psi(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy \\
&\qquad\qquad \leq C\|w_k - w_0\|^{p-1}_{L^p(B_j)} \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

pois ψ tem suporte compacto e é limitada. Como $w_k \to w_0$ em $L^p(B_j)$ então a estimativa (4.21) converge a 0 quando $k \to \infty$. Analogamente

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |w_k(y) - w_0(y)|^{p-1}|\psi(x,y)|dxdy \to 0,$$

quando $k \to \infty$. Deste modo, vale a convergência (4.20) para $1 < p \leq 2$.

Caso $p > 2$, utilizando as desigualdades (1.39) e (1.33), existe $C_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&|g(w_k(x) - w_k(y)) - g(w_0(x) - w_k(y))| \\
&\quad \leq C_2|(w_k(x) - w_k(y)) - (w_0(x) - w_0(y))|\left(|w_k(x) - w_k(y)| + |w_0(x) - w_0(y)|\right)^{p-2} \\
&\quad \leq C_2C_p(|w_k(x) - w_0(x)| + |w_k(y) - w_0(y)|)(|w_k(x) - w_k(y)|^{p-2} + |w_0(x) - w_0(y)|^{p-2}).
\end{aligned}$$

Portanto, em (4.20), chegamos a

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(w_k(x) - w_k(y)) - g(w_0(x) - w_k(y))|\,|\psi(x,y)|dxdy \qquad (4.22) \\
&\qquad \leq C_2C_p\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |w_k(x) - w_0(x)||w_k(x) - w_k(y)|^{p-2}|\psi(x,y)|dxdy \\
&\qquad\quad + C_2C_p\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |w_k(x) - w_0(x)||w_0(x) - w_0(y)|^{p-2}|\psi(x,y)|dxdy \\
&\qquad\quad + C_2C_p\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |w_k(y) - w_0(y)||w_k(x) - w_k(y)|^{p-2}|\psi(x,y)|dxdy \\
&\qquad\quad + C_2C_p\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |w_k(y) - w_0(y)||w_0(x) - w_0(y)|^{p-2}|\psi(x,y)|dxdy.
\end{aligned}$$

Usando o fato que $supp(\psi) \subseteq B_j \times B_j$ e a desigualdade de Hölder generalizada com os expoentes p, p e $\frac{p}{p-2}$ na primeira integral, podemos deduzir que

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{B_j}\int\limits_{B_j} |w_k(x)-w_0(x)||w_k(x)-w_k(y)|^{p-2}|\psi(x,y)|dxdy \\
&\leq \left(\int\limits_{B_j}\int\limits_{B_j} |w_k(x)-w_0(x)|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{B_j}\int\limits_{B_j} |w_k(x)-w_k(y)|^p dxdy\right)^{\frac{p-2}{p}} \|\psi\|_{L^p(B_j\times B_j)} \\
&\leq \left(\|w_k-w_0\|^p_{L^p(B_j)}|B_j|\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{B_j}\int\limits_{B_j} C_p(|w_k(x)|^p+|w_k(y)|^p)dxdy\right)^{\frac{p-2}{p}} \|\psi\|_{L^\infty(B_j\times B_j)}|B_j|^{\frac{2}{p}} \\
&\leq \|w_k-w_0\|_{L^p(B_j)}|B_j|^{\frac{1}{p}} \left(2C_p\|w_k\|^p_{L^p(B_j)}|B_j|\right)^{\frac{p-2}{p}} \|\psi\|_{L^\infty(B_j\times B_j)}|B_j|^{\frac{2}{p}}.
\end{aligned}$$

Dado que a sequência (w_k) é limitada em $L^p(B_j)$, e converge a w_0 neste espaço, a estimativa tende a 0 quando $k \to \infty$. Analogamente concluímos que as demais integrais do lado direito de (4.22) convergem a 0. Deste modo, também vale a convergência (4.20) para $p > 2$.

Ao combinar (4.18) e (4.19), concluímos que

$$h(x,y)|x-y|^{(n+sp)\frac{p-1}{p}} = |w_0(x)-w_0(y)|^{p-2}(w_0(x)-w_0(y)) \ \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^n.$$

Provando que $h = q$ q.t.p. em $\mathbb{R}^n$. Consequentemente vale (4.14).

<u>Afirmação 4</u>: $|F| = 1$.

Podemos escrever $F = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$ onde $D_j = F \cap B_j$ é uma sequência crescente de conjuntos, assim $|F| = \lim_{j\to\infty}|D_j|$. Seja $j \in \mathbb{N}$, também podemos escrever $D_j = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m^j$ onde $V_m^j = \{x \in B_j \,|\, w_0(x) > 1/m\}$. Note que $V_m^j \subseteq V_{m+1}^j$, deste modo $|D_j| = \lim_{m\to\infty}|V_m^j|$.

