

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Grafos com poucos autovalores distintos

por

Nelcy Esperanza Arévalo Baquero

Tese submetida como requisito parcial
para a obtenção do título de
Doutora em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
Orientador

Porto Alegre, janeiro de 2024

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Arévalo Baquero, Nelcy Esperanza

Grafos com poucos autovalores distintos / Nelcy Esperanza
Arévalo Baquero.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2024.

120 p.: il.

Tese (doutorado)— Universidade Federal do Rio Grande
do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada,
Porto Alegre, 2024.

Orientador: Trevisan, Vilmar

Tese: Matemática Aplicada: Teoria Espectral de Grafos,
Grafos com poucos autovalores distintos, Energia extremal, De-
signs, Grafos Bipartidos

Grafos com poucos autovalores distintos

por

Nelcy Esperanza Arévalo Baquero

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para
a obtenção do título de

Doutora em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Teoria Espectral de Grafos

Orientador: Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Banca examinadora:

Profa. Dra. Renata Raposo Del Vecchio
Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Luiz Emilio Allem
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Leonardo Silva de Lima
Universidade Federal do Paraná

Prof. Dr. Lucas da Silva Oliveira
Coordenador

DEDICATÓRIA

Dedicado ao meu amado Hansel, o grande amor da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à meu orientador, Prof. Dr. Vilmar Trevisan, pessoa de extrema competência, por ter acreditado e confiado na minha capacidade, dando-me a oportunidade de desenvolver esta tese. Obrigada por toda compreensão, dedicação, incentivo, ensinamentos e, sobretudo, sua paciência em todos os momentos.

De forma especial agradeço aos professores Rodrigo Orsini Braga e Virginia Maria Rodrigues, sua colaboração foi fundamental para a concretização da pesquisa.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, por me proporcionar a oportunidade de continuar meus estudos em um curso de excelência.

Meus respeitosos agradecimentos aos professores Renata Raposo Del Vecchio, Luiz Emilio Allem e Leonardo Silva de Lima, pela cortesia em aceitarem integrar a banca examinadora, dispondo de seu tempo e conhecimento para analisar este trabalho.

À CAPES, pelo imprescindível auxílio financeiro.

À minha família e amigos, pelo amor e coragem que sempre me transmitiram.

Por fim, ao Hansel, por me ensinar o que é o verdadeiro amor. ¡Amor mío, eres la luz que ilumina mi vida, te amo y te amaré por toda la eternidad!

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	xi
LISTA DE TABELAS	xiii
LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS	xv
RESUMO	xix
ABSTRACT	xxi
1 INTRODUÇÃO	1
2 PRELIMINARES	5
2.1 Conceitos básicos de álgebra linear	5
2.2 Conceitos básicos de teoria de grafos	10
2.3 Tópicos de teoria espectral de grafos	20
3 DESIGNS	27
3.1 Preliminares	27
3.2 BIBD's	35
3.3 Designs Multiplicativos	39
3.3.1 Designs Multiplicativos Uniformes	39
3.4 Designs transversais	41
4 GRAFOS COM POUCOS AUTOVALORES DISTINTOS E ENERGIA EXTREMAL	43
4.1 Energia de Grafos e Matrizes	43
4.1.1 Energia de grafos	43
4.1.2 Energia de matrizes	47
4.2 Dois problemas propostos por Nikiforov	49
4.3 Grafos conexos com três autovalores distintos	51
4.3.1 0 é autovalor	51
4.3.2 0 não é autovalor	53

4.4	Grafos conexos com quatro autovalores distintos	56
4.5	Grafos desconexos	62
4.6	Considerações finais	64
5	GRAFOS BIPARTIDOS COM POUCOS AUTOVALORES DISTINTOS	67
5.1	Grafos bipartidos com quatro autovalores distintos	68
5.2	Grafos bipartidos distância regular com cinco autovalores distintos	70
5.3	Grafos bipartidos regulares com cinco autovalores distintos	76
5.4	Grafos bipartidos irregulares com cinco autovalores distintos	83
6	FAMÍLIAS INFINITAS DE GRAFOS INTEGRAIS COM POUCOS AUTOVALORES DISTINTOS	87
6.1	Introdução	87
6.2	<i>Double brooms</i> de diâmetro 3	89
6.2.1	Relação com Grafos Unicíclicos Integrais	95
6.3	<i>Double brooms</i> com diâmetro 4	97
6.4	Árvore de Bethe generalizada	99
6.5	Família de grafos \mathcal{A}	100
6.6	Uma família de grafos bipartidos integrais com sete autovalores distintos .	102
7	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	107
7.1	Conclusões	107
7.2	Trabalhos futuros	108
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	117

LISTA DE FIGURAS

2.1 Grafo do Exemplo 2.2.1	12
2.2 Caminho P_5	12
2.3 G_1 é um grafo conexo e G_2 é um grafo desconexo	12
2.4 Ciclo C_4	13
2.5 Cubo Q_3	13
2.6 Grafo K_4	13
2.7 Grafo G , sugrafo G' e subgrafo induzido G''	14
2.8 Grafo G com componentes conexas P_2 e C_3	14
2.9 Árvore T e floresta com componentes conexas P_2 e P_3	15
2.10 Grafo bipartido e grafo bipartido completo $K_{4,4}$	15
2.11 Estrela S_5 e grafo S'_5	16
2.12 Grafo $\overline{Q_3}$	17
2.13 $\ell(Q_3)$	17
2.14 Cone sobre C_4	17
2.15 Grafo de Hamming $H(3, 3)$	18
2.16 Grafo $H(3, 3)_3$	18
2.17 Dois emparelhamentos máximos de um grafo	19
2.18 Grafos com emparelhamento perfeito	19
2.19 Um par de grafos isomorfos	20
2.20 Grafo de Petersen	24
2.21 Grafo de Shrikhande e grafo $\ell_2(4)$	25
3.1 Design (X, \mathcal{B}) , com $X = \{1, 2\}$ e $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{2\}\}$	28
3.2 Design $D^c = (X, \mathcal{B}^c)$, com $X = \{1, 2\}$ e $\mathcal{B}^c = \{\emptyset, \{1\}\}$	31

3.3	Design (Y, \mathcal{A}) , com $Y = \{1, 2\}$ e $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$	32
3.4	Matriz de incidência, representação geométrica e grafo de incidência do plano de Fano	33
3.5	Cubo	37
3.6	Grafo de incidência do BIBD sobre os pontos e planos de $AG(3, 2)$	38
3.7	Grafo total sobre os pontos e planos de $AG(3, 2)$	40
4.1	Cone sobre o grafo de Shrikhande e cone sobre o grafo $\ell_2(4)$	54
4.2	Grafo $\overline{Q_3 \otimes J_2}$	58
4.3	Grafos BCS_9 e $CP(3)$	63
5.1	Tabela 1 de [73]	69
5.2	Grafo de incidência do design da segunda linha da tabela da Figura 5.1	70
5.3	Hipercubo Q_4 e matriz tridiagonal T	72
5.4	Grafo $T(4)$	75
5.5	meio grafo do hipercubo Q_4	75
5.6	um grafo caminho regular	77
5.7	Grafo $T(5)$	80
5.8	Grafo de incidência do design transversal 1-resolvível $TD(2, 2)$	84
6.1	<i>Double broom</i> $T(k, \ell, d)$ e árvore de Bethe generalizada de diâmetro 4	88
6.2	Árvore de diâmetro 3	89
6.3	$C_{4,2}(p, q, 0, 0)$	96
6.4	<i>Double broom</i> $T(k, \ell, 3)$	97
6.5	Família de grafos \mathcal{A}	100
6.6	Família de grafos $K_{p,q} \equiv K_{q,r}$	103

LISTA DE TABELAS

2.1	Alguns grafos e seu espectro	21
4.1	Energia de algumas famílias de grafos	44
4.2	Espectro de grafos conexos regulares com quatro autovalores distintos em \mathcal{G}_n , $n \leq 30$, em que o índice é o único autovalor simples	62
4.3	Grafos conexos em \mathcal{G}_n	65
6.1	Grafos integrais da família no Corolário 6.2.7.	93
6.2	Grafos integrais da família no Corolário 6.2.8.	94
6.3	Grafos integrais da família no Corolário 6.2.9.	95

LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS

Lista de Siglas

BIBD	Design de blocos incompletos balanceados
PBIBD	Design de blocos incompletos parcialmente balanceados

Lista de Símbolos

$\delta(A)$	número de autovalores distintos de A
$\ell(G)$	grafo linha do grafo G
$\lambda_1(G)$	maior autovalor da matriz de adjacência do grafo G (índice de G)
$\lambda_i(G)$	i -ésimo maior autovalor de G
$\lambda_n(G)$	n^{mo} maior autovalor da matriz de adjacência do grafo G
(X, \mathfrak{B})	designs com conjunto de pontos X e coleção de blocos \mathfrak{B}
$ E $	número de arestas
$ V $	número de vértices
\mathbb{F}_2	corpo finito com dois elementos
$\mathbb{Q}(\sqrt{D})$	corpo quadrático formado pelos inteiros algébricos $a + b\sqrt{D}$, onde D é livre de quadrados e $a, b \in \mathbb{Q}$
$\mathcal{E}(G)$	energia do grafo G
\mathfrak{B}	coleção de blocos de um design
Ω	conjunto dos inteiros algébricos
\bar{d}	média dos graus dos vértices
\bar{G}	grafo complementar de G

$\rho(G)$	índice do grafo G
$\sigma_i(B)$	valores singulares da matriz B
$\mathbf{0}$	matriz nula
$\mathbf{1}$	vetor cujas entradas são todos iguais a 1
\tilde{G}	meio grafo do grafo G
$A(G)$	matriz de adjacência de G
$A(V_i, V_j)$	matriz de blocos correspondente aos subconjuntos de vértices V_i e V_j
C_n	caminho de n vértices
$C_{4,2}(p, q, 0, 0)$	grafo unicíclico obtido adicionando caminhos pendentes aos vértices de um ciclo C_4
$d(G)$	diâmetro de G
$d(v)$	grau do vértice G
D_G	matriz diagonal dos graus dos vértices de G
$E(A)$	energia da matriz A
$G(A)$	grafo da matriz A
$G_i(u)$	conjunto de vértices à distância i de u
I_n	matriz identidade de ordem n
J_n	matriz de 1's
K_n	grafo completo de n vértices
$K_{p,q}$	grafo bipartido completo com $p + q$ vértices
$K_{p,q} \equiv K_{q,r}$	grafo com $p + 2q + r$ vértices obtido adicionando q arestas entre os dois grafos disjuntos $K_{p,q}$ e $K_{q,r}$
$m_G(A)$	multiplicidade de λ como autovetor de G
N	matriz de incidência de um design

$p_M(G)$	polinômio característico da matriz A
$p_m(G)$	polinômio minimal da matriz A
P_n	caminho de n vértices
S_n	estrela de n vértices
S'_n	estrela de n vértices com mais uma aresta
$Spec_A(G)$	espectro da matriz A associada a G
$T(k, \ell, d)$	<i>double broom</i> com n vértices e parâmetros k, ℓ, d
$TD(r, r)$	designs transversais 1-resolvíveis
$tr(A)$	traço da matriz A
X	conjunto de pontos de um design

RESUMO

Em seu *survey* [60], Nikiforov propôs dois problemas relacionados à caracterização da igualdade em duas cotas para a energia de um grafo. Mostramos que os grafos desse tipo possuem no máximo dois autovalores não nulos distintos em valor absoluto, logo são grafos com no máximo cinco autovalores distintos. Motivados por essa conexão, apresentamos avanços na compreensão da estrutura de grafos com poucos autovalores distintos. Estudamos os problemas propostos de acordo com o tipo de espectro que esses grafos possam ter e, em muitos desses casos os grafos são caracterizados, em outros apresentamos famílias infinitas de grafos satisfazendo a restrição. Observamos que muitas famílias de grafos que apresentamos são integrais. Inspirados por esse fato, também estudamos grafos integrais com poucos autovalores distintos. Entre nossos resultados, caracterizamos árvores integrais com 5 autovalores distintos.

Palavras-chaves: *grafos com poucos autovalores distintos, designs, energia extremal, grafos bipartidos.*

ABSTRACT

In his *survey* [60], Nikiforov proposed two problems related to the characterization of equality in two bounds for the energy of a graph. We show that graphs of this type have at most two distinct non-zero eigenvalues in absolute value, so they are graphs with at most five distinct eigenvalues. Motivated by this connection, we present advances in understanding the structure of graphs with few distinct eigenvalues. We study the proposed problems according to the type of spectrum that these graphs may have and, in many of these cases the graphs are characterized, in others we present infinite families of graphs satisfying the restriction. We observe that many families of graphs we present are integral. Inspired by this fact, we also study integral graphs with few distinct eigenvalues. Among our results, we characterize integral trees with 5 distinct eigenvalues.

Keywords: *graphs with few distinct eigenvalues, designs, extremal energy, bipartite graphs.*

1 INTRODUÇÃO

A Teoria Espectral de Grafos busca estabelecer propriedades de grafos a partir do espectro de matrizes a eles associadas, utilizando frequentemente ferramentas da Álgebra Linear e da Matemática Discreta e Combinatória. Considera-se que essa área teve origem na Química Quântica, por volta de 1931, com o trabalho de Hückel, quando utilizaram-se grafos para representar moléculas de hidrocarbonetos a fim de determinar os níveis de energia de alguns elétrons associados a essas moléculas através dos autovalores da matriz de adjacências do grafo associado [1]. Entretanto, foi somente no ano de 1971, a partir da tese de doutorado de Cvetković [24], que a Teoria Espectral de Grafos teve a sua fundamentação teórica sedimentada. Desde então é uma área que vem tendo um grande desenvolvimento, despertando o interesse de pesquisadores por todo o mundo, o que é ilustrado pelo grande número de publicações, principalmente nos últimos anos.

Em Teoria Espectral de Grafos, são de grande interesse os problemas extremos, geralmente descritos da seguinte forma:

“Dada uma propriedade P e um parâmetro espectral S , encontrar os grafos que maximizam (ou minimizam) S entre todos os grafos de n vértices que possuem a propriedade P .”

Dentre os vários parâmetros espectrais estudados na Teoria Espectral de Grafos, pode-se destacar a energia de um grafo. Em 1978, Gutman [37] definiu a energia de um grafo como a soma dos módulos dos autovalores da matriz de adjacências desse grafo. Desde então esse conceito tem sido extensivamente estudado [55]. Uma das questões fundamentais no estudo da energia de grafos é o problema da energia extremal, ou seja, caracterizar quais grafos (de uma determinada classe) têm maiores ou menores valores para a energia.

O conceito de energia de grafos foi estendido para matrizes mais gerais, com entradas não negativas e até mesmo matrizes retangulares complexas - como mostra o *survey* de Nikiforov (2016) [60]. Tais extensões geralmente permitem ampliar e avançar o estudo sobre energia, tanto em relação a resultados originais sobre grafos, quanto em relação a tópicos matriciais bem conhecidos. Nesse sentido, pode ser bastante útil ver a energia de um grafo como a norma do traço da matriz de adjacências.

A norma do traço $\|A\|_*$ de uma matriz retangular A com entradas complexas é a soma dos valores singulares de A , ou seja, a soma das raízes quadradas dos autovalores de A^*A , onde A^* é a matriz transposta conjugada de A . Se A for uma matriz real e simétrica, $\|A\|_*$ é simplesmente a soma dos módulos dos autovalores de A . Portanto, se G é um grafo com matriz de adjacências A , então a energia de G é a norma do traço de A , conforme observado por Nikiforov em [59].

Com o intuito de ilustrar o uso de normas matriciais no estudo de energia de grafos, Nikiforov mostrou em [60] que a norma do traço estende resultados bem conhecidos sobre energia de grafos. Em particular, cotas superiores ou inferiores para a norma do traço de matrizes podem ser de interesse no estudo de energia. De fato Nikiforov propôs em [60] diversos problemas envolvendo grafos e cotas para a norma do traço.

Neste trabalho apresentamos nossa contribuição para dois problemas propostos em [60]. O primeiro foi motivado por uma cota inferior que foi apresentada para a norma do traço de uma matriz com posto pelo menos 2, o que inclui a matriz de adjacências de um grafo não vazio. Nikiforov observou que a cota apresentada é bastante eficiente para grafos e citou algumas famílias de grafos para os quais a matriz de adjacências atinge a igualdade na cota. Ele então propôs o problema de caracterizar-se construtivamente todos os grafos cuja matriz de adjacências atinge a igualdade na cota. O segundo problema surgiu de uma cota superior obtida por Koolen e Moulton [53] para a energia de um grafo em termos do índice e dos números de vértices e de arestas, que foi utilizada pelos autores para a obtenção de uma cota superior bem conhecida para a energia $\mathcal{E}(G)$ de um grafo em termos do número de vértices:

$$\mathcal{E}(G) \leq \frac{n}{2} (1 + \sqrt{n}). \quad (1.1)$$

Nikiforov observou quais são as famílias de grafos regulares e de irregulares desconexos que satisfazem a igualdade na cota de Koolen e Moulton para a energia em termos do índice e dos números de vértices e de arestas, e propôs o problema de caracterizar-se construtivamente os grafos restantes, ou seja, irregulares conexos que atingem a cota. Nossa contribuição para os problemas propostos foi submetida para publicação [5].

Em nosso estudo, verificamos que os grafos que satisfazem ambos os problemas propostos em [60] também possuem no máximo dois autovalores não nulos dis-

tintos em valor absoluto, logo são grafos com no máximo cinco autovalores distintos. Com o interesse em estender os resultados além das famílias com poucos autovalores distintos já apresentadas, neste trabalho mostramos nosso progresso inicial na caracterização de todos os grafos dessa família mais geral, que são os grafos bipartidos com quatro ou cinco autovalores distintos.

Grafos com poucos autovalores distintos formam uma classe de grafos amplamente estudada. Eles foram investigados primeiramente por Doob em 1970 [28] e têm sido estudados por vários autores desde então. Uma primeira família não trivial desses grafos que recebeu muita atenção é formada pelos grafos fortemente regulares, que são os grafos regulares com exatamente três autovalores distintos [64]. É interessante observar que os grafos de ordem n que atingem a igualdade em (1.1) são fortemente regulares [53] e, caso existam, têm energia maximal. Nossos resultados na investigação dos problemas mencionados certamente contribuem para o estudo de grafos com poucos autovalores distintos e, possivelmente, para o problema da energia extremal.

Após focar nossa atenção nos estudos de grafos com poucos autovalores distintos, concentramos nossa atenção em estudar famílias de grafos integrais com poucos autovalores distintos. Em geral, o problema de caracterizar grafos integrais é difícil, pois não existe uma caracterização geral para esses grafos, e o problema de encontrar grafos integrais é tratado para famílias especiais. Em [13], Braga et. al. estudam grafos unicíclicos integrais, que são grafos com 7 autovalores distintos, de forma que o estudo desse tipo de grafos é equivalente ao problema de encontrar solução para equações Diofantinas. Por outro lado, Braga [12] estava interessado em caracterizar todas as árvores com 5 autovalores distintos, não necessariamente integrais, assim, usamos alguns dos seus resultados para obter famílias de grafos integrais com 5 autovalores distintos. Mais precisamente, caracterizamos as árvores integrais com 5 autovalores distintos, encontramos uma relação com equações Diofantinas que são precisamente as mesmas que são estudadas pelos autores de [13] na obtenção dos seus resultados.

O presente trabalho está organizado da forma que descreveremos a seguir.

No Capítulo 2, apresentamos as definições e os resultados necessários da Teoria de Grafos e da Álgebra Linear para a compreensão deste trabalho. No Capítulo 3, apresentamos conceitos básicos e resultados da Teoria de Designs que serão utilizados ao longo deste trabalho.

No Capítulo 4, apresentamos o conceito de energia de grafos e suas extensões para outras matrizes de representação de grafos, bem como para matrizes retangulares em geral, para depois fazer nossa contribuição para a solução dos problemas propostos por Nikiforov em 2016, no artigo “*Beyond graph energy: Norms of graphs and matrices* ([60]), que envolvem a caracterização dos grafos que atingem a igualdade em uma cota inferior e em uma cota superior para a energia de um grafo, respectivamente. Os resultados principais desse capítulo também podem ser encontrados em [5].

O Capítulo 5 é dedicado ao estudo da extensão dos problemas propostos por Nikiforov para grafos com no máximo dois autovalores não nulos distintos em valor absoluto. Focamos nossa atenção em caracterizar grafos bipartidos regulares com quatro e cinco autovalores distintos, e mostramos a relação estreita entre estes grafos e tipos específicos de designs.

No Capítulo 6, depois de ter percebidos nos capítulos anteriores, que muitos dos grafos com poucos autovalores distintos são integrais, estudamos esse aspecto. De forma particular, caracterizamos todas as árvores com cinco autovalores distintos que são integrais. Além disso, obtemos algumas famílias infinitas de grafos bipartidos irregulares com cinco autovalores distintos. Finalmente, estudamos uma família de grafos com 7 autovalores distintos, que generaliza algumas das famílias estudadas anteriormente, obtendo condições para sua integralidade.

Por fim, no Capítulo 7, fazemos um resumo das nossas contribuições e principais resultados obtidos e apresentamos trabalhos futuros.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos definições e resultados básicos de Álgebra Linear e da Teoria Espectral de Grafos, que serão utilizados ao longo do texto. Posteriormente, no próximo capítulo apresentamos conceitos da Teoria de Designs.

2.1 Conceitos básicos de álgebra linear

Os conceitos e resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados no livro de Horn e Johnson [44], entre outros.

Escrevemos $M_{m,n}$ e M_n para denotar, respectivamente, o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ e $n \times n$ com entradas complexas.

Denotamos a matriz identidade de ordem $n \times n$ por I_n , a matriz de ordem $n \times m$ (respectivamente $m \times m$) com todas as entradas iguais a 1 por $J_{n \times m}$ (respectivamente J_m), o vetor coluna de comprimento n com todas as entradas iguais a 1 por $\mathbf{1}_n$, o vetor coluna de comprimento n com todas as entradas nulas por $\mathbf{0}_n$ e a matriz de entradas nulas e ordem $m \times n$ por $\mathbf{0}_{m,n}$. Omitiremos por simplicidade a ordem da matriz na notação quando for possível entendê-la do contexto.

Uma **matriz de Hadamard de ordem n** é uma matriz $H \in M_n$ cujas entradas possuem módulo igual a 1 e $HH^* = nI_n$. Uma matriz é **regular** se a soma das entradas de cada linha é constante, e, portanto, também é constante a soma das entradas de cada coluna.

Considere $A \in M_n$. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um **autovalor** de A se $Av = \lambda v$ para algum vetor não nulo $v \in \mathbb{C}^n$. Dizemos que tal vetor é um **autovetor associado ao autovalor λ** . O **polinômio característico** da matriz $A \in M_n$ é o polinômio dado por

$$p_A(x) = \det(xI - A).$$

A **multiplicidade algébrica** de um autovalor λ de A é a multiplicidade de λ como raiz do polinômio característico da matriz A . O conjunto dos autovalores de uma matriz A com as respectivas multiplicidades algébricas é denominado **espectro** de A , denotado por $\text{Spec}(A)$ e representado através de um conjunto da forma

$$\{[\lambda_1]^{k_1}, [\lambda_2]^{k_2}, \dots, [\lambda_j]^{k_j}\},$$

onde $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n = \sum_{i=1}^j k_i$ e $k_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ denota a multiplicidade do autovalor λ_i para cada $1 \leq i \leq j$. O maior dos autovalores é dito **índice** da matriz A e o maior módulo destes, denotado por $\rho(A)$, é o **raio espectral** de A , ou seja,

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Spec}(A)} |\lambda|.$$

O seguinte resultado mostra a relação entre o polinômio característico de uma matriz e seus autovalores. O **traço** de $A \in M_n$, denotado por $\text{tr}(A)$, é a soma das entradas da diagonal de A .

Proposição 2.1.1. [44, Observação 1.2.4] *O polinômio característico de $A \in M_n$ tem grau n e*

$$p_A(x) = x^n - \text{tr}(A)x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A).$$

Além disso, $p_A(\lambda) = 0$ se e somente se λ é um autovalor de A . Em particular, $\text{tr}(A)$ é igual à soma dos autovalores de A incluindo multiplicidades.

Teorema 2.1.2. [44] (**Teorema de Cayley-Hamilton**) *Seja $p_A(x)$ o polinômio característico de uma matriz $A \in M_n$. Então $p_A(A) = \mathbf{0}$.*

O **polinômio mínimo** de A , denotado por $m_A(x)$, é o polinômio mônico de menor grau em $\mathbb{C}[x]$ para o qual $m_A(A) = \mathbf{0}$. Segue do Teorema 2.1.2 e do algoritmo da divisão de Euclides que o polinômio mínimo $m_A(x)$ divide o polinômio característico $p_A(x)$. Além disso, $m_A(\lambda) = 0$ se e somente se λ é um autovalor de A , e, portanto, toda raiz de $p_A(x)$ é uma raiz de $m_A(x)$.

Uma matriz $A \in M_n$ é **não singular** (ou **invertível**) se existe uma matriz $B \in M_n$ para a qual $AB = BA = I_n$. Neste caso, B é chamada de matriz **inversa** de A e denotada por A^{-1} .

Dizemos que $A \in M_n$ é **diagonalizável** se existe uma matriz não singular $P \in M_n$ tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal. Se $D = [d_{ij}] \in M_n$ é uma matriz diagonal, denotamos $D = \text{diag}(d_{11}, d_{12}, \dots, d_{nn})$.

Proposição 2.1.3. [44, Corolário 3.3.10] *Uma matriz $A \in M_n$ é diagonalizável se e somente se toda raiz do polinômio mínimo de A é simples.*

Dada uma matriz $A = [a_{ij}] \in M_n$, a matriz **transposta** de A , denotada por A^T , é a matriz cuja entrada (i, j) é a_{ji} , isto é, as linhas de A são colunas de A^T e vice-versa.

A matriz **transposta conjugada** de $A \in M_n$, denotada por A^* , é definida por $A = \overline{A}^T$, onde \overline{A} é a matriz conjugada de A , ou seja, a matriz cuja entrada (i, j) é o complexo conjugado $\overline{a_{ji}}$.

Uma matriz $A \in M_n$ é dita **simétrica** (resp. **hermitiana**) se $A = A^T$ (resp. $A = A^*$). Além disso, uma matriz $U \in M_n$ é dita **unitária** se $U^* = U^{-1}$. A seguir apresentamos um resultado fundamental para matrizes hermitianas conhecido como **Teorema espectral para matrizes hermitianas**.

Teorema 2.1.4. [44, Teorema 2.5.6] *Seja $A \in M_n$ hermitiana e com autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Se $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ então:*

(i) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são reais;

(ii) existe uma matriz unitária $U \in M_n$ tal que $A = UDU^*$.

Corolário 2.1.5. [44, Corolário 2.5.11] *Se $A \in M_n$ é real e simétrica, então todos os autovalores de A são reais.*

Dizemos que uma matriz $A = [a_{ij}] \in M_n$ com entradas reais é **não negativa** se $a_{ij} \geq 0$, para todo i, j . No caso de desigualdade estrita dizemos que A é uma matriz **positiva**.

Dizemos que $P \in M_n$ é uma **matriz de permutação** se exatamente uma entrada de cada linha e coluna de P é igual a 1 e todas as outras entradas são iguais a 0.

Uma matriz $A \in M_n$ é **reduzível** se $n \geq 2$ e existe uma matriz de permutação $P \in M_n$ tal que

$$P^T A P = \begin{bmatrix} B & C \\ \mathbf{0}_{n-r,r} & D \end{bmatrix}, \text{ e } 1 \leq r \leq n-1.$$

Uma matriz $A \in M_n$ é **irreduzível** se não é reduzível.

Se a matriz A for irreduzível e não negativa, o resultado a seguir terá grande importância ao longo do nosso trabalho, garantindo que o raio espectral de A será um autovalor simples.

Teorema 2.1.6. [44] (**Teorema de Perron-Frobenius**) *Seja $A \in M_n$, com $n \geq 2$, uma matriz irreduzível e não negativa com raio espectral $\rho(A)$. Então*

(i) $\rho(A) > 0$;

(ii) $\rho(A)$ é o índice de A e é um autovalor simples de A .

Uma matriz $B \in M_m$ é uma **submatriz principal** de uma matriz $A \in M_n$, com $n > m$, se B é obtida pela deleção de $n - m$ linhas e das mesmas $n - m$ colunas de A . O **Teorema do entrelaçamento de Cauchy** afirma que o espectro de uma matriz hermitiana está entrelaçado com o espectro de suas submatrizes principais.

Teorema 2.1.7. [44, Teorema 4.3.17] *Seja $A \in M_n$ hermitiana e $B \in M_{n-1}$ uma submatriz principal de A . Se $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ são os autovalores de A e $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$ são os autovalores de B , então:*

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n.$$

Até aqui tratamos com matrizes quadradas. A seguir, vamos abordar matrizes mais gerais de ordem $m \times n$, cujos resultados serão também de grande importância em nosso trabalho.

Proposição 2.1.8. [44, Teorema 1.3.22] *Sejam $A \in M_{m,n}$ e $B \in M_{n,m}$, com $m \leq n$. Então os n autovalores de BA são os m autovalores de AB e $n - m$ zeros, isto é,*

$$p_{BA}(x) = x^{n-m} p_{AB}(x).$$

Segue da Proposição 2.1.8 que se $A \in M_{m,n}$, então as matrizes $AA^* \in M_m$ e $A^*A \in M_n$ possuem os mesmos autovalores não nulos. Além disso, pode-se mostrar que ambas são hermitianas com autovalores não negativos [44].

Lembramos que o **posto** de uma matriz $A \in M_{m,n}$ é o número $r \leq \min\{m, n\}$ de colunas de A que são linearmente independentes. O resultado seguinte permite obter uma decomposição para qualquer matriz complexa chamada **Decomposição em valores singulares**.

Teorema 2.1.9. [44, Teorema 2.6.3] *Sejam $A \in M_{m,n}$, $q = \min\{m, n\}$ e suponhamos que o posto de A seja igual a r . Então*

(i) *Existem matrizes unitárias $V \in M_n$ e $W \in M_m$ e uma matriz diagonal $\Sigma_q = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$ tal que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 = \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_q$ e $A = V\Sigma W^*$, no qual*

$$\Sigma = \Sigma_q, \text{ se } m = n;$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in M_{n,m}, \text{ se } m > n; \text{ e}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_q \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in M_{m,n}, \text{ se } m < n.$$

(ii) $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ são as raízes quadradas positivas, em ordem decrescente, dos autovalores de AA^* , os quais são os mesmos autovalores não nulos, em ordem decrescente, de A^*A .

Dada $A \in M_{m,n}$, chamamos as raízes quadradas dos autovalores de A^*A , incluindo os possíveis zeros, de **valores singulares** de A , onde A^* é a conjugada transposta de A e escrevemos $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ para designá-los em ordem decrescente.

A multiplicidade de um valor singular σ de A é a multiplicidade de σ^2 como autovalor de A^*A . Segue do Teorema 2.1.9 que o posto de A é igual ao número de valores singulares não nulos de A . Observamos que se $A \in M_n$ é hermitiana, então os valores singulares de A são os valores absolutos dos seus autovalores.

Proposição 2.1.10. *Seja $A \in M_{m,n}$, com $m, n \geq 2$, e sejam $\sigma_1(A), \sigma_2(A), \dots, \sigma_n(A)$ os valores singulares de A , então*

$$\sigma_1^2(A) + \sigma_2^2(A) + \dots + \sigma_n^2(A) = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2.$$

Demonstração. Uma vez que os valores singulares da matriz A são as raízes quadradas dos autovalores de A^*A , temos

$$\begin{aligned} \sigma_1^2(A) + \sigma_2^2(A) + \dots + \sigma_n^2(A) &= \lambda_1(A^*A) + \lambda_2(A^*A) + \dots + \lambda_n(A^*A) \\ &= \text{tr}(A^*A) \\ &= \text{tr} \left(\sum_{k=1}^m \overline{a_{ki}} a_{kj} \right)_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \overline{a_{ij}} a_{ij} \\ &= \sum_{i,j} |a_{ij}|^2. \end{aligned}$$

□

Uma **norma matricial** é uma função não negativa $\|\cdot\|$ definida em $M_{m,n}$ tal que:

- (i) $\|A\| = 0$ se e somente se $A = \mathbf{0}$;
- (ii) $\|cA\| = |c| \|A\|$ para todo $c \in \mathbb{C}$;
- (iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ para quaisquer $A, B \in M_{m,n}$.

Um exemplo bem conhecido de norma matricial é a **norma do máximo** $\|A\|_{\max}$ definida para $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}$ por $\|A\|_{\max} := \max_{i,j} |a_{ij}|$. Um outro exemplo de norma matricial é a **norma- p de Schatten** de uma matriz $A \in M_{m,n}$, dada por:

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^p(A) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

No caso em que $p = 1$, a norma-1 de Schatten é chamada de **norma do traço** e é denotada por $\|A\|_*$. Já a norma-2 de Schatten é chamada de **norma de Frobenius**. Note que pela Proposição 2.1.10, temos que

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(A) \right)^{\frac{1}{2}} = (tr(A^* A))^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposição 2.1.11 (Desigualdade das médias potenciais (MP)). Se $q > p > 0$, e x_1, \dots, x_n são números reais não negativos, então

$$\left(\frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{x_1^q + \dots + x_n^q}{n} \right)^{\frac{1}{q}},$$

com igualdade se e somente se $x_1 = \dots = x_n$.

Usando a Proposição 2.1.11, obtemos a seguinte relação entre a norma do traço e a norma-2 de Schatten:

$$\|A\|_* = \sigma_1(A) + \dots + \sigma_n(A) \leq \sqrt{n(\sigma_1^2(A) + \dots + \sigma_n^2(A))} = \|A\|_2 \sqrt{n},$$

com igualdade se e somente se $\sigma_1(A) = \dots = \sigma_n(A)$. No Capítulo 4, veremos a importância da norma do traço em nosso trabalho.

2.2 Conceitos básicos de teoria de grafos

Nesta seção apresentamos algumas definições introdutórias e terminologias de Teoria de Grafos que estão fundamentadas nos livros de Godsil et al [35] e Diestel

[27] e são necessários para a compreensão do tema principal e dos problemas de nosso interesse.

