

# Ondaletas e previsão de séries de tempo: uma análise empírica\*

Guilherme V. Homsy<sup>§</sup>  
Marcelo S. Portugal<sup>□</sup>  
Jorge P. Araújo<sup>†</sup>

## RESUMO

O presente artigo compara, sob a forma de estudo de casos, previsões relativas a três diferentes métodos de modelagem de séries de tempo. Utiliza-se uma aplicação da metodologia ARIMA, tanto da forma tradicional quanto amparada por dois procedimentos auxiliares baseados em Análise de Ondaletas (*Wavelets*). Este estudo de caso baseia-se na aplicação destes métodos alternativos a três séries de tempo. O primeiro procedimento auxiliar utilizando ondaletas consiste em fracionar cada uma das séries em duas subséries, aplicando a análise tradicional de maneira separada para posterior fusão das previsões. O segundo procedimento auxiliar consiste no emprego da análise tradicional mediante alisamento prévio das séries.

**Palavras chave:** ondaletas, previsão, séries de tempo.

## ABSTRACT

This paper presents three case studies in time series forecasting. We try to compare the use of traditional ARIMA models with an alternative method that combines of ARIMA and Wavelets models. Two different approaches are applied. In the first one, Wavelets are used to fraction the original time series, so that ARIMA forecasting is performed on the fractioned series. The fractioned forecasting is then jointed to obtain the original series forecasting. The second alternative method consist in using Wavelets to smooth the original series before using traditional ARIMA forecasting.

**Key words:** wavelets, forecasting, time series.

**JEL classification:** C53

---

\* Os autores agradecem os comentários de Silvia Lopes e de outros participantes do XXII Encontro Brasileiro de Econometria. Agradecem também aos bolsistas de iniciação científica Patrícia U. Palermo (CNPq), Amanda Pimenta Carlos (CNPq) e Gustavo Russomano (FAPERGS).

§ Doutorando em Economia na UFRGS e bolsista do CNPq.

□ Professor do Programa de Pós-Graduação da UFRGS e Pesquisador do CNPq.

† Professor do Programa de Pós-Graduação da UFRGS.

Recebido em dezembro de 2001. Aceito em janeiro de 2003.

## 1 Introdução

A Análise de Ondaletas tem se mostrado, a partir de meados dos anos 80, uma ferramenta de bastante utilidade em vários campos do conhecimento como física, matemática e engenharia. Na década de 1990, em economia, mais precisamente em Econometria, pode-se ressaltar sua utilização como procedimento auxiliar para ajuste e previsão de séries de tempo.

No sentido em questão, pode-se ressaltar duas contribuições:

- i) Donoho e Johnstone (1994, 1995, 1998), Donoho *et al.* (1995, 1997) e Johnstone e Silverman (1997) propõem um procedimento para se obter, a partir de séries **originais** de tempo, séries **alisadas** (*denoised*), que são possíveis pontos de partida para a aplicação de metodologias de previsão;
- ii) Ariño (1995) propõe um procedimento alternativo (*AV*) à modelagem de uma dada série de tempo  $\{y_t\}_{t=0}^{T-1}$  por meio de uma metodologia principal (como, por exemplo, ARIMA), que consiste em utilizar a Análise de Ondaletas para fracionar a série original em duas subséries, sendo uma relativa às “altas” frequências e a outra às “baixas” frequências. Posteriormente, aplica-se uma determinada metodologia para se proceder à modelagem, de forma separada, em cada uma dessas subséries, tendo como base melhor detectabilidade do comportamento periódico da série em questão.

O presente artigo tem como objetivo aplicar, de forma isolada, cada um dos procedimentos em questão com relação à metodologia ARIMA e comparar, ainda que de maneira desprovida de poder estatístico, as previsões obtidas com as relativas à aplicação “tradicional” da mesma para três séries de tempo.

## 2 Ondaletas

### 2.1 Definição

Ondaletas podem ser consideradas, com relação ao presente estudo, como sendo funções da forma  $\omega_{j,k}(t)$ , onde  $t$  designa o tempo, geradas a partir de translações e dilatações de uma única função  $\omega(t)$ , que permitem a representação dos elementos de determinados subespaços do conjunto das funções ( $F$ ), tanto no domínio do tempo quanto no da frequência.

## 2.2 Histórico

A possibilidade de representar (ou codificar) funções por meio de coeficientes relacionados a determinados sistemas de funções sempre despertou profundo interesse, devendo-se a ela inúmeras aplicações nas mais variadas áreas do conhecimento.

Em 1807, Fourier afirmou que qualquer função  $f(t)$  definida no intervalo  $[-\pi, \pi]$  poderia ser expressa por meio de uma série trigonométrica da forma  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \{a_n \cdot \cos(nt) + b_n \cdot \text{sen}(nt)\}$ . Combinando-se tal afirmação com as noções atuais de função, integral e convergência, conclui-se que o conjunto de funções  $\{\text{sen}(nt), \cos(nt)\}_{n \in \mathbb{N}}^1$  constituiria um **conjunto gerador** das funções definidas no intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Este conjunto, munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cdot \overline{v(t)} dt,$$

formaria uma base ortogonal para tais funções, sendo os coeficientes associados a uma determinada função dados por:

$$a_0 = \frac{\langle f(t), 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_n = \frac{\langle f(t), \cos(nt) \rangle}{\langle \cos(nt), \cos(nt) \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

$$b_n = \frac{\langle f(t), \text{sen}(nt) \rangle}{\langle \text{sen}(nt), \text{sen}(nt) \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \text{sen}(nt) dt$$

Considerando-se a relação de Euler, poder-se-ia reescrever tal representação de acordo com a forma,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot e^{int}$$

---

1 Para o presente artigo,  $\mathbb{N}$  representa o conjunto dos números naturais,  $\mathbb{Z}$  o conjunto dos números inteiros,  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais,  $\mathbb{N}^+$  (ou  $\mathbb{Z}^+$ ) o conjunto dos números naturais positivos e  $\mathbb{R}^+$  o conjunto dos números reais positivos.

onde:

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in N$$

Ademais, outra representação poderia ser obtida:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot \psi_n(t) \quad (2.1)$$

onde:

$$\psi(t) = e^{it} \quad (2.2)$$

e

$$\psi_n(t) = \psi(nt) \quad (2.3)$$

Note-se que o sistema de equações (2.1) a (2.3) sugere a possibilidade de escrever qualquer função  $f(t)$  definida em  $[-\pi, \pi]$  como sendo uma soma infinita de funções com diferentes períodos (e, conseqüentemente, frequências), geradas por meio de compressões da função  $\psi(t)$ .

Contudo, em 1873, Paul Du Bois-Reymont apresentou uma função contínua e periódica de período  $2\pi$  cuja série de Fourier, como passaram a ser chamadas as séries acima, divergia num determinado ponto. Posteriormente, outros exemplos surgiram, como o de Fejér, em 1910, de uma função contínua cuja série de Fourier divergia em todos os pontos. Ademais, os coeficientes obtidos de acordo com a base em questão, apesar de representarem  $f(t)$  de acordo com diferentes níveis de frequências, dissociam-na de representação no próprio eixo do tempo.

Tendo em vista as limitações apresentadas pela Análise de Fourier, três direções surgiram do trabalho de Du Bois-Reymont:

- i) modificar a definição de função, de forma a encontrar uma que se adaptasse às séries de Fourier;

- ii) modificar a noção de convergência de forma a restabelecer a igualdade entre a função e a série;
- iii) descobrir outros conjuntos de funções, que não  $\cos(nt)$  e  $\sin(nt)$ , com os quais se pudesse gerar séries que convergissem para a função.

Em 1909, Haar introduziu um sistema ortonormal, gerado mediante compressões e translações de uma função tal que, dada  $f(t) \in C^0[0,1]$ ,<sup>2</sup> em relação ao produto interno,

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(t) \cdot \overline{v(t)} dt$$

a representação da mesma no sistema proposto, ou seja,

$$\langle f, h_0 \rangle \cdot h_0 + \langle f, h_1 \rangle \cdot h_1 + \dots + \langle f, h_n \rangle \cdot h_n + \dots$$

converge uniformemente para  $f(t)$ . Tal sistema, denominado **sistema de Haar**, possuía a vantagem de ser composto por funções de suporte compacto (e, portanto, capaz de localizar sinais tanto no domínio da frequência, como o sistema trigonométrico quanto no domínio do tempo). O trabalho de Haar continuou nas décadas de 20 e 30 com Schauder e Lusin.

A base de Haar tem o inconveniente de ser formada por funções descontínuas e ser inapropriada para funções de classe  $C^1$ . Schauder apresentou uma base,  $\Delta_1, \Delta_2, \dots$  de funções contínuas,<sup>3</sup> que não são de classe  $C^1$ . Dada  $f(t)$  contínua, ele mostrou que

$$f(t) = a + bt + \sum_1^{+\infty} \alpha_n \cdot \Delta_n(t)$$

e que a convergência é uniforme em  $[0,1]$ . A base de Schauder apresenta vantagens sobre a de Haar, pois se  $f(t)$  é de classe  $C^1$ , derivando a série obtém-se uma série para a derivada em termos de base de Haar, cuja convergência é uniforme.

2  $C^{\gamma}[a,b]$  é o conjunto das funções definidas em  $[a,b]$  cujas derivadas até a ordem  $\gamma$  são funções contínuas. No caso específico, está-se considerando  $f(t)$  como sendo uma função contínua.

3 Uma função é dita de classe  $C^{\gamma}$  se e somente se suas derivadas até a ordem  $\gamma$  são contínuas em seu domínio.

Posteriormente, o foco da análise em questão passou a abranger, além da determinação de bases para os espaços em estudo, metodologias de obtenção das mesmas a partir de funções ditas **originais** (como, por exemplo, a função  $h_0(t)$  de Haar). Estas bases seriam obtidas por meio de algum processo de associação, sendo que a partir disto três pontos importantes precisam ser ressaltados:

- i) Tendo-se em vista o objetivo de se representar funções tanto no domínio do tempo quanto da frequência, os processos de associação em questão deveriam considerar não apenas compressões/dilatações de funções originais, como ocorria no caso da Análise de Fourier, mas também translações das mesmas. Dessa forma, em termos de representação matemática, funções não-originais passariam a ser representadas a partir das originais por meio do uso de dois índices, e não apenas de um, como no caso da fórmula (2.1);
- ii) Tendo-se em vista o objetivo da inclusão da representação temporal, certas condições devem ser impostas acerca de uma dada função para que a mesma possa ser considerada originária de um dado sistema dentre as quais não figura, ao contrário de uma eventual impressão inicial, o caráter de suporte compacto. De qualquer forma, a mesma não pode apresentar um caráter análogo, por exemplo, ao apresentado pelas funções originais relativas à Análise de Fourier;
- iii) Como uma questão de nomenclatura, convencionou-se denominar as funções que atendessem às condições supra-referidas com o termo ondaletas.

Levando-se em conta tais considerações, Grossmann e Morlet (1984) propuseram que, dada uma função original  $\omega(t)$ , se procedesse às compressões/dilatações e translações de acordo com a forma

$$\omega_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \omega\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a \in \mathfrak{R}^+, b \in \mathfrak{R}$$

obtendo-se, portanto, o sistema  $\left\{ \omega_{a,b}(t) \right\}_{\substack{a \in \mathfrak{R}^+ \\ b \in \mathfrak{R}}}$ . A função original  $\omega(t)$  corresponde ao caso em que  $a=1$  e  $b=0$ .

O trabalho de Haar foi completado em Daubechies (1988), de onde resulta a Análise de Ondaletas relativa ao presente artigo. Por meio da aplicação de translações diádicas e dilatações binárias às funções originais indexadas por números naturais, constrói-se um

conjunto de bases ortonormais de suporte compacto para o  $L^2(\mathfrak{R})$  no sentido de média quadrática.

## 2.3 Considerações acerca da análise de ondaletas

### 2.3.1 Translações diádicas e dilatações binárias

O procedimento de translações diádicas e dilatações binárias utilizado no presente artigo consiste em representar tais operações aplicadas à função original  $\omega(t)$  de acordo com a forma

$$\omega_{j,k}(t) = 2^{\frac{-j}{2}} \omega(2^{-j}t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (2.4)$$

Cabe ressaltar que, no caso de possuir norma unitária e suporte compacto, todos os elementos do sistema formado apresentarão tal propriedade. Para um determinado elemento genérico, ter-se-á

$$\langle \omega_{j,k}(t), \omega_{j,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega_{j,k}(t)|^2 dt = \left( 2^{\frac{-j}{2}} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega(2^{-j}t - k)|^2 dt = 2^j \cdot \frac{1}{2^j} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega(t)|^2 dt = \langle \omega(t), \omega(t) \rangle = 1$$

de forma que, se o sistema  $\{\omega_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  constituir a base para algum determinado subespaço de  $F$ , o mesmo será ortonormal.

É importante ressaltar que, tendo em vista a propriedade de representação em tempo-freqüência, o índice  $j$  relaciona-se às medidas dos intervalos nos quais as ondaletas concentram maior parte de sua oscilação. Tal índice é relativo ao **nível de resolução** associado às ondaletas. De acordo com (2.4), valores menores para este índice referem-se a ondaletas de alta resolução, adequadas à caracterização de fenômenos efêmeros associados à função  $f(t)$ . O oposto ocorre para valores maiores.

