

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

SIMULAÇÃO DA DINÂMICA LATERAL DE UM ELEVADOR POR MEIO DE SISTEMAS
PENDULARES REPRESENTADOS ATRAVÉS DO MÉTODO DE ESPAÇO DE ESTADOS

por

Gustavo Brun Goldschmidt

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, Dezembro de 2010.



Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Escola de Engenharia

Departamento de Engenharia Mecânica

SIMULAÇÃO DA DINÂMICA LATERAL DE UM ELEVADOR POR MEIO DE SISTEMAS
PENDULARES REPRESENTADOS ATRAVÉS DO MÉTODO DE ESPAÇO DE ESTADOS

por

Gustavo Brun Goldschmidt

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: **Projeto e Fabricação**

Orientador: Prof. Dr. Mário Roland Sobczyk Sobrinho

Comissão de Avaliação:

Prof. Eduardo A. Perondi

Prof. André João de Souza

Prof. Ney Francisco Ferreira

Porto Alegre, Dezembro de 2010.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Beatriz e Erico, por terem me proporcionado a chance de estudar nas melhores instituições desse país. Também, a eles, agradeço pelo apoio às minhas decisões e por toda a confiança que sempre depositaram em mim. Agradeço aos meus irmãos, Cassio e Fábio, por todos os preciosos conselhos que me deram ao longo da vida. Ambos são como pais para mim. A todos aqueles professores que amam o seu trabalho e acreditam que a educação é o primeiro passo para mudar um país, meus sinceros agradecimentos. Professores como esses marcaram a minha vida e foram fundamentais para que eu chegasse até aqui. Finalmente, agradeço ao Prof. Dr. Mário Sobczyk Sobrinho por estar sempre disponível para esclarecer todas as minhas dúvidas. Eu não poderia desejar um orientador melhor para esse trabalho.

GOLDSCHMIDT, G. B. **SIMULAÇÃO DA DINÂMICA LATERAL DE UM ELEVADOR POR MEIO DE SISTEMAS PENDULARES REPRESENTADOS PELO MÉTODO DE ESPAÇO DE ESTADOS**. 2010. 30p. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso de Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

RESUMO

Este trabalho aborda a modelagem do comportamento dinâmico do movimento lateral de elevadores por meio de pêndulos, para fins de desenvolvimento de algoritmos de controle de sistemas de suspensão ativa em elevadores de alto desempenho. O objetivo é avaliar o grau de validade da representação de elevadores por pêndulos simples, comumente usada na literatura especializada, quando comparada a um modelo baseado em pêndulos duplos. Os modelos matemáticos não-lineares dos dois tipos de sistemas são desenvolvidos com base na mecânica Newtoniana. O modelo não-linear do pêndulo duplo é avaliado por comparação com outro, baseado na mecânica Lagrangeana e freqüentemente utilizado em trabalhos técnicos da área. Após essa verificação, os modelos desenvolvidos são linearizados por meio de aproximações para pequenos ângulos. Os modelos linearizados são utilizados para simular o comportamento do sistema para diversas circunstâncias de operação, de modo a comparar as respostas obtidas em cada caso. Constata-se, especialmente, que para pequenos comprimentos do cabo do elevador, ou para deslocamentos iniciais da cabine não uniformes em sua extensão, a aproximação utilizando pêndulos simples não é capaz de representar fenômenos importantes, relacionados à presença de mais de um modo de vibração na resposta do sistema considerado, que podem ser previstos por meio do modelo baseado em pêndulos duplos.

PALAVRAS-CHAVES: Suspensão ativa, Elevadores, Sistemas pendulares, Modelagem para controle

GOLDSCHMIDT, G. B. **STATE SPACE REPRESENTATION OF THE LATERAL DYNAMIC OF AN ELEVATOR MODELED BY PENDULAR SYSTEMS**. 2010. 30p. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso de Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

ABSTRACT

This work deals with the modeling of the lateral dynamic behavior of an elevator represented by means of pendulum systems, in order to develop control algorithms applied to active suspension systems for high-performance elevators. The goal is to study the validity limits of the simple-pendulum approximation, often employed in elevator systems' modeling, when compared to a double-pendulum based model. Nonlinear models of both systems are developed according to Newtonian mechanics. The proposed nonlinear model of the double pendulum is compared to another one based on Lagrangian mechanics and commonly found in specialized literature. After such verification, the developed models are linearized regarding small-angle approximations. Such linearized models are employed to simulate the behavior of the system for various operation conditions, so that the dynamic responses of both pendulum approximations can be compared. It is concluded that, for small cable lengths, as well as for non-homogeneous misalignment of the cabin, the simple-pendulum approximation is incapable of modeling important phenomena, which are related to the presence of more than one vibration mode that can be predicted by the double-pendulum model.

KEY-WORDS: Active suspension, Elevators, Pendulum systems, Control oriented-modeling

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
2. OBJETIVOS	2
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	2
4. METODOLOGIA	3
4.1 Representação por Espaço de Estados.....	3
4.2 Modelagem do Pêndulo Simples.....	3
4.3 Modelagem do Pêndulo Duplo.....	4
4.3.1 A Modelagem Newtoniana	5
4.3.2 A Modelagem Lagrangeana.....	6
5. RESULTADOS.....	7
5.1 Comparação entre a Modelagem por Mecânica Newtoniana e Lagrangeana.....	7
5.2 Comparação entre a Modelagem Linear e Não-linear	8
5.3 Comparação entre a Modelagem por Pêndulo Simples e Duplo	9
5.3.1 Determinação dos Parâmetros das Simulações.....	9
5.3.2 Comparação entre o Comportamento Dinâmico para Diferentes Condições Iniciais de Deslocamento da Cabine	10
5.3.3 Comparação entre o Comportamento Dinâmico para Diferentes Razões de l_1/l_2 ...	13
6. CONCLUSÕES.....	15
7. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	15
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	16
APÊNDICE 1	17
APÊNDICE 2	22
APÊNDICE 3	23
APÊNDICE 4.....	24

1. INTRODUÇÃO

Elevadores são equipamentos presentes no dia-a-dia da população de grandes cidades. O mercado de elevadores apresenta alta competitividade, uma vez que é marcado por poucos e grandes fabricantes, como, por exemplo, a Otis, a Thyssenkrupp e a Schindler. Um dos principais diferenciais competitivos para essas empresas é a tecnologia agregada dos seus produtos.

Nos elevadores de passageiros é fundamental preocupar-se com a segurança e conforto dos mesmos. Para isso, é necessário que esses equipamentos apresentem um bom sistema de suspensão, a fim de evitar vibrações indesejadas. Na maioria dos elevadores, um sistema passivo é suficiente para assegurar aos passageiros níveis aceitáveis de conforto e segurança, já que os deslocamentos efetuados e as velocidades do equipamento são reduzidas. Um desenho esquemático de um elevador com sistema passivo de suspensão de quatro elementos pode ser visto na Figura 1.1.

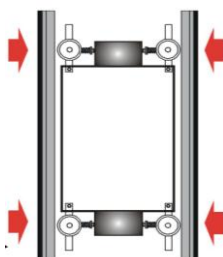


Figura 1.1 – Desenho esquemático da suspensão de elevadores (fonte: Hitachi, Ltd. – Mito Building System Division).

Para elevadores de arranha-céus, como o Taipei 101 em Taipei, Taiwan, que trabalham com velocidades acima de 60 km/h e possuem cabos de até 500 m de altura é necessário o uso de tecnologias mais sofisticadas para garantir o conforto dos usuários [Chen e Zhu, 2004]. Adicionalmente, esses equipamentos são instalados em empreendimentos luxuosos, onde o nível de exigência é muito alto, assim como a responsabilidade das construtoras sobre a segurança dos passageiros.

Surge aí o interesse pelo uso de sistemas de suspensão ativa em elevadores. Esses sistemas, além dos quatro elementos de suspensão apresentados na Figura 1.1, são dotados ainda de atuadores lineares que reagem às perturbações da cabine. Apesar de frequentemente utilizados em automóveis, ainda existem poucos estudos sobre a utilização desses em elevadores [López, 2007].

Para o desenvolvimento de algoritmos de controle de sistemas de suspensão ativa para elevadores, é importante que se consiga prever o deslocamento lateral da cabine ao longo do tempo. Na literatura, é comum encontrar a modelagem da cabine de elevadores como um pêndulo simples, composto por um único elemento pontual de massa, devido à redução da complexidade que essa consideração traz ao problema [López, 2007; Zhu e Xu, 2003; Chen e Zhu, 2004]. Acredita-se, no entanto, que, em algumas situações, esse tipo de abordagem seja ineficiente para simular o comportamento da cabine de forma fidedigna.

O presente trabalho está inserido no contexto do projeto “Bancada Experimental para o Desenvolvimento de Algoritmos Controladores de Sistemas de Suspensão Ativa para Elevadores”, em desenvolvimento no LAMECC (Laboratório de Mecatrônica e Controle) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. No referido projeto, pretende-se contruir uma bancada experimental que reproduza os principais efeitos relativos ao funcionamento de um sistema de suspensão ativa de elevadores sob condições reais de funcionamento, de modo a viabilizar o processo de validação experimental dos controladores. No entanto, devido às limitações físicas de altura do espaço interno do laboratório, acredita-se que os resultados práticos sejam significativamente diferentes dos resultados teóricos obtidos utilizando-se a modelagem do elevador como um pêndulo simples, comumente encontrada na literatura.

2. OBJETIVOS

Neste trabalho pretende-se comparar as modelagens do comportamento dinâmico de elevadores obtidas através da aproximação dos sistemas por um pêndulo simples e por um pêndulo duplo. A grande vantagem da representação por um sistema pendular duplo é a possibilidade de modelar a oscilação da cabine do elevador ao redor do eixo que a prende ao cabo de sustentação. A Figura 2.1 apresenta um desenho esquemático da representação do elevador pelos sistemas pendulares.

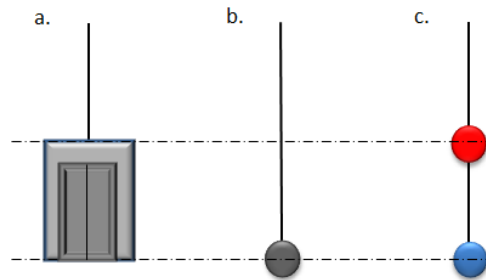


Figura 2.1 – Representação da cabine do elevador (a), pelos sistemas pendulares simples (b) e duplo (c).

Os objetivos específicos do trabalho são:

- modelagem não-linear do pêndulo simples e duplo;
- linearização dos modelos e representação por espaço de estados;
- implementação das equações em Matlab;
- validação dos modelos linearizados;
- comparação dos resultados para o pêndulo simples e duplo.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Na literatura, é possível encontrar diversas formas de modelar o comportamento dinâmico de elevadores. A seguir, são referenciados alguns trabalhos que abordam o tema.

Em sua dissertação, López, 2007, realiza uma série de simplificações que o levam a modelar a cabine do elevador como um pêndulo simples, com molas nas laterais representando o sistema de suspensão da mesma. As equações que descrevem o sistema são obtidas pela mecânica Newtoniana e representadas por espaço de estados. No trabalho, são comparados os resultados para posição, velocidade e aceleração da cabine do elevador para um sistema passivo e ativo de suspensão. Verifica-se que o sistema de suspensão ativo é capaz de proporcionar aos passageiros níveis de conforto consideravelmente maiores do que o sistema de suspensão passivo.

Chen e Zhu, 2004, modelam o elevador como um pêndulo simples em que o comprimento do cabo varia com o tempo, simulando o efeito de subida ou descida do elevador. As equações são obtidas pela mecânica Lagrangeana, utilizando-se o princípio de Hamilton [Meirovitch, 1988]. Através do teorema dos Pi de Buckingham é construído um protótipo do elevador em escala reduzida. O trabalho é concluído comparando os resultados teóricos e experimentais e apresentando a posição ideal do amortecedor, e o valor ótimo de amortecimento que minimizam a energia de vibração da cabine.