Um **grafo** $G = (V, E)$ é uma estrutura constituída por um conjunto finito e não vazio V cujos elementos são denominados **vértices** e um conjunto E formado por subconjuntos de dois vértices denominados **arestas**. Indicamos por $|V|$ e $|E|$, respectivamente, o número de vértices e o número de arestas de G . Quando $|V| = n$, dizemos que o grafo G é de **ordem** n .

Se $u, v \in V$ e $e = \{u, v\} \in E$, dizemos que os vértices u e v são **adjacentes** ou **vizinhos** e que a aresta e **incide** em u e v ou, ainda, que e liga u a v e que u e v são **extremidades** da aresta e .

Um grafo que não possui arestas é chamado **grafo vazio**. Em particular, quando V é um conjunto unitário dizemos que G é o **grafo trivial**.

Um grafo é dito **simples** quando não tem laços (arestas ligando um vértice nele mesmo), nem arestas múltiplas (mais de uma aresta incidindo no mesmo par de vértices) e sem orientação. Neste trabalho, consideraremos apenas grafos simples, aos quais chamamos simplesmente de grafos.

O **grau de um vértice** $v \in V$, denotado por $d(v)$, é o número de arestas que incidem em v . Um vértice de grau 0 é dito um **vértice isolado**. Um vértice com apenas um vizinho, ou seja, de grau 1, é chamado **vértice pendente**. O **grau máximo** (resp. **mínimo**) de um grafo G , denotado por $\Delta(G)$ (resp. $\delta(G)$) é o grau máximo (resp. mínimo) de seus vértices. Quando o grafo G é claro pelo contexto, escrevemos simplesmente δ e Δ , respectivamente. A **sequência de graus** de um grafo é a sequência não crescente dos graus dos seus vértices.

Exemplo 2.2.1. Podemos ver representado na Figura 2.1 um grafo $G = (V, E)$ com conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e conjunto de arestas $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, portanto $|V| = 5$ e $|E| = 6$. As arestas são $e_1 = \{v_1, v_2\}$, $e_2 = \{v_1, v_3\}$, $e_3 = \{v_1, v_4\}$, $e_4 = \{v_2, v_4\}$, $e_5 = \{v_3, v_4\}$, $e_6 = \{v_4, v_5\}$. Os vértices v_1 e v_2 são adjacentes, mas v_3 e v_2 não são adjacentes. Os graus dos vértices são: $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = d(v_3) = 2$, $d(v_4) = 4$, $d(v_5) = 1$. A sequência de graus é $(4, 3, 2, 2, 1)$, onde $\delta = 1$ e $\Delta = 4$.

Um **caminho** de v_1 a v_k é uma sequência finita de vértices distintos v_1, v_2, \dots, v_k tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$, para todo i , $1 \leq i \leq k - 1$. O caminho com n vértices é denotado por P_n .

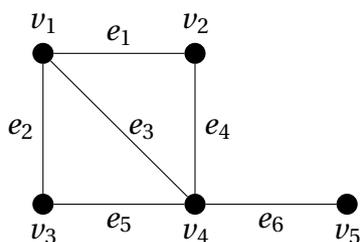


Figura 2.1: Grafo do Exemplo 2.2.1

Exemplo 2.2.2. Vemos na Figura 2.2 o caminho P_5 .

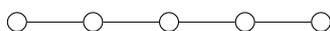


Figura 2.2: Caminho P_5

Se existir um caminho entre qualquer par de vértices, então o grafo é dito **conexo**. Caso contrário, o grafo é dito **desconexo**.

Exemplo 2.2.3. Na Figura 2.3, G_1 é um grafo conexo e G_2 é um grafo desconexo.

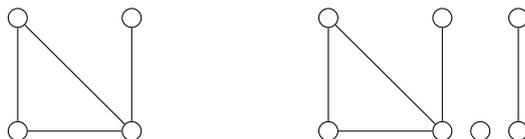


Figura 2.3: G_1 é um grafo conexo e G_2 é um grafo desconexo

Um **ciclo** é um grafo conexo onde todo vértice possui exatamente dois vizinhos. Denotamos por C_n o ciclo com n vértices.

Exemplo 2.2.4. Vemos o ciclo C_4 na Figura 2.4.

O **comprimento** de um caminho ou de um ciclo é o número de arestas que neles ocorre. Assim, P_n tem comprimento $n - 1$ e C_n tem comprimento n .

Dados dois vértices u e v de um grafo conexo G , a **distância** de u a v é o mínimo dos comprimentos dos caminhos que ligam u e v e é denotada por $d(u, v)$. O

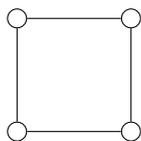


Figura 2.4: Ciclo C_4

máximo das distâncias entre quaisquer dois vértices de G é o **diâmetro** de G e denotamos por $diam(G)$.

Um grafo é **regular** se todos os seus vértices possuem o mesmo grau; caso contrário é dito **irregular**. Um grafo regular com vértices de grau r é chamado um grafo r -**regular**. Observamos que o ciclo C_n é 2-regular e o caminho P_n é irregular.

Exemplo 2.2.5. A Figura 2.5 mostra o cubo Q_3 , exemplo de um grafo 3-regular.

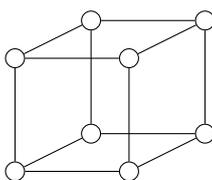


Figura 2.5: Cubo Q_3

Um grafo é dito **completo** se quaisquer dois vértices distintos são adjacentes. Denotamos por K_n o grafo completo com n vértices e podemos notar que K_n é $(n - 1)$ -regular.

Exemplo 2.2.6. O grafo K_4 está representado na Figura 2.6.

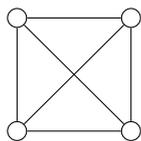


Figura 2.6: Grafo K_4

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Se $G' = (V', E')$ é um grafo que satisfaz $V' \subset V$ e $E' \subset E$, escrevemos $G' \subset G$ e dizemos que G' é um **subgrafo** de G . Dizemos que G' é um **subgrafo induzido** de G quando $G' \subset G$ é tal que G' contém todas as arestas $\{u, v\} \in E$ para $u, v \in V'$, isto é, dois vértices são adjacentes em G' se e somente se eles são adjacentes em G .

Na Figura 2.7 temos representado o grafo $G = (V, E)$ com conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e conjunto de arestas $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$, à esquerda o subgrafo $G' = (V', E')$ com conjunto de vértices $V' = \{v_1, v_3, v_4\}$ e conjunto de arestas $E' = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}\}$ e à direita o subgrafo induzido $G'' = (V'', E'')$ com conjunto de vértices $V'' = \{v_1, v_3, v_4\}$ e conjunto de arestas $E'' = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_3, v_4\}\}$.

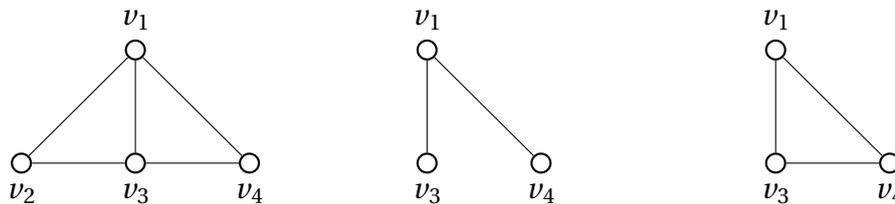


Figura 2.7: Grafo G , subgrafo G' e subgrafo induzido G''

Se um grafo G for desconexo, dizemos que $G' \subset G$ é uma **componente conexa** de G quando G' é um subgrafo conexo e não existe outro grafo conexo $H \subset G$ tal que $G' \subset H$ e $G' \neq H$.

Exemplo 2.2.7. Na Figura 2.8 temos um grafo desconexo com duas componentes conexas.

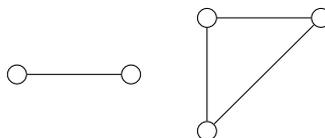


Figura 2.8: Grafo G com componentes conexas P_2 e C_3

Uma **árvore** é um grafo conexo e sem ciclos. Já um grafo desconexo e sem ciclos é chamado **floresta**. Vértices pendentes em árvores também são conhecidos como **folhas**. Note que o caminho P_n também é uma árvore.

Exemplo 2.2.8. Representamos à esquerda na Figura 2.9 uma árvore T com 6 vértices e 5 arestas, onde notamos a ausência de ciclos e que T é conexa. Também observamos que os vértices v_4 , v_5 e v_6 são folhas de T . Se removermos de T o vértice v_1 e suas arestas incidentes, teremos uma floresta com duas componentes conexas, representada à direita na Figura 2.9.

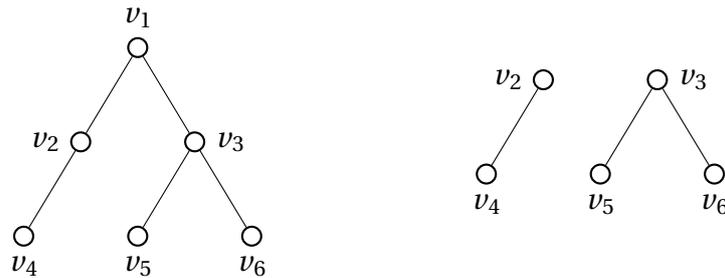


Figura 2.9: Árvore T e floresta com componentes conexas P_2 e P_3

Um **grafo r -partido** é um grafo cujos vértices são decompostos em r conjuntos disjuntos, chamados **partes**, de modo que não haja dois vértices na mesma parte sendo adjacentes. Um **grafo r -partido completo** é um grafo r -partido tal que quaisquer dois vértices de diferentes conjuntos da partição são adjacentes. Escrevemos K_{p_1, p_2, \dots, p_r} para representar o grafo r -partido completo com partes de tamanhos $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_r$. Se $r = 2$, o grafo 2-partido é dito **grafo bipartido**.

Exemplo 2.2.9. Na Figura 2.10 temos um exemplo de grafo bipartido e de grafo bipartido completo com conjuntos independentes $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $V_2 = \{v_5, v_6, v_7, v_8\}$.

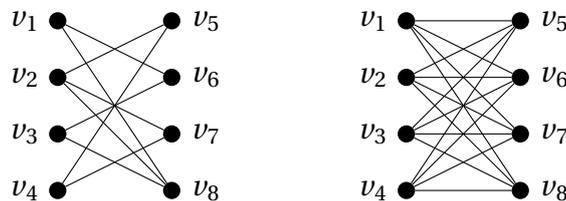


Figura 2.10: Grafo bipartido e grafo bipartido completo $K_{4,4}$

A seguinte propriedade caracteriza um grafo bipartido.

Proposição 2.2.10. [27, Proposição 1.6.1] Um grafo é bipartido se e somente se não contém ciclos de comprimento ímpar.

Corolário 2.2.11. Toda árvore é um grafo bipartido.

A **estrela** S_n , $n \geq 3$, é um grafo com n vértices onde exatamente um vértice tem grau $n - 1$ e todos os outros são pendentos. Notamos que a estrela S_n é o grafo bipartido completo $K_{1,n-1}$.

Exemplo 2.2.12. Denotaremos por S'_n o grafo obtido pela adição de uma aresta à estrela S_n . Na Figura 2.11 vemos representados a estrela S_5 e o grafo S'_5 .



Figura 2.11: Estrela S_5 e grafo S'_5

É possível determinar precisamente o número de arestas de uma árvore.

Lema 2.2.13. [27, Corolário 1.5.3] Um grafo conexo com n vértices é uma árvore se e somente se, possui exatamente $n - 1$ arestas.

A adição de uma aresta a uma árvore cria exatamente um ciclo. Um grafo de n vértices é chamado de **unicíclico** se é um grafo conexo que possui exatamente n arestas. Note que a estrela S_n é uma árvore e que S'_n é um grafo unicíclico.

Dado um grafo $G = (V, E)$, chamamos de **grafo complementar** de G o grafo $\bar{G} = (V, \bar{E})$, onde $\{u, v\} \in \bar{E}$ se e somente se $\{u, v\} \notin E$. Em outras palavras, dois vértices são adjacentes em \bar{G} se e somente se, não são adjacentes em G . É fácil ver que se G tem n vértices e é r -regular, então \bar{G} é $(n - 1 - r)$ -regular.

Exemplo 2.2.14. Vemos representado na Figura 2.12 o grafo complementar do cubo Q_3 .

O **grafo linha** de um grafo G , denotado por $\ell(G)$, é um grafo tal que cada vértice representa uma aresta de G e dois vértices são adjacentes se e somente se as arestas correspondentes tiverem uma extremidade comum em G . Sabe-se que se G for r -regular, $\ell(G)$ é $(2r - 2)$ -regular ([18, Corolário 1.4.2]).

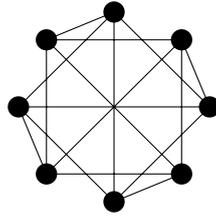


Figura 2.12: Grafo $\overline{Q_3}$

Exemplo 2.2.15. Na Figura 2.13, temos o grafo $\ell(Q_3)$, também chamado de cuboctaedro, o qual é 4-regular.

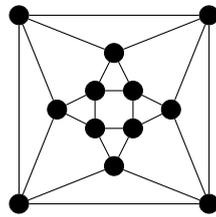


Figura 2.13: $\ell(Q_3)$

Um **cone sobre** um grafo G é o grafo obtido adicionando um vértice a G e conectando esse vértice a todos os vértices de G . Podemos notar que se G é um grafo com n vértices e m arestas, então o cone sobre G tem $n + 1$ vértices e $m + n$ arestas.

Exemplo 2.2.16. Na Figura 2.14 vemos representado o cone sobre C_4 .

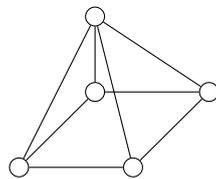


Figura 2.14: Cone sobre C_4

Sejam os grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ tais que (u_1, \dots, u_n) são os vértices de G_1 e (v_1, \dots, v_m) são os vértices de G_2 . O **produto cartesiano** entre G_1 e G_2 , denotado

por $G_1 \square G_2$, é o grafo com conjunto de vértices $V = V_1 \times V_2$, e (u_i, v_j) é adjacente a (u_ℓ, v_p) se u_i é adjacente a u_ℓ em G_1 e $v_j = v_p$ em G_2 ou $u_i = u_\ell$ em G_1 e v_j é adjacente a v_p em G_2 .

Exemplo 2.2.17. Na Figura 2.15 podemos ver um exemplo de produto cartesiano usando o grafo K_3 , o grafo $K_3 \square K_3 \square K_3$ é um tipo especial de grafo de Hamming, também denotado por $H(3,3)$.

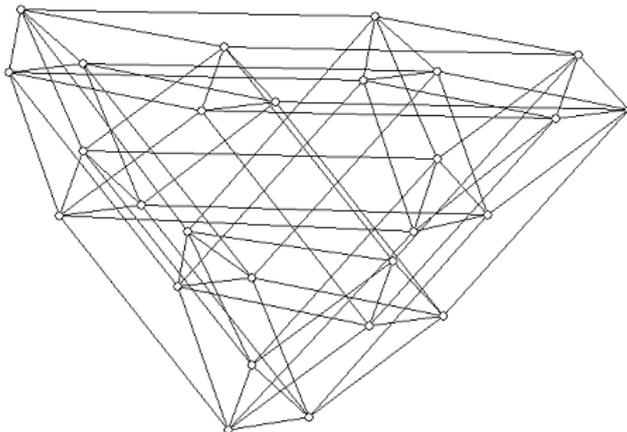


Figura 2.15: Grafo de Hamming $H(3,3)$

Dado um grafo $G = (V, E)$ e $1 \leq i \leq \text{diam}(G)$, o **grafo distância- i** de G é o grafo $G_i = (V, E_i)$, onde $e = \{u, v\} \in E_i$ se e somente se a distância entre u e v em G é igual a i . Note que $G_1 = G$.

Exemplo 2.2.18. Na Figura 2.16 temos o grafo distância-3 de $H(3,3)$.

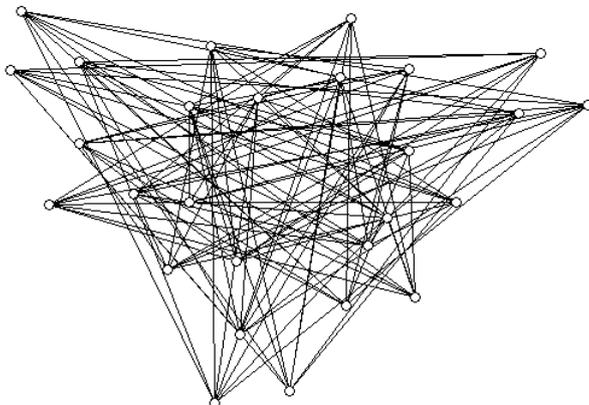


Figura 2.16: Grafo $H(3,3)_3$

Dado um grafo $G = (V, E)$, um subconjunto M das arestas de E é dito um **emparelhamento** de G se quaisquer duas arestas em M não possuem vértices em comum. Um vértice de G é **saturado** por M se existe uma aresta de M que incide neste vértice. Um emparelhamento M de G é dito **máximo** se M contém o maior número possível de arestas, isto é, G não admite emparelhamento M' com $|M'| > |M|$. O **número de emparelhamento** de um grafo G , denotado por $\mu(G)$, é o número de arestas de um emparelhamento máximo do grafo.

Exemplo 2.2.19. A Figura 2.17 mostra dois emparelhamentos máximos M_1 e M_2 no mesmo grafo dados por $\{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\}$ e $\{\{v_1, v_5\}, \{v_2, v_4\}\}$, respectivamente. Podemos observar que $\mu(G) = 2$.



Figura 2.17: Dois emparelhamentos máximos de um grafo

Um emparelhamento M de G é dito **perfeito** se qualquer vértice de G é saturado por M .

Exemplo 2.2.20. Na Figura 2.18, os grafos à esquerda e à direita têm emparelhamentos perfeitos dados por $\{\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_5, v_6\}\}$ e $\{\{v_7, v_9\}, \{v_8, v_{10}\}, \{v_{11}, v_{14}\}, \{v_{12}, v_{13}\}\}$, respectivamente.

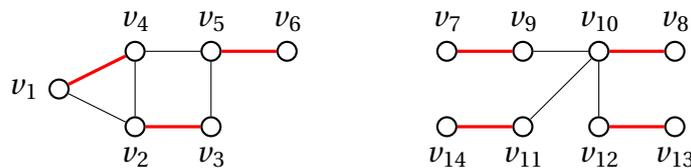


Figura 2.18: Grafos com emparelhamento perfeito

Dois grafos G_1 e G_2 são ditos **isomorfos** quando existe uma bijeção entre seus conjuntos de vértices $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ de modo que as adjacências sejam preservadas, ou seja, quaisquer dois vértices u e v de G_1 são adjacentes se e somente se, $f(u)$ e $f(v)$ são adjacentes em G_2 . Neste caso, a bijeção é chamada um **isomorfismo**.

As propriedades de grafos que são preservadas por isomorfismos são chamadas de **invariantes**. O número de vértices, o número de arestas, o grau máximo, o grau mínimo e o número de triângulos são exemplos de invariantes.

Exemplo 2.2.21. *Pode ser visto na Figura 2.19 um par de grafos isomorfos. Observamos que cada um deles também é isomorfo ao grafo cubo Q_3 da Figura 2.5. Além disso o grafo da direita é obtido pela remoção de um emparelhamento perfeito do grafo bipartido completo $K_{4,4}$.*

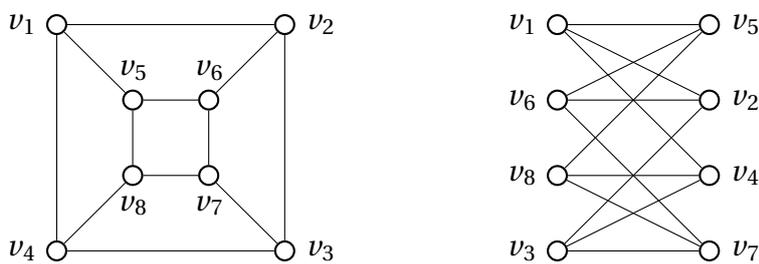


Figura 2.19: Um par de grafos isomorfos

2.3 Tópicos de teoria espectral de grafos

Para uma introdução à Teoria Espectral de Grafos recomendamos o livro de Abreu et al. [3].

Dado um grafo G de n vértices, associamos a ele diferentes matrizes que podem representar desde as adjacências entre seus vértices até o grau de cada vértice. As matrizes que serão utilizadas nesse trabalho são: matriz de adjacências, matriz laplaciana e matriz laplaciana sem sinal.

Seja $G = G(V, E)$ um grafo com n vértices. A **matriz de adjacência** $A(G)$ de G é a matriz quadrada de ordem n cujas entradas são

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E \text{ para } v_i, v_j \in E; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Chamamos o espectro da matriz de adjacências de G simplesmente de **espectro de G** , e denotamos por $Spec(G)$.

Apresentamos na Tabela 2.1 a seguir, algumas famílias de grafos e seus respectivos espectros para a matriz de adjacência.

<i>Grafo</i>	<i>Spec</i> (<i>G</i>)
K_n	$\{[n-1]^1, [-1]^{n-1}\}$
$K_{p,q}$	$\{[\pm\sqrt{pq}]^1, [0]^{p+q-2}\}$
P_n	$\{[2\cos(\frac{\pi i}{n+1})]^1\}, i = 1, 2, \dots, n$
C_n	$\{[2\cos(\frac{2\pi i}{n})]^1\}, i = 0, 1, \dots, n-1$

Tabela 2.1: Alguns grafos e seu espectro

O polinômio característico da matriz de adjacência de G , $p_{A(G)}(x)$, também é chamado de **polinômio característico de G** e denotado por $p_G(x)$. O polinômio mínimo da matriz de adjacência de G , $m_{A(G)}(x)$, também é chamado de polinômio mínimo de G e denotado por $m_G(x)$.

Visto que $A(G)$ é uma matriz real e simétrica, todos os seus autovalores são reais (Corolário 2.1.5). Se G é um grafo com n vértices, denotamos os autovalores de G por $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, sendo λ_1 o índice de G . Além disso, como o traço de $A(G)$ é zero, então seus autovalores somam zero (Proposição 2.1.1). Os resultados seguintes apresentam algumas propriedades dos autovalores de um grafo, os quais podem ser encontrados em [18].

Proposição 2.3.1. [18, Proposição 1.3.1] *Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os autovalores de um grafo G com n vértices e m arestas. Então*

$$tr(A^2(G)) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 = 2m.$$

Proposição 2.3.2. [18, Proposição 1.3.3] *Seja G um grafo conexo com diâmetro d . Então G tem pelo menos $d+1$ autovalores distintos.*

Se G é um grafo conexo com dois autovalores distintos, então pela Proposição 2.3.2, G tem diâmetro 1, logo G é o grafo completo K_n . Do anterior temos que o grafo K_n é o único grafo conexo com dois autovalores distintos.

Proposição 2.3.3. [18, Teorema 3.4.1]

- (i) Um grafo G é bipartido se e somente se para cada autovalor λ de G , também $-\lambda$ é um autovalor de G , com a mesma multiplicidade.
- (ii) Se G é conexo com índice λ , então G é bipartido se e somente se $-\lambda$ é um autovalor de G .

Proposição 2.3.4. *Seja G um grafo conexo com três autovalores distintos. Se G for bipartido ou seu índice não for um número inteiro, então G é um grafo bipartido completo.*

Demonstração. O caso em que o índice de G não é um inteiro é um resultado de van Dam [71, Proposição 2]. Pela Proposição 2.3.2, o diâmetro de G é no máximo dois. Suponha que G seja bipartido com partes U e W . Se G não for um grafo bipartido completo, haverá um vértice $u \in U$ e um vértice $w \in W$ que não são adjacentes. Assim, como G é conexo, a distância entre u e v é pelo menos três, uma contradição. \square

Se G é um grafo conexo, o Teorema 2.1.6 garante que o raio espectral é o índice do grafo, pois grafos conexos possuem matrizes de adjacência irredutíveis, como mostra o resultado a seguir.

Proposição 2.3.5. [3] *Se G é um grafo conexo com n vértices e A é a sua matriz de adjacência então A é irredutível.*

O espectro de um grafo desconexo é facilmente encontrado a partir dos espectros das suas componentes conexas.

Proposição 2.3.6. [18, Proposição 1.3.6] *Seja G um grafo com componentes conexas C_i ($1 \leq i \leq s$). Então o espectro de G é a união dos espectros dos C_i 's.*

Proposição 2.3.7. [25, Teorema 3.22] *Sejam $r = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os autovalores de um grafo G . Então G é regular se e somente se*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = r. \quad (2.1)$$

Se (2.1) é verdadeira, então G é r -regular.

Proposição 2.3.8. *Seja G um grafo de m vértices e n arestas. Suponhamos que λ_1 é o maior autovalor de G . Então*

$$\frac{2m}{n} \leq \lambda_1.$$

Além disso, $\frac{2m}{n} = \lambda_1$ se e somente se G é regular.

Proposição 2.3.9. *Um grafo G tem dois autovalores distintos $\lambda_1 > \lambda_2$ se e somente se G é soma direta de m_1 grafos completos de ordem $\lambda_1 + 1$. Nesse caso, $\lambda_2 = -1$ e $m_2 = m_1 \lambda_1$.*

Um **grafo integral** é um grafo cujo espectro consiste inteiramente de números inteiros. É observado em [6] que se G é integral, então $\ell(G)$ é integral, pois seu polinômio característico pode ser expresso como $p_{\ell(G)}(x) = (x+2)^{m-n} p_G(x-r+2)$, onde $m = (nr/2)$.

Um grafo de ordem n é chamado **fortemente regular** com parâmetros (n, r, α, β) (ou simplesmente um $srg(n, r, \alpha, \beta)$) quando é r -regular, e quaisquer dois vértices possuem exatamente α ou β vizinhos comuns, dependendo de serem adjacentes ou não adjacentes, respectivamente. Os grafos completo e vazio são fortemente regulares por vacuidade, sendo os parâmetros β e α respectivamente indefinidos para eles. Muitas vezes, esses casos triviais são excluídos. Um $srg(n, r, \alpha, \alpha)$ é também chamado **grafo design** com parâmetros (n, r, α) .

Proposição 2.3.10. [65, Corolário 3.4.11] *Se G é um grafo fortemente regular com parâmetros (n, r, α, β) , então $\text{Spec}(G) = \{[r]^1, [\lambda_2]^{m_2}, [\lambda_3]^{m_3}\}$, onde*

$$\lambda_2 = \frac{(\alpha-\beta) + \sqrt{(\alpha-\beta)^2 + 4(r-\beta)}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{(\alpha-\beta) - \sqrt{(\alpha-\beta)^2 + 4(r-\beta)}}{2},$$

$$m_2 = \frac{1}{2} \left(n - 1 - \frac{2r + (n-1)(\alpha-\beta)}{\sqrt{(\alpha-\beta)^2 + 4(r-\beta)}} \right) \quad \text{e} \quad m_3 = \frac{1}{2} \left(n - 1 + \frac{2r + (n-1)(\alpha-\beta)}{\sqrt{(\alpha-\beta)^2 + 4(r-\beta)}} \right).$$

Os parâmetros de um grafo G fortemente regular não são independentes. Entre eles é possível estabelecer certas relações usando um simples cálculo.

Lema 2.3.11. [65, Lema 3.4.6] *Seja G um grafo fortemente regular com parâmetros (n, r, α, β) , então*

$$r(r - \alpha - 1) = \beta(n - r - 1).$$

Lema 2.3.12. *Seja G um grafo fortemente regular com parâmetros (n, r, α, β) e A a sua matriz de adjacência, então*

$$A^2 = rI + \alpha A + \beta(J - I - A).$$

Exemplo 2.3.13. *O grafo de Petersen representado na Figura 2.20 é um $srg(10, 3, 0, 1)$ que não é um grafo design. Também pode ser visto como o complementar do grafo linha de K_5 . Seu espectro é dado por $\{[3]^1, [1]^5, [-2]^4\}$.*

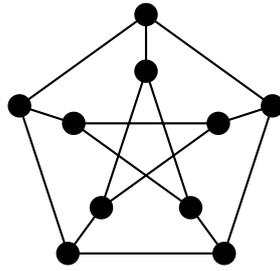


Figura 2.20: Grafo de Petersen

O espectro é um invariante do grafo, ou seja, grafos isomorfos têm o mesmo espectro. Dizemos que os grafos G_1 e G_2 são **coespectrais** se eles têm os mesmos autovalores com as mesmas multiplicidades, isto é, quando $\text{Spec}(G_1) = \text{Spec}(G_2)$. Dizemos que um grafo G é **caracterizado pelo seu espectro** quando os grafos coespectrais com G são isomorfos a G . Nem sempre podemos determinar univocamente, a menos de isomorfismos, o grafo que possui um determinado espectro, mas é possível encontrar grafos isomorfos que não são coespectrais.

Exemplo 2.3.14. O grafo de Shrikhande e o grafo linha do grafo bipartido completo $K_{4,4}$, representados na Figura 2.21, são $\text{srg}(16, 6, 2, 2)$, logo são coespectrais com espectro dado por $\{[6]^1, [2]^6, [-2]^9\}$. O grafo linha do grafo bipartido completo $K_{4,4}$ geralmente é chamado de grafo reticulado de ordem 4 e denotado por $\ell_2(4)$. Observe que, embora sejam coespectrais, o grafo de Shrikhande e o grafo $\ell_2(4)$ não são isomorfos, pois seus respectivos complementos possuem número cromático e número de independência diferentes: o complemento do grafo de Shrikhande possui número cromático 6 e número de independência 3, enquanto que o complemento do grafo reticulado $L_2(4)$ possui número cromático e número de independência iguais a 4. Assim, o grafo de Shrikhande e o grafo $\ell_2(4)$ não são caracterizados pelo seu espectro. Observamos que estes são os únicos grafos designs com esses parâmetros [63].

O **produto de Kronecker** $R \otimes S$ das matrizes $R = (r_{ij})_{c \times d}$ e $S = (s_{ij})_{p \times q}$ é a matriz de ordem $cp \times dq$ obtida a partir de R substituindo cada elemento r_{ij} pelo bloco $r_{ij}S$. Dado um grafo G de ordem n com matriz de adjacência A , denotamos por $G \otimes J_m$ o grafo com matriz de adjacência dada pelo produto de Kronecker $A \otimes J_m$, e por $G \circledast J_m$ o grafo com matriz de adjacência $A \circledast J_m = (A + I_n) \otimes J_m - I_{nm}$. Observe que $G \otimes J_1 = G \circledast J_1$ e $\overline{G \otimes J_m} = \overline{G} \circledast J_m$, onde \overline{G} é o complemento de G . Além disso, se G for conexo e regular, então $G \otimes J_m$ e $G \circledast J_m$ serão conexos e regulares.

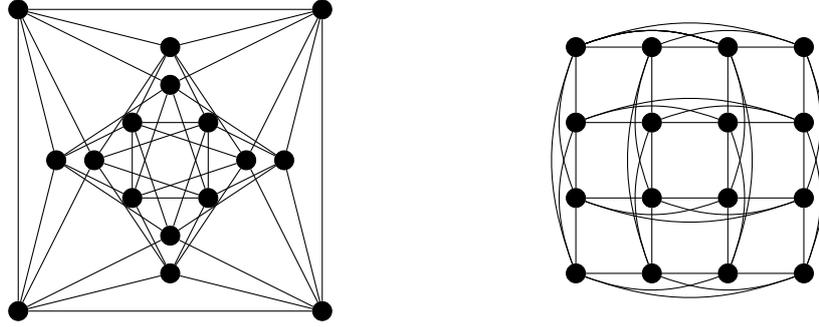


Figura 2.21: Grafo de Shrikhande e grafo $\ell_2(4)$

Proposição 2.3.15. *Seja G um grafo de ordem n com índice λ_1 , espectro $\{[\lambda_1]^{m_1}, [\lambda_2]^{m_2}, \dots, [\lambda_t]^{m_t}\}$, e complemento \overline{G} . Então*

(i) *Se G é regular então \overline{G} é regular com espectro*

$$\{[n-1-\lambda_1]^{m_1}, [-\lambda_2-1]^{m_2}, \dots, [-\lambda_t-1]^{m_t}\}.$$

(ii) *G é regular se e somente se $G \otimes J_m$ é regular, para todo $m \geq 1$. Além disso,*

$$\text{Spec}(G \otimes J_m) = \{[m\lambda_1]^{m_1}, \dots, [m\lambda_t]^{m_t}, [0]^{n(m-1)}\}.$$

(iii) *G é regular se e somente se $G \circledast J_m$ é regular, para todo $m \geq 1$. Além disso,*

$$\text{Spec}(G \circledast J_m) = \{[m\lambda_1 + m - 1]^{m_1}, \dots, [m\lambda_t + m - 1]^{m_t}, [-1]^{n(m-1)}\}.$$

Demonstração. A prova de (i) é dada em [7, Teorema 6.15]. É mostrado em [7, Lema 3.25] que para quaisquer matrizes simétricas A e B os autovalores de $A \otimes B$ são dados por $\beta_i \gamma_j$, $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$, onde β_1, \dots, β_n e $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ são os autovalores de A e B , respectivamente. Logo, dado que $\text{Spec}(J_m) = \{[m]^1, [0]^{m-1}\}$, obtemos

$$\text{Spec}(G \otimes J_m) = \{[m\lambda_1]^{m_1}, \dots, [m\lambda_t]^{m_t}, [0]^{n(m-1)}\}.$$

Pela Proposição 2.3.7, temos que G é regular se e somente se $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^t m_i \lambda_i^2 = \lambda_1$. Além disso, observe que dado que $m \geq 1$ temos

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^t m_i \lambda_i^2 = \lambda_1 \iff \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^t m_i (m\lambda_i)^2 = m\lambda_1,$$

o que conclui a prova de (ii). A prova de (iii) é semelhante. □

3 DESIGNS

A Teoria de Designs é a parte da combinatória que lida com questões sobre a existência, construção e propriedades de sistemas de conjuntos finitos cujos arranjos em subconjuntos satisfazem algumas condições especificadas. Essa teoria historicamente foi relacionada com realização de experimentos estatisticamente controlados [11, 21], tendo sua origem no trabalho de Fisher [31]. A Teoria de Designs cresceu e se tornou um assunto de considerável interesse na matemática. Possui conexões com outros campos, tais como a teoria dos grupos, teoria dos grafos, teoria dos corpos finitos, teoria dos números, teoria dos códigos, álgebra linear e geometria, além de uma ampla gama de aplicações em áreas como teoria da informação, estatística, ciências informáticas, biologia e engenharia.