Com base em (4.10), podemos afirmar que w_k converge em medida a w_0 em B_j. Ou seja, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $E_m \subseteq B_j$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|E_m| < \frac{1}{m} \text{ e } |w_k(x)-w_0(x)| < \frac{1}{m} \tag{4.23}$$

para todo $x \in B_j \setminus E_m$ e $k \geq k_0$. Seja $G_m = B_j \setminus E_m$. Note que, se $x \in G_m \cap V_m^j$ então $|w_k(x)-w_0(x)| < 1/m$ e $w_0(x) > 1/m$, logo $w_k(x) = w_0(x) + (w_k(x)-w_0(x)) > 1/m - 1/m = 0$. Portanto $G_m \cap V_m^j \subseteq \{x \in B_j \,|\, w_k(x) > 0\}$ e assim

$$|G_m \cap V_m^j| \leq |\{x \in B_j \,|\, w_k(x) > 0\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, w_k(x) > 0\}| \leq |\Omega_k| = 1. \tag{4.24}$$

Dado que $V_m^j = (G_m \cap V_m^j) \cup (E_m \cap V_m^j)$, segue a partir de (4.23) e (4.24) que

$$|V_m^j| = |G_m \cap V_m^j| + |E_m \cap V_m^j| \leq 1 + |E_m| \leq 1 + \frac{1}{m}$$

Logo $|F_j| = \lim_{m\to\infty} |V_m^j| \leq 1$. Consequentemente $|F| = \lim_{j\to\infty} |F_j| \leq 1$.

Suponhamos que $|F| < 1$. Seja $\Omega_k^\delta = \{x \in \Omega_k \,|\, w_k(x) \geq \delta\}$. Com base na convergência em medida, sabemos que, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $|A_{k,\delta}| := |\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |w_k(x) - w_0(x)| \geq \delta\}| < \varepsilon$ para $k \geq k_0$. Além disso, se $x \in \Omega_k^\delta$ e $x \notin F$, então $|w_k(x) - w_0(x)| = |w_k(x)| \geq \delta$. Ou seja, $\Omega_k^\delta \subset A_{k,\delta} \cup F$. Portanto

$$|\Omega_k^\delta| \leq |A_{k,\delta} \cup F| \leq |A_{k,\delta}| + |F| < \varepsilon + |F|.$$

Para $k \geq k_0$. Seja $\gamma_0 = \frac{1+|F|}{2}$, tomamos $\varepsilon = \gamma_0 - |F|$. Deste modo

$$|\Omega_k^\delta| < \varepsilon + |F| = \gamma_0. \tag{4.25}$$

Seja $v_k \in \widetilde{W}^{s,p}(\Omega_k^\delta)$ solução de

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s v = 1 & \text{em } \Omega_k^\delta \\ v = \delta & \text{em } \mathbb{R}^n \setminus \Omega_k^\delta. \end{cases}$$

A partir de (4.7) podemos concluir que

$$\sup_{x\in\Omega_k^\delta} v_k \leq \gamma_0^{\frac{ps}{p-1}} \cdot M + \delta,$$

para $k \geq k_0$. Pelo princípio da comparação, Teorema 1.12, segue que $w_k \leq v_k \leq \gamma_0^{\frac{ps}{p-1}} \cdot M + \delta$ em $\mathbb{R}^n$. Já que $\gamma_0 < 1$, podemos considerar $\delta > 0$ de modo que $\gamma_1 = M\gamma_0^{\frac{ps}{p-1}} + \delta < M$. Logo $w_0 = \lim_{k\to\infty} w_k \leq \gamma_1 < M$. Assim $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} w_0 \leq \gamma_1 < M$ qtp em $\mathbb{R}^n$, o que contradiz o fato de que $\|w_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = M$. Portanto $|F| = 1$.