Cao *et alli*, 2010, analisam a vibração no sistema de cabos de elevadores com condições de contorno complexas devido a sistemas de roldanas. A modelagem do problema é feita através da mecânica Lagrangeana, utilizando-se o princípio de Hamilton. O artigo modela o sistema como um pêndulo composto, onde as massas representam as roldanas, a cabine e a carga do elevador. Como resultados, são apresentados os deslocamentos do cabo de suspensão em função do tempo.

Foram encontrados, ainda, outros trabalhos que abordam a temática do desenvolvimento de algoritmos de controle para sistemas de suspensão ativa para elevadores

[Sha *et alli*, 2001; Schneider *et alli*, 2001 e Istif *et alli*, 2002]. Esses trabalhos, no entanto, apresentam um maior enfoque nos sistemas de controle. Em nenhuma das referências encontradas são comparadas diferentes formas de modelagem para a cabine dos elevadores, de forma a verificar as vantagens de cada uma.

4. METODOLOGIA

A metodologia consiste na obtenção dos modelos matemáticos para os sistemas pendulares simples e duplo, na linearização das equações obtidas e na descrição das mesmas em formato matricial compatível com o método de representação em espaço de estados. A seguir, essas etapas são descritas de forma mais detalhada.

4.1 Representação por Espaço de Estados

A representação por espaço de estados consiste em escrever o problema como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem e, para o caso linear, representá-lo através de uma equação matricial [Franklin *et alli*, 1995]. Essa representação pode ser vista nas Equações 4.1 e 4.2,

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (4.1)$$

$$y = Cx, \quad (4.2)$$

onde A , B e C são matrizes, x é um vetor que representa as variáveis de estado e y é o valor de interesse dentro do vetor x , dado por uma combinação linear entre os componentes do vetor x .

A principal vantagem da representação por espaço de estados advém da limitação da teoria de controle convencional para representar sistemas com mais de uma entrada e mais de uma saída e/ou variantes no tempo [Ogata, 1985]. Além disso, com os avanços computacionais, a solução dos problemas matriciais propostos pela metodologia de espaço de estados torna-se relativamente simples.

4.2 Modelagem do Pêndulo Simples

A modelagem do pêndulo simples é comumente encontrada na literatura [Franklin *et alli*, 1995]. Na Figura 4.1, pode-se ver o desenho esquemático do pêndulo simples.

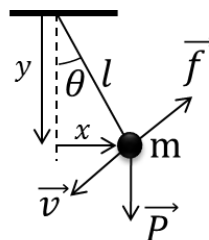


Figura 4.1 – Desenho esquemático do pêndulo simples com a velocidade e as forças atuantes sobre a massa.

Na Figura 4.1, l é o comprimento do cabo, m é a massa, θ é o ângulo entre o cabo e a vertical, e \vec{v} é a velocidade da massa. As forças atuantes sobre o sistema são o peso da massa (\vec{P}) e o atrito da mesma com o ar (\vec{f}).

Aplicando a condição de equilíbrio de forças ao sistema, obtém-se a Equação 4.3, onde o momento de inércia da massa m é dado por $I = ml^2$.

$$I\ddot{\theta} = -P(l \sin \theta) - fl, \quad (4.3)$$

O peso e o atrito viscoso são dados, respectivamente, por $P = mg$ e $At = c\dot{\theta}l$, onde g é a aceleração da gravidade, e c , o coeficiente de amortecimento viscoso. Com isso, obtém-se a Equação 4.4, que representa a equação não-linear que descreve o comportamento do pêndulo simples.

$$ml^2\ddot{\theta} = -mg(l \sin \theta) - c\dot{\theta}l^2. \quad (4.4)$$

Para pequenos ângulos, como é o caso do elevador, sabe-se que as funções trigonométricas podem ser aproximadas por $\sin \theta \cong \theta$ e $\cos \theta \cong 1$. Através dessas aproximações, obtém-se a Equação 4.5 para o pêndulo simples linearizada

$$ml^2\ddot{\theta} = -mg(l\theta) - c\dot{\theta}l^2. \quad (4.5)$$

A Equação 4.5 pode ser representada em espaço de estados pela Equação 4.6

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

4.3 Modelagem do Pêndulo Duplo

Para modelar o pêndulo duplo foram utilizadas duas metodologias: a modelagem por mecânica Newtoniana e a modelagem por mecânica Lagrangeana. Esse procedimento foi realizado com o intuito de se comparar os resultados obtidos pelas duas metodologias, verificando-se a validade das equações aqui desenvolvidas.

A Figura 4.2 apresenta um desenho esquemático do pêndulo duplo.

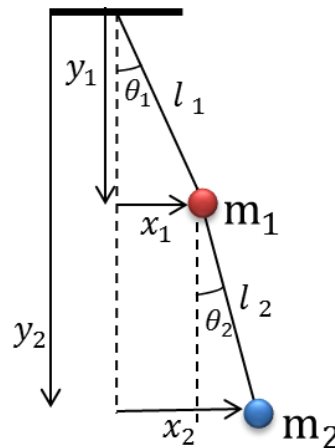


Figura 4.2 - Desenho esquemático do pêndulo duplo.

Para equacionar o problema, diferentemente do pêndulo simples, é útil descrever as posições, velocidades e acelerações envolvidas por meio do seguinte conjunto de equações auxiliares (Equações 4.7, 4.8 e 4.9)

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin \theta_1 \\ y_1 = -l_1 \cos \theta_1 \\ x_2 = x_1 + l_2 \sin \theta_2 \\ y_2 = y_1 - l_2 \cos \theta_2 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 \\ \dot{y}_1 = \dot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1 \\ \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 \\ \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \sin \theta_2 \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\dot{\theta}_1^2 l_1 \sin \theta_1 + \ddot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 \\ \ddot{y}_1 = \dot{\theta}_1^2 l_1 \cos \theta_1 + \ddot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1 \\ \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 - \dot{\theta}_2^2 l_2 \sin \theta_2 + \ddot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 \\ \ddot{y}_2 = \ddot{y}_1 + \dot{\theta}_2^2 l_2 \cos \theta_2 + \ddot{\theta}_2 l_2 \sin \theta_2 \end{cases} \quad (4.9)$$

4.3.1 A Modelagem Newtoniana

Para modelar o problema do pêndulo duplo pela mecânica Newtoniana é necessário identificar as forças que atuam nas massas e suas direções. Essas forças podem ser vistas na Figura 4.3.

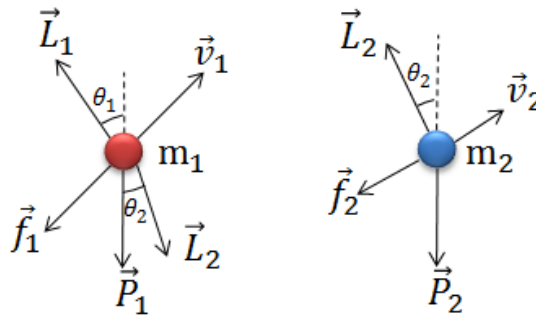


Figura 4.3 – Velocidades e forças atuantes sobre as massas do pêndulo duplo.

Na Figura 4.3, \vec{f}_n se refere às forças de atrito, \vec{L}_n se refere às forças de tração dos cabos, \vec{P}_n representa o peso das massas e \vec{v}_n a velocidade das mesmas. n é o índice que indica a massa em questão, e pode assumir os valores $n = 1$ ou $n = 2$.

Pela segunda lei de Newton, chega-se ao conjunto de Equações 4.10

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -L_1^x + L_2^x - f_1^x \\ m_1 \ddot{y}_1 = L_1^y - L_2^y - P_1 - f_1^y \\ m_2 \ddot{x}_2 = -L_2^x - f_2^x \\ m_2 \ddot{y}_2 = L_2^y - P_2 - f_2^y \end{cases} \quad (4.10)$$

onde as forças são dadas por $P_n = m_n g$, $f_n^x = c \dot{x}_n$ e $f_n^y = c \dot{y}_n$.

Utilizando os conjuntos de Equações 4.7 a 4.10 pode-se obter as Equações 4.11.

$$\begin{cases} m_1(-\dot{\theta}_1^2 l_1 \sin \theta_1 + \ddot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1) = -L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin \theta_2 - c \dot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 \\ m_1(\dot{\theta}_1^2 l_1 \cos \theta_1 + \ddot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1) = L_1 \cos \theta_1 - L_2 \cos \theta_2 - m_1 g - c \dot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1 \\ m_2(-\dot{\theta}_1^2 l_1 \sin \theta_1 + \ddot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_2^2 l_2 \sin \theta_2 + \ddot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2) = -L_2 \sin \theta_2 - c(\dot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2) \\ m_2(\dot{\theta}_1^2 l_1 \cos \theta_1 + \ddot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 l_2 \cos \theta_2 + \ddot{\theta}_2 l_2 \sin \theta_2) = L_2 \cos \theta_2 - m_2 g - c(\dot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \sin \theta_2) \end{cases} \quad (4.11)$$

O sistema dado pelas Equações 4.11 é composto por quatro equações e quatro incógnitas (L_1 , L_2 , θ_1 e θ_2). Resolvendo esse sistema é possível chegar nas equações que descrevem o comportamento do pêndulo duplo. Essas equações, por serem muito grandes, são apresentadas no Apêndice 1. Para resolver o sistema, foi utilizado o software Maple.

A fim de representar as equações que descrevem o comportamento oscilatório do pêndulo duplo por uma equação matricial, conforme o método apresentado na Seção 4.1, é necessário, primeiramente, linearizá-las. Para isso, utilizam-se as simplificações das funções trigonométricas para pequenos ângulos e a expansão em série de Taylor. As equações foram linearizadas ao redor de $\theta_1 = 0$, $\dot{\theta}_1 = 0$, $\ddot{\theta}_1 = 0$, $\theta_2 = 0$, $\dot{\theta}_2 = 0$ e $\ddot{\theta}_2 = 0$:

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g(m_1+m_2)}{l_1 m_1} \theta_1 + \frac{m_2 g}{l_1 m_1} \theta_2 - \frac{c}{m_1} \dot{\theta}_1, \quad (4.12)$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g(m_1+m_2)}{l_2 m_1} \theta_1 - \frac{g(m_1+m_2)}{l_2 m_1} \theta_2 - \frac{c l_1 (m_1 - m_2)}{l_2 m_2 m_1} \dot{\theta}_1 - \frac{c}{m_2} \dot{\theta}_2. \quad (4.13)$$

As Equações linearizadas 4.12 e 4.13 podem ser representadas em espaço de estados pela Equação matricial 4.14

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{g(m_1+m_2)}{l_1 m_1} & \frac{m_2 g}{l_1 m_1} & -\frac{c}{m_1} & 0 \\ -\frac{g(m_1+m_2)}{l_2 m_1} & -\frac{g(m_1+m_2)}{l_2 m_1} & -\frac{c l_1 (m_1 - m_2)}{l_2 m_2 m_1} & -\frac{c}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Através da Equação 4.14 obtêm-se os deslocamentos, velocidades e acelerações angulares de ambas as massas do pêndulo duplo. Utilizando-se os sistemas de Equações 4.7, 4.8 e 4.9 é possível obter essas mesmas grandezas nas direções x e y .

4.3.2 A Modelagem Lagrangeana

A fim de verificar a validade da modelagem Newtoniana, foi realizada uma comparação com os resultados obtidos pela modelagem do sistema através da mecânica Lagrangeana, comumente encontrada na literatura [Stroup, 2004; Von Herrath e Mandell, 2000]. No entanto, nas referências encontradas é modelado apenas o problema não-dissipativo, ou seja, sem os termos relacionados ao atrito. Os principais passos do equacionamento são descritos a seguir.

Inicialmente, define-se a função Lagrangeana, dada pela Equação 4.15

$$L \equiv K - U. \quad (4.15)$$

onde $K = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$ é a energia cinética do sistema, e $U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2$ é a energia potencial.