Neste capítulo vamos apresentar alguns conceitos e resultados da teoria de designs e tipos de designs aos quais nos referiremos, pois temos interesse em designs cujos grafos de incidência tenham poucos autovalores distintos.

3.1 Preliminares

Um **design** é definido como um par ordenado (X, \mathcal{B}) tal que X é um conjunto finito de elementos chamados **pontos**, e \mathcal{B} é uma coleção de subconjuntos de X chamados **blocos**. Um design que não contém blocos repetidos é chamado **design simples**. Neste trabalho consideraremos apenas designs simples, aos quais nos referiremos apenas como designs.

Exemplo 3.1.1. O design (X, \mathcal{B}) , onde X é um conjunto com v elementos e \mathcal{B} é uma coleção de subconjuntos de X de tamanho k , onde $k \leq v$.

Frequentemente, é conveniente representar um design por meio de uma matriz. Essa é uma ferramenta especialmente útil computacionalmente.

Seja (X, \mathcal{B}) um design tal que $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_b\}$. A **matriz de incidência** de (X, \mathcal{B}) é a matriz $N = (x_{ij})$ de ordem $n \times b$ onde

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } x_i \in B_j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Existem várias formas de definir um grafo sobre os pontos e blocos de um design. Uma maneira natural é associar um grafo bipartido ao design da seguinte forma.

O **grafo de incidência** (ou **grafo Levi**) de um design $D = (X, \mathcal{B})$, denotado por $G(D)$ é o grafo bipartido com conjunto de vértices $X \cup \mathcal{B}$, com dois vértices adjacentes se e somente se um corresponde a um bloco e o outro corresponde a um elemento desse bloco. A matriz de adjacência desse grafo tem a forma

$$A(G) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & N \\ \hline N^t & 0 \end{array} \right],$$

onde N é a matriz de incidência do design.

Exemplo 3.1.2. A Figura 3.1 apresenta a matriz e o grafo de incidência do design (X, \mathcal{B}) , com $X = \{1, 2\}$ e $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{2\}\}$. Ela também mostra a matriz de adjacência do grafo de incidência, o qual é o grafo P_4 .

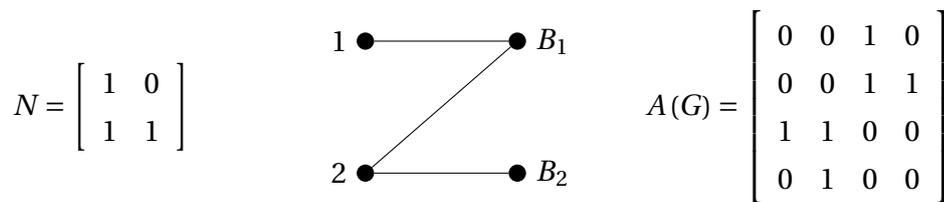


Figura 3.1: Design (X, \mathcal{B}) , com $X = \{1, 2\}$ e $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{2\}\}$

Dado um grafo bipartido $G = (V, E)$, onde $V = V_1 \cup V_2$, podemos considerar o design com conjunto de pontos $X = V_1$, onde para cada vértice $w \in V_2$ temos um bloco B_w formado por todos os vértices em V_1 que são adjacentes a w . Analogamente podemos considerar $X = V_2$. Em ambos os casos G é o grafo de incidência do design, onde cada aresta do grafo representa a incidência do ponto v do design com o bloco B que contém v .

Então podemos escrever a matriz de adjacência de G como

$$A = \left[\begin{array}{c|c} 0 & N \\ \hline N^T & 0 \end{array} \right],$$

onde N é a matriz de incidência do design.

Como

$$A^2(G) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & N \\ N^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & N \\ N^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} NN^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N^T N \end{bmatrix}.$$

Pelo Teorema da Decomposição em Valores Singulares, NN^T e $N^T N$ tem autovalores não negativos e seus autovalores não nulos são iguais. Assim, as raízes quadradas dos autovalores de NN^T ou $N^T N$ são os autovalores de $A(G)$.

Dessa forma $\lambda \neq 0$ é um autovalor de $A(G)$ de multiplicidade k se, e somente se $\lambda^2 \neq 0$ é um autovalor de $N^T N$ ou NN^T de multiplicidade k .

Então se λ é um autovalor de $A(G)$ e σ é um valor singular de N , temos que $\lambda^2 = \sigma^2$ implica $\lambda = \pm\sigma$. Como G é bipartido, para cada valor singular σ de N , $+\sigma$ e $-\sigma$ são autovalores de $A(G)$.

No caso que G é bipartido e tem quatro autovalores distintos, necessariamente, $\pm\sigma_0$ e $\pm\sigma_1$ são os autovalores de $A(G)$, onde σ_0 e σ_1 são valores singulares não nulos de N , isso implica que NN^T e $N^T N$ tem a mesma ordem, então N é uma matriz quadrada e não singular.

Exemplo 3.1.3. *No Exemplo 3.1.2 temos que*

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Daí que

$$NN^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$N^t N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\text{Spec}(NN^t) = \text{Spec}(N^t N) = \left\{ \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Também temos

$$A^2(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\text{Spec}(A^2(G)) = \left\{ \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right]^2, \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right]^2 \right\}.$$

$$\text{Spec}(A(G)) = \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}, -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

O **complemento de um design** $D = (X, \mathcal{B})$ é um design $D^c = (X, \mathcal{B}^c)$, onde $\mathcal{B}^c = \{X - B : B \in \mathcal{B}\}$. Seja $D = (X, \mathcal{B})$ um design com matriz de incidência N , a matriz de incidência do seu complemento é a matriz $N^c = J - N = (x_{ij})$ de ordem $n \times b$ onde

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } x_i \in X - B_j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Segue que o grafo de incidência $G = (D^c)$ do design complemento $D^c = (X, \mathcal{B}^c)$ tem matriz de adjacência

$$A^c(G) = \begin{bmatrix} 0 & | & J - N \\ \hline J - N^t & | & 0 \end{bmatrix},$$

onde N é a matriz de incidência do design.

Exemplo 3.1.4. A Figura 3.2 apresenta a matriz e o grafo de incidência do design $D^c = (X, \mathcal{B}^c)$, o qual é o complemento do design $D = (X, \mathcal{B})$ apresentado no Exemplo 3.1.2, onde $X = \{1, 2\}$, $\mathcal{B}^c = \{\emptyset, \{1\}\}$. Ela também mostra a matriz de adjacência do grafo de incidência, o qual é o grafo $K_2 \cup 2K_1$.

Daí que

$$N^c (N^c)^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(N^c)^t N^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então

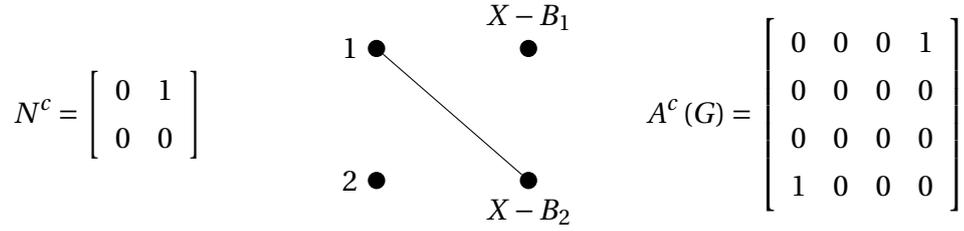


Figura 3.2: Design $D^c = (X, \mathcal{B}^c)$, com $X = \{1, 2\}$ e $\mathcal{B}^c = \{\emptyset, \{1\}\}$

$$\text{Spec}(N^c (N^c)^t) = \text{Spec}((N^c)^t N^c) = \{0, 1\}.$$

Também temos

$$(A^c)^2(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\text{Spec}((A^c)^2(G)) = \{-1, [0]^2, 1\}.$$

$$\text{Spec}(A^c(G)) = \{-1, [0]^2, 1\}.$$

Suponhamos que $D = (X, \mathcal{B})$ é um design tal que $|X| = n$ e $|\mathcal{B}| = b$. Seja N a matriz de incidência de (X, \mathcal{B}) de tamanho $n \times b$. O design $D' = (Y, \mathcal{A})$ com matriz de incidência $N' = N^t$ é chamado de **design dual** de (X, \mathcal{B}) . Supondo que $D' = (Y, \mathcal{A})$ é o design dual de $D = (X, \mathcal{B})$, então $|Y| = |\mathcal{B}| = b$ e $|\mathcal{A}| = |X| = n$.

Segue que o grafo de incidência $G(D')$ do design dual $D' = (Y, \mathcal{A})$ tem matriz de adjacência

$$A'(G) = \begin{bmatrix} 0 & | & N^t \\ \hline N & | & 0 \end{bmatrix},$$

onde N é a matriz de incidência do design.

Exemplo 3.1.5. A Figura 3.3 apresenta a matriz e o grafo de incidência do design $D' = (Y, \mathcal{A})$, o qual é o dual do design $D = (X, \mathcal{B})$ apresentado no Exemplo 3.1.2, onde então $|Y| = |\mathcal{B}| = 2$, $|\mathcal{A}| = |X| = 2$. Ela também mostra a matriz de adjacência do grafo de incidência, o qual é o grafo P_4 .

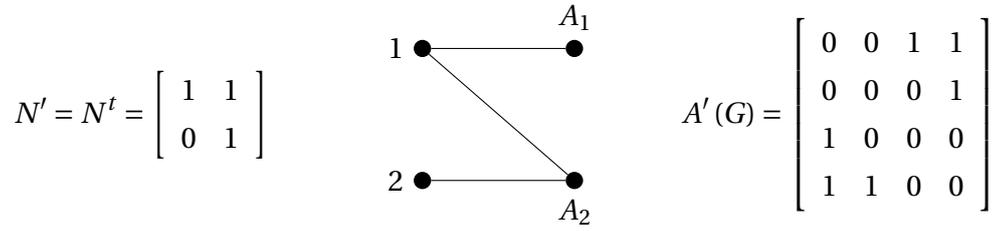


Figura 3.3: Design (Y, \mathcal{A}) , com $Y = \{1, 2\}$ e $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$

$$\text{Spec}(NN^t) = \text{Spec}(N^tN) = \left\{ \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Também temos

$$(A')^2(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e

$$\text{Spec}\left((A')^2(G)\right) = \left\{ \left[\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right]^2, \left[\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right]^2 \right\}.$$

$$\text{Spec}(A'(G)) = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, -\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Dois designs (X, \mathcal{A}) e (Y, \mathcal{B}) são **isomorfos** se $|X| = |Y|$ e existe uma bijeção $\eta : X \rightarrow Y$ tal que

$$[\{\eta(x) : x \in A\} : A \in \mathcal{A}] = \mathcal{B}.$$

Em outras palavras, se renomeamos cada ponto $x \in X$ como $\gamma(x)$, a coleção de blocos \mathcal{A} é transformada em \mathcal{B} . A bijeção γ é chamada um isomorfismo.

Observamos que se $D = (X, \mathcal{B})$ é um design e $D' = (Y, \mathcal{A})$ é o seu design dual, então $G(D)$ e $G(D')$ são grafos isomorfos.

Exemplo 3.1.6. O design (X, \mathcal{B}) , com $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 6, 7\}, \{1, 3, 7\}\}$ é chamado de plano de Fano. Na Figura 3.4 podemos observar a matriz de incidência junto com a representação geométrica desse design, onde os blocos podem ser vistos como seis linhas e um círculo inscrito a um triângulo,

além disso vemos o seu grafo de incidência de ordem 14, também conhecido como grafo Heawood.

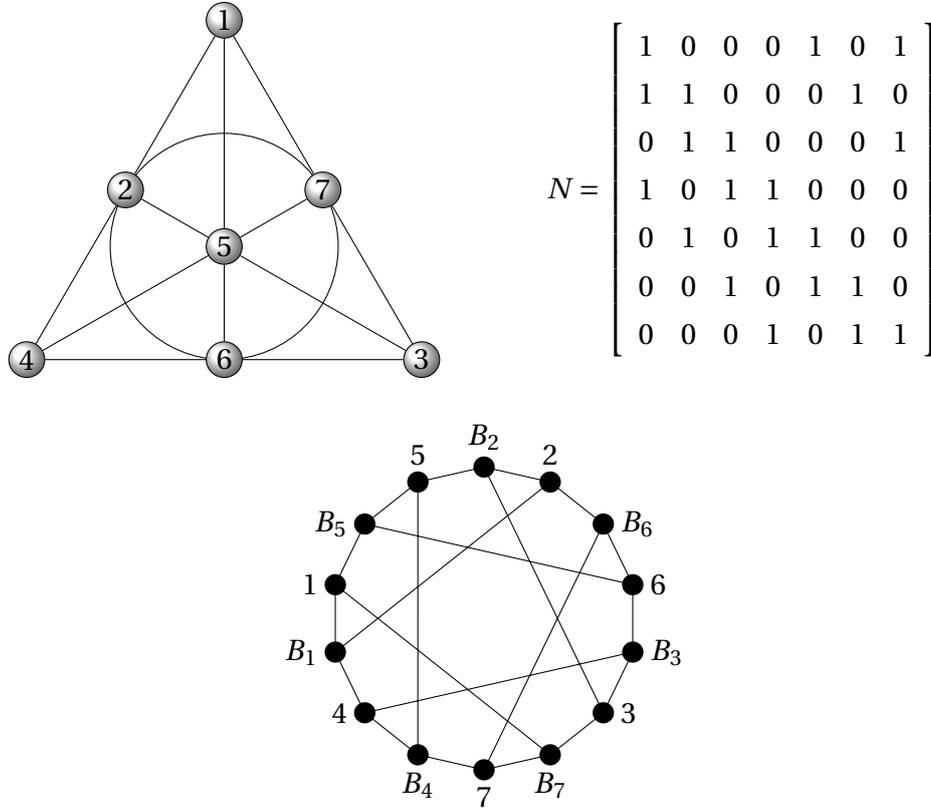


Figura 3.4: Matriz de incidência, representação geométrica e grafo de incidência do plano de Fano

$$\text{Spec}(NN^t) = \text{Spec}(N^tN) = \{[2]^6, 3\}.$$

$$\text{Spec}(A(G)) = \{-3, [-\sqrt{2}]^6, [\sqrt{2}]^6, 3\}.$$

Por outro lado temos o design (Y, \mathcal{A}) , com $Y = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $\mathcal{A} = \{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{c, d, g\}, \{b, d, f\}, \{c, e, f\}, \{a, f, g\}, \{b, e, g\}\}$.

Definindo $\eta : X \rightarrow Y$ por $\eta(1) = a, \eta(2) = b, \eta(3) = d, \eta(4) = c, \eta(5) = f, \eta(6) = g, \eta(7) = e$, temos que η é uma bijeção que age nos blocos de \mathcal{A} da seguinte forma

$$\{1, 2, 4\} \longrightarrow \{a, b, c\}$$

$$\{2, 3, 5\} \longrightarrow \{b, d, f\}$$

$$\begin{aligned}
\{3, 4, 6\} &\longrightarrow \{c, d, g\} \\
\{4, 5, 7\} &\longrightarrow \{c, e, f\} \\
\{1, 5, 6\} &\longrightarrow \{a, f, g\} \\
\{2, 6, 7\} &\longrightarrow \{b, e, g\} \\
\{1, 3, 7\} &\longrightarrow \{a, d, e\}.
\end{aligned}$$

Assim η é um isomorfismo entre esses dois designs.

Podemos descrever o isomorfismo de designs em termos das matrizes de incidência como segue.

Proposição 3.1.7. [67, Teorema 1.21] *Suponhamos que $M = [m_{i,j}]$ e $N = [n_{i,j}]$ são duas matrizes de incidência de designs de tamanho $n \times b$. Então esses dois designs são isomorfos se e somente se existe uma permutação γ de $\{1, \dots, n\}$ e uma permutação θ de $\{1, \dots, b\}$ tal que*

$$m_{i,j} = n_{\gamma(i),\theta(j)}$$

para todo $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq b$.

Em termos de matrizes de incidência, dois designs são isomorfos se a matriz de incidência de um pode ser transformada na matriz de incidência do outro usando permutações de linhas e colunas.

Exemplo 3.1.8. *No exemplo anterior apresentamos dois designs isomorfos. O design (Y, \mathcal{A}) tem matriz de incidência*

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

As permutações γ e θ tais que $\gamma(1) = 1, \gamma(2) = 2, \gamma(3) = 4, \gamma(4) = 3, \gamma(5) = 6, \gamma(6) = 7, \gamma(7) = 5, \theta(1) = 1, \theta(2) = 4, \theta(3) = 3, \theta(4) = 5, \theta(5) = 6, \theta(6) = 7, \theta(7) = 2$ satisfazem

$$m_{i,j} = n_{\gamma(i),\theta(j)}$$

para todo $1 \leq i \leq 7$, $1 \leq j \leq 7$, onde $M = [m_{i,j}]$ e $N = [n_{i,j}]$ são as matrizes de incidência dos designs (X, \mathcal{B}) e (Y, \mathcal{A}) , respectivamente.

Proposição 3.1.9. [22, Proposição 6.106] Os designs $D_1 = (X, \mathcal{B})$ e $D_2 = (Y, \mathcal{A})$ são isomorfos se e somente se $G(D_1)$ e $G(D_2)$ são isomorfos.

Proposição 3.1.10. Cada grafo bipartido pode ser visto como o grafo de incidência de um design. Em particular, um grafo bipartido com quatro autovalores distintos $\pm\sigma_0, \pm\sigma_1$ é o grafo de incidência de um design com valores singulares σ_0, σ_1 .

3.2 BIBD's

Especificando as regras para organizar os pontos em blocos, obtemos diferentes tipos de designs. A seguir apresentamos um tipo de design que será de grande importância em nosso trabalho.

Um **design de blocos incompletos balanceados** (BIBD ou 2-design) com parâmetros (n, b, r, k, α) , denotado por (n, b, r, k, α) -BIBD, é um design (X, \mathcal{B}) em que $n > k \geq 2$, X é um conjunto com n elementos, \mathcal{B} contém b blocos, cada elemento de X está em r blocos, cada bloco contém k elementos e cada par de elementos está simultaneamente em α blocos. O parâmetro r é usualmente chamado de número de replicação do BIBD.

Um BIBD é chamado de design de blocos incompletos pois $k < n$, e portanto todos seus blocos são blocos incompletos. E a propriedade de ser blocos balanceados vem da condição de cada par de elementos está contido em exatamente α blocos.

Da definição, segue que a matriz de incidência N de um BIBD com parâmetros (n, b, r, k, α) satisfaz as seguintes propriedades:

- cada coluna contém exatamente k "1"s;
- cada linha contém exatamente r "1"s;
- duas linhas distintas contém "1"s em exatamente α colunas.

Os parâmetros não são todos independentes; n , k e α determinam b e r , e nem todas as combinações de n , k e α são possíveis. Há duas equações básicas que relacionam esses parâmetros.

Ou seja, dados n , k e α nem sempre existe um BIBD com esses parâmetros.

Proposição 3.2.1. [49, Proposição 2.3.7] Para qualquer (n, b, r, k, α) -BIBD,

$$bk = nr \quad e \quad \alpha(n-1) = r(k-1).$$

De agora em diante só vamos nos referir a um (n, b, r, k, α) -BIBD no momento que precisemos mostrar explicitamente os valores de todos os cinco parâmetros; em geral usaremos a notação (n, k, α) -BIBD.

Também segue da Proposição 3.2.1 que $n = b$ se e somente se $r = k$. No caso em que $n = b$, o design é chamado de (n, k, α) -**BIBD simétrico**.

Exemplo 3.2.2. O design (X, \mathcal{B}) , com $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 6, 7\}, \{1, 3, 7\}\}$ é chamado de plano de Fano e é o único BIBD simétrico com parâmetros $(7, 3, 1)$ [30].

Como b e r são inteiros, a proposição acima permite concluir que BIBDs com certo conjunto de parâmetros não existem. O seguinte resultado é consequência da Proposição 3.2.1.

Corolário 3.2.3. [67, Corolário 1.10] Se um (n, k, α) -BIBD existe, então

$$\alpha(n-1) \equiv 0 \pmod{k-1} \quad e \quad \alpha n(n-1) \equiv 0 \pmod{k(k-1)}.$$

Por exemplo, não existe um $(8, 3, 1)$ -BIBD, pois $\alpha(n-1) = 7 \not\equiv 0 \pmod{2}$. Como outro exemplo, também podemos considerar o conjunto de parâmetros $(19, 4, 1)$, vemos que $\alpha(n-1) = 18 \equiv 0 \pmod{3}$ mas $\alpha n(n-1) = 342 \not\equiv 0 \pmod{12}$. Portanto um $(19, 4, 1)$ -BIBD não existe.

O corolário anterior permite determinar condições necessárias para que BIBDs com valores fixos de k e α existam. Por exemplo, é possível mostrar que um $(n, 3, 1)$ -BIBD existe se e somente se $n \equiv 1, 3 \pmod{6}$.

Da Proposição 3.2.1 tínhamos duas condições necessárias para a existência de um (n, k, α) -BIBD, outra importante condição necessária é apresentada no seguinte resultado.

Proposição 3.2.4. [31] (**Desigualdade de Fisher**) Para qualquer (n, b, r, k, α) -BIBD, $b \geq n$.

Observamos que as condições da Proposição 3.2.1 não são suficientes, pois, por exemplo, um $(43, 7, 1)$ -BIBD simétrico não existe [68]. Um dos objetivos dentro da teoria de designs combinatórios é precisamente determinar condições necessárias e suficientes que garantem a existência de um (n, k, α) -BIBD. Este é um problema difícil de forma geral, e existem muitos conjuntos de parâmetros para os quais não se conhece uma resposta. Por exemplo, não sabemos se um $(22, 8, 4)$ -BIBD existe [67].

Proposição 3.2.5. [67, Teorema 1.13] *Seja N uma matriz de tamanho $n \times b$, com entradas 0 e 1 e seja $2 \leq k < n$. Então N é a matriz de incidência de um (n, b, r, k, α) -BIBD se e somente se $NN^t = (r - \alpha)I_n + \alpha J_n$ e $J_n N = kJ_{n \times b}$.*

No capítulo anterior vimos que um $srg(n, r, \alpha, \alpha)$ é também chamado de grafo design com parâmetros (n, r, α) , essa notação vem de que nesse caso temos que a matriz de adjacência de G satisfaz $A^2 = (r - \alpha)I + \alpha J$ e $JA = rJ$, isto pelo Lema 2.3.12. Assim, usando a proposição anterior, A é a matriz de incidência de um (n, r, α) -BIBD.

Exemplo 3.2.6. *O plano de Fano apresentado no Exemplo 3.1.6 é o único $(7, 3, 1)$ -BIBD simétrico [30].*

Exemplo 3.2.7. *O $(8, 14, 7, 4, 3)$ -BIBD não simétrico com $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $\mathcal{B} = \{\{1, 3, 5, 7\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{3, 4, 7, 8\}, \{4, 5, 6, 7\}, \{1, 2, 3, 8\}, \{2, 3, 6, 7\}, \{1, 4, 5, 8\}, \{3, 5, 6, 8\}, \{2, 5, 7, 8\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 4, 7\}, \{1, 6, 7, 8\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$, é chamado de design sobre os pontos e planos de $AG(3, 2)$, o espaço afim tri-dimensional sobre \mathbb{F}_2 . Os blocos podem ser representados como as 6 faces, os 6 planos diagonais (planos que contém duas arestas paralelas que não pertencem a uma mesma face) e os 2 conjuntos de duas diagonais não paralelas de faces paralelas no cubo da Figura 3.5.*

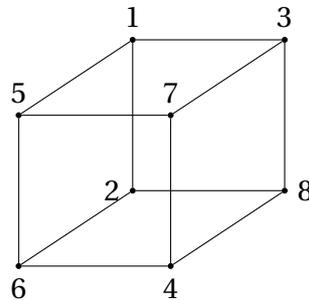


Figura 3.5: Cubo

O grafo de incidência desse design é o grafo bipartido irregular com 22 vértices mostrado na Figura 3.6.

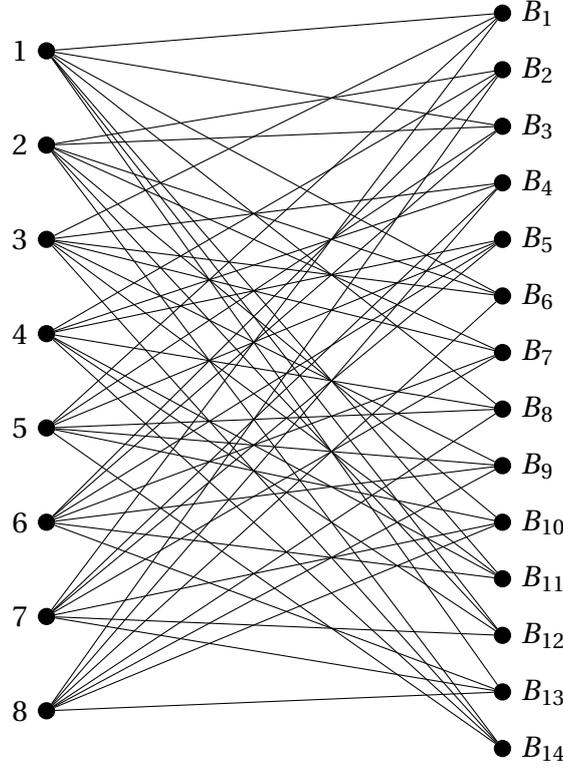


Figura 3.6: Grafo de incidência do BIBD sobre os pontos e planos de $AG(3,2)$

Sabemos pela Proposição 3.2.5 que dado um (n, k, α) -BIBD simétrico ou não temos que $NN^t = \alpha J + (r - \alpha)I$, neste caso os autovalores de NN^t são $rk^{[1]}$ e $r - \alpha^{[n-1]}$, portanto os valores singulares de N são $\sqrt{rk^{[1]}}$ e $\sqrt{r - \alpha^{[n-1]}}$.

Lembremos que a matriz de adjacência do grafo de incidência de um design que tem matriz de incidência N está definida como

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & | & N \\ \hline N^t & | & 0 \end{bmatrix},$$

logo

$$A^2(G) = \begin{bmatrix} 0 & | & N \\ \hline N^t & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & | & N \\ \hline N^t & | & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} NN^t & | & 0 \\ \hline 0 & | & N^tN \end{bmatrix} = NN^t \oplus N^tN,$$

onde $A \oplus B$ denota a soma direta das matrizes A de ordem $m \times n$ e B de ordem $p \times q$, isto é,

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{p1} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix}.$$

3.3 Designs Multiplicativos

Um **design multiplicativo**, como definido por Ryser [61], é um design (X, \mathcal{B}) tal que X é um conjunto com n elementos, \mathcal{B} contém n blocos e sua matriz de incidência N é tal que $N^t N = D + \alpha \alpha^t$, onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t$ é um vetor com entradas reais positivas e D é uma matriz diagonal.

3.3.1 Designs Multiplicativos Uniformes

Um design multiplicativo é chamado **uniforme** se D é uma matriz escalar, isto é, $D = dI_n$ onde d é um número real. De acordo com Bridges e Mena [14], um grafo cuja matriz de adjacência A é a matriz de incidência \tilde{X} de um design multiplicativo uniforme, em que N é simétrica com traço zero, é chamado **grafo multiplicativo**.

Exemplo 3.3.1. *O design (X, \mathcal{B}) do exemplo 3.1.2 é um design multiplicativo uniforme, pois $N^t N = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)I + \alpha \alpha^t$, onde $\alpha = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \left(1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^t$. Podemos observar que esse design não é um BIBD, visto que os blocos não têm o mesmo tamanho. Além disso, seu grafo de incidência, o caminho P_4 , não é um grafo multiplicativo, visto que sua matriz de incidência não tem traço zero.*

Vam Dam [73] caracterizou quando um design multiplicativo uniforme é um BIBD simétrico.

Proposição 3.3.2. *[73, Proposição 1] Um design multiplicativo uniforme é um BIBD simétrico se e somente se o número de pontos em cada bloco é constante ou o número de blocos incidentes em cada ponto é constante.*

Exemplo 3.3.3. [15] Seja $Y = J_7 - N$, onde N é a matriz de incidência de ordem 7×7 do plano de Fano (Figura 3.4). A matriz A dada por

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{0}_{8 \times 8} & & \mathbf{1}_7^t & \mathbf{0}_7^t \\ & & N & Y \\ \hline \mathbf{1}_7 & N^t & J_7 - I_7 & J_7 - I_7 \\ \mathbf{0}_7 & Y^t & J_7 - I_7 & J_7 - I_7 \end{array} \right]$$

é a matriz de adjacência de um grafo multiplicativo G com 22 vértices de graus 7 ou 16 e espectro $\{[14]^1, [2]^7, [-2]^{14}\}$, mostrado na Figura 3.7. Aqui $A^2 = 4I + \alpha\alpha^t$ com $\alpha = \left(\underbrace{\sqrt{3}, \dots, \sqrt{3}}_{8\text{-vezes}}, \underbrace{2\sqrt{3}, \dots, 2\sqrt{3}}_{14\text{-vezes}} \right)^t$. Este grafo também pode ser descrito como o grafo total sobre os pontos e planos de $AG(3, 2)$, o qual é o grafo construído a partir do grafo bipartido da Figura 3.6, no qual adicionamos uma aresta entre dois vértices B_i e B_j se eles têm intersecção não vazia.

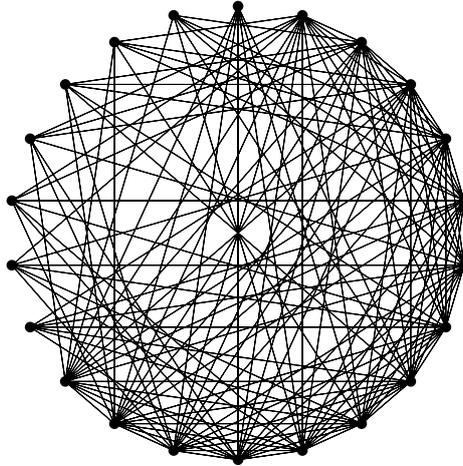


Figura 3.7: Grafo total sobre os pontos e planos de $AG(3, 2)$

Existe uma conexão entre os grafos conexos com três autovalores distintos e os grafos multiplicativos.

Teorema 3.3.4. [14, Teorema 4.1] Seja G um grafo conexo e A sua matriz de adjacência. G é um grafo multiplicativo se e somente se A tem três autovalores distintos $\mu, \sigma, -\sigma$ com $\mu > \sigma > -\sigma$.

3.4 Designs transversais

Conforme Colbourn e Dinitz [22, Capítulo III.3.2], um **design transversal 1-resolvível** com tamanho de grupo r e tamanho de bloco r , denotado $TD(r, r)$, é uma tripla $(V, \mathcal{G}, \mathfrak{B})$, onde

- (i) V é um conjunto de r^2 elementos;
- (ii) \mathcal{G} é uma partição de V em r classes (os grupos), cada um de tamanho r ;
- (iii) \mathfrak{B} é uma coleção de r -subconjuntos de V (os blocos);
- (iv) cada par não ordenado de elementos de V está contido em exatamente um grupo ou em exatamente um bloco, mas não em ambos;
- (v) os blocos podem ser particionados em conjuntos $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_s$, onde cada elemento de V ocorre exatamente uma vez em cada \mathfrak{B}_i .

Além disso, de forma análoga ao grafo de incidência de um design, o grafo de incidência do design transversal $(V, \mathcal{G}, \mathfrak{B})$ é o grafo bipartido com $|V| + |\mathfrak{B}|$ vértices correspondentes aos elementos e aos blocos do design, de forma que dois vértices são adjacentes se e somente se um corresponde a um bloco e o outro corresponde a um elemento desse bloco.

4 GRAFOS COM POUCOS AUTOVALORES DISTINTOS E ENERGIA EXTREMAL

Em 2016, no artigo “*Beyond graph energy: Norms of graphs and matrices*” ([60]), Nikiforov propôs dois problemas que envolvem a caracterização dos grafos que atingem a igualdade em duas cotas para a energia. Um deles é a caracterização para a igualdade em uma cota inferior e o segundo para uma cota superior. Neste capítulo apresentamos nossa contribuição para a solução desses problemas. Os resultados principais desse capítulo também podem ser encontrados em [5].

4.1 Energia de Grafos e Matrizes

Nesta seção introduzimos o conceito de energia de um grafo e destacamos o problema da energia extremal. Também apresentamos uma extensão desse conceito: a energia de uma matriz retangular complexa.

4.1.1 Energia de grafos

Entre os vários parâmetros estudados na Teoria Espectral de Grafos podemos destacar a energia de um grafo.

A **energia** de um grafo G com n vértices é definida como

$$\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|,$$

onde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ são os autovalores da matriz de adjacência de G .

Esse conceito baseado na Química Quântica foi introduzido no ano de 1978 por Gutman em seu artigo “*The energy of a graph*” [37], uma vez que foram utilizados grafos para representar moléculas de hidrocarbonetos insaturados devido à sua relevância para calcular a energia total dos elétrons π (um tipo de elétron associado à molécula) através dos autovalores da matriz de adjacência do grafo associado (ver [38, 39], por exemplo). A partir desse momento esse conceito matemático tem sido intensamente estudado. Para uma introdução completa ao assunto e mais propriedades a respeito, recomenda-se, por exemplo, as referências [1, 37, 55].

Podemos observar que $\mathcal{E}(G) \geq 0$ e $\mathcal{E}(G) = 0$ se e somente se G é o grafo vazio. A Tabela 4.1 apresenta a energia de algumas famílias de grafos ([74]).