Afirmação 5:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\chi_{\Omega_k} dx \to \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\chi_F dx. \tag{4.26}$$

De fato, pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\chi_{\Omega_k} dx - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\chi_F dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi||\chi_{\Omega_k} - \chi_F| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\chi_{\Omega_k\Delta F} dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega_k\Delta F} \varphi^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega_k\Delta F} \chi_{\Omega_k\Delta F} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \left(\int_{\Omega_k\Delta F} \varphi^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |\Omega_k\Delta F|^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Suponhamos que $|\Omega_k\Delta F|$ não converge a 0. Isso implica a existência de $\varepsilon > 0$ e de uma subsequência (Ω_{k_j}), a qual denotaremos também por (Ω_k), tal que

$$|\Omega_k\Delta F| = |\Omega_k \setminus F| + |F \setminus \Omega_k| \geq \varepsilon.$$

Dado que $|\Omega_k| = |F| = 1$, podemos afirmar que $|\Omega_k \backslash F| = |F \backslash \Omega_k|$. Portanto $|\Omega_k \backslash F| \geq \varepsilon/2$ e $|F \setminus \Omega_k| \geq \varepsilon/2$. Já que $|F| = 1$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|F \setminus B_m| < \varepsilon/4$. Assim

$$
\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{2} \leq |F \setminus \Omega_k| &= |(F \setminus \Omega_k) \cap B_m| + |(F \setminus \Omega_k) \setminus B_m| \\
&\leq |(F \setminus \Omega_k) \cap B_m| + |F \setminus B_m| \\
&\leq |(F \setminus \Omega_k) \cap B_m| + \frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}
$$

o que implica em $|(F \setminus \Omega_k) \cap B_m| \geq \varepsilon/4$. Além disso, como $w_0 > 0$ em F, então

$$
F = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, w_0(x) > 1/j\} =: \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j.
$$

Como $F_j \subseteq F_{j+1} \subseteq F$ para todo $j \in \mathbb{N}$, temos $|F| = \lim_{j\to\infty} |F_j|$ e existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|F \setminus F_j| < \varepsilon/8$ para $j \geq j_0$. Desta forma, utilizando a propriedade $F = F_j \cup (F \setminus F_j)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{4} \leq |(F \setminus \Omega_k) \cap B_m| &= |(F_j \setminus \Omega_k) \cap B_m| + |((F \setminus F_j) \setminus \Omega_k) \setminus B_m| \\
&\leq |(F_j \setminus \Omega_k) \cap B_m| + |F \setminus F_j| \\
&< |(F_j \setminus \Omega_k) \cap B_m| + \frac{\varepsilon}{8},
\end{aligned}
$$

ou seja, $|(F_j \setminus \Omega_k) \cap B_m| \geq \varepsilon/8$ para $j \geq j_0$ e todo $k \in \mathbb{N}$. Usando estas relações podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
\int_{B_m} |w_k(x) - w_0(x)|^p dx &\geq \int_{(F_j \setminus \Omega_k)\cap B_m} |w_k(x) - w_0(x)|^p dx \\
&\geq \int_{(F_j \setminus \Omega_k)\cap B_m} \left(\frac{1}{j}\right)^p dx \\
&= \frac{1}{j^p} |(F_j \setminus \Omega_k) \cap B_m| \\
&\geq \frac{\varepsilon}{8 j^p},
\end{aligned}
$$

pois $w_k = 0$ fora de Ω_k e $w_0 > 1/j$ em F_j. No entanto, isso contradiz o fato de que $w_k \to w_0$ em $L^p(B_m)$. Portanto $|\Omega_k \Delta F| \to 0$. Desta forma, a partir de (4.27), provamos a Afirmação 5.

Afirmação 6: $(-\Delta)_p^s w_0 \leq \chi_F$.

Tomando o limite quando $k \to \infty$ em (4.13) e usando as Afirmações 3 e 5 concluímos que $(-\Delta)_p^s w_0 \leq \chi_F$ em $\mathbb{R}^n$.

□

Referências Bibliográficas

[1] Andreu, F. M., Rossi, J. D. and Toledo, J. *Nonlocal Difusion Problems*, volume 165 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2010.

[2] Adams, R. *Sobolev Spaces.* New York: Academy Press, 1975.

[3] Balaadich, F. Azroul, H. Existence Results for Fractional p-Laplacian Systems via Young Measures. *Mathematical Modelling and Analysis*. 232-241. 2022

[4] Bonder, J. F. Salort, A. M. *Fractional order Orlicz-Sobolev spaces*, Journal of Functional Analysis, Volume 277, 2019, pages 333-367.

[5] Bonorino, L. P.; Montenegro, J. F. B. *Schwarz symmetrization and comparison results for nonlinear elliptic equations and eigenvalue problems.* Annali di Matematica Pura ed Applicata. v. 192, p. 987-1024, 2013.

[6] Bisci, G. M. Radulescu, V.D. Servadei, R. *Variational Methods for Nonlocal Fractional Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[7] Brasco, L. and Parini, E. *The second eigenvalue of the fractional* $p-$*laplacian*, Adv. Calc. Var., to appear (2016).

[8] Brasco, L.; Lindgren, E.; Parini, E. *The fractional cheeger problem.* Interfaces and free boundaries, v. 16, p. 419-458, 2014.

