

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

# Espalhamento próton-próton em altas energias e os propagadores não-perturbativos do glúon

Gustavo Barbosa Bopsin

Porto Alegre, Brasil  
Novembro de 2023

---

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

**Espalhamento próton-próton em  
altas energias e os propagadores  
não-perturbativos do glúon**

Gustavo Barbosa Bopsin

Dissertação de conclusão de Mestrado  
em Física, sob orientação do Prof. Dr.  
Emerson Gustavo de Souza Luna.

Porto Alegre, Brasil  
Novembro de 2023

---

# Agradecimentos

A Deus...

Aos meus pais, Carla e Darlei, por todo apoio nesta nova fase, à minha irmã Lara, pelo momentos de descontração, e a toda minha família.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Emerson Gustavo de Souza Luna, pela orientação neste trabalho e pela contribuição na minha formação. Agradeço toda ajuda, disponibilidade e liberdade desde o começo da orientação.

Ao meu amigo Felipe, pelas conversas sobre Física e pela amizade desde a licenciatura.

Aos amigos que fiz na UFRGS. Um agradecimento especial ao Cristiano e ao Júlio, pelos almoços no RU e pelas conversas no banco do DAEF.

Ao Prof. Dr. Dimiter Hadjimichef, pelas disciplinas de Teoria Quântica de Campos I e II e pela contribuição na minha formação.

À banca, composta pelos Prof. Dr. Magno Valério Trindade Machado, Prof. Dr. Renato Pakter e Prof. Dr. Bruno El-Bennich pelas críticas construtivas que com certeza melhoraram o trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pelo ensino gratuito e de qualidade.

---

# Press Release

A Cromodinâmica Quântica (QCD) é a teoria fundamental que estuda as interações fortes entre os hádrons. Hádrons são partículas formadas por outras partículas, mais elementares, denominadas quarks. A interação entre estes quarks é dada através da mediação de outras partículas, denominadas glúons, que não possuem massa. Neste contexto, estudamos um modelo para o chamado Pomeron, cuja interpretação é a troca de dois glúons. Para verificarmos se a nossa teoria está de acordo com os resultados obtidos nos aceleradores de partículas, precisamos calcular os observáveis que são medidos nestes experimentos. O principal observável medido é a seção de choque que pode ser obtida através de uma função chamada amplitude de espalhamento.

Uma característica importante da QCD é que ela possui dois regimes, dependendo do valor de  $t$ , onde  $t$  é o quadrado do momentum transferido do processo. Este  $t$  está diretamente relacionado com a energia do processo. Para valores altos de  $t$ , a interação forte diminui sua intensidade, enquanto que para valores pequenos de  $t$ , sua intensidade aumenta. Esta intensidade é chamada de acoplamento. Quando o acoplamento é muito pequeno, podemos aplicar métodos de teoria de perturbação para descrever os fenômenos. Entretanto, quando o acoplamento cresce, necessitamos de abordagens não-perturbativas, que é o nosso caso, pois estamos analisando dados experimentais com um  $|t| \leq 0.2 \text{ GeV}^2$ . Um dos formalismos disponíveis para tratar este tipo de fenômeno são as equações de Schwinger-Dyson. Como soluções destas equações, obtemos uma massa dinâmica para os glúons. Neste trabalho, discutimos dois tipos de massas dinâmicas, uma massa logarítmica e uma massa em lei de potência.

Os dados experimentais de dois experimentos do LHC possuem resultados discrepantes, de modo que analisamos dois conjuntos de dados separadamente. Para determinarmos os parâmetros livres do modelo utilizamos um ajuste dos dados experimentais usando o método de  $\chi^2$ . Como resultado final, obtivemos uma excelente descrição dos dados experimentais.

Palavras-chave: Pomeron. Equações de Schwinger-Dyson. LHC.

---

# Resumo

Investigamos o modelo do Pomeron como troca de dois glúons com propagadores não-perturbativos, caracterizados por uma escala de massa dinâmica. Utilizamos esse modelo de Pomeron na análise de dados de seção de choque diferencial próton-próton no regime de energia do LHC, levando em conta massas dinâmicas dos glúons obtidas de uma versão não linear das equações que Schwinger-Dyson. Mostramos que nosso modelo com troca de dois glúons fornece uma excelente descrição dos dados do LHC, desde que exijamos a chamada Reggeização da amplitude de espalhamento e façamos uma escolha adequada para a convolução das funções de onda do próton.

Palavras-chave: Pomeron. Equações de Schwinger-Dyson. LHC.