Grafo	$Spec(G)$	$\mathcal{E}(G)$
K_n	$\{[n-1]^1, [-1]^{n-1}\}$	$2n-2$
$K_{p,q}$	$\{[\pm\sqrt{pq}]^1, [0]^{p+q-2}\}$	$2\sqrt{pq}$
P_n	$\{[2\cos(\frac{\pi i}{n+1})]^1\}, i = 1, 2, \dots, n$	$\begin{cases} 2\csc(\frac{\pi}{2(n+1)}) - 2, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{2} \\ 2\cot(\frac{\pi}{2(n+1)}) - 2, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$
C_n	$\{[2\cos(\frac{2\pi i}{n})]^1\}, i = 0, 1, \dots, n-1$	$\begin{cases} 4\cot(\frac{\pi}{n}) - 2, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 4\csc(\frac{\pi}{n}), & \text{se } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ 2\csc(\frac{\pi}{2n}), & \text{se } n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$

Tabela 4.1: Energia de algumas famílias de grafos

Há grande interesse na área de Teoria Espectral de grafos em determinar quais grafos têm os maiores ou menores valores com respeito a energia dentre todos os grafos com determinado número de vértices, dentro de famílias específicas ou em geral. Esse problema pertence à classe de problemas extremais que têm forma geral como a seguir:

Se G é um grafo de n vértices, com alguma propriedade P , quão grande ou pequeno pode ser um determinado parâmetro espectral de G ?

Essas questões extremais são cruciais para a Teoria Espectral de Grafos, isso motiva, em particular, a busca de grafos (dentro de famílias específicas de grafos) que têm os maiores ou menores valores de energia dentre todos os grafos com determinado número de vértices.

O primeiro resultado com relação à energia extremal de grafos foi obtido por Gutman [36] em 1977, que provou que dentre todas as árvores com n vértices, a estrela S_n e o caminho P_n tem a menor e a maior energia, respectivamente. Desde então, uma grande quantidade de artigos com relação a extremalidade de grafos com respeito a esse parâmetro foi publicado; citamos por exemplo [53].

O problema da energia extremal também está resolvido para grafos unicíclicos, como pode ser verificado em [45, 48]. Para grafos bicíclicos, se sabe apenas qual é o grafo de maior energia no caso em que o grafo é bipartido [47]. O problema está em aberto para grafos k -cíclicos, com $k \geq 3$, entre outras famílias de grafos conexos.

Caporossi et al. [20] provaram que o grafo que possui a menor energia dentre todos os grafos sem vértices isolados com n vértices é a estrela S_n . Em particular, isso resolve o problema da energia mínima para grafos conexos com n vértices. No entanto, o problema geral de determinar o grafo com a maior energia quando estamos trabalhando com grafos quaisquer de n vértices ainda continua em aberto.

É importante observar que em geral não é possível determinar o valor da energia de um grafo, pois não se conhece uma ferramenta para calcular com exatidão todos os autovalores da matriz de adjacência do grafo, o que por vezes não é uma tarefa fácil, ou seja, encontrar todas as raízes de um polinômio de grau n , o polinômio característico do grafo em questão. Por essa razão, geralmente são feitas estimativas para o valor da energia de um grafo, assim o estudo desse parâmetro se volta para o cálculo de cotas superiores ou inferiores para o valor da energia em termos de invariantes do grafo, como o número de vértices ou o número de arestas.

Uma das primeiras e mais conhecidas cotas estabelecidas para a energia de um grafo, foi determinada em 1971 por McClelland [57] em termos unicamente dos números de vértices e de arestas do grafo.

Proposição 4.1.1. [57] *Se G é um grafo com n vértices e m arestas, então*

$$\mathcal{E}(G) \leq \sqrt{2mn}, \quad (4.1)$$

com igualdade se e somente se todos os autovalores do grafo G são iguais em valor absoluto, ou seja, quando G é um grafo nulo ou o grafo formado por $n/2$ cópias de K_2 .

Em 2001, Koulen e Moulton [53] obtiveram uma cota superior para a energia de um grafo G de ordem n com m arestas e índice λ_1 .

Proposição 4.1.2. [53] *Seja G um grafo com n vértices, m arestas e índice λ_1 . Então*

$$\mathcal{E}(G) \leq \lambda_1 + \sqrt{(n-1)(2m - \lambda_1^2)}, \quad (4.2)$$

com igualdade se e somente se $|\lambda_2| = \dots = |\lambda_n|$.

Nikiforov observou em [60] quando a igualdade é atingida na cota anterior se G é regular ou G é irregular desconexo.

Proposição 4.1.3. *Seja G um grafo com n vértices, m arestas e índice λ_1 , tal que a igualdade é atingida em (4.2). Se G é regular, então $G = (n/2)K_2$, $G = K_n$ ou G é um grafo design. Além disso, se G é irregular e desconexo, então $G = K_{n-2r} + rK_2$.*

A partir da cota 4.2, Koolen et al. [53] encontraram uma cota superior apenas em termos do número de vértices e do número de arestas, que é melhor que a cota (4.1), originalmente obtida por McClelland, com igualdade entre essas duas cotas se e somente se $G = (n/2)K_2$.

Teorema 4.1.4. [53, Teorema 1] *Se $m \geq \frac{n}{2}$ e G é um grafo com n vértices e m arestas. Então*

$$\mathcal{E}(G) \leq \frac{2m}{n} + \sqrt{(n-1) \left(2m - \left(\frac{2m}{n} \right)^2 \right)}, \quad (4.3)$$

com igualdade se e somente se $G = (n/2)K_2$, $G = K_n$ ou G é um grafo conexo fortemente regular com dois autovalores não nulos ambos com valores absolutos iguais a

$$\sqrt{\frac{2m - \left(\frac{2m}{n} \right)^2}{(n-1)}}.$$

Na Proposição 4.1.4 só é considerado o caso $m \geq \frac{n}{2}$, Koolen et al. [52] deram a seguinte cota quando a desigualdade é contrária.

Teorema 4.1.5. [53, Teorema 2] *Se $m \leq \frac{n}{2}$ e G é um grafo com n vértices e m arestas. Então*

$$\mathcal{E}(G) \leq 2m, \quad (4.4)$$

com igualdade se e somente se G consiste de m cópias de K_2 mais vértices isolados.

Como um grafo com n vértices tem no máximo $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas, segue da cota (4.1) do McClelland a desigualdade

$$\mathcal{E}(G) \leq n\sqrt{n-1},$$

que depende exclusivamente do número de vértices.

As desigualdades (4.3) e (4.4) permitem melhorar a cota anterior como vemos no seguinte resultado, uma conhecida cota superior para a energia de um grafo de ordem n dado por Koolen e Moulton em [53], que depende exclusivamente do número de vértices.

Teorema 4.1.6. [53, Teorema 3] *Se G é um grafo com n vértices, então*

$$\mathcal{E}(G) \leq \frac{n}{2}(1 + \sqrt{n}), \quad (4.5)$$

com igualdade se e somente se G é um grafo fortemente regular com parâmetros

$$\left(n, \frac{n + \sqrt{n}}{2}, \frac{n + 2\sqrt{n}}{4}, \frac{n + 2\sqrt{n}}{4} \right).$$

É natural se perguntar pela possibilidade de construir grafos fortemente regulares com n vértices e parâmetros $\left(n, \frac{n + \sqrt{n}}{2}, \frac{n + 2\sqrt{n}}{4}, \frac{n + 2\sqrt{n}}{4} \right)$. Sabemos que os parâmetros de um grafo fortemente regular são inteiros, logo para existir um grafo G tal que $\mathcal{E}(G) = \frac{n}{2}(1 + \sqrt{n})$, é necessário mas não suficiente que n que seja quadrado perfeito, visto que G seria um grafo fortemente regular cujos parâmetros envolvem \sqrt{n} .

Haemers [40] conjecturou que n ser quadrado de um inteiro par é uma condição necessária e suficiente para a existência de tais grafos. Observamos que não existe, por exemplo, um grafo com $n = 9$ vértices que tenha aqueles parâmetros. Os menores casos que atingem a igualdade em (4.5) é para $n = 4$, em que $G = K_4$ é o único grafo completo que é fortemente regular com parâmetros $(n, n - 1, n - 2)$, e para $n = 16$, em que G é o grafo de Clebsch 10-regular, o qual é o único grafo design com parâmetros $(16, 10, 6)$ [62].

Além disso, os autores em [53] apresentam uma família de grafos design com energia máxima, baseando-se na teoria das geometrias parciais, onde n é uma potência de 4, sendo o design com parâmetros $(16, 10, 6)$ o grafo de menor ordem nessa família.

4.1.2 Energia de matrizes

Como mencionado anteriormente, existe um grande esforço na obtenção de cotas efetivas para a energia de um grafo. Um passo adiante neste estudo foi dado em 2007 por Nikiforov [59], que estendeu o conceito de energia de grafos, definindo a energia de uma matriz qualquer com entradas complexas e não necessariamente quadrada. Isto geralmente permite ampliar e avançar o estudo sobre energia, tanto em relação a resultados originais sobre grafos, quanto em relação a tópicos matriciais bem conhecidos. Nesse sentido, pode ser bastante útil ver a energia de um grafo como a norma do traço da matriz de adjacência.

Lembremos que a norma do traço $\|A\|_*$ de uma matriz retangular A com entradas complexas é a soma dos valores singulares de A , ou seja, a soma das raízes quadradas dos autovalores de A^*A , onde A^* é a matriz transposta conjugada de A . Se A é uma matriz real e simétrica, $\|A\|_*$ é a soma dos módulos dos autovalores de A . Assim, a norma do traço da matriz de adjacência de um grafo G é a energia de G , ou seja, $\|A(G)\|_* = \mathcal{E}(G)$. Nikiforov apresentou em [59] o conceito de energia matricial para qualquer $A \in M_{m,n}$, dado a seguir.

Para qualquer $A \in M_{m,n}$, a **energia de A** , $E(A)$, é igual a norma do traço $\|A\|_*$ de A , isto é, $E(A) = \sigma_1 + \dots + \sigma_n$, onde $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$ são os valores singulares de A .

A energia de um grafo definida anteriormente pode ser escrita então como $\mathcal{E}(G) = E(A(G))$.

Além de estender o conceito de energia de grafos para matrizes não simétricas e até não quadradas, o estudo das energias matriciais fornece novas técnicas para o estudo da energia de grafos. Para ilustrar a importância das energias matriciais para o estudo da energia de grafos, esse conceito foi usado por Nikiforov [60] para obter e estender a desigualdade (4.5).

Nikiforov notou em [60] que a Proposição 4.1.6 não se trata simplesmente de um resultado para grafos, mas sim de um resultado analítico sobre matrizes não negativas com entradas em módulo menores ou iguais a 1 e não necessariamente simétricas ou com a necessidade de ter todas as entradas da diagonal principal iguais a 0.

Proposição 4.1.7. [60, Proposição 1.2] *Se $A \in M_n$ é uma matriz não negativa com $\|A\|_{max} \leq 1$, então*

$$\|A\|_* \leq \frac{n}{2} (1 + \sqrt{n}), \quad (4.6)$$

com igualdade se e somente se $H := 2A - J_n$ é uma matriz de Hadamard regular.

Visto que a matriz de adjacência A de um grafo G é não negativa com entradas iguais a 1 ou 0, então (4.6) implica (4.5). Temos então a seguinte consequência da Proposição 4.1.7.

Corolário 4.1.8. [60, Corolário 1.3] *Se G é um grafo de ordem n com matriz de adjacência A , então vale a igualdade em (4.5) para $\mathcal{E}(G)$ se e somente se a matriz $H = 2A - J_n$ é uma matriz de Hadamard regular e simétrica, cujas entradas da diagonal principal são todas iguais a -1 .*

Por exemplo, para $n = 4$, o grafo G para o qual $\mathcal{E}(G) = 6 = \frac{4}{2}(1 + \sqrt{4})$ é o grafo completo K_4 , cuja matriz de adjacência A é tal que $2A - J_4$ é uma matriz de Hadamard de ordem 4 regular com -1 nas entradas da diagonal principal e 1 nas demais entradas.

Além disso, é conjecturado em [53] que para todo $\epsilon > 0$ e para quase todo $n \geq 1$, existe um grafo G com $\mathcal{E}(G) \geq (1 - \epsilon) \frac{n}{2} (1 + \sqrt{n})$, o que indica que a cota superior para $\mathcal{E}(G)$ em (4.5) é justa e reforça a importância da Proposição 4.1.7 para a norma do traço quando aplicada para grafos.

Por fim, observamos que uma série de problemas extremais envolvendo energia de grafos e matrizes foram apresentados em [59], incluindo várias cotas superiores e inferiores para $\|A\|_*$, dois desses problemas serão tratado na próxima seção.

4.2 Dois problemas propostos por Nikiforov

Cotas superiores ou inferiores para a norma do traço de matrizes são uma ferramenta para o estudo de energia de grafos, como ilustrado na Proposição 4.1.7. Esta observação feita por Nikiforov em [59] “*desatou uma espécie de reação em cadeia*”, como o próprio Nikiforov observou em sua pesquisa sobre normas de grafos e matrizes [60], onde propôs dois problemas que envolvem a caracterização dos grafos que atingem a igualdade em uma cota inferior e em uma cota superior para a energia de um grafo, respectivamente.

Entre as várias cotas para a norma do traço de matrizes, destacamos uma cota inferior para a norma do traço de uma matriz complexa $M = [a_{ij}]$ de ordem $m \times n$ com posto pelo menos 2, apresentada por Nikiforov em [60].

Proposição 4.2.1. [60, Proposição 2.12] *Seja $M = [a_{ij}] \in M_{m,n}$ com posto $r \geq 2$. Então*

$$\|M\|_* \geq \sigma_1(M) + \frac{1}{\sigma_2(M)} \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 - \sigma_1^2(M) \right), \quad (4.7)$$

onde $\sigma_1(M) \geq \sigma_2(M) \geq \dots \geq \sigma_n(M)$ são os valores singulares de M . A igualdade é atingida se e somente se $\sigma_2(M) = \dots = \sigma_r(M)$, isto é, se todos os valores singulares não nulos diferentes de $\sigma_1(M)$ são iguais.

Observe que a Proposição 4.2.1 fornece uma cota inferior para a energia de um grafo G não vazio, com igualdade em (4.7) se e somente se todos os autovalores não nulos de G diferentes do índice têm o mesmo valor absoluto.

Nikiforov observou em [60] que a cota (4.7) é bastante eficiente para grafos: a igualdade é obtida para a matriz de adjacência de um grafo design, o grafo completo K_n , ou um grafo bipartido completo, então ele propôs o seguinte problema:

Problema 1. [60, Problema 2.13] *Dar uma caracterização construtiva de todos os grafos G de modo que os autovalores não nulos de G diferentes do índice tenham o mesmo valor absoluto.*

Um problema ligeiramente diferente também foi proposto em [60]. Como visto na Proposição 4.1.3, Nikiforov observou que, se a igualdade é atingida em (4.2) e G é regular, então $G = (n/2) K_2$, $G = K_n$ ou G é um grafo design. Além disso, se a igualdade for atingida e G for irregular e desconexo, então $G = K_{n-2r} + r K_2$. Esse resultado motivou o seguinte problema:

Problema 2. [60, Problema 2.40] *Dar uma caracterização construtiva de todos os grafos conexos irregulares G de ordem n com $|\lambda_2(G)| = \dots = |\lambda_n(G)|$.*

Nas próximas seções, apresentamos nossa contribuição para os Problemas 1 e 2 publicada em [5]. Sejam \mathcal{G}_n e \mathcal{H}_n as classes de grafos não vazios de ordem n que satisfazem as propriedades requeridas nos Problemas 1 e 2, respectivamente. Claramente os grafos em \mathcal{G}_n possuem no máximo dois autovalores não nulos distintos em valor absoluto e \mathcal{H}_n é um subconjunto de \mathcal{G}_n .

Como a soma dos autovalores de um grafo é zero, um grafo G de ordem n tem apenas um autovalor se e somente se é um grafo vazio. Além disso, como o grafo completo é o único grafo conexo com dois autovalores distintos, temos que G tem exatamente dois autovalores distintos se e somente se todas as suas componentes conexas são grafos completos de mesma ordem, ou seja, $G = (n/r) K_r$. Visto que os grafos de \mathcal{H}_n são irregulares, então todo grafo com dois autovalores distintos pertence a \mathcal{G}_n mas não a \mathcal{H}_n . Portanto, resta caracterizar os grafos com três ou quatro autovalores distintos na família \mathcal{G}_n , e em particular aqueles com três autovalores distintos que pertencem a \mathcal{H}_n .

Em nosso estudo, primeiro consideramos grafos conexos. O Teorema 2.1.6 afirma que o índice de um grafo conexo é simples. Portanto, os únicos espectros possíveis de um grafo conexo $G \in \mathcal{G}_n$ com mais de dois autovalores distintos são:

Caso 1 - Três autovalores distintos:

$$(a) \text{Spec}(G) = \{[\lambda]^1, [0]^{n-t-1}, [\mu]^t\}, \lambda > 0 > \mu$$

ou

$$(b) \text{Spec}(G) = \{[\lambda]^1, [\mu]^{n-t-1}, [-\mu]^t\}, \lambda > \mu > 0.$$

Caso 2 - Quatro autovalores distintos:

$$\text{Spec}(G) = \{[\lambda]^1, [\mu]^{n-k-t-1}, [0]^t, [-\mu]^k\}, \lambda > \mu > 0.$$

Observe que os grafos em \mathcal{H}_n com mais de dois autovalores distintos têm espectro da forma dada no Caso 1 (b).

4.3 Grafos conexos com três autovalores distintos

Nesta seção, caracterizamos todos os grafos conexos na família \mathcal{G}_n que têm exatamente três autovalores distintos.

4.3.1 0 é autovalor

Em primeiro lugar, vamos considerar grafos conexos em \mathcal{G}_n com espectro $\{[\lambda]^1, [0]^{n-t-1}, [\mu]^t\}$, onde $1 \leq t \leq n-2$ e $\lambda > 0 > \mu$. Precisamos de alguns resultados auxiliares.

Lema 4.3.1. [8, Teorema 7.4] *Um grafo conexo G é um grafo r -partido completo se e somente se $\lambda_2 \leq 0$, onde λ_2 é o segundo maior autovalor de G .*

Lema 4.3.2. *Seja $G = K_{p_1, p_2, \dots, p_r}$ o grafo r -partido completo de ordem n .*

(i) [29, Lema 2] *O polinômio característico de G pode ser escrito como*

$$p_G(x) = x^{n-r} \left[\prod_{i=1}^r (x + p_i) - \sum_{i=1}^r p_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r (x + p_j) \right].$$

(ii) [29, Teorema 1] *Os $r-1$ autovalores negativos $\lambda_{n-r+2}, \dots, \lambda_n$ de G satisfazem as desigualdades*

$$p_1 \leq -\lambda_{n-r+2} \leq p_2 \leq -\lambda_{n-r+3} \leq p_3 \leq \dots \leq p_{r-1} \leq -\lambda_n \leq p_r.$$

O resultado abaixo dá uma caracterização construtiva de todos os grafos da família \mathcal{G}_n que possuem três autovalores distintos, um igual a zero.

Teorema 4.3.3. *Seja G um grafo conexo de ordem n com espectro $\{[\lambda]^1, [0]^{n-t-1}, [\mu]^t\}$, onde $1 \leq t \leq n-2$ e $\lambda > 0 > \mu$. Então*

(i) $\mu = -\lambda$ se e somente se G é um grafo bipartido completo.

(ii) $\mu \neq -\lambda$ se e somente se G é um grafo integral $(t+1)$ -partido completo com todas as suas partes de tamanho $-\mu$, com $t \geq 2$.

Demonstração. Segue do Lema 4.3.1 que G é um grafo r -partido completo.

Se $\mu = -\lambda$ então G é bipartido pela Proposição 2.3.3, e a recíproca decorre do fato de que o espectro do grafo bipartido completo $K_{p,q}$ é $\{[\sqrt{pq}]^1, [0]^{p+q-2}, [-\sqrt{pq}]^1\}$.

Suponha que $t \geq 2$ e G é um grafo integral $(t+1)$ -partido completo com todas as suas partes de tamanho $-\mu$. Então pelo Lema 4.3.2 o polinômio característico de G é

$$\begin{aligned} p_G(x) &= x^{n-(t+1)} \left[\prod_{i=1}^{t+1} (x - \mu) - \sum_{i=1}^{t+1} (-\mu) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{t+1} (x - \mu) \right] \\ &= x^{n-t-1} \left[(x - \mu)^{t+1} + (t+1)\mu (x - \mu)^t \right] \\ &= x^{n-t-1} (x - \mu)^t (x + t\mu). \end{aligned}$$

Portanto $\text{Spec}(G) = \{[-t\mu]^1, [0]^{n-t-1}, [\mu]^t\}$ e então $-\lambda = t\mu \neq \mu$.

Reciprocamente, como a soma dos autovalores é zero, temos $\lambda + t\mu = 0$. Assim, se $\mu \neq -\lambda$ então $t \geq 2$ e, pela Proposição 2.3.3, G não é bipartido. Segue da Proposição 2.3.4 que $\lambda \in \mathbb{Z}$, conseqüentemente $\mu \in \mathbb{Q}$. O teorema das raízes racionais implica que $\mu \in \mathbb{Z}$, já que o polinômio característico de G é mônico com coeficientes inteiros. Então G é integral. Além disso, como a multiplicidade de 0 como autovalor de G é $n - (t+1)$, do Lema 4.3.2, concluímos que G tem $r = t+1$ partes. Os $r-1$ autovalores negativos de G são todos iguais a μ , daí pelo Lema 4.3.2 temos

$$p_1 \leq -\mu \leq p_2 \leq -\mu \leq p_3 \leq \cdots \leq p_t \leq -\mu \leq p_{t+1},$$

onde $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_{t+1}$ são os tamanhos das partes de G . Em vista disso $p_2 = p_3 = \dots = p_t = -\mu$ e $p_1 \leq -\mu \leq p_{t+1}$. O Lema 4.3.2 também implica que o polinômio característico de G é

$$\begin{aligned} p_G(x) &= x^{n-t-1} \left[(x+p_1)(x-\mu)^{t-1}(x+p_{t+1}) - p_1(x-\mu)^{t-1}(x+p_{t+1}) \right. \\ &\quad \left. + (t-1)\mu(x+p_1)(x-\mu)^{t-2}(x+p_{t+1}) - p_{t+1}(x+p_1)(x-\mu)^{t-1} \right] \\ &= x^{n-t-1}(x-\mu)^{t-2} \left[x^3 + (t-2)\mu x^2 + ((t-1)\mu(p_1+p_{t+1}) - p_1 p_{t+1})x \right. \\ &\quad \left. + t\mu p_1 p_{t+1} \right]. \end{aligned}$$

Por outro lado, do espectro de G e do fato de que $\lambda = -t\mu$, temos

$$\begin{aligned} P_G(x) &= x^{n-t-1}(x+t\mu)(x-\mu)^t \\ &= x^{n-t-1}(x-\mu)^{t-2} \left[x^3 + (t-2)\mu x^2 + (1-2t)\mu^2 x + t\mu^3 \right]. \end{aligned}$$

Logo

$$(t-1)\mu(p_1+p_{t+1}) - p_1 p_{t+1} = (1-2t)\mu^2 \quad (4.8)$$

e

$$t\mu p_1 p_{t+1} = t\mu^3. \quad (4.9)$$

De (4.9) obtemos $p_1 p_{t+1} = \mu^2$. Substituindo isso em (4.8) obtemos $p_1 + p_{t+1} = -2\mu$. Segue que $p_1 = p_{t+1} = -\mu$. Então G é um grafo integral $(t+1)$ -partido completo com todas as partes de tamanho $-\mu$. \square

4.3.2 0 não é autovalor

Agora consideramos grafos conexos em \mathcal{G}_n com espectro $\{[\lambda]^1, [\mu]^{n-t-1}, [-\mu]^t\}$, onde $1 \leq t \leq n-2$ e $\lambda > \mu > 0$. Lembremos que todos os grafos da família $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{G}_n$ possuem espectro nesse formato. Começamos com um resultado auxiliar e um exemplo.

Shrikhande [64] caracterizou todos os grafos conexos regulares com três autovalores distintos, o que inclui os grafos conexos regulares com o espectro que estamos considerando.

Teorema 4.3.4. [64] *Um grafo conexo regular G é fortemente regular se e somente se tem exatamente três autovalores distintos.*

Também existem grafos conexos irregulares com o espectro que estamos considerando, como vemos a seguir.

Exemplo 4.3.5. *O cone sobre o grafo de Shrikhande e o cone sobre o grafo $\ell_2(4)$ (Figura 4.1) são irregulares, não isomorfos e coespectrais, com espectro $\{[8]^1, [2]^6, [-2]^{10}\}$.*

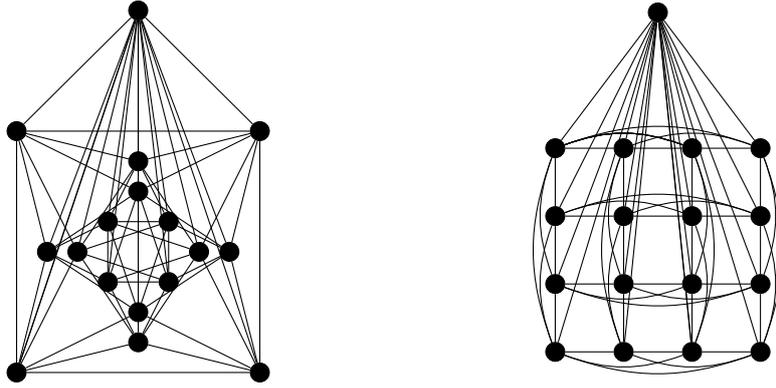


Figura 4.1: Cone sobre o grafo de Shrikhande e cone sobre o grafo $\ell_2(4)$

Segue do Teorema 3.3.4 que um grafo conexo em \mathcal{G}_n possui três autovalores não nulos distintos se e somente se for um grafo multiplicativo. O resultado abaixo mostra que esses grafos são integrais com o segundo maior autovalor $\mu > 1$ e mostra uma caracterização construtiva se forem regulares ou irregulares com o segundo maior autovalor $\mu = 2$.

Teorema 4.3.6. *Um grafo conexo G de ordem n tem espectro $\{[\lambda]^1, [\mu]^{n-t-1}, [-\mu]^t\}$, onde $1 \leq t \leq n-2$ e $\lambda > \mu > 0$, se e somente se é um grafo integral multiplicativo com o segundo maior autovalor $\mu \geq 2$. Além disso,*

- (i) *G é regular se e somente se é um grafo design com parâmetros $(n, \lambda, \lambda - \mu^2)$.*
- (ii) *G é irregular com $\mu = 2$ se e somente se é o cone sobre o grafo de Shrikhande, o cone sobre o grafo reticulado $\ell_2(4)$ ou o grafo total sobre os pontos e planos de $AG(3,2)$.*
- (iii) *Se G é irregular com $\mu \geq 3$ então G tem mais de 30 vértices.*

Demonstração. O fato de G possuir espectro da forma como indicado acima se e somente se for multiplicativo segue do Teorema 3.3.4. Além disso, como o espectro de G

não é simétrico em relação a zero, a Proposição 2.3.3 implica que G não é bipartido. Segue da Proposição 2.3.4 que $\lambda \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, já que $\lambda + (n - t - 1)\mu - t\mu = 0$, temos $\lambda = (2t - n + 1)\mu$. Logo $\mu \in \mathbb{Q}$, e o teorema das raízes racionais implica que $\mu \in \mathbb{Z}$. Então G é integral. Além disso, como G tem três autovalores distintos, seu diâmetro é 2 e, portanto, G contém o caminho com três vértices P_3 como um subgrafo induzido. Assim, pelo teorema do entrelaçamento de Cauchy, $-\mu \leq -\sqrt{2}$. Portanto, como G é integral, $\mu \geq 2$.

Suponha que G seja regular. Portanto pela Proposição 2.3.10 e Teorema 4.3.4, G é um $srg(n, \lambda, \alpha, \beta)$ com $\mu = \frac{(\alpha - \beta) + \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4(\lambda - \beta)}}{2}$ e $-\mu = \frac{(\alpha - \beta) - \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4(\lambda - \beta)}}{2}$. Por esta razão $\alpha = \beta$ e daí $\mu = \sqrt{\lambda - \beta}$. Assim G é um grafo design com parâmetros $(n, \lambda, \lambda - \mu^2)$. A recíproca é verdadeira, pois todo grafo design é um grafo regular. Agora, suponha que G seja irregular. Van Dam [71, Teorema 7 e Tabela II] caracterizou todos os grafos conexos com três autovalores distintos que não são fortemente regulares ou bipartidos completos e que possuem no máximo 30 vértices ou com cada autovalor pelo menos -2 . Inspeccionando-se os espectros dos grafos listados por van Dam valem as afirmações (ii) e (iii). \square

Embora a caracterização dada no Teorema 4.3.6 não seja construtiva no caso (iii), parece ser difícil obter essa caracterização para todos os grafos irregulares em \mathcal{G}_n com três autovalores não nulos distintos, já que podemos obter famílias infinitas de grafos irregulares conexos em \mathcal{G}_n com espectro dessa forma. Abaixo, apresentamos duas dessas famílias.

Exemplo 4.3.7. Ahrens e Szekeres [4] mostraram que existem grafos fortemente regulares com parâmetros $(\alpha^3 + 2\alpha^2, \alpha^2 + \alpha, \alpha, \alpha)$ para todo α que seja potência de um número primo. Por outro lado, segue de Abreu et al. [2, Proposição 3] que um cone C_α sobre um grafo multiplicativo conexo $(\alpha^2 + \alpha)$ -regular G com três autovalores distintos $\alpha^2 + \alpha > \alpha > -\alpha$ é multiplicativo se e somente se G é fortemente regular com parâmetros $(\alpha^3 + 2\alpha^2, \alpha^2 + \alpha, \alpha, \alpha)$. Nesse caso segue de [58, Lema 4.1] que

$$\text{Spec}(C_\alpha) = \left\{ [\alpha^2 + 2\alpha]^1, [\alpha]^{\frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 - \alpha - 2}{2}}, [-\alpha]^{\frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha + 2}{2}} \right\}. \quad (4.10)$$

Logo, para toda potência de primo α , o cone C_α sobre $G = srg(\alpha^3 + 2\alpha^2, \alpha^2 + \alpha, \alpha, \alpha)$ é um grafo irregular em \mathcal{G}_n , $n = \alpha^3 + 2\alpha^2 + 1$, com três autovalores não nulos distintos. Os exemplos com menor ordem nessa família infinita, obtidos fazendo $\alpha = 2$, são

o cone sobre o grafo de Shrikhande e o cone sobre o grafo $\ell_2(4)$ (Figura 4.1), que possuem 17 vértices. Observe que com $\alpha \geq 3$ obtemos cones com pelo menos 46 vértices.

Exemplo 4.3.8. Van Dam [71] apresentou outra família com infinitos grafos irregulares com três autovalores não nulos distintos, que não são cones. Cada grafo na família apresentada em [71] é construído a partir do grafo de incidência de um BIBD sobre os pontos e planos de $AG(3, q)$, o espaço afim tri-dimensional sobre \mathbb{F}_q , com parâmetros $(q^3, q^3 + q^2 + q, q^2 + q + 1, q^2, q + 1)$, adicionando uma aresta entre dois blocos se eles se cruzarem (em q pontos). A construção produz um grafo irregular em \mathcal{G}_n , $n = 2q^3 + q^2 + q$, chamado de grafo total sobre os pontos e planos de $AG(3, q)$, que tem três autovalores distintos e espectro

$$\left\{ [q^3 + q^2 + q]^1, [q]^{q^3-1}, [-q]^{q^3+q^2+q} \right\}.$$

O menor exemplo dessa família infinita, obtido fazendo $q = 2$, é o grafo total sobre os pontos e planos de $AG(3, 2)$ (Figura 3.7). Observe que, se $q \geq 3$, obtemos grafos com pelo menos 66 vértices.

Em suma, caracterizamos completamente os grafos em \mathcal{H}_n , o que resolve o Problema 2, exceto que a caracterização que damos nem sempre é construtiva. Nesse caso, apresentamos duas famílias infinitas de grafos como mostrado previamente.

Na próxima seção vamos estudar os grafos com espectro como no Caso 2.

4.4 Grafos conexos com quatro autovalores distintos

Nesta seção, estudamos grafos conexos em \mathcal{G}_n que possuem exatamente quatro autovalores distintos, ou seja, com espectro $\left\{ [\lambda]^1, [\mu]^{n-k-t-1}, [0]^t, [-\mu]^k \right\}$, onde $t, k \geq 1$, $t + k \leq n - 2$, e $\lambda > \mu > 0$. Caracterizamos esses grafos no caso de serem regulares com pelo menos dois autovalores simples e apresentamos famílias infinitas de grafos nos outros casos.

Os grafos de incidência de BIBDs simétricos são exemplos de grafos regulares com quatro autovalores distintos. De fato, esses são os únicos grafos regulares bipartidos com quatro autovalores distintos.

Lema 4.4.1. [25, Proposição 15.1.3] Um grafo bipartido conexo regular G com quatro autovalores distintos é o grafo de incidência de um BIBD simétrico com parâmetros

(n, r, α) . O espectro de G é dado por

$$\{[r]^1, [\sqrt{r-\alpha}]^{n-1}, [-\sqrt{r-\alpha}]^{n-1}, [-r]^1\}.$$

Exemplo 4.4.2. [70] O grafo obtido pela remoção de um emparelhamento perfeito do grafo bipartido completo $K_{\ell, \ell}$, denotado por $K_{\ell, \ell}^-$, é o grafo de incidência de um BIBD simétrico com parâmetros $(\ell, \ell - 1, \ell - 2)$, para $\ell > 2$. Pelo Lema 4.4.1,

$$\text{Spec}(K_{\ell, \ell}^-) = \{[\ell - 1]^1, [1]^{\ell-1}, [-1]^{\ell-1}, [-\ell + 1]^1\}.$$

Observamos que $K_{3,3}^-$ é o ciclo C_6 e $K_{4,4}^-$ é o grafo cubo Q_3 (Figura 2.5) formado pelos 8 vértices e 12 arestas de um cubo tridimensional, obtido removendo um emparelhamento perfeito do grafo bipartido completo $K_{4,4}$ (Figura 2.19).

Outra família de grafos regulares conexos com quatro autovalores distintos, determinados exclusivamente por seu espectro, foi dada por van Dam [70]. Os grafos dessa família são obtidos mediante uma construção usando produto de grafos com o grafo $K_{\ell, \ell}^-$.