Para sistemas conservativos, a equação diferencial de Lagrange é dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_n} = 0. \quad (4.16)$$

Resolvendo-se a Equação 4.16 para $\theta_n = \theta_1$ e, posteriormente, para $\theta_n = \theta_2$, é possível determinar as expressões que descrevem o comportamento dinâmico do pêndulo duplo, representadas pelas Equações 4.17 e 4.18, onde $\rho = \theta_1 - \theta_2$ e $M = m_1 + m_2$.

$$\dot{\theta}_1 = \frac{1}{l_1 (M - m_2 \cos^2 \rho)} \left(-m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \rho \sin \rho - m_2 g \cos \rho \sin \theta_2 - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \rho - g M \sin \theta_1 \right) \quad (4.17)$$

e

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{l_2(m_1+m_2 \sin^2 \rho)} \left(m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \rho \sin \rho - Mg \sin \theta_2 + M l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \rho + gM \sin \theta_1 \cos \rho \right). \quad (4.18)$$

5. RESULTADOS

As equações que descrevem o comportamento dos sistemas pendulares simples e duplo foram implementadas em Matlab. Para a solução das equações não-lineares foi utilizado o comando ODE45, que utiliza o método de Runge-Kutta para resolver sistemas de equações ordinárias de primeira ordem. Os problemas foram implementados em um computador com processador Intel Core i3, 2.4 GHz.

Inicialmente, investigou-se a validade da modelagem Newtoniana para o pêndulo duplo, através de uma comparação de resultados com os obtidos pela modelagem Lagrangeana. Em seguida, foram feitas algumas simulações para validar os modelos linearizados, comparando os resultados com os obtidos pelos modelos não-lineares. Finalmente, foram realizados diferentes testes comparando os sistemas pendulares simples e duplo.

5.1 Comparação entre a Modelagem por Mecânica Newtoniana e Lagrangeana

Para avaliar a fidelidade da modelagem Newtoniana, foi realizada uma comparação de resultados com a modelagem Lagrangeana. Na Figura 5.1 são apresentados os resultados para o deslocamento das massas do pêndulo duplo para ambas as modelagens. Os parâmetros utilizados na simulação foram: $m_1 = 2,5 \text{ kg}$, $m_2 = 10 \text{ kg}$, $l_1 = 15 \text{ m}$, $l_2 = 3 \text{ m}$, $c = 0 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}}$. A condição inicial imposta foi $\theta_{1_0} = 0 \text{ rad}$ e $\theta_{2_0} = 0,1 \text{ rad}$. Embora esses valores não representem um sistema de elevadores, eles foram escolhidos de forma a facilitar a visualização da sobreposição das curvas na Figura 5.1.

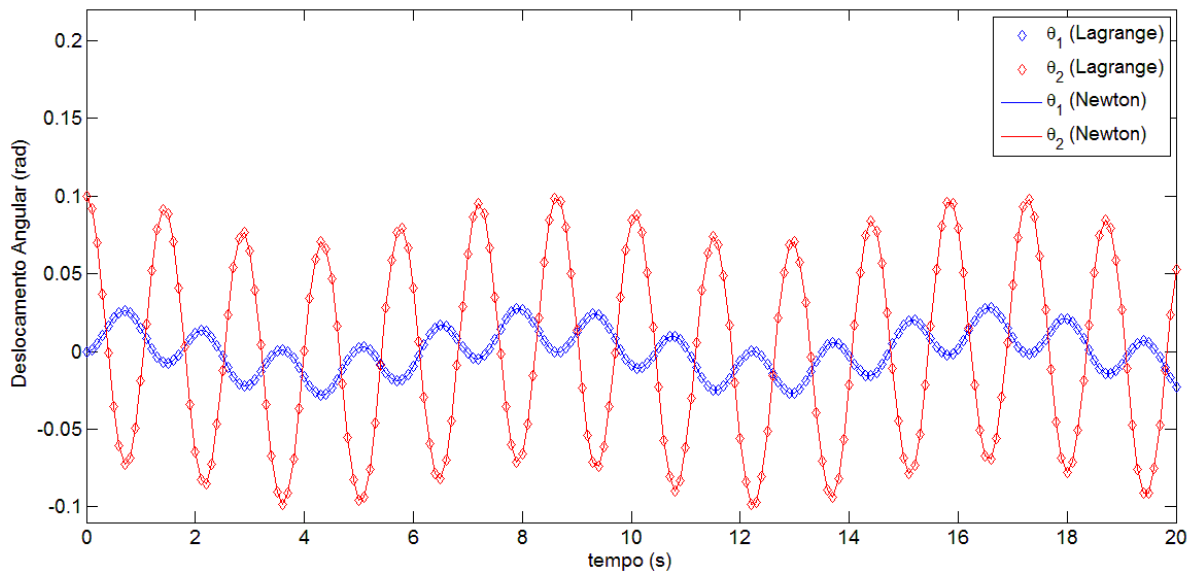


Figura 5.1 – Comparação entre os resultados apresentados para a modelagem Newtoniana e Lagrangeana do pêndulo duplo.

Analisando os valores, ponto a ponto, verifica-se que a modelagem Lagrangeana e Newtoniana apresentam 100% de concordância. Uma tabela resumida é apresentada no Apêndice 2.

5.2 Comparação entre a Modelagem Linear e Não-linear

Uma vez verificada a validade da modelagem não-linear do pêndulo duplo por mecânica Newtoniana, foram, então, analisados os erros resultantes da linearização das equações.

Na Figura 5.2 é traçado de forma sobreposta os resultados para o deslocamento angular das massas utilizando-se as equações não-linearizadas e as equações linearizadas para a condição inicial de $\theta_{1_0} = 0,05 \text{ rad}$ e $\theta_{2_0} = 0 \text{ rad}$. Os parâmetros utilizados na simulação foram $m_1 = 2,5 \text{ kg}$, $m_2 = 5 \text{ kg}$, $l_1 = 7 \text{ m}$, $l_2 = 3 \text{ m}$, $c = 1 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}}$. Da mesma forma que no exemplo anterior, esses valores foram escolhidos de forma a facilitar a visualização das frequências das massas na Figura 5.2, assim como o amortecimento das mesmas ao longo do tempo.

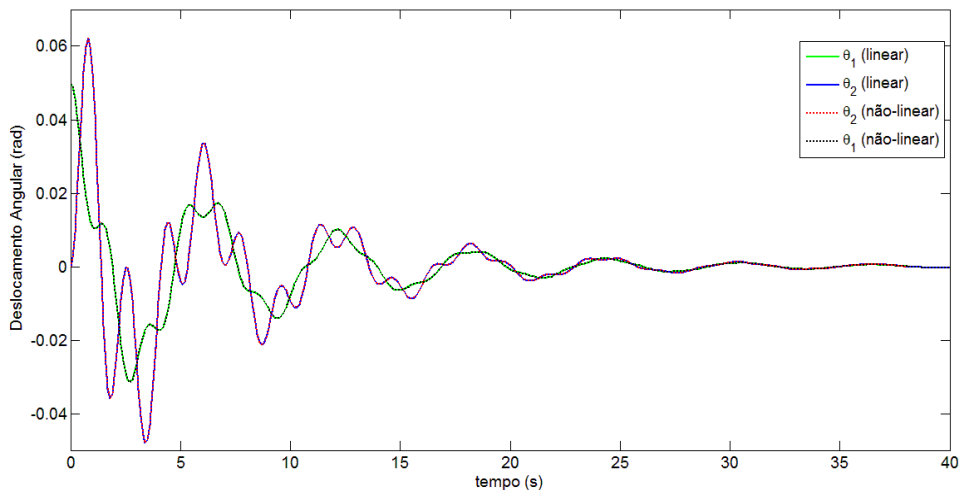


Figura 5.2 – Sobreposição dos resultados para os deslocamentos angulares para as equações não-lineares e linearizadas.

Apesar da boa concordância entre as modelagens linear e não-linear (Figura 5.2), devido ao método utilizado para linearizar as equações, espera-se que quanto maiores forem os deslocamentos angulares, maiores sejam os erros. Na Figura 5.3, pode-se verificar o $Erro_{RMS}$ obtido para os deslocamentos do pêndulo duplo em função das condições iniciais de deslocamento angular, tanto para θ_1 quanto para θ_2 (utilizando-se os mesmos parâmetros do exemplo da Figura 5.2). Para calcular o $Erro_{RMS}$ foram utilizados os erros entre a modelagem linearizada e a não-linear a cada 0,1 s até a estabilização do sistema devido ao amortecimento viscoso.

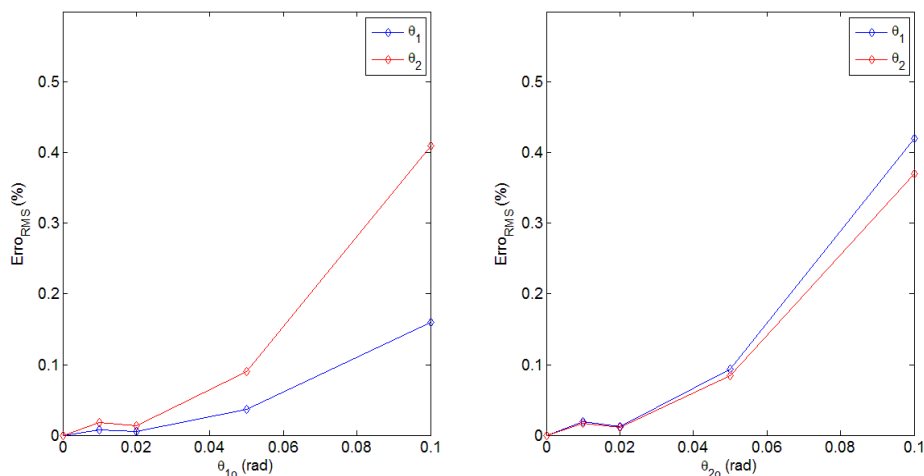


Figura 5.3 - $Erro_{RMS}$ entre a modelagem linear e não-linear para os deslocamentos angulares em função das condições iniciais θ_{1_0} e θ_{2_0} .

É possível verificar, conforme o previsto, que os erros aumentam significativamente com o aumento da condição inicial de deslocamento angular. No entanto, pode-se notar que, para deslocamentos angulares de até $0,1 \text{ rad}$, os erros não ultrapassam $0,5\%$. Considerando que os deslocamentos laterais dos elevadores nunca ultrapassam 1 cm , e que a cabine desses possui uma altura de aproximadamente $2,5 \text{ m}$, é possível verificar que os deslocamentos angulares que ocorrem nos elevadores ficam bastante abaixo de $0,1 \text{ rad}$ ($5,73^\circ$). Dessa forma, pode-se afirmar que a modelagem linear representa uma aproximação adequada para as equações não-lineares que descrevem o comportamento do pêndulo duplo. No Apêndice 3, é apresentada a tabela resumida com os valores dos erros para θ_1 .

5.3 Comparação entre a Modelagem por Pêndulo Simples e Duplo

Nessa seção, inicialmente, são definidos os parâmetros a serem utilizados nas simulações. Em seguida, apresenta-se diversos resultados comparativos da dinâmica lateral da cabine modelada através de sistemas pendulares simples e duplo. Nas simulações apresentadas, são variadas as condições iniciais de deslocamento da cabine, assim como a relação entre o comprimento do cabo de suspensão (l_1) e a altura da mesma (l_2).

5.3.1 Determinação dos Parâmetros das Simulações

Para modelar o problema do elevador, iniciou-se definindo os parâmetros a serem utilizados. Os parâmetros de massa e dimensões da cabine foram baseados em fichas técnicas de elevadores utilizados em prédios comerciais e na dissertação de López, 2007. O comprimento do cabo utilizado tem o objetivo de simular um elevador de um arranha-céu. Devido à dificuldade de determinar os atritos entre os componentes dos elevadores, que foge ao escopo desse trabalho, foi utilizado apenas o coeficiente de amortecimento viscoso natural da cabine [Chen e Zhu, 2004]. Abaixo os dados do problema são listados:

- massa da cabine: $M_c = 1200 \text{ kg}$;
- massa dos passageiros: $M_p = 700 \text{ kg}$ (equivalente a 10 passageiros);
- dimensões da cabine: $a = b = 2,5 \text{ m}$ e $h = 3,0 \text{ m}$;
- comprimento do cabo: $l_c = 250 \text{ m}$;
- coeficiente de amortecimento viscoso natural: $c = 0,0375 \frac{\text{Nm}}{\text{s}}$.