Serão consideradas, na seqüência de análise, funções originais que apresentem suporte compacto. No caso de o sistema em questão constituir a base para o espaço de interesse  $L^2(\mathfrak{R})$ , então, para qualquer função  $f(t)$  pertencente a tal espaço, existirá  $\{b_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  tal que a soma

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_{j,k} \omega_{j,k}(t)$$

convergirá em média quadrática para  $f(t)$ .

### 2.3.2 Classificação genealógica de sistemas de ondaletas

Dois tipos de sistemas de ondaletas serão considerados. Estes sistemas estarão em consonância com as propriedades apresentadas pelas funções  $\omega_{j,k}(t)$  e com as inter-relações destas com as funções do sistema de classificação diferente.

**Sistema I**  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$

O sistema I, base ortonormal de  $L^2(\mathfrak{R})$ , é gerado a partir da aplicação de translações diádicas e dilatações binárias a uma função original  $\psi(t)$  (denominada ondaleta-mãe). Este sistema atende às seguintes condições:

$$i) \forall s \in \{0, \dots, r-1\}, \quad r \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^s \psi(t) dt = 0;$$

$$ii) \int_{-\infty}^{+\infty} t^r \psi(t) dt < +\infty$$

Para um dado valor do índice  $j$ , costuma-se denotar como  $W_j$  o espaço gerado a partir do sistema  $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . Partindo da suposição de que o sistema  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  constitui a base para o espaço  $L^2(\mathfrak{R})$ , conclui-se que  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} W_j = L^2(\mathfrak{R})$



**Sistema II**  $\{\phi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$

Tal sistema normal,<sup>4</sup> linearmente dependente e gerador de  $L^2(\mathfrak{R})$ , é obtido a partir da aplicação de translações diádicas e dilatações binárias a uma função original  $\phi(t)$  (denominada ondaleta-pai), que atende às seguintes condições:

$$\text{i) } \forall j, k, k' \in \mathbb{Z}, \quad \langle \psi_{j,k}, \phi_{j',k'} \rangle = 0, \quad j' \geq j \quad (2.5)$$

do que se pode concluir que cada ondaleta referente a este sistema é ortogonal às ondaletas de nível de resolução inferior referentes ao sistema I;

$$\text{ii) } \forall k, k' \in \mathbb{Z}, \quad \langle \phi_{j,k}, \phi_{j,k'} \rangle = 0,$$

isto é, ondaletas referentes a um dado nível de resolução  $j$  formam um conjunto ortonormal, cujo espaço gerado costuma ser denotado por  $V_j$ ,

$$\text{iii) } \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} B_1 \text{ é base qualquer de } V_j \\ B_2 \text{ é base qualquer de } W_j \end{cases} \Rightarrow B_3 = B_1 \cup B_2 \text{ é base de } V_{j-1} \quad (2.6)$$

$$\text{iv) } \exists \{l_s\}_{s \in \mathbb{Z}} \text{ tal que } \phi(t) = \sqrt{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} l_s \phi(2t - s);$$

$$\text{v) } \psi(t) = \sqrt{2} \sum_{s \in \mathbb{Z}} h_s \phi(2t - s)$$

onde  $t_f$  é um número inteiro par e  $h_s = (-1)^s l_{t_f - 1 - s}$ ,  $s \in \mathbb{Z}$

Logicamente, a partir das suposições em questão, pode-se concluir que, em se levando em conta a condição (2.6),

4 Um sistema é dito normal com relação a um determinado produto interno se e somente se todos os seus elementos possuem norma unitária de acordo com o mesmo.

$$V_j \subset V_{j'}, \quad W_j \subset V_{j'}, \quad j', j \in Z, \quad j' < j \quad (2.7)$$

Adicionalmente, se o sistema  $\{\phi_{j,k}\}_{j,k \in Z}$  gera  $L^2(\mathfrak{R})$ , tem-se

$$\bigcup_{j \in Z} V_j = L^2(\mathfrak{R})$$

Ademais, lembrando (2.5),

$$V_j \cap W_{j'} = \phi, \quad j' \leq j$$

### 2.3.3 Representações de funções em ondaletas

Uma vez que o sistema ortonormal  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in Z}$  é base de  $L^2(\mathfrak{R})$ , existem coeficientes  $\{d_{j,k}\}_{j,k \in Z}$ , de forma que uma possível representação de uma dada função  $f(t)$  pertencente a este espaço bem poderia ser

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t),$$

onde:

$$d_{j,k} = \langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{j,k}(t)$$

Tal representação, apesar de ideal, não poderia ser implementada pelos meios disponíveis de computação dos coeficientes. Sendo assim, empiricamente, deveria haver dois níveis de resolução  $m, M, m \leq M$  e duas funções  $n(j)$  e  $N(j)$  de forma que a mesma seja substituída pela seguinte representação, com número finito de coeficientes:

$$f(t) \approx \sum_{j=m}^M \sum_{k=n(j)}^{N(j)} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (2.8)$$

A representação (2.8) apresenta os inconvenientes de desconsiderar tanto os infinitos níveis de resolução menores que  $m$  quanto os também infinitos níveis de resolução maiores que  $M$ . Outro inconveniente é que, para cada nível de resolução  $j$  efetivamente analisado, tanto os infinitos parâmetros de localização menores que  $n(j)$  quanto os maiores que  $N(j)$  são desprezados.

Muito embora a possibilidade de computação de coeficientes associados a bases para o espaço  $L^2(\mathfrak{R})$  possa ser considerada como uma questão utópica, nem todos os inconvenientes referentes à representação em questão possuem caráter incontornável.

Levando-se em conta o sistema  $\{\phi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  em vez do sistema  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ , o inconveniente de se desconsiderar níveis de resolução maiores que  $M$  não mais existiria devido ao fato do sistema ortonormal  $\{\phi_{M,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  constituir um conjunto gerador de  $V_j$ ,  $j > M$ . Apesar disso, o inconveniente de a representação em questão apresentar redundância no sentido em que proviria de um sistema linearmente dependente (*trade-off*) apareceria.

O estabelecimento de um sistema  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  (isto é, de uma ondaleta-mãe  $\psi(t)$ ), não garante a existência de um sistema  $\{\phi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  correspondente. Todavia, se tal sistema existe, é possível obter-se representações para o espaço  $V_{m-1}$ , que além de encamparem a vantagem obtida por meio da substituição do Sistema I pelo Sistema II, tornam-se desprovidas de redundância. No caso, trata-se de representações ortonormais mistas (isto é, que envolvem elementos dos dois sistemas).

Inicialmente, definidos níveis de resolução “mínimo” ( $m$ ) e “máximo” ( $M$ ), procura-se aproximar  $f(t)$  de uma função pertencente ao espaço  $V_{m-1}$ . Sendo o sistema  $\{\phi_{m-1,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  base para o mesmo, tal aproximação pode ser expressa na forma

$$f(t) \approx \sum_{k=n(m-1)}^{N(m-1)} c_{m-1,k} \phi_{m-1,k}(t) \quad (2.9)$$

Considerando-se que, de acordo de (2.6), o sistema  $\{\psi_{m,k}(t), \phi_{m,k}(t)\}_{k \in Z}$  também constitui a base para  $V_{m-1}$ , (2.9) pode ser reescrita na forma:

$$f(t) \approx \sum_{k=n(m)}^{N(m)} d_{m,k} \psi_{m,k}(t) + \sum_{k=n(m)}^{N(m)} c_{m,k} \phi_{m,k}(t)$$

A partir de sucessivas iterações obtém-se:

$$f(t) \approx \sum_{j=m}^M \sum_{k=n(j)}^{N(j)} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) + \sum_{k=n(M)}^{N(M)} c_{M,k} \phi_{M,k}(t),$$

onde:

$$c_{M,k} = \langle f(t), \phi_{M,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi_{M,k}(t) dt, \quad k = \{n(M), \dots, N(M)\} \quad (2.10)$$

e

$$d_{j,k} = \langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt, \quad j = m, \dots, M, \quad k = n(j), \dots, N(j) \quad (2.11)$$

Esta representação, com a qual se prosseguirá a análise, além de manter a característica de ortonormalidade presente em (2.8), não desconsidera níveis de resolução maiores do que  $M$  pelo fato de o sistema ortonormal  $\{\phi_{M,k}(t)\}_{k \in Z}$  consistir, de acordo com (2.7), em conjunto gerador de  $V_{j, j > M}$ . Ademais, a mesma também não desconsidera, por decorrer de (2.9), o nível de resolução

#### 2.3.4 Alguns pares $\{\psi(t), \phi(t)\}$ de suporte compacto

Muito embora haja ondaletas-mães para as quais não há ondaletas-pais associadas, um ponto importante consiste no fato de que, tendo-se em vista a satisfação das propriedades

relativas às inter-relações entre os sistemas  $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  e  $\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , diferentes ondaletas-mães deverão estar associadas, logicamente, a diferentes ondaletas-pais.

O primeiro par a ser considerado em várias publicações, devido à sua simplicidade relativa consiste em definir

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

comumente denominada **ondaleta de Haar**. A ondaleta-pai associada é dada por

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

de forma a obter-se

$$\psi_{j,k}(t) = \begin{cases} 2^{-\frac{j}{2}}, & 2^j k \leq t < 2^j \left(k + \frac{1}{2}\right) \\ -2^{-\frac{j}{2}}, & 2^j \left(k + \frac{1}{2}\right) \leq t < 2^j (k+1) \end{cases}, \quad \phi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}}, \quad 2^j k \leq t < 2^j (k+1)$$

De maneira relativamente simples, verifica-se que

$$\begin{cases} h_0 = l_0 = l_1 = -h_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ h_i = l_i = 0, & i \notin \{0; 1\} \end{cases}$$

A ondaleta de Haar é um elemento da família de ondaletas-mães  $\{\psi^G\}_{G \in N^+}$  denominadas *daublets* (em homenagem à sua formuladora Ingrid Daubechies). A mesma consiste na única ondaleta de tal família que possui expressão numérica explícita. Cada elemento da família em questão, além de admitir ondaleta-pai correspondente, gera um sistema de ondaletas  $\{\psi_{j,k}^G\}_{j,k \in Z}$  ortogonal.

Outras famílias de ondaletas-mães  $\{\psi^G\}_{G \in N^+}$  introduzidas por Ingrid Daubechies consistem nas *symlets* (assim denominadas por possuírem caráter próximo da simetria, ao contrário do que ocorre com as *daublets*) e nas *coiflets* (denominadas por Ingrid Daubechies em homenagem à Ronald Coifman). Cada elemento de cada família em questão, além de possuir caráter próximo da simetria e admitir ondaleta-pai correspondente, gera sistema de ondaletas  $\{\psi_{j,k}^{QG}\}_{\substack{j,k \in Z \\ Q \in \{S,C\}}}$  ortogonal.

### 2.3.5 Sobre a representação de séries de tempo em ondaletas

Ao se considerar, ao invés de funções, séries de tempo  $\{y_t\}_{t \in A \subseteq Z}$  de quadrado somável, o sistema de equações (2.10) e (2.11) não se torna mais pertinente por considerar variações infinitesimais no tempo.

Neste caso, pode-se considerar para o espaço das seqüências de quadrado somável o produto interno dado por

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{t \in A \subseteq Z} u_t \cdot \overline{v_t},$$

de forma a obter-se

$$\begin{cases} c_{M,k} = \sum_{t \in A \subseteq Z} y_t \phi_{M,k}(t), & k = n(M), \dots, N(M), \\ d_{j,k} = \sum_{t \in A \subseteq Z} y_t \psi_{j,k}(t), & j = m, \dots, M \quad k = n(j), \dots, N(j). \end{cases}$$

5 Toda seqüência que possui, como esta, quantidade finita de termos, é de quadrado somável.

Ao se considerar séries de tempo cujo domínio esteja limitado a instantes mínimo (0) e máximo ( $T - 1 = 2^n - 1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ),<sup>5</sup> uma vez escolhida  $\psi(t)$  de forma que seu suporte, bem como o de  $\phi(t)$ , consista em translações diádicas  $K2^{-m}$  do intervalo  $[0,1]$ , obtém-se a representação

$$y_t = \sum_{j=m}^M \sum_{k=n(j)}^{N(j)} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) + \sum_{k=n(M)}^{N(M)} c_{M,k} \phi_{M,k}(t) \quad (2.12)$$

onde:

$$\begin{cases} c_{M,k} = \sum_{t=0}^{T-1} y_t \phi_{M,k}(t), & k = n(M), \dots, N(M), \\ d_{j,k} = \sum_{t=0}^{T-1} y_t \psi_{j,k}(t), & j = m, \dots, M, \quad k = n(j), \dots, N(j) \end{cases} \quad (2.13)^6$$

Apesar do altíssimo grau de particularização da análise, esta representação não apresenta mais nenhum dos inconvenientes considerados na seção 2.3.3. Primeiramente, a mesma contempla os níveis de resolução maiores do que  $M$  e o nível de resolução  $m-1$ . Adicionalmente, para cada nível de resolução a ser considerado, as funções  $n(j)$  e  $N(j)$  podem ser escolhidas de forma a que o suporte de qualquer ondaleta  $\{\psi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , cujo índice não pertença ao conjunto  $\{n(j), \dots, N(j)\}$ , possua interseção vazia com o conjunto  $[0, T-1]$ , tornando-se a sua ausência na representação em questão um fato desprovido de importância.

O inconveniente relativo à desconsideração de níveis de resolução menores do que  $m-1$  perde sua relevância ao se levar em conta que não faz sentido considerar níveis de resolução  $j$  menores do que zero no sistema (2.12) e (2.13).