Exemplo 4.4.3. Foi provado em [70] que $K_{\ell, \ell}^- \otimes J_m$ é determinado pelo espectro, para cada ℓ e m . Aplicando o Lema 2.3.15, podemos ver facilmente que $K_{\ell, \ell}^- \otimes J_m$ possui quatro valores próprios distintos. Em particular, considerando $\ell = 4$, obtemos uma família infinita de grafos regulares conexos com quatro autovalores distintos, um deles igual a -1 :

$$\text{Spec}(Q_3 \otimes J_m) = \{[4m - 1]^1, [2m - 1]^3, [-1]^{8m-5}, [-2m - 1]^1\},$$

para todo $m \geq 1$. Essa família gera outra família infinita de grafos regulares conexos com quatro autovalores distintos, todos pertencentes à família \mathcal{G}_n . De fato, o Lema 2.3.15 implica que $\overline{Q_3 \otimes J_m}$ é um grafo regular com

$$\text{Spec}(\overline{Q_3 \otimes J_m}) = \{[4m]^1, [2m]^1, [0]^{8m-5}, [-2m]^3\},$$

portanto, é um grafo integral conexo em \mathcal{G}_n , com $n = 8m$. Fazendo $m = 1$ obtemos o grafo $\overline{Q_3}$ (Figura 2.12). A Figura 4.2 mostra o grafo obtido com $m = 2$.

Proposição 4.4.4. Seja G um grafo conexo r -regular de ordem n e quatro autovalores distintos. Então seu complemento \overline{G} também é conexo e regular com quatro autovalores distintos, ou \overline{G} é desconexo e, portanto é a união de grafos fortemente regulares coespectrais.

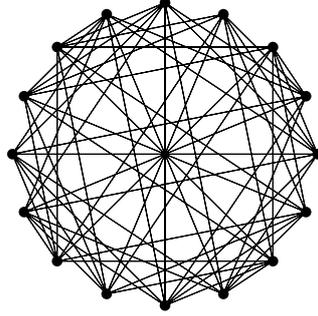


Figura 4.2: Grafo $\overline{Q_3 \otimes J_2}$

Demonstração. Seja $\text{Spec}(G) = \{[r]^1, [\lambda_2]^{m_2}, [\lambda_3]^{m_3}, [\lambda_4]^{m_4}\}$, onde $r > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$. Então pela Proposição 2.3.15, \overline{G} is $(n - 1 - r)$ -regular com espectro

$$\{[n - 1 - r]^1, [-\lambda_2 - 1]^{m_2}, [-\lambda_3 - 1]^{m_3}, [-\lambda_4 - 1]^{m_4}\}.$$

Ou o índice de \overline{G} é simples e, portanto, ele é conexo com quatro autovalores distintos, ou o índice de \overline{G} não é simples e, desse modo ele é desconexo com três autovalores distintos. Pela Proposição 2.3.6, o espectro de um grafo desconexo é a união dos espectros das suas componentes conexas. Dessa forma, no caso em que \overline{G} é desconexo, cada componente conexa possui dois ou três autovalores distintos. O Lema 4.3.4 implica que cada componente conexa com três autovalores distintos é um grafo fortemente regular, pois \overline{G} é regular. Se uma componente conexa tiver apenas dois autovalores distintos, será um grafo completo, com menor autovalor -1 . Conforme mostrado na prova do Teorema 4.3.6, o menor autovalor de um grafo conexo com três autovalores distintos é no máximo $-\sqrt{2}$. Portanto, no caso que \overline{G} tenha um grafo completo como uma componente conexa, cada componente conexa com três autovalores distintos possui pelo menos dois autovalores negativos, ou seja, -1 e $-\lambda_2 - 1 < -1$. No entanto, pela Proposição 2.3.10, todo grafo fortemente regular possui apenas um autovalor negativo. Portanto, se \overline{G} for desconexo, todas as suas componentes conexas serão grafos coespectrais fortemente regulares. \square

Em [46] Huang e Huang provaram a não existência de grafos regulares conexos com quatro autovalores distintos, dos quais exatamente dois autovalores são simples, sendo -1 um autovalor simples.

Lema 4.4.5. [46, Teorema 3.5] Não existem grafos conexos r -regulares com espectro $\{[r]^1, [-1]^1, [\delta]^m, [\zeta]^{n-2-m}\}$, onde δ e ζ são inteiros e $2 \leq m \leq n-4$.

Usando o resultado anterior, Huang e Huang [46] caracterizaram todos os grafos regulares conexos com quatro autovalores distintos, onde um deles é igual a 0 e exatamente dois são simples.

Lema 4.4.6. [46, Teorema 3.7] Um grafo conexo regular G possui quatro autovalores distintos nos quais exatamente dois autovalores são simples e com 0 como autovalor se e somente se $G = \overline{K_{\ell, \ell}} \otimes \overline{J_m}$, com $\ell \geq 3$ e $m \geq 1$.

O resultado abaixo caracteriza todos os grafos regulares conexos em \mathcal{G}_n com quatro autovalores distintos, pelo menos dois deles simples. Em particular, mostra que os grafos em \mathcal{G}_n na família mostrada no Exemplo 4.4.3 são os únicos grafos conexos em \mathcal{G}_n com quatro autovalores distintos onde o índice não é o único autovalor simples.

Teorema 4.4.7. Seja G um grafo conexo de ordem n com espectro $\{[\lambda]^1, [\mu]^{n-k-t-1}, [0]^t, [-\mu]^k\}$, onde $t, k \geq 1$, $t+k \leq n-2$ e $\lambda > \mu > 0$. Então G é integral. Além disso, se G é regular então $G = \overline{Q_3} \otimes \overline{J_{\frac{\mu}{2}}}$ ou λ é o único autovalor simples de G .

Demonstração. Segue da Proposição 2.1.3 que o polinômio mínimo de G é

$$m_G(x) = x(x-\lambda)(x-\mu)(x+\mu) = x^4 - \lambda x^3 - \mu^2 x^2 + \lambda \mu^2 x.$$

Além disso, $m_G(x)$ tem coeficientes inteiros [70, Lema 2.5] o qual implica que $\lambda \in \mathbb{Z}$. Dado que $\lambda + (n-k-t-1)\mu - k\mu = 0$, temos $\lambda = (2k+t-n+1)\mu$. Consequentemente $\mu \in \mathbb{Q}$ e o teorema das raízes racionais implica que $\mu \in \mathbb{Z}$. Então G é integral.

Suponha que G seja regular. Primeiro, provamos que 0 não é um autovalor simples de G . De fato, se $t = 1$ a Proposição 2.3.15 implica que \overline{G} é regular com espectro

$$Spec(\overline{G}) = \{[n-1-\lambda]^1, [\mu-1]^k, [-1]^1, [-\mu-1]^{n-k-2}\}.$$

Claramente -1 não pode ser igual a qualquer outro autovalor de \overline{G} , logo, é um autovalor simples. Por outro lado, pela Proposição 4.4.4, \overline{G} é conexo com quatro autovalores distintos ou é uma união disjunta de grafos fortemente regulares coespectrais. O primeiro caso é excluído pelo Lema 4.4.5. O último caso também não pode ocorrer, pois -1 é simples. Desse modo, 0 não é um autovalor simples de G .

É fácil ver que $-\mu$ também não é um autovalor simples de G . Se $k = 1$ temos $\lambda = (t - n + 3)\mu$ e assim $t - n + 3 \geq 2$. Logo $n \leq t + 1$, o que contradiz o fato de que $n \geq t + 3$.

Agora, suponha que μ seja um autovalor simples de G . Então G tem exatamente dois autovalores simples e o Lema 4.4.6 implica que $\overline{G} = K_{\ell, \ell}^- \otimes J_m$, com $\ell \geq 3$, $m \geq 1$ e $n = 2\ell m$. Pela Proposição 2.3.15 temos

$$\text{Spec}(\overline{G}) = \{[\ell m - 1]^1, [(2 - \ell)m - 1]^1, [-1]^{2\ell m - \ell - 1}, [2m - 1]^{\ell - 1}\},$$

e por conseguinte

$$\text{Spec}(G) = \{[\ell m]^1, [(\ell - 2)m]^1, [0]^{2\ell m - \ell - 1}, [-2m]^{\ell - 1}\}.$$

Deste modo $\lambda = \ell m$, $\mu = (\ell - 2)m$ e $-\mu = -2m$, o que implica que $\ell = 4$. Portanto $G = \overline{Q_3} \otimes J_{\frac{m}{2}}$. \square

Para uma caracterização completa dos grafos conexos em \mathcal{G}_n com quatro autovalores distintos, resta considerar grafos irregulares e grafos regulares nos quais o índice é o único autovalor simples. Para ambos os casos apresentamos a seguir famílias infinitas de grafos. Nossas construções são baseadas no resultado abaixo, que segue da Proposição 2.3.15.

Proposição 4.4.8. *Seja G um grafo conexo de ordem n . Se $G \in \mathcal{G}_n$, então $G \otimes J_m \in \mathcal{G}_{nm}$ para todo $m \geq 1$.*

Exemplo 4.4.9. *Segue do Exemplo 4.3.7 que, para cada potência de primo α o cone C_α sobre $G = \text{srg}(\alpha^3 + 2\alpha^2, \alpha^2 + \alpha, \alpha, \alpha)$ é um grafo irregular em \mathcal{G}_n , $n = \alpha^3 + 2\alpha^2 + 1$, com espectro como em (4.10). Assim, $C_\alpha \otimes J_m$ é um grafo irregular em \mathcal{G}_{nm} com quatro autovalores distintos, tal que*

$$\text{Spec}(C_\alpha \otimes J_m) = \left\{ [m(\alpha^2 + 2\alpha)]^1, [m\alpha]^{\frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 - \alpha - 2}{2}}, [0]^{n(m-1)}, [-m\alpha]^{\frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha + 2}{2}} \right\},$$

para todo $m \geq 2$. Os grafos de menor ordem nesta família (34 vértices), obtidos fazendo $\alpha = 2$, são $C_2^1 \otimes J_2$ e $C_2^2 \otimes J_2$, onde C_2^1 é o cone sobre o grafo de Shrikhande e C_2^2 é o cone sobre o grafo reticulado $\ell_2(4)$. Seu espectro é $\{[16]^1, [4]^6, [0]^{17}, [-4]^{10}\}$.

Exemplo 4.4.10. *No Exemplo 4.3.8 apresentamos uma família infinita de grafos irregulares \mathcal{G}_n , $n = 2q^3 + q^2 + q$, com espectro dado por $\{[q^3 + q^2 + q]^1, [q]^{q^3 - 1}, [-q]^{q^3 + q^2 + q}\}$,*

para toda potência de primo q . Tomando um grafo G de ordem n nesta família e um número inteiro $m \geq 2$, o grafo $G \otimes J_m$ é um grafo irregular em \mathcal{G}_{nm} com quatro autovalores distintos tal que

$$\text{Spec}(G \otimes J_m) = \left\{ [m(q^3 + q^2 + q)]^1, [mq]^{q^3-1}, [0]^{n(m-1)}, [-mq]^{q^3+q^2+q} \right\}.$$

O grafo de menor ordem nesta família infinita é $G \otimes J_2$, onde G é o grafo total sobre os pontos e planos de $AG(3, 2)$ (Figura 3.7). Além disso, $G \otimes J_2$ é um grafo irregular com 44 vértices e espectro $\{[28]^1, [4]^7, [0]^{22}, [-4]^{14}\}$.

Exemplo 4.4.11. A partir de cada grafo design em \mathcal{G}_n , podemos construir uma família infinita de grafos regulares conexos com quatro autovalores distintos. Segue do Teorema 4.3.6 e do Lema 2.3.10 que um grafo regular G em \mathcal{G}_n com três autovalores não nulos distintos é um grafo design com parâmetros $(n, \lambda, \lambda - \mu^2)$ e espectro $\left\{ [\lambda]^1, [\mu]^{\frac{1}{2}(n-1-\frac{\lambda}{\mu})}, [-\mu]^{\frac{1}{2}(n-1+\frac{\lambda}{\mu})} \right\}$. Desse modo, $G \otimes J_m$ é um grafo regular em \mathcal{G}_{nm} com quatro autovalores distintos tal que

$$\text{Spec}(G \otimes J_m) = \left\{ [m\lambda]^1, [m\mu]^{\frac{1}{2}(n-1-\frac{\lambda}{\mu})}, [0]^{n(m-1)}, [-m\mu]^{\frac{1}{2}(n-1+\frac{\lambda}{\mu})} \right\}$$

para todo $m \geq 2$. Observe que o índice é o único autovalor simples de $G \otimes J_m$. O grafo de menor ordem nesta família é obtido fazendo $m = 2$ e sendo G um grafo design com parâmetros $(15, 8, 4)$. Esse grafo design é único e isomorfo ao grafo linha de K_6 [35]. Observe que $\ell(K_6) \otimes J_2$ é um grafo regular com 30 vértices e espectro $\{[16]^1, [4]^5, [0]^{15}, [-4]^9\}$.

Exemplo 4.4.12. Van Dam e Spence [72] listaram todos os espectros possíveis para grafos regulares conexos com quatro autovalores distintos e no máximo 30 vértices. Inspeccionando essa lista e também o espectro do complemento dos grafos listados, obtivemos todos os espectros possíveis para grafos regulares conexos em \mathcal{G}_n , $n \leq 30$, com quatro autovalores distintos em que o índice é o único autovalor simples. Eles são apresentados na Tabela 4.2, onde # denota o número de grafos com esse espectro mostrados em [72]. Em cada caso, alguns grafos com esse espectro também são listados.

Na Tabela 4.2, BCS_9 é o grafo No. 9 em [19, Tabela 9.1] e $CP(3)$ é o grafo *cocktail party* de ordem 3, ilustrados na Figura 4.3.

A partir de qualquer grafo da Tabela 4.2, podemos construir uma família infinita de grafos regulares conexos em \mathcal{G}_{12m} com quatro autovalores distintos, em que o

n	#	Espectro	Grafos ¹
12	2	$\{[4]^1, [2]^3, [0]^3, [-2]^5\}$	$\ell(Q_3), BCS_9$
12	1	$\{[6]^1, [2]^3, [0]^2, [-2]^6\}$	$\ell(CP(3))$
18	1	$\{[12]^1, [3]^2, [0]^9, [-3]^6\}$	$\overline{K_{3,3} \square K_3}$
18	2	$\{[9]^1, [3]^3, [0]^8, [-3]^6\}$	N/A
24	5	$\{[8]^1, [4]^3, [0]^{15}, [-4]^5\}$	$\ell(Q_3) \otimes J_2, BCS_9 \otimes J_2$
24	28	$\{[12]^1, [4]^3, [0]^{14}, [-4]^6\}$	$\ell(CP(3)) \otimes J_2$
27	4	$\{[6]^1, [3]^6, [0]^{12}, [-3]^8\}$	$H(3,3), 3\text{-cover}(C_3 \otimes J_3)$
27	13	$\{[18]^1, [3]^6, [0]^8, [-3]^{12}\}$	$\overline{H(3,3)_3}$
27	≥ 1	$\{[12]^1, [3]^8, [0]^6, [-3]^{12}\}$	$H(3,3)_2$
30	≥ 68876	$\{[12]^1, [3]^{10}, [0]^5, [-3]^{14}\}$	$\ell_3(6) \setminus 6\text{-coclique}$
30	≥ 1487	$\{[16]^1, [4]^5, [0]^{15}, [-4]^9\}$	$srg(15, 8, 4, 4) \otimes J_2$
30	≥ 24931	$\{[15]^1, [3]^{10}, [0]^4, [-3]^{15}\}$	$\overline{srg(35, 16, 6, 6) \setminus 5\text{-clique}}$

Tabela 4.2: Espectro de grafos conexos regulares com quatro autovalores distintos em \mathcal{G}_n , $n \leq 30$, em que o índice é o único autovalor simples

índice é o único autovalor simples. Por exemplo, $\ell(Q_3) \otimes J_m$ e $BCS_9 \otimes J_m$ são coespectrais com espectro

$$\{[4m]^1, [2m]^3, [0]^{12m-9}, [-2m]^5\},$$

para todo $m \geq 1$, e $\ell(CP(3)) \otimes J_m$ é um grafo regular em \mathcal{G}_{12m} com espectro

$$\{[6m]^1, [2m]^3, [0]^{12m-10}, [-2m]^6\}.$$

Observe que os grafos nessas famílias com no máximo 30 vértices aparecem na Tabela 4.2.

4.5 Grafos desconexos

Nas seções anteriores, consideramos grafos conexos pertencentes à família \mathcal{G}_n , a classe de grafos não vazios da ordem n que satisfazem as propriedades exigidas

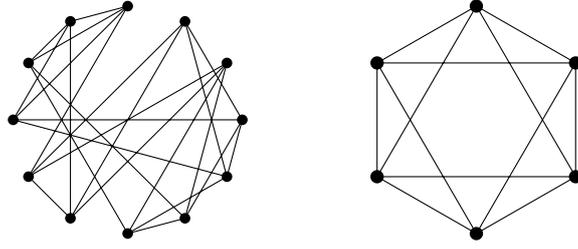


Figura 4.3: Grafos BCS_9 e $CP(3)$

no Problema 1. Lembramos que todos os grafos da família \mathcal{H}_n de grafos não vazios de ordem n que satisfazem as propriedades exigidas no Problema 2 são conexos e $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{G}_n$. O resultado a seguir caracteriza os grafos desconexos em \mathcal{G}_n .

Proposição 4.5.1. *Seja G um grafo desconexo de ordem n com índice λ . Então $G \in \mathcal{G}_n$ se e somente um dos seguintes casos é verdadeiro.*

- (i) *O espectro de G é $\left\{[\lambda]^{\frac{n-t}{2}}, [0]^t, [-\lambda]^{\frac{n-t}{2}}\right\}$, com $t \geq 0$ e $\lambda \geq 1$. As componentes conexas de G são vértices isolados ou grafos bipartidos completos $K_{p,q}$ tal que $pq = \lambda^2$. Em particular, $\lambda = 1$ se e somente se cada componente conexa de G que não é um vértice isolado é o grafo completo K_2 .*
- (ii) *G é um grafo integral com espectro $\left\{[\lambda]^1, [\mu]^{n-k-t-1}, [0]^t, [-\mu]^k\right\}$, com $t \geq 0$, $k \geq 2$, $k + t \leq n - 2$ e $\lambda > \mu > 0$. Exatamente uma componente conexa G_1 de G contém o índice como autovalor. Além disso, $G_1 \in \mathcal{G}_r$, para algum $r < n$, e qualquer outra componente conexa de G que não seja um vértice isolado é um grafo bipartido completo $K_{p,q}$ de modo que $pq = \mu^2$. Em particular, $\mu = 1$ se e somente se G_1 for o grafo completo K_r e qualquer outra componente conexa de G que não seja um vértice isolado é o grafo completo K_2 .*

Demonstração. Dividimos a prova em dois casos. Primeiro, suponha que todos os autovalores não nulos de G têm o mesmo valor absoluto. Então $G \in \mathcal{G}_n$ se e somente se $\text{Spec}(G) = \left\{[\lambda]^{\frac{n-t}{2}}, [0]^t, [-\lambda]^{\frac{n-t}{2}}\right\}$, com $t \geq 0$. O Teorema 4.3.3 implica que qualquer componente conexa de G que não é um vértice isolado, é um grafo bipartido completo. Como o espectro do grafo bipartido completo $K_{p,q}$ é $\left\{[\sqrt{pq}]^1, [0]^{p+q-2}, [-\sqrt{pq}]^1\right\}$, segue que para quaisquer duas componentes conexas $K_{a,b}$ e $K_{c,d}$ de G , temos $ab = cd = \lambda^2$. O caso em que $\lambda = 1$ segue do fato de que $K_{1,1}$ é o grafo completo K_2 , o que conclui a prova de (i).

Agora, suponha que G tenha exatamente dois autovalores não nulos distintos em valor absoluto. Então $G \in \mathcal{G}_n$ se e somente se seu espectro é da forma $\{[\lambda]^1, [\mu]^{n-k-t-1}, [0]^t, [-\mu]^k\}$, onde $t \geq 0, k \geq 2, k+t \leq n-2$ e $\lambda > \mu > 0$. Observe que o índice λ é simples, caso contrário $G \in \mathcal{G}_n$ teria apenas um autovalor não nulo em valor absoluto. Portanto, apenas uma componente conexa G_1 de G contém λ como autovalor. É claro que $G \in \mathcal{G}_n$ se e somente se $G_1 \in \mathcal{G}_r$, para algum $r < n$, G_1 também contém $-\mu$ como autovalor e todas as outras componentes conexas de G são vértices isolados ou têm exatamente dois autovalores não nulos distintos: μ e $-\mu$. Assim, pelos Teoremas 4.3.6 e 4.4.7, o espectro de G_1 é integral e, por conseguinte, o espectro de G é integral. Além disso, o Teorema 4.3.3 implica que cada componente conexa de G diferente de G_1 que não é um vértice isolado é um grafo bipartido completo $K_{p,q}$ tal que $pq = \mu^2$. Em particular, $\mu = 1$ se e somente se cada componente conexa $K_{p,q}$ é o grafo completo K_2 . Observe também que, neste caso, G_1 é o grafo completo K_r , caso contrário ele teria diâmetro maior do que 1 e seu menor autovalor seria no máximo $-\sqrt{2}$, uma contradição. \square

Segue da Proposição 4.5.1 que todos os grafos desconexos em \mathcal{G}_n que não possuem uma componente conexa $K_{p,q}$, onde pq não seja um quadrado perfeito são integrais. Observamos que para caracterizar completamente um grafo desconexo G em \mathcal{G}_n , basta caracterizar a componente conexa G_1 que contém o índice de G .

4.6 Considerações finais

Neste capítulo estudamos grafos com poucos autovalores distintos que estão relacionados à caracterização da igualdade em cotas para energia de grafos e à norma de traço para matrizes

Nosso estudo é organizado de acordo com o tipo de espectro que os grafos podem ter. Na seção 4.3 estudamos os grafos com espectro como no Caso 1. Grafos do Caso 2 foram estudados na seção 4.4. A Tabela 4.3 resume os resultados obtidos nesses casos, ou seja, nossa contribuição para a solução do Problema 1 para grafos conexos com mais de dois autovalores distintos. Nossa contribuição para o Problema 2 é dada pelos grafos irregulares na terceira linha da Tabela 4.3. Na seção 4.5 estudamos grafos desconexos em \mathcal{G}_n .

<i>Espectro</i>	<i>Grafos regulares</i>	<i>Grafos irregulares</i>
Dois autovalores distintos: $\{[\lambda]^1, [\mu]^{n-1}\}, \lambda > 0 > \mu.$	Grafo completo (Proposição 2.3.2)	Não existem
Três autovalores distintos, um deles igual a 0: $\{[\lambda]^1, [0]^{n-t-1}, [\mu]^t\},$ $\lambda > 0 > \mu.$	Grafo integral r -partido completo, com todas as suas partes de tamanho $-\mu$, e com $r \geq 2$ (Teorema 4.3.3)	Grafo bipartido completo $K_{p,q}$, com $p \neq q$ e $pq = \mu^2$ (Teorema 4.3.3)
Três autovalores não nulos distintos: $\{[\lambda]^1, [\mu]^{n-t-1}, [-\mu]^t\},$ $\lambda > \mu > 0.$	Grafo design com parâmetros $(n, \lambda, \lambda - \mu^2)$ (Teorema 4.3.6)	Grafos com $\mu = 2$: - cone sobre o grafo de Shrikhande - cone sobre o grafo reticulado $\ell_2(4)$ - grafo total sobre os pontos e planos de $AG(3, 2)$ (Teorema 4.3.6)
		Grafos nas famílias dos Exemplos 4.3.7 e 4.3.8
		Grafos integrais multiplicativos com $\mu \geq 3$ e $n > 30$, que não pertencem às famílias dos Exemplos 4.3.7 e 4.3.8 (Aberto)
Quatro autovalores distintos, um deles igual a 0: $\{[\lambda]^1, [\mu]^{n-k-t-1}, [0]^t, [-\mu]^k\},$ $\lambda > \mu > 0.$	$\overline{Q_3} \otimes J_{\frac{\mu}{2}}$ com $\lambda = 2\mu$ (Teorema 4.4.7)	Grafos nas famílias dos Exemplos 4.4.9 e 4.4.10
	Grafos nas famílias dos Exemplos 4.4.11 e 4.4.12	
	Grafos integrais com $n > 30$, onde apenas o índice é simples, que não pertencem às famílias dos Exemplos 4.4.11 e 4.4.12 (Aberto)	Grafos que não pertencem às famílias dos Exemplos 4.4.9 e 4.4.10 (Aberto)

Tabela 4.3: Grafos conexos em \mathcal{G}_n

5 GRAFOS BIPARTIDOS COM POUCOS AUTOVALORES DISTINTOS

No capítulo anterior apresentamos \mathcal{G}_n , a família de grafos de ordem n em que todos os seus autovalores não nulos diferentes do índice tenham o mesmo valor absoluto. Agora, consideramos \mathcal{F}_n a família de grafos de ordem n que possuem no máximo dois autovalores não nulos distintos em valor absoluto. Como observado na Seção 4.2 os grafos em \mathcal{G}_n pertencem a essa família. Estamos interessados, portanto, em estender os resultados do capítulo anterior, e avançaremos com o objetivo de caracterizar todos os grafos em \mathcal{F}_n .

Da Teoria de Perron-Frobenius (Teorema 2.1.6), sabe-se que o índice de um grafo conexo é simples. Logo, no caso de grafos conexos, os espectros possíveis dos grafos na família \mathcal{F}_n e que não estão em \mathcal{G}_n são:

$$\begin{aligned} & \{[\lambda]^1, [\mu]^{n-k-1}, [-\lambda]^k\}, \\ & \{[\lambda]^1, [\mu]^{n-k-t-1}, [0]^t, [-\lambda]^k\}, \\ & \{[\lambda]^1, [\mu]^{n-k-t-1}, [-\mu]^t, [-\lambda]^k\}, \\ & \{[\lambda]^1, [\mu]^{n-k-t-s-1}, [0]^s, [-\mu]^t, [-\lambda]^k\}. \end{aligned}$$

Se G é um grafo conexo de n vértices tal que $\lambda_1 = -\lambda_n$, então pela Proposição 2.3.3, G é bipartido e, portanto, G tem espectro simétrico. Dessa forma, só restam dois casos para completar o estudo de grafos conexos com até dois autovalores não nulos distintos em valor absoluto.

Caso 3 - Quatro autovalores não nulos distintos:

$$\text{Spec}(G) = \{[\lambda]^1, [\mu]^{\frac{n-2}{2}}, [-\mu]^{\frac{n-2}{2}}, [-\lambda]^1\}, \quad \lambda > \mu > 0.$$

Caso 4 - Cinco autovalores distintos, um deles igual a zero:

$$\text{Spec}(G) = \{[\lambda]^1, [\mu]^{\frac{n-s-2}{2}}, [0]^s, [-\mu]^{\frac{n-s-2}{2}}, [-\lambda]^1\}, \quad \lambda > \mu > 0, s > 0.$$

Neste capítulo, vamos apresentar estudos sobre grafos dos Casos 3 e 4, de forma a aprofundar o entendimento da família \mathcal{F}_n . Primeiramente, no Caso 3, faremos

a relação com os BIBDs e, para o caso 4 continuamos com as conexões desses grafos com um tipo especial de design, os PBIBDs (ver capítulo 3).

5.1 Grafos bipartidos com quatro autovalores distintos

Para completar a caracterização dos grafos do Caso 3, lembremos que o Lema 4.4.1 caracteriza todos os grafos conexos bipartidos regulares com quatro autovalores distintos com espectro dado por $Spec(G) = \{[\lambda]^1, [\mu]^{\frac{n-2}{2}}, [-\mu]^{\frac{n-2}{2}}, [-\lambda]^1\}$, $\lambda > \mu > 0$, como sendo grafos de incidência de um BIBD simétrico com parâmetros $(\frac{n}{2}, \lambda, \lambda - \mu^2)$.

Lema 5.1.1. [25, Proposição 15.1.3] *Um grafo bipartido conexo regular G com quatro autovalores distintos é o grafo de incidência de um BIBD simétrico com parâmetros (n, r, α) . O espectro de G é dado por*

$$\{[r]^1, [\sqrt{r-\alpha}]^{n-1}, [-\sqrt{r-\alpha}]^{n-1}, [-r]^1\}.$$

Por outro lado, Van Dam e Space [73] afirmam que o grafo de incidência de certos designs multiplicativos uniformes são precisamente os grafos bipartidos com quatro autovalores distintos. Em particular, a Proposição 3.3.2 caracteriza quando esses designs são BIBDs simétricos. Assim, o Caso 3, para grafos regulares, está caracterizado.

Observamos que para obter grafos irregulares do Caso 3, devemos estudar os designs multiplicativos uniformes que não são BIBDs simétricos, chamados por van Dam de designs multiplicativos uniformes não simétricos. Em [73, Tabela 1] van Dam apresenta todos os designs multiplicativos uniformes não simétricos com até 30 pontos. Consequentemente, os grafos de incidência desses designs são grafos irregulares do Caso 3 com até 60 vértices. Os espectros desses grafos são $\{\pm\sigma_0, \pm\sigma_1\}$, onde $\sigma_0 > \sigma_1$ são os únicos dois valores singulares da matriz de incidência \tilde{X} do design multiplicativo uniforme, visto que neste caso a matriz \tilde{X} é quadrada e não singular.

No exemplo seguinte apresentamos os grafos de incidência correspondentes aos dois primeiros designs multiplicativos uniformes não simétricos da Tabela 1 de [73] (ver Figura 5.1). Note que um dos grafos é integral e o outro não.

Exemplo 5.1.2. *O design da primeira linha na tabela da Figura 5.1 é o design do Exemplo 3.3.1, cujo grafo de incidência é o caminho P_4 . Logo P_4 é o grafo conexo irregular*

Table 1
Nonsymmetric uniform multiplicative designs with $v \leq 30$

v	σ_0, σ_1	(v_1, \dots, v_4)	(r_1, \dots, r_4)	(b_1, \dots, b_4)	(k_1, \dots, k_4)	#	Remarks
2	$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$	(1,1)	(1,2)	(1,1)	(1,2)	1	
5	3,1	(4,1)	(2,5)	(4,1)	(2,5)	1	Proposition 8
6	4,1	(3,3)	(2,5)	(3,3)	(2,5)	1	Proposition 8
11	$6, \sqrt{2}$	(5,5,1)	(3,6,11)	(5,5,1)	(3,6,11)	1	Proposition 9
14	$\sqrt{72}, \sqrt{2}$	(7,7)	(3,11)	(7,7)	(4,10)	1	Proposition 9
17	8,2	(16,1)	(7,16)	(16,1)	(7,16)	3	From (16,6,2)
18	11,2	(9,9)	(8,13)	(9,9)	(8,13)	3	Computer
18	7,2	(9,9)	(5,8)	(9,9)	(5,8)	3	Computer
20	6,2	(16,4)	(5,8)	(16,4)	(5,8)	1	From PG(2,4)
20	10,2	(16,4)	(7,16)	(16,4)	(7,16)	1	From PG(2,4)
21	11,2	(15,6)	(7,16)	(15,6)	(7,16)	1	From hyperoval in PG(2,4)
22	10,2	(8,9,4,1)	(5,8,13,20)	(8,9,4,1)	(5,8,13,20)	0	
22	10,2	(15,6,1)	(6,12,22)	(15,6,1)	(6,12,22)	1	From hyperoval in PG(2,4)
22	8,2	(21,1)	(6,22)	(21,1)	(6,22)	1	From PG(2,4)
22	14,2	(8,14)	(7,16)	(8,14)	(7,16)	4	Computer; from (8,4,3)
22	13,2	(11,11)	(7,16)	(11,11)	(7,16)	1	From (11,6,3)
23	13,2	(7,14,2)	(5,13,20)	(7,14,2)	(5,13,20)	0	$v_4 = 2$
24	$\sqrt{192}, \sqrt{3}$	(13,11)	(4,19)	(11,13)	(6,15)	1	$(11, 6, 3) + (13, 4, 1)$
24	$\sqrt{147}, \sqrt{3}$	(16,8)	(4,19)	(16,8)	(6,15)	0	
25	$12, \sqrt{3}$	(14,7,4)	(4,12,19)	(14,7,4)	(4,12,19)	0	
25	$13, \sqrt{5}$	(6,4,14,1)	(6,9,14,21)	(6,4,14,1)	(6,9,14,21)	0	
25	$12, \sqrt{5}$	(6,9,9,1)	(6,9,14,21)	(6,9,9,1)	(6,9,14,21)	5	Computer
25	$10, \sqrt{5}$	(10,10,5)	(6,9,14)	(10,10,5)	(6,9,14)	5	Computer
27	12,2	(12,7,4,4)	(5,8,13,20)	(12,7,4,4)	(5,8,13,20)	0	
29	$12, \sqrt{5}$	(11,11,4,3)	(6,9,14,21)	(11,11,4,3)	(6,9,14,21)	0	
29	$9, \sqrt{5}$	(20,5,4)	(6,9,14)	(20,5,4)	(6,9,14)	1	From PG(2,5)
29	$13, \sqrt{6}$	(3,19,4,3)	(7,10,15,22)	(3,19,4,3)	(7,10,15,22)	0	
29	$15, \sqrt{7}$	(1,7,21)	(8,11,16)	(1,7,21)	(8,11,16)	137,541	Computer
30	14,2	(12,9,9)	(5,8,20)	(12,9,9)	(5,8,20)	0	
30	20,2	(9,21)	(6,22)	(9,21)	(6,22)	0	
30	12,2	(25,5)	(6,22)	(25,5)	(6,22)	0	

Figura 5.1: Tabela 1 de [73]

de menor ordem com quatro autovalores não nulos distintos. Seu espectro é dado por $\left\{ \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right]^1, \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right]^1, \left[-\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right]^1, \left[-\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right]^1 \right\}$.

Na Figura 5.2 temos o grafo de incidência do design da segunda linha na tabela da Figura 5.1, esse é o grafo irregular de segunda menor ordem com quatro autovalores não nulos distintos, seu espectro é $\{[3]^1, [1]^4, [-1]^4, [-3]^1\}$.

Para uma caracterização completa dos grafos que têm espectro como no Caso 3, resta considerar grafos irregulares que são grafos de incidência de um design multiplicativo uniforme não simétrico.