Esses parâmetros foram adequados de forma a permitir a modelagem pelos sistemas pendulares. Para o pêndulo simples, toda a massa foi considerada concentrada no fundo da cabine, devido aos passageiros. Dessa forma utilizou-se $m = 1900 \text{ kg}$, $l = 253 \text{ m}$. Para o pêndulo duplo, a massa da cabine foi dividida de forma a simular o momento de inércia da mesma em relação ao eixo que a prende ao cabo de suspensão (eixo A na Figura 5.4).

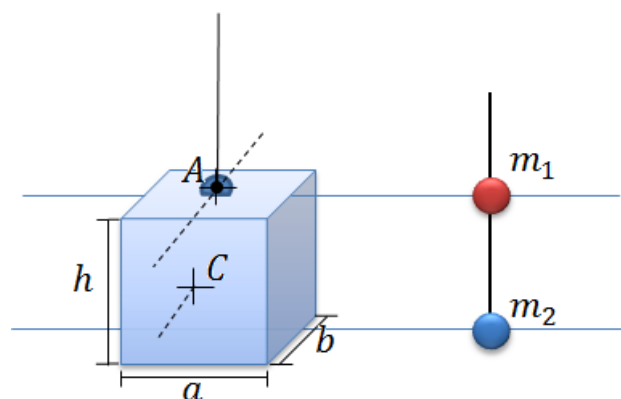


Figura 5.4 – Desenho esquemático do problema para determinação do momento de inércia.

Dessa forma, para a modelagem do pêndulo duplo foram considerados os seguintes parâmetros: $m_1 = 730,55 \text{ kg}$, $m_2 = 1169,45 \text{ kg}$, $l_1 = 250 \text{ m}$ e $l_2 = 3 \text{ m}$. Um procedimento detalhado de determinação dos valores dessas massas é apresentado no Apêndice 4.

5.3.2 Comparação entre o Comportamento Dinâmico para Diferentes Condições Iniciais de Deslocamento da Cabine

A primeira simulação foi realizada para comparar o comportamento dos pêndulos para a condição inicial de $x_0 = 0,01 \text{ m}$ (pêndulo simples) e $x_{1_0} = 0,01 \text{ m}$, $x_{2_0} = 0 \text{ m}$ (pêndulo duplo). Na Figura 5.5 são apresentados os deslocamentos horizontais das massas ao longo do tempo, enquanto que na Figura 5.6 são apresentadas as componentes horizontais da velocidade e aceleração.

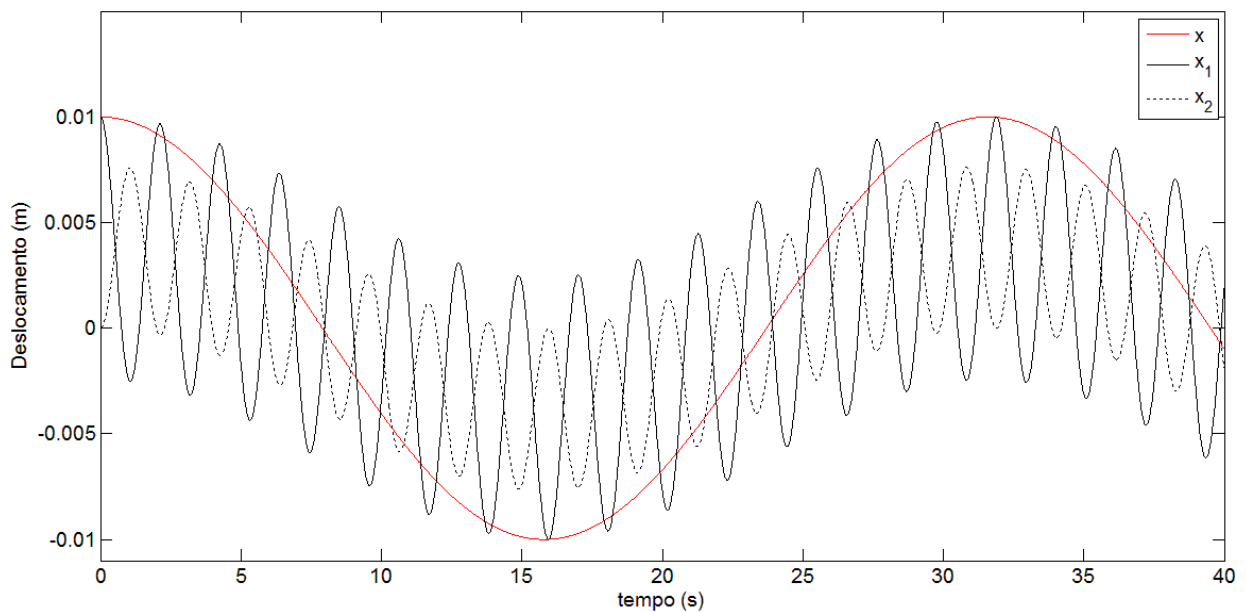


Figura 5.5 – Comparação entre os deslocamentos horizontais dos sistemas pendulares simples e duplo para condições iniciais de $x_0 = 0,01 \text{ m}$, $x_{1_0} = 0,01 \text{ m}$ e $x_{2_0} = 0 \text{ m}$.

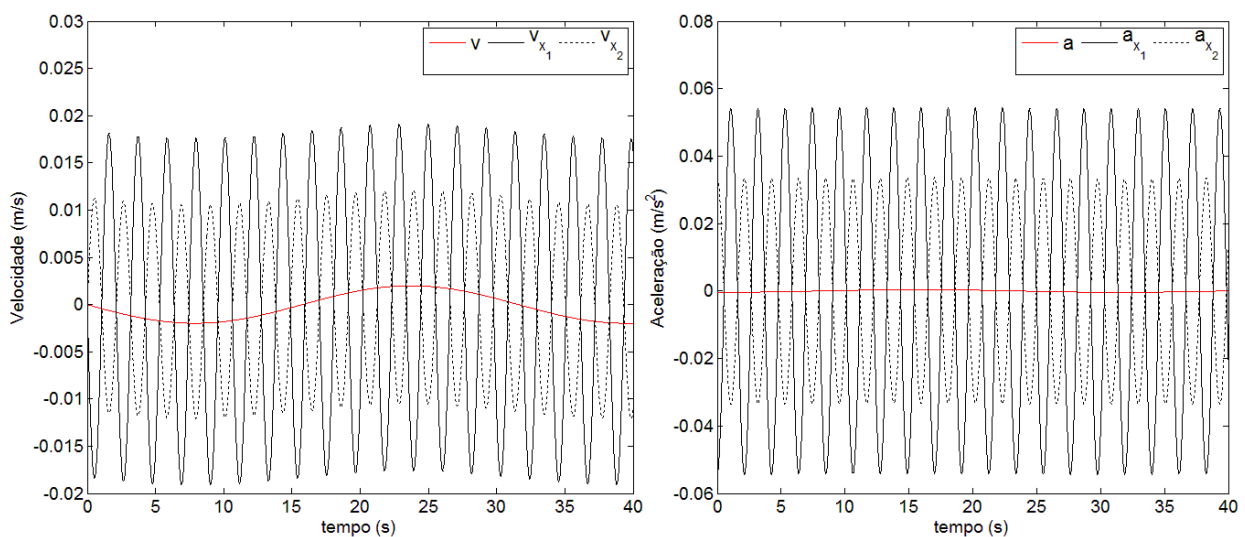


Figura 5.6 – Comparação entre as velocidades e acelerações horizontais dos sistemas pendulares simples e duplo para condições iniciais de $x_0 = 0,01 \text{ m}$, $x_{1_0} = 0,01 \text{ m}$ e $x_{2_0} = 0 \text{ m}$.

Na Figura 5.7, é apresentada, novamente, a componente horizontal dos deslocamentos, e, na Figura 5.8, a velocidade e aceleração das massas do pêndulo duplo, agora para uma condição inicial de $x_0 = 0,01 \text{ m}$, $x_{1_0} = 0 \text{ m}$ e $x_{2_0} = 0,01 \text{ m}$.

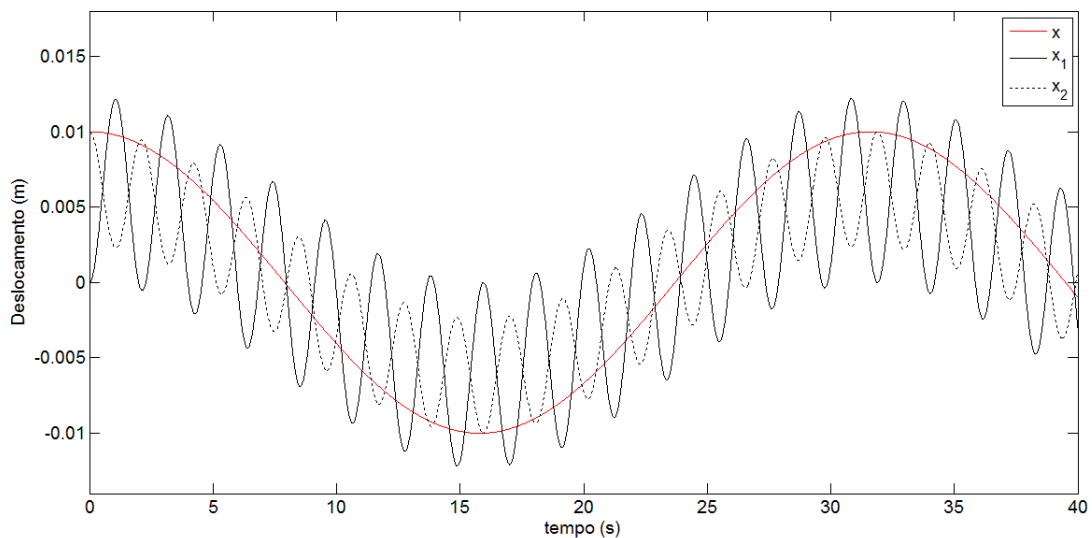


Figura 5.7 – Comparação entre os deslocamentos horizontais dos sistemas pendulares simples e duplo para condições iniciais de $x_0 = 0,01 \text{ m}$, $x_{1_0} = 0 \text{ m}$ e $x_{2_0} = 0,01 \text{ m}$.

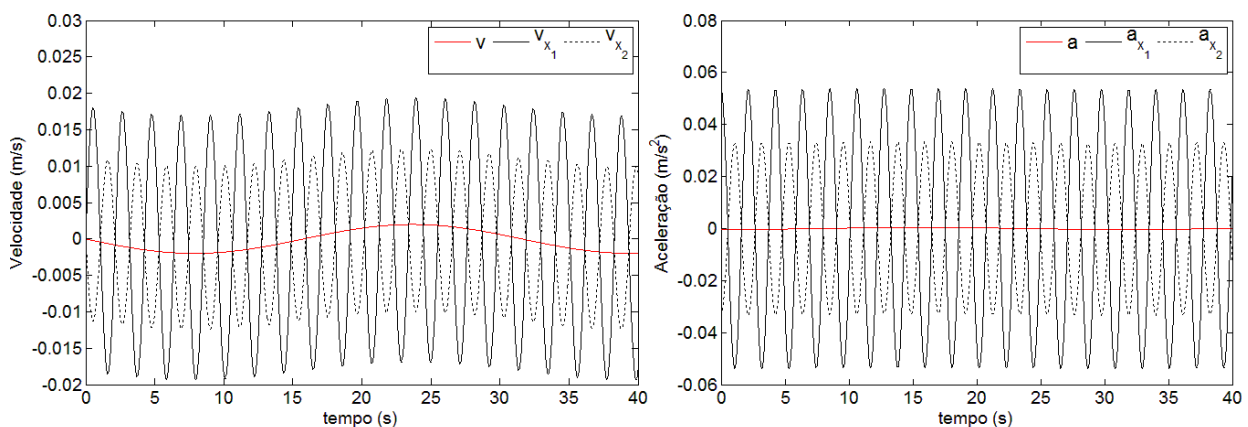


Figura 5.8 – Comparação entre as velocidades e acelerações horizontais dos sistemas pendulares simples e duplo para condições iniciais de $x_0 = 0,01 \text{ m}$, $x_{1_0} = 0 \text{ m}$ e $x_{2_0} = 0,01 \text{ m}$.

