

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS POR ALGORITMOS GENÉTICOS
SUBMETIDAS A RESTRIÇÕES DE FLEXIBILIDADE E FLAMBAGEM

por

Rafael Contino Sommer

Dissertação para obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Janeiro de 2010.

OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS POR ALGORITMOS GENÉTICOS
SUBMETIDAS A RESTRIÇÕES DE FLEXIBILIDADE E FLAMBAGEM

por

Rafael Contino Sommer

Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Ignacio Iturrioz

Prof^a. Dra. Letícia Fleck Fadel Miguel

Prof. Dr. Gladimir Grigoletti

Prof. Dr. Horácio A Vielmo
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, Janeiro de 2010.

AGRADECIMENTOS

Agradeço minha família por sempre ter me incentivado nesta caminhada, sem medo das derrotas que pudessem ocorrer ao longo do caminho. Ensinaram-me como aprender com os erros e sempre acreditar em dias melhores. Agradeço do fundo do coração aos meus pais por terem me educado da forma exemplar, como foi, e por terem me ensinado que a melhor forma de viver é com honestidade e responsabilidade sempre.

Sou também especialmente grato à Universidade Federal do Rio Grande do Sul e ao PROMEC por disponibilizar-me, de forma gratuita e com alta qualidade, a infra-estrutura e o corpo técnico que me auxiliou a entender e admirar a beleza das ciências exigidas na formação de um mestre em engenharia. Agradeço ao professor Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca pela excelente orientação no desenvolvimento deste trabalho e ao colega de trabalho e de mestrado acadêmico, Rodrigo Pruença, pelo companheirismo nos encontros para as provas e durante o desenvolvimento desta dissertação.

Não poderia deixar de mencionar meu grande professor na prática, Sr. Klaus Lilienhal, que durante minha curta experiência profissional sempre foi um pilar de apoio e uma fonte de conhecimentos técnicos nas mais diversos assuntos. Tenho a enorme satisfação de escolher para o estudo de caso deste trabalho uma estrutura idealizada por este grande amigo e colega profissional. Também sou grato à empresa TMSA – Tecnologia em Movimentação S. A., que me acolheu em seu corpo técnico e permitiu o desenvolvimento desta dissertação, utilizando os recursos do departamento de engenharia aplicados no equipamento de sua propriedade.

Por fim, agradeço a empresa ESSS – Engineering Simulations and Scientific Software no desenvolvimento do modelo de simulação e na permissão de utilização da licença para testes do programa de otimização. Sou grato ao amigo Rodrigo Ferraz pelo auxílio na utilização da ferramenta. A todos meus grandes amigos e colegas não mencionados neste texto e que, de alguma forma, contribuíram no meu crescimento pessoal e profissional, gostaria de deixar registrado também o meu especial agradecimento. Sem a amizade e o apoio de vocês, eu não alcançaria este grande objetivo de vida.

RESUMO

Este trabalho demonstra a utilização da Otimização Paramétrica através da técnica de Algoritmos Genéticos. O método proposto é testado no modelo de uma estrutura utilizada para o carregamento de granéis sólidos em porões de navios graneleiros.

A otimização tem dois objetivos principais: a redução de massa total e a redução das máximas tensões absolutas atuantes no modelo, utilizando restrições de flambagem e de deslocamento. A otimização paramétrica modifica as propriedades da seção transversal de cada elemento que compõe o modelo, baseada em uma lista discreta de perfis disponíveis definida pelo usuário.

A otimização inicia com um modelo solucionado através do Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizando a formulação de elementos de viga. As variáveis de saída do modelo numérico, entre elas as tensões máximas devido à tração, compressão, flexão e torção são calculadas, bem como os deslocamentos e fatores de flambagem da estrutura. Os dados de saída selecionados para representar este modelo inicial são direcionados para o algoritmo genético. As melhores opções da população inicial são combinadas para criar uma nova geração, utilizando o Algoritmo Genético NSGA-II (*Nondominated Sorting Genetic Algorithms*). Todo o processo é repetido até que o algoritmo atinja o número máximo de geração proposto pelo usuário.

Uma vez que os dois objetivos da otimização são contraditórios (minimização de massa e tensão), uma fronteira de Pareto, também conhecida como curva de eficiência, é encontrada com os resultados obtidos, permitindo que o usuário possa escolher nesta fronteira a opção que mais lhe convém. Ao final do trabalho, os resultados mostram que a otimização estrutural foi bem sucedida e a comparação com o modelo original ilustra as modificações propostas pelo algoritmo de otimização.

ABSTRACT

“Structural Optimization by means of Genetic Algorithm with Flexibility and Buckling Constrains”

The proposed work is a Parametric Optimization study carried out by means of a Genetic Algorithm and applied to a structural problem. The method is tested over a common type of structure used in equipments that load bulk materials into the ship's hold.

The optimization process has two main objectives: reduce the whole structural mass and reduce the model maximum absolute stresses, using buckling and displacement constrains. The parametric optimization changes the cross section properties of each structural element in the frame model, based on a discrete list of available profiles defined by the user.

The optimization starts with an initial configuration, which are solved by Finite Element Method (FEM) using beam elements. Output variables, including the maximum stresses due to traction, compression, bending and torsion are computed, as well as structure displacements and buckling factors. The outputs of this first population are sent back to the Genetic Algorithm. The best results are combined to create a new generation, using the NSGA II (Nondominated Sorting Genetic Algorithms). The entire process repeats until the algorithm achieved the maximum number of generations proposed by the user.

Since the two optimization objectives (mass and stress reduction) are contradictory, a described Pareto frontier or a called trade-off curve is found with the results, allowing the user to choose where to place the design over this frontier. At the end of the work, results shows that an optimized structure has been achieved and a comparison to the original design illustrate the modifications proposed by the optimization algorithm.

ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO	1
1.1.	Objetivos do Trabalho	1
1.2.	Organização do Trabalho	2
2.	OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS	3
2.1.	Histórico da Otimização de Estruturas	3
2.2.	Tipos de Otimização	5
2.3.	Variáveis de Projeto	6
2.4.	Função Objetivo	6
2.5.	Restrições	7
2.6.	Funções Multi-Objetivos	7
3.	ALGORITMOS GENÉTICOS	13
3.1.	Histórico dos Algoritmos Genéticos	13
3.2.	Principais Aspectos	13
3.3.	Aplicação dos Algoritmos Genéticos	15
3.4.	Algoritmo Genético NSGA-II	15
4.	MECÂNICA DOS SÓLIDOS	18
4.1.	Métodos de Dimensionamento	20
4.1.1	Método das Tensões Admissíveis	20
4.1.2	Método dos Estados Limites	21
4.1.3	Método da Confiabilidade	23
4.2.	Requisitos estabelecidos pelas Normas Regulamentadoras	26
4.3.	Teoria de Barras	27
4.4.	Teoria de Vigas	29
4.5.	Flambagem	32
5.	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)	37

5.1.	Introdução	37
5.2.	Conceitos Básicos.....	38
5.3.	Formulação do Elemento de Barra Elástica.....	38
5.4.	Formulação do Elemento de Viga Elástica	40
6.	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	47
7.	RESULTADOS	55
8.	CONCLUSÕES	64
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	66

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Exemplo de treliça em balanço obtida por Michell em 1904.	3
Figura 2.2 - Exemplos de otimização: Paramétrica (A), de forma (B) e topológica (C) [Pereira, 2001].	6
Figura 2.3 - Exemplo genérico da fronteira de Pareto para valores discretos.	8
Figura 2.4 - Funções g e h de um problema multi-objetivos [Schaffer, 1984].	11
Figura 2.5 - Identificação de uma fronteira de Pareto [Castro, 2001]	11
Figura 4.1 - Estado de tensões triaxiais em um ponto genérico P.	19
Figura 5.1 - a) e b) Elemento 1D com 3 e 2 nós; c) e d) Elemento 2D; e) Elemento 3D 38	38
Figura 5.2 - Elemento de barra e forças nodais associadas aos deslocamentos nodais u_i e u_j [Cook et al, 1989].	39
Figura 5.3 - Elemento de viga a) com seus quatro g.d.l. b) Forças e Momentos associados c-f) Estados deformados associados à ativação de cada g.d.l. [Cook et al, 1989].	40
Figura 6.1 - Exemplo de aplicação da estrutura basculante testada no trabalho 48	48
Figura 6.2 - Modelo de elementos finitos paramétrico da estrutura basculante testada com as cargas e as vinculações consideradas.	49
Figura 6.3 - Superposição de tensões do elemento <i>Beam 4</i> para obter as tensões combinadas 51	51
Figura 6.4 - Fluxograma construído no programa modeFRONTIER para a execução da otimização 53	53
Figura 7.1 – Gráfico tensão x massa de todos os exemplos testados mostrando a curva de Pareto e as duas opções A e B marcadas.	55
Figura 7.2 - Níveis de máxima tensão combinada e perfis do modelo original (vista inferior) 56	56
Figura 7.3 - Deslocamentos e perfis do modelo original (vista lateral) 57	57
Figura 7.4 - Níveis de máxima tensão combinada e perfis do modelo original (vista superior) 57	57

Figura 7.5 - Níveis de máxima tensão combinada da opção A (vista inferior) e perfis encontrados pelo cálculo	58
Figura 7.6 – Deslocamento e perfis da opção A (vista lateral)	58
Figura 7.7 - Níveis de máxima tensão combinada da opção A (vista superior) e perfis encontrados pelo cálculo	59
Figura 7.8 - Níveis de tensões combinadas na opção A do modelo 3D otimizado	59
Figura 7.9 - Perfil mais solicitado à flambagem no modelo final 3D otimizado (ponto A)	60

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.5.1 - Valores tabelados para o fator de comprimento efetivo k em função da vinculação [NBR 8800, 2008]	33
Tabela 6.1 - Tabela de cálculo das cargas de vento frontal sobre a estrutura	49
Tabela 6.2 - Tabela de perfis disponíveis para testes no algoritmo de otimização NSGA II ..	50
Tabela 7.1 – Avaliação do coeficiente de segurança no perfil otimizado através da NBR 8.800	61
Tabela 7.2 – Avaliação do coeficiente de segurança no perfil original através da NBR 8.800	62

LISTA DE SIGLA E ABREVIATURAS

AG	Algoritmo Genético
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
AISC	<i>American Iron and Steel Construction</i>
CAD	<i>Computer Aid Design</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
NBR	Normas Brasileiras Regulamentadoras
NSGA	<i>Nondominated Sorting Genetic Algorithm</i>
PFF	Perfis Formados a Frio
SSRC	<i>Structural Stability Research Council</i>
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
VEGA	<i>Vector Evaluated Genetic Algorithm</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras romanas minúsculas

c	Operador para transformação da combinação de ações	
det	Determinante de matrizes	
f_i	Vetor de forças de corpo	[N]
f	Funções objetivos, Vetor de forças	
f_{gl}	Vetor de forças global	
g_j	Função genérica de restrição de desigualdade	
h	Altura de viga	[mm]
h_k	Função genérica de restrição de igualdade	
k	Parâmetro de flambagem de Euler	
n	Número de ações	
n_{el}	Número de elementos	
r	Raio de giração da seção transversal	[m]
t	Vetor de tração	
u	Vetor de deslocamentos	
u_{gl}	Vetor de deslocamentos global	
v	Deflexão da viga, flecha	[mm]
w	Vetor de deslocamento vertical, carga distribuída	[mm], [N/m]
x	Vetor das variáveis de otimização	
y	Vetor objetivo, distância em relação à linha neutra	

Letras romanas maiúsculas

A	Área, Ação nominal	[cm ²], [N]
A_y	Área efetiva de cisalhamento	[cm ²]
C	Coefficiente de cisalhamento de Timoshenko	
E	Módulo de Elasticidade Longitudinal	[GPa]
G	Módulo de Elasticidade Transversal	[GPa]
I	Momento de Inércia da seção transversal	
I_{xx}	Momento de inércia em relação ao eixo x	[cm ⁴]
I_{yy}	Momento de inércia em relação ao eixo y	[cm ⁴]
J	Função objetivo de otimização, Módulo de torção	
K	Matriz de Rigidez	
$K_{F,EB}$	Matriz de Rigidez à flexão (Teoria Euler Bernoulli)	
$K_{F,T}$	Matriz de Rigidez à flexão (Teoria Timoshenko)	
K_g	Matriz de Rigidez geométrica	
$K_{g,b}$	Matriz de Rigidez geométrica para barras	
$K_{g,v}$	Matriz de Rigidez geométrica para vigas	
K_{gl}	Matriz de Rigidez global	
K_T	Matriz de Rigidez à torção	
L	Comprimento do elemento	[mm]
M	Momento Fletor	[Nm]
$M_{x,Rd}$	Momento Fletor resistente no eixo x	[Nm]
$M_{x,Sd}$	Momento Fletor solicitante no eixo x	[Nm]

$M_{y,Rd}$	Momento Fletor resistente no eixo y	[Nm]
$M_{y,Sd}$	Momento Fletor solicitante no eixo y	[Nm]
N	Força normal	[N]
N_{crit}	Força normal crítica de flambagem	[N]
N_e	Força axial de flambagem elástica	[N]
N_{Sd}	Força axial solicitante de compressão	[N]
N_{Rd}	Força axial resistente de compressão	[N]
N_{rn}	Resistência nominal à compressão	[N]
P	Probabilidade de falha	
Q	Carga genérica	[N]
R	Resistência genérica	[N]
R_d	Resistência Nominal	[N]
S_n	Solicitação Nominal	[N]
S_d	Solicitação de dimensionamento	[N]
T	Matriz ortogonal de transformação de coordenadas	
V	Força cisalhante	[N]
X	Vetor deslocamento de flambagem	
W	Massa total da estrutura	[Kg]

Letras gregas minúsculas

α	Ângulo de distorção da seção transversal da viga	[rad]
ε_{ij}	Tensor de deformação infinitesimal	
η_{ij}	Parcela não linear do tensor de deformação de Green	
θ	Rotação em relação aos eixos x, y e z	[rad]
λ	Multiplicador da carga de Flambagem	
λ_o	Índice de esbeltez	
μ	Deslocamento nodal final nos eixos x, y e z	[mm]
μ_g	Deslocamento global	[mm]
μ_o	Deslocamento nodal inicial nos eixos x, y e z	[mm]
μ_x	Valor médio na distribuição de probabilidade de f_x	
μ_y	Valor médio na distribuição de probabilidade de f_y	
ν	Coefficiente de Poisson	
ξ_{ij}	Tensor de deformação de Green	
ρ	Densidade, Massa específica	[kg/m ³]
σ_a	Tensão axial de cada elemento	[N/m ²]
σ_f	Tensão de flambagem	[N/m ²]
$\sigma_{flexão}$	Tensão de flexão	[N/m ²]
σ_{ij}	Tensor tensão de Cauchy	[N/m ²]
σ_{normal}	Tensão normal	[N/m ²]
σ_y	Tensão de escoamento do material	[N/m ²]
γ	Coefficiente de majoração das cargas	
φ	Fator de correção para a tensão cisalhante média	

Ω Coeficiente de segurança

1. INTRODUÇÃO

A engenharia estrutural é a área dedicada ao projeto e cálculo de estruturas através das teorias estruturais da mecânica dos sólidos. O objetivo principal de uma estrutura é suportar as cargas estáticas e dinâmicas atuantes, absorver energia e transmiti-las para os apoios sem entrar em colapso, sem deformar ou vibrar excessivamente durante sua vida útil. Dentro destes limites, o engenheiro pode escolher a melhor forma construtiva, o tipo de material, o menor custo de fabricação, aspectos de logística e manutenção, entre outros.

Durante o desenvolvimento de um projeto, diversos tipos de materiais e geometrias podem ser testados com o objetivo de obter estruturas com a menor massa e que atendam as condições de carregamento de forma satisfatória. Ao término do projeto, a combinação que melhor atendeu aos requisitos propostos e às condições estabelecidas pelas normas técnicas regulamentadoras do projeto é selecionada e executada.

Nos últimos anos, novas formas de cálculos foram e continuam sendo desenvolvidas com o objetivo de facilitar o método tradicional de escolha das opções satisfatórias. A tradicional forma empírica de tentativa e erro no dimensionamento de uma estrutura possui novos aliados nas diversas possibilidades de programações matemáticas disponíveis atualmente. Quando bem formulada, técnicas de otimização encontram as condições teóricas ideais para um projeto de forma que o método tradicional nunca conseguiria. É com base neste conceito, que este trabalho pretende demonstrar a aplicação de um exemplo prático de otimização através da utilização de algoritmos genéticos.

1.1. Objetivos do Trabalho

O principal objetivo deste trabalho é estudar e entender o uso de algoritmos genéticos de otimização multiobjetivo na prática de projetos de estruturas. Como exemplo, busca-se simultaneamente a redução de massa e tensão combinada em cada ponto de uma estrutura.

Uma aplicação importante de uma otimização multiobjetivo é a do tipo paramétrica com a utilização de variáveis discretas, que correspondem às áreas da seção transversal de cada elemento que compõe a estrutura, a partir de uma lista de perfis comerciais.

Outro objetivo deste trabalho consiste em testar ferramentas comerciais integradas de otimização e análise estrutural.

1.2. Organização do Trabalho

Esta dissertação está subdividida em 8 (oito) capítulos, partindo de uma breve introdução ao tema deste trabalho e seguindo com os demais capítulos, conforme descrição abaixo. A revisão bibliográfica está distribuída ao longo do texto. Normalmente, no início de cada capítulo é realizado um resumo histórico bibliográfico de cada assunto discutido.

O segundo capítulo contém os fundamentos teóricos do conceito de otimização de uma forma geral, bem como uma localização histórica do assunto.

No capítulo 3, são apresentados os principais fundamentos da técnica dos algoritmos genéticos, além de um breve resumo sobre a origem do método, definições, procedimentos, vantagens, parâmetros de configuração e outros tópicos importantes relacionados ao tema.

O capítulo 4 contém uma breve e rápida descrição de teorias da Mecânica dos Sólidos necessárias ao entendimento das equações aplicadas. Caso o leitor desejar conhecimentos mais aprofundados, é possível uma procura na literatura citada durante as definições dos conceitos aplicados.

No capítulo 5 são demonstradas as definições para um entendimento básico do Método dos Elementos Finitos (MEF). Uma breve descrição a respeito da formulação de um elemento de barra e viga elástica é apresentada. No sexto capítulo a formulação do problema estudado é detalhada. A forma da aplicação da estrutura tema deste estudo também é demonstrada.

Nos capítulos seguintes são demonstrados os resultados e as conclusões finais do trabalho. Sugestões para trabalhos futuros que venham seguir a mesma linha de pesquisa são propostas e, ao final da dissertação, a lista de referências bibliográficas é apresentada.

2. OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS

2.1. Histórico da Otimização de Estruturas

A otimização estrutural teve sua origem com Maxwell por volta de 1890, apesar de ter sido desenvolvida com maior intensidade somente ao final do século XX. Maxwell utilizou a teoria da elasticidade para calcular o campo de tensões mecânicas principais de uma estrutura sujeita à restrição de deslocamento. A partir da obtenção destas linhas de isotensões principais, ele propôs uma estrutura alinhada com as direções principais de tensão. Desta forma, os elementos estariam sujeitos apenas à tração e compressão. Os resultados foram surpreendentes para sua época, apesar de serem considerados sem aplicação prática devido à complexidade das estruturas obtidas [apud Silva, 2003].

No início do século XX, Michell deu continuidade ao trabalho de Maxwell, buscando o menor peso de estruturas a partir das tensões atuantes nas barras para cada caso de carga. Até os anos 60, seus estudos ficaram esquecidos, porque as estruturas encontradas por aquela forma de cálculo geravam infinitas barras alinhadas às isotensões principais da estrutura sendo de difícil aplicação ao cotidiano real.

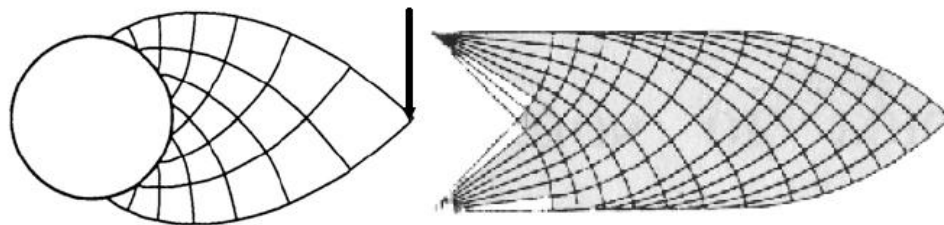


Figura 2.1 - Exemplo de treliça em balanço obtida por Michell em 1904.

A partir do desenvolvimento da computação e do Método de Elementos Finitos (MEF), foi possível a solução de problemas que eram complexos demais para serem resolvidos analiticamente. A otimização de estruturas voltou a ser estudada e novas formulações foram criadas. A formulação teórica de alguns algoritmos já havia sido desenvolvida, no entanto somente com o desenvolvimento das linguagens de programação e máquinas de alto desempenho, começaram a ser implementados. [Silva, 2003].

Durante a década de 80, novas formas de visualização tornaram as simulações uma ferramenta mais acessível ao público acadêmico e comercial. Na mesma década, os primeiros

programas computacionais comerciais com os módulos de otimização estrutural foram desenvolvidos.

Durante os anos 90, programas de cálculo estrutural que utilizavam o Método dos Elementos Finitos passaram a incluir algoritmos de otimização como parte integrante de seus programas. Atualmente, o assunto é observado em diversos artigos e pela quantidade de trabalho publicados na área, deduz-se que a formulação de novos algoritmos segue sendo desenvolvida e aplicada na literatura científica e na indústria em geral com grande intensidade.