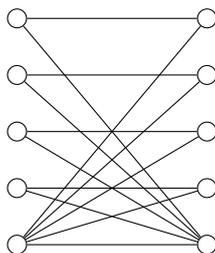


Figura 5.2: Grafo de incidência do design da segunda linha da tabela da Figura 5.1

5.2 Grafos bipartidos distância regular com cinco autovalores distintos

Os grafos distância regular são um tipo específico de grafos regulares. Tem sido estudados ativamente em anos recentes e estão estreitamente relacionados com grupos finitos, designs combinatórios, geometrias finitas, codificação, etc. Nesta seção vamos considerar a relação entre grafos distância regulares bipartidos com 5 autovalores distintos e um tipo específico de design, os PBIBDs com duas classes associadas, e apresentamos a situação em que os grafos que consideramos são na verdade os grafos de incidência desses designs.

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo simples de diâmetro d . Para um vértice fixo $u \in V$ e para todo $i \in \{0, 1, \dots, d\}$, definimos o conjunto $G_i(u)$ como segue

$$G_i(u) = \{v \in V : d(u, v) = i\}.$$

Um grafo conexo simples com diâmetro d é dito **distância regular** se é um grafo regular de grau r e existem números inteiros $c_1, \dots, c_d, b_0, b_1, \dots, b_{d-1}$ tais que se $u, v \in V$ com $d(u, v) = i$, se tem o seguinte

1. $c_i = |G_{i-1}(u) \cap G_1(v)|$, para todo $i \in \{1, \dots, d\}$;
2. $b_i = |G_{i+1}(u) \cap G_1(v)|$, para todo $i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$.

A sequência $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, c_2, \dots, c_d\}$, onde $b_0 = r$, $c_1 = 1$ é chamada de **arranjo de intersecção** do grafo distância regular G e os números c_i, b_i e $a_i = r - b_i - c_i$, onde $a_0 = 0$ e $b_d = 0$, são os **números de intersecção**.

Sabemos que se G é um grafo conexo de diâmetro d , G tem pelo menos $d + 1$ autovalores distintos (ver Proposição 2.3.2). O seguinte resultado mostra uma propriedade importante relativa ao número de autovalores distintos para grafos distância regular de diâmetro d .

Lema 5.2.1. [33] *Seja G um grafo distância regular de diâmetro d . Então G tem exatamente $d + 1$ autovalores distintos.*

Além da afirmação dada no lema anterior, o arranjo de intersecção contém todas as informações espectrais de um grafo distância regular. De fato, os autovalores de G são precisamente os autovalores da matriz tridiagonal T de tamanho $(d + 1) \times (d + 1)$, e com entradas dadas pelos números de intersecção como segue

$$T = \begin{bmatrix} 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{d-1} & b_{d-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_d & a_d \end{bmatrix}.$$

Lema 5.2.2. *Seja G um grafo distância regular e T sua matriz tridiagonal com entradas dadas pelos números de intersecção. Então os autovalores de T são distintos e são os autovalores de G .*

Exemplo 5.2.3. *A Figura 5.3 apresenta o hipercubo Q_4 dado pelo produto cartesiano $P_2 \square P_2 \square P_2 \square P_2$ junto com sua matriz tridiagonal T . Este grafo é exemplo de um grafo distância regular de diâmetro 4, com arranjo de intersecção $\{4, 3, 2, 1; 1, 2, 3, 4\}$ e espectro $\{[\pm 4]^1, [\pm 2]^4, [0]^6\}$.*

Um **PBIBD com duas classes associadas** é um design com v pontos em b blocos, com replicação constante r e tamanho de blocos constante k , tal que

1. Cada par de pontos está simultaneamente em λ_1 ou λ_2 blocos (e são ditos i -associados, se estão em λ_i blocos, $i = 1, 2$).

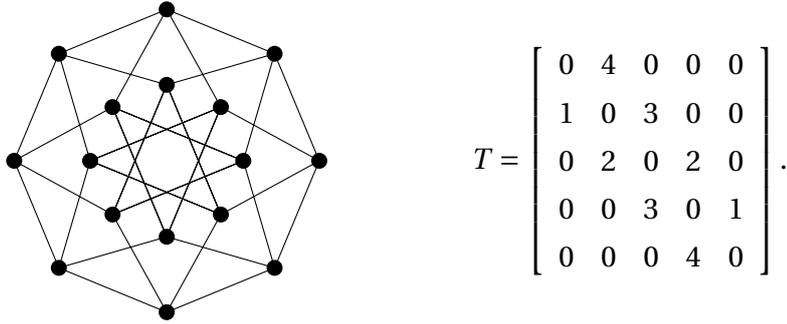


Figura 5.3: Hípercubo Q_4 e matriz tridiagonal T

2. Existe uma relação de associação entre cada par dos v pontos satisfazendo as seguintes condições:
 - a. Quaisquer dois pontos são primeiro ou segundo associados.
 - b. Cada ponto tem n_1 primeiro e n_2 segundo associados.
 - c. Para quaisquer par de pontos que são i -associados, o número de pontos que são simultaneamente j associados do primeiro, e k associados do segundo é p_{jk}^i , e esse número é independente do par de pontos do início. Além disso $p_{jk}^i = p_{kj}^i$ ($i, j, k = 1, 2$).

Os PBIBDs foram introduzidos como generalizações de BIBDs, de fato, se $\lambda_1 = \lambda_2$, um PBIBD é um BIBD. Em um BIBD o parâmetro λ descreve o número de blocos que contém dois pontos distintos, e como já vimos, esse é um parâmetro muito importante neste tipo de design. Em um PBIBD existem dois valores λ_1 e λ_2 que definem classes associadas para os pontos.

Para um PBIBD com duas classes associadas, são necessárias as seguintes relações (ver [10])

$$\begin{aligned} vr &= bk, \\ v &= n_1 + n_2 + 1, \\ \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 &= r(k-1), \\ p_{11}^1 + p_{12}^1 + 1 &= p_{11}^2 + p_{12}^2 = n_1, \\ p_{21}^1 + p_{22}^1 &= p_{21}^2 + p_{22}^2 + 1 = n_2, \\ n_1 p_{12}^1 &= n_2 p_{11}^1, \end{aligned}$$

$$n_1 p_{22}^1 = n_2 p_{12}^2.$$

Os oito parâmetros $v, b, r, k, \lambda_1, \lambda_2, n_1$ e n_2 são conhecidos como parâmetros de primeiro tipo, e os seis parâmetros p_{jk}^i ($i, j, k = 1, 2$) são chamados de parâmetros de segundo tipo. Os parâmetros de segundo tipo podem ser apresentados como elementos de duas matrizes simétricas.

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_{11}^1 & p_{12}^1 \\ p_{21}^1 & p_{22}^1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 = \begin{bmatrix} p_{11}^2 & p_{12}^2 \\ p_{21}^2 & p_{22}^2 \end{bmatrix}.$$

Identificando os pontos de um PBIBD com duas classes associadas com os vértices um grafo H , no qual dois vértices são adjacentes precisamente quando os correspondentes pontos são primeiro associados, temos que H é um grafo fortemente regular com parâmetros $(v, n_1, p_{11}^1, p_{11}^2)$.

Em particular, qualquer PBIBD com duas classes associadas está estreitamente relacionado com dois grafos diferentes. Um deles é seu grafo de incidência G , e o outro já mencionado grafo fortemente regular H . Normalmente diremos que este PBIBD de com duas classes associadas está baseado em H .

Além disso, em um PBIBD com duas classes associadas a matriz de incidência N satisfaz:

$$NN^t = rI + \lambda_1 A_H + \lambda_2 (J - I - A_H), \quad (5.1)$$

onde A_H é a matriz de adjacências H .

Reciprocamente, um design com replicação e tamanho de bloco constantes tal que a sua matriz de incidência satisfaz a equação matricial (5.1) é um PBIBD com duas classes associadas (ver [9, 69]).

Exemplo 5.2.4. *O design (X, \mathcal{B}) , com $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 4, 5\}, \{2, 3, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{2, 3, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 6\}\}$ é um PBIBD com duas classes associadas, tal que N a matriz de incidência do design é*

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad NN^t = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 4I_6 + 2A_H + 4(J - I - A_H),$$

onde

$$A_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad J - I - A_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aqui $v = b = 6$, $r = k = 4$, $n_1 = 4$, $\lambda_1 = 2$, $n_2 = 1$ e $\lambda_2 = 4$. Além disso

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad P_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sabemos da Proposição 2.3.10, que para um grafo fortemente regular H , seus distintos autovalores e respectivas multiplicidades estão determinados pelos seus parâmetros, e portanto, pela equação (5.1), também os autovalores de NN^t e suas respectivas multiplicidades estão determinados pelos parâmetros de H . Mais especificamente (ver [9]), se θ_1 , θ_2 e θ_3 são os autovalores distintos de H , então os autovalores distintos de NN^t estão dados por

$$r + (\lambda_1 - \lambda_2)\theta_1 + (v - 1)\lambda_2, \quad r + (\lambda_1 - \lambda_2)\theta_2 - \lambda_2 \quad e \quad r + (\lambda_1 - \lambda_2)\theta_3 - \lambda_2.$$

Consequentemente, o espectro do grafo de incidência G de um PBIBD com duas classes associadas baseado em H , está determinado pelo espectro de H .

Exemplo 5.2.5. O grafo triangular $T(n)$ é definido como $\ell(K_n)$, isto é, o grafo linha do grafo completo K_n ($n \geq 4$). Os grafos triangulares são $\text{srg}\left(\frac{n(n-1)}{2}, 2(n-2), n-2, 4\right)$ (ver [65, exemplo 3.4.2]). Na figura 5.4 temos o grafo $T(4)$, ele é o grafo H no exemplo 5.2.4, um $\text{srg}(6, 4, 2, 4)$ com espectro dado por $\text{Spec}(H) = \{[4]^1, [0]^3, [-2]^2\}$, além disso, $\text{Spec}(NN^t) = \{[16]^1, [4]^2, [-0]^3\}$.

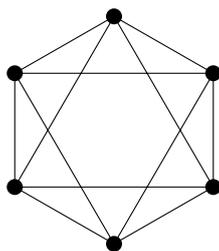


Figura 5.4: Grafo $T(4)$

O **meio grafo** \tilde{G} de um grafo bipartido conexo $G = (U, V, E)$ é um grafo cujo conjunto de vértices de \tilde{G} é um dos dois lados da partição de G , no qual existe uma aresta que conecta dois vértices em \tilde{G} quando esses dois vértices estão à distância 2 em G .

Exemplo 5.2.6. Na figura 5.5 temos o grafo $K_{2,2,2,2}$, o qual é o meio grafo do hipercubo Q_4 .

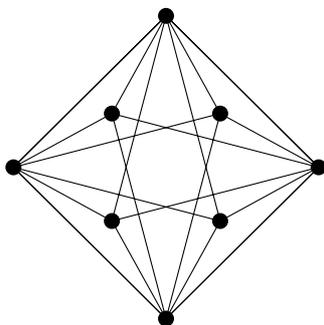


Figura 5.5: meio grafo do hipercubo Q_4

Lembremos que um grafo regular bipartido com quatro autovalores distintos deve ser o grafo de incidência de algum BIBD simétrico em particular o resultado também vale para um grafo distância regular bipartido com quatro autovalores distintos, agora vamos a apresentar um resultado que relaciona grafos distância regular bipartidos com cinco autovalores distintos e PBIBDs simétricos com duas classes associadas.

Teorema 5.2.7. *Seja G um grafo bipartido distância-regular com 5 autovalores distintos, então ele é o grafo de incidência de uma classe de PBIBD simétrico com duas classes associadas baseado em um meio grafo (fortemente regular) de G .*

Demonstração. Seja

$$A(G) = \begin{bmatrix} O & N \\ N^t & 0 \end{bmatrix},$$

onde N é a matriz de incidência do design.

Como G é distância regular e tem 5 autovalores distintos, então pelo Lema 5.2.1, o diâmetro de G é 4, e dois vértices na mesma partição estão numa distância 2.

Além disso, o número de vizinhos comuns de dois vértices numa distância 2 em G é constante, digamos c . Do anterior, podemos concluir que N tem soma de linhas e colunas constante ambas iguais a r , e que

$$NN^t = rI + cA,$$

onde A é a matriz de adjacência do grafo metade distância regular \tilde{G} de G .

Por hipótese, NN^t tem exatamente 3 autovalores distintos, logo A tem exatamente 3 autovalores distintos, o qual quer dizer que \tilde{G} é fortemente regular. \square

5.3 Grafos bipartidos regulares com cinco autovalores distintos

Vamos derivar algumas caracterizações estruturais e propriedades dos grafos bipartidos regulares com cinco autovalores distintos.

Proposição 5.3.1. *Seja G um grafo r -regular bipartido, então G tem um número par de vértices.*

Demonstração. Como G é regular, todos os vértices tem grau r . Se existem m arestas no total, a soma dos graus de todos os vértices em cada um dos conjuntos independentes é m , pois cada aresta tem um ponto nesse conjunto. Como o grafo é r -regular, temos $\frac{m}{r}$ vértices em cada conjunto, então a ordem de cada conjunto é igual. \square

Supondo que G é um grafo bipartido r -regular com cinco autovalores distintos, então usaremos a seguinte notação.

$$\text{Spec}(G) = \{[r]^1, [\mu]^k, [0]^w, [-\mu]^k, [-r]^1\},$$

onde $k, w \geq 1$ e $r > \mu > 0$, logo $2 + 2k + w = 2n$ (é o número de vértices), daí que $w = 2m$ para algum $m \geq 1$, $m \in \mathbf{Z}$ e portanto $1 + k + m = n$. Além disso, também temos que $2r^2 + 2k\mu^2 = 2nr$ (é o número de arestas), isto é, $r^2 + k\mu^2 = nr$.

Logo se G é um grafo r -regular bipartido com $2n$ vértices e cinco autovalores distintos

$$\text{Spec}(G) = \{[r]^1, [\mu]^k, [0]^{2m}, [-\mu]^k, [-r]^1\},$$

onde $1 + k + m = n$, $k = \frac{r(n-r)}{\mu^2}$, $k, m \geq 1$ e $r > \mu > 0$.

Lema 5.3.2. [43, Teorema 1] Para um grafo G com matriz de adjacência A , existe um polinômio $P(x)$, tal que $P(A) = J$, se e somente se G é regular e conexo. Nesse caso temos

$$P(x) = \frac{n \prod_{i=2}^s (x - \lambda_i)}{\prod_{i=2}^s (r - \lambda_i)},$$

onde n é o número de vértices, r é o índice, e $\lambda_1 = r, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ são os distintos autovalores de G .

Um grafo é dito **caminho regular** se para cada vértice i , o número de caminhos fechados de comprimento k que começam em i é constante para cada inteiro não negativo k . Fixando $k = 3$, temos que cada grafo caminho regular é regular.

Observação 5.3.3. Grafos distância regular, e conseqüentemente grafos fortemente regulares são exemplos de grafos caminho regular, mas existem grafos caminho regular que não são distância regular como o grafo na figura 5.6 (ver [34]).

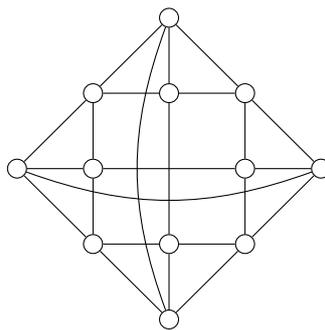


Figura 5.6: um grafo caminho regular

Temos um resultado que mostra propriedades básicas dos grafos caminho regulares.

Lema 5.3.4. [65, Lema 3.2.1] *Seja G é um grafo simples, onde A denota a matriz de adjacência de G , $V(G)$ o conjunto de vértices de G e P_{G-i} denota o polinômio característico do subgrafo $G-i$ para todo $i \in V(G)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) G é caminho regular;
- (ii) A^k é uma matriz com diagonal constante para todo $k \geq 1$.
- (iii) Os polinômios característicos P_{G-i} são iguais para todo $i \in V(G)$.

É conhecido que grafos regulares com no máximo quatro autovalores distintos são grafos caminho regular (ver [35, p. 190]). Logo grafos bipartidos conexos regulares com três o quatro autovalores distintos são caminho regular. Temos o seguinte resultado para grafos bipartidos conexos regulares com cinco autovalores distintos.

Proposição 5.3.5. *Seja G um grafo r -regular bipartido conexo com cinco autovalores distintos. Então G é caminho regular.*

Demonstração. Usando o polinômio de Hoffman do Lema 5.3.2, temos

$$J = \frac{nA(A+rI)(A^2 - \mu^2 I)}{r^2(r^2 - \mu^2)},$$

logo

$$J = \frac{n}{r^2(r^2 - \mu^2)} [A^4 - \mu^2 A^2 + rA^3 - r\mu^2 A],$$

portanto

$$A^4 = \frac{r^2(r^2 - \mu^2)}{n} J - rA^3 + \mu^2 A^2 + r\mu^2 A. \quad (5.2)$$

Sabemos que J e A tem diagonais constantes por definição.

Lembremos que a diagonal i de A^k conta o número de passeios fechados de comprimento k do vértice i a ele mesmo. Logo, A^2 tem diagonal constante, pois G é r -regular, e além disso, A^3 tem diagonal constante igual a zero, pois G é um grafo bipartido.

Mostramos, portanto, que J , A , A^2 e A^3 têm diagonais constantes, logo, pela Equação (5.2), A^4 tem diagonal constante.

Por outro lado, como A tem cinco autovalores distintos, o polinômio mínimo de A é mônico de grau 5, e portanto A^j pode se expressar como combinação linear de I, A, A^2, A^3 e A^4 para todo $j \geq 5$.

Então A^j tem diagonal constante para todo $j \geq 5$. Logo, pelo Lema 5.3.4, G é caminho-regular. \square

Seja G um grafo r -regular. Dizemos que G admite uma **partição regular em metades** com graus (a, b) , tal que $a + b = r$, se pudermos particionar os vértices de G em duas partes de igual tamanho, de forma que todo vértice tem a vizinhos na sua própria parte e b vizinhos na outra parte [70].

Exemplo 5.3.6. [72, p. 156] Os vértices do grafo triangular $T(n)$ podem ser vistos como os $\frac{n(n-1)}{2}$ pares não ordenados de um conjunto de n símbolos $1, 2, \dots, n$, onde dois pares são adjacentes se eles tem um símbolo comum. O grafo $T(n)$ é distância regular e se $n \equiv 1 \pmod{4}$ temos uma partição regular em metades com graus $(n-3, n-1)$, escolhendo para uma das partes os pares $\{i, j\}$, $i \neq j$, com

$$i = 1, \dots, \frac{n-1}{4} \quad e \quad j = 2, \dots, \frac{n-1}{2} + 1,$$

ou

$$i = \frac{n-1}{4} + 1, \dots, \frac{n-1}{2} \quad e \quad j = \frac{n-1}{2} + 2, \dots, \frac{3(n-1)}{4} + 1,$$

ou

$$i = \frac{n-1}{2} + 1, \dots, n-1 \quad e \quad j = \frac{3(n-1)}{4} + 2, \dots, n.$$

A figura 5.7 apresenta o grafo $T(5)$, nesse caso, ele também é o complemento do grafo de Petersen. Os dois conjuntos da partição regular em metades com graus $(2, 4)$ são $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{2, 4\}\}$ e $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{2, 4\}\}$.

Lema 5.3.7. [46, Lema 2.3] Seja G um grafo conexo caminho regular com n vértices e grau r , com autovalores distintos $r, \lambda_2, \dots, \lambda_t$, dos quais um autovalor diferente de r , digamos λ_j , tem multiplicidade 1. Então n é par e G admite uma partição regular em metades com graus $\left(\frac{r + \lambda_j}{2}, \frac{r - \lambda_j}{2}\right)$. Além disso, n é um divisor de

$$\prod_{i \neq j} (r - \lambda_i) + \prod_{i \neq j} (\lambda_j - \lambda_i) \quad e \quad \prod_{i \neq j} (r - \lambda_i) - \prod_{i \neq j} (\lambda_j - \lambda_i).$$

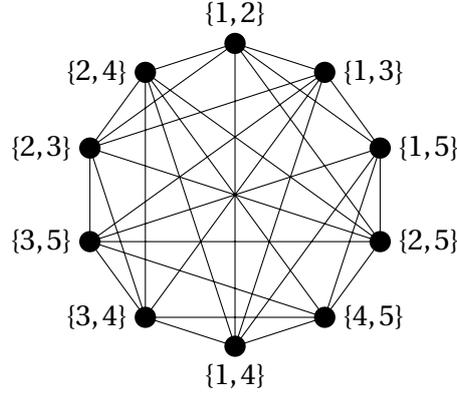


Figura 5.7: Grafo $T(5)$

Usando a prova do Lema (5.3.7), imediatamente é obtido o seguinte resultado.

Corolário 5.3.8. [46, Corolário 2.1] Nas mesmas hipóteses do Lema (5.3.7), o autovetor de λ_j pode ser escrito como $\mathbf{x}_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\mathbf{1}_{\frac{n}{2}}^t, -\mathbf{1}_{\frac{n}{2}}^t \right)^t$, e a partição dos vértices $V(G) = V_1 \cup V_2$ com $V_1 = \{v \in V | \mathbf{x}_j(v) = 1\}$ e $V_2 = \{v \in V | \mathbf{x}_j(v) = -1\}$ é precisamente a partição regular de G em metades com graus descrita no Lema (5.3.7).

Vamos mostrar que não existem grafos conexos regulares bipartidos com 5 autovalores distintos, nos quais pelo menos quatro autovalores são simples.

Proposição 5.3.9. Não existem grafos r -regulares conexos com $2n$ vértices ($n \geq 2$) com espectro $\{[r]^1, [\mu]^1, [0]^{2n-4}, [-\mu]^1, [-r]^1\}$, onde $r > \mu > 0$.

Demonstração. Suponhamos que G é um grafo r -regular conexo com $2n$ vértices e com espectro dado por $\{[r]^1, [\mu]^1, [0]^{2n-4}, [-\mu]^1, [-r]^1\}$.

Pela Proposição (5.3.5) e pelo Corolário (5.3.8), podemos assumir que os autovalores $\mu, -\mu$ e $-r$, respectivamente, tem autovetores ortonormais como segue:

$$\mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2n}} \left(\mathbf{1}_n^t, -\mathbf{1}_n^t \right)^t \quad \mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2n}} \left(\mathbf{1}_{\frac{n}{2}}^t, -\mathbf{1}_{\frac{n}{2}}^t, \mathbf{1}_{\frac{n}{2}}^t, -\mathbf{1}_{\frac{n}{2}}^t \right)^t$$

e

$$\mathbf{x}_4 = \frac{1}{\sqrt{2n}} \left(\mathbf{1}_{\frac{n}{4}}^t, -\mathbf{1}_{\frac{n}{4}}^t, \mathbf{1}_{\frac{n}{4}}^t, -\mathbf{1}_{\frac{n}{4}}^t, \mathbf{1}_{\frac{n}{4}}^t, -\mathbf{1}_{\frac{n}{4}}^t, \mathbf{1}_{\frac{n}{4}}^t, -\mathbf{1}_{\frac{n}{4}}^t \right)^t.$$

Do Teorema 2.1.4 (Teorema de decomposição espectral para matrizes hermitianas), sabemos que se A é uma matriz real simétrica com $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\}$ uma base ortonormal de autovetores com autovalores correspondentes $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, então $A = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^t + \dots + \lambda_s \mathbf{x}_s \mathbf{x}_s^t$.

Então

$$A = \frac{r}{2n} \mathbf{1}_{2n} \mathbf{1}_{2n}^t + \mu \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2^t - \mu \mathbf{x}_3 \mathbf{x}_3^t - r \mathbf{x}_4 \mathbf{x}_4^t,$$

ou equivalentemente,

$$2nA = rJ_{2n} + \mu \begin{bmatrix} J_n & -J_n \\ -J_n & J_n \end{bmatrix} - \mu \begin{bmatrix} J_{\frac{n}{2}} & -J_{\frac{n}{2}} & J_{\frac{n}{2}} & -J_{\frac{n}{2}} \\ -J_{\frac{n}{2}} & J_{\frac{n}{2}} & -J_{\frac{n}{2}} & J_{\frac{n}{2}} \\ J_{\frac{n}{2}} & -J_{\frac{n}{2}} & J_{\frac{n}{2}} & -J_{\frac{n}{2}} \\ -J_{\frac{n}{2}} & J_{\frac{n}{2}} & -J_{\frac{n}{2}} & J_{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} \\ -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} \\ J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} \\ -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} \\ J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} \\ -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} \\ J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} \\ -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} & -J_{\frac{n}{4}} & J_{\frac{n}{4}} \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Por outro lado, considerando o traço de A^2 , obtemos

$$r^2 + \mu^2 = rn. \quad (5.4)$$

Agora, vamos particionar $V(G)$ da mesma forma que particionamos a matriz $\mathbf{x}_4 \mathbf{x}_4^t$ em (5.3), e denotamos por $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7$ e V_8 os correspondentes subconjuntos de vértices, respectivamente. Considerando a matriz de blocos $A(V_1, V_8)$ em (5.3), temos

$$2nA(V_1, V_8) = (r - \mu + \mu + r) J_{\frac{n}{4}}. \quad (5.5)$$

Logo, de (5.5), temos que $2nA(V_1, V_8) = 2rJ_{\frac{n}{4}}$. Assim, $n = r$ e $A(V_1, V_8) = J_{\frac{n}{4}}$, pois $r \neq 0$.

Substituindo $n = r$ em (5.4), obtemos $r^2 + \mu^2 = r^2$, e daí que $\mu^2 = 0$. Isto implica que $\mu = 0$, o qual é uma contradição, pois $\mu > 0$. \square

Um número complexo α é dito *inteiro algébrico* se existe um polinômio mônico $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $p(\alpha) = 0$. Denotamos por Ω o conjunto dos inteiros algébricos. Notemos que como o polinômio característico da matriz de adjacências de um grafo é um polinômio mônico com coeficientes inteiros, os autovalores de um grafo G são inteiros algébricos, isto é,

$$\text{Spec}_A(G) \subset \Omega.$$

É conhecido que Ω é um subanel de \mathbb{C} , e $\Omega \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ ([51]).

Um número positivo $m > 1$ é dito *livre de quadrados* se ele não é divisível por p^2 para qualquer número primo p . Os inteiros algébricos da forma $a + b\sqrt{D}$, onde D é livre de quadrados e $a, b \in \mathbb{Q}$ formam um *corpo quadrático* que é denotado por $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

Usaremos o seguinte resultado sobre corpos quadráticos.

Lema 5.3.10. [51, Proposição 2.34] *Seja $w > 1$ um inteiro livre de quadrados. Então*

$$\Omega \cap \mathbb{Q}(\sqrt{w}) = \begin{cases} \{p + q\sqrt{w} \mid p, q \in \mathbb{Z}\} & \text{se } w \equiv 2, 3 \pmod{4}, \\ \left\{p + \frac{1 + \sqrt{w}}{2}q \mid p, q \in \mathbb{Z}\right\} & \text{se } w \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Notemos que se $w \equiv 0 \pmod{4}$ então w não é livre de quadrados.

Corolário 5.3.11. *Suponhamos que G é um grafo r -regular conexo com $2n$ vértices e com espectro dado por*

$$\text{Spec}(G) = \{[r]^1, [\mu]^k, [0]^{2m}, [-\mu]^k, [-r]^1\},$$

onde $1 + k + m = n$, $k = \frac{r(n-r)}{\mu^2}$, $k, m \geq 1$ e $r > \mu > 0$.

Então se $\mu \in \mathbb{Q}$, temos que $\mu \in \mathbb{Z}$, caso contrário, $\mu = q\sqrt{w}$, onde $q \in \mathbb{Z}$ e $w > 1$ é livre de quadrados.

Demonstração. Consideremos o caso $\mu \in \mathbb{Q}$. Temos que o polinômio mínimo de G é mônico dado por $p_m(G) = x(x^2 - r^2)(x^2 - \mu^2) = x^5 - r^2x^3 - \mu^2x^2 + r^2\mu^2x$. Além disso, $p_m(G) \in \mathbb{Z}[x]$ [70, Lema 2.5]. Então, como $p_m(G)(\mu) = 0$, temos que μ é um inteiro algébrico, isto é, $\mu \in \Omega$.

Portanto, temos que $\mu \in \Omega \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

Agora, consideremos o caso $\mu \notin \mathbb{Q}$. Sabemos que $\mu = \sqrt{\frac{nr - r^2}{k}}$, logo existem $w > 1$ inteiro livre de quadrados e $s \in \mathbb{Q}$ tais que $\mu = s\sqrt{w}$.

Suponhamos $w \equiv 2, 3 \pmod{4}$. Pelo Lema 5.3.10, existem $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que $s\sqrt{w} = p + q\sqrt{w}$. Já que $1, \sqrt{w}$ são linearmente independentes sobre \mathbb{Q} , temos $p = 0$ e $s = q$. Logo, $\mu = q\sqrt{w}$, onde $q \in \mathbb{Z}$.

Suponhamos $w \equiv 1 \pmod{4}$. Pelo Lema 5.3.10, existem $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que $s\sqrt{w} = p + \frac{1 + \sqrt{w}}{2}q$. De novo, usamos que $1, \sqrt{w}$ são linearmente independentes sobre \mathbb{Q} , então $p + \frac{q}{2} = 0$ e $s = \frac{q}{2}$. Logo, $\mu = -p\sqrt{w}$, onde $p \in \mathbb{Z}$. \square

Stevanović apresentou em [66] uma outra família de grafos regulares como no Caso 4.

Exemplo 5.3.12. *Stevanović caracterizou em [66] todos os grafos regulares bipartidos com espectro $\{[r]^1, [\sqrt{r}]^{r(r-1)}, [0]^{2(r-1)}, [-\sqrt{r}]^{r(r-1)}, [-r]^1\}$, $r \geq 2$, como sendo os grafos de incidência de designs transversais 1-resolvíveis $TD(r, r)$, este tipo de grafos são um exemplo de grafos que não correspondem ao grafo de incidência de um PBIBD.*

O menor exemplo dessa família, obtido fazendo $r = 2$, é o design transversal 1-resolvível $TD(2, 2)$, onde $\mathcal{G} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$, $B_1 = \{1, 2\}$, $B_2 = \{2, 3\}$, $B_3 = \{3, 4\}$, $B_4 = \{1, 4\}$, $\mathfrak{B}_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ e $\mathfrak{B}_2 = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$. Podemos observar que ele não é um BIBD e seu grafo de incidência (ilustrado na Figura 5.8) é o ciclo C_8 , com espectro dado por $\{[2]^1, [\sqrt{2}]^2, [0]^2, [-\sqrt{2}]^2, [-2]^1\}$.

5.4 Grafos bipartidos irregulares com cinco autovalores distintos

Para o Caso 4, a seguinte proposição mostra que o grafo de incidência de um BIBD com parâmetros (n, b, r, k, α) , $n \neq b$, tem espectro como nesse caso, isto é, um grafo bipartido com cinco autovalores distintos.

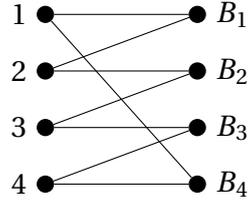


Figura 5.8: Grafo de incidência do design transversal 1-resolvível $TD(2, 2)$

Proposição 5.4.1. [25] *O grafo de incidência de um BIBD com parâmetros (n, b, r, k, α) tem espectro*

$$\left\{ \left[\sqrt{rk} \right]^1, \left[\sqrt{r-\alpha} \right]^{n-1}, [0]^{b-n}, \left[-\sqrt{r-\alpha} \right]^{n-1}, \left[-\sqrt{rk} \right]^1 \right\}. \quad (5.6)$$

Observamos que os grafos da Proposição 5.4.1 são regulares se, e somente se $n = b$ (equivalentemente $r = k$). Esses são os grafos regulares bipartidos com quatro autovalores distintos do Lema 4.4.1. Conseqüentemente, os grafos da Proposição 5.4.1 com $n \neq b$ são irregulares e têm espectro como no Caso 4, isto é, grafos bipartidos com cinco autovalores distintos.

No seguinte exemplo apresentamos um grafo irregular desse tipo.

Exemplo 5.4.2. *O grafo do Exemplo 3.2.7 é o grafo de incidência do design sobre os pontos e planos de $AG(3, 2)$ (um BIBD com parâmetros $(8, 14, 7, 4, 3)$). É um grafo bipartido irregular com espectro $\left\{ \left[2\sqrt{7} \right]^1, [2]^7, [0]^6, [-2]^7, \left[-2\sqrt{7} \right]^1 \right\}$.*

No exemplo a seguir apresentamos uma outra família infinita de grafos com espectro como no Caso 4, contendo grafos regulares e irregulares. Os grafos nessa família são obtidos por uma construção produto de um grafos de incidência de um BIBD com parâmetros (v, b, r, k, α) .

Exemplo 5.4.3. *Segue da Proposição 5.4.1 que o grafo de incidência G de um BIBD com parâmetros (v, b, r, k, α) tem espectro como em (5.6), isto é, é um grafo bipartido que tem quatro ou cinco autovalores distintos, dependendo se $n = b$ ou não, respectivamente. Logo, pela Proposição 5.4.1, para cada $m \geq 2$, $G \otimes J_m$ é um grafo bipartido com cinco autovalores distintos, um deles igual a zero, tal que*

$$\text{Spec}(G \otimes J_m) = \left\{ \left[m\sqrt{rk} \right]^1, \left[m\sqrt{r-\alpha} \right]^{v-1}, [0]^{(b+v)m-2v}, \left[-m\sqrt{r-\alpha} \right]^{v-1}, \left[-m\sqrt{rk} \right]^1 \right\}.$$

Note que, pela Proposição 5.4.1 esses grafos são regulares se e somente se G for regular, ou seja, se e somente se $b = n$. Nesse caso, o espectro é dado por

$$\text{Spec}(G \otimes J_m) = \{[mr]^1, [m\sqrt{r-\alpha}]^{n-1}, [0]^{2n(m-1)}, [-m\sqrt{r-\alpha}]^{n-1}, [-mr]^1\}.$$

6 FAMÍLIAS INFINITAS DE GRAFOS INTEGRAIS COM POUCOS AUTOVALORES DISTINTOS

Neste capítulo, inspirados no fato que muitos dos grafos com poucos autovalores distintos são integrais, estudamos esse aspecto. Em particular, caracterizamos todas as árvores com cinco autovalores distintos que são integrais. Além disso, obtemos algumas famílias infinitas de grafos bipartidos irregulares com cinco autovalores distintos. Finalmente, estudamos uma família de grafos com 7 autovalores distintos, que generaliza algumas das famílias estudadas anteriormente, obtendo condições para sua integralidade.