Nota-se que mesmo para grandes razões de $\frac{l_1}{l_2}$ ($\cong 83$), ao se aplicarem condições iniciais distintas nas massas do pêndulo duplo, a diferença entre os comportamentos dos sistemas pendulares é bastante significativa. Enquanto o pêndulo simples possui apenas uma frequência de vibração (ω), o pêndulo duplo possui duas: uma pequena, que será denominada ω_1 , similar a ω , e outra grande, que será indicada por ω_2 . Esse fenômeno deve-se à rotação da cabine do elevador ao redor do eixo que a prende ao cabo de suspensão, representado pelo pêndulo duplo como o deslocamento relativo de m_2 em relação à m_1 .

É importante ressaltar que devido a essa frequência maior de vibração, ω_2 , as velocidades e acelerações apresentadas pelas massas do pêndulo duplo são muito maiores do que as apresentadas pelo pêndulo simples, chegando a ser, aproximadamente, 10 vezes maiores para as velocidades e 100 vezes para a aceleração. A manutenção de níveis baixos de aceleração é de grande relevância para o conforto dos passageiros. Apesar da norma ASCE 21-98, citada por López, 2007, aceitar um nível de aceleração horizontal de $0,1 g$ ($\cong 1 \text{ m/s}^2$), em elevadores de alta performance as suspensões são projetadas para que as

acelerações não ultrapassem $0,01 g (\cong 0,1 m/s^2)$ [Chen e Zhu, 2004]. Verifica-se, assim, que somente a modelagem por pêndulo duplo é capaz de apontar acelerações maiores que as sugeridas por Chen e Zhu, 2004.

Se forem aplicados, no entanto, o mesmo deslocamento em ambas as massas do pêndulo duplo, o comportamento dos dois sistemas pendulares se aproxima. Na Figura 5.9 é apresentada a componente horizontal do deslocamento para $x_0 = x_{1_0} = x_{2_0} = 0,01 m$. Isso ocorre, pois, ao aplicarmos condições iniciais semelhantes em ambas as massas, o deslocamento relativo entre elas diminui. Essa condição representaria um deslocamento homogêneo da cabine em toda sua extensão, o que na prática dificilmente ocorre. No entanto, ao serem analisadas as velocidades e acelerações é possível perceber, ainda, diferenças significativas entre as modelagens. Isso pode ser visto na Figura 5.10.

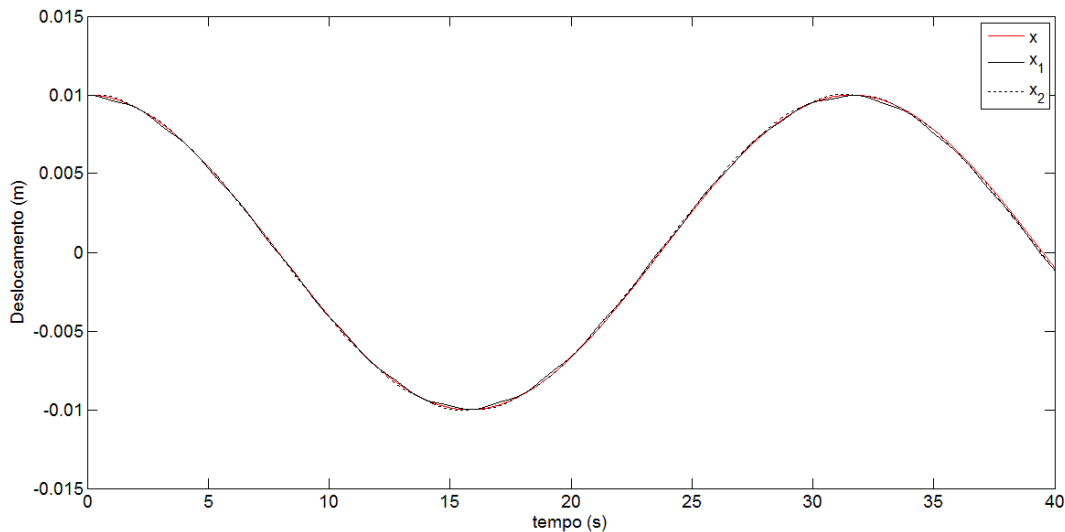


Figura 5.9 – Comparação entre os deslocamentos horizontais dos sistemas pendulares simples e duplo para condições iniciais de $x_0 = 0,01 m$, $x_{1_0} = 0,01 m$ e $x_{2_0} = 0,01 m$.

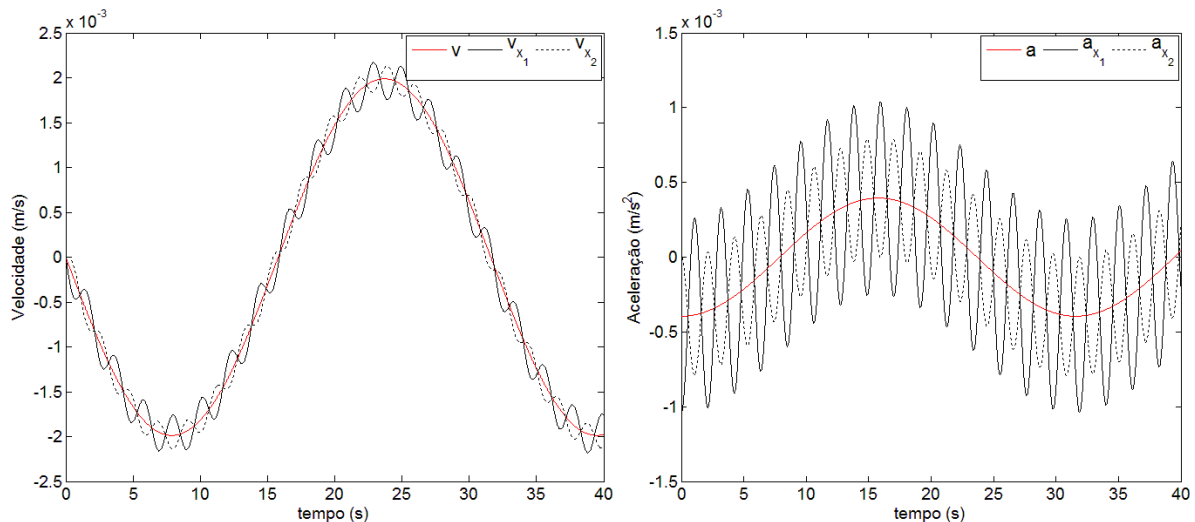


Figura 5.10 – Comparação entre as velocidades e acelerações horizontais dos sistemas pendulares simples e duplo para condições iniciais de $x_0 = 0,01 m$, $x_{1_0} = 0,01 m$ e $x_{2_0} = 0,01 m$.

É interessante perceber a significativa redução dos valores de velocidade e aceleração das massas do pêndulo duplo, ao serem aplicadas as condições homogêneas de deslocamento inicial. Comparando-se a Figura 5.10 com as Figuras 5.6 e 5.8, é possível perceber uma redução de aproximadamente 8 vezes das velocidades e 60 vezes das acelerações.

5.3.3 Comparação entre o Comportamento Dinâmico para Diferentes Razões de l_1/l_2

Ao reduzir-se a razão l_1/l_2 , a oscilação relativa entre as massas do pêndulo duplo volta a ser significativa, mesmo mantendo-se as condições de deslocamento inicial semelhantes em ambas as massas. Na Figura 5.11, pode-se ver os resultados para o deslocamento horizontal das massas considerando-se $l_1 = 24\text{ m}$ e $l_2 = 3\text{ m}$ para o pêndulo duplo, e $l = l_1 + l_2 = 27\text{ m}$, para o pêndulo simples. As condições iniciais mantêm-se $x_0 = x_{1_0} = x_{2_0} = 0,01\text{ m}$. Essa situação ocorre tanto em elevadores de arranha-céus que se encontram em andares mais elevados, como em prédios residenciais de altura média.

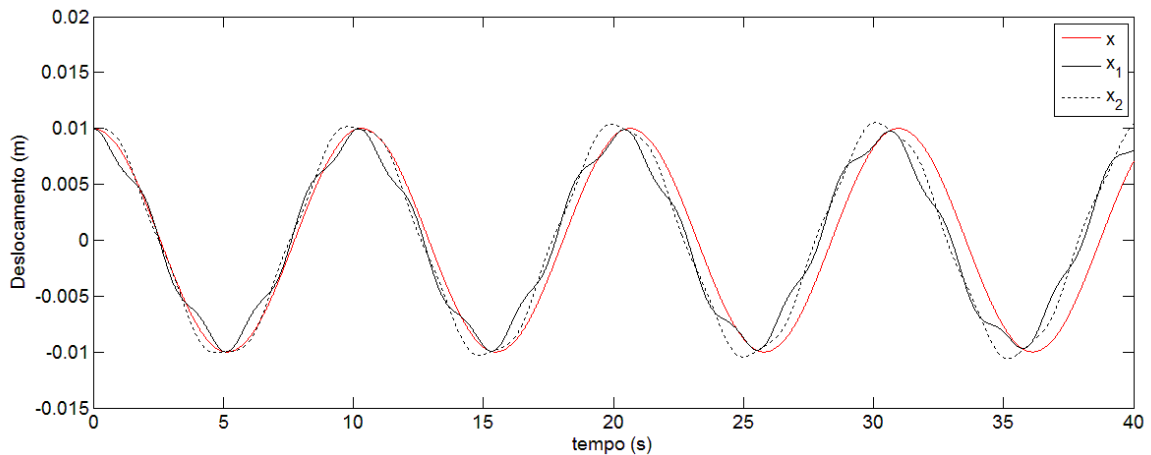


Figura 5.11 – Comparação entre os deslocamentos horizontais dos sistemas pendulares simples e duplo para $l = 27\text{ m}$, $l_1 = 24\text{ m}$, $l_2 = 3\text{ m}$.

No caso do projeto “Bancada Experimental para o Desenvolvimento de Algoritmos Controladores de Sistemas de Suspensão Ativa para Elevadores”, onde o cabo apresenta apenas 3 m de comprimento e a cabine, $1,5\text{ m}$, a diferença entre o comportamento dos dois sistemas torna-se bastante significativa. Esse caso é apresentado pela Figura 5.12.

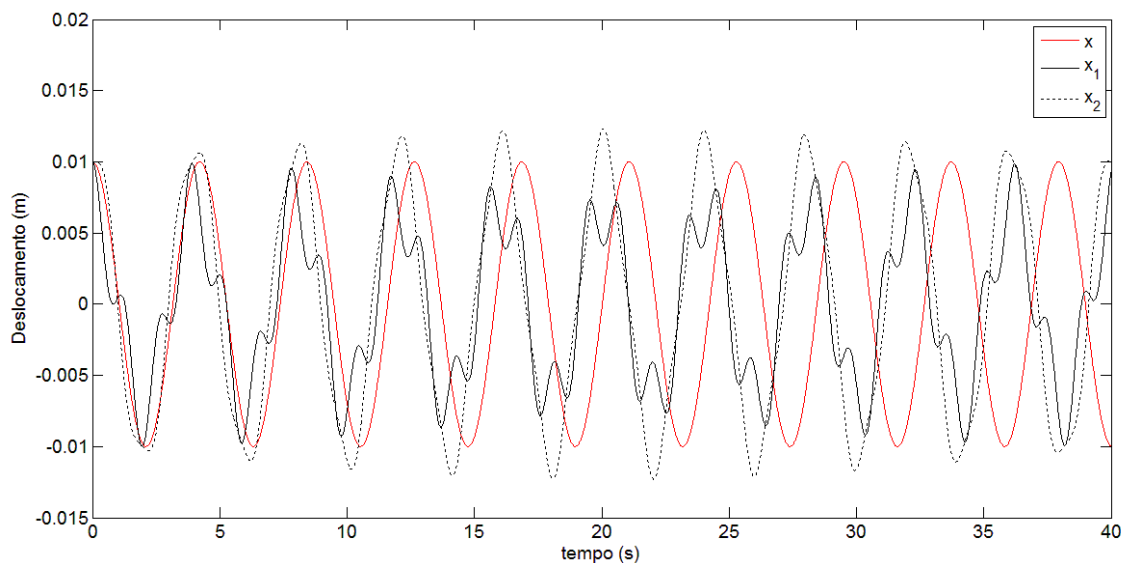


Figura 5.12 – Comparação entre os deslocamentos horizontais dos sistemas pendulares simples e duplo para $l = 4,5\text{ m}$, $l_1 = 3\text{ m}$ e $l_2 = 1,5\text{ m}$.