Os primeiros algoritmos desenvolvidos utilizavam técnicas de programação matemática linear e critérios de aproximação que exigiam a utilização de variáveis contínuas. O primeiro e mais simples algoritmo linear de programação surgiu em 1947, conhecido como Simplex, método que basicamente procura reduzir continuamente o valor da função objetivo, percorrendo os conjuntos de funções viáveis até que o mínimo seja atingido.

Quando são utilizadas variáveis contínuas para minimização de massa em otimização paramétrica, a área da seção transversal de um perfil pode assumir qualquer valor real no domínio de busca. Assim, os resultados são difíceis de serem executados, pois os perfis selecionados possuem áreas com valores fracionados, diferente das formas e geometrias encontradas comercialmente.

O Método de Monte Carlo, 1949, foi um dos precursores na utilização de variáveis discretas para encontrar soluções de equações diferenciais complexas. O método original é baseado em testes randômicos computacionais para estudar problemas complexos. São métodos interessantes de serem utilizados em sistemas com grande número de graus de liberdade, por serem impossíveis de serem resolvidos analiticamente. Definições sobre variáveis contínuas e variáveis discretas serão descritas adiante.

De uma forma geral, engenheiros sempre são obrigados a lidar no dia-a-dia com variáveis discretas, pois devem trabalhar com perfis comerciais e com diversos tipos de limitação no processo de manufatura. Por este motivo, um grande esforço acadêmico tem sido despendido em otimizações deste tipo.

Diversos artigos iniciaram testes com técnicas eficientes de soluções através de variáveis discretas. Dentre eles, é possível citar artigos com técnicas de aproximações com relaxamentos (Zhang et al., 1993), com linearização seqüencial (Duan, 1986), com funções de penalidade (Cai et al., 1993 e Turkkan, 2003), com relaxação Langrangeana (Ringertz, 1988; Schmit et al., 1980), com o método Langrangeano discreto (Wah et al., 1996), entre outros. Técnicas de

relaxação e penalidades têm melhores condições de lidar com problemas discretos, pois não necessitam ter gradientes de funções ou funções convexas para garantir a existência de pontos ótimos nos domínios de busca.

Variáveis discretas não possuem propriedades como gradientes de funções ou convexidade de funções, pois não existe uma função em domínio contínuo, somente pontos discretos distribuídos no domínio global [Juang, 2003]. Quando o problema é definido por variáveis discretas, somente um número finito de opções de perfis comerciais é selecionado, tornando a fabricação economicamente mais viável.

2.2. Tipos de Otimização

A otimização estrutural é subdividida em três grandes abordagens gerais.

- A Otimização Paramétrica (*Size Optimization*) modifica apenas alguns parâmetros da estrutura, definidos pelo usuário. Como por exemplo, a geometria dos elementos ou o tipo de material que compõe a estrutura, mantendo a forma global da estrutura. Conforme explicado anteriormente, este será o caso analisado neste trabalho;
- Na Otimização de Forma (*Shape Optimization*), são alterados os contornos da estrutura e, com isto, as posições dos nós da malha MEF, a fim de encontrar uma condição de forma ótima ao projeto;
- Na Otimização Topológica (*Topology Optimization*), as variáveis da otimização podem ser as ligações entre as partes de uma estrutura. Ao final de um estudo, pode-se identificar a possibilidade de retirada de perfis que não contribuem de forma significativa. Outro caso comum é formulado quando a variável definida é a própria densidade do material e o objetivo é buscar o mínimo volume da estrutura, nestas situações o algoritmo pode encontrar regiões onde a densidade requerida é tão baixa que pode haver retirada de material naquele ponto [Silva, 2003].

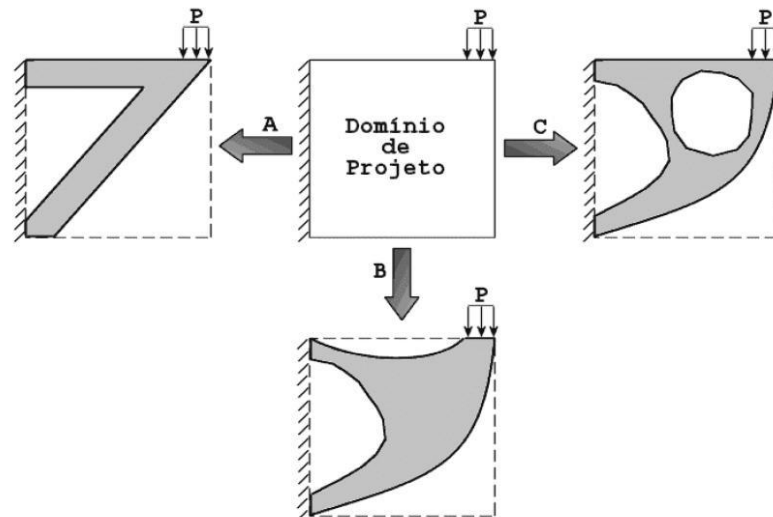


Figura 2.2 - Exemplos de otimização: Paramétrica (A), de forma (B) e topológica (C) [Pereira, 2001].

2.3. Variáveis de Projeto

As variáveis de projeto são selecionadas para serem características que podem ser alteradas durante o processo de otimização. As variáveis de um projeto podem ser classificadas em contínuas, que assumem valores em uma escala contínua, para as quais valores fracionais fazem sentido e variáveis discretas, que podem assumir um número finito de valores (valores compreendidos dentro de certo conjunto fixo).

Do ponto de vista físico, as variáveis de projeto podem representar as seguintes informações sobre a estrutura:

- Propriedades mecânicas ou físicas do material;
- A topologia da estrutura, isto é, o padrão de conexão dos elementos ou o número de elementos numa estrutura;
- A configuração ou a forma geométrica da estrutura;
- Dimensões de seções transversais ou comprimento dos elementos.

2.4. Função Objetivo

Para que a formulação de um problema possa ser considerada uma otimização, inevitavelmente é necessário haver uma forma de medir e avaliar o projeto a cada passo no

progresso em busca do projeto ótimo. Geralmente chamada de função objetivo, esta função deve quantificar o que se quer aperfeiçoar e será função das variáveis de projeto selecionadas.

O projeto de estruturas buscando o menor volume é uma das principais utilizações e surgiu principalmente na necessidade da indústria aeronáutica. Posteriormente, progrediu na busca de reduzir custos de material na fabricação de componentes na indústria em geral.

2.5. Restrições

As restrições aplicadas em problemas de otimização podem ser classificadas em três grupos:

- Restrição lateral

$$x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max}, \quad i \in \{ 1, 2, \dots, n \} \quad (2.1)$$

- Restrição de desigualdade

$$g_j(x) \geq 0, \quad j \in \{ 1, 2, \dots, n \} \quad (2.2)$$

- Restrição de igualdade

$$h_k(x) = 0, \quad k \in \{ 1, 2, \dots, n \} \quad (2.3)$$

Além desta classificação funcional, as restrições também são classificadas como locais e globais. Restrições locais se referem a todos os pontos no domínio geométrico, por exemplo, as restrições de tensão mecânica e deslocamento.

A restrição global se refere ao comportamento global da estrutura, tais como, trabalho de forças externas da estrutura, frequência de ressonância vibratória, entre outras [Silva, 2003].

2.6. Funções Multi-Objetivos

Muitos casos reais de projeto ou tomada de decisões em problemas diversos envolvem simultaneamente a otimização de múltiplos objetivos.

Problemas formulados com apenas um objetivo buscam encontrar o melhor ponto de projeto no domínio de busca. Normalmente, esta condição é um mínimo ou máximo global da função objetivo, dependendo de como o problema foi formulado.

No caso da otimização com múltiplos objetivos não existe uma melhor solução única que satisfaça todos os objetivos. Problemas deste tipo, possuem um conjunto de soluções que são melhores do que todas as outras soluções encontradas no espaço de busca, porém podem ser

inferiores a outras soluções quando são consideradas apenas um objetivo. Estas soluções são conhecidas como soluções ótimas de Pareto (Edgeworth) por formarem a fronteira de Pareto. Todas as possíveis soluções em uma fronteira são conhecidas como fronteira de soluções não dominantes. Esta curva também é chamada de curva de eficiência [Haftka, 1991].

A figura 2.3 exemplifica um caso genérico de fronteira de Pareto para valores discretos. Os quadrados representam as soluções viáveis. Valores menores das funções f_1 e f_2 são preferenciais aos valores maiores. O ponto C não é considerado parte da fronteira, pois é dominado pelos pontos A e B. Por não serem dominados por nenhum outro ponto, os pontos A e B fazem parte da fronteira de Pareto [Haftka, 1991].

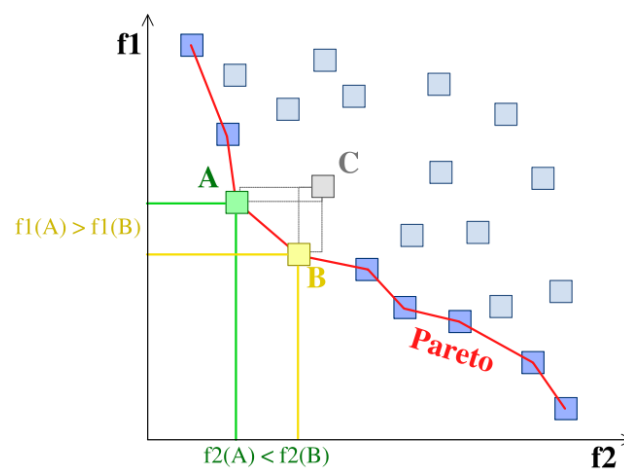


Figura 2.3 - Exemplo genérico da fronteira de Pareto para valores discretos.

Uma vez que nenhuma das soluções não dominantes encontradas é absolutamente melhor do que as outras, qualquer uma delas é uma solução aceitável. Entretanto, existe uma diferença sutil entre um conjunto de soluções não-dominadas e um conjunto ótimo de Pareto. Um conjunto de soluções não-dominadas é definido no contexto de uma amostra do espaço de busca, enquanto que o conjunto ótimo de Pareto é definido em relação a todo o espaço de busca [Srinivas e Kalyanmoy, 2003].

A escolha de uma solução preferencialmente a outras, requer conhecimento específico do problema em análise ou outros fatores relevantes específicos, como poderá ser observado ao final deste trabalho.

Por trabalhar com populações de pontos discretos, um número elevado de soluções não dominantes pode ser encontrado através da utilização dos AGs. A primeira proposta de utilização neste sentido foi conduzida por Schaffer (1984). O algoritmo proposto VEGA – *Vector Evaluated Genetic Algorithm* realiza ciclos de seleções independentes, de acordo com os

objetivo do problema. A proposta é que toda nova população deve ser modificada através do conceito de mutação e cruzamento entre os genes paternos, para que pudesse ocorrer a criação de novas gerações de indivíduos a partir de grupos diferentes. O algoritmo proposto funcionou bem durante as primeiras gerações. Porém, em algumas situações, o algoritmo obteve um direcionamento preferencial que conduzia para a convergência em uma região específica, ou mesmo somente para alguns indivíduos [Srinivas et al., 2003].

Entretanto, para que uma decisão possa ser tomada de forma correta, não é seguro obter como resposta de múltiplos objetivos apenas pontos em uma região específica. Ao invés disto, o importante é encontrar tantos pontos não dominantes quantos forem possíveis, para que justamente a fronteira de Pareto possa ser observada.

Goldberg (1989) sugeriu um procedimento de procura não dominante para superar o ponto fraco do algoritmo VEGA, esta nova proposta implementada por Deb (1994) foi chamada de NSGA. Este algoritmo consegue distribuir a população por toda a fronteira de Pareto [Srinivas et al., 1994] e por este motivo foi selecionado para ser utilizado neste trabalho. As características deste algoritmo de otimização serão detalhadas na sessão 3.4.

Geralmente, problemas de otimização estrutural com multiobjetivos buscam reduzir o peso, o custo de fabricação ou o nível de tensões de uma estrutura, mantendo as características de segurança e confiabilidade em um nível satisfatoriamente elevado.

2.7. Formulação de um Problema de Otimização Multi-Objetivos

Um problema de otimização multi-objetivos pode ser descrito por um vetor y com n funções objetivos que dependem de um vetor x de m variáveis independentes x [Castro, 2001]:

$$\text{minimize / maximize} \quad y = f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \quad (2.4)$$

$$\text{sujeito a} \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in X \quad (2.5)$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in Y \quad (2.6)$$

Onde:

y = Vetor objetivo;

f_i = Funções objetivos;

x = Vetor de decisão;

x_i = Variáveis de decisão.

Como demonstrado na sessão 2.6, o conjunto de soluções para o problema com multiobjetivos consiste em todos os vetores de decisão que não podem melhorar o valor de qualquer objetivo, sem a degradação de pelo menos algum dos outros. Estes vetores compõem a fronteira ótima de Pareto.

É possível descrever as soluções ótimas de Pareto formalmente para um problema de minimização puro, isto é, onde todas as funções objetivas devem ser minimizadas, pelas seguintes definições:

Definição 1: Em função da dominância.

Um ponto $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ domina um outro ponto $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ se:

$$i \in \{ 1, 2, \dots, n \} : f_i (A) \leq f_i (B) \text{ e} \quad (2.7)$$

$$j \in \{ 1, 2, \dots, n \} : f_j (A) < f_j (B) \quad (2.8)$$

Definição 2: Em função da solução não-dominada ou ótima de Pareto

Um ponto A é uma solução não-dominada e pertence à fronteira de Pareto se não existe nenhum outro ponto B, tal que B domine A. Em geral, para cada região viável existe um subconjunto S de soluções não-dominadas, conhecidas como ótimos de Pareto.

Outro exemplo simples de otimização multiobjetivo, porém com variáveis contínuas, que foi testado por Schaffer, 1984, consiste na função f_2 composta de duas funções $g(x)$ e $h(x)$.

$$f_2 = (g(x); h(x)), \quad \text{sendo} \quad (2.9)$$

$$g(x) = x^2 \quad \text{e} \quad (2.10)$$

$$h(x) = (x-2)^2 \quad (2.11)$$

A figura 2.4 mostra a representação gráfica das funções objetivos g e h , sendo fácil identificar que as soluções ótimas de Pareto devem estar compreendidas no intervalo $[0, 2]$, já que fora desta região as duas funções aumentam seus valores.

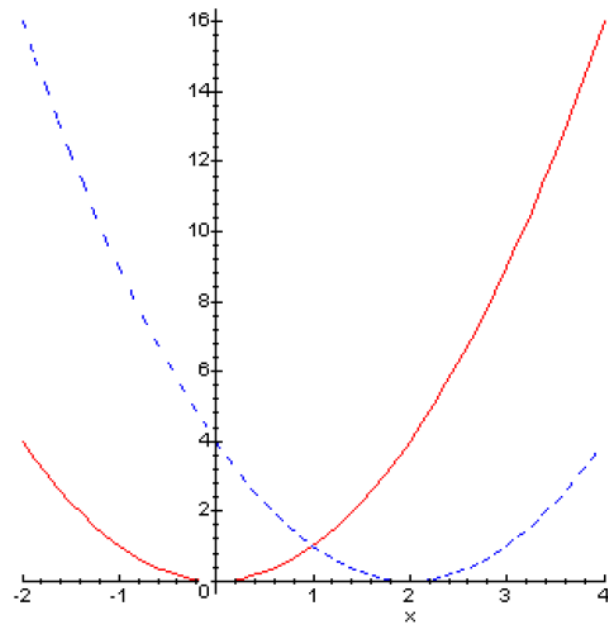


Figura 2.4 - Funções g e h de um problema multi-objetivos [Schaffer, 1984]

Dentro do intervalo $[0, 2]$ acontece uma compensação entre as funções objetivos. Enquanto uma cresce, a outra diminui de valor. Não sendo, portanto, tão trivial identificar a fronteira de Pareto. Usualmente, recorre-se a um gráfico no espaço das funções objetivos para tais conclusões, conforme mostra a figura 2.5.

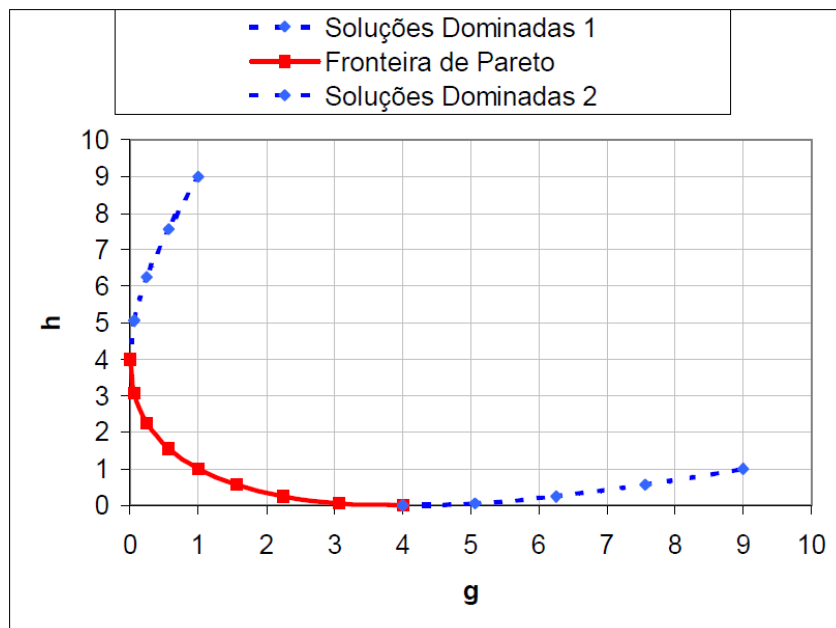


Figura 2.5 - Identificação de uma fronteira de Pareto [Castro, 2001]

O Método de Monte Carlo também pode ser utilizado para encontrar a fronteira de Pareto em problemas com variáveis discretas, porém o esforço computacional neste caso seria maior, quando comparado com Algoritmos Genéticos. Na verdade, o AG não deixa de ser um avanço dos tradicionais métodos de busca aleatórios, pois se trata de um método de busca evolucionário direcionado, como será detalhado no capítulo 3.

Em última análise, é importante a utilização de uma ferramenta que encontre o conjunto das soluções não-dominadas, para que o projetista tenha condições de escolher aquela que melhor atenda suas necessidades no projeto. Este é o principal apoio que uma otimização multiobjetivos pode trazer para o projeto mecânico.

3. ALGORITMOS GENÉTICOS

3.1. Histórico dos Algoritmos Genéticos

Os Algoritmos Genéticos (AGs) são modelos computacionais inspirados na histórica teoria das espécies de Darwin. Esta teoria propôs que os seres vivos são resultado da evolução natural dos genes. Darwin postulou que na natureza, aqueles seres vivos com melhores características ou adaptabilidades, tendem a sobreviver frente aos demais. Estes indivíduos teriam maior chance de se reproduzir e perpetuar seus descendentes. Baseado neste conceito, as características positivas tendem a permanecer entre as gerações com o passar do tempo, ao passo que as características desfavoráveis tendem a serem eliminadas.

Durante os anos 50 e 60, muitos biólogos começaram a criar simulações computacionais de sistemas genéticos. John Holland (1975) publicou seu livro intitulado “*Adaptation in Natural and Artificial Systems*” e David Goldberg (1989) edita o trabalho “*Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*” considerados os livros precursores mais importantes sobre os AGs.

Através da seleção natural, a frequência de um gene vantajoso que apresenta características positivas aumenta gradativamente na população. A vantagem conferida pelo gene pode se refletir em diversos fatores que façam com que os indivíduos que o apresentem sejam mais aptos a se perpetuar durante as gerações.

3.2. Principais Aspectos

Os AGs transformam uma população de indivíduos numa nova geração, utilizando os princípios Darwianos de reprodução e sobrevivência dos mais aptos, pela aplicação dos operadores genéticos, tais como, seleção, cruzamento e mutação.

As variáveis são representadas como genes em um cromossomo. O método combina a sobrevivência dos mais aptos através da hereditariedade durante os cruzamentos genéticos e as mutações dos elementos. A informação tem seu código genético modificado através de seus operadores genéticos, gerando uma nova população com melhorias nas soluções propostas.

O cruzamento (*crossover*) é o operador responsável pela recombinação de características dos pais durante a reprodução, permitindo que as próximas gerações herdem essas características.

Existem duas formas comuns de troca de informações:

- Um ponto: O ponto de cruzamento é definido de forma aleatória e a partir deste ponto as informações genéticas dos pais serão trocadas;
- Multiponto: A troca do material genético ocorre através de muitos pontos do cromossomo.

A mutação é responsável pela manutenção da diversidade genética de uma população, alterando arbitrariamente um ou mais componentes de um cromossomo. A mutação assegura que a probabilidade de se chegar a qualquer ponto no espaço de busca nunca seja zero, com o intuito de contornar problemas de ótimos locais [apud Souza, 2009].

O processo de busca inicia através de uma população inicial, verificada na função objetivo e segue até que um número de gerações máximo estabelecido ou outro critério de parada seja encontrado. Usualmente, um AG padrão consiste nestas três operações básicas: seleção, mutação e cruzamento.

Os AGs diferem dos métodos tradicionais de busca devido aos seguintes aspectos [Goldberg, 1989]:

- Trabalham com uma codificação do conjunto de parâmetros e não diretamente com estes parâmetros;
- Trabalham com um conjunto de indivíduos numa população e não com um único indivíduo;
- Utilizam informações de custo ou recompensa para avaliar o objetivo proposto e não derivadas de funções, como em outros métodos;
- Utilizam regras de transição probabilísticas e não determinísticas.