6.1 Introdução

Desde 1974, quando Harary e Schwenk [41] fizeram a pergunta *Quais grafos têm espectro integral?*, a busca por grafos integrais tem sido realizada intensivamente (ver [6]). Especialmente a busca por grafos integrais diâmetro pequeno tem um destaque importante no estado da arte desta pesquisa, como podemos ver em [16, 17, 42, 54, 56, 75, 76, 77, 78, 79]. Mais recentemente foi provado que existem árvores integrais de diâmetro arbitrário [23, 32].

Neste capítulo tratamos de grafos com cinco autovalores distintos. Nas próximas seções caracterizamos as árvores com 5 autovalores, distintos, que são uma classe de árvores com diâmetro 3 ou diâmetro 4.

Alguns destes resultados aparecem na literatura, mas de forma desorganizada. Fazemos aqui uma descrição homogênea e unificada, culminando com esta caracterização.

Como exemplo, referimos a Watanabe e Schwenk, em [81], que determinaram os autovalores da árvore generalizada de Bethe de diâmetro 4, e provaram que é integral se, e somente se, ℓ e $\ell + k$ são quadrados perfeitos. Revisitamos estes resultados de forma natural com nossas técnicas, que são distintas das apresentadas na literatura.

O caminho P_4 tem espectro $\left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\}$, logo não é integral. Observamos que Braga [12, Teorema 4.3.7] mostrou que o caminho P_4 é a única árvore

com quatro autovalores distintos, e estabeleceu uma caracterização de todas as árvores com cinco autovalores distintos. De fato estas árvores são grafos irregulares com espectro como no Caso 4, quando o espectro é simétrico e um autovalor é zero.

Denotamos por $T(k, \ell, d)$ e chamamos de **double broom** com n vértices, uma árvore construída tomando-se o caminho de vértices $1, 2, \dots, d$, adicionando pendentos $\ell \geq 1$ vértices adjacentes ao vértice 1 e $k \geq 1$ vértices pendentos adjacentes ao vértice d , de tal forma que $n = k + \ell + d$ é o número de vértices da árvore e $d + 1$ é o diâmetro de T (ver Figura 6.1).

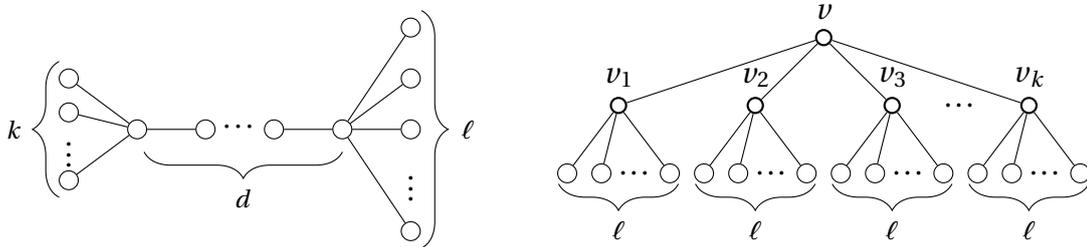


Figura 6.1: *Double broom* $T(k, \ell, d)$ e árvore de Bethe generalizada de diâmetro 4

O seguinte resultado caracteriza todas as árvores com 5 autovalores distintos.

Teorema 6.1.1. [12, Teorema 4.4.11] *Seja T uma árvore com $n \geq 4$ vértices. Então T tem cinco autovalores distintos se e somente se exatamente uma das três situações abaixo ocorre*

- (i) $T \neq P_4$ é uma árvore de diâmetro 3.
- (ii) T é uma *double broom* de diâmetro 4.
- (iii) T é uma árvore generalizada de Bethe de diâmetro 4.

Braga [12] estava interessado em autovalores distintos, não necessariamente integrais. Neste capítulo, vamos usar alguns de seus resultados para obter famílias de grafos integrais com 5 autovalores distintos. Mais precisamente, vamos caracterizar os grafos que são integrais do Teorema 6.1.1.

6.2 Double brooms de diâmetro 3

Uma árvore de diâmetro 3 pode ser vista como um caminho P_2 de dois vértices, em que colocamos $k \geq 1$ pendentes num dos vértices e colocamos $\ell \geq 1$ pendentes no outro vértice de P_2 , conforme ilustra a Figura 6.2. Nesta seção, caracterizamos todas as árvores de diâmetro 3 que são integrais.

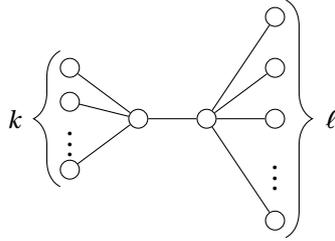


Figura 6.2: Árvore de diâmetro 3

Uma árvore de diâmetro 3 é uma *double broom* $T(k, \ell, 2)$, uma vez que uma árvore de diâmetro 3 tem exatamente 2 vértices não pendentes e que são adjacentes.

Podemos calcular o espectro de qualquer árvore $T = T(k, \ell, 2)$ de diâmetro 3, como mostrado no seguinte resultado. Observamos que T terá somente cinco autovalores distintos se T não é o caminho P_4 (o caminho P_4 é um $T(1, 1, 2)$).

Lema 6.2.1. [12, Corolário 4.4.7] Para uma árvore $T(k, \ell, 2)$ de diâmetro 3, o espectro de T é dado por

$$\left\{ [0]^{k+\ell-2}, \left[\pm \sqrt{\frac{(k+\ell+1) \pm \sqrt{(k-\ell)^2 + 2(\ell+k)+1}}{2}} \right]^1 \right\}. \quad (6.1)$$

O seguinte resultado caracteriza todas as *double brooms* integrais com diâmetro 3 onde $k = \ell$. Estes são grafos bipartidos regulares e com 5 autovalores integrais distintos.

Teorema 6.2.2. Para qualquer inteiro $s > 1$, uma *double broom* $T(k, k, 2)$, com $k = s^2 + s$, é integral com espectro dado por

$$\{ [0]^{2k-2}, \pm(s+1), \pm s \}.$$

Além disso, estas são as únicas árvores integrais da forma $T(k, k, 2)$.

Demonstração. Se $s > 1$, $k = s^2 + s$. Então, pelo Corolário 6.2.1, o espectro de $T(k, k, 2)$ é

$$\left\{ [0]^{2k-2}, \pm \sqrt{\frac{2k+1 \pm \sqrt{4k+1}}{2}} \right\}.$$

Assim,

$$4k+1 = 4s^2 + 4s + 1 = (2s+1)^2$$

e obtemos

$$\frac{2k+1 + \sqrt{4k+1}}{2} = s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2$$

e

$$\frac{2k+1 - \sqrt{4k+1}}{2} = s^2.$$

Reciprocamente, se para algum $k \geq 1$ a *double broom* $T(k, k, 2)$ é integral, então $4k+1$ é um quadrado perfeito. Por isso $4k+1 = (2s+1)^2$, para algum inteiro $s > 1$. Portanto, $k = s^2 + s$. \square

Do espectro de $T(k, \ell, 2)$, também obtemos outras famílias infinitas de *double brooms* integrais de diâmetro 3, com $\ell \neq k$ (famílias infinitas de grafos integrais irregulares bipartidos com cinco autovalores distintos). Primeiro mostramos que qualquer solução positiva de uma certa equação diofantina corresponde a uma $T(k, \ell, 2)$ integral.

Teorema 6.2.3. *Para qualquer inteiro positivo s , seja (a, b) uma solução positiva da equação diofantina*

$$sx^2 - (s+1)y^2 = s(s+1) \tag{6.2}$$

com $a > b > s$. Uma *double broom* $T(k, \ell, 2)$, com $k = a^2 - s - 1$ e $\ell = b^2 + s$, é integral com espectro dado por

$$\{[0]^{k+\ell-2}, \pm a, \pm b\}.$$

Além disso, essas são as únicas *double brooms* integrais da forma $T(k, \ell, 2)$ com $k \neq \ell$.

Demonstração. Como $a > b > s$, temos $a > s+1$ e daí $k = a^2 - s - 1 > s^2 + s \geq 0$ e $\ell = b^2 + s > s^2 + s \geq 0$. Logo o espectro da *double broom* $T(k, \ell, 2)$ está dado por (6.1).

Temos $k - \ell = a^2 - b^2 - (2s+1)$ y $k + \ell = a^2 + b^2 - 1$. Usando o fato que (a, b) é uma solução de (6.2), obtemos

$$\begin{aligned}
(k - \ell)^2 + 2(l + k) + 1 &= (a^2 - b^2)^2 - 4(sa^2 - (s + 1)b^2 - s^2 - s) \\
&= (a^2 - b^2)^2 - 4(s(s + 1) - s^2 - s) \\
&= (a^2 - b^2)^2
\end{aligned}$$

e

$$\frac{k + \ell + 1 + \sqrt{(k - \ell)^2 + 2(l + k) + 1}}{2} = \frac{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)}{2} = a^2$$

e

$$\frac{k + \ell + 1 - \sqrt{(k - \ell)^2 + 2(l + k) + 1}}{2} = \frac{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)}{2} = b^2.$$

Portanto, $T(k, \ell, 2)$ é integral com espectro $\{[0]^{k+\ell-2}, \pm a, \pm b\}$.

Reciprocamente, suponha que a *double broom* $G = T(k, \ell, 2)$ com $k \geq 1$, $\ell \geq 1$ é integral. Pelo Corolário 6.2.1, o espectro de G é $\{[0]^{k+\ell-2}, \pm \lambda_2, \pm \lambda_1\}$, onde $\lambda_1^2 = \frac{k+\ell+1+m}{2}$ e $\lambda_2^2 = \frac{k+\ell+1-m}{2}$, com $m = \sqrt{(k - \ell)^2 + 2(l + k) + 1} \in \mathbb{Z}$. Então $m^2 = (k - \ell)^2 + 2(k - \ell) + 4l + 1$, o qual implica que m e $k - \ell$ têm paridade oposta, assim $m = k - \ell + 2t + 1$ para algum inteiro positivo t . Por isso

$$\lambda_1^2 = \frac{k + \ell + 1 + k - \ell + 2t + 1}{2} = k + t + 1$$

e

$$\lambda_2^2 = \frac{k + \ell + 1 - k + \ell - 2t - 1}{2} = \ell - t.$$

Daí que $k = \lambda_1^2 - t - 1$ e $\ell = \lambda_2^2 + t$.

Resta provar que (λ_1, λ_2) é uma solução positiva da equação diofantina

$$tx^2 - (t + 1)y^2 = t(t + 1).$$

Temos

$$(k - \ell + 2t + 1)^2 = m^2 = (k - \ell)^2 + 2(l + k) + 1.$$

Assim

$$2(k - \ell)(2t + 1) + (2t + 1)^2 = 2(\ell + k) + 1,$$

o qual implica que

$$2(k - \ell)t = \lambda_2^2 - t^2,$$

por isso

$$(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - 2t - 1)t = \lambda_2^2 - t^2,$$

logo

$$t\lambda_1^2 - (t+1)\lambda_2^2 = t(t+1).$$

□

Observação 6.2.4. Observamos que o par $(a, b) = (s+1, s)$ é uma solução de (6.2) que não satisfaz a restrição $a > b > s$, portanto não gera double brooms como no Teorema 6.2.3. No entanto, essa solução, fazendo $k = a^2 - s - 1$, $\ell = b^2 + s$ resulta $k = \ell = s^2 + s$ que é exatamente a caracterização dada pelo Teorema 6.2.2.

Exemplo 6.2.5. Para qualquer inteiro positivo s , podemos verificar que $(4s^2 + 5s + 1, 4s^2 + 3s)$ é uma solução positiva de (6.2) que satisfaz a restrição $a > b > s$. Logo, pelo Teorema 6.2.3 $T(s(s+1)(4s+3)^2, s(s+1)(4s+1)^2, 2)$ é uma double broom integral.

O objetivo agora é obter soluções positivas da equação diofantina (6.2), a qual permite construir double brooms integrais de diâmetro 3. Notamos que a equação de Pell $x^2 - s(s+1)y^2 = 1$ associada à equação (6.2) tem infinitas soluções inteiras positivas, uma vez que s e $s+1$ são primos relativos [50, Proposition 17.5.2]. Utilizando as soluções da equação de Pell, obtemos uma relação de recorrência que gera infinitas soluções positivas da equação (6.2) a partir de qualquer solução particular.

Lema 6.2.6. [13, Lemma 3.5] Para qualquer inteiro positivo s , dada uma solução particular (a, b) da equação diofantina (6.2), os pares ordenados $(a_i, b_i)_{i>0}$ são soluções de (6.2), onde

$$a_i = \frac{(as + b\sqrt{s(s+1)})\lambda_1^i + (as - b\sqrt{s(s+1)})\lambda_2^i}{2s},$$

$$b_i = \frac{(a\sqrt{s(s+1)} + b(s+1))\lambda_1^i - (a\sqrt{s(s+1)} - b(s+1))\lambda_2^i}{2(s+1)},$$

com $\lambda_1 = 2s + 1 + 2\sqrt{s(s+1)}$ e $\lambda_2 = 2s + 1 - 2\sqrt{s(s+1)}$. Em particular, se $a > b \geq 0$, então $a_i > b_i > s$ para todo $i > 0$.

o Teorema 6.2.3 junto com o Lemma 6.2.6 produz uma maneira de construir famílias infinitas de *double brooms* integrais da forma $T(k, \ell, 2)$ (grafos bipartidos irregulares integrais com cinco autovalores distintos.)

Corolário 6.2.7. *Seja s um inteiro positivo e sejam*

$$a_i = \left(\frac{s+1 + \sqrt{s(s+1)}}{2} \right) \left(2s+1 + 2\sqrt{s(s+1)} \right)^i + \left(\frac{s+1 - \sqrt{s(s+1)}}{2} \right) \left(2s+1 - 2\sqrt{s(s+1)} \right)^i,$$

$$b_i = \left(\frac{s + \sqrt{s(s+1)}}{2} \right) \left(2s+1 + 2\sqrt{s(s+1)} \right)^i + \left(\frac{s - \sqrt{s(s+1)}}{2} \right) \left(2s+1 - 2\sqrt{s(s+1)} \right)^i,$$

para qualquer $i > 0$. Então a double broom $T(k_i, \ell_i, 2)$ é integral com espectro dado por

$$\{[0]^{k_i + \ell_i - 2}, \pm a_i, \pm b_i\},$$

onde $k_i = a_i^2 - s - 1$ e $\ell_i = b_i^2 + s$.

Demonstração. O resultado segue da aplicação do Teorema 6.2.3 e do Lema 6.2.6 para a solução particular $(s+1, s)$ da equação (6.2). \square

s	(a_i, b_i)	k_i	ℓ_i	Ordem	Espectro
1	$(a_1, b_1) = (10, 7)$	98	50	150	$\{[0]^{146}, \pm 10, \pm 7\}$
	$(a_2, b_2) = (58, 41)$	3362	1682	5046	$\{[0]^{5042}, \pm 58, \pm 41\}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
2	$(a_1, b_1) = (27, 22)$	726	486	1214	$\{[0]^{1210}, \pm 27, \pm 22\}$
	$(a_2, b_2) = (267, 218)$	71286	47526	118814	$\{[0]^{118810}, \pm 267, \pm 218\}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
3	$(a_1, b_1) = (52, 45)$	2700	2028	4730	$\{[0]^{4726}, \pm 52, \pm 45\}$
	$(a_2, b_2) = (724, 627)$	524172	393132	917306	$\{[0]^{917302}, \pm 724, \pm 627\}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Tabela 6.1: Grafos integrais da família no Corolário 6.2.7.

A Tabela 6.1 apresenta algumas *double brooms* integrais da família dada no Corolário 6.2.7. Observamos que o grafo de menor ordem nesta família tem 150 vértices, portanto é improvável que eles sejam encontrados por meio de uma pesquisa no computador.

O Corolário 6.2.8 dá mais uma família infinita de *double brooms*.

Corolário 6.2.8. *Seja s um inteiro positivo tal que $s+1$ é um quadrado perfeito e seja*

$$a_i = \frac{\sqrt{s+1}}{2} \left(2s+1 + 2\sqrt{s(s+1)} \right)^i + \frac{\sqrt{s+1}}{2} \left(2s+1 - 2\sqrt{s(s+1)} \right)^i,$$

$$b_i = \frac{\sqrt{s}}{2} \left(2s + 1 + 2\sqrt{s(s+1)} \right)^i - \frac{\sqrt{s}}{2} \left(2s + 1 - 2\sqrt{s(s+1)} \right)^i,$$

para qualquer $i > 0$. Então a *double broom* $T(k_i, \ell_i, 2)$ é integral com espectro dado por

$$\left\{ [0]^{k_i + \ell_i - 2}, \pm a_i, \pm b_i \right\},$$

onde $k_i = a_i^2 - s - 1$ e $\ell_i = b_i^2 + s$.

Demonstração. O resultado segue da aplicação do Teorema 6.2.3 e do Lema 6.2.6 para a solução particular $(a, b) = (\sqrt{s+1}, 0)$ da equação (6.2). \square

s	(a_i, b_i)	k_i	ℓ_i	Ordem	Spectro
3	$(a_1, b_1) = (14, 12)$	192	147	341	$\{[0]^{337}, \pm 14, \pm 12\}$
	$(a_2, b_2) = (194, 168)$	37632	28227	65861	$\{[0]^{65857}, \pm 194, \pm 168\}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
8	$(a_1, b_1) = (51, 48)$	2592	2312	4906	$\{[0]^{4902}, \pm 51, \pm 48\}$
	$(a_2, b_2) = (1731, 1632)$	2996352	2663432	5659786	$\{[0]^{5659782}, \pm 1731, \pm 1632\}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
15	$(a_1, b_1) = (124, 120)$	15360	14415	29777	$\{[0]^{29773}, \pm 124, \pm 120\}$
	$(a_2, b_2) = (7684, 7440)$	59043840	55353615	114397457	$\{[0]^{114397453}, \pm 7684, \pm 7440\}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Tabela 6.2: Grafos integrais da família no Corolário 6.2.8.

A Tabela 6.2 apresenta algumas *double brooms* integrais da família dada no Corolário 6.2.8. O grafo de menor ordem nesta família é $T(192, 147, 2)$, que possui 341 vértices.

Mais famílias infinitas de *double brooms* integrais poderiam ser geradas usando outras soluções de (6.2).

Corolário 6.2.9. *Seja $s > 1$ um inteiro positivo tal que s e $2(s+1)$ são quadrados perfeitos e sejam*

$$a_i = \frac{\sqrt{s+1}(\sqrt{2}-1)}{2} \left(2s + 1 + 2\sqrt{s(s+1)} \right)^i + \frac{\sqrt{s+1}(\sqrt{2}+1)}{2} \left(2s + 1 - 2\sqrt{s(s+1)} \right)^i,$$

$$b_i = \frac{\sqrt{s}(\sqrt{2}-1)}{2} \left(2s + 1 + 2\sqrt{s(s+1)} \right)^i - \frac{\sqrt{s}(\sqrt{2}+1)}{2} \left(2s + 1 - 2\sqrt{s(s+1)} \right)^i,$$

para qualquer $i > 0$. Então a double broom $T(k_i, \ell_i, 2)$ é integral com espectro dado por

$$\{[0]^{k_i + \ell_i - 2}, \pm a_i, \pm b_i\},$$

onde $k_i = a_i^2 - s - 1$ e $\ell_i = b_i^2 + s$.

Demonstração. O resultado segue da aplicação do Teorema 6.2.3 e do Lema 6.2.6 para a solução particular $(a, b) = (\sqrt{2(s+1)}, -\sqrt{s})$ da equação (6.2). \square

s	(a_i, b_i)	k_i	ℓ_i	Spectrum
49	(270, 301)	72850	90650	$\{[0]^{163498}, \pm 270, \pm 301\}$
	(56290, 55657)	3168564050	3097701698	$\{[0]^{6266265746}, \pm 56290, \pm 55657\}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
1681	(1566, 1763)	2450674	3109850	$\{[0]^{5560522}, \pm 1566, \pm 1763\}$
	(326482, 325991)	106590494642	106270133762	$\{[0]^{212860628402}, \pm 326482, \pm 325991\}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
57121	(9126, 10277)	83226754	105673850	$\{[0]^{188900602}, \pm 9126, \pm 10277\}$
	(1902602, 1900289)	3619894313282	3611098340642	$\{[0]^{7230992653922}, \pm 1902602, \pm 1900289\}$
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Tabela 6.3: Grafos integrais da família no Corolário 6.2.9.

A Tabela 6.3 apresenta algumas *double brooms* integrais da família dada no Corolário 6.2.9. O grafo de menor ordem nesta família é $T(72850, 90650, 2)$, que possui 163502 vértices.

6.2.1 Relação com Grafos Unicíclicos Integrais

Em [13], Braga et. al. estudam grafos unicíclicos integrais. Em particular são caracterizados os grafos $C_{4,2}(p, q, 0, 0)$ que são integrais. Denota-se por $C_{4,2}(p, q, 0, 0)$ o grafo unicíclico obtido adicionando caminhos pendentes aos vértices de um ciclo C_4 . Mais precisamente, são anexadas p e q cópias do caminho P_2 a dois vértices adjacentes u e v do ciclo, respectivamente, com $p, q \geq 1$, e os demais vértices não possuem caminhos pendentes. A Figura 6.3 ilustra esse grafos. É um fato curioso que as equações Diofantinas que aparecem na seção anterior são exatamente as mesmas que são estudadas pelos autores de [13] na obtenção dos seus resultados.

É natural, portanto, que uma bijeção entre as árvores integrais $T(k, \ell, 2)$ de diâmetro 3 e famílias de grafos bipartidos unicíclicos integrais de diâmetro 3, que é o objetivo desta subseção.

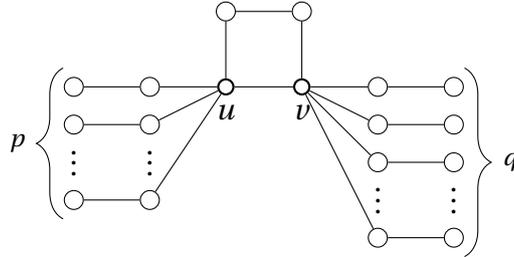


Figura 6.3: $C_{4,2}(p, q, 0, 0)$

O resultado abaixo fornece o espectro de $C_{4,2}(p, q, 0, 0)$.

Lema 6.2.10. [13, Teorema 3.2] O espectro de $C_{4,2}(p, q, 0, 0)$, com $p \geq 1$ e $q \geq 0$, é dado por

$$\left\{ [0]^2, [\pm 1]^{p+q-1}, \pm \sqrt{\frac{(p+q+5 \pm \sqrt{(p-q)^2 + 2(p+q)+9})}{2}} \right\}. \quad (6.3)$$

Inspecionando o espectro de $C_{4,2}(p, q, 0, 0)$, para o caso onde $p = q$, obtém-se uma família infinita de grafos integrais.

Teorema 6.2.11. [13, Teorema 3.3] Para qualquer inteiro $s > 1$, o grafo $C_{4,2}(p, p, 0, 0)$, com $p = s^2 + s - 2$, é integral com espectro dado por

$$\{[0]^2, [\pm 1]^{2p-1}, \pm s, \pm (s+1)\}.$$

Além disso, esses são os únicos grafos integrais da forma $C_{4,2}(p, p, 0, 0)$, onde $p = k - 2$.

Teorema 6.2.12. Seja $p = k - 2$. Para cada árvore double broom integral $T(k, k, 2)$ existe um único grafo unicíclico integral $C_{4,2}(p, p, 0, 0)$.

Demonstração. O resultado segue da aplicação do Teorema 6.2.2 e do Teorema 6.2.11 para $p = k - 2$. □

Qualquer solução positiva da mesma equação diofantina corresponde a um $C_{4,2}(p, q, 0, 0)$ integral.

Teorema 6.2.13. [13, Teorema 3.4] Para qualquer número inteiro positivo s , seja (a, b) uma solução positiva da equação diofantina

$$sx^2 - (s+1)y^2 = s(s+1) \quad (6.4)$$

com $a > b > s$. O grafo $C_{4,2}(p, q, 0, 0)$, com $p = a^2 - s - 3$ e $q = b^2 + s - 2$, é integral com espectro dado por

$$\{[0]^2, [\pm 1]^{p+q-1} \pm a, \pm b\}.$$

Além disso, esses são os únicos grafos integrais da forma $C_{4,2}(p, q, 0, 0)$ com $p \neq q$.

Teorema 6.2.14. Sejam $p = k - 2$ e $q = \ell - 2$. Existe uma correspondência entre cada *double broom* integral $T(k, \ell, 2)$ e um grafo unicíclico integral $C_{4,2}(p, q, 0, 0)$.

Demonstração. O resultado segue aplicando o Teorema 6.2.3 e o Teorema 6.2.13 para $p = k - 2$ e $q = \ell - 2$. □

6.3 Double brooms com diâmetro 4

O Teorema 6.1.1 nos diz que *double brooms* $T(k, \ell, 3)$ de diâmetro 4 são exemplos de uma classe de árvores com exatamente cinco autovalores distintos. A Figura 6.4 ilustra uma $T(k, \ell, 3)$. Nesta seção verificamos que nenhuma delas é integral.

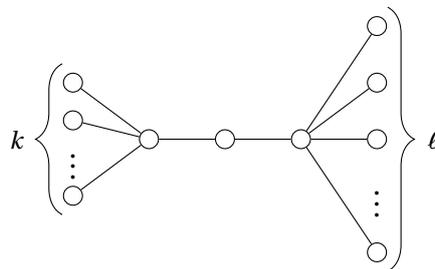


Figura 6.4: *Double broom* $T(k, \ell, 3)$

O resultado abaixo fornece o espectro de uma $T(k, \ell, 3)$.

Lema 6.3.1. [12, Corolário 4.4.9] O espectro da árvore $T(k, \ell, 3)$ é dado por

$$\left\{ [0]^{n-4}, \pm \sqrt{\frac{(k+\ell+2) \pm \sqrt{(k-\ell)^2+4}}{2}} \right\}. \quad (6.5)$$

O resultado abaixo aparece em [17], mas a nossa prova é natural e distinta.

Proposição 6.3.2. A double broom $T(k, \ell, 3)$ não é um grafo integral.

Demonstração. Suponhamos que $T(k, \ell, 3)$ é um grafo integral. Então $(k-\ell)^2+4$ é um quadrado perfeito e podemos escrever $(k-\ell)^2+4 = c^2$, $c \in \mathbb{Z}$, então $4 = c^2 - (k-\ell)^2 = [c - (k-\ell)][c + (k-\ell)]$. Temos as seguintes possibilidades:

- $c - k + \ell = 2$ e $c + k - \ell = 2$ então $\ell = k$.
- $c - k + \ell = -2$ e $c + k - \ell = -2$ então $\ell = k$.
- $c - k + \ell = 4$ e $c + k - \ell = 1$ então $\ell - k = \frac{3}{2}$.
- $c - k + \ell = -4$ e $c + k - \ell = -1$ então $\ell - k = -\frac{3}{2}$.
- $c - k + \ell = 1$ e $c + k - \ell = 4$ então $\ell - k = -\frac{3}{2}$.
- $c - k + \ell = -1$ e $c + k - \ell = -4$ então $\ell - k = \frac{3}{2}$.

Como ℓ e k são inteiros positivos, então $\ell = k$. Por outro lado, se $\ell = k$, assim $(k-\ell)^2+4 = 4$. Portanto $(k-\ell)^2+4$ é um quadrado perfeito se, e somente se $\ell = k$. Logo $\pm \sqrt{\frac{(k+\ell+2) \pm \sqrt{(k-\ell)^2+4}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{2k+2 \pm 2}{2}} = \pm \sqrt{k+1 \pm 1}$, logo $k+2$ e k são quadrados perfeitos, isto é, $k = s^2$ e $k+2 = t^2$ para alguns $s, t \in \mathbb{Z}$ e assim $2 = t^2 - s^2$. Temos as seguintes possibilidades:

- $t - s = 1$ e $t + s = 2$ então $s = \frac{1}{2}$.
- $t - s = -1$ e $t + s = -2$ então $s = -\frac{1}{2}$.
- $t - s = 2$ e $t + s = 1$ então $s = -\frac{1}{2}$.
- $t - s = -2$ e $t + s = -1$ então $s = \frac{1}{2}$.

Concluimos que $T(k, \ell, 3)$ não é um grafo integral. □

6.4 Árvore de Bethe generalizada

Para uma árvore de Bethe generalizada T de diâmetro 4 (ver Figura 6.1 à direita), com $n = k(\ell + 1) + 1$ vértices, onde $k \geq 2$ é o grau da raiz e $\ell + 1$ é o grau de cada vértice do nível 1, com $\ell \geq 1$, temos o seguinte resultado.

Lema 6.4.1. [12, Corolário 4.4.10] *Para uma árvore de Bethe generalizada T de diâmetro 4, o espectro de T é dado por*

$$\left\{ \left[\sqrt{\ell + k} \right]^1, \left[\sqrt{\ell} \right]^{k-1}, [0]^{\ell(k-1)+1}, \left[-\sqrt{\ell} \right]^{k-1}, \left[-\sqrt{\ell + k} \right]^1 \right\}$$

Daí observamos que uma árvore de Bethe generalizada de diâmetro 4 é integral se, e somente se ℓ e $\ell + k$ são quadrados perfeitos. Se ℓ e $\ell + k$ são quadrados perfeitos, então $\ell = s^2$ e $\ell + k = t^2$, respectivamente, para alguns $s, t \in \mathbb{Z}$. Consequentemente $s^2 + k = t^2$, isto é, $k = t^2 - s^2$. Agora o problema é determinar quando podemos escrever k como diferença de dois quadrados.

Proposição 6.4.2. *Seja m um inteiro positivo. Então m é a diferença de dois quadrados se, e somente se $m > 1$ é ímpar ou $m > 4$ é um múltiplo de 4.*

Demonstração. Notemos primeiro que os números ímpares podem ser expressos como a diferença de dois quadrados: se $m = 2w + 1$, $w > 0$, então $2w + 1 = (w + 1)^2 - w^2$.

Múltiplos de 4 também podem ser expressos como a diferença de dois quadrados: se $m = 4w$, $w > 1$, então $4w = (w + 1)^2 - (w - 1)^2$.

Temos mostrado que se m ímpar ou múltiplo de 4, então é diferença de quadrados. Precisamos mostrar a recíproca. Suponha que $m = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. Como $x + y$ e $x - y$ diferem pelo número par $2y$, ambos são pares ou ímpares. Se ambos forem pares, então $m = (x + y)(x - y)$ é um produto de dois números pares, portanto, um múltiplo de 4. Se ambos forem ímpares, então m é um produto de dois números ímpares, então m é ímpar. Portanto m é ímpar ou m é um múltiplo de 4. \square

Teorema 6.4.3. *Uma árvore de Bethe generalizada T de diâmetro 4 é integral se e somente se $\ell = s^2$ para algum $s \in \mathbb{Z} - \{0\}$ e $k = t^2 - s^2$, $\forall t > s$.*

Demonstração. O resultado segue a aplicação da Proposição 6.4.2. \square

Exemplo 6.4.4. *As árvores de Bethe generalizadas integrais de menor ordem têm os seguintes parâmetros. Para $\ell = 1$, os valores de k são elementos do conjunto $\{t^2 - 1 \mid 1 < t \in \mathbb{Z}\}$.*

$\mathbb{Z} = \{3, 8, 15, \dots\}$; Para $\ell = 4$, os valores de k são elementos do conjunto $\{t^2 - 4 \mid 2 < t \in \mathbb{Z}\} = \{5, 12, 21, \dots\}$.

6.5 Família de grafos \mathcal{A}

Uma outra família infinita de grafos bipartidos irregulares como no Caso 4 do Capítulo 5 (5 autovalores distintos, sendo um deles nulo) foi apresentada por De Lima et al [26], que definimos a seguir. Denotemos essa família por \mathcal{A} .

Um grafo da família \mathcal{A} , ilustrado na Figura 6.5, é um grafo de $n = r + r' + q + 2$ vértices construído a partir de dois vértices u e v nos quais podemos colocar r e r' pendentos, respectivamente, e ainda há um conjunto de q vértices que são vizinhos comuns de u e v , de forma que u e v são os únicos vértices de grau maior do que 2.

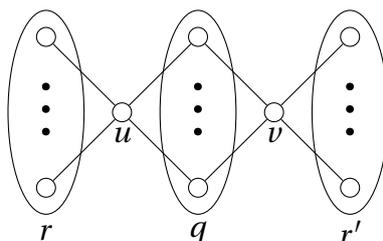


Figura 6.5: Família de grafos \mathcal{A}

Essa família foi estudada por De Lima et. al [26] com o objetivo de caracterizar os grafos integrais que têm exatamente dois vértices de grau maior que 2. Em particular, os autores consideram o parâmetro $q > 1$. Notemos, adicionalmente, que os ciclos de um grafo da família \mathcal{A} são todos de comprimento par, logo os grafos são bipartidos. Nessa seção, estudaremos esta família com o objetivo de caracterizar parâmetros que garantem poucos autovalores inteiros.

De Lima et al [26] mostraram que um grafo de ordem n desta família tem polinômio característico $x^{n-4} (x^4 - (r + r' + 2q)x^2 + rr' + rq + r'q)$ e espectro dado por

$$\left\{ [0]^{n-4}, \pm \sqrt{\frac{r + r' + 2q \pm \sqrt{(r - r')^2 + 4q^2}}{2}} \right\}. \quad (6.6)$$

Vamos primeiro fazer uma extensão e considerar os parâmetros $q = 0$ e $q = 1$.

Corolário 6.5.1. *Seja $q = 0$. Um grafo da família \mathcal{A} é integral se e somente se r e r' são quadrados perfeitos.*

Demonstração. Se tivermos $q = 0$, os autovalores diferentes de zero são dados por $\pm\sqrt{\frac{r+r'\pm(r-r')}{2}}$, isto é, $\pm\sqrt{r}$ e $\pm\sqrt{r'}$, então o grafo é integral se e somente se r e r' são quadrados perfeitos. \square

Observemos que no caso $q = 0$, o grafo (desconexo) é a união das estrelas $K_{1,r}$ e $K_{1,r'}$, então seu espectro é $\{\pm\sqrt{r}, [0]^{n-4}, \pm\sqrt{r'}\}$. Se $r = r'$ o grafo possui 3 autovalores distintos, caso contrário o grafo possui 5 autovalores distintos.