Para esses casos, os deslocamentos nos suportes a serem considerados ao se alterar  $k$  em uma unidade, por serem fracionários, estariam direcionados à detecção de alterações na série em instantes de tempo não necessariamente inteiros. Isto não é possível ao se considerar séries

<sup>6</sup> Tal representação também pode ser obtida ao se considerar séries  $\{y_t\}_{t=0}^{2^n-1}$  periódicas de período.

de tempo da forma  $\{y_t\}_{t=0}^{T-1}$ . Ao estabelecer-se  $m = 1$ , todos os níveis de resolução passíveis de serem analisados estariam sendo considerados.

Cabe ressaltar que, de forma inversa, não faz sentido considerar valores de  $M$  maiores do que  $n$  no sistema (2.12)-(2.13).

Para esses casos, os deslocamentos referidos anteriormente, por serem de ordem maior do que  $T$ , estariam relacionados a frequências por demais baixas para poderem ser detectadas a partir do número total  $2^n$  de observações da série.

Cabe notar que a aplicação de (2.13) não constitui uma maneira computacionalmente ótima de obter tais coeficientes. A maioria dos programas computacionais obtém esses coeficientes por meio de algoritmos iterativos inspirados em um esquema de decimação binária proposto por Mallat (1989).

Para o prosseguimento da análise serão considerados, salvo menções em contrário,  $m = 1$  e  $M = n$ .

### 2.3.6 Funções espectrais em ondaletas

Dada uma série de tempo  $\{y_t\}_{t=0}^{T-1}$ , uma medida empírica de sua variabilidade (ou **energia**) consiste na soma do quadrado de seus desvios com relação à média, denominada **soma de quadrados total**. Esta soma é representada segundo a forma:

$$Eng\left(\{y_t\}_{t=0}^{T-1}\right) = SQT\left(\{y_t\}_{t=0}^{T-1}\right) = \sum_{t=0}^{T-1} (y_t - \bar{y})^2,$$

em que  $\bar{y} = \frac{\sum_{t=0}^{T-1} (y_t)}{T}$  corresponde à **média** da série.

Um ponto de extrema importância com relação à presente seção é que, dadas uma série de tempo  $\{y_t\}_{t=0}^{T-1}$  e uma ondaleta-mãe de forma que o sistema (2.12)-(2.13) seja satisfeito, sua energia total pode ser representada pela expressão:



$$Eng \left( \{y_t\}_{t=0}^{T-1} \right) = \sum_{j=m}^M \sum_{k=n(j)}^{N(j)} d_{j,k}^2 \quad (2.14)$$

Adicionalmente, de acordo com (2.14), a energia de  $\{y_t\}_{t=0}^{T-1}$  pode ser particionada tendo-se como base os diferentes pares  $(j, k)$  considerados. Definindo-se a **energia da série**  $\{y_t\}_{t=0}^{T-1}$  **com relação ao par**  $(j, k)_{j,k \in \mathbb{Z}}$  de acordo com a forma:

$$Eng_{j,k} = d_{j,k}^2,$$

obtém-se a expressão

$$Eng \left( \{y_t\}_{t=0}^{T-1} \right) = \sum_{j=m}^M \sum_{k=n(j)}^{N(j)} Eng_{j,k}$$

Analogamente ao que ocorre na Análise de Fourier, a função  $f(Z^2 \rightarrow \mathfrak{R}): (j, k) \rightarrow Eng_{j,k}$  é denominada **periodograma de ondaletas de**  $\{y_t\}_{t=0}^{T-1}$

A relação (2.14) permite que, alternativamente, séries  $\{y_t\}_{t=0}^{T-1}$  tenham suas energias particionadas considerando-se os diferentes níveis de resolução  $j$  considerados pela mesma. Definindo-se a **energia da série**  $\{y_t\}_{t=0}^{T-1}$  **com relação ao nível de resolução**  $j \in \mathbb{Z}$  de acordo com a forma:

$$Eng_j = \sum_{k=n(j)}^{N(j)} d_{j,k}^2$$

obtém-se a expressão

$$Eng \left( \{y_t\}_{t=0}^{T-1} \right) = \sum_{j=m}^M Eng_j$$

A função  $f(Z \rightarrow \mathfrak{R}): j \rightarrow Eng_j$  é denominada **escalograma de ondaletas de**  $\{y_t\}_{t=0}^{T-1}$

### 3 Acerca dos procedimentos

#### 3.1 Redução de ruído (*de-noising*)

O procedimento de redução de ruído aplicado a uma dada série de tempo  $\{y_t\}_{t=0}^{T-1}$  atua na forma de um eventual encolhimento (sujeição à multiplicação por um número real pertencente ao intervalo  $[0;1]$ ) de cada um dos elementos do sistema  $\{d_{j,k}\}_{\substack{m \leq j \leq M \\ n(j) \leq k \leq N(j)}}$  de acordo com um determinado conjunto de critérios. Sua utilização leva a série a ser expressa por meio de:

$$y_t \approx \sum_{j=m}^M \sum_{k=n(j)}^{N(j)} \tilde{d}_{j,k} \psi_{j,k}(t) + \sum_{k=n(M)}^{N(M)} c_{M,k} \phi_{M,k}(t)$$

onde,  $\forall (j,k) \mid \begin{cases} m \leq j \leq M \\ n(j) \leq k \leq N(j) \end{cases}$ ,  $\begin{cases} d_{j,k} \cdot \tilde{d}_{j,k} \geq 0 \\ |\tilde{d}_{j,k}| \leq |d_{j,k}| \end{cases}$  e os coeficientes  $\{\tilde{d}_{j,k}\}_{\substack{m \leq j \leq M \\ n(j) \leq k \leq N(j)}}$  são

obtidos por meio da aplicação de limiares aos coeficientes originais  $\{d_{j,k}\}_{\substack{m \leq j \leq M \\ n(j) \leq k \leq N(j)}}$

Com relação aos limiares, as questões referentes aos seus procedimentos de escolha e ao algoritmo de encolhimento dos coeficientes  $\{d_{j,k}\}_{\substack{m \leq j \leq M \\ n(j) \leq k \leq N(j)}}$  assumem fundamental relevância.

No que tange ao segundo paradigma, resultam bastante difundidos dois algoritmos de encolhimento (denominados, respectivamente, de **duro** (*hard threshold*) e **suave** (*soft threshold*)). Uma vez definido um conjunto de limiares reais positivos  $\{\lambda_{j,k}\}_{\substack{m \leq j \leq M \\ n(j) \leq k \leq N(j)}}$ , os algoritmos duro e suave, respectivamente, podem ser expressos de acordo com as formas (3.1) e (3.2),

$$\tilde{d}_{j,k}^D = \begin{cases} 0, & |d_{j,k}| \leq \lambda_{j,k} \\ d_{j,k}, & |d_{j,k}| > \lambda_{j,k}, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\tilde{d}_{j,k}^S = \begin{cases} 0, & |d_{j,k}| \leq \lambda_{j,k} \\ s(d_{j,k}) \cdot (|d_{j,k}| - \lambda_{j,k}), & |d_{j,k}| > \lambda_{j,k}, \end{cases} \quad (3.2)$$

onde  $s$  representa a função sinal.

Com relação ao primeiro paradigma, resultam bastante difundidos dois procedimentos de escolha denominados, respectivamente, **universal** e **adaptativo**. O procedimento universal consiste no estabelecimento de um único limiar  $\lambda$  para todos os elementos pertencentes ao mesmo. O procedimento adaptativo consiste no estabelecimento de um limiar  $\lambda_j$  para cada conjunto  $\{d_{j,k}\}_{n(j) \leq k \leq N(j)}$ .

No contexto em questão, um ponto importante a ser ressaltado é o método de estimação dos desvios padrões associados aos coeficientes  $\{d_{j,k}\}_{\substack{m \leq j \leq M \\ n(j) \leq k \leq N(j)}}$ . Ao se considerar o procedimento universal de escolha, costuma-se estimá-los a partir do sistema  $\{d_{m,k}\}_{n(m) \leq k \leq N(m)}$ . Já ao se considerar, por vezes, o procedimento adaptativo, estima-se o desvio padrão de um dado coeficiente  $d_{j,k}$ ,  $m \leq j \leq M$  baseando-se no sistema  $\{d_{j,k}\}_{n(j) \leq k \leq N(j)}$ .<sup>7</sup>

## 3.2 O fracionamento da série de tempo

### 3.2.1 A problemática

Dadas uma série de tempo  $\{y_t\}_{t=0}^{T-1}$  e uma ondaleta-mãe de forma que o sistema (2.12) - (2.13) seja satisfeito, a problemática corresponde, para o presente artigo, à obtenção de uma

<sup>7</sup> Para mais detalhes acerca do tema, os autores sugerem Morettin (1999).

frequência crítica  $\lambda_y$ . Enquanto componentes de  $\{y_t\}_{t=0}^{T-1}$  relacionados a frequências menores ou iguais a  $\lambda_y$  devam formar a subsérie  $\{x_t\}_{t=0}^{T-1}$  relativa a baixas frequências, os demais componentes de  $\{y_t\}_{t=0}^{T-1}$  precisam formar a subsérie relativa a altas frequências, denotada  $\{z_t\}_{t=0}^{T-1}$

Em relação a séries econômicas, pode-se obter uma forma de se escolher  $\lambda_y$ , descrita a seguir, baseada na observação de que o comportamento periódico das mesmas costuma ser formado por dois movimentos.<sup>8</sup>

### 3.2.2 O procedimento

No caso em que isso se verifica para uma determinada série de tempo  $\{y_t\}_{t=0}^{T-1}$ , é razoável imaginar que as frequências relativas aos dois movimentos devam concentrar maiores porções da energia total da série que as demais. Considerando-se a existência de relação direta entre frequência e nível de resolução em Análise de Ondas, torna-se razoável esperar que o escalograma de  $\{y_t\}_{t=0}^{T-1}$  apresente seus picos em dois níveis de resolução  $p$  e  $P$  sendo  $m \leq p \leq P \leq M$ . Neste caso,  $p$  se relaciona ao movimento de curto prazo e  $P$  ao movimento de longo prazo da série.

Considerando  $p$  e  $P$  como índices “representativos” dos níveis de resolução associados, respectivamente, aos componentes de altas e baixas frequências da série, Ariño e Vidakovic (1995) sugerem que, no caso em que os mesmos apresentem diferentes caracteres de paridade, proceda-se o fracionamento da série

$$y_t = \sum_{j=m}^M \sum_{k=n(j)}^{N(j)} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) + \sum_{k=n(M)}^{N(M)} c_{M,k} \phi_{M,k}(t)$$

8 Enquanto um deles seria de curto prazo (o qual se repete em intervalos curtos de tempo, podendo, portanto, ser caracterizado como sendo de baixo período e, conseqüentemente, de alta frequência), o outro seria de longo prazo, que pode ser classificado como sendo de alto período e, portanto, de baixa frequência.

de acordo com a forma

$$\begin{cases} x_t = \sum_{k=n(M)}^{N(M)} c_{M,k} \phi_{M,k}(t) + \sum_{j=\lceil \alpha \rceil}^M \sum_{k=n(j)}^{N(j)} d_{j,k} \psi_{j,k}(t), \\ z_t = \sum_{j=m}^{\lfloor \alpha \rfloor} \sum_{k=n(j)}^{N(j)} d_{j,k} \psi_{j,k}(t), \end{cases}$$

onde  $\alpha = \frac{p+P}{2} \notin Z$ . Sendo assim, sugere-se que o critério de classificação de um determinado nível de resolução  $j$  como sendo associado à baixa ou alta frequências seja baseado em sua **distância numérica** com relação aos considerados “representativos” de tais características em  $\{y_t\}_{t=0}^{T-1}$

No caso em questão, observa-se que, a partir da adoção do mesmo, as subséries  $\{x_t\}_{t=0}^{T-1}$  e  $\{z_t\}_{t=0}^{T-1}$  apresentam duas propriedades:

- i) Sua soma corresponde exatamente à série original  $\{y_t\}_{t=0}^{T-1}$ ;
- ii) A soma entre suas energias  $Eng(\{x_t\}_{t=0}^{T-1})$  e  $Eng(\{z_t\}_{t=0}^{T-1})$  corresponde exatamente à energia relativa à série original.

No caso em que  $p$  e  $P$  possuem o mesmo caráter de paridade, devido à duplicidade de representação do nível de resolução  $\alpha = \frac{p+P}{2} \in Z$ , a menos que todos os coeficientes de ondaletas referentes ao mesmo fossem nulos, nenhuma das propriedades das subséries seriam mantidas válidas.

Muito embora tais propriedades possam ser recuperadas adaptando-se o procedimento em questão, de forma que o mesmo, além de discriminar entre diferentes níveis de resolução, faça o mesmo para diferentes valores de  $k$  para o nível de resolução  $\alpha$ , tal adaptação incorreria no absurdo de diferenciar frequências relativas a ondaletas que as possuem idênticas.

Salvo casos especiais, não é possível recuperar de forma conjunta as propriedades em questão por meio de uma adaptação que, ao invés de discriminar diferentes valores de  $k$ , destine, para cada uma das subséries, frações de cada um dos coeficientes relativos ao nível de resolução  $\alpha$ .