Para realizar o processo de seleção são utilizados valores estatísticos. Apesar de aleatórios, eles não são procuras aleatórias não direcionadas, pois exploram informações históricas para encontrar novos pontos de busca, exatamente onde são esperados os melhores desempenhos.

O AG tem-se mostrado muito eficiente na procura de soluções para problemas de otimização em domínios complexos. A grande vantagem na utilização dos AGs está na possibilidade de definir de forma discreta as variáveis de projeto e, por consequência, quais tipos de perfis poderão ser testados durante as rotinas de cálculo.

Neste trabalho, cada opção testada contém uma seqüência de áreas de seção transversal obtidas de uma lista de perfis pré-definida. Cada geração criada é sempre re-avaliada através da função objetivo.

3.3. Aplicação dos Algoritmos Genéticos

AGs têm sido aplicados no projeto mecânico de forma mais recorrente a partir dos anos 90. Dado um conjunto de perfis de aço (opções) disponíveis, deseja-se encontrar aqueles que melhor atendam as condições especificadas pelo projeto.

A função objetivo fornece a informação numérica do desempenho de cada opção na população. Nela estão representadas as características do problema que o AG necessita para realizar seu objetivo, sendo expressa normalmente como:

$$J = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.1)$$

onde x_1, x_2, \dots, x_n são as variáveis que o algoritmo procura determinar para otimizar a função J .

Na aplicação em otimização de estruturas, as melhores opções são mantidas, baseado no conceito da seleção natural.

AGs podem resolver problemas de otimização que utilizam variáveis contínuas e discretas. Neste trabalho, serão utilizadas variáveis discretas.

Atualmente, muitos programas comerciais possuem os módulos de otimização com AGs inclusos no seu banco de dados. Para utilizá-los, o usuário necessita definir parâmetros dos operadores genéticos (i.e probabilidade de cruzamento e mutação), as variáveis do problema, a função objetivo que refletirá a assertividade de cada opção testada e o critério final de parada.

As vantagens do emprego de AGs em problemas de otimização são consideráveis principalmente pela sua versatilidade na obtenção de soluções ótimas globais, enquanto que suas desvantagens serão sanadas por uma maior consolidação da técnica e pelo avanço das capacidades computacionais [Castro, 2001].

3.4. Algoritmo Genético NSGA-II

O algoritmo conhecido como NSGA-II (*Nondominated Sorting Genetic Algorithm*) foi proposto por Deb et al. (2000) para sugerir uma modificação ao algoritmo básico NSGA inicialmente proposto por Srinivas e Deb (1994).

A idéia do algoritmo básico NSGA é a utilização de um procedimento de seleção por ordenamento para enfatizar as soluções não dominantes e de um método, definido pelos autores como distância de agrupamento, voltado para a criação de nichos com o objetivo de manter a diversidade da população. O fluxograma deste algoritmo é demonstrado na figura 3.1.

As soluções não dominadas compartilham os seus valores de aptidão, segundo suas distâncias Euclidianas. O valor da aptidão de cada indivíduo é dividido pelo contador de nichos, que é proporcional ao número de vizinhos ao seu redor. Então, a reprodução da população é efetuada utilizando a aptidão compartilhada, ou seja, como o primeiro nível de soluções não dominadas possui as mais altas aptidões, um maior número de cópias dos seus indivíduos será realizado e levará a busca para a fronteira ótima de Pareto. Este procedimento proporciona a co-existência de pontos ótimos múltiplos na população [Castro, 2001].

A principal diferença do NSGA em relação ao AG simples está no fato da população ser ordenada com base no nível de dominância dos indivíduos antes do procedimento de seleção ser aplicado. Entretanto, durante a utilização do algoritmo básico NSGA, as maiores críticas foram:

1. Alta complexidade computacional para procura das soluções não dominantes em grandes populações, principalmente pela procura ser realizada a cada geração;
2. A falta de elitismo no algoritmo para garantir que as boas opções fossem mantidas, acelerando o processo de busca e evitando que, uma vez encontradas, fossem perdidas;
3. Necessidade de especificar um parâmetro de troca pelo usuário para obter boa diversidade na população, ocasionando dificuldades para se encontrar o parâmetro correto.

Para superar estas dificuldades, o NSGA-II foi proposto com a introdução do conceito de elitismo, de uma forma mais rápida de procura por ordenamento e pela determinação da métrica da distância de agrupamento, que elimina a necessidade de um parâmetro externo definido pelo usuário [Deb et al., 2000].

Para obter uma estimativa da densidade de soluções ao redor de um ponto da população, a distância entre duas soluções adjacentes é utilizada para formar um cubo (ou um quadrado) que contenha este ponto, sem que inclua nenhum outro ponto da população. Esta distância é chamada de distância de agrupamento. Uma comparação entre as distâncias de agrupamento guia o processo de seleção a fim de obter uma fronteira de Pareto uniformemente distribuída.

A população inicial considerada em um estudo com AGs pode trazer relevância aos resultados. Caso seja considerada uma população inicial muito grande, o esforço computacional para poder testar todos os indivíduos pode onerar demasiadamente o estudo. Ao passo que, a consideração de uma população pequena pode trazer deficiência de indivíduos para uma análise consistente. Assim, a literatura técnica do NSGA-II sugere que a população inicial em um estudo

deve ser na ordem de 2 vezes o número de variáveis utilizadas no modelo, multiplicado pelo número de objetivos da otimização. O critério de parada normalmente utilizado é o número de gerações máximas, como pode ser observado no fluxograma abaixo.

O algoritmo NSGA-II tem aplicações em diversas áreas da engenharia. No estudo de dinâmica de estruturas, o trabalho de [Deb e Gupta, 2004] analisa o comportamento de manobra de uma ponte rolante para maximizar a produtividade e minimizar a energia requerida pelo sistema. Na área de otimização de estruturas, é possível citar um problema com objetivos de redução de seção transversal de perfis e maximização de momentos de inércia [Datta e Deb, 2004], entre outros.



Figura 3.1 – Fluxograma do NSGA-II

4. MECÂNICA DOS SÓLIDOS

A Mecânica dos Sólidos estuda o comportamento de materiais submetidos a ações mecânicas externas. A disciplina faz parte de um estudo maior chamado de Mecânica do Contínuo, que supõem não haver descontinuidades na microestrutura dos materiais. A Mecânica dos Sólidos teve origem após a criação do cálculo diferencial na Inglaterra, com o patriarca da física clássica Isaac Newton e outros grandes nomes da ciência durante o século XV. Newton foi o primeiro a propor a unificação das três leis do movimento e a provar que estas leis governam também o movimento dos objetos cotidianos e celestiais.

As primeiras teorias de resistência dos materiais foram criadas para auxiliar as metodologias de cálculo existentes na época. Os primeiros conceitos de tensões mecânicas foram desenvolvidos para representar a amplitude das solicitações nos materiais. A partir destes primeiros estudos, os limites de escoamento e de ruptura de cada material começaram a ser melhor estudados e tabelados pelos cientistas da época.

Durante a II Guerra Mundial, as teorias de resistência dos materiais tiveram um avanço bastante significativo. Neste período, grandes nações investiram uma quantia considerável de recursos na pesquisa e desenvolvimento de novas tecnologias, que acabou desenvolvendo diversas disciplinas da engenharia, inclusive áreas desconhecidas, como a Mecânica da Fratura e a fadiga de materiais.

No dimensionamento de estruturas mecânicas, é preciso resolver as equações de equilíbrio do conjunto analisado, considerando as vinculações e as cargas atuantes. A Mecânica do Contínuo e a Teoria da Elasticidade descrevem os fundamentos para a solução de problemas envolvendo estruturas carregadas e seus deslocamentos. A equação de equilíbrio pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (4.1)$$

O termo σ_{ij} refere-se à tensão na direção do eixo j perpendicular ao eixo i , f é o vetor de forças de corpo externas e representa a força aplicada por unidade de volume. Estas equações formam a base de toda a mecânica do contínuo. É possível dizer que as equações de equilíbrio são restrições de igualdade que devem ser satisfeitas a cada iteração em rotinas de otimização [Sant'Anna, 2002]. A figura 4.1 demonstra o estado triaxial de tensões em um ponto genérico P.

Os trabalhos de Boresi e Chong (1987), Atkin e Fox (1980) apresentam de forma detalhada as deduções das equações de equilíbrio e da Teoria da Elasticidade.

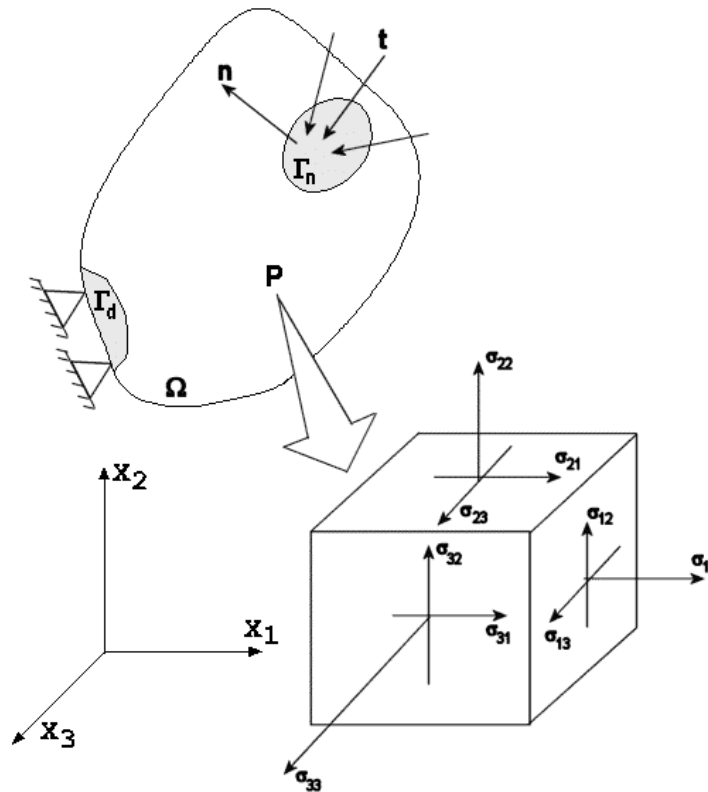


Figura 4.1 - Estado de tensões triaxiais em um ponto genérico P

Conhecendo os componentes de tensão σ_{ij} e as normais n_j de uma superfície em um elemento diferencial, o vetor de tração atuando em qualquer plano neste elemento diferencial pode ser calculado. Este vetor é conhecido como tensor *tensão de Cauchy* e pode ser calculado pela seguinte fórmula:

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \quad (4.2)$$

Em análises estáticas, normalmente deseja-se a posição inicial e final de um elemento. O mapeamento da configuração inicial para a final é chamado de deformação do corpo. O movimento do corpo pode ser descrito através da seguinte relação:

$$u = u_0(x_1, x_2, x_3) \quad (4.3)$$

Desprezando os termos de alta ordem, define-se o tensor de deformações infinitesimais (ϵ) como sendo:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.4)$$

Onde:

u_o = Vetor que representa a configuração inicial do elemento;

ε_{ij} = Tensor deformação infinitesimal.

A lei de Hooke descreve a relação entre a tensão e a deformação. Esta regra é limitada somente para pequenas deformações e para certos tipos de materiais. Os aços em geral respeitam esta teoria. Geralmente uma geometria particularizada em conjunto com hipóteses acertadas sobre o campo de deslocamentos permite grandes simplificações. As relações constitutivas podem ser reduzidas a equações bem simplificadas. A forma usual da elasticidade infinitesimal linear pode ser escrita:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.5)$$

Onde E_{ijkl} é o tensor constitutivo simétrico de 4ª ordem que apresenta as mesmas propriedades em relação a qualquer orientação, ou seja, característica de um material isotrópico.

4.1. Métodos de Dimensionamento

Existem basicamente três métodos importantes de dimensionamento de estruturas:

4.1.1 Método das Tensões Admissíveis

No Método das Tensões Admissíveis, do Inglês “*Allowable Stress Design*”, as tensões geradas pelas cargas de serviço majoradas (S_n) não podem ultrapassar o limite de resistência (R_d) do material utilizado. Esta teoria considera que se em alguma seção, as tensões produzidas pelas cargas majoradas alcancem um valor igual ao estabelecido, o colapso da estrutura será eminente.

$$S_n \leq R_d \quad (4.6)$$

Onde,

$$S_n = c \sum_{i=1}^n A_i \quad (4.7)$$

A_i = Ação nominal do elemento i

S_n = Solicitação nominal

R_d = Resistência de dimensionamento (reduzida pelo coeficiente de segurança Ω)

c = Operador que simboliza a transformação de combinações de ações em efeitos de ações

n = Número de ações na combinação

No passado, devido às incertezas nas teorias empregadas, os coeficientes de segurança Ω utilizados eram exageradamente majorados, na tentativa de prevenir possíveis modos de colapso não conhecidos. A utilização dos coeficientes de segurança dependia da experiência própria de cada projetista.

O dimensionamento é considerado satisfatório, quando a tensão atuante máxima em cada seção for inferior a tensão resistente reduzida pelo coeficiente de segurança Ω . Apesar do dimensionamento não retratar com precisão a condição de colapso, esta teoria possui a vantagem de ser simples, direta e de fácil utilização, desde que o coeficiente de segurança escolhido seja adequado [Carvalho et al., 2004].

A tensão admissível selecionada normalmente inclui uma vida útil à fadiga que reduz a tensão para um valor abaixo dos níveis de escoamento do material, como mostrarão os níveis de tensões selecionados para o exemplo testado ao final do trabalho.

4.1.2 Método dos Estados Limites

O Método dos Estados Limites, do Inglês “*Load and Resistance Factor Design*”, foi desenvolvido recentemente. A partir dos anos 60 nos Estados Unidos, duas correntes a favor da mudança na forma tradicional do cálculo estrutural começaram a se fazer sentir. A primeira solicitava a necessidade de cálculos em estados mais próximos ao limites estruturais e a segunda corrente conduzia a idéia de que os parâmetros de cálculo podem ser racionalmente

quantificados através da teoria da probabilidade. Mais normas surgiram nos anos posteriores, formando a primeira geração de normas de cálculo em estados limites.

Nesta teoria, a segurança de uma estrutura é definida como sendo a capacidade que ela apresenta de suportar as ações a que venha ser solicitada a estrutura durante sua vida útil sem, contudo, atingir qualquer estado limite, seja o estado limite de utilização ou estado limite último. Este método está relacionado com a utilização de coeficientes parciais de segurança, aplicados às cargas (coeficiente de majoração das cargas) e aos materiais (coeficiente de minoração das resistências).

$$S_d \leq R_d \quad (4.8)$$

Onde,

$$S_d = c \sum_{i=1}^n \gamma A_i \quad (4.9)$$

S_d = Solicitação de dimensionamento e

γ = Coeficiente de majoração das cargas.

Utilizando esta metodologia, as incertezas em relação às resistências são consideradas no coeficiente de segurança Ω e as incertezas em relação aos efeitos das ações, no coeficiente γ .

As cargas são subdivididas em cargas permanentes que atuam continuamente, como por exemplo, o peso próprio do material e as cargas variáveis ou acidentais que consideram as cargas devido à ocupação de pessoas, ventos e equipamentos ou a carga de um material que esteja em movimento no equipamento.

Combinações de ações e fatores de majoração e minoração são propostos nas normas de projeto para verificar as condições mais críticas que podem ocorrer em um equipamento simultaneamente. Sendo verificada em condições extremas, a estrutura estará apta a operar com segurança durante as condições reais de utilização.

Através deste método estatístico e mais preciso, uma estrutura pode ser dimensionada bem próxima ao seu limite de resistência. Entretanto, estruturas mecânicas normalmente não são dimensionadas através do Método dos Estados Limites, pois resistem a cargas móveis com incertezas maiores do que estruturas civis. Estruturas mecânicas estão também submetidas a condições de operação e níveis de cargas mais elevados que estruturas civis. Desta forma,

estruturas mecânicas operam próximas aos limites de fadiga e por este motivo as tensões selecionadas para limitar o dimensionamento de uma estrutura são mais baixas.

4.1.3 Método da Confiabilidade

O dimensionamento por confiabilidade é uma disciplina emergente que se refere ao processo de projetar confiabilidade aos componentes mecânicos. Este processo engloba diversas ferramentas e práticas que descrevem a forma de dimensionamento do projeto de componentes para trazer confiabilidade ao equipamento.

No caso de falha física de componentes e estruturas, o entendimento detalhado dos processos físicos de tensões, resistência e falha permitem que o material seja re-projetado de forma a reduzir a probabilidade de falha.

Impulsionada por necessidades da indústria aeronáutica e usinas nucleares, o desenvolvimento da Teoria de Probabilidade permitiu, na segunda metade do séc. XX, uma formulação mais precisa dos conceitos. A partir da constatação de que, em geral, a maioria dos eventos possíveis em sistema reais não são eventos certos, deduz-se que o enfoque racional é a determinação da probabilidade de ocorrência da falha.

O caso fundamental é representado por um sistema unidimensional submetido a uma excitação Q , uma variável aleatória que representa o valor máximo da carga durante a vida útil de uma estrutura. Interessa determinar o risco de falha durante a vida útil da estrutura, ou seja, a confiabilidade do sistema. Admita-se que a falha estrutural aconteça quando a carga Q atinge o valor da resistência R da peça, sendo R uma constante especificada. Então, a probabilidade de falha é:

$$P\{\text{falha}\} = P\{Q \geq R\} \quad (4.10)$$

Usualmente, porém R também é uma variável aleatória, isto é, a resistência de uma peça varia de uma peça para outra e não pode ser prevista exceto por meio de conceitos probabilísticos. Regularmente tanto as variáveis R , quanto Q são variáveis gaussianas. A figura 4.2 demonstra as densidades de probabilidade de curvas gaussianas de solicitação e resistência.

Outros tipos de distribuições também são utilizados, como por exemplo, a distribuição de Gumbel para a carga Q e Weibull para a resistência R . Outra situação de considerável importância prática ocorre quando as duas variáveis são representadas por distribuição lognormais.

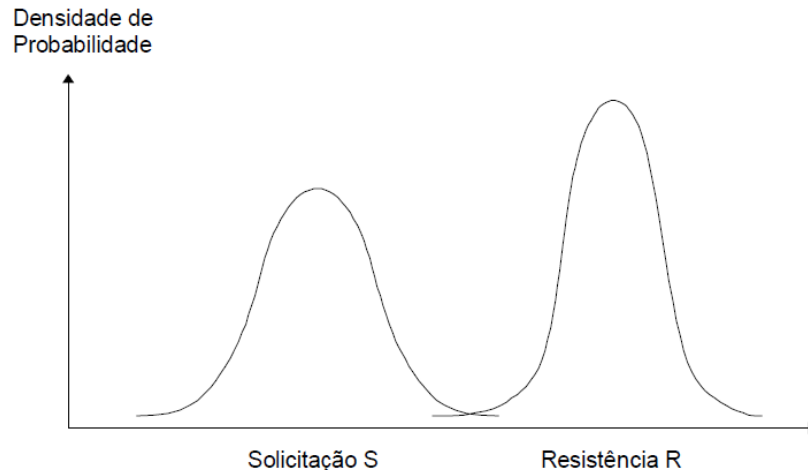


Figura 4.2 - Funções de distribuição genérica da solicitação e resistência

Assumindo que as distribuições de probabilidade necessárias para X e Y são disponíveis, isto é $f_x(x)$ e $f_y(y)$, a superposição das curvas representa uma medida de probabilidade de falha, conforme figura 4.3.

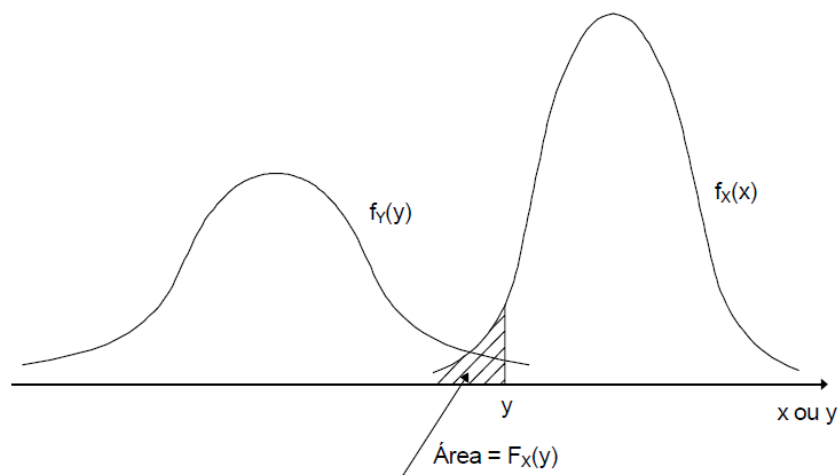


Figura 4.3 - Funções densidade de probabilidade $f_x(x)$ e $f_y(y)$

Com isto, observa-se que a região sobreposta depende das posições relativas de $f_x(x)$ e $f_y(y)$. Quando as duas curvas ficam mais afastadas a probabilidade de falha diminui. Ao passo que a probabilidade aumenta quando as curvas $f_x(x)$ e $f_y(y)$ ficam mais próximas, como pode ser visto na figura 4.4.