Observação 6.5.2. *Se $q = 1$, um grafo na família \mathcal{A} é uma double broom $T(r, r', 3)$, uma árvore com diâmetro 4, a qual é um grafo bipartido irregular com cinco autovalores distintos, não é integral pela Proposição 6.3.2.*

Teorema 6.5.3. *Sejam $q \geq 2$ e $r = r'$. Um grafo da família \mathcal{A} é integral se e somente se $r = s^2$, para algum $1 < s \in \mathbb{Z}$ e $q = \frac{t^2 - s^2}{2} > 2$ é par, $\forall t \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Sejam $q \geq 2$ e $r = r'$. Sabemos que um grafo da família \mathcal{A} tem quatro autovalores distintos diferentes de zero dados por $\pm\sqrt{r+q} \pm q$, ou seja, $\pm\sqrt{r}$ e $\pm\sqrt{r+2q}$, então o grafo é integral se, e somente se r e $r+2q$ são quadrados perfeitos, então $r = s^2$ e $r+2q = t^2$, respectivamente para alguns $s, t \in \mathbb{Z}$. Consequentemente $s^2 + 2q = t^2$, ou seja, $2q = t^2 - s^2$. O problema agora é determinar quando podemos escrever $2q$ como a diferença de dois quadrados.

Pela Proposição 6.4.2, $2q$ é a diferença de dois quadrados se e somente se $2q > 1$ for ímpar (o que é impossível) ou $2q > 4$ for um múltiplo de 4, então $2q$ será a diferença de dois quadrados se e somente se $q = (t^2 - s^2)/2 > 2$ for par. \square

Exemplo 6.5.4. *Os grafos integrais da família \mathcal{A} com menor ordem e $r = r'$ são os seguintes. Para $r = r' = 1$, daí q pode ser $4 = (3^2 - 1^2)/2, 12 = (5^2 - 1^2)/2, \dots$. Se $r = r' = 2^2$ daí $q = 6 = (4^2 - 2^2)/2, 32 = (6^2 - 2^2)/2, \dots$*

Observação 6.5.5. *O Teorema 6.5.3, em particular, implica que não existem grafos integrais nesta família com $q = 2$. Ou seja, grafos cujo único ciclo é um quadrado e com número de pendentes iguais em vértices não adjacentes, não podem ser integrais.*

Para $r \neq r'$ não obtivemos uma descrição completa dos parâmetros que definem grafos integrais da família \mathcal{A} , mas claramente, temos a seguinte proposição.

Proposição 6.5.6. *Sejam r, r', q inteiros positivos que definem um grafo da família \mathcal{A} . G é integral se e somente se existem inteiros a, b, c que satisfazem*

- $a^2 = (r - r') + 4q^2$;
- $2b^2 = r + r' + 2q + a$;
- $2c^2 = r + r' + 2q - a$.

Exemplo 6.5.7. *Não é difícil calcular os primeiros valores que satisfazem a proposição.*

(r', r, q)	Spectro	(r', r, q)	Spectro
(3, 6, 2)	$[\pm 3, \pm 2, 0]$	(61, 76, 4)	$[\pm 9, \pm 8, 0]$
(12, 28, 6)	$[\pm 6, \pm 4, 0]$	(34, 39, 6)	$[\pm 7, \pm 6, 0]$
(46, 55, 6)	$[\pm 8, \pm 7, 0]$	(9, 72, 8)	$[\pm 9, \pm 4, 0]$

6.6 Uma família de grafos bipartidos integrais com sete autovalores distintos

Nesta seção, estudamos uma família de grafos que engloba as double brooms de diâmetros 3, que caracterizamos na Seção 6.2.

Em [80] Wang define uma família particular de grafos bipartidos, cujo polinômio característico é obtido usando ferramentas da teoria de matrizes. O grafo $K_{p,q} \equiv K_{q,r}$ com $p + 2q + r$ vértices é obtido adicionando as arestas $\{v_i w_i | i = 1, 2, \dots, q\}$ a os dois grafos disjuntos $K_{p,q}$ com conjuntos de vértices $V_1 = \{u_i | i = 1, 2, \dots, p\}$, $V_2 = \{v_i | i = 1, 2, \dots, q\}$ e $K_{q,r}$ com conjuntos de vértices $U_1 = \{w_i | i = 1, 2, \dots, q\}$, $U_2 = \{z_i | i = 1, 2, \dots, r\}$, respectivamente. A Figura 6.6 ilustra o grafo $K_{p,q} \equiv K_{q,r}$.

Pode-se calcular o espectro de qualquer grafo $K_{p,q} \equiv K_{q,r}$, como mostrado no seguinte resultado. O grafo terá sete autovalores distintos se $q \neq 1$.

Lema 6.6.1. [80, Teorema 3] *O espectro do grafo $K_{p,q} \equiv K_{q,r}$ é dado por*

$$\left\{ [0]^{p+r-2}, [\pm 1]^{q-1}, \left[\pm \sqrt{\frac{(pq + qr + 1) \pm \sqrt{(pq + qr + 1)^2 - 4pq^2r}}{2}} \right]^1 \right\}, \quad (6.7)$$

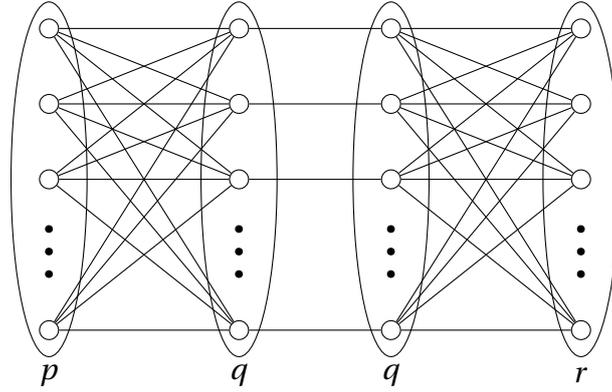


Figura 6.6: Família de grafos $K_{p,q} \equiv K_{q,r}$

Observação 6.6.2. *Notemos que se $q = 1$, o grafo $K_{p,1} \equiv K_{1,r}$ é uma double broom $T(k, \ell, 2)$ de diâmetro 3. Este grafo tem 5 autovalores distintos e sua integralidade foi estudada neste capítulo.*

Naturalmente que para determinarmos quando os grafos $K_{p,q} \equiv K_{q,r}$ são integrais, basta verificar quando as soluções da equação $x^4 - (pq + qr + 1)x^2 + pq^2r$ são inteiras. Isso pode ser feito de diferentes maneiras, e cada maneira pode gerar famílias distintas de grafos integrais. Wang [80] obtém algumas condições para que estes grafos sejam integrais. Em particular ele estuda o caso de grafos regulares integrais. O seguinte resultado caracteriza todos os grafos $K_{p,q} \equiv K_{q,r}$ integrais onde $p = r$. Cabe ressaltar que os grafos obtidos são irregulares. Portanto obtemos famílias de grafos integrais bipartidos mas não regulares.

Teorema 6.6.3. *Para qualquer inteiro $s > 1$, um grafo $K_{p,q} \equiv K_{q,r}$, com $pq = s^2 + s$, é integral com espectro dado por*

$$\{[0]^{2p-2}, [\pm 1]^{q-1}, \pm(s+1), \pm s\}.$$

Além disso, estes são os únicos grafos integrais da forma $K_{p,q} \equiv K_{q,p}$.

Demonstração. Se $s > 1$, $pq = s^2 + s$. Então, pelo Lema 6.6.1, o espectro de $K_{p,q} \equiv K_{q,p}$ é

$$\left\{ [0]^{2p-2}, [\pm 1]^{q-1}, \pm \sqrt{\frac{2pq + 1 \pm \sqrt{4pq + 1}}{2}} \right\}.$$

Assim,

$$4pq + 1 = 4s^2 + 4s + 1 = (2s + 1)^2$$

e obtemos

$$\frac{2pq + 1 + \sqrt{4pq + 1}}{2} = s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2$$

e

$$\frac{2pq + 1 - \sqrt{4pq + 1}}{2} = s^2.$$

Reciprocamente, se para algum $p \geq 1$ o grafo $K_{p,q} \equiv K_{q,r}$ é integral, então $4pq + 1$ é um quadrado perfeito. Por isso $4pq + 1 = (2s + 1)^2$, para algum inteiro $s > 1$. Portanto, $pq = s^2 + s$. \square

Do espectro de $K_{p,q} \equiv K_{q,r}$, também obtemos outras famílias infinitas de grafos irregulares bipartidos integrais com sete autovalores distintos, com $p \neq q$. Primeiro mostramos que qualquer solução positiva de uma certa equação diofantina corresponde a um $K_{p,q} \equiv K_{q,r}$ integral.

Teorema 6.6.4. *Para qualquer inteiro positivo s , seja (a, b) uma solução positiva da equação diofantina*

$$sx^2 - (s + 1)y^2 = s(s + 1) \tag{6.8}$$

com $a > b > s$. Um grafo $K_{p,q} \equiv K_{q,r}$, com $pq = a^2 - s - 1$ e $qr = b^2 + s$, é integral com espectro dado por

$$\{[0]^{p+r-2}, [\pm 1]^{q-1}, \pm a, \pm b\}.$$

Além disso, esses são os únicos grafos integrais da forma $K_{p,q} \equiv K_{q,r}$ com $p \neq q$.

Primeiro notemos que $(s + 1, s)$ é uma solução positiva da equação (6.8), que não satisfaz a restrição $a > b > s$. De fato esta solução pode ser usada para gerar os grafos $K_{p,q} \equiv K_{q,r}$ integrais do Teorema 6.6.4. Também podemos verificar que o par $(4s^2 + 5s + 1, 4s^2 + 3s)$ é uma solução positiva de (6.8) que satisfaz a restrição $a > b > s$.

Demonstração. Como $a > b > s$, temos $a > s + 1$ e daí $pq = a^2 - s - 1 > s^2 + s \geq 0$ e $qr = b^2 + s > s^2 + s \geq 0$. Logo o espectro do grafo $K_{p,q} \equiv K_{q,r}$ está dado por (6.7).

Temos $pq - qr = a^2 - b^2 - (2s + 1)$ y $pq + qr = a^2 + b^2 - 1$. Usando o fato que (a, b) é uma solução de (6.8), obtemos

$$\begin{aligned}
(pq - qr)^2 + 2(pq + qr) + 1 &= (a^2 - b^2)^2 - 4(sa^2 - (s+1)b^2 - s^2 - s) \\
&= (a^2 - b^2)^2 - 4(s(s+1) - s^2 - s) \\
&= (a^2 - b^2)^2
\end{aligned}$$

e

$$\frac{pq + qr + 1 + \sqrt{(pq - qr)^2 + 2(pq + qr) + 1}}{2} = \frac{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)}{2} = a^2$$

e

$$\frac{pq + qr + \ell + 1 - \sqrt{(pq - qr)^2 + 2(pq + qr) + 1}}{2} = \frac{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)}{2} = b^2.$$

Portanto, $K_{p,q} \equiv K_{q,r}$ é integral com espectro $\{[0]^{p+r-2}, [\pm 1]^{q-1}, \pm a, \pm b\}$.

Reciprocamente, suponha que o grafo $G = K_{p,q} \equiv K_{q,r}$ com $pq \geq 1$, $qr \geq 1$ é integral. Pelo Corolário 6.6.1, o espectro de G é $\{[0]^{p+r-2}, [\pm 1]^{q-1}, \pm \lambda_2, \pm \lambda_1\}$, onde $\lambda_1^2 = \frac{pq+qr+1+m}{2}$ e $\lambda_2^2 = \frac{pq+qr+1-m}{2}$, com $m = \sqrt{(pq - qr)^2 + 2(pq + qr) + 1} \in \mathbb{Z}$. Então $m^2 = (pq - qr)^2 + 2(pq - qr) + 4pr + 1$, o qual implica que m e $pq - qr$ têm paridade oposta, assim $m = pq - qr + 2t + 1$ para algum inteiro positivo t . Por isso

$$\lambda_1^2 = \frac{pq + qr + 1 + pq - qr + 2t + 1}{2} = pq + t + 1$$

e

$$\lambda_2^2 = \frac{pq + qr + 1 - pq + qr - 2t - 1}{2} = qr - t.$$

Daí que $pq = \lambda_1^2 - t - 1$ e $qr = \lambda_2^2 + t$.

Resta provar que (λ_1, λ_2) é uma solução positiva da equação diofantina

$$tx^2 - (t+1)y^2 = t(t+1).$$

Temos

$$(pq - qr + 2t + 1)^2 = m^2 = (pq - qr)^2 + 2(pq + qr) + 1.$$

Assim

$$2(pq - qr)(2t + 1) + (2t + 1)^2 = 2(pq + qr) + 1,$$

o qual implica que

$$(pq - qr)t = \lambda_2^2 - t^2,$$

por isso

$$(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - 2t - 1)t = \lambda_2^2 - t^2,$$

logo

$$t\lambda_1^2 - (t+1)\lambda_2^2 = t(t+1).$$

□

7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo são apresentadas as conclusões do presente trabalho e as contribuições para a continuidade e sugestões nesta área de estudo.

7.1 Conclusões

Apresentamos nossa contribuição para dois problemas propostos por Nikiforov em [60], que estão relacionados à caracterização da igualdade em cotas para energia de grafos e à norma do traço para matrizes.

Problema 1. [60, Problema 2.13] *Dar uma caracterização construtiva de todos os grafos G de modo que os autovalores não nulos de G diferentes do índice tenham o mesmo valor absoluto.*

Problema 2. [60, Problema 2.40] *Dar uma caracterização construtiva de todos os grafos conexos irregulares G de ordem n com $|\lambda_2(G)| = \dots = |\lambda_n(G)|$.*

Consideramos as famílias \mathcal{G}_n e \mathcal{H}_n de grafos não vazios de ordem n que atendem as propriedades exigidas nos Problemas 1 e 2 respectivamente. Os grafos dessas famílias têm no máximo dois autovalores não nulos distintos em valor absoluto.

Obtivemos uma caracterização construtiva de todos os grafos regulares conexos em \mathcal{G}_n com três autovalores distintos e também daqueles com quatro autovalores distintos nos quais o índice não é o único autovalor simples. Além disso, apresentamos várias famílias infinitas de grafos conexos em \mathcal{G}_n com quatro autovalores distintos, em que o índice é o único autovalor simples.

No caso de grafos irregulares conexos em \mathcal{G}_n , demos uma caracterização construtiva quando eles têm três autovalores distintos, onde um deles é igual a 0, e também quando eles têm três autovalores não nulos distintos, em que um deles é igual a 2. Todos os grafos irregulares em \mathcal{G}_n com três autovalores não nulos distintos, que são precisamente os grafos em \mathcal{H}_n , foram caracterizados como grafos multiplicativos integrais. Embora essa caracterização não seja construtiva, apresentamos duas famílias infinitas desses grafos que incluem aquelas em que 2 é um autovalor. Além disso, mediante uma construção usando o produto de Kronecker com grafos dessas famílias, geramos duas

novas famílias infinitas de grafos irregulares conexos em \mathcal{G}_n com quatro autovalores distintos.

Com o objetivo de aprofundar no estudo de grafos com poucos autovalores distintos, motivados pelo fato que os grafos em \mathcal{G}_n pertencem à família \mathcal{F}_n de grafos de ordem n que possuem no máximo dois autovalores não nulos distintos em valor absoluto, estendemos os resultados do capítulo anterior, e apesar da impossibilidade de caracterizar os grafos em \mathcal{F}_n , avançamos com o estudo de grafos bipartidos regulares com 4 autovalores distintos e grafos bipartidos com 5 autovalores distintos, obtendo uma caracterização para o caso de grafos distância regular, assim como o resultado que garante a não existência de grafos conexos regulares bipartidos com 5 autovalores distintos, nos quais pelo menos quatro autovalores são simples, finalmente para grafos irregulares bipartidos com 5 autovalores distintos mostramos uma forma de gerar novos grafos desse tipo usando grafos já conhecidos.

No relativo a grafos integrais com poucos autovalores distintos, caracterizamos todas as árvores com cinco autovalores distintos que são integrais, além disso, obtivemos algumas famílias infinitas de grafos bipartidos irregulares com cinco autovalores distintos. Também, estudamos uma família de grafos com 7 autovalores distintos, que generalizada algumas das famílias que foram estudadas anteriormente, obtendo condições para sua integralidade. Finalmente mostramos uma relação entre uma as árvores integrais de diâmetro 3 e famílias de grafos bipartidos unicíclicos integrais de diâmetro 3.

7.2 Trabalhos futuros

Na sequência do presente trabalho surgiram alguns aspectos que se revelaram interessantes para fazer uma abordagem mais detalhada. A continuação são referidos aqueles que poderão vir a ser objeto de futuros estudos, como por exemplo:

- Para uma caracterização completa dos grafos que têm espectro como no Caso 3, resta considerar grafos irregulares que são grafos de incidência de um design multiplicativo uniforme não simétrico.
- Verificar se existem grafos irregulares do Caso 3 que não são grafos de incidência de um design multiplicativo uniforme não simétrico.

- Também é importante caracterizar os grafos desconexos de $\mathcal{F}_n \setminus \mathcal{G}_n$.
- Pode-se verificar se existem outros grafos com espectro como no Caso 4 que não pertencem às famílias apresentadas ou que sejam obtidos mediante uma construção usando produto de grafos com os grafos dessas famílias.
- Para os grafos regulares com espectro como no Caso 4, pode-se também estudar grafos de incidência de um design que não seja um PBIBD.
- Para os grafos irregulares com espectro como no Caso 4, pode-se estudar grafos com 5 autovalores distintos que não sejam grafos de incidência de BIBDs não simétricos.
- Dar uma caracterização completa dos grafos integrais na família \mathcal{A} .
- Estudar mais a profundidade os grafos integrais com espectro como nos Casos 3 e 4.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ABREU, N. Teoria Espectral dos Grafos: um Híbrido entre a Álgebra linear e a Matemática Discreta e Combinatória com Origens na Química Quântica. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, SBMAC 6* (2005).
- [2] ABREU, N., CARDOSO, D. M., FRANÇA, F. A. M., AND VINAGRE, C. T. M. Some new aspects of main eigenvalues of graphs. *Comput. Appl. Math.* 39, 1 (2020), Paper No. 12, 14.
- [3] ABREU, N., DEL-VECCHIO, R. R., VINAGRE, C. T. M., AND TREVISAN, V. Teoria espectral de grafos - uma introdução. *III Colóquio de Matemática Aplicada da Região Sul, Universidade Federal de Santa Catarina* (2014).
- [4] AHRENS, R. W., AND SZEKERES, G. On a combinatorial generalization of 27 lines associated with a cubic surface. *J. Austral. Math. Soc.* 10 (1969), 485–492.
- [5] ARÉVALO, N., BRAGA, R. O., AND RODRIGUES, V. M. Graphs with few distinct eigenvalues and extremal energy. *Linear Algebra and its Applications* 620 (2021), 147–167.
- [6] BALIŃSKA, K., CVETKOVIĆ, D., RADOSAVLJEVIĆ, Z., SIMIĆ, S., AND STEVANOVIĆ, D. A survey on integral graphs. *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.* 13 (2002), 42–65 (2003).
- [7] BAPAT, R. B. *Graphs and matrices*, second ed. Universitext. Springer, London; Hindustan Book Agency, New Delhi, 2014.
- [8] BEINEKE, L. W., AND WILSON, R. J., Eds. *Topics in algebraic graph theory*, vol. 102 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [9] BOSE, R. Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs. *Pacific Journal of Mathematics* 13, 2 (1963), 389 – 419. Cited by: 338; All Open Access, Bronze Open Access, Green Open Access.
- [10] BOSE, R. C., AND NAIR, K. R. Partially balanced incomplete block designs. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics (1933-1960)* 4, 3 (1939), 337–372.

- [11] BOX, G. E. P., HUNTER, W. G., AND HUNTER, J. S. *Statistics for experimenters*. John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane, 1978. An introduction to design, data analysis, and model building, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.
- [12] BRAGA, R. O. *Localização de Autovalores de Árvores e de Grafos Unicíclicos*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 12 2015.
- [13] BRAGA, R. O., DEL-VECCHIO, R. R., AND RODRIGUES, V. M. Integral unicyclic graphs. *Linear Algebra Appl.* 614 (2021), 281–300.
- [14] BRIDGES, W. G., AND MENA, R. A. Multiplicative designs. II. Uniform normal and related structures. *J. Combin. Theory Ser. A* 27, 3 (1979), 269–281.
- [15] BRIDGES, W. G., AND MENA, R. A. Multiplicative cones—a family of three eigenvalue graphs. *Aequationes Math.* 22, 2-3 (1981), 208–214.
- [16] BROUWER, A. Small integral trees. *The Electronic Journal of Combinatorics [electronic only]* 15 (01 2008).
- [17] BROUWER, A., DEL VECCHIO, R., JACOBS, D., TREVISAN, V., AND VINAGRE, C. Integral trees homeomorphic to a double star. *Bull. Inst. Comb. Appl.* 61 (01 2011), 77–80.
- [18] BROUWER, A. E., AND HAEMERS, W. H. *Spectra of graphs*. Universitext. Springer, New York, 2012.
- [19] BUSSEMAKER, F. C., CVETKOVIĆ, D. M., AND SEIDEL, J. J. Graphs related to exceptional root systems. In *Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976), Vol. I* (1978), vol. 18 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, North-Holland, Amsterdam-New York, pp. 185–191.
- [20] CAPOROSSI, G., CVETKOVIĆ, D., GUTMAN, I., AND HANSEN, P. Variable Neighborhood Search for Extremal Graphs. 2. Finding Graphs with Extremal Energy. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences* 39, 6 (1999), 984–996.
- [21] COCHRAN, W. G., AND COX, G. M. *Experimental designs*. John Wiley & Sons, Inc., New York; Chapman & Hall, Ltd., London., 1957. 2nd ed.

- [22] COLBOURN, C. J., AND DINITZ, J. H., Eds. *Handbook of combinatorial designs*, second ed. Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007.
- [23] CSIKVARI, P. Integral trees of arbitrarily large diameters. *Journal of Algebraic Combinatorics* 32 (11 2010), 371–377.
- [24] CVETKOVIĆ, D. M. Graphs and their spectra. *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, 354–356 (1971), 1–50.
- [25] CVETKOVIĆ, D. M., DOOB, M., AND SACHS, H. *Spectra of graphs*, vol. 87 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1980. Theory and application.
- [26] DE LIMA, L. S., MOHAMMADIAN, A., AND OLIVEIRA, C. S. On integral graphs with at most two vertices of degree larger than two. *Linear Algebra Appl.* 584 (2020), 164–184.
- [27] DIESTEL, R. *Graph theory*, vol. 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2006.
- [28] DOOB, M. Graphs with a small number of distinct eigenvalues. *Ann. New York Acad. Sci.* 175 (1970), 104–110.
- [29] ESSER, F., AND HARARY, F. On the spectrum of a complete multipartite graph. *European J. Combin.* 1, 3 (1980), 211–218.
- [30] FANO, G. Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni. *Giornale di Matematiche*, 30 (1891), 106–132.
- [31] FISHER, R. *The Design of Experiments*. The Design of Experiments. Oliver and Boyd, 1935.
- [32] GHORBANI, E., MOHAMMADIAN, A., AND TAYFEH-REZAIE, B. Integral trees of odd diameters. *Journal of Graph Theory* 70, 3 (2012), 332–338.
- [33] GODSIL, C. *Algebraic Combinatorics*. Chapman Hall/CRC Mathematics Series. Taylor & Francis, 1993.

- [34] GODSIL, C., AND MCKAY, B. Feasibility conditions for the existence of walk-regular graphs. *Linear Algebra and its Applications* 30 (1980), 51–61.
- [35] GODSIL, C., AND ROYLE, G. *Algebraic graph theory*, vol. 207 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [36] GUTMAN, I. Acyclic systems with extremal Hückel π -electron energy. *Theoretica chimica acta* 45 (1977), 79–87.
- [37] GUTMAN, I. The energy of a graph. *Ber. Math.-Statist. Sect. Forsch. Graz*, 100-105 (1978), Ber. No. 103, 22. 10. Steiermärkisches Mathematisches Symposium (Stift Rein, Graz, 1978).
- [38] GUTMAN, I. The energy of a graph: Old and new results. In *Algebraic Combinatorics and Applications* (Berlin, Heidelberg, 2001), A. Betten, A. Kohnert, R. Laue, and A. Wassermann, Eds., Springer Berlin Heidelberg, pp. 196–211.
- [39] GUTMAN, I., AND POLANSKY, O. E. *Mathematical concepts in organic chemistry*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [40] HAEMERS, W. H. Strongly regular graphs with maximal energy. *Linear Algebra Appl.* 429, 11-12 (2008), 2719–2723.
- [41] HARARY, F., AND SCHWENK, A. J. Which graphs have integral spectra? In *Graphs and Combinatorics* (Berlin, Heidelberg, 1974), R. A. Bari and F. Harary, Eds., Springer Berlin Heidelberg, pp. 45–51.
- [42] HIC, P., AND POKORNÝ, M. There are integral trees of diameter 7. *Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat* 18 (01 2006), 59–63.
- [43] HOFFMAN, A. J. On the polynomial of a graph. *The American Mathematical Monthly* 70, 1 (1963), 30–36.
- [44] HORN, R. A., AND JOHNSON, C. R. *Matrix Analysis*, second ed. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [45] HOU, Y. Unicyclic graphs with minimal energy. *J. Math. Chem.* 29, 3 (2001), 163–168.
- [46] HUANG, X., AND HUANG, Q. On regular graphs with four distinct eigenvalues. *Linear Algebra Appl.* 512 (2017), 219–233.

- [47] HUO, B., JI, S., LI, X., AND SHI, Y. Solution to a conjecture on the maximal energy of bipartite bicyclic graphs. *Linear Algebra Appl.* 435, 4 (2011), 804–810.
- [48] HUO, B., LI, X., AND SHI, Y. Complete solution to a conjecture on the maximal energy of unicyclic graphs. *European J. Combin.* 32, 5 (2011), 662–673.
- [49] IONIN, Y. J., AND SHRIKHANDE, M. S. *Combinatorics of symmetric designs*, vol. 5 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [50] IRELAND, K., AND ROSEN, M. *A classical introduction to modern number theory*, second ed., vol. 84 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [51] JARVIS, F. *Algebraic Number Theory*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer International Publishing, 2014.
- [52] KOOLEN, J., MOULTON, V., AND GUTMAN, I. Improving the McClelland inequality for total π -electron energy. *Chemical Physics Letters* 320 (04 2000), 213–216.
- [53] KOOLEN, J. H., AND MOULTON, V. Maximal energy graphs. *Adv. in Appl. Math.* 26, 1 (2001), 47–52.
- [54] LI, X., AND LIN, G. On the problem of integral trees. *Kexue Tongbao* 32, 11 (1987), 813–816.
- [55] LI, X., SHI, Y., AND GUTMAN, I. *Graph energy*. Springer, New York, 2012.
- [56] MACDOUGALL, J., AND MOHR, S. Integral trees of diameter 4. *AKCE Journal of Graphs and Combinatorics* 7 (01 2010), 171–188.
- [57] MCCLELLAND, B. J. Properties of the Latent Roots of a Matrix: The Estimation of π -Electron Energies. *J. Chem. Phys.* 54, 2 (Jan. 1971), 640–643.
- [58] MUZYCHUK, M., AND KLIN, M. On graphs with three eigenvalues. *Discrete Math.* 189, 1-3 (1998), 191–207.
- [59] NIKIFOROV, V. The energy of graphs and matrices. *J. Math. Anal. Appl.* 326, 2 (2007), 1472–1475.
- [60] NIKIFOROV, V. Beyond graph energy: norms of graphs and matrices. *Linear Algebra Appl.* 506 (2016), 82–138.

- [61] RYSER, H. J. Symmetric designs and related configurations. *J. Combinatorial Theory Ser. A* 12 (1972), 98–111.
- [62] SEIDEL, J. *Strongly regular graphs*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1979, p. 157–180.
- [63] SHRIKHANDE, S. S. The uniqueness of the L_2 association scheme. *Ann. Math. Statist.* 30 (1959), 781–798.
- [64] SHRIKHANDE, S. S., AND BHAGWANDAS. Duals of incomplete block designs. *J. Indian Statist. Assoc.* 3 (1965), 30–37.
- [65] STANIĆ, Z. *Regular Graphs*, vol. 4 of *De Gruyter Series in Discrete Mathematics and Applications*. De Gruyter, Berlin, 2017. A spectral approach.
- [66] STEVANOVIĆ, D. Two spectral characterizations of regular, bipartite graphs with five eigenvalues. *Linear Algebra Appl.* 435, 10 (2011), 2612–2625.
- [67] STINSON, D. R. *Combinatorial designs*. Springer-Verlag, New York, 2004. Constructions and analysis, With a foreword by Charles J. Colbourn.
- [68] TARRY, G. Le problème des 36 officiers. *C.R. Assoc. France Av. Sci.* 29, Part 2 (1900), 170–203.
- [69] VAN DAM, E., AND SPENCE, E. Combinatorial designs with two singular values ii. partial geometric designs. *Linear Algebra and its Applications* 396 (2005), 303–316.
- [70] VAN DAM, E. R. Regular graphs with four eigenvalues. *Linear Algebra Appl.* 226/228 (1995), 139–162.
- [71] VAN DAM, E. R. Nonregular graphs with three eigenvalues. *J. Combin. Theory Ser. B* 73, 2 (1998), 101–118.
- [72] VAN DAM, E. R., AND SPENCE, E. Small regular graphs with four eigenvalues. *Discrete Math.* 189, 1-3 (1998), 233–257.
- [73] VAN DAM, E. R., AND SPENCE, E. Combinatorial designs with two singular values. I. Uniform multiplicative designs. *J. Combin. Theory Ser. A* 107, 1 (2004), 127–142.
- [74] WAGNER, S., AND WANG, H. *Introduction to chemical graph theory*. Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL, 2019.

- [75] WANG, L. *Integral trees and integral graphs*. Phd thesis, University of Twente, Netherlands, June 2005.
- [76] WANG, L., AND LI, X. Some new classes of integral trees with diameters 4 and 6. *Australasian Journal of Combinatorics* 21 (2000), 237–244.
- [77] WANG, L., LI, X., AND YAO, X. Integral trees with diameters 4, 6 and 8. *Australasian Journal of Combinatorics* 25 (2002), 29–44.
- [78] WANG, L., LI, X., AND ZHANG, S. Families of integral trees with diameters 4, 6, and 8. *Discrete applied mathematics* 136, 2-3 (2004), 349–362.
- [79] WANG, L., AND LIU, X. New classes of integral trees of diameter 4. *Ars Combinatoria* 96 (2010), 203–220.
- [80] WANG, L., AND SUN, H. Three classes of bipartite integral graphs. In *Discrete Geometry, Combinatorics and Graph Theory* (Berlin, Heidelberg, 2007), J. Akiyama, W. Y. C. Chen, M. Kano, X. Li, and Q. Yu, Eds., Springer Berlin Heidelberg, pp. 206–215.
- [81] WATANABE, M., AND SCHWENK, A. Integral starlike trees. *Journal of the Australian Mathematical Society* 28 (08 1979), 120 – 128.

ÍNDICE REMISSIVO

- arestas, 11
- arranjo de interecção, 70
- autovalor, 5
- autovetor associado ao autovalor λ , 5

- blocos, 27

- componente conexa, 14
- comprimento, 12

- design, 27
 - 2-design, 35
 - BIBD, 35
 - BIBD simétrico, 36
 - multiplicativo, 39
 - PBIBD com duas classes
 - associadas, 71
 - simples, 27
 - transversal 1-resolvível, 41
 - uniforme, 39
- Desigualdade das médias potenciais (MP), 10
- Desigualdade de Fsher, 36
- diagonalizável, 6
- distância, 12
- diâmetro, 13

- emparelhamento, 19
 - máximo, 19
 - perfeito, 19
- espectro, 5, 20
- extremidades, 11

- grafo, 11
 - r -regular, 13
 - r -partido, 15
 - r -partido completo, 15
- bipartido, 15
- caminho, 11
- caminho regular, 77
- caracterizado pelo seu espectro, 24
- coespectrais, 24
- complementar, 16
- completo, 13
- cone, 17
- conexo, 12
- de incidência, 28
- desconexo, 12
- design, 23
- distância regular, 70
- distância- i , 18
- double broom, 88
- floresta, 14
- fortemente regular, 23
- integral, 23
- isomorfos, 19
- Levi, 28
- meio grafo, 75
- multiplicativo, 39
- simples, 11
- trivial, 11
- unicíclico, 16
- vazio, 11
- árvore, 14
- estrela, 16
- irregular, 13
- regular, 13
- grau de um vértice, 11

grau máximo, 11
 grau mínimo, 11
 índice, 6
 invariantes, 20
 isomorfismo, 19
 matriz, 5
 de adjacência, 20
 de Hadamard, 5
 de incidência, 27
 de permutação, 7
 invertível, 6
 não singular, 6
 regular, 5
 hermitiana, 7
 inversa, 6
 irredutível, 7
 não negativa, 7
 positiva, 7
 reduzível, 7
 simétrica, 7
 transposta, 6
 transposta conjugada, 7
 unitária, 7
 multiplicidade algébrica, 5
 norma matricial, 9
 $-p$ de Schatten, 10
 de Frobenius, 10
 do máximo, 10
 do traço, 10
 número de emparelhamento, 19
 números de intersecção, 70
 ordem, 11
 partes, 15
 partição regular em metades, 79
 polinômio característico, 5, 21
 polinômio mínimo, 6
 pontos, 27
 posto, 8
 produto cartesiano, 17
 produto de Kronecker, 24
 raio espectral, 6
 sequência de graus, 11
 subgrafo, 14
 induzido, 14
 submatriz principal, 8
 Teorema de Cayley-Hamilton, 6
 Teorema de Decomposição em valores
 singulares, 8
 Teorema de Perron-Frobenius, 7
 Teorema do entrelaçamento de
 Cauchy, 8
 Teorema espectral para matrizes
 hermitianas, 7
 traço, 6
 valores singulares, 9
 vértice isolado, 11
 vértice pendente, 11
 vértices, 11
 adjacentes, 11
 folhas, 14
 saturado, 19
 vizinhos, 11