A comparação dos resultados das velocidades e acelerações para essa mesma situação pode ser vista na Figura 5.13.

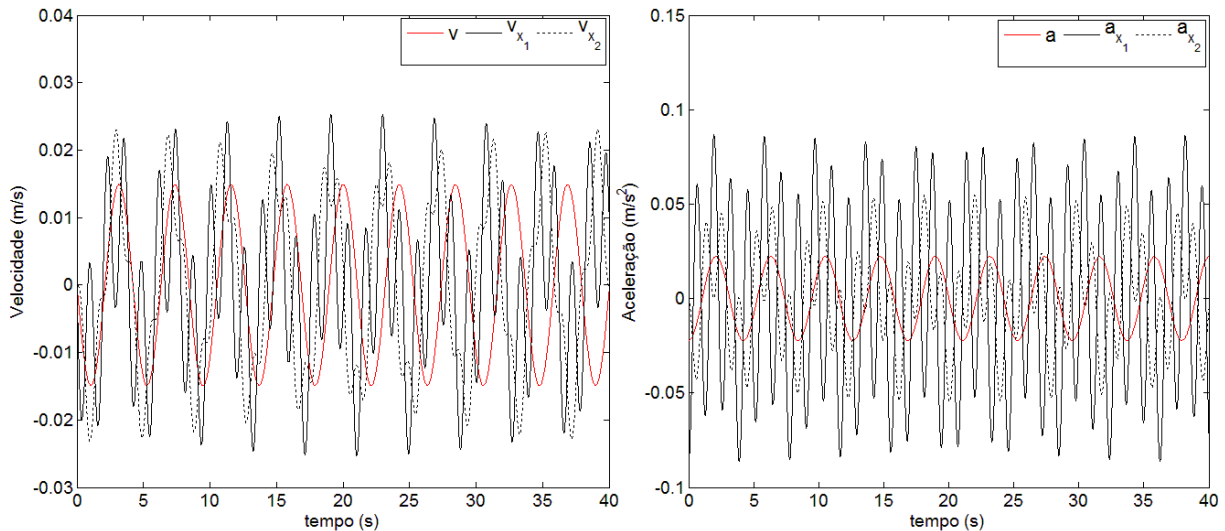


Figura 5.13 – Comparação entre as velocidades e acelerações horizontais dos sistemas pendulares simples e duplo para $l = 4,5 m$, $l_1 = 3 m$ e $l_2 = 1,5 m$.

É interessante observar que como l_1 passa a ser significativamente menor que l , a frequência ω_1 torna-se maior que ω . Dessa forma, o pêndulo duplo torna-se mais acelerado que o pêndulo simples.

Pelos resultados obtidos anteriormente, é de se esperar que a pior situação, ou seja, a situação de maior disparidade entre o comportamento do pêndulo simples e do pêndulo duplo seja obtida quando se utiliza uma razão pequena de $\frac{l_1}{l_2}$, e condições iniciais de deslocamento distintas para as massas do pêndulo duplo. Esta situação pode ser vista na Figura 5.14, que apresenta os deslocamentos horizontais das massas para $l = 4,5 m$, $x_0 = 0,01 m$ (pêndulo simples), e $l_1 = 3 m$, $l_2 = 1,5 m$, $x_{1_0} = 0 m$ e $x_{2_0} = 0,01 m$ (pêndulo duplo).

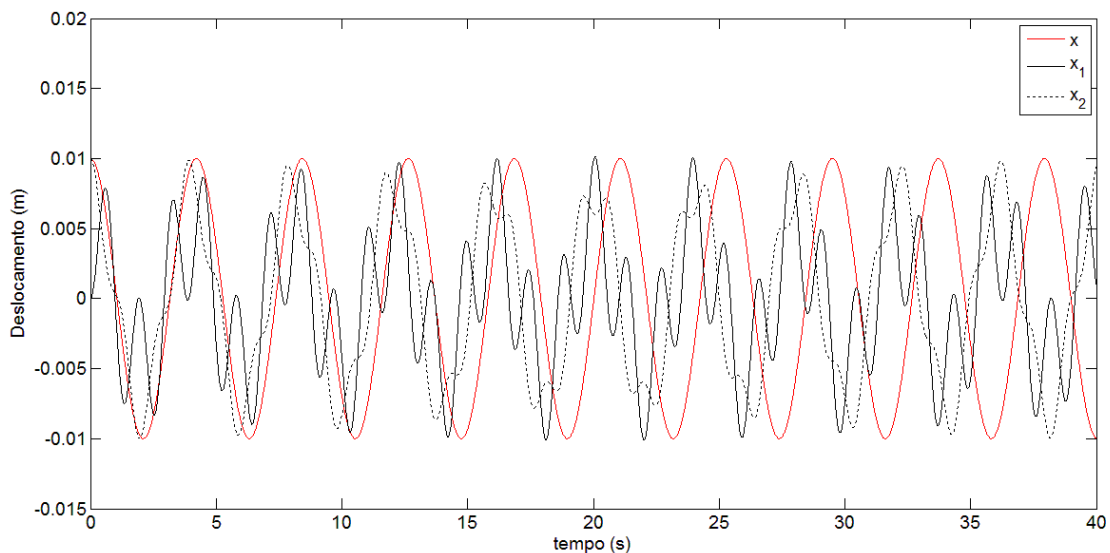


Figura 5.14 – Comparação entre os deslocamentos horizontais dos sistemas pendulares para $l = 4,5 m$, $x_0 = 0,01 m$ (pêndulo simples) e $l_1 = 3 m$, $l_2 = 1,5 m$, $x_{1_0} = 0 m$ e $x_{2_0} = 0,01 m$ (pêndulo duplo).

Na Figura 5.14, é possível verificar tanto a presença da frequência ω_2 , evidenciada nas Figuras 5.5 e 5.7, como o adiantamento do pêndulo duplo em relação ao pêndulo simples, verificado na Figura 5.12. Ou seja, nesse caso há a sobreposição de ambos os efeitos.

6. CONCLUSÕES

A modelagem de elevadores por pêndulo duplo permite a análise de alguns fenômenos importantes que a modelagem por pêndulo simples é incapaz de reproduzir. Dois desses casos são:

1. Situações em que as condições de deslocamento inicial não são homogêneas ao longo da cabine.
2. Problemas em que a altura da cabine não pode ser desprezada em relação ao comprimento do cabo.

O primeiro caso é bastante importante, pois retrata a grande maioria das situações reais. Essa condição provoca a oscilação da cabine ao redor do eixo que a prende ao cabo de suspensão, ou seja, o surgimento de uma oscilação relativa entre as massas do pêndulo duplo, conforme apresentado nas Figuras 5.5 e 5.7. Essa oscilação apresenta elevada frequência (ω_2), provocando velocidades e acelerações significativas que não podem ser desconsideradas no estudo do conforto dos passageiros. O segundo caso ganha importância a medida que o elevador ascende e o comprimento do cabo de suspensão diminui. Nessas situações, a influência das oscilações relativas entre as massas, assim como no primeiro caso, torna-se bastante significativa.

7. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Durante o desenvolvimento do trabalho verificou-se algumas melhorias que poderiam ser implementadas em trabalhos futuros. Uma das possibilidades seria a consideração explícita da variação do comprimento do cabo com o tempo. Essa melhoria tornaria o problema mais realista, permitindo a simulação da dinâmica lateral da cabine durante todo o movimento de ascensão do elevador.

Outra possibilidade de melhoria desse trabalho seria, ainda, a inclusão de forças externas atuando nas massas do pêndulo de forma a simular as molas do sistema de suspensão.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cao G., Zhu Z., Peng W., “**Coupled Vibration of roist rope with complicated operating condition**”, 2nd International Conference on Computer Engineering and Technology, Chengdu, China, 2010

Chen Y., Zhu W., “**Dynamics and Control of Elevator System**”, Under Graduate Poster Competition, Mechanical Engineering Department, University of Maryland Baltimore County, 2004

Franklin G. F., Powell J. D., Emami-Naeini A., “**Feedback Control of Dynamic System**”, Addison-Wesley Publishing Company, 3rd Edition, 1995

Hibbeler R. C. “**Dinâmica: Mecânica para Engenharia**”, Prentice Hall do Brasil, 10^a Edição, vol. 2, 2005

Istif I., Sagirli A., Kutlu K., “**Bond Graph Modeling and Position Control of an Electrohydraulic Elevator**”, Proceedings of ESDA2002: 6th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis, Istanbul, Turkey, 2002

López, S. M. R. “**Desenvolvimento de um Sistema de Controle para Suspensões Ativas de Elevadores de Alto Desempenho**”, Dissertação de Mestrado, Programa de pós-graduação em engenharia mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, Brasil, 2007

Meirovitch L., “**Methods of Analytical Dynamics**”, McGraw-Hill Book Company, 1988

Ogata, K., “**Engenharia de Controle Moderno**”, Prentice Hall do Brasil, 1985

Schneider P., Huck E., Schwarz P., “**A Modeling Approach for Mechatronic Systems – Modeling and Simulation of an Elevator System**”, XI Intern Symposium in Theoretical Electrical Engineering, Linz, Austria, 2001

Sha D., Bajic V., Yang H., “**New Model and Sliding Mode Control of Hydraulic Elevator Velocity Tracking System**”, Simulation Practice and Theory 9, pp. 365-385, 2001

Stroup A., “**The Dynamics of Pendula: An Introduction to Hamiltonian Systems and Chaos**”, Research Project Completion Report, California Institute of Technology, 2004 site: “<http://people.maths.ox.ac.uk/porterm/research/exp2.pdf>”. Acesso: 29/08/2010

Von Herrath, F., Mandell, S., “**The Double Pendulum Problem**”, Project Completion Report, College of the Redwoods, 2000, site: “<http://online.redwoods.cc.ca.us/instruct/darnold/deproj/Sp00/FranScott/finalpaper.pdf>”. Acesso: 29/08/2010

Zhu W. D., Xu G. Y., “**Vibration of Elevator Cables with Small Bending Stiffness**”, Journal of Sound and Vibration 263, pp. 679-699, 2003