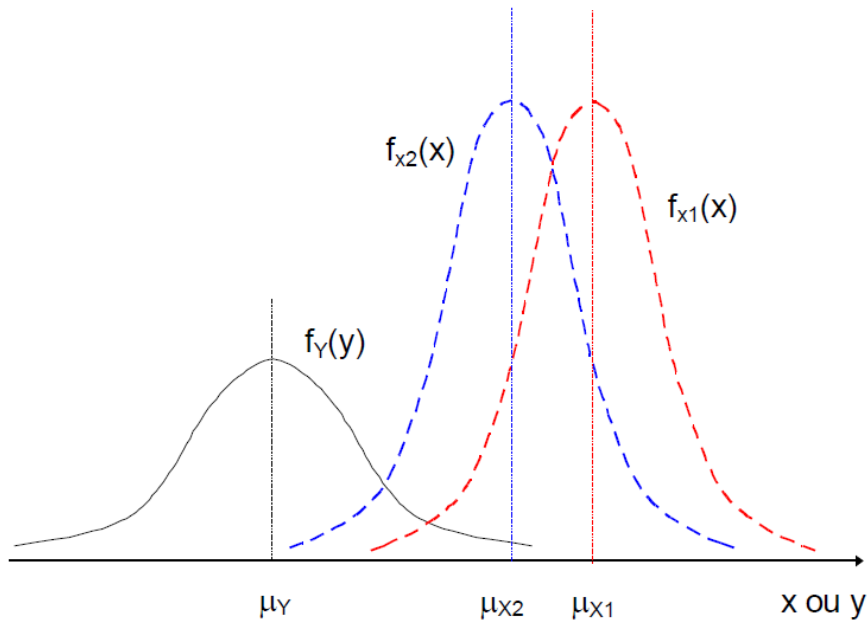


Figura 4.4 - Efeito da posição relativa entre $f_x(x)$ e $f_y(y)$ na probabilidade de falha

A região sobreposta também depende do grau de dispersão das funções $f_x(x)$ e $f_y(y)$, conforme mostra a figura 4.5, comparando a superposição das curvas originais com novas curvas com dispersões maiores. Estas dispersões também podem ser expressas por termos estatísticos, como por exemplo, a variância, que é o quadrado do desvio padrão.

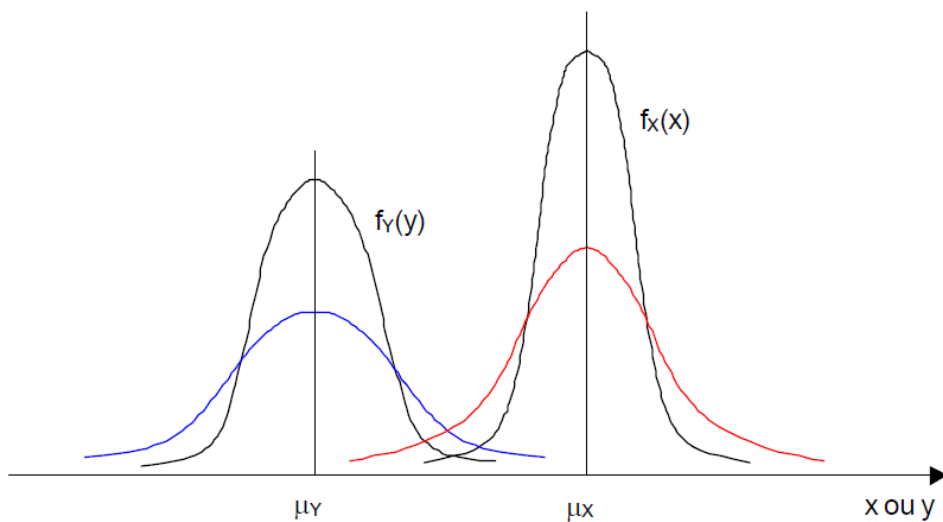


Figura 4.5 - Efeito das dispersões de $f_x(x)$ e $f_y(y)$ na probabilidade de falha

Uma das técnicas importantes no projeto baseado em conceitos estatísticos é a redundância. Isto significa que caso uma parte do sistema falhe, existe um caminho paralelo alternativo para assegurar a eficiência do componente ou estrutura. Redundância significa aumentar a confiabilidade de um sistema, entretanto é uma prática pouco econômica.

Testes de confiabilidade podem ser conduzidos, tão cedo quanto for possível, com o objetivo de localizar potenciais problemas para garantir que o projeto atenda aos requerimentos de confiabilidade estabelecidos. Porém, nem sempre é possível de se conduzir testes de confiabilidade. Alguns modos de falha podem demorar anos para serem observados. Nestes casos, o projeto por experimentos ou através de simulações deve ser utilizado.

4.2. Requisitos estabelecidos pelas Normas Regulamentadoras

As normas técnicas aplicadas ao projeto e dimensionamento de estruturas estabelecem os requisitos que devem ser obedecidos no projeto de um conjunto estrutural. Cada país possui sua legislação própria e suas normas de projeto. No Brasil são utilizadas as normas NBRs “Normas Brasileiras Regulamentadoras” da Associação Brasileira de Normas Técnicas - ABNT específicas para cada campo de aplicação.

Para o cálculo estrutural existem três grandes grupos de perfis que respeitam as respectivas normas de padronização.

- Perfis laminados e soldados têm seus procedimentos de dimensionamento estabelecidos pela norma NBR 8.800;
- Perfis formados a frio (PFF) são dimensionados pela norma NBR 14.762.

Especialmente para o exemplo analisado neste trabalho, também foi utilizado os requisitos estabelecidos pela Norma NBR 8.400 que fixa as diretrizes básicas para o cálculo das partes estruturais e componentes mecânicos para equipamentos do tipo guindastes, utilizados para a movimentação de cargas na área portuária.

Para a garantia legal de um projeto, o engenheiro deve aplicar os procedimentos de cálculo estabelecidos nas normas regulamentadoras do local onde o projeto será aplicado. Muitas

vezes normas internacionais também são seguidas, principalmente quando não existe uma norma nacional que trata da disciplina em estudo.

Devido ao fato da norma brasileira NBR 8.800 tratar do projeto e execução de estruturas de aço de edifícios, como menciona o título, não são normas desenvolvidas para a regulamentação de estruturas mecânicas. Entretanto, pela falta de uma norma específica, em diversas situações a norma NBR 8.800 é utilizada para a verificação de perfis. Em casos mais específicos é possível pesquisar a existência de normas internacionais mais detalhadas para apoio técnico.

Ao fim deste capítulo, é possível afirmar que dentro dos critérios requeridos pelas normas, o engenheiro deve criar uma estrutura que atenda as exigências de segurança e ao mesmo tempo seja prática e econômica. A sociedade cobra tais condições de segurança na utilização de estruturas. A utilização de conhecimentos padronizados pelas normas regulamentadoras é seguro e trás respaldo jurídico ao engenheiro no projeto.

4.3. Teoria de Barras

A teoria de barras é uma simplificação do comportamento de um elemento estrutural. O elemento unidimensional trabalha somente com cargas normais de tração e compressão. Em estruturas simples, e principalmente em treliças, esta teoria pode ser utilizada com resultados satisfatórios.

Treliças são estruturas compostas por elementos retos, formando uma estrutura reticulada fechada com triangulações nas conexões, como o exemplo na figura 4.6. Os extremos são conectados em uniões que são chamadas de nós de união. Esta teoria considera as uniões sempre articuladas. Entretanto, mesmo que as uniões sejam soldadas e os elementos sejam suficientemente longos, os perfis da estrutura também acabam se comportando como elementos de barras.

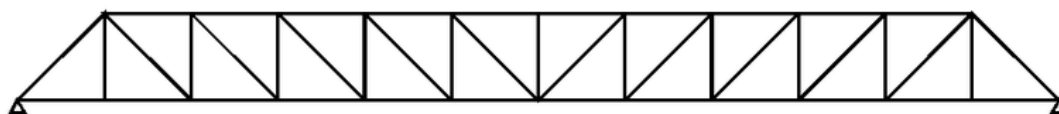


Figura 4.6 - Exemplo de treliça bidimensional

Seja o corpo de seção transversal constante, conforme figura 4.7. Supondo que o carregamento t esteja aplicado na direção 1, uniformemente distribuído através da seção transversal do material.

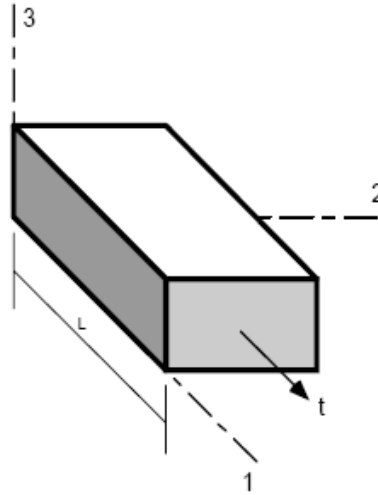


Figura 4.7 - Barra unidimensional com seção transversal constante

Neste caso, a equação 4.2 pode ser simplificada, pois as trações se anulam nas outras faces ($t_2 = t_3 = 0$).

$$t_1 = \sigma_{1j}n_j \quad (4.11)$$

Se não houver forças de corpo externas, a tensão no material será constante e seu valor dependerá apenas das cargas aplicadas em seu contorno. Para um material isotrópico com deslocamentos infinitesimais, a Lei de Hooke pode ser reduzida à seguinte forma:

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \quad (4.12)$$

Na teoria de barras não existe acoplamento entre tensões cisalhantes e normais na relação constitutiva do material. A deformação linear na direção 1 pode ser simplificada por:

$$\varepsilon_{11} = du_1/dx_1 = \Delta L / L \quad (4.13)$$

Deslocamentos laterais são considerados, utilizando o coeficiente de Poisson (ν).

4.4. Teoria de Vigas

Recentes descobertas mostram que a teoria de vigas teve sua origem e primeiros estudos com Leonardo da Vinci no século XV. Entretanto, Galileu que até pouco tempo era considerado o precursor desta teoria, contribuiu muito no desenvolvimento da teoria durante o século XVI. Estes dois grandes nomes da ciência estudaram o comportamento de vários tipos de vigas e materiais. Apesar de terem realizados importantes descobertas, não conseguiram obter a distribuição de tensões correta na seção transversal de um perfil. O progresso da teoria de vigas foi desenvolvido por Jacob Bernoulli, Leonhard Euler, Daniel Bernoulli, Parent, Saint-Venant e outros grandes cientistas nos anos que se seguiram.

A teoria de vigas de Euler-Bernoulli consiste numa simplificação da teoria da elasticidade linear que permite calcular características de carregamento e deflexão em vigas. A teoria foi divulgada por volta de 1750, entretanto passou a ser utilizada em larga escala somente após ser comprovada sua validade na construção da Torre Eiffel ao final do século XIX [Witmer, 1992]. Esta teoria compartilha as seguintes hipóteses:

- Os deslocamentos verticais de todos os pontos de uma seção transversal são pequenos e iguais ao eixo da viga
- Deslocamento lateral nulo
- As seções transversais normais ao eixo da viga antes da deformação, permanecem planas e ortogonais ao eixo após a deformação

Esta teoria aplica-se em vigas longas, onde o comprimento total da viga é 20 vezes maior do que a altura da viga (h). A equação de Euler-Bernoulli descreve uma relação entre a deflexão de uma viga e o carregamento aplicado.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = w, \quad (4.14)$$

onde:

$v(x)$ = Deflexão, Flecha da viga

$w(x)$ = Carga distribuída por unidade de comprimento.

Usualmente o módulo de elasticidade (E) e o momento de inércia (I) são constantes, transformando a equação 4.14 em uma formulação mais simplificada.

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = w \quad (4.15)$$

Esta equação 4.15 descreve o deslocamento de uma viga uniforme de Euler-Bernoulli na análise estática, muito utilizada nos exemplos práticos de engenharia.

Sucessivas derivadas de $v(x)$ também possuem grande importância nas análises de engenharia, como seguem:

- $\frac{\partial v(x)}{\partial x} = \hat{\text{Ângulo de inclinação da viga}}$
- $EI \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = \text{Momento Fletor}$
- $-\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \right) = \text{Força Cisalhante}$

Além da deflexão, a equação também descreve forças e momentos e pode também ser utilizada para encontrar as tensões atuantes. Assim, é possível demonstrar que a tensão devido à tração / compressão pode ser expressa por:

$$\sigma_{xx} = -y \frac{M_z}{I_z}, \quad (4.16)$$

Onde:

$y = \text{Distância em relação à linha neutra do perfil}$

$M_z = \text{Momento Fletor no eixo z}$

A teoria de vigas de Timoshenko foi desenvolvida por Stephen Timoshenko no início do século XX. Ela representa um avanço na teoria de viga de Euler-Bernoulli, pois incluiu efeitos de cisalhamento e de inércias rotacionais que são dominantes em vigas curtas. As seções transversais permanecem planas, mas não mais perpendiculares ao eixo neutro deformado. A teoria de Timoshenko aplica-se com resultados satisfatórios em vigas curtas que possuem comprimentos menores do que 20 vezes a altura (h) da viga.

As duas teorias são complementares de forma que, quando o módulo de cisalhamento tende a infinito, ou seja, quando a viga se torna rígida ao cisalhamento e os efeitos de inércia rotacional são desprezados, a teoria de Timoshenko converge para a Teoria de Euler-Bernoulli.

A equação de Timoshenko para vigas estáticas que consideram as tensões cisalhantes podem ser simplificadas por [Dym e Shames, 1973]:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = w - \frac{EI}{CGA} w'' , \quad (4.17)$$

$$\tau_{xy} = CG\alpha(x) , \quad (4.18)$$

onde:

α = Ângulo de distorção da seção transversal da viga

C = Coeficiente de cisalhamento de Timoshenko (depende da geometria do perfil)

G = Módulo de elasticidade transversal

Portanto, além dos efeitos de tração e compressão considerados na teoria de barras, os efeitos de flexão, cisalhamento e torção podem ser considerados na teoria de vigas. Dependendo da teoria de vigas aplicada, algumas destas considerações ainda podem ser desprezadas.

Vale lembrar também que na teoria de vigas, as vinculações das extremidades dos perfis consideram os efeitos de rotação estabelecidos.

Estruturas modeladas por barras representam os nós com rotação livre. Ao passo que estruturas descritas pela teoria de vigas possuem a habilidade de representar as vinculações definidas nos nós, podendo ou não ser livre sua rotação.

A teoria de pórticos é utilizada em estruturas reticuladas com uniões abertas, sem que haja a necessidade de que todos os extremos de perfis sejam conectados. Neste caso, parte da estrutura aberta se comporta como um elemento de viga. Por esta razão, a teoria de vigas é utilizada no modelamento deste tipo de estrutura. Para garantir que além dos esforços de tração e compressão, também seja levado em consideração os efeitos de flexão e cisalhamento dos perfis.

4.5. Flambagem

Elementos solicitados por forças normais de compressão estão sujeitos aos estados de instabilidade localizados na seção transversal ou globalizados em todo o comprimento do elemento, chamados de flambagem local e global, respectivamente.

A fundamentação de todos os estudos desenvolvidos na teoria de flambagem remete aos trabalhos de Leonhard Euler durante o século XVIII. A coluna de Euler, como é conhecida, consiste numa barra prismática, perfeitamente reta, bi-rotulada e com esbeltez suficiente para flambar no regime elástico linear, quando submetido a uma compressão centrada.

Obedecendo a essas hipóteses e condições de contorno, a carga crítica de flambagem é definida por:

$$N_{crit} = \frac{\pi^2 EI_i}{kL^2} \quad (4.19)$$

Onde,

EI_i = Rigidez do pilar à flexão em relação ao eixo i

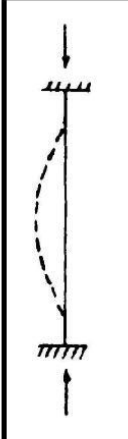
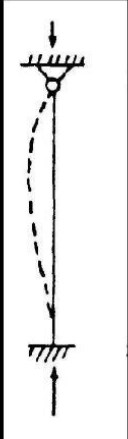

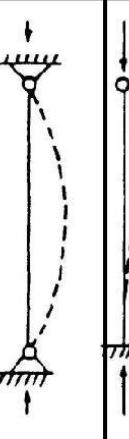


k = Fator de comprimento efetivo e

L = Comprimento do elemento

As duas variáveis k e L juntas formam o comprimento efetivo de flambagem. O comprimento efetivo de flambagem pode ser entendido como o comprimento de um elemento equivalente bi articulada que possui mesma carga de flambagem. Em definições matemáticas, o comprimento efetivo corresponde à distância entre os pontos de inflexão da curva associada ao primeiro modo de flambagem de um elemento.

As normas de projeto mecânico definem parâmetros e cálculos a serem seguidos no dimensionamento de estruturas sob compressão. A Norma Brasileira NBR 8800 “Projeto e Execução de Estruturas de Aço e Estruturas mistas de Aço-Concreto de Edifícios” regulamenta o cálculo de perfis nestes casos. Valores tabelados são definidos para os parâmetros de flambagem k , conforme tabela 4.5.1 abaixo, de acordo com as condições de vinculação do elemento. Cada valor teórico é acompanhado de valores recomendados para a utilização nos cálculos, em razão da incerteza das vinculações de uma estrutura real se comportar como um engaste perfeito.

Tabela 4.5.1 - Valores tabelados para o fator de comprimento efetivo k em função da vinculação [NBR 8800, 2008]

						
Valores teóricos	$K=0.5$	$K=0.7$	$K=1.0$	$K=1.0$	$K=2.0$	$K=2.0$
Valores recomendados	$K=0.65$	$K=0.8$	$K=1.2$	$K=1.0$	$K=2.1$	$K=2.0$

Para auxílio no projeto, a equação 4.19 pode ser expressa na forma de um gráfico, como mostra a figura 4.8.

$$\lambda_o = \frac{kL}{r} \sqrt{\frac{f_y}{\pi^2 E}} \quad (4.20)$$

Sendo $r = \sqrt{\frac{I_1}{A}}$ o raio de giração da seção transversal, é possível escrever:

$$\frac{N_e}{N_y} = \lambda_o^{-2} \quad (4.21)$$

Considerando que a força de compressão axial (N_e) de um elemento, não pode ser maior que a força de escoamento (N_y) da seção transversal, nem maior que a carga crítica de flambagem (P_{crit}), é possível montar a curva de resistência com estes dois limites. A figura 4.8 abaixo mostra a representação gráfica destes limites.

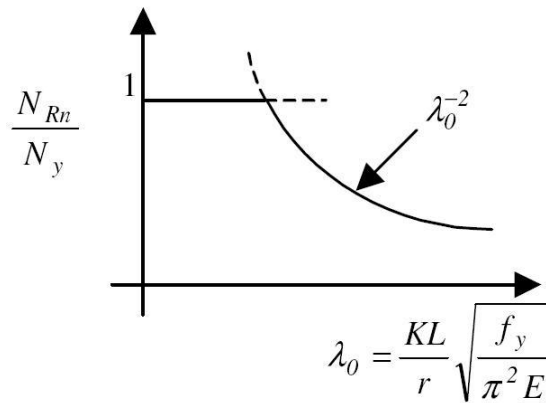


Figura 4.8 – Interação entre a curva de escoamento e de flambagem

Onde:

N_{Rn} = Resistência nominal à compressão de um elemento

λ_0 = Índice de esbeltez para barras comprimidas

Através do cálculo de resistência de barras comprimidas é possível obter a carga máxima admissível teórica de um perfil até que atinja a condição de instabilidade.

Na verificação de um conjunto de elementos soldados submetidos à compressão através da Norma Brasileira NBR 8.800 é necessário garantir uma relação mínima entre largura / espessura dos perfis para evitar elementos demasiadamente esbeltos, e verificar a carga de flambagem dos elementos mais solicitados do conjunto estrutural.

A Norma Brasileira NBR 8.800 também limita o valor do índice de esbeltez de um elemento em $\lambda_0 < 200$, pois para elementos demasiadamente esbeltos, a magnitude da carga crítica representa um valor muito importante.

Em diversos estudos, o início da região de escoamento de um material geralmente é considerado o critério de falha de uma estrutura. Porém, esta consideração nem sempre é correta. Em muitos casos, não é importante o início do escoamento, e sim na carga máxima admissível ou o limite de colapso que a estrutura pode suportar sem que perca suas propriedades estruturais. Este fato ocorre com frequência em elementos submetidos à compressão com índice de esbeltez elevados. Nestas situações, a carga admissível ocorre antes que a estrutura atinja seu limite de escoamento.

A figura 4.9 apresenta a relação entre a tensão de escoamento do material e diferentes curvas de flambagem interpoladas.

A curva nr. 4 representa a curva original de flambagem de Euler.

A curva nr. 3 é uma interpolação com curva parabólica (2º grau)

A curva nr. 2 representa uma interpolação linear (1º grau)

A curva nr. 1 representa uma interpolação pelo método da fórmula secante

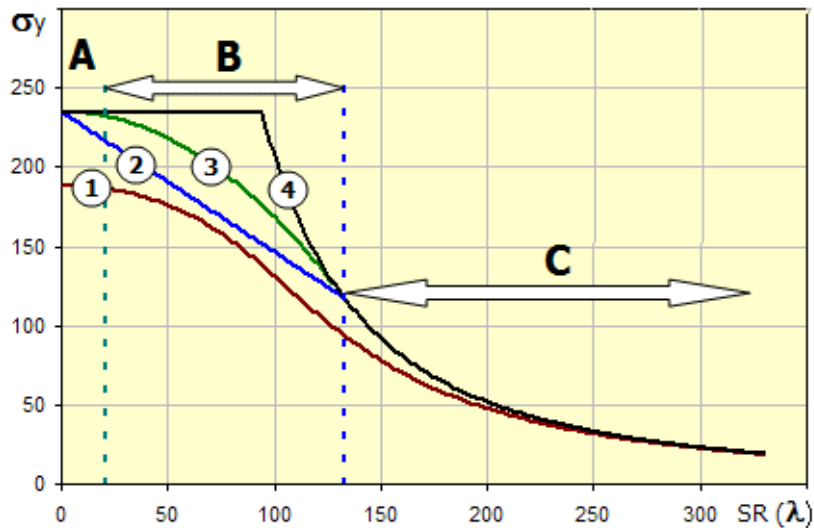


Figura 4.9 - Curvas de resistência mecânica de um elemento submetido à compressão

Na prática, devido às imperfeições de montagem e/ou geométricas dos elementos, curvas são ajustadas pelo método da fórmula secante com diversos graus de excentricidade, de acordo com as características de cada perfil em análise [NBR 8.800, 2008].