[9] Caffarelli, L.; Silvestre, L. *An Extension Problem Related to the Fractional Laplacian.* Communications in Partial Differential Equations. v. 32, p. 1245-1260, 2007.

[10] Damascelli, L. *Comparison theorems for some quasilinear degenerate elliptic operators and applications to symmetry and monotonicity result.* Annales de L'institut Henri Poincar´e. v. 15, p. 493-516, 1998.

[11] Di Castro, A. Kuusi T. and Palatucci, G. *Local behavior of fractional p-minimizers*, Preprint, 2014.

[12] Demengel, F.; Demengel, G. *Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations*. London: Springer, 2012.

[13] Franzina, G. and Palatucci, G. *Fractional p-eigenvalues*, Riv. Mat. Univ. Parma 5(2) (2014), to appear.

[14] Iannizzotto, A. Liu, K. P. S. and Squassina, M. *Existence results for fractional p-Laplacian problems via Morse theory*. Adv. Calc. Var., (2014).

[15] Iannizzotto, A. Squassina, M. *Weyl-type laws for fractional p-eigenvalue problems*, Asymptotic Anal,. 88 (2014), 233-245

[16] Iannizzotto, A., Mosconi, S., and Squassina, M. *Global Hölder regularity for the fractional p-Laplacian*, Rev. Mat. Iberoam. 32 (4) (2016) 1353–1392.

[17] Iannizzotto, A., Mosconi, S., and Squassina, M. *Fine boundary regularity for the degenerate fractional p-Laplacian, Journal of Functional Analysis*, Volume 279, Issue 8, 2020.

[18] Korvenpää, J., Kuusi, T., and Palatucci, G. *Hölder continuity up to the boundary for a class of fractional obstacle problems*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. 27 (2016) 355–367.

[19] Korvenpää, J., Kuusi, T., and Palatucci, G. *The obstacle problem for nonlinear integro-differential operators*, Calc. Var. Partial Differential Equations 55 (3) (2016) 63.

[20] Korvenpää, J.; Kussi, T.; Palatucci, G. *A note on fractional supersolutions*. Electronic Journal of Differential Equations. v. 2016, p. 1-9, 2016.

[21] Korvenpää, J.; Kussi, T.; Palatucci, G. *Fractional superharmonic functions and the Perron method for nonlinear integro-differential equations*. Mathematische Annalen. v. 369, p. 1443-1489, 2017.

[22] Korvenpää, J.; Kussi, T.; Palatucci, G. *The obstacle problem for nonlinear integro-differential operators*. Calculus of Variations and Partial Differential Equations. v. 55, número do artigo 63, 2016.

[23] Lindgren, E. *Hölder estimates for viscosity solutions of equations of fractional p-laplace type*, Nonlinear Differential Equations Appl. 23 (5) (2016) 55, 18 pp.

[24] Lindgren, E. and Lindqvist, P. *Fractional eigenvalues*, Calc. Var. 49 (2014), 795–826.

[25] Malý, J. and Ziemer, W. P. *Fine Regularity of Solutions of Elliptic Partial Differential Equations*, AMS, 1997.

[26] Nezza, E. D.; Palatucci, G.; Valdinocci, E. *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*. Bulletin des Sciences Math´ematiques, v. 136, p. 521-573, 2012.

[27] Palatucci, G., *The Dirichlet problem for the p-fractional Laplace equation*, Nonlinear Analysis 177 (2018) 699–732.

[28] Perera, K. Agarwal, R.P. and O'Regan, D. *Morse Theoretic Aspects of p-Laplacian Type Operators*, Mathematical Surveys and Monographs, American Math. Society, Providence, RI, 2010.

[29] Vázquez, J. L., and Volzone, B. *Symmetrization for linear and nonlinear fractional parabolic equations of porous medium type*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Volume 101, 2014. 553-582.

[30] Di Blasio, G., and Volzone, B. *Comparison and regularity results for the fractional Laplacian via symmetrization methods*, J. Differential Equations 253(9) (2012) 2593–2615

[31] Ferone, V., and Volzone, B. *Symmetrization for Fractional Elliptic Problems: A Direct Approach*. Arch Rational Mech Anal 239, 1733–1770 (2021).

[32] Servadei, R.; Valdinoci, E. *Weak and viscosity solutions of the fractional Laplace equation*. Publicacions Matemàtiques. v. 58, p. 133-154, 2014.

[33] Silvestre, L. *Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator*. Communications on Pure and Applied Mathematics. v. 60, p. 67-112, 2007.

[34] Talenti, G.: *Elliptic equations and rearrangements*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 3, 697–718, 1976.