A adaptação em questão pode ser expressa na forma

$$\begin{cases} x_t = \sum_{k=n(\alpha)}^{N(\alpha)} a_k \cdot d_{\alpha,k} \psi_{\alpha,k}(t) + \sum_{j=\alpha+1}^M \sum_{k=n(j)}^{N(j)} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) + \sum_{k=n(M)}^{N(M)} c_{M,k} \phi_{M,k}(t), \\ z_t = \sum_{j=m}^{\alpha-1} \sum_{k=n(j)}^{N(j)} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) + \sum_{k=n(\alpha)}^{N(\alpha)} b_k \cdot d_{\alpha,k} \psi_{\alpha,k}(t), \end{cases}$$

sendo que pelo menos a mesma possuiria a vantagem de evitar o problema acerca da adaptação anterior.

Nesse sentido, Ariño e Vidakovic (1995) sugerem duas formas alternativas, descritas a seguir, de se proceder ao fracionamento dos coeficientes em questão, cada uma possuindo uma de tais propriedades.

#### a) Fracionamento preservador dos valores numéricos da série original

Formalmente, devido ao caráter de ortonormalidade do sistema  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ , um fracionamento  $\{a_k, b_k\}_{k=n(\alpha)}^{N(\alpha)}$  preservará os valores numéricos da série original se e somente se  $\forall k \in \{n(\alpha), \dots, N(\alpha)\}$ ,  $a_k + b_k = 1$ .

Pode-se, de forma aproximada, afirmar que o domínio temporal relativo a uma dada ondaleta  $\psi_{j,k}$  equivale tanto ao da ondaleta  $\psi_{j+1, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$  quanto ao do sistema  $\{\psi_{j-1,2k}, \psi_{j-1,2k+1}\}$

Dessa forma, uma maneira de se fracionar um dado coeficiente  $d_{\alpha,k}$  poderia consistir em se considerar  $a_k$  e  $b_k$  de forma a refletir, respectivamente, as contribuições relativas aos “fluxos” de “entrada” e “saída” de energia associadas ao suporte de  $\psi_{\alpha,k}$ . Nesse caso, assumiríamos que o direcionamento possuiria o sentido crescente do grau de resolução para a energia associada ao par  $(\alpha, k)$ , ou seja,

$$a_k = \frac{a}{a+b}, \quad b_k = 1 - a_k = \frac{b}{a+b},$$

em que

$$a = d^2_{j+1, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor}, \quad b = \frac{d^2_{j-1, 2k} + d^2_{j-1, 2k+1}}{2}$$

### b) Fracionamento preservador da energia da série original

Formalmente, qualquer fracionamento  $\{a_k, b_k\}_{k=n(\alpha)}^{N(\alpha)}$  tal que,  $\forall k \in \{n(\alpha), \dots, N(\alpha)\}$ ,

$$a_k^2 + b_k^2 = 1 \tag{3.3}$$

preservará a energia relativa à série original.

Levando-se em conta as considerações relativas ao fracionamento anterior, bem como a expressão (3.3), um raciocínio análogo pode ser desenvolvido de forma a se obter expressões similares para o caso em questão. Ao se considerar  $a_k$  e  $b_k$  de forma que os mesmos reflitam as raízes das contribuições relativas ao caso anterior (logicamente positivas, por representarem grandezas quadradas) associadas ao suporte de  $\psi_{\alpha, k}$  e como direcionamento o sentido crescente do grau de resolução para a energia associada ao par  $(\alpha, k)$ , obtém-se

$$a_k = \sqrt{\frac{a}{a+b}}, \quad b_k = \sqrt{1 - a_k^2} = \sqrt{\frac{b}{a+b}},$$

em que

$$0 \leq a = d^2_{j+1, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor}, \quad 0 \leq b = \frac{d^2_{j-1, 2k} + d^2_{j-1, 2k+1}}{2}$$

Com relação à escolha do tipo de fracionamento a ser utilizado em um dado nível de resolução  $j$ , Ariño e Vidakovic (1995) sugerem que quanto maior for o valor de  $Eng_j$  com relação a  $Eng_p$  e  $Eng_{p^*}$ , deve-se utilizar o fracionamento preservador dos valores numéricos da série original e, em caso contrário, o fracionamento preservador da energia da série original.

#### 4 Aplicação dos procedimentos

Para a aplicação dos procedimentos relacionados à modelagem das séries optou-se por utilizar os dados referentes às cento e vinte e oito primeiras observações. Elegeu-se, ainda, a ondaleta de Haar e o procedimento universal de escolha de acordo com a expressão

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \ln(T)},$$

onde  $\sigma$  é estimado tendo-se como base a integralidade do sistema  $\{d_{j,k}\}_{\substack{1 \leq j \leq 7 \\ 0 \leq k \leq -1+2^{7-j}}}$  Utilizou-

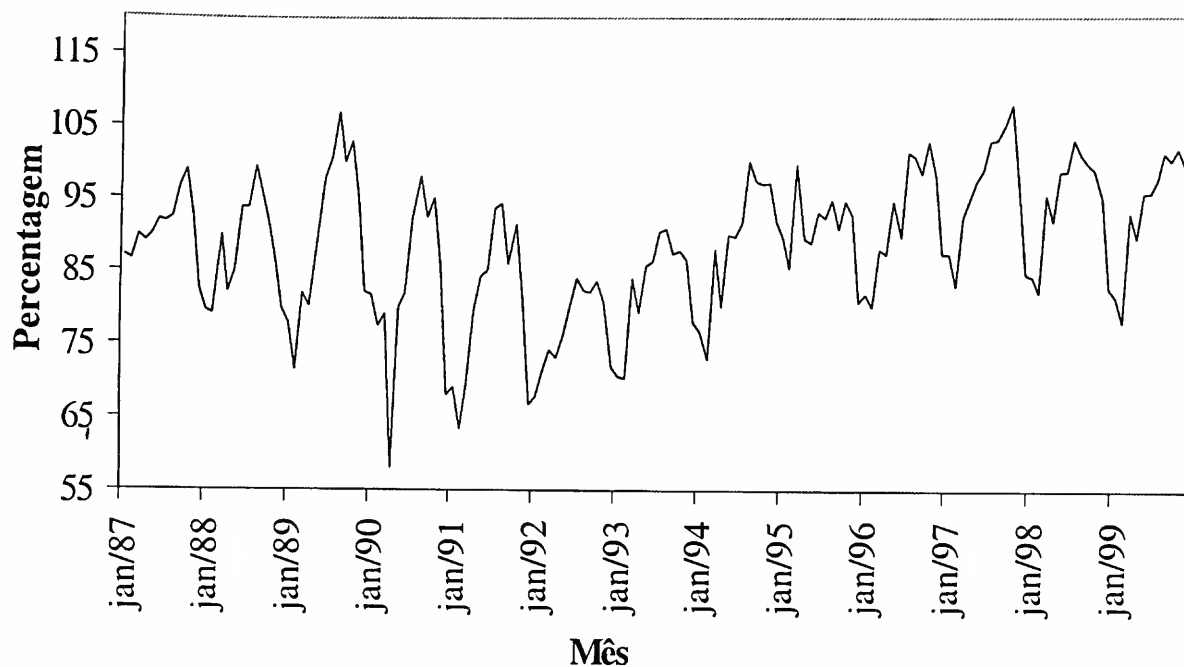
se o algoritmo duro de redução. A obtenção dos coeficientes associados às ondaletas de Haar (cujas magnitudes estão representadas, exceções feitas aos casos relativos aos coeficientes  $C_{7,0}$ , por intensidade de luminosidade nos Gráficos anexos A.1 a A.6 - quanto mais clara a cor, maior a magnitude) e o processo de retirada de ruído foram implementados por meio do programa *MATLAB* v. 5.3 r.11. Já o processo de modelagem Box-Jenkins foi implementado por meio do programa *Eviews* v. 3.0.

##### 4.1 Série da produção industrial (*ProdInd*)

Esta série é composta por cento e cinquenta e seis dados mensais referentes à produção física industrial brasileira com base fixa em agosto de 1994. O Gráfico 1 apresenta a série *ProdInd* para o período de janeiro de 1987 a dezembro de 1999.



**Gráfico 1**  
**Produção Física da Indústria (%)**



Fonte: IBGE.

Por meio da aplicação da metodologia Box-Jenkins (procedimento tradicional) à série *ProdInd*, obteve-se:<sup>9</sup>

$$(1-L) \left( 1 + \frac{0.260285 L^6}{(0.080402)} - \frac{0.529737 L^{12}}{(0.080873)} \right) ProdInd_t = (1 + \frac{0.366585 L}{(0.089302)}) \varepsilon_t$$

onde  $\varepsilon_t \sim IIN(0, 25.68293)$ .

Conforme apresentado na seção 3.2.2, a implementação do procedimento AV, por meio da análise do escalograma, apresentado na Tabela 1, à série *ProdInd*, gera o seguinte fracionamento em baixas (4.1) e altas (4.2) frequências:

$$x_t = c_{7,0} \cdot \phi_{7,0}(t) + \sum_{j=3}^7 \sum_{k=0}^{-1+2^{7-j}} d_{j,k} \cdot \psi_{j,k}(t) \quad (4.1)$$

9 Exceção feita à subsérie de baixas frequências relativa à série de exportações brasileiras, nenhum dos modelos ajustados na presente seção possui a desejada qualidade da parcimônia. Apesar dos possíveis problemas relacionados a este fato, foram estes os únicos filtros encontrados de forma a se poder produzir ruído branco (*white noise*).

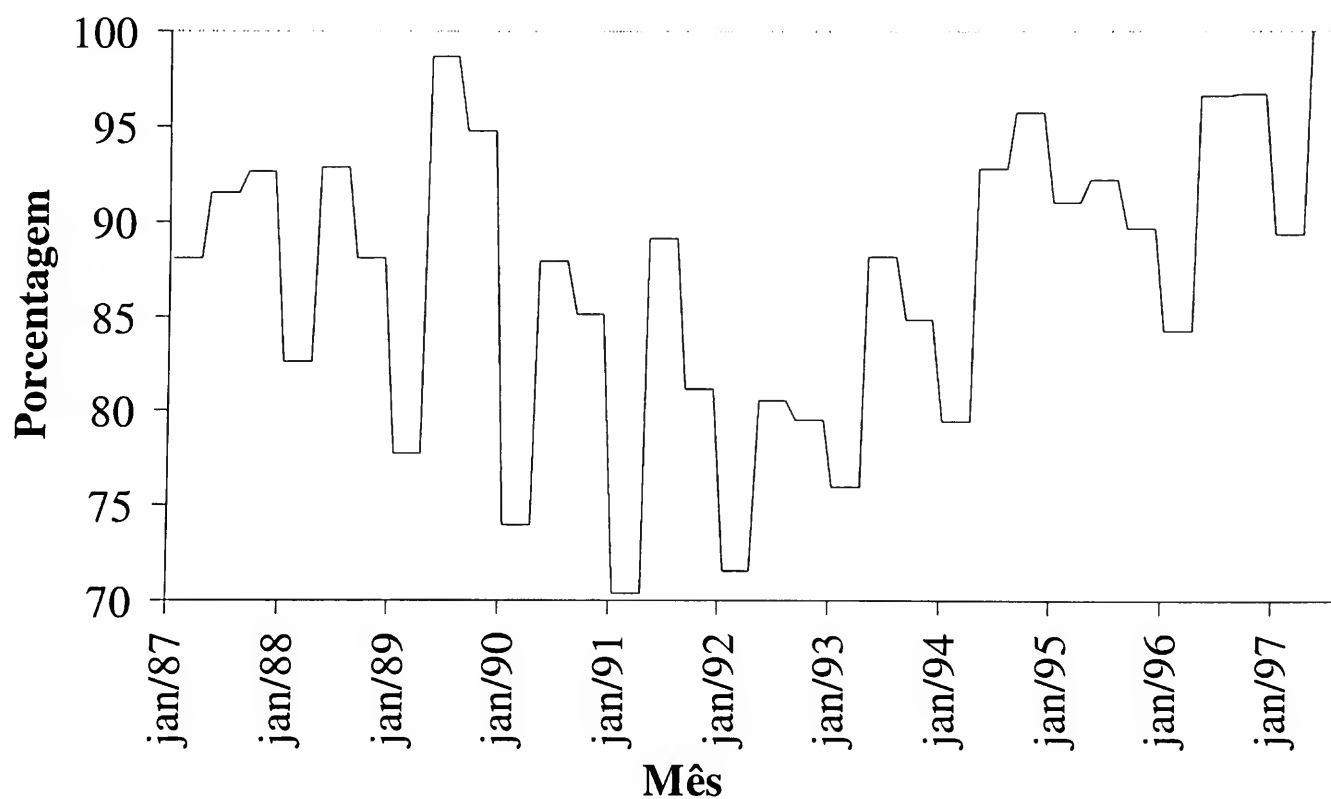
$$z_t = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=0}^{-1+2^{7-j}} d_{j,k} \cdot \psi_{j,k}(t), \quad (4.2)$$

estando o mesmo representado nos Gráficos 2 e 3.