A Norma Brasileira NBR 8.800 e diversas Normas Internacionais, como por exemplo, a Eurocode 3, AISC e SSRC (*Structural Stability Research Council*) interpolam curvas a partir de resultados de ensaios experimentais.

Durante as rotinas de otimização, é importante que o algoritmo verifique os elementos solicitados por compressão com a finalidade de evitar a ocorrência de flambagem local e global. Normalmente, esta é a principal condição de falha de estruturas, pois colapsos deste tipo podem gerar perdas materiais ou até mesmo a perda drástica de vidas humanas.

É importante lembrar também que a verificação de flambagem em treliças modeladas por elementos de barras permite verificar somente a flambagem do tipo global. Ao passo que, pórticos modelados com elementos de vigas possuem condições de avaliar também a flambagem local dos perfis. Neste caso, uma possível flambagem por distorção da seção transversal também poderia ser avaliada. A flambagem por distorção ocorre com frequência em perfis abertos de

paredes esbeltas e caracteriza-se por um abaulamento da alma e conseqüentemente rotação das mesas do perfil, mantendo igual o ângulo entre elas [Carvalho et al., 2004].

Para verificar quais são os elementos submetidos às maiores solicitações de compressão, é necessário realizar uma análise global do conjunto, de acordo com as vinculações e cargas estabelecidas no modelo. Esta tarefa é desempenhada pela ferramenta de flambagem linear do programa de elementos finitos.

A ferramenta calcula a flambagem na região de Euler (região C na figura 4.9). Nesta região as tensões admissíveis nos elementos são mais baixas, devidas às grandes incertezas em relação à fadiga e a carga atuante em estruturas mecânicas. Uma descrição mais detalhada sobre a forma de cálculo da flambagem linear será descrita no próximo capítulo.

5. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

5.1. Introdução

O MEF é sem dúvida o mais popular entre os métodos citados, existindo inúmeros programas comerciais já consolidados no mercado. Basicamente, o método particiona a estrutura em subdomínios mais simples. Desta forma, as equações diferenciais outrora resolvidas analiticamente são substituídas por sistemas de equações lineares que descreve o comportamento estrutural do sistema discretizado.

Através da convergência e aproximação do modelo, valendo-se de conceitos variacionais, o campo de deslocamento da estrutura discretizada pode ser encontrado com erros que normalmente podem ser estimados. Com o uso desta metodologia, as equações diferenciais não-lineares que descrevem um problema transformam-se em uma série de equações lineares, solucionadas uma a uma, de onde são obtidos os deslocamentos nodais de cada elemento.

O método faz parte de um conjunto de técnicas de programação numérica para construção de soluções aproximadas do estado de tensões e deformações de um sólido em problemas definidos por valores de contorno. O MEF também é conhecido como sendo uma simulação numérico-computadorizada.

A criação deste método foi um marco no estudo de problemas estruturais. Problemas antes resolvidos somente pela resolução analítica direta complexa dos sistemas de equações de derivadas parciais por fórmulas, tabelas, ábacos e simplificações, passaram a ser aproximados e solucionados através da convergência de cálculos computacionais sucessivos.

Devido ao número excessivo de elementos que alguns exemplos são subdivididos e devido ao grande número de matrizes geradas, o método torna-se impossível de ser tratado manualmente. A programação matemática é responsável por solucionar o equacionamento do problema.

O conceito de contínuo utilizado pelo MEF permite a definição de um ponto geométrico por um limite matemático tal como na definição de derivadas do cálculo diferencial. Os efeitos da constituição interna molecular dos materiais são levados em consideração de forma macroscópica nas relações constitutivas do material.

5.2. Conceitos Básicos

Uma grande variedade de tipos e modelos de elementos finitos está disponível na literatura com a capacidade de representar o comportamento das inúmeras formas construtivas de estruturas. A figura 5.1 apresenta os tipos de elementos básicos. Normalmente, os elementos são selecionados criteriosamente para que possam representar o comportamento de barras, vigas, placas, cascas e elementos sólidos com a maior fidelidade possível.

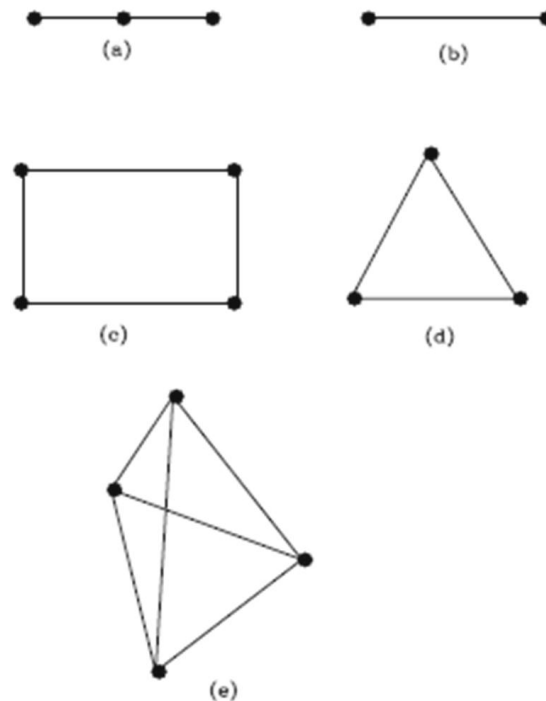


Figura 5.1 - a) e b) Elemento 1D com 3 e 2 nós; c) e d) Elemento 2D; e) Elemento 3D

5.3. Formulação do Elemento de Barra Elástica

Abaixo, segue de forma simplificada a dedução direta da formulação de um elemento de barra com um grau de liberdade por nó e, a seguir, de um elemento de viga com dois graus de liberdade. Considerando um elemento de barra hipoteticamente sem peso, com comprimento L , módulo de elasticidade E , área da seção transversal A e um nó em cada extremidade. Caso seja admissível somente cargas e deslocamentos axiais e os graus de liberdade de cada nó sejam u_1 e u_j .

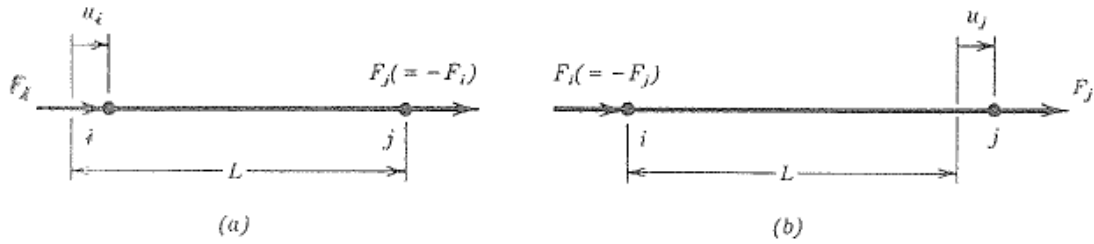


Figura 5.2 - Elemento de barra e forças nodais associadas aos deslocamentos nodais u_i e u_j [Cook et al., 1989]

A matriz de rigidez do elemento é formulada determinando as forças nodais que devem ser aplicadas para gerar um deslocamento nodal u_i e u_j , conforme figura 5.2. Quando $u_i > 0$ e $u_j = 0$, as forças nodais consistentes com o equilíbrio estático e com a elasticidade linear do material são:

$$F_i = \frac{AE}{L}u_i \quad \text{e} \quad F_j = -\frac{AE}{L}u_i \quad (5.1), (5.2)$$

Similarmente, quando $u_i = 0$ e $u_j > 0$

$$F_i = -\frac{AE}{L}u_j \quad \text{e} \quad F_j = \frac{AE}{L}u_j \quad (5.3), (5.4)$$

Caso u_i e u_j sejam diferente de zero, então a forças nodais serão:

$$F_i = \frac{AE}{L}(u_i - u_j) \quad \text{e} \quad F_j = \frac{AE}{L}(-u_i + u_j) \quad (5.5), (5.6)$$

No formato matricial:

$$\begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} \begin{bmatrix} AE/L & -AE/L \\ -AE/L & AE/L \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\text{Ou} \quad \{f\} = \{u\}\{K\} \quad (5.8)$$

Onde:

K = Matriz de Rigidez do elemento de barra

f = Vetor de Forças

5.4. Formulação do Elemento de Viga Elástica

Considere uma viga uniforme que se deforma no plano da página, sem deformações axiais e com 2 graus de liberdade por nó: deslocamento vertical w e rotação θ . As forças nodais F_i e F_j geram deslocamentos nodais w_i e w_j . Momentos nodais M_i e M_j geram rotações nodais θ_i e θ_j , conforme figura 5.3.

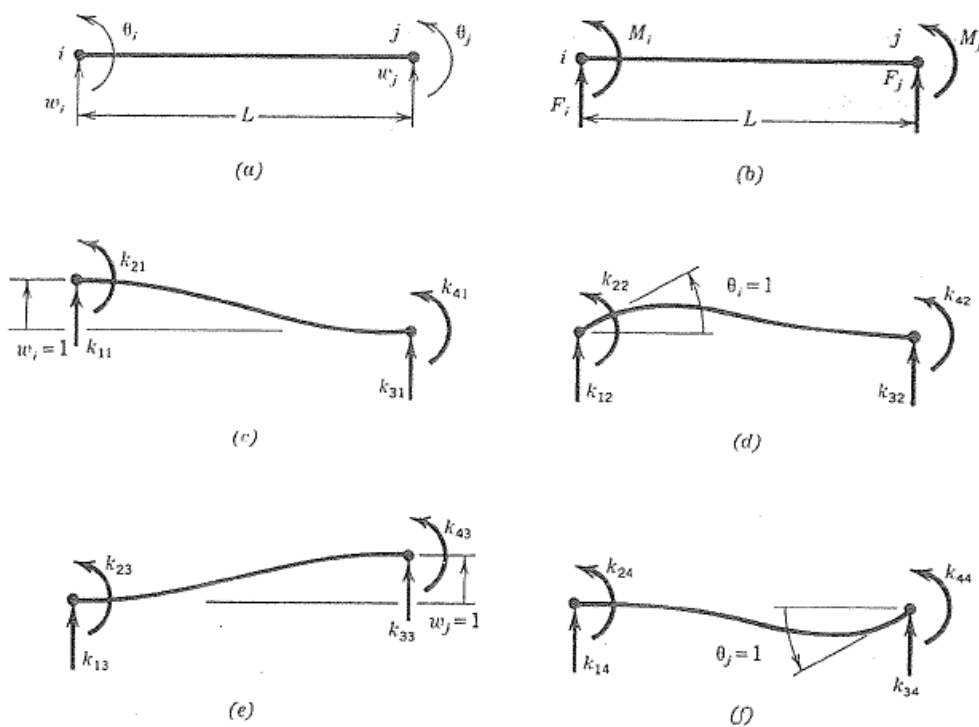


Figura 5.3 - Elemento de viga a) com seus quatro g.l. b) Forças e Momentos associados c-f) Estados deformados associados à ativação de cada g.l. [Cook et al., 1989]

Nesta formulação, $[K]$ é uma matriz de rigidez 4×4 . Assim, o vetor de deslocamento nodal do elemento de viga é:

$$\{u\} = \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

O vetor $\{f\}$ possui as forças nodais e os momentos aplicados ao elemento para manter o estado deformado $\{u\}$ do elemento. Então a equação de rigidez do elemento pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Como realizado para o elemento de barra, é necessário expressar a matriz de rigidez $[\mathbf{K}]$ simétrica em termos da geometria do elemento, ou seja, do momento de inércia da seção transversal (I) e do módulo de elasticidade longitudinal (E). Para determinar os coeficientes de rigidez de uma coluna, cada grau de liberdade correspondente deve ser definido como unitário, enquanto que os demais permanecem sendo zero. Então, calculam-se quais os valores de F_i , F_j , M_i e M_j necessários para produzir aquele estado de deformação. A partir das características de uma viga em balanço e dos princípios físicos da teoria de Euler-Bernoulli, é possível deduzir a matriz de rigidez de um elemento de viga com 2 graus de liberdade por nó, utilizando pequenos deslocamentos (sem considerar o efeito de cisalhamento para o cálculo da linha elástica), como sendo [Marczak, 1995]:

$$[K_{F,EB}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Uma matriz de rigidez mais completa é possível ser encontrada, caso seja considerado os efeitos de cisalhamento da teoria de vigas de Timoshenko, a matriz de rigidez $\{\mathbf{K}\}$ resulta em [Selke et al., 1993]:

$$[K_{F,T}] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & -\frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} \\ & \frac{4+\phi}{1+\phi} \frac{EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{2-\phi}{1+\phi} \frac{EI}{L} \\ & & \frac{12EI}{L^2(1+\phi)} & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} \\ \text{simétrica} & & & \frac{4+\phi}{1+\phi} \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Onde,

$$\phi = \frac{12\phi EI}{A_y GL^2} \quad (5.13)$$

A_y = Área efetiva de cisalhamento

ϕ = Fator de correção para a tensão cisalhante média

Combinando a matriz de flexão definida por 5.12 com a matriz de tração / compressão da equação 5.7, é possível obter a matriz de rigidez 6 x 6 para elementos de vigas de Timoshenko com 3 graus de liberdade por nó, deslocamentos horizontais, verticais e a rotação θ .

Efeitos de torção também podem ser adicionados ao modelo para que seja considerada também a torção nos elementos. Utilizando a teoria básica de torção, a matriz de rigidez à torção pode ser descrito por:

$$[K_T] = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & -\frac{GJ}{L} \\ -\frac{GJ}{L} & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Onde,

J = Módulo de torção da seção do elemento

Através da combinação das matrizes de rigidez 5.7, 5.12 e 5.14 é possível construir a matriz de rigidez com capacidade de avaliar de forma completa para obter os deslocamentos [u] do elemento,

$$\{u\} = \begin{bmatrix} u_x \\ \theta_x \\ u_y \\ \theta_y \\ w_z \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad \text{e o vetor de força} \quad \{f\} = \begin{bmatrix} N_x \\ M_x \\ V_y \\ M_y \\ V_z \\ M_z \end{bmatrix} \quad (5.15), (5.16)$$

Desta maneira são conduzidos os cálculos MEF para o elemento tridimensional no exemplo analisado neste trabalho, com o objetivo de avaliar os deslocamentos nodais $\{u\}$ da estrutura nas condições de cargas imposta ao modelo. O elemento MEF no exemplo testado possui 6 graus de liberdade por nó, 3 translações e 3 rotações.

As matrizes deduzidas neste capítulo estão todas escritas para um sistema local de coordenadas, ou seja, só podem ser aplicadas para casos em que o sistema global de coordenadas coincida com o sistema local. Caso contrário, deve-se transladar a matriz de rigidez de um sistema para o outro. Para rotacionar o sistema de coordenadas, utiliza-se a expressão:

$$\{u\}_{\text{local}} = [T] \{u\}_{\text{global}} \quad (5.17)$$

Onde:

$\{u\}$ = Vetor de deslocamentos

$[T]$ = Matriz ortogonal de transformação de coordenadas

As deduções acima representam as matrizes de rigidez locais, como são chamadas, por representar o comportamento de um único elemento. Para estudar o comportamento de uma estrutura composta de diversos elementos, torna-se necessário definir a conectividade dos nós que, por consequência, irá definir a montagem da matriz de rigidez global do sistema.

$$\{f_{gl}\} = \{u_{gl}\} \{K_{gl}\} \quad (5.18)$$

Os coeficientes de rigidez da matriz de rigidez global são diretamente relacionados com os coeficientes de rigidez da matriz de rigidez de cada elemento que compõe a estrutura. O primeiro passo na geração da matriz de rigidez global é garantir que toda rigidez dos elementos sejam determinadas através do mesmo sistema global de referência, aplicando a matriz de transformação de coordenadas $[T]$. Para garantir a condição de equilíbrio da estrutura de forma coerente, cada grau de liberdade definido em um nó deve ser idêntico ao elemento adjacente a

este nó. O vetor força global também deve ser montado de forma coerente, de acordo com as forças e momentos atuantes em cada elemento. Na literatura, é possível encontrar diversos artigos que explicam a forma da montagem da matriz de rigidez global de um sistema.

Através desta breve dedução teórica da formulação direta de elementos finitos de barras e vigas e da montagem da matriz de rigidez global é possível concluir que elementos de vigas podem representar de forma mais completa o comportamento de elementos estruturais, pois, além dos deslocamentos nodais, carregam consigo informações sobre a rotação nos nós. Entretanto, é fundamental a compatibilidade do modelo com o comportamento real da estrutura. A estrutura deve ter grau de liberdade suficiente para se comportar como uma viga, caso contrário seria um desperdício computacional utilizar elementos de viga para representar estruturas reticuladas fechadas que absorvem somente cargas de tração e compressão.

Na análise contra a ocorrência de flambagem nos perfis, a ferramenta de flambagem global linear do programa Ansys Workbench foi utilizada. A análise linear verifica a carga de flambagem teórica de um elemento elástico ideal.

A análise completa da solução não linear de uma estrutura até seu colapso pode ser extremamente dispendiosa. Uma análise linear de flambagem para a primeira carga de flambagem representa uma boa estimativa para a carga de colapso do elemento nos casos em que os deslocamentos pré-flambagem são pequenos [Bathe, 1996]. Isto também é verdade, caso não haja imperfeições de montagem e/ou geométricas dos perfis, conforme detalhado no capítulo 4.5.

A análise de flambagem linear realizada pelo programa MEF coincide com a teoria clássica de Euler. O tensor de deformação de Green, que é a medida lagrangiana de deformações para grandes deslocamentos, na análise de flambagem é dado por:

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (5.19)$$

$$\xi_{ij} = \varepsilon_{ij} + \eta_{ij} \quad (5.20)$$

onde ε_{ij} é o tensor de deformação infinitesimal (equação 4.4) e η_{ij} é a parcela não linear.

O termo linear é utilizado para a dedução da matriz de rigidez [K] e o termo não-linear é utilizado para a dedução da matriz de rigidez geométrica [K_g].

A matriz de rigidez geométrica de um elemento local de barra é dada por [Guilherme, 2000], como sendo:

$$[K_{g,b}] = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & & 0 & 0 \\ \textit{simétrico} & & & 1 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

A matriz de rigidez geométrica de um elemento local de viga, deduzido da teoria de Euler Bernoulli, é dada por [Guilherme, 2000], como sendo:

$$[K_{g,v}] = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ & \frac{2L^2}{15} & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ & & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ \textit{simétrico} & & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Da mesma forma, para se obter a matriz geométrica em um sistema global, utiliza-se a matriz ortogonal de transformação de coordenadas [T], equação 5.17.

Na eminência do início da condição de flambagem, as seguintes equações são válidas [Bathe, 1996]:

$$\det (K + \lambda K_g) = 0, \quad \text{seja } \lambda \geq 0 \quad (5.23)$$

$$(K + \lambda K_g) X = 0, \quad \text{seja } X \neq 0 \quad (5.24)$$

Onde:

λ = Multiplicador da carga que causa instabilidade (autovalores)

X = Vetor deslocamento que define o modo de flambagem (autovetores)

A principal característica desta análise é o fato de assumir que a matriz de rigidez dos elementos varia de forma linear no carregamento inicial analisado. Os resultados desta análise são considerados satisfatórios, quando os deslocamentos pré-colapso forem pequenos.

De uma forma geral, existem basicamente duas maneiras distintas de se estudar problemas estruturais através do Método de Elementos Finitos [Haftka, 1991]:

- Com menos freqüência, o analista estrutural escreve um programa completo que inclua a resposta estrutural.
- Normalmente, um pacote comercial de análise estrutural é utilizado. Neste caso, a tarefa do analista é importar a geometria do sólido de um programa de projeto CAD, aplicar as vinculações e as cargas e iniciar a simulação através de uma compilação interna do programa.

O primeiro caso geralmente é utilizado em problemas mais simples de serem modelados. É preciso identificar quais os fatores que influenciam de maneira relevante no problema. Isto implica nas escolhas adequadas dos princípios físicos, das teorias estruturais e das variáveis que descrevem o problema, resultando em um modelo matemático constituído por um conjunto de equações diferenciais que descrevem as vinculações da estrutura, as cargas atuantes, as propriedades do material, as dimensões, enfim de todas as variáveis pertinentes à solução. A solução do modelo matemático é uma tarefa atribuída aos métodos numéricos.

No segundo caso, os potenciais perigos da simples utilização de respostas que um programa comercial fornece podem ser a não percepção de eventuais erros na introdução dos dados, a ausência de correspondência entre o modelo selecionado e a estrutura original, o esquecimento de alguma condicionante importante ou a limitações do programa escolhido, entre outros fatores.

Portanto, é fundamental que o engenheiro compreenda os fundamentos do método para evitar equívocos e potenciais acidentes provenientes de uma análise incorreta dos fenômenos físicos envolvidos.