APÊNDICE 1

As Equações A1.1 e A1.2 representam as equações não-lineares, obtidas através da mecânica Newtoniana, que descrevem o comportamento do pêndulo duplo.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2} \theta_1(x) = & \left(- \left(-m_1 g - C \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1 \sin(\theta_1) \right) l_2 \sin(\theta_1) l_1 \sin(\theta_2) \right. \\
& - \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) m_2 l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 l_1^2 \sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)^2 \cos(\theta_1) l_1 m_2 l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right)^2 \\
& + \left(\sin(\theta_2) \cos(\theta_1) l_1 m_2 l_2^2 \right. \\
& \left(\cos(\theta_2) m_2 \cos(\theta_1) l_2 \sin(\theta_1) m_1 g l_1 - \sin(\theta_2) l_1 m_2 g l_2 \cos(\theta_1)^2 m_1 \right. \\
& - \sin(\theta_2) l_1 m_2^2 g l_2 \cos(\theta_1)^2 + l_1 m_2^2 g l_2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) \\
& + m_2 \sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \cos(\theta_1)^2 C \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 l_2 \\
& + \cos(\theta_2) m_2 l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 l_1^2 \sin(\theta_1)^3 m_1 \\
& + \cos(\theta_2) m_2 l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 l_1^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1)^2 m_1 \\
& + \cos(\theta_2) m_2 \cos(\theta_1) l_2 \sin(\theta_1)^2 C \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 \\
& - \cos(\theta_2) m_2^2 \cos(\theta_1)^2 \sin(\theta_2) l_1 l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right)^2 \\
& + \cos(\theta_2) m_2 \cos(\theta_1)^3 C \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 l_2 \\
& + \cos(\theta_2)^2 m_2^2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_1) l_1 l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right)^2 \\
& - \cos(\theta_2) C l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 \cos(\theta_1(x)) m_1 \sin(\theta_1)^2 \\
& - \cos(\theta_2) C l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 \cos(\theta_1(x)) \cos(\theta_1)^2 m_1 \\
& - C l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) \cos(\theta_2)^2 l_1 m_1 \sin(\theta_1)^2 - C l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) \cos(\theta_2)^2 l_1 \cos(\theta_1)^2 m_1 \\
& + m_2^2 \sin(\theta_1)^3 \cos(\theta_2) l_1^2 l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 \\
& + m_2 \sin(\theta_2) \sin(\theta_1)^3 l_2 C \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 - m_2^2 \sin(\theta_2) \sin(\theta_1)^2 \cos(\theta_1) l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 l_1^2 \\
& - m_2^2 \sin(\theta_2)^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) l_1 l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right)^2 \\
& + m_2 \sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) C l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 \cos(\theta_1(x)) \\
& + m_2 \sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) l_1 C l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) \cos(\theta_2) \\
& + m_2^2 \sin(\theta_2) \sin(\theta_1)^2 \cos(\theta_2) l_1 l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right)^2 \\
& \left. - m_2 \sin(\theta_1)^2 \cos(\theta_2) l_1^2 C l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) \cos(\theta_1(x)) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -m_2 \sin(\theta_1)^2 \cos(\theta_2)^2 l_1 C l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) - \sin(\theta_2) l_1 C \left(\left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1 \sin(\theta_1(x)) \right) \\
& + \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) l_2 \sin(\theta_2) \left(l_2 m_1 \sin(\theta_1)^2 - \sin(\theta_2) l_1 C \left(\left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1 \sin(\theta_1(x)) \right) \right) \\
& + \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) l_2 \sin(\theta_2) \left(l_2 \cos(\theta_1)^2 m_1 - \sin(\theta_2) l_1 C \left(\left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1 \sin(\theta_1(x)) \right) \right) \\
& + \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) l_2 \sin(\theta_2) \left(l_2 \cos(\theta_1)^2 m_2 + l_1 C \left(\left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1 \sin(\theta_1(x)) \right) \right) \\
& + \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) l_2 \sin(\theta_2) \left(l_2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) m_2 \cos(\theta_1) \right) \\
& - m_2 \sin(\theta_2) l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 l_1^2 \cos(\theta_1) m_1 \sin(\theta_1)^2 \\
& - m_2 \sin(\theta_2) l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 l_1^2 \cos(\theta_1)^3 m_1 - m_2^2 \sin(\theta_2) l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 l_1^2 \cos(\theta_1)^3 \\
& + m_2^2 l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 l_1^2 \cos(\theta_1)^2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \Big/ \left(-2 m_2^2 \sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \right. \\
& \left. \cos(\theta_1) l_1 l_2^2 \cos(\theta_2) + l_1 l_2^2 m_2 m_1 \sin(\theta_1)^2 \sin(\theta_2)^2 + l_1 l_2^2 m_2 m_1 \sin(\theta_1)^2 \cos(\theta_2)^2 \right. \\
& \left. + l_1 l_2^2 m_2 \sin(\theta_2)^2 \cos(\theta_1)^2 m_1 + l_1 l_2^2 m_2 \cos(\theta_1)^2 m_1 \cos(\theta_2)^2 + l_1 l_2^2 m_2^2 \sin(\theta_2)^2 \cos(\theta_1)^2 \right. \\
& \left. + m_2^2 \sin(\theta_1)^2 \cos(\theta_2)^2 l_1 l_2^2 \right) + \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) C l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 \cos(\theta_1(x)) \\
& + \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) l_1 C l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_2) \cos(\theta_1)^2 C \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 l_2 \\
& + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1)^2 l_1^2 m_2 l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 \\
& + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) l_1 m_2 l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right)^2 \sin(\theta_2) \\
& - \left(\cos(\theta_2)^2 \sin(\theta_1) l_1 m_2 l_2^2 \right. \\
& \left. \left(\cos(\theta_2) m_2 \cos(\theta_1) l_2 \sin(\theta_1) m_1 g l_1 - \sin(\theta_2) l_1 m_2 g l_2 \cos(\theta_1)^2 m_1 \right. \right. \\
& \left. \left. - \sin(\theta_2) l_1 m_2^2 g l_2 \cos(\theta_1)^2 + l_1 m_2^2 g l_2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) \right) \right. \\
& \left. + m_2 \sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \cos(\theta_1)^2 C \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 l_2 \right. \\
& \left. + \cos(\theta_2) m_2 l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 l_1^2 \sin(\theta_1)^3 m_1 \right. \\
& \left. + \cos(\theta_2) m_2 l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 l_1^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1)^2 m_1 \right. \\
& \left. + \cos(\theta_2) m_2 \cos(\theta_1) l_2 \sin(\theta_1)^2 C \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 \right. \\
& \left. - \cos(\theta_2) m_2^2 \cos(\theta_1)^2 \sin(\theta_2) l_1 l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right)^2 \right. \\
& \left. + \cos(\theta_2) m_2 \cos(\theta_1)^3 C \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 l_2 \right. \\
& \left. + \cos(\theta_2)^2 m_2^2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_1) l_1 l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right)^2 \right. \\
& \left. - \cos(\theta_2) C l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 \cos(\theta_1(x)) m_1 \sin(\theta_1)^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\cos(\theta_2) C l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 \cos(\theta_1(x)) \cos(\theta_1)^2 m_1 \\
& - C l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) \cos(\theta_2)^2 l_1 m_1 \sin(\theta_1)^2 - C l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) \cos(\theta_2)^2 l_1 \cos(\theta_1)^2 m_1 \\
& + m_2^2 \sin(\theta_1)^3 \cos(\theta_2) l_1^2 l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 \\
& + m_2 \sin(\theta_2) \sin(\theta_1)^3 l_2 C \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 - m_2^2 \sin(\theta_2) \sin(\theta_1)^2 \cos(\theta_1) l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 l_1^2 \\
& - m_2^2 \sin(\theta_2)^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) l_1 l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right)^2 \\
& + m_2 \sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) C l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 \cos(\theta_1(x)) \\
& + m_2 \sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) l_1 C l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) \cos(\theta_2) \\
& + m_2^2 \sin(\theta_2) \sin(\theta_1)^2 \cos(\theta_2) l_1 l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right)^2 \\
& - m_2 \sin(\theta_1)^2 \cos(\theta_2) l_1^2 C l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) \cos(\theta_1(x)) \\
& - m_2 \sin(\theta_1)^2 \cos(\theta_2)^2 l_1 C l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) - \sin(\theta_2) l_1 C \left(\left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1 \sin(\theta_1(x)) \right. \\
& + \left. \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) l_2 \sin(\theta_2) \right) l_2 m_1 \sin(\theta_1)^2 - \sin(\theta_2) l_1 C \left(\left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1 \sin(\theta_1(x)) \right. \\
& + \left. \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) l_2 \sin(\theta_2) \right) l_2 \cos(\theta_1)^2 m_1 - \sin(\theta_2) l_1 C \left(\left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1 \sin(\theta_1(x)) \right. \\
& + \left. \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) l_2 \sin(\theta_2) \right) l_2 \cos(\theta_1)^2 m_2 + l_1 C \left(\left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1 \sin(\theta_1(x)) \right. \\
& + \left. \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) l_2 \sin(\theta_2) \right) l_2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) m_2 \cos(\theta_1) \\
& - m_2 \sin(\theta_2) l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 l_1^2 \cos(\theta_1) m_1 \sin(\theta_1)^2 \\
& - m_2 \sin(\theta_2) l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 l_1^2 \cos(\theta_1)^3 m_1 - m_2^2 \sin(\theta_2) l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 l_1^2 \cos(\theta_1)^3 \\
& + m_2^2 l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 l_1^2 \cos(\theta_1)^2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) \left. \right) / \left(-2 m_2^2 \sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) l_1 \right. \\
& l_2^2 \cos(\theta_2) + l_1 l_2^2 m_2 m_1 \sin(\theta_1)^2 \sin(\theta_2)^2 + l_1 l_2^2 m_2 m_1 \sin(\theta_1)^2 \cos(\theta_2)^2 \\
& + l_1 l_2^2 m_2 \sin(\theta_2)^2 \cos(\theta_1)^2 m_1 + l_1 l_2^2 m_2 \cos(\theta_1)^2 m_1 \cos(\theta_2)^2 + l_1 l_2^2 m_2^2 \sin(\theta_2)^2 \cos(\theta_1)^2 \\
& + m_2^2 \sin(\theta_1)^2 \cos(\theta_2)^2 l_1 l_2^2 \left. \right) - \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) l_1^2 C l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) \cos(\theta_1(x)) \\
& - \cos(\theta_2)^2 \sin(\theta_1) l_1 C l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) \left. \right) / \left(-m_1 l_1^2 l_2 \sin(\theta_1)^2 \sin(\theta_2) \right) \\
& - \sin(\theta_2) \cos(\theta_1)^2 m_1 l_1^2 l_2 - \sin(\theta_2) \cos(\theta_1)^2 m_2 l_2 l_1^2 + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) l_1^2 m_2 l_2 \cos(\theta_1) \left. \right) \tag{A1.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dx^2} \theta_2 (\\
& x) = \left(\cos(\theta_2) m_2 \cos(\theta_1) l_2 \sin(\theta_1) m_1 g l_1 - \sin(\theta_2) l_1 m_2 g l_2 \cos(\theta_1)^2 m_1 \right. \\
& - \sin(\theta_2) l_1 m_2^2 g l_2 \cos(\theta_1)^2 + l_1 m_2^2 g l_2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) \\
& + m_2 \sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \cos(\theta_1)^2 C \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 l_2 \\
& + \cos(\theta_2) m_2 l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 l_1^2 \sin(\theta_1)^3 m_1 \\
& + \cos(\theta_2) m_2 l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 l_1^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1)^2 m_1 \\
& + \cos(\theta_2) m_2 \cos(\theta_1) l_2 \sin(\theta_1)^2 C \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 \\
& - \cos(\theta_2) m_2^2 \cos(\theta_1)^2 \sin(\theta_2) l_1 l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right)^2 \\
& + \cos(\theta_2) m_2 \cos(\theta_1)^3 C \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 l_2 \\
& + \cos(\theta_2)^2 m_2^2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_1) l_1 l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right)^2 \\
& - \cos(\theta_2) C l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 \cos(\theta_1(x)) m_1 \sin(\theta_1)^2 \\
& - \cos(\theta_2) C l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 \cos(\theta_1(x)) \cos(\theta_1)^2 m_1 \\
& - C l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) \cos(\theta_2)^2 l_1 m_1 \sin(\theta_1)^2 - C l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) \cos(\theta_2)^2 l_1 \cos(\theta_1)^2 m_1 \\
& + m_2^2 \sin(\theta_1)^3 \cos(\theta_2) l_1^2 l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 \\
& + m_2 \sin(\theta_2) \sin(\theta_1)^3 l_2 C \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 - m_2^2 \sin(\theta_2) \sin(\theta_1)^2 \cos(\theta_1) l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 l_1^2 \\
& - m_2^2 \sin(\theta_2)^2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) l_1 l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right)^2 \\
& + m_2 \sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) C l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1^2 \cos(\theta_1(x)) \\
& + m_2 \sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) l_1 C l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) \cos(\theta_2) \\
& + m_2^2 \sin(\theta_2) \sin(\theta_1)^2 \cos(\theta_2) l_1 l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right)^2 \\
& - m_2 \sin(\theta_1)^2 \cos(\theta_2) l_1^2 C l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) \cos(\theta_1(x)) \\
& - m_2 \sin(\theta_1)^2 \cos(\theta_2)^2 l_1 C l_2^2 \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) - \sin(\theta_2) l_1 C \left(\left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1 \sin(\theta_1(x)) \right. \\
& + \left. \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) l_2 \sin(\theta_2) \right) l_2 m_1 \sin(\theta_1)^2 - \sin(\theta_2) l_1 C \left(\left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1 \sin(\theta_1(x)) \right. \\
& + \left. \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) l_2 \sin(\theta_2) \right) l_2 \cos(\theta_1)^2 m_1 - \sin(\theta_2) l_1 C \left(\left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1 \sin(\theta_1(x)) \right. \\
& + \left. \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) l_2 \sin(\theta_2) \right) l_2 \cos(\theta_1)^2 m_2 + l_1 C \left(\left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right) l_1 \sin(\theta_1(x)) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{d}{dx} \theta_2(x) \right) l_2 \sin(\theta_2) \Big) l_2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) m_2 \cos(\theta_1) \\
& - m_2 \sin(\theta_2) l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 l_1^2 \cos(\theta_1) m_1 \sin(\theta_1)^2 \\
& - m_2 \sin(\theta_2) l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 l_1^2 \cos(\theta_1)^3 m_1 - m_2^2 \sin(\theta_2) l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 l_1^2 \cos(\theta_1)^3 \\
& + m_2^2 l_2 \left(\frac{d}{dx} \theta_1(x) \right)^2 l_1^2 \cos(\theta_1)^2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) \Big) / \left(-2 m_2^2 \sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) l_1 l_2^2 \right. \\
& \left. \cos(\theta_2) + l_1 l_2^2 m_2 m_1 \sin(\theta_1)^2 \sin(\theta_2)^2 + l_1 l_2^2 m_2 m_1 \sin(\theta_1)^2 \cos(\theta_2)^2 \right. \\
& \left. + l_1 l_2^2 m_2 \sin(\theta_2)^2 \cos(\theta_1)^2 m_1 + l_1 l_2^2 m_2 \cos(\theta_1)^2 m_1 \cos(\theta_2)^2 + l_1 l_2^2 m_2^2 \sin(\theta_2)^2 \cos(\theta_1)^2 \right. \\
& \left. + m_2^2 \sin(\theta_1)^2 \cos(\theta_2)^2 l_1 l_2^2 \right)
\end{aligned} \tag{A1.2}$$