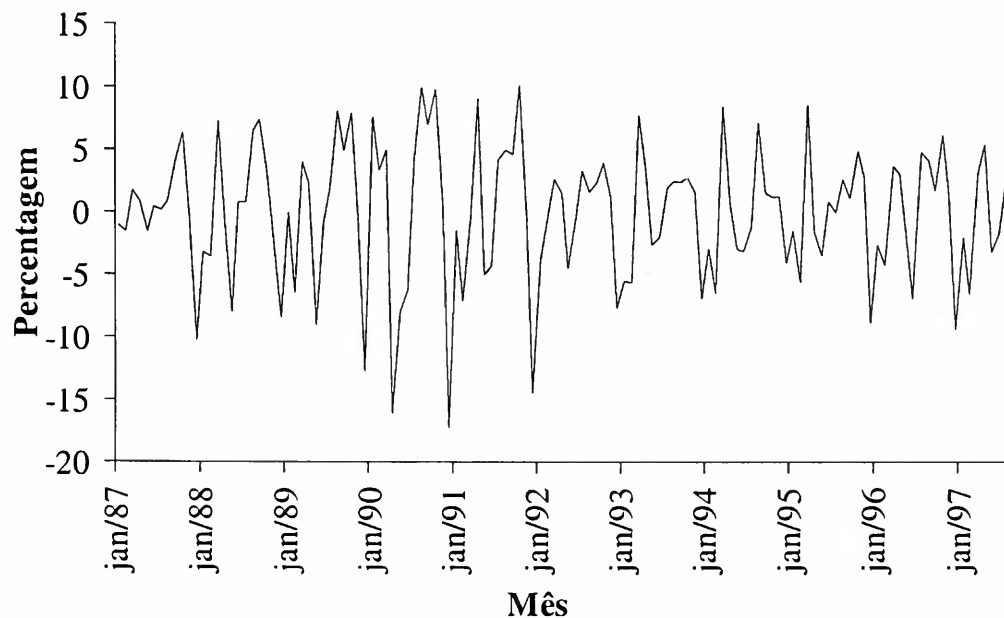
**Tabela 1**

<i>j</i>	1	2	3	4	5	6	7
<i>Eng<sub>j</sub></i>	1355.1	<b>2384.2</b>	<b>3598.6</b>	809.0	1187.1	1844.5	325.1

**Gráfico 2**  
**Série ProdInd - Baixa Frequência**



**Gráfico 3**  
**Série ProdInd - Alta Frequência**



Aplicando-se a metodologia Box-Jenkins às séries fracionadas  $\{x_t\}_{t=0}^{127}$  e  $\{z_t\}_{t=0}^{127}$ , obteve-se:

$$\begin{cases} (1-L) \left( 1 + \underset{(0.044397)}{0.123061 L^4} - \underset{(0.045914)}{0.841319 L^{12}} \right) x_t = \left( 1 + \underset{(0.066430)}{0.484996 L^8} + \underset{(0.066441)}{0.420050 L^{12}} \right) \eta_t \\ (1-L^{12})(1 + \underset{(0.091452)}{0.501327 L^{12}}) z_t = (1 + \underset{(0.098899)}{0.285165 L} + \underset{(0.100124)}{0.477922 L^2} + \underset{(0.105707)}{0.181385 L^3} + \underset{(0.101432)}{0.300751 L^4} - \underset{(0.066474)}{0.222985 L^{11}}) \xi_t \end{cases}$$

onde  $\eta_t \sim \text{IIN}(0, 5.304764)$  e  $\xi_t \sim \text{IIN}(0, 11.17904)$

Cabe ressaltar que a caracterização dos modelos ARIMA ajustados para cada uma das subséries constitui um indício de que o procedimento de fracionamento aplicado obteve relativo êxito em discriminar as frequências da série. De acordo com o mesmo, enquanto a subsérie  $\{x_t\}_{t=0}^{127}$  representa a evolução de longo prazo da série original, a subsérie  $\{z_t\}_{t=0}^{127}$  apresenta, embora não unicamente, seu comportamento sazonal.

Mediante a aplicação da metodologia Box-Jenkins à série alisada, isto é, depois de realizado o *de-noising* da série original, obteve-se:

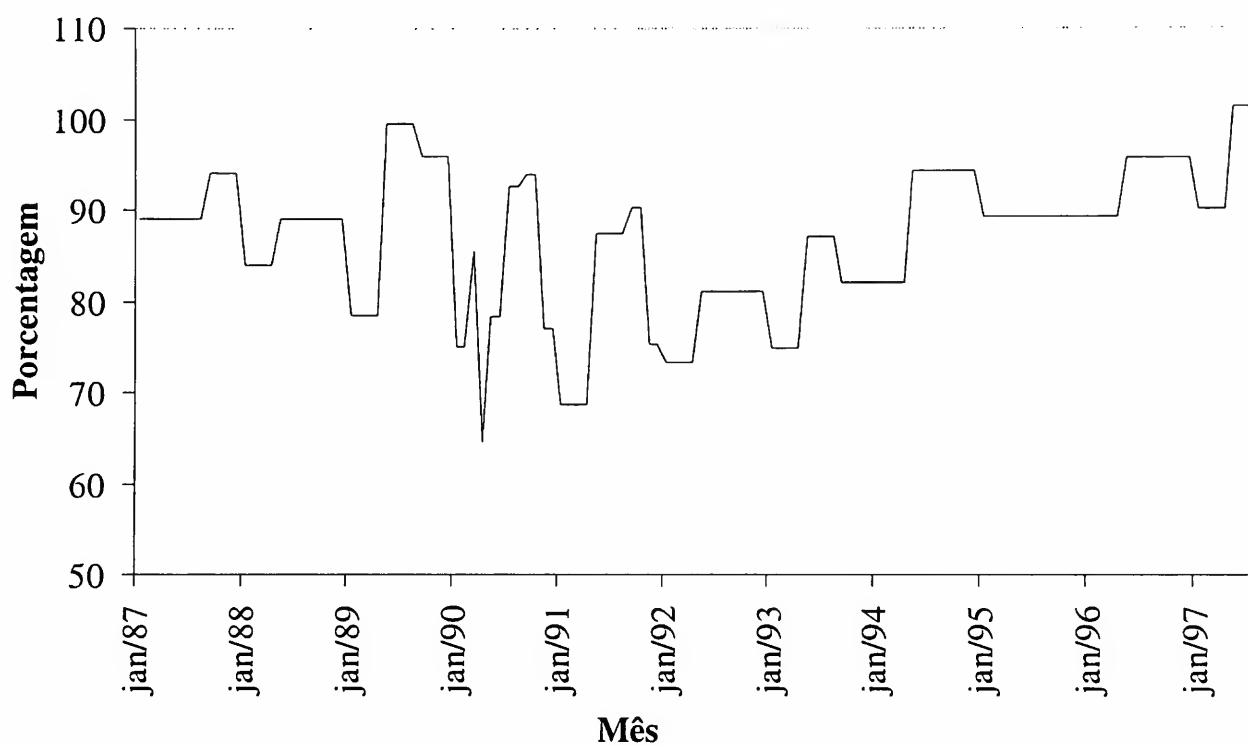
$$(1-L) \left( 1 + \underset{(0.084272)}{0.271005 L^6} - \underset{(0.084581)}{0.458812 L^{12}} \right) \text{ProdInd}_t = \left( 1 + \underset{(0.090879)}{0.283811 L^2} \right) \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim IIN(0, 19.6564),$$

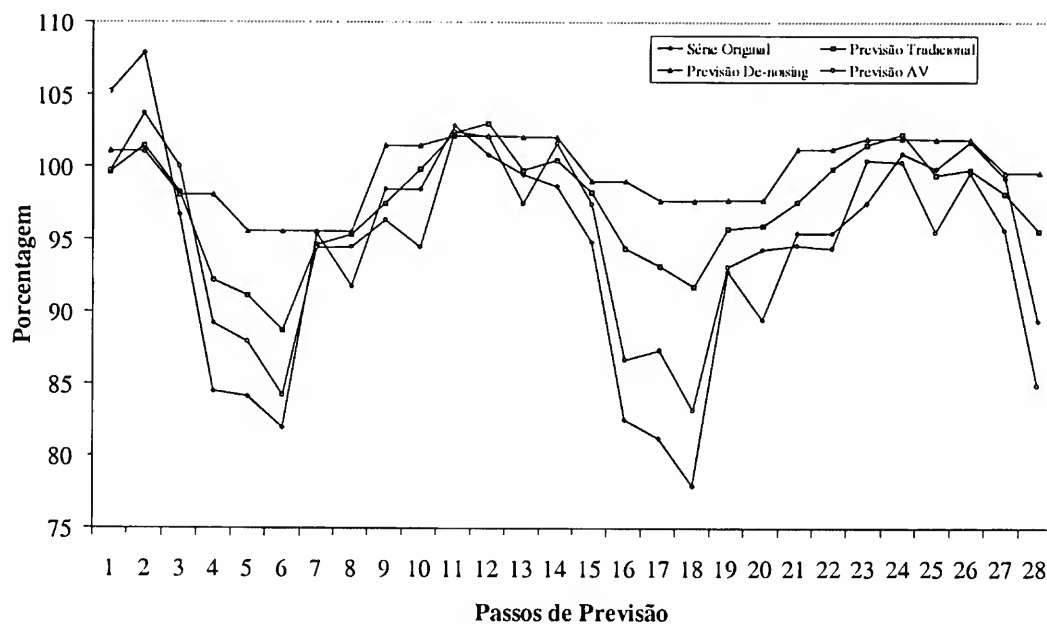
onde  $\varepsilon_t \sim IIN(0, 19.6564)$ .

A série alisada é mostrada no Gráfico 4, enquanto o Gráfico 5 apresenta os valores realizados e previstos fora da amostra para os três procedimentos utilizados (tradicional, AV e *de-noising*). Os erros absolutos médios percentuais da série original (*MAPEs*) são apresentados na Tabela 5.

**Gráfico 4**  
**Série ProdInd Alisada**



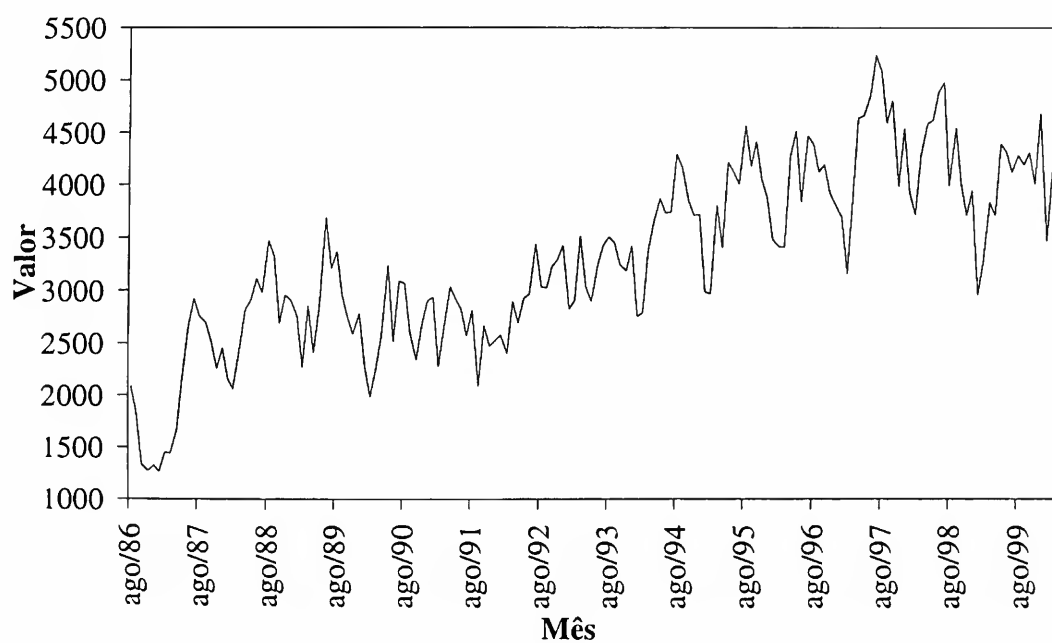
**Gráfico 5**  
**Previsões Acerca da Série ProdInd (%)**



#### 4.2 Série de exportações brasileiras (*Exp*)

Esta série é composta por cento e sessenta e quatro dados mensais referentes às exportações brasileiras em milhões de dólares para o período que vai de agosto de 1986 a março de 2000, sendo representada pelo Gráfico 6.

**Gráfico 6**  
**Exportações Brasileiras em US\$1.000.000**



Fonte: Ipeadata.

Por meio da aplicação da metodologia Box-Jenkins (tradicional) à série, obteve-se:

$$(1-L)(1 - \underset{(0.081800)}{0.268272} L^1 - \underset{(0.083475)}{0.368489} L^2) \text{Exp}or_t = (1 + \underset{(0.072040)}{0.622849} L + \underset{(0.071975)}{0.191806} L^6) \varepsilon_t,$$

onde  $\varepsilon_t \sim IIN(0, 86729.36)$

A Tabela 2 mostra o escalograma relativo à *Exp*or que é utilizado para obter-se o nível de corte (fracionamento) entre a alta e baixa frequência da série. Este fracionamento resultou nas equações (4.3) e (4.4), utilizadas a seguir para a implementação do procedimento AV. As subséries de baixas e altas frequências são apresentadas nos Gráficos 7 e 8.