O MEF tem aplicabilidade também na análise de escoamento de fluidos, transferência de calor e massa e eletromagnetismo, entre outras áreas da engenharia. Esta metodologia permitiu um grande avanço na forma tradicional de avaliação de peças e estruturas, porque, ao invés de se projetar de forma empírica baseado no método de tentativa e erro, através da simulação computacional é possível prever o comportamento de um componente, antes mesmo que seja encaminhado ao processo produtivo.

6. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Nos capítulos anteriores foram revisados os principais conceitos aplicados ao problema de otimização multiobjetivo paramétrica. Neste capítulo será descrito como o problema foi formulado.

Deseja-se reduzir o peso total em níveis satisfatórios de tensões mecânicas, respeitando as restrições impostas. Em linguagem matemática, o objetivo é minimizar as funções W e σ , que representam o peso e as tensões absolutas combinadas presentes no domínio geométrico da estrutura.

$$\min W = \rho \sum_{i=1}^{nel} A_i L_i \quad (6.1)$$

$$\min |\sigma_{ij}| = \sigma_{flexão} + \sigma_{normal} \quad \text{em cada caso de carregamento} \quad (6.2)$$

Sujeito a restrições contra a flambagem local;

$$|\sigma_i| \leq |\sigma_f| \quad i = 1, \dots, nel \quad \text{em cada caso de carregamento} \quad (6.3)$$

Restrições de deslocamento;

$$\mu_i \leq \mu_{\max} \quad i = 1, \dots, nel \quad \text{em cada caso de carregamento} \quad (6.4)$$

Em todas as equações, o índice i representa a numeração de cada elemento que a estrutura é subdividida pelo MEF. Na forma como o problema foi formulado, durante os cálculos de otimização, os elementos da estrutura podem ser submetidos a restrições contra a ocorrência de flambagem linear elástica e na flexibilidade do conjunto. Todas as opções que extrapolem os limites pré-estabelecidos são descartados pelo algoritmo.

À medida que a otimização avança, o algoritmo busca minimizar a área dos perfis e as tensões atuante na estrutura. As modificações são expressas através das variáveis do projeto que correspondem às áreas de seção transversal de cada elemento, descritas pelo vetor $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$.

O algoritmo busca minimizar a massa e os níveis de tensão da estrutura em análise de forma simultânea. Trata-se de uma estrutura metálica basculante utilizada na porção final de alguns tipos de guindastes portuários projetados para carregar navios com grãos, conforme figura 6.1.



Figura 6.1 - Exemplo de aplicação da estrutura basculante testada no trabalho

A otimização foi conduzida através da utilização do algoritmo genético NSGA-II disponível no programa modeFRONTIER. Uma licença para testes do programa modeFRONTIER versão 4.1 foi disponibilizada pela empresa ESSS, proprietária dos direitos de comercialização.

O cálculo estrutural foi realizado a partir do modelo numérico parametrizado desenvolvido no programa Ansys Workbench versão 11.0, do departamento de engenharia da empresa TMSA – Tecnologia em Movimentações S.A.

O peso total da estrutura e a máxima tensão absoluta da estrutura calculada a cada iteração testada formaram as variáveis de saída do programa Ansys e, por consequência, as variáveis de entrada do programa modeFRONTIER. O acoplamento entre os dois programas foi excelente.

A figura 6.2 exhibe o modelo paramétrico tridimensional construído para o cálculo via MEF. As cargas e as vinculações consideradas na condição com vento frontal estão descritos na aba superior esquerda da figura abaixo. Alguns perfis não foram incluídos no estudo de otimização, por terem funções estratégicas na operação do equipamento. Dentre estes casos, é possível citar os perfis U, em toda a extensão lateral da estrutura nos dois lados, por tratar-se de um trilho guia de um tubo móvel. A região de engaste do cilindro hidráulico é outra não foi incluída nas rotinas de otimização.

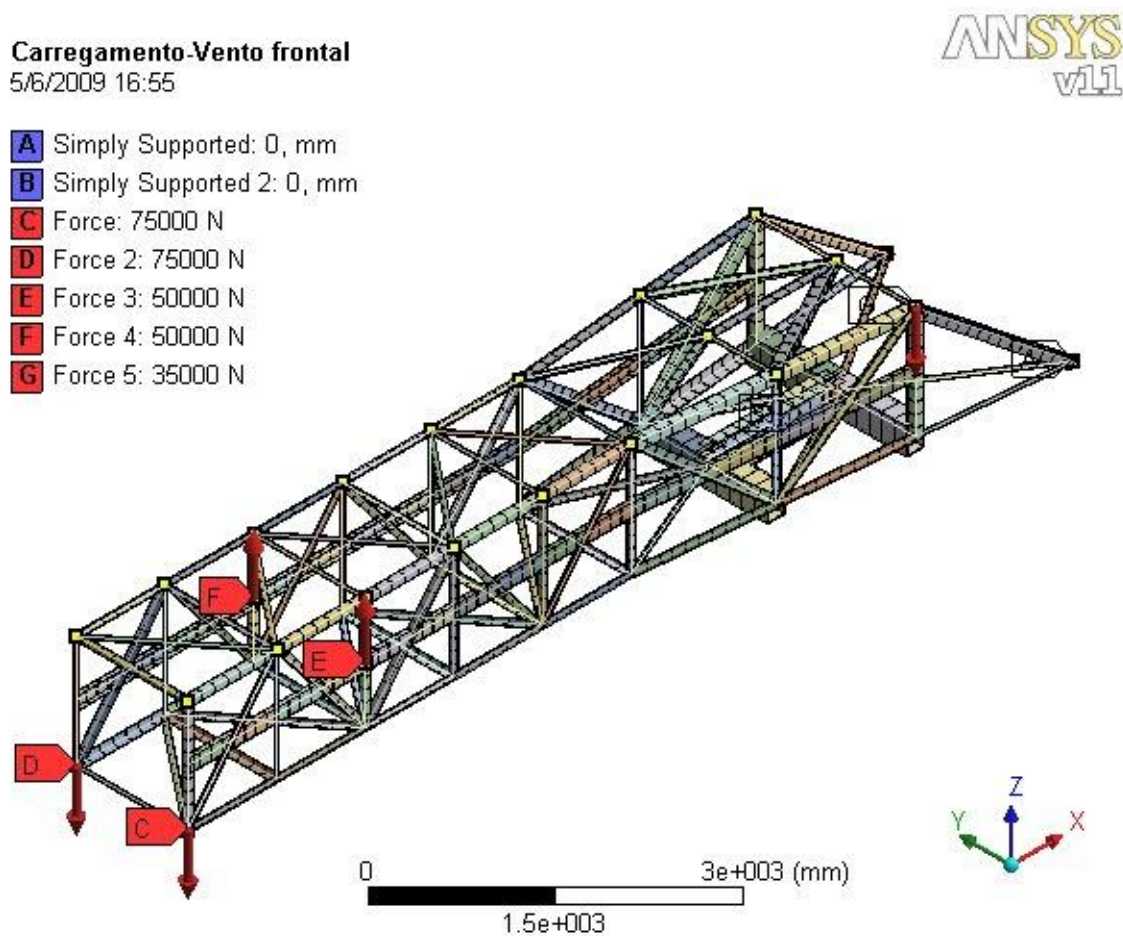


Figura 6.2 - Modelo de elementos finitos paramétrico da estrutura basculante testada com as cargas e as vinculações consideradas

Os valores das cargas consideradas no modelo são valores calculados pelo departamento de engenharia da TMSA. A forma como foi calculada a empresa se detém no direito de não divulgá-las por questões de sigilo empresarial.

A tabela 6.1 demonstra o cálculo da carga de vento máximo considerado (definição da força nr. 5 na figura 6.2), de acordo com a Norma ABNT NBR 8.400:

Tabela 6.1 - Tabela de cálculo das cargas de vento frontal sobre a estrutura

Vento limite máximo	150,0	[Km/h]	=	41,7	[m/s]
Área de obstrução	20,4	[m ²]			
Pressão aerodinâmica	108,5	[Kgf/m ²]			
Coefficiente aerodinâmico	1,6				
Força Máx. Vento	3.541,7	[Kgf]	=	34.744	[N]

Todas as áreas dos perfis representaram as variáveis do estudo de otimização. Entretanto, simetrias foram definidas no modelo MEF, a fim de reduzir o número de variáveis do estudo. Por exemplo, os contraventos laterais nos módulos finais da estrutura foram todos considerados como sendo apenas uma variável de otimização. Ou seja, toda vez que o algoritmo selecionava um perfil para teste, este perfil era considerado em todos os contraventos que tinham simetrias estabelecidas, tanto ao lado direito, quanto ao lado esquerdo. A mesma situação foi utilizada nos contraventos superiores e inferiores. Simetrias também foram estabelecidas em partes dos banzos principais da estrutura, para que a posterior fabricação da estrutura otimizada fosse simplificada, sem muitas variações nos perfis finais encontrados. Desta forma, foi possível reduzir o número de variáveis da rotina na ordem de 40 %, para as 31 variáveis de projeto finais utilizadas no estudo.

A tabela 6.2 detalha as características geométricas dos perfis comerciais selecionados para representarem as variáveis do projeto de otimização.

Tabela 6.2 - Tabela de perfis disponíveis para testes no algoritmo de otimização NSGA II

	PERFIL	DIMENSÕES	ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL [cm ²]	MOM. INÉRCIA EIXOS 1-1; 2-2 [cm ⁴]
1	Cantoneira abas iguais	2" x 2" x 1/4"	6,0	14,6
2	Cantoneira abas iguais	2 1/2" x 2 1/2" x 1/4"	7,6	29,2
3	Cantoneira abas iguais	3" x 3" x 1/4"	9,3	50,0
4	Cantoneira abas iguais	3" x 3" x 5/16"	11,4	62,8
5	Cantoneira abas iguais	3" x 3" x 3/8"	13,6	73,2
6	Cantoneira abas iguais	3" x 3" x 1/2"	17,7	92,2
7	Cantoneira abas iguais	4" x 4" x 1/4"	12,5	126
8	Cantoneira abas iguais	4" x 4" x 5/16"	15,5	154
9	Cantoneira abas iguais	4" x 4" x 3/8"	18,4	181
10	Cantoneira abas iguais	5" x 5" x 3/8"	23,3	363
11	Tubo quadrado	100 x 100 x 1/4"	23,8	350
12	Tubo quadrado	120 x 120 x 1/4"	28,2	603
13	Tubo quadrado	143 x 143 x 5/16"	42,8	1308

A utilização de 31 variáveis de projeto no estudo de otimização e 13 opções de perfis a serem testados gera uma possibilidade de $2,4 \times 10^{19}$ combinações (31^{13}) possíveis de serem realizadas. Este número mostra a infinidade de combinações viáveis do problema e mostra também a versatilidade do método em encontrar as melhores opções (soluções não dominadas) sem que seja necessário testar todas as combinações.

Para avaliar o comportamento da estrutura de forma apropriada, o elemento tridimensional elástico de viga *Beam 4* foi utilizado. Todas as propriedades geométricas dos perfis foram detalhadamente definidas em suas três dimensões. O elemento finito *Beam 4* é utilizado com frequência por incorporar capacidades de representar esforços de tração, compressão, torção e flexão.

O elemento possui 6 graus de liberdade em cada nó:

- Translações nas direções dos eixos x, y e z;
- Rotações em torno dos eixos x, y e z.

A tensão máxima combinada do elemento é calculada incrementando ou reduzindo, de acordo com o sentido de ação, os valores absolutos de tensão de flexão (*SBZT* e *SBYB*) no valor da tensão normal (*SDIR*) através do princípio da superposição. Esta consideração não utiliza os valores de tensão devido à torção para calcular a tensão combinada. As tensões máximas combinadas do modelo são as variáveis de saída do modelo MEF para o programa modeFrontier.

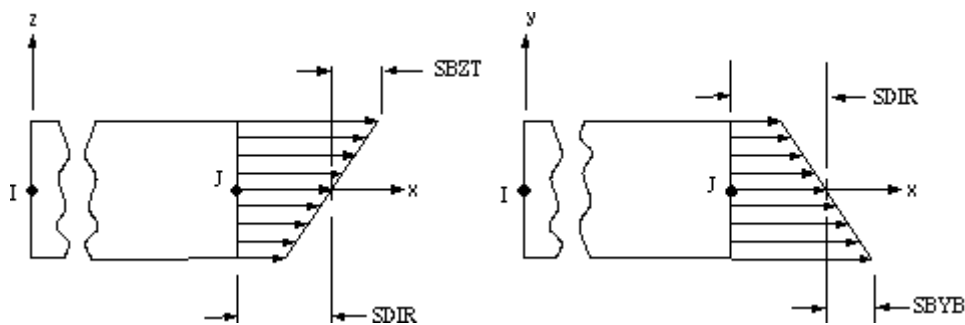


Figura 6.3 - Superposição de tensões do elemento *Beam 4* para obter as tensões combinadas

De acordo com as equações 6.1 e 6.2, os dois objetivos deste estudo de otimização são a minimização dos níveis de tensões combinada da estrutura e a minimização da massa total do conjunto. As propriedades físicas utilizadas foram:

- Módulo de Elasticidade (**E**): 200 GPa

- Coeficiente de Poisson (ν): 0,3
- Densidade (ρ): 7850 kg/m³

O método de dimensionamento utilizado foi o Método das Tensões Admissíveis com valores de coeficiente de segurança e tensões admissíveis bem conservadores, devido ao fato de não ter sido utilizado nenhuma análise de fadiga, nem tampouco análise dinâmica dos materiais.

O fluxograma para gerenciamento da informação entre as rotinas de otimização foi desenvolvido no programa modeFRONTIER. A figura 6.4 mostra as interfaces entre os programas utilizados. As seções transversais dos perfis (*cross sections*) são testadas, utilizando os princípios do AG utilizado.

A probabilidade de cruzamento definida foi de 90 %, que significa a probabilidade do algoritmo trocar o material genético entre dois indivíduos, cortando o cromossomo em um ponto aleatório e repassando a informação restante para o outro indivíduo. A taxa de mutação considerada foi de 10%, que representa a probabilidade de que as variáveis sejam aleatoriamente trocadas entre cromossomos.

As variáveis do algoritmo NSGA-II (áreas das seções transversais) são identificadas através de combinações binárias. O número de bits utilizados para representar o número de opções (perfis) disponíveis são definidos pelo programa de otimização em sua compilação interna. As operações de cruzamento e mutações utilizam as combinações binárias de cada opção testada como material genético para realizar as operações genéticas.

O exemplo testado foi solucionado em duas análises estruturais MEF estáticas distintas. A primeira com cargas de vento na direção frontal da estrutura e a segunda com carga de vento na direção lateral. Os maiores níveis de tensões absolutas combinadas encontradas no pós-processamento são avaliadas a cada iteração pelo programa modeFRONTIER. Dentre todas as tensões combinadas, aquela que possuir a maior intensidade em módulo é o valor considerado para medir a opção testada pelo algoritmo.

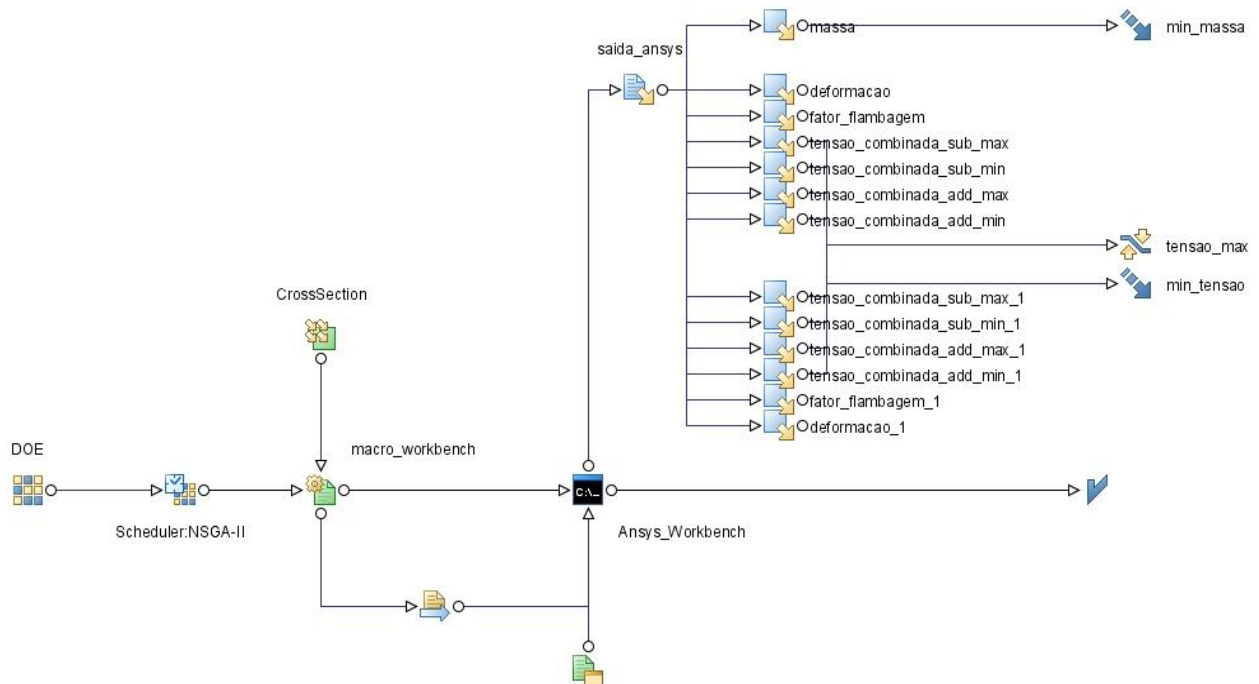


Figura 6.4 - Fluxograma construído no programa modeFRONTIER para a execução da otimização

O outro valor considerado para avaliar a assertividade de cada solução testada em cada iteração é a massa total, já que um dos objetivos do estudo é minimizar a massa da estrutura. Caso a opção testada tenha valores de massa total alto (soluções dominadas), o algoritmo irá considerar um valor de aptidão baixo para esta opção.

Como informado no capítulo 5, a restrição para a carga de flambagem foi a carga obtida através da ferramenta de flambagem global linear do programa Ansys Workbench. A análise de flambagem linear verifica a carga de flambagem teórica de um elemento elástico ideal. Esta análise teórica no modelo FEM coincide com a teoria clássica de Euler.

Imperfeições e não linearidades fazem com que muitos casos na prática comportem-se diferentemente da forma linear elástica clássica. Correções e ajustes nas curvas de resistência à compressão sugerida pela Norma NBR 8.800, devido às imperfeições geométricas, não foram consideradas para não onerar os cálculos. Permanece sendo uma sugestão para trabalhos futuros nesta área.

Devido às incertezas das cargas e por precaução, o coeficiente de segurança contra a ocorrência de flambagem foi pré-estabelecido em 2,5. Ou seja, toda opção testada que possua elementos solicitados por uma carga que, quando multiplicada por 2,5 atinja a crítica de flambagem do elemento, será descartada.

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_i} \geq 2,5 = \lambda_i \quad i=1,..nel \quad (6.5)$$

Este coeficiente de segurança elevado foi selecionado também para evitar que os elementos possam entrar em uma região crítica de flambagem local dos elementos. É importante ter consciência que a análise linear elástica fornece resultados rápidos, porém não muito conservativos. Para uma análise mais acurada, é necessário um estudo não linear, habilitando a possibilidade do modelo admitir grandes deformações até que seja encontrada a situação que o elemento se torne instável.

A restrição de deslocamento não trouxe muita preocupação no exemplo testado. Uma vez que a estrutura opera em balanço, um deslocamento na mesma ordem de grandeza que o deslocamento da estrutura original, não traria maiores dificuldades para a operação final do equipamento. Ao invés de ativarmos esta restrição durante a otimização, optou-se simplesmente por verificar esta grandeza em cada projeto selecionado na fronteira de Pareto, pois o fluxograma do modelo construído monitora esta informação a cada iteração.

Variáveis selecionadas randomicamente representam o conjunto de valores iniciais testados na rotina de otimização. A população inicial deve ser especificada pelo usuário. A literatura do algoritmo NSGA-II no programa modeFRONTIER indica uma forma de definir a população inicial. “A população inicial sugerida é da ordem de 2 vezes o número de variáveis utilizadas no modelo, multiplicado pelo número de objetivos da otimização”. Ou seja, o modelo testado possui 31 variáveis e 2 objetivos propostos (minimização da massa e das tensões atuantes). Portanto, a população inicial considerada foi de 120 indivíduos (2x30x2).

Todos os candidatos analisados pelo programa durante a otimização são reproduzidos e recriados a partir desta população inicial selecionada. A rotina de cálculo segue automaticamente até que o critério de parada estabelecido seja atingido. Neste trabalho, o critério de parada estabelecido foi de 90 gerações.

7. RESULTADOS

As simulações estruturais foram conduzidas através do modelo MEF, descrito no capítulo 6. Os níveis de tensões máximas absolutas das opções selecionadas foram baseadas nas tensões de 150 MPa encontradas no modelo original. Este nível baixo de tensão mecânica em relação ao limite de escoamento de um aço comum (~250 MPa) foi escolhido para garantir a performance da estrutura, durante sua operação, com baixos níveis de tensões. Esta seleção também garante uma vida útil considerável, principalmente contra a ocorrência de fadiga e fluência.

Os resultados obtidos estão plotados no gráfico: máxima tensão absoluta *versus* massa total da estrutura da figura 7.1 abaixo.