APÊNDICE 2

No Apêndice 2 é apresentada uma tabela resumida comparando os valores de θ_1 e θ_2 obtidos pela mecânica Lagrangeana e Newtoniana, para $m_1 = 2,5 \text{ kg}$, $m_2 = 10 \text{ kg}$, $l_1 = 15 \text{ m}$, $l_2 = 3 \text{ m}$, $c = 0 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}}$ e condições iniciais de $\theta_{1_0} = 0 \text{ rad}$ e $\theta_{2_0} = 0,1 \text{ rad}$.

Tabela A2.1 – Valores comparativos entre os deslocamentos das massas do pêndulo duplo encontrados através da mecânica Newtoniana e Lagrangeana.

Tempo	θ_1		θ_2	
	Mecânica Lagrangeana	Mecânica Newtoniana	Mecânica Lagrangeana	Mecânica Newtoniana
0	0	0	0,1	0,1
1	0,015168	0,015168	-0,01888	-0,01888
2	0,011676	0,011676	-0,06471	-0,06471
3	-0,02136	-0,02136	0,064761	0,064761
4	-0,01647	-0,01647	0,000152	0,000152
5	0,002569	0,002569	-0,09572	-0,09572
6	-0,00962	-0,00962	0,040765	0,040765
7	-0,00131	-0,00131	0,062875	0,062875
8	0,027055	0,027055	-0,06615	-0,06615
9	0,012135	0,012135	0,013262	0,013262
10	-0,00919	-0,00919	0,084183	0,084183
11	0,002862	0,002862	-0,06217	-0,06217
12	-0,00627	-0,00627	-0,05609	-0,05609
13	-0,02688	-0,02688	0,070635	0,070635
14	-0,00298	-0,00298	-0,02155	-0,02155
15	0,017007	0,017007	-0,06851	-0,06851
16	0,001687	0,001687	0,079155	0,079155
17	0,008813	0,008813	0,042501	0,042501
18	0,021146	0,021146	-0,07781	-0,07781
19	-0,00829	-0,00829	0,026944	0,026944
20	-0,02253	-0,02253	0,052536	0,052536

APÊNDICE 3

A Tabela A3.1 apresenta o valor dos erros devido à linearização das equações para o pêndulo duplo, em função das condições iniciais, para $m_1 = 2,5 \text{ kg}$, $m_2 = 5 \text{ kg}$, $l_1 = 7 \text{ m}$, $l_2 = 3 \text{ m}$, $c = 1 \frac{N \cdot s}{m}$.

Tabela A3.1 – Erros para θ_1 devido à linearização em função da condição inicial

Tempo (s)	$\theta_{1_0} = 0,01$ $\theta_{2_0} = 0$	$\theta_{1_0} = 0,02$ $\theta_{2_0} = 0$	$\theta_{1_0} = 0,05$ $\theta_{2_0} = 0$	$\theta_{1_0} = 0,1$ $\theta_{2_0} = 0$	$\theta_{1_0} = 0$ $\theta_{2_0} = 0,01$	$\theta_{1_0} = 0$ $\theta_{2_0} = 0,02$	$\theta_{1_0} = 0$ $\theta_{2_0} = 0,05$	$\theta_{1_0} = 0$ $\theta_{2_0} = 0,1$
0	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
1	0,0%	0,0%	-0,2%	-0,9%	0,0%	0,0%	0,1%	0,5%
2	0,1%	-0,1%	-1,2%	-5,2%	0,0%	0,0%	0,5%	2,1%
3	0,0%	0,0%	0,2%	1,0%	0,1%	-0,1%	-0,8%	-3,6%
4	0,0%	0,0%	-0,4%	-1,6%	-0,1%	0,2%	1,8%	7,3%
5	0,0%	0,0%	-0,4%	-1,8%	0,0%	-0,4%	-3,0%	-14,0%
10	-0,1%	0,0%	0,3%	1,5%	0,2%	0,0%	-0,8%	-3,8%
11	-0,2%	-0,1%	1,1%	5,1%	0,1%	0,0%	-0,8%	-3,8%
12	0,0%	0,0%	-0,1%	-0,4%	0,0%	0,1%	0,5%	1,9%
13	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%	-0,1%	-0,1%	-0,1%	-0,1%
14	1,3%	1,1%	-0,9%	-8,0%	-0,3%	-0,2%	0,2%	1,5%
15	-0,1%	-0,1%	0,1%	0,5%	0,3%	0,2%	-0,3%	-2,2%
16	0,1%	0,1%	-0,1%	-0,8%	-0,3%	-0,1%	0,4%	2,1%
17	0,3%	0,2%	-0,6%	-3,7%	-2,3%	-0,8%	3,8%	17,3%
18	0,0%	0,0%	0,1%	0,4%	0,1%	0,0%	-0,2%	-1,0%
19	0,0%	0,0%	-0,1%	-0,1%	0,2%	0,2%	0,3%	0,7%
20	-0,4%	-0,4%	-0,2%	0,0%	-2,0%	-1,5%	-0,5%	2,4%
21	0,1%	0,1%	0,0%	-0,5%	-0,3%	-0,2%	0,0%	0,7%
22	-0,2%	-0,1%	0,0%	0,5%	0,5%	0,3%	-0,2%	-1,7%
23	-2,2%	-1,4%	0,0%	4,8%	2,2%	1,0%	-0,9%	-7,3%
24	0,1%	0,0%	-0,1%	-0,4%	-0,3%	-0,1%	0,2%	1,0%
25	0,0%	0,0%	0,1%	0,2%	0,1%	0,0%	-0,2%	-0,6%
26	-1,5%	-1,1%	-0,3%	2,3%	-0,6%	-0,5%	-0,3%	-0,1%
27	-0,1%	-0,1%	-0,1%	0,0%	0,5%	0,3%	0,1%	-0,5%
28	0,2%	0,2%	0,0%	-0,2%	-0,6%	-0,3%	-0,1%	0,6%
29	-18,2%	-10,3%	0,1%	18,7%	-14,8%	-6,4%	-0,1%	12,0%
30	-0,3%	-0,1%	0,0%	0,1%	0,7%	0,3%	0,0%	-0,7%
31	0,2%	0,1%	0,0%	-0,1%	-0,6%	-0,3%	0,0%	0,5%
32	-10,4%	1,8%	8,6%	24,2%	1,1%	0,2%	-0,5%	-1,4%
33	0,1%	0,1%	0,0%	-0,1%	-0,1%	-0,2%	-0,1%	0,0%
34	-0,3%	-0,2%	-0,1%	0,1%	0,8%	0,5%	0,2%	-0,4%
35	4,4%	2,8%	1,3%	0,0%	-19,7%	-7,9%	-2,8%	4,3%
36	0,5%	0,3%	0,0%	-0,3%	-1,8%	-0,8%	-0,3%	0,4%
37	-0,5%	-0,2%	-0,1%	0,1%	1,6%	0,6%	0,2%	-0,4%
38	1,8%	0,9%	0,3%	0,3%	75,0%	50,5%	23,5%	-50,1%
39	0,1%	0,0%	-0,1%	-0,2%	-0,5%	-0,1%	0,1%	0,0%
40	0,2%	0,2%	0,1%	0,0%	-0,6%	-0,5%	-0,3%	0,0%

APÊNDICE 4

No Apêndice 4 é apresentada a determinação das massas do pêndulo duplo de forma a simular o momento de inércia da cabine em relação ao eixo que a prende ao cabo de suspensão (eixo A na Figura A4.1).

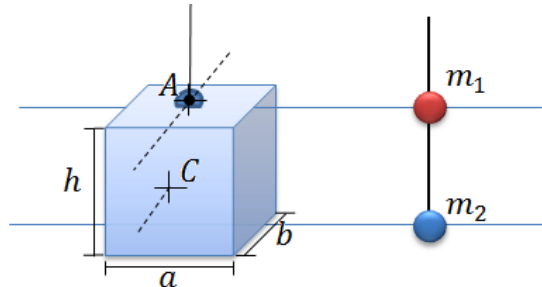


Figura A4.1 – Desenho esquemático do problema para determinação do momento de inércia.

Os dados do elevador utilizado são especificados a seguir:

- massa da cabine: $M_c = 1200 \text{ kg}$;
- massa dos passageiros: $M_p = 700 \text{ kg}$ (equivalente a 10 passageiros);
- dimensões da cabine: $a = b = 2,5 \text{ m}$ e $h = 3,0 \text{ m}$;
- comprimento do cabo: $l_c = 250 \text{ m}$;
- coeficiente de amortecimento viscoso natural: $c = 0,0375 \frac{\text{Nm}}{\text{s}}$

O momento de inércia ao redor do eixo A , pode ser encontrado utilizando-se o teorema de Steiner, descrito pela Equação A4.1

$$I_A = I_C + M_c \left(\frac{h}{2}\right)^2, \quad (\text{A4.1})$$

onde I_C é o momento de inércia do paralelepípedo ao redor do seu centro (eixo C), dado pela Equação A4.2 [Hibbeler, 2005].

$$I_C = \frac{M_c}{12} (a^2 + h^2). \quad (\text{A4.2})$$

Substituindo a Equação A4.2 em A4.1, obtém-se a Equação A4.3

$$I_A = \frac{M_c}{12} (a^2 + h^2) + M_c \left(\frac{h}{2}\right)^2. \quad (\text{A4.3})$$

Para encontrar os valores m_1 e m_2 , resolveu-se o sistema dado pelas Equações A4.4.

$$\begin{cases} I_{21} = I_A \\ m_1 + m'_2 = M_c, \\ m_2 = m'_2 + M_p \end{cases} \quad (\text{A4.4})$$

Nesse sistema m'_2 refere-se à componente de m_2 relativa apenas a massa da cabine (M_c), enquanto m_2 compreende, ainda, a massa dos passageiros (M_p), que foi considerada concentrada no fundo da cabine. I_{21} é o momento de inércia de m'_2 em relação à m_1 , definido como $I_{21} = m'_2 \left(\frac{h}{2}\right)^2$. Dessa forma, para a modelagem do pêndulo duplo, foram considerados os seguintes parâmetros: $m_1 = 730,55 \text{ kg}$, $m_2 = 1169,45 \text{ kg}$, $l_1 = 250 \text{ m}$ e $l_2 = 3 \text{ m}$.