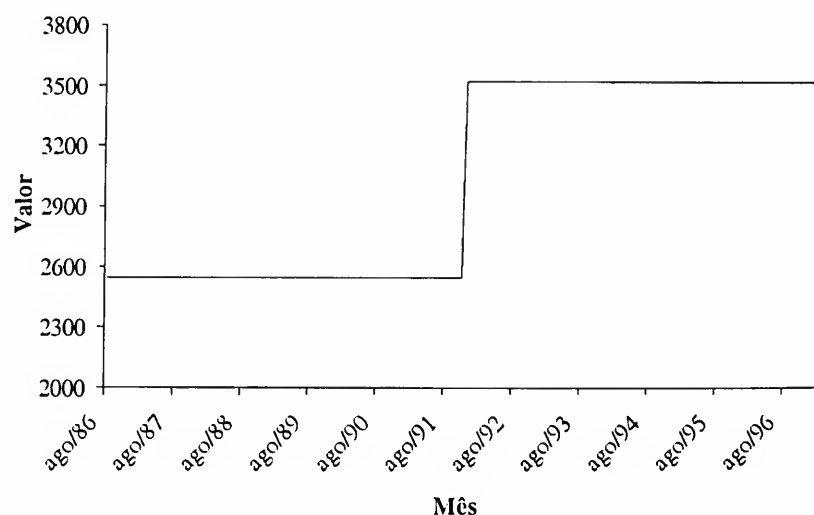
$$x_t = c_{7,0} \cdot \phi_{7,0}(t) + d_{7,0} \cdot \psi_{7,0}(t) \quad (4.3)$$

$$z_t = \sum_{j=1}^6 \sum_{k=0}^{-1+2^{7-j}} d_{j,k} \cdot \psi_{j,k}(t) \quad (4.4)$$

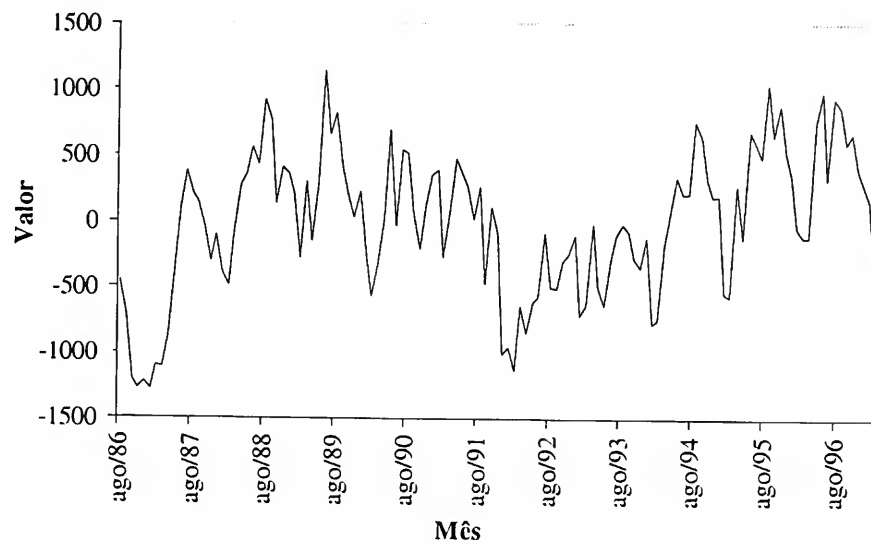
**Tabela 2**

<i>j</i>	1	2	3	4	5	6	7
<i>Eng<sub>j</sub></i>	4838630.5	4253933.7	6270643.1	5884977.4	5938172.0	<b>10929006.6</b>	<b>30543951.0</b>

**Gráfico 7**  
**Série Exp**or - Baixa Frequência



**Gráfico 8**  
**Série Expor - Alta Freqüência**



Mediante a aplicação da metodologia Box-Jenkins às séries  $\{x_t\}_{t=0}^{127}$  e  $\{z_t\}_{t=0}^{127}$ , obteve-se:

$$\begin{cases} (1-L)x_t = \eta_t, \\ \left(1 - \underset{(0.070951)}{0.561115}L - \underset{(0.064141)}{0.257375}L^1\right)z_t = \left(1 - \underset{(0.075387)}{0.232405}L^3 - \underset{(0.078763)}{0.202597}L^5 + \underset{(0.000799)}{0.402046}L^{30}\right)\xi_t, \end{cases}$$

onde  $\eta_t \sim \text{IIN}(0,7515.735)$  e  $\xi_t \sim \text{IIN}(0,83533.88)$ .

Neste caso, ao contrário do que ocorreu para a série de produção industrial, os resultados dos modelos ARIMA ajustados para cada uma das subséries mostra que o fracionamento foi capaz de discriminar perfeitamente a parte estacionária da parte não estacionária da série.

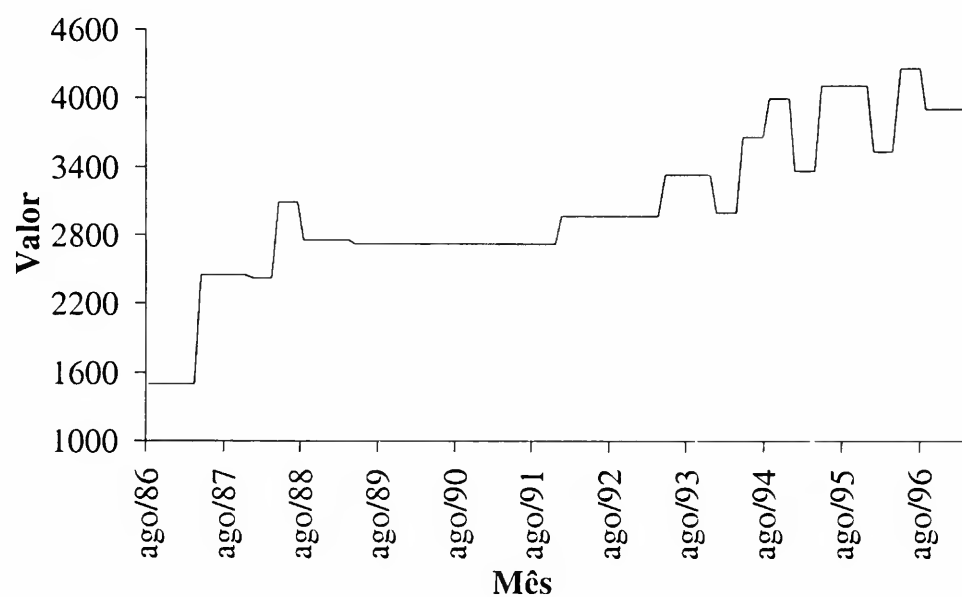
Enquanto a subsérie  $\{x_t\}_{t=0}^{127}$  representa a evolução de longo prazo da série original (parte não estacionária), a subsérie  $\{z_t\}_{t=0}^{127}$  apresenta seu comportamento sazonal (parte estacionária).

Por meio da aplicação da metodologia Box-Jenkins à série alisada (*de-noised*), apresentada no Gráfico 9, obteve-se:

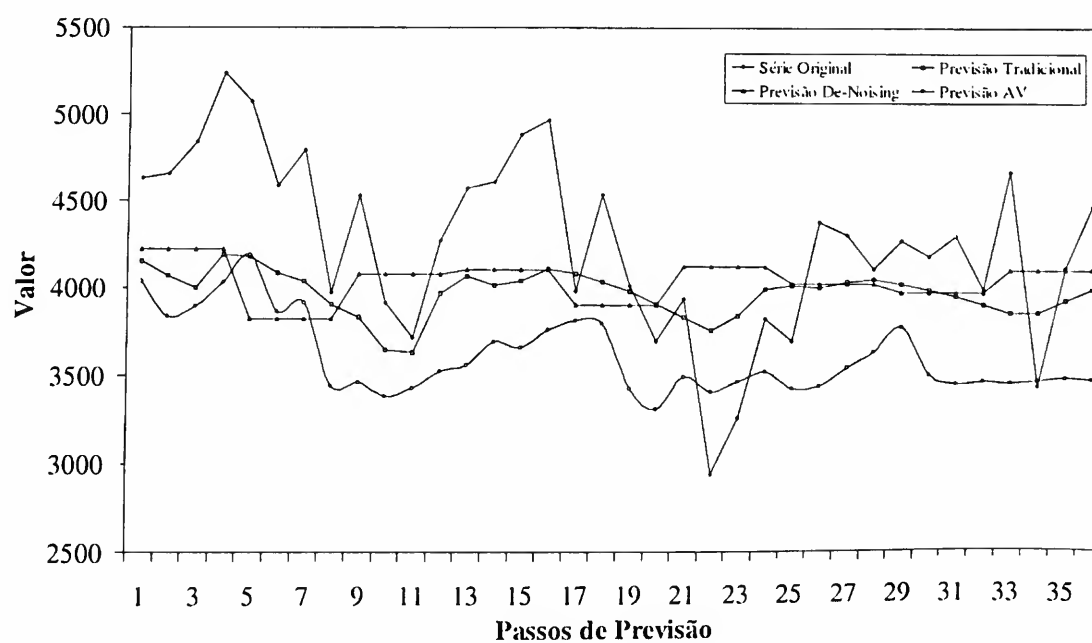
$$(1-L)\left(1 + \underset{(0.068581)}{0.489254}L^4 - \underset{(0.064332)}{0.469292}L^{12}\right)Exp_{or_t} = \left(1 + \underset{(0.000433)}{0.429475}L^8 - \underset{(0.049628)}{0.473335}L^{12}\right)\varepsilon_t,$$

onde  $\varepsilon_t \sim IIN(0, 7623.162)$ . O confronto entre a série original e as previsões associadas aos três métodos encontram-se no Gráfico 10. Os erros absolutos médios, em porcentagem, são apresentados na Tabela 5.

**Gráfico 9**  
**Série Expor Alisada**



**Gráfico 10**  
**Previsões Acerca da Série Expor**





### 4.3 Série volume de pesca na Groelândia (*Fish*)

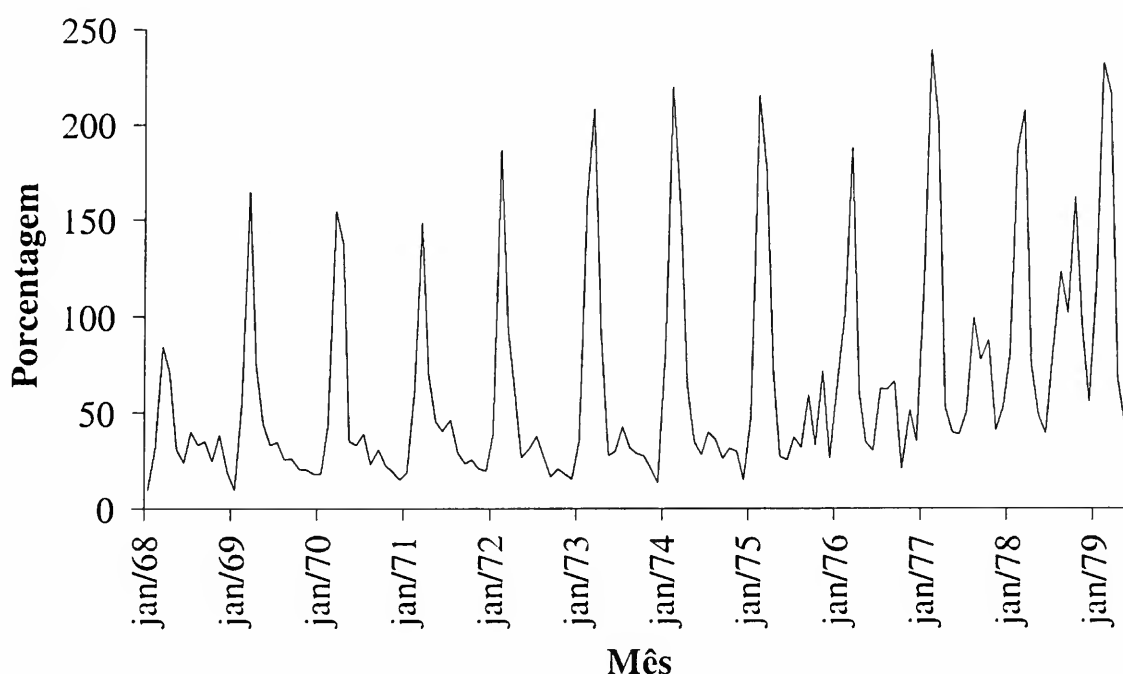
Esta série é composta por cento e trinta e oito dados mensais referentes à pesca de peixes na Groenlândia, com base fixa na média do ano de 1990. O Gráfico 11 apresenta a série *Fish* para o período de janeiro de 1968 a junho de 1979.

Por meio da aplicação da metodologia Box-Jenkins (tradicional) à série, obteve-se:

$$(1-L)(1-L^{12}) \left( 1 + \frac{0.184306}{(0.091831)} L^3 + \frac{0.335063}{(0.094321)} L^{12} \right) \ln(Fish_t) = \frac{0.001861}{(0.000359)} + (1 + \frac{1.059678}{(0.020986)} L - \frac{0.063941}{(0.020878)} L^{12}) \varepsilon_t,$$

onde  $\varepsilon_t \sim IIN(0, 0.110064)$ .

**Gráfico 11**  
**Pesca de Peixes na Groenlândia (%)**



Fonte: FMI.

A Tabela 3 apresenta o escalograma relativo à série *Fish*. Optou-se pela utilização do fracionamento preservador dos valores numéricos da série original e não de sua energia. As séries fracionadas de baixas e altas frequências são apresentadas nas equações (4.5) e (4.6), respectivamente. Os Gráficos 12 e 13 apresentam estas duas séries.

$$x_t = c_{7,0} \cdot \phi_{7,0}(t) + \sum_{j=3}^6 \sum_{k=0}^{-1+2^{7-j}} d_{j,k} \cdot \psi_{j,k}(t) + \sum_{k=0}^{31} a_k d_{2,k} \cdot \psi_{2,k}(t) \quad (4.5)$$

$$z_t = \sum_{k=0}^{31} (1 - a_k) \cdot d_{2,k} \cdot \psi_{2,k}(t) + \sum_{k=0}^{63} d_{1,k} \cdot \psi_{1,k}(t) \quad (4.6)$$

A Tabela 4 apresenta os coeficientes  $\{a_k\}_{k=0}^{31}$  relacionados ao segundo nível de resolução que foram subdivididos entre os dois níveis de frequências.