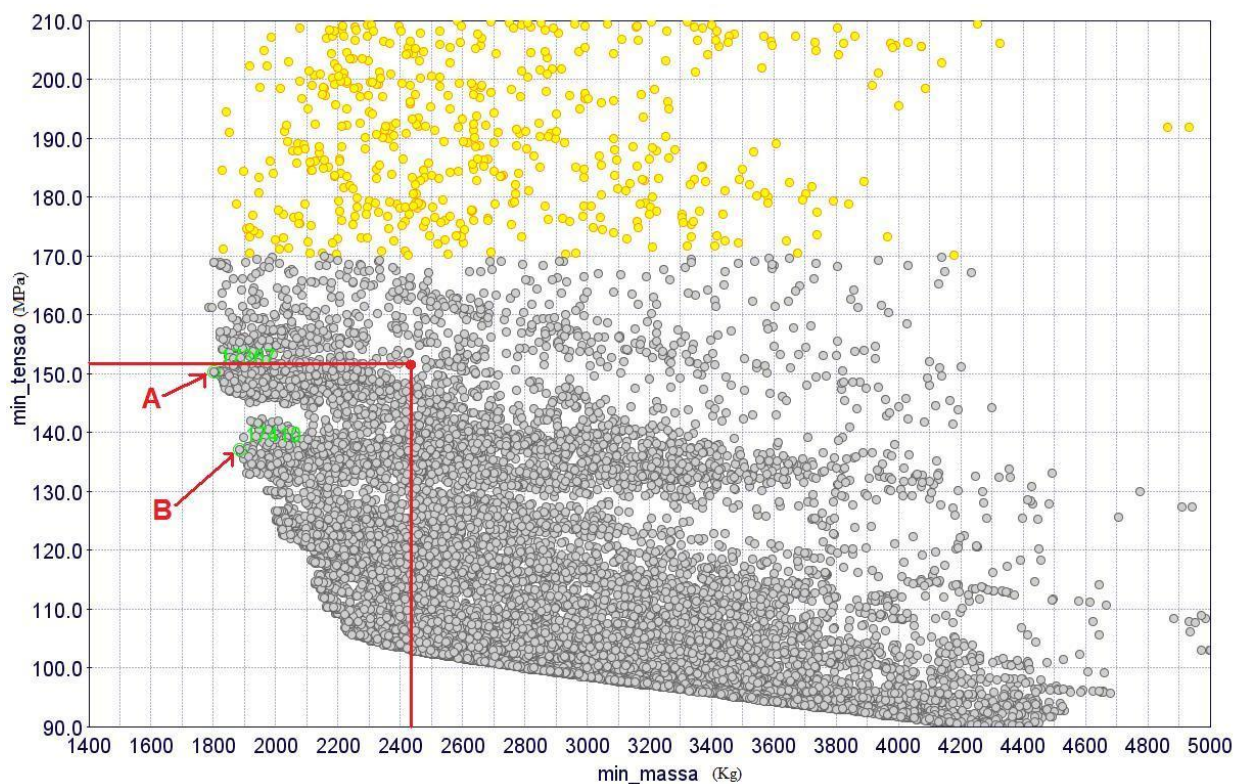


Figura 7.1 – Gráfico tensão x massa de todos os exemplos testados mostrando a curva de Pareto e as duas opções A e B marcadas.

Neste exemplo, a fronteira de Pareto representa as soluções que possuem a melhor relação de compromisso entre a redução de massa e de tensão simultaneamente.

O ponto indicado no gráfico com a cota de massa de aproximadamente 2430 Kg, no eixo das abscissas, e tensão de aproximadamente 153 MPa, no eixo das ordenadas, representa o modelo original da estrutura.

Os pontos A e B são duas boas opções para serem selecionadas para o projeto na fronteira de Pareto. Entretanto, por possuir a menor massa e níveis de tensões abaixo dos 150 MPa, a opção A foi selecionada para demonstração dos resultados do modelo original. É importante observar a redução de massa da ordem de 25% em relação ao projeto original.

A fronteira de Pareto possui uma visível mudança de direção na região de 2.200 Kg de massa e aproximadamente 105 MPa de tensão. Esta mudança ocorre, pois na medida em que o algoritmo tenta reduzir massa, diversos elementos da estrutura passam a utilizar valores mínimos de perfis disponíveis. Neste caso, a estrutura não consegue obter uma massa menor, sem que haja uma elevação nas tensões. Este ponto teria a melhor relação de compromisso entre redução de massa e tensão. Entretanto, como o principal objetivo é a redução de massa, o ponto A foi selecionado.

As figuras 7.2 e 7.4 mostram os níveis de tensões máximas combinadas do modelo original e os perfis que compõe a estrutura. Na figura 7.3, estão plotados os deslocamentos da estrutura original.

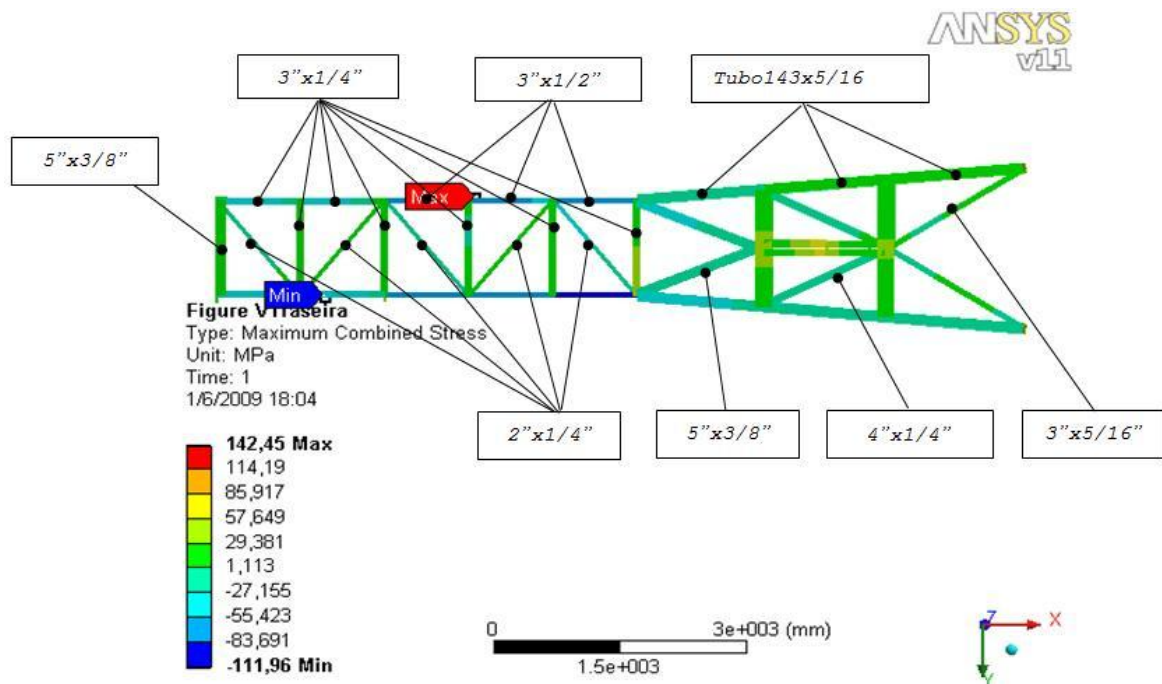


Figura 7.2 - Níveis de máxima tensão combinada e perfis do modelo original (vista inferior)

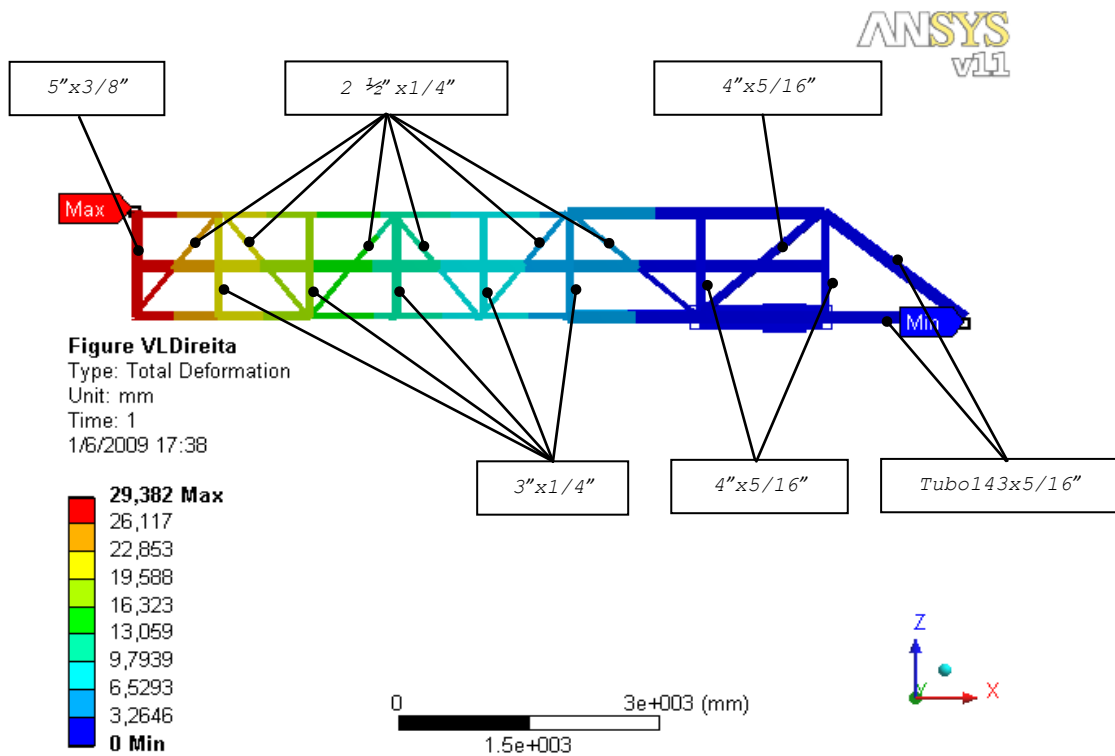


Figura 7.3 - Deslocamentos e perfis do modelo original (vista lateral)

A figura 7.3 demonstra que o deslocamento máximo da estrutura original é de 29,3 mm no extremo de sua porção inferior.

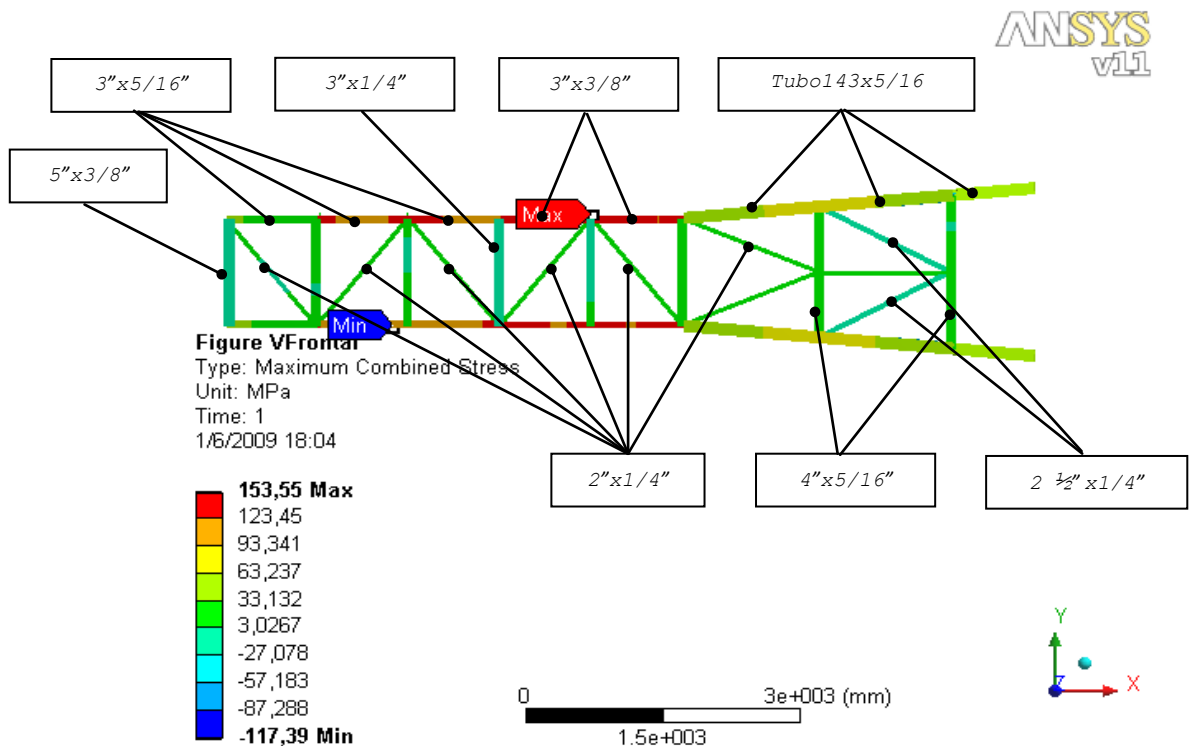


Figura 7.4 - Níveis de máxima tensão combinada e perfis do modelo original (vista superior)

Nas figuras 7.5, 7.7 e 7.8, estão plotados os níveis de tensões máximas combinadas da opção selecionada na fronteira de Pareto, identificada pelo ponto A na figura 7.1

Na figura 7.6, estão plotados os deslocamentos da opção A, onde pode ser verificado que a estrutura selecionada possui deslocamentos máximos de 39,5 mm também em sua porção extrema inferior. Este aumento de 10 mm da condição deformada (em relação ao modelo original) não representa nenhum problema para a operação do equipamento.

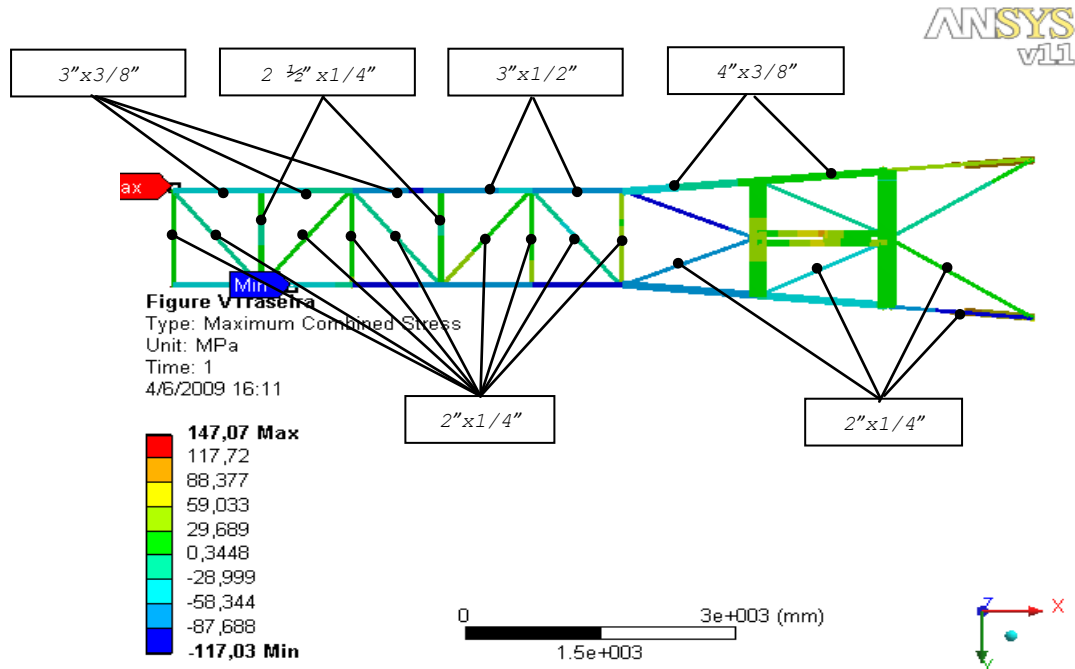


Figura 7.5 - Níveis de máxima tensão combinada da opção A (vista inferior) e perfis encontrados pelo cálculo

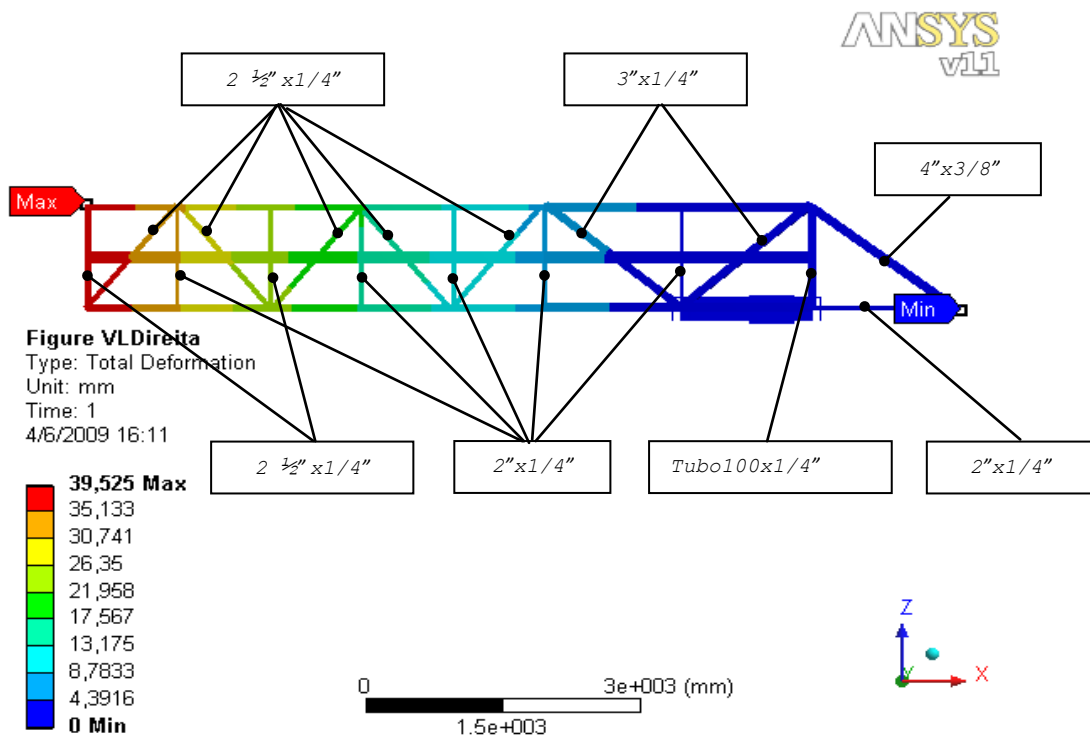


Figura 7.6 – Deslocamento e perfis da opção A (vista lateral)

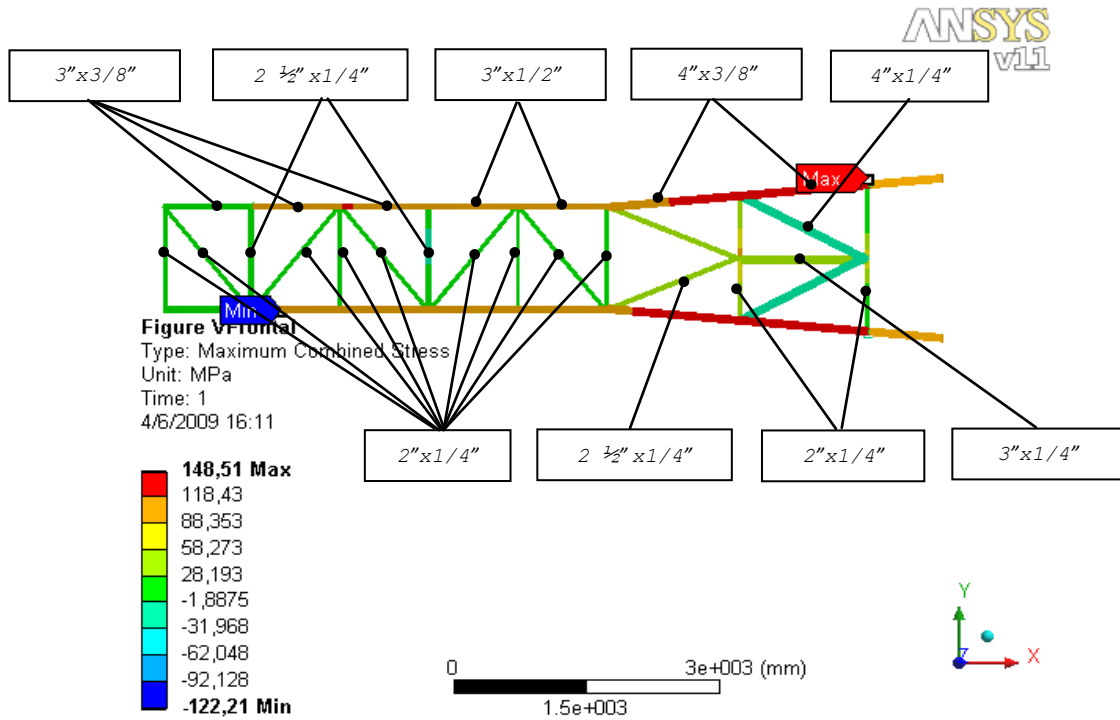


Figura 7.7 - Níveis de máxima tensão combinada da opção A (vista superior) e perfis encontrados pelo cálculo