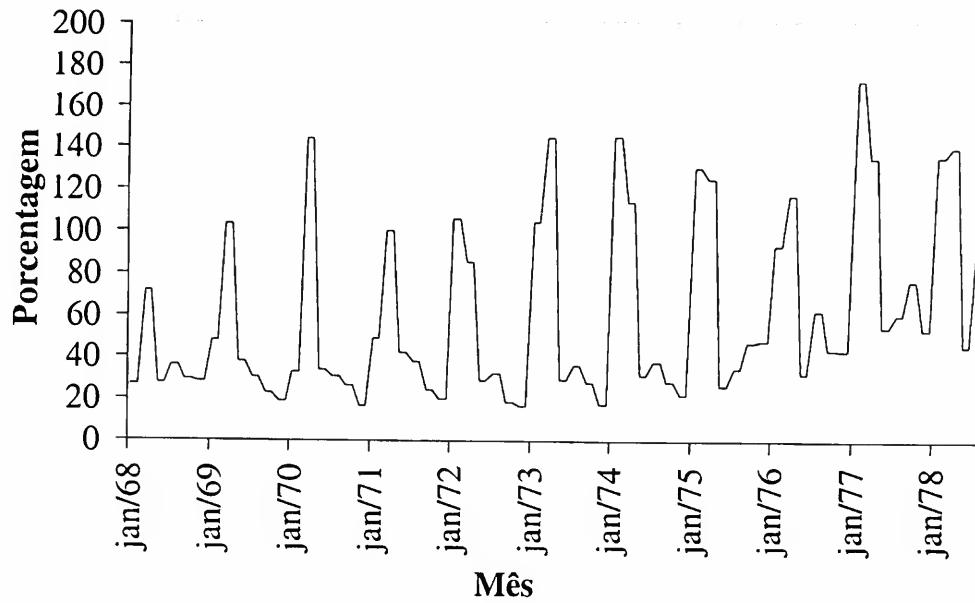
**Tabela 3**

$j$	1	2	3	4	5	6	7
$Eng_j$	<b>118169.3</b>	46779.1	<b>128464.5</b>	33617.4	6265.7	14451.1	14822.1

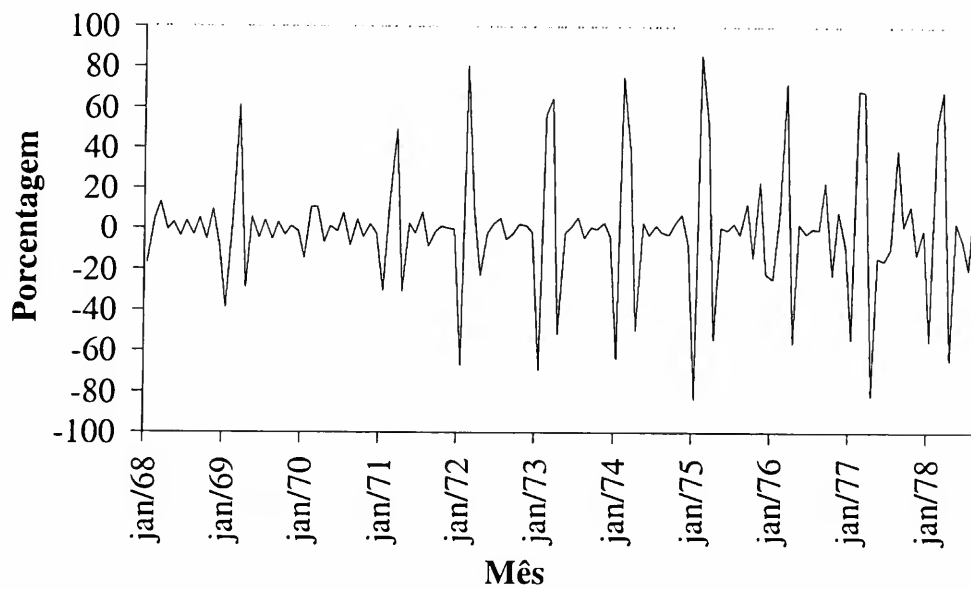
**Tabela 4**

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\alpha_i$	0.782	0.963	0.973	0.632	0.871	0.970	0.965	0.990	0.996
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.731	0.897	0.998	0.594	0.996	1.000	0.756	0.872	0.940	0.726
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
0.999	0.997	0.677	0.986	0.448	0.601	0.999	0.976	0.721	0.160
30	31	32							
0.641	0.536	0.944							

**Gráfico 12**  
**Série Fish - Baixa Frequência**



**Gráfico 13**  
**Série Fish - Alta Frequência**



Por meio da aplicação da metodologia Box-Jenkins às séries fracionadas  $\{x_t\}_{t=0}^{127}$  e  $\{z_t\}_{t=0}^{127}$ , obteve-se:

$$\begin{cases} (1-L)(1-L^{12}) \left( 1 + \underset{(0.094528)}{0.439107L^{12}} \right) x_t = \left( 1 + \underset{(0.015079)}{0.959835L^2} \right) \eta_t, \\ (1-L^{12}) \left( 1 + \underset{(0.083718)}{0.571962L^{12}} \right) z_t = (1 + \underset{(0.075167)}{0.940479L} + \underset{(0.078475)}{0.078728L^3}) \xi_t, \end{cases}$$

onde  $\eta_t \sim IIN(0,227.3489)$  e  $\xi_t \sim IIN(0,133.6154)$

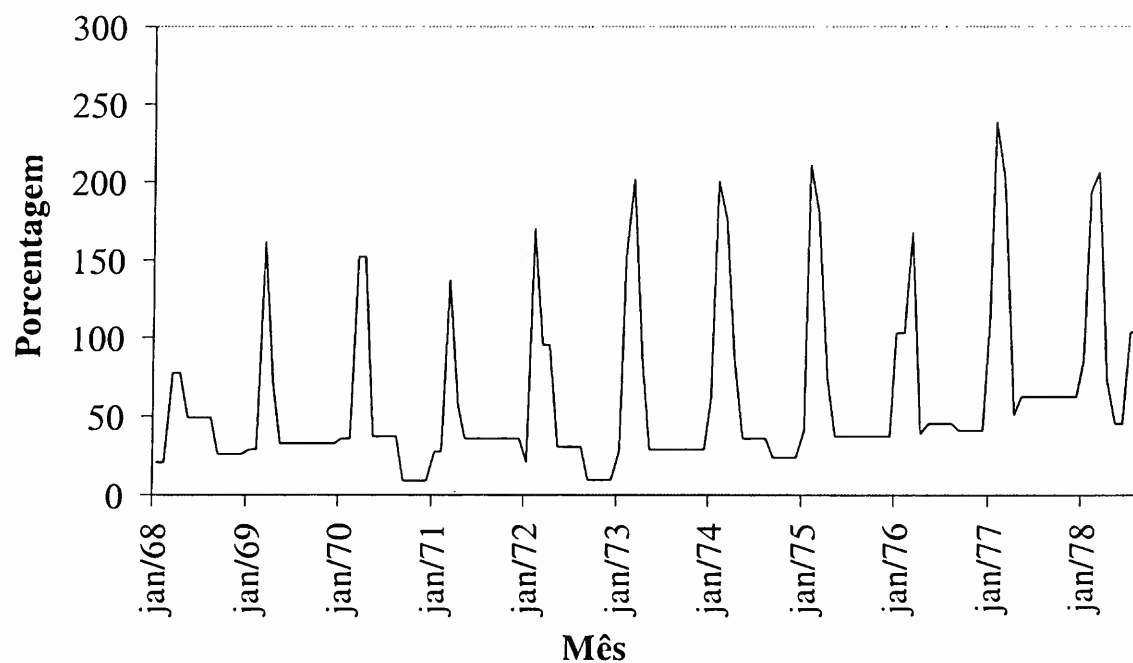
Observa-se que a série de baixas frequências acabou captando as diferenças tanto sazonal como consecutiva, enquanto que a série de altas frequências incorporou o padrão sazonal da série.

Por meio da aplicação da metodologia Box-Jenkins à série alisada (*de-noised*), representada no Gráfico 14, obteve-se:

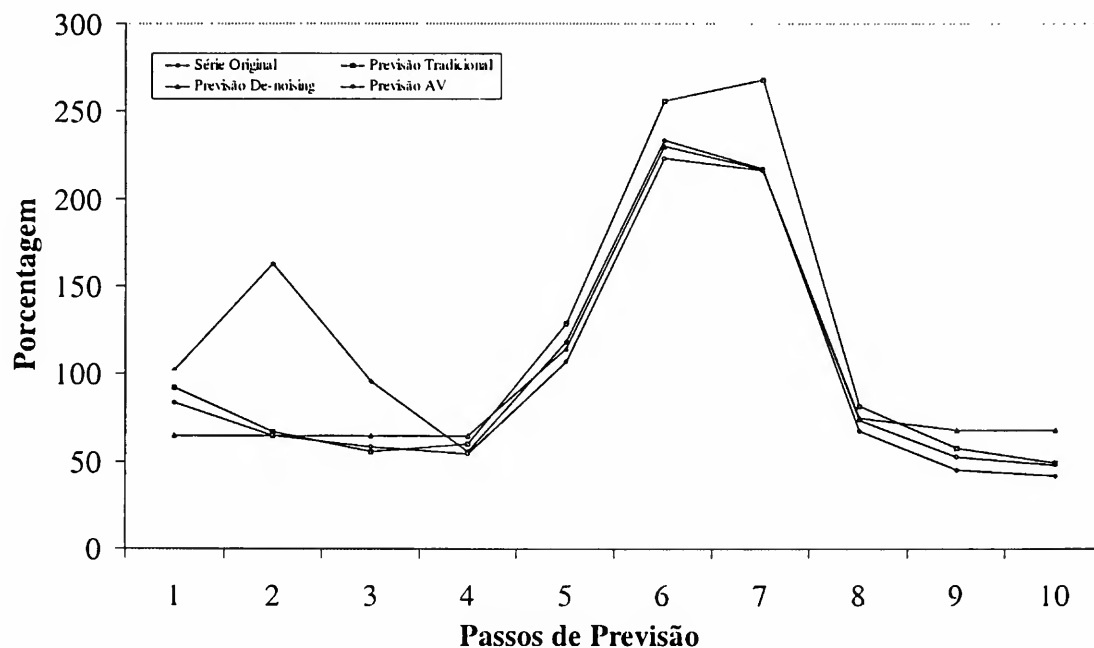
$$(1-L)(1-L^{12}) \left( 1 + \underset{(0.085234)}{0.519918 L^{12}} \right) Fish_t = \left( 1 + \underset{(0.023747)}{0.967718 L} \right) \varepsilon_t,$$

onde  $\varepsilon_t \sim IIN(0, 808.8815)$ . O Gráfico 15 apresenta os valores para a série original e para as previsões pelos três métodos e os erros absolutos médios em porcentagem estão na Tabela 5.

**Gráfico 14**  
**Série Fish Alisada**



**Gráfico 15**  
**Previsões Acerca da Série Fish (%)**



**Tabela 5**

Série	Procedimento	MAPE (%)
<i>ProdInd</i>	Tradicional	4.77909
<i>ProdInd</i>	AV	3.24786
<i>ProdInd</i>	De-noising	6.88524
<i>Expor</i>	Tradicional	9.95489
<i>Expor</i>	AV	15.52875
<i>Expor</i>	De-noising	10.72856
<i>Fish</i>	Tradicional	22.62733
<i>Fish</i>	AV	17.47298
<i>Fish</i>	De-noising	27.35032

## 5 Conclusões

Este artigo apresentou, de forma sistemática, uma introdução às ondaletas e dois possíveis métodos alternativos de previsão. Estes métodos consistem basicamente na aplicação da metodologia ARIMA a subséries extraídas da série original por meio das ondaletas. São utilizados os procedimentos de alisamento (*de-noising*) e de divisão em séries de alta e baixa frequência.

Considerando-se os *MAPEs* referentes às três alternativas de procedimentos de modelagem relativamente às séries de tempo analisadas, observa-se que o procedimento *AV* mostrou-se superior aos demais para duas das mesmas. Isto é um indício de que a modelagem em separado de subséries de baixas e altas frequências pode contribuir positivamente para a qualidade de previsão de séries de tempo. O fato do procedimento de alisamento ter se mostrado sempre inferior ao método tradicional constitui indício de que este primeiro, além de não contribuir positivamente para a qualidade de previsão de séries de tempo, possa estar associado a efeito em sentido contrário.

Cabe ressaltar que os resultados obtidos são dependentes tanto da adequação dos modelos ajustados a cada série ou subsérie analisada quanto, em um nível mais primário, das escolhas inerentes às quantidades de dados disponíveis para os processos de modelagem, às bases de ondaletas empregadas e aos procedimentos de fracionamento e alisamento.

No caso específico das constantes escolhas das cento e vinte e oito primeiras observações para os processos de modelagem e da ondaleta-mãe de Haar, há a possibilidade de as mesmas “privilegiarem” os resultados referentes ao procedimento *AV* ao estabelecerem transformada de ondaletas ortogonal. Ademais, a análise conduzida no presente artigo carece de poder estatístico em dois sentidos:

- i) um conjunto de três séries de tempo consiste de uma amostra muito pequena para uma eventual análise de proporções de relacionamentos entre variáveis aleatórias *MAPE*;
- ii) a análise em questão não considera as variáveis aleatórias *MAPE* de forma inferencial.

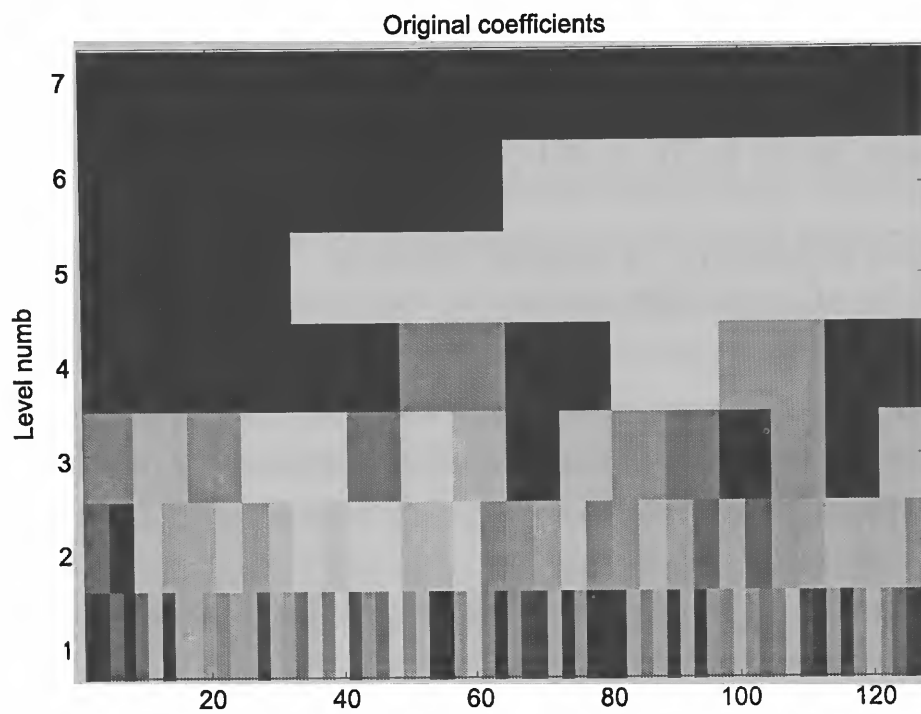
## Referências

- Ariño, M. A. Time series forecasts via wavelets: an application to car sales in the Spanish market. *Discussion Paper 95-30*, ISDS, Duke University, 1995.
- Ariño, M. A.; Vidakovic, B. On wavelet scalograms and their application in economic time series. *Discussion Paper 95-21*, ISDS, Duke University, 1995.
- Daubechies, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41, p. 909-996, 1988.
- Daubechies, I. *Ten lectures on wavelets*. Philadelphia: SIAM, 1992.

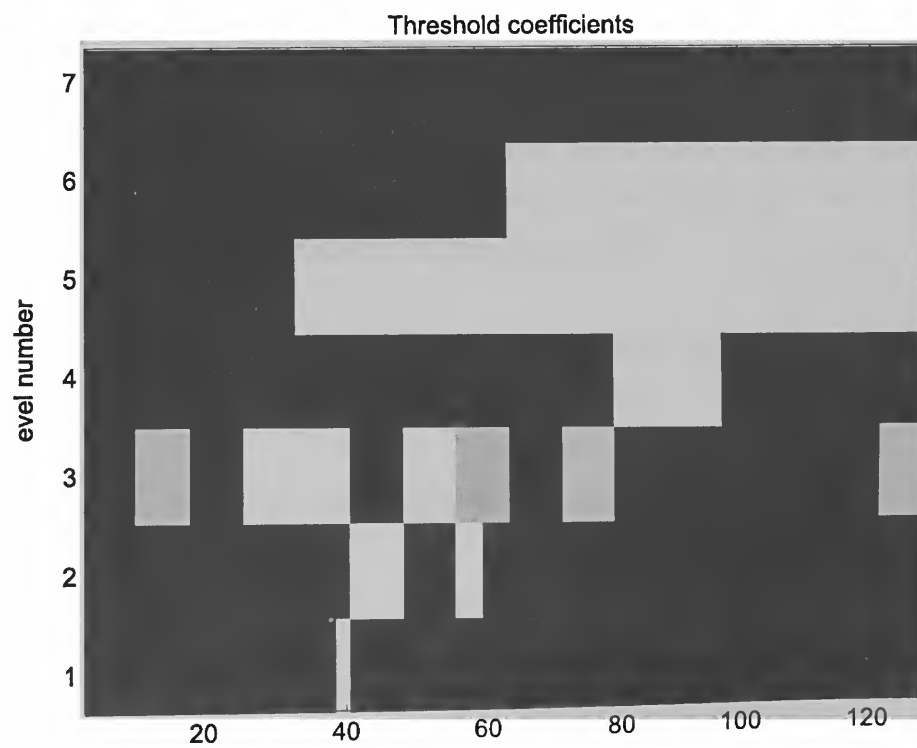
- Donoho, D. L.; Johnstone, I. M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81, p. 425-455, 1994.
- \_\_\_\_\_. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *J. Amer. Statist. Association*, 90, p. 1200-1224, 1995.
- \_\_\_\_\_. Minimax estimation via wavelet shrinkage. *Annals of Statistics*, 26, p. 879-921, 1998.
- Donoho, D. L.; Johnstone, I. M.; Kerkyacharian, G.; Picard, D. Wavelet shrinkage: asymptopia? *J. Royal Statist. Society, Series B*, 57, p. 301-369, 1995.
- \_\_\_\_\_. Universal near minimaxity of wavelet shrinkage. *In: Festschrift for Lucien Le Cam. Research papers in probability and statistics*, p. 183-218, Springer Verlag, 1997.
- Grossmann, A.; Morlet, J. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) *Journal on Mathematical Analysis*, 15, p. 723-736, 1984.
- Johnstone, I. M.; Silverman, B. Wavelet threshold estimators for data with correlated noise. *J. Royal Statist. Society, Series B*, 59, p. 319-351, 1997.
- Mallat, S. A theory for multiresolution signal decomposition: wavelet representation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intellig.*, 11, p. 674-693, 1989.
- Meyer, Y. *Wavelets: algorithms and applications*. Philadelphia: SIAM, 1993.
- Morettin, P. A. *Ondas e ondaletas: da análise de Fourier à análise de ondaletas*. São Paulo: Edusp, 1999.
- Priestley, M. B. *Spectral analysis and time series*. London: Academic Press, 1981.

## Apêndice

**Gráfico A.1**  
**Coefficientes de Ondaletas Originais para a Série *ProdInd***

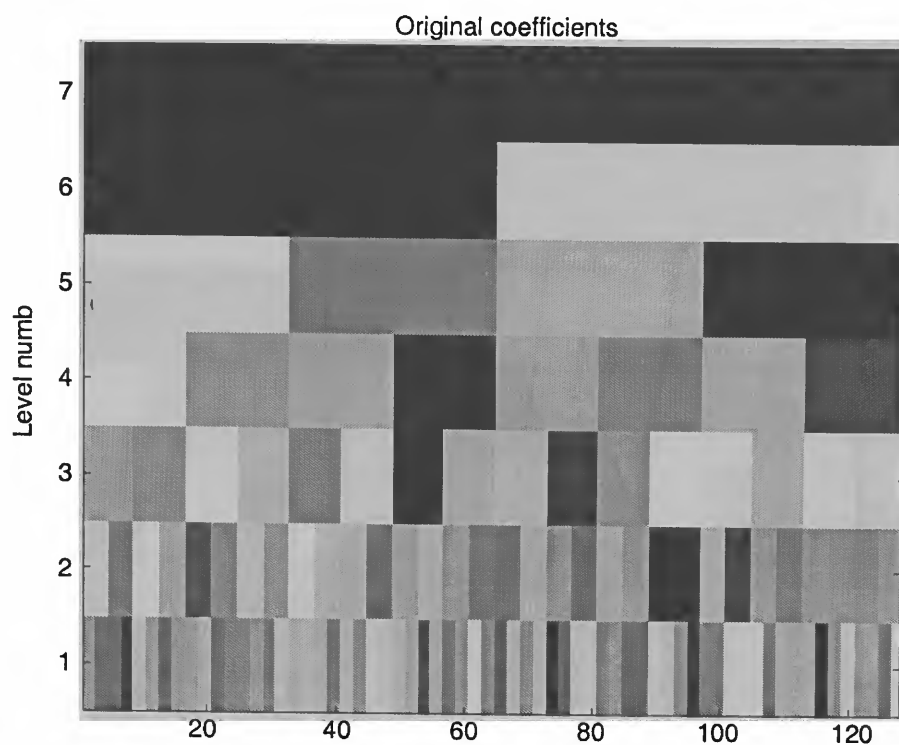


**Gráfico A.2**  
**Coefficientes de Ondaletas Resultantes do Processo de Retirada de Ruído para a Série *ProdInd***

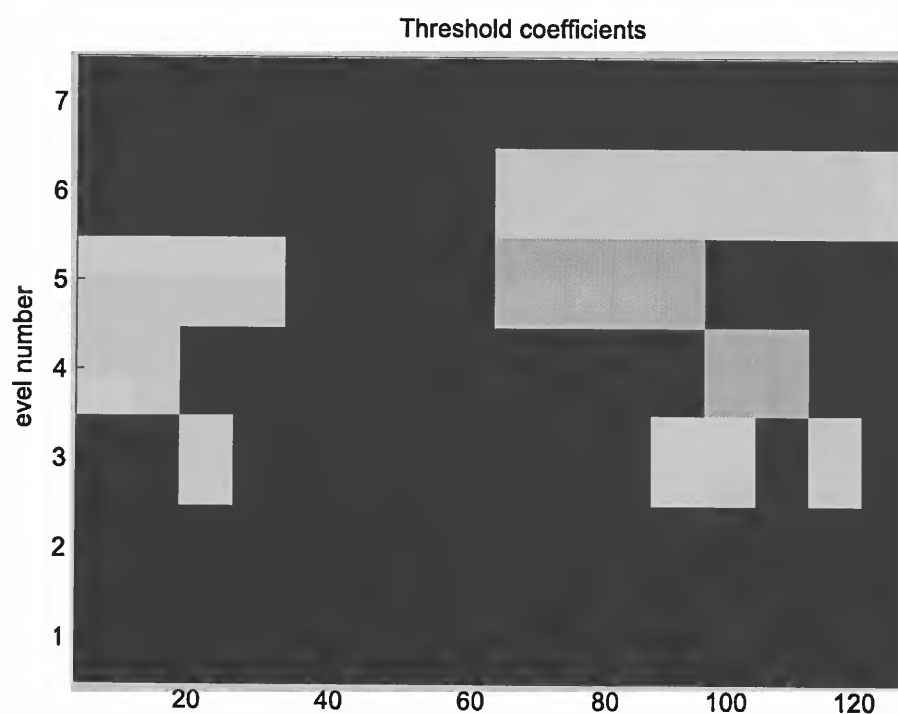




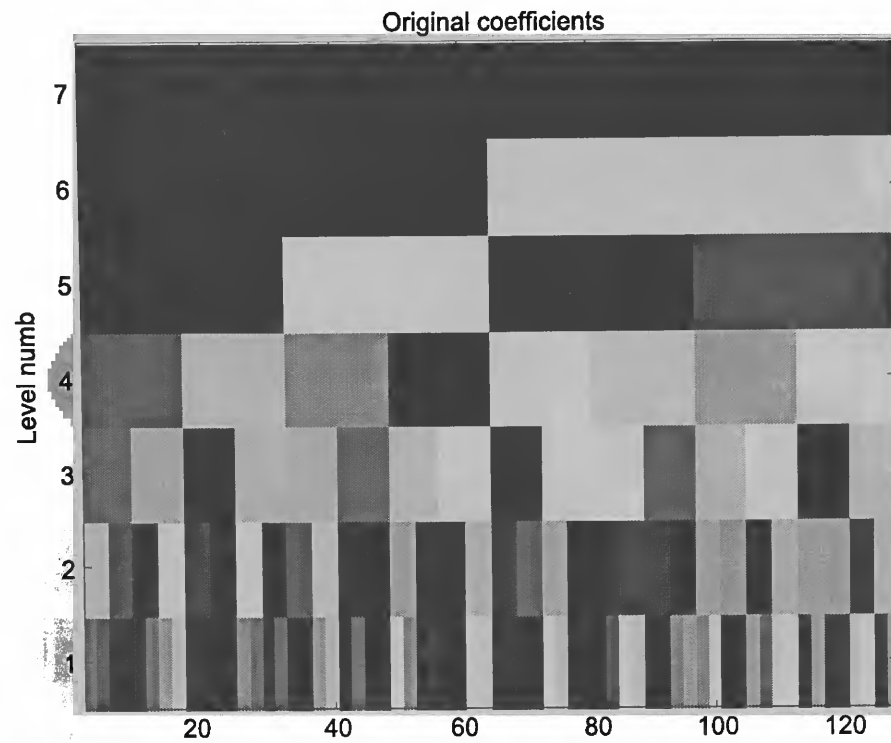
**Gráfico A.3**  
**Coefficientes de Ondaletas Originais para a Série *Expor***



**Gráfico A.4**  
**Coefficientes de Ondaletas Resultantes do Processo de Retirada de Ruído para a Série *Expor***



**Gráfico A.5**  
**Coeficientes de Ondaletas Originais para a Série *Fish***



**Gráfico A.6**  
**Coeficientes de Ondaletas Resultantes do Processo de Retirada de Ruído para a Série *Fish***