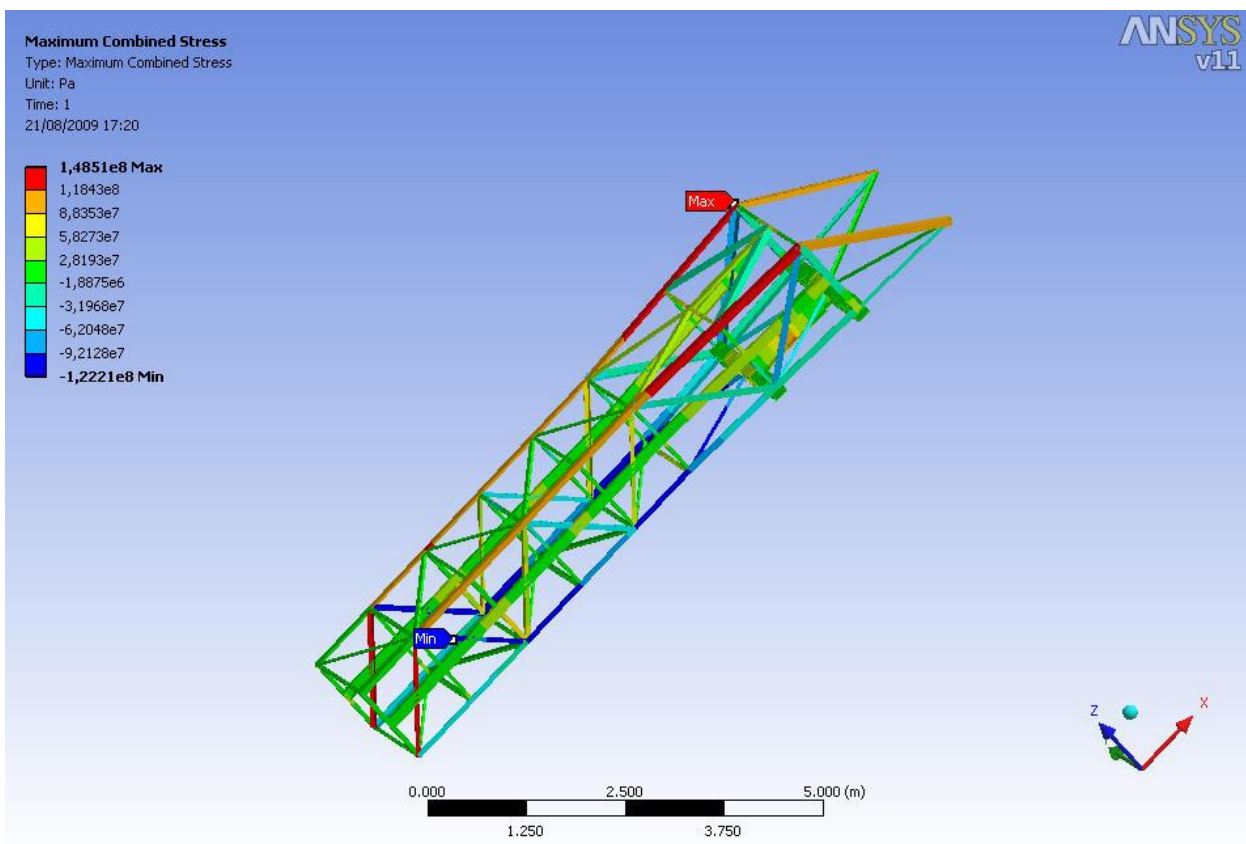


Figura 7.8 - Níveis de tensões combinadas na opção A do modelo 3D otimizado

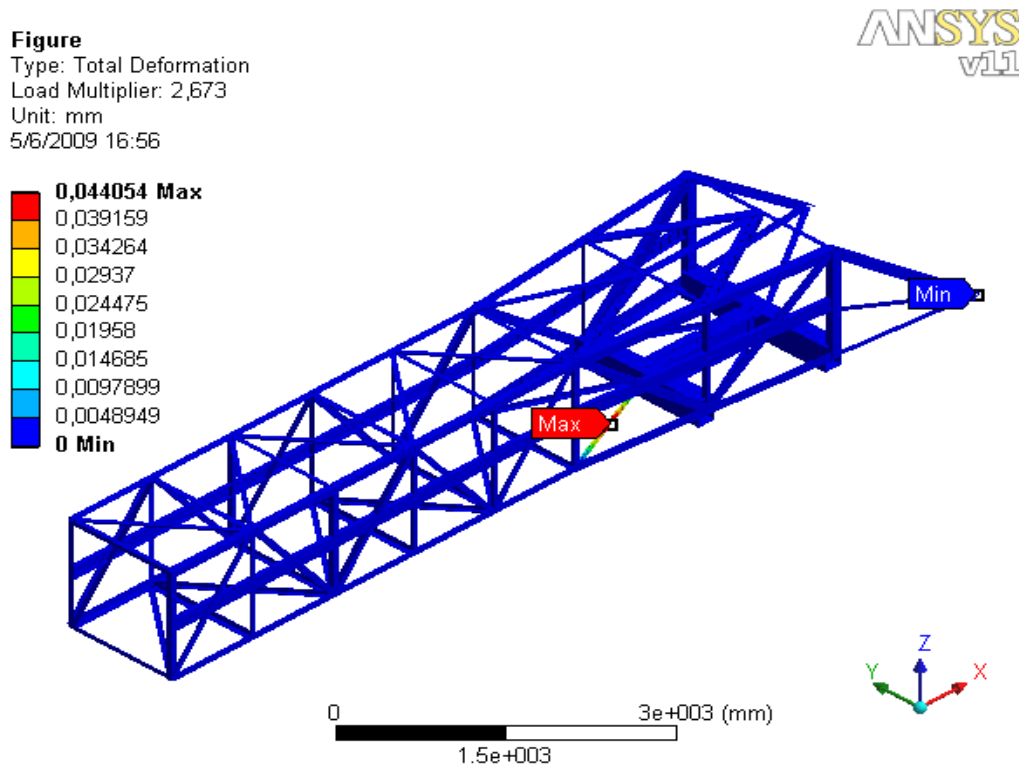


Figura 7.9 - Perfil mais solicitado à flambagem no modelo final 3D otimizado (ponto A)

A figura 7.9 demonstra o perfil mais solicitado para a condição de flambagem, avaliado pelo programa Ansys Workbench. O fator multiplicador da carga, que representa o coeficiente de segurança para evitar que o perfil entre em uma condição instável de flambagem, encontrado na análise de flambagem linear foi de 2,67. Ou seja, este valor permaneceu dentro dos limites de segurança estabelecidos na restrição de flambagem (equação 6.5).

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_i} = 2,67 = \lambda \quad (7.1)$$

Com o objetivo de confirmar o coeficiente de segurança, a condição foi recalculada através do roteiro sugerido pela Norma NBR 8.800. Os esforços de compressão e momentos fletores atuantes nos eixos da seção transversal do perfil foram obtidos através da solução do modelo FEM e serviram como dados de entrada para os cálculos.

A Norma NBR 8.800 estabelece que seja verificada a seguinte equação para perfis submetidos a carregamentos simultâneos:

$$\frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} + \frac{8}{9} \left(\frac{M_{x,Sd}}{M_{x,Rd}} + \frac{M_{y,Sd}}{M_{y,Rd}} \right) \leq 1,0 \quad (7.2)$$

A tabela 7.1 demonstra os valores que compõe o cálculo proposto pela NBR 8.800. O coeficiente de segurança através do roteiro sugerido pela Norma foi de 1,70.

$$0,52 + \frac{8}{9} (0,06) \leq 1,0 \quad (7.3)$$

$$0,58 \leq 1,0 \quad (7.4)$$

Tabela 7.1 – Avaliação do coeficiente de segurança no perfil otimizado através da NBR 8.800

Avaliação do perfil cantoneira abas iguais 2 - 1/2" x 1/4" sob compressão

Força axial solicitante de compressão (N_{Sd})	64.027 [N]
Força axial resistente de compressão (N_{Rd})	121.138 [N]
Comprimento de flambagem	1,6 [m]
Parâmetro de flambagem (k)	1,0
Índice de esbeltez reduzido (λ_0)	0,70
Força axial de flambagem elástica (N_e)	224.151 [N]
Momentos fletor solicitante no eixo x ($M_{x,Sd}$)	93,0 [Nm]
Momentos fletor solicitante no eixo y ($M_{y,Sd}$)	51,0 [Nm]
Momentos fletor resistente nos eixos x e y ($M_{x,Rd}$ e $M_{y,Rd}$)	2.178,0 [Nm]
Coeficiente de segurança	1,70

No cálculo realizado através do roteiro da Norma NBR 8.800, utilizou-se o parâmetro de esbeltez $k=1,0$, indicado para rotação livre e translação impedida nas duas extremidades do perfil, pois a estrutura, mesmo sendo soldada, permite a rotação nas extremidades dos perfis na condição deformada, quando a união é realizada em perfis com baixa rigidez.

É possível afirmar que o valor do coeficiente de segurança calculado (1,70) é menor do que o valor encontrado no programa Ansys (2,67), pois a Norma possui um procedimento que direciona para um cálculo mais conservativo.

Entre outros artifícios, a Norma utiliza um coeficiente de ponderação das resistências para escoamento, flambagem e instabilidade de aços estruturais para reduzir a resistência do material em favor da segurança. É utilizado, também, o fator de redução associado à resistência à

compressão que minora a resistência do elemento às cargas de compressão em função do índice de esbeltez reduzido calculado.

O mesmo elemento da estrutura também foi verificado pela NBR 8.800 para avaliação do coeficiente de segurança existente na situação original. A tabela 7.2 demonstra os valores encontrados no cálculo e as equações 7.5 e 7.6, os valores aplicados na fórmula para perfis submetidos a carregamentos simultâneos (equação 7.2).

$$0,13 + \frac{8}{9}(0,04) \leq 1,0 \quad (7.5)$$

$$0,17 \leq 1,0 \quad (7.6)$$

Tabela 7.2 – Avaliação do coeficiente de segurança no perfil original através da NBR 8.800

Avaliação do perfil cantoneira abas iguais 5" x 3/8" sob compressão

Força axial solicitante de compressão (N_{sd})	61.325 [N]
Força axial resistente de compressão (N_{Rd})	469.687 [N]
Comprimento de flambagem	1,6 [m]
Parâmetro de flambagem (k)	1,0
Índice de esbeltez reduzido (λ_0)	0,45
Força axial de flambagem elástica (N_e)	2.773.012 [N]
Momentos fletor solicitante no eixo x ($M_{x,sd}$)	562,0 [Nm]
Momentos fletor solicitante no eixo y ($M_{y,sd}$)	118,0 [Nm]
Momentos fletor resistente nos eixos x e y ($M_{x, sd}$ e $M_{y,sd}$)	13.465,0 [Nm]
Coeficiente de segurança	5,88

Na situação original, o mesmo perfil crítico sob carregamento de compressão possui um coeficiente de segurança contra a flambagem de 5,88. Esta avaliação demonstra que mesmo os perfis mais solicitados da estrutura original possuem uma conservativa reserva de segurança contra a instabilidade por flambagem elástica de Euler.

Em suma, o processo de otimização sugeriu uma melhoria na estrutura, reduzindo as dimensões dos perfis cantoneiras para perfis mais esbeltos sem comprometer o desempenho do conjunto. As modificações sugeridas permitiram uma melhor distribuição das tensões através da estrutura.

O modelo MEF utilizado neste trabalho foi devidamente simplificado para que o tempo computacional não onerasse o tempo total de otimização. Por ter sido utilizado um modelo com

um número reduzido de elementos finitos, cada análise MEF consumiu aproximadamente 20 segundos de processamento. Entretanto, a iteração completa consumiu em torno de 60 segundos de processamento. A iteração completa executa a análise no programa Ansys, envia as informações da opção testada para o programa modeFRONTIER que reproduz e recombina, através dos princípios do algoritmo genético NSGA II, e retorna para novas análises MEF no Ansys.

Toda a otimização consumiu 4 dias de processamento, utilizando 2 processadores de uma máquina Intel Quad Core, modelo Q6600, 2.4GHz. No total, 10.700 opções foram avaliadas pelo algoritmo. Os resultados apresentados mostram que uma estrutura com menor massa e menor nível de tensões em relação à condição original foi encontrada, cumprindo com os objetivos propostos.

8. CONCLUSÕES

Conclui-se que a integração entre a análise estrutural e a otimização multiobjetivo (MEF e AG NSGA-II respectivamente) mostraram-se uma ferramenta eficiente para a realização de otimizações paramétricas com variáveis discretas. Conforme mencionado, neste trabalho foram acoplados os programas comerciais modeFRONTIER v. 4.1 e Ansys Workbench v. 11. O acoplamento entre os programas foi excelente.

A estrutura para o carregamento de navios foi otimizada através da utilização dos AGs. Os resultados encontrados e o ponto A selecionado na fronteira de Pareto permitem o desenvolvimento de um novo projeto com redução de massa de aproximadamente 25% e redução de 3% nos níveis de tensões, as quais já eram consideradas satisfatórias na estrutura original (~150MPa).

É importante esclarecer que, a utilização da estrutura otimizada no projeto, resultará em reduções de massa em outras partes do equipamento, como a lança de carregamento e torre de sustentação, e também redução de custo de componentes adquiridos de terceiros, tais como, cilindro hidráulico de basculamento, guincho de elevação de lança, entre outros. Como a estrutura é montada em balanço no extremo da lança, no caso de utilização de uma estrutura com reduções consideráveis de massa, todo o dimensionamento do equipamento poderá ser melhorado, trazendo benefícios em outras estruturas não estudadas neste trabalho.

A metodologia de um projeto na indústria, em geral, pode ser subdividida em três fases distintas: projeto conceitual, projeto básico e projeto de detalhamento. O estudo realizado neste trabalho obtém melhores resultados, quando realizado no projeto básico. Pois, nesta fase, os perfis que melhor atendem a relação custo x benefício de uma estrutura podem ser selecionados, permitindo que o projeto siga para a fase de detalhamento.

Quando realizadas em momentos não apropriados, resultados de simulações através do MEF podem gerar mudanças no detalhamento das partes de um projeto. Porém, são modificações que ainda podem ser consideradas de baixo custo, quando comparados com a situação crítica do projeto conceitual ter que ser modificado.

Simulações em estágios não apropriados podem regredir todo o desenvolvimento de um projeto para seu estágio conceitual. Estas modificações normalmente acarretam um alto custo de retrabalho e de tempo que podem atrasar todo um cronograma de um projeto.

Uma otimização estrutural do tipo paramétrica deve ser realizada durante as primeiras etapas de um projeto básico, sempre que possível. Por testar diversos perfis, uma condição ótima

pode ser encontrada no início de um projeto. Mesmo em estágios conceituais de um projeto é possível realizar uma avaliação preliminar e com qualidade a respeito da quantidade de material a ser utilizado em uma estrutura de aço.

Otimizações topológicas e de forma podem ser realizadas, tanto em estágios conceituais, quanto em estágios mais avançados do projeto. Porém, em estágios avançados é importante analisar pequenos detalhes de um conjunto maior já definido, para evitar retrabalhos, atrasos e desperdícios financeiros.

Em trabalhos futuros que utilizem a mesma linha de pesquisa sugere-se:

- A utilização de um modelo MEF sem muitas simplificações, para evitar qualquer viés nos resultados pela falta de precisão do modelo;
- Considerações dinâmicas no modelo para incorporar restrições contra ressonância vibratória da estrutura;
- Análises de fadiga dos materiais em esforços repetitivos também podem melhorar um estudo de otimização;
- Incorporar no algoritmo de cálculo correções nas curvas de flambagem, devido a imperfeições geométricas dos perfis;
- Utilizar novas versões do algoritmo randômico de Monte Carlo com controle de variância para comparar com as informações fornecidas pelo AG;
- Iniciar o estudo com uma otimização através de variáveis contínuas e utilizar os resultados como dados de entrada para um estudo de otimização com AG para acelerar a busca [Souza, 2009];
- Realizar uma otimização no qual o objetivo principal seja a minimização do custo de uma estrutura. Neste caso, além dos custos de matéria prima, deveriam ser incorporados os custos de fabricação da estrutura.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

American Institute of Steel Construction. **Load and Resistance Factor Design Specification for Steel Buildings**, 3rd Ed., Chicago, 1999.

Atkin, R.J.; Fox, N., **Introduction to the Theory of Elasticity**, Longman, 1st Ed., 1980.

Associação Brasileira de Normas Técnicas-ABNT. **Cálculo de Equipamento para Levantamento e Movimentação de Cargas - NBR 8.400**, Rio de Janeiro, 1984.

Associação Brasileira de Normas Técnicas-ABNT. **Dimensionamento de Estruturas de Aço Constituídas por Perfis Formados a Frio - NBR 14.762**, Rio de Janeiro, 2001.

Associação Brasileira de Normas Técnicas-ABNT. **Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios - NBR 8.800**, Rio de Janeiro, 2008.

Bathe, K.J. **Finite Element Procedures**, Prentice-Hall, MIT - Massachusetts Institute of Technology, 1996.

Boresi, A.P.; Chong, K.P. **Elasticity in Engineering Mechanics**, Elsevier, New York, 1987.

Cai, J.B.; Thiereut, G. **Discrete Optimization of Structures Using an Improved Penalty Function Method**, Engineering Optimization, Vol. 21, No. 4, 1993.

Carvalho, P.R; Grigoletti, G.; Tamagna, A; Iturrioz, I. **Curso básico de Perfis de Aço Formados a Frio**, Porto Alegre, 2004.

Castro, R.E. **Otimização de Estruturas com Multi-Objetivos via Algoritmos Genéticos**, Tese de Doutorado, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2001.

Cook, R.D.; Malkus, D.S.; Plesha, M.E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**, 3^o Edition, John Wiley & Sons, University of Wisconsin-Madison, 1989.

Datta, D.; Deb, K. **Design of optimum Cross-Sections for Load-Carrying Members using Multi-Objective Evolutionary Algorithms** Kanpur Genetic Algorithms Laboratory, Kanpur, India, 2004.

Deb, K.; Agrawal, S.; Pratap, A.; Meyarivan, T. **A Fast Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization: NSGA-II** Kanpur Genetic Algorithms Laboratory, Kanpur, India, 2000.

Deb, K.; Gupta, N.K. **In Search of Optimal Operating Principles for An Overhead Crane Maneuvering Using Multi-Objective Evolutionary Algorithms** Kanpur Genetic Algorithms Laboratory, Kanpur, India, 2004.

Documentação modeFRONTIER versão 4.1. <http://www.esteco.com>.

Duan, M.Z. **An Improved Templeman's Algorithm for the Optimum Design of Trusses with Discrete Member Sizes**, Engineering Optimization, Vol. 9, No.4, 1986.

Dym, C.L.; Shames I.A. **Solid Mechanics – A Variational Approach**, McGraw-Hill, New York, 1973.

Eurocode 3, Commission of European Communities (CEC). **Design of Steel Structure, Part 1.1 – General Structural Rules**, 2° Draft 2° Rev. Brussels, Belgium, 2001.

Goldberg, D.E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning**, Alabama: Addison Wesley, 1989.

Guilherme, C. E. M. **Otimização Topológica de Treliças e Pórticos com Restrições de Flambagem e Flexibilidade**, Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2000.

Haftka, R.; Gurdal, Z. **Elements of Structural Optimization**, Kluwer Academic Publishers, 1991.

Holland, J. H. **Adaptation in Natural and Artificial Systems**, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.

Juang, D.S.; Wu, Y.T.; Wei-Tze, C. **Optimum Design of Space Truss Structures using Discret Lagrangian Method**, Taiwan, 2003.

Marczak, R.J. **Elementos Finitos: Curso de Introdução ao Método**, Apostila Mestrado Engenharia Mecânica, UFRGS, 1995.

Pereira, J.T. **Otimização Topológica De Componentes Mecânicos com Restrições sobre o Critério de Falha do Material**, Tese de Doutorado, UFSC, 2001.

Ringertz, U.T. **On Methods for Discrete Structural Optimization**, Engineering Optimization, Vol. 13, No. 1, 1988.

Sant'Anna, H. **Otimização Topológica de Estruturas Bidimensionais Contínuas submetidas a Restrições de Flexibilidade e Tensão**, UFRGS, 2002.

Schaffer, J.D. **Multiple Objective with Vector Evaluated Genetic Algorithm**, Vanderbilt University, 1984.

Schmit, L.A.; Fleury, C. **Discrete-Continuous Variable Structural Synthesis Using Dual Methods**, AIAA Journal, Vol. 18, No. 4, 1980.

Selke C.A.C; Pereira, L.T.V.; Fonseca, J.S.O.; Marczak, R.J. **Elementos Finitos**, Apostila, UFSC, 1993.

Silva, E.C.N.S. **Otimização aplicada ao Projeto de Sistemas Mecânicos**, Universidade Federal de São Paulo – Escola Politécnica, 2003.

Souza, R.P. **Otimização de Treliças com Restrições de Falha combinando técnicas de programação de Algoritmos Contínuos e Discretos**, Dissertação de Mestrado, UFRGS, 2009.

Srinivas, N; Kalyanmoy, D. **Multiobjective Optimization Using Nondominated Sorting in Genetic Algorithms** Indian Institute of Technology – Department of Mechanical Engineering, India, 2003.

Structural Stability Research Council. **Stability of Metal Structures, A World View** 2nd Ed., New York City, 1991.

Turkkan, N. **Discrete Optimization on Structures using a Floating Point Genetic Algorithm**, University of Moncton, Canada 2003.

Wah, B.W.; Shang, Y. **A Discrete Lagrangian-Based Global Search Method for Solving Satisfiability Problems**, Proceedings for the Center for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science (DIMACS) Workshop on Satisfiability Problems: Theory and Applications, American Mathematical Society, 1996.

Witmer, E.A. **Elementary Bernoulli-Euler Beam Theory** MIT Engineering Courses Notes, p. 5-114 – 5-164, 1992.

Zhang, C.; Wang, H.P. **Mixed-Discrete Nonlinear Optimization with Simulated Annealing Engineering Optimization**, Vol. 21, No. 4, 1993.