---

# Abstract

We investigate the two-gluon-exchange model of the Pomeron using non-perturbative gluon propagators characterized by a dynamical mass scale. We present the results for an analysis of the available  $pp$  differential cross section data at TeV energies which accounts for dynamical gluon masses obtained from a nonlinear version of the Schwinger-Dyson equations. We show that our two-gluon exchange model gives an excellent description of the LHC data, provided we demand the Reggeization of the scattering amplitude and make a suitable choice for the convolution of proton wave functions.

Key-words: Pomeron. Schwinger-Dyson equations. LHC.

---

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>1 Aspectos gerais da Física Hadrônica - Parte I</b>	<b>12</b>
1.1 Invariantes de Mandelstam . . . . .	12
1.2 Propriedades da Matriz-S . . . . .	13
1.2.1 Seção de choque . . . . .	14
1.2.2 Unitaridade . . . . .	16
1.2.3 Analiticidade . . . . .	17
1.2.4 Simetria de Cruzamento . . . . .	18
1.2.5 Alguns teoremas . . . . .	19
1.3 Teoria de Regge . . . . .	21
1.3.1 Trajetórias de Regge . . . . .	22
1.3.2 Polos de Regge . . . . .	22
1.3.3 Cortes de Regge . . . . .	23
<b>2 Aspectos gerais da Física Hadrônica - Parte II</b>	<b>25</b>
2.1 Cromodinâmica Quântica . . . . .	25
2.1.1 O Pomeron . . . . .	26
2.2 Equações de Schwinger-Dyson . . . . .	26
2.3 Teoria de calibre na rede . . . . .	29
<b>3 Modelo para o Pomeron não-perturbativo</b>	<b>31</b>
3.1 Background Field Method . . . . .	31
3.2 Amplitude para o Pomeron . . . . .	33
3.3 Amplitude reggeizada . . . . .	35
3.4 O propagador não-perturbativo . . . . .	38
<b>4 Resultados e discussões</b>	<b>42</b>
4.1 Dados experimentais . . . . .	42

4.2	Minimização e parâmetros . . . . .	43
4.3	Seções de choque diferencial e total . . . . .	45
4.4	Massas dinâmicas, cargas efetivas e propagadores . . . . .	47
4.5	Acoplamento do Pomeron . . . . .	48
 <b>Considerações Finais e Perspectivas</b>		 <b>51</b>
 <b>A Qualidade do ajuste e MINUIT</b>		 <b>52</b>
A.1	Método dos mínimos quadrados . . . . .	52
A.2	Teste de $\chi^2$ -reduzido . . . . .	53
A.3	MINUIT . . . . .	53
 <b>B Integração numérica e VEGAS</b>		 <b>58</b>
B.1	Integração de Monte Carlo . . . . .	58
B.2	VEGAS . . . . .	59
 <b>Referências</b>		 <b>60</b>

---

# Introdução

Ainda é um desafio pra a Física de Partículas entender a natureza do Pomeron, entendido como um estado tendo os números quânticos do vácuo, do ponto de vista da Cromodinâmica Quântica (QCD). Sabemos que o comportamento das seções de choque hadrônicas à altas energias no regime suave são muito bem descritas pelo formalismo da Teoria de Regge, onde as amplitudes de espalhamento são movidas por singularidades no plano complexo de momentum angular  $l$ . No cenário mais simples, a amplitude de espalhamento é dominada por um único polo isolado em  $l = \alpha_{\mathbb{P}}(t)$  resultando em uma amplitude  $\mathcal{A}(s, t) \propto s^{\alpha_{\mathbb{P}}(t)}$ , onde  $\alpha_{\mathbb{P}}(t)$  é a trajetória de Regge do Pomeron. Um dos objetivos centrais da atual física relacionada às interações fortes é incorporar conceitos da QCD, a teoria de calibre que descreve a interação forte em nível mais fundamental no regime de grande momentum transferido  $t$ , na construção de modelos do Pomeron válidos na direção frontal  $t = 0$ , descrita pela teoria de Regge, para reproduzir pelo menos alguns dos resultados fenomenológicos do Pomeron suave.

As primeiras tentativas de uso de conceitos da QCD no estudo do Pomeron surgiram na década de 70, justamente a época em que a QCD se estabeleceu como a teoria padrão das interações fortes. Um dos principais resultados destas primeiras tentativas foi a observação que o diagrama em ordem mais baixa em QCD necessário para representar um Pomeron requer a troca de no mínimo dois glúons. Embora os resultados obtidos a partir destes estudos na análise de processos com grande momentum transferido fossem promissores, as complicações observadas no limite  $t \rightarrow 0$  eram até então intransponíveis. Somente no final dos anos 80, após uma melhor compreensão do regime não-perturbativo, mais especificamente após um melhor entendimento do fenômeno de geração dinâmica de massa na QCD, surgiram as primeiras análises e cálculos em processos frontais ( $t = 0$ ), usando o modelo de Pomeron com troca de dois glúons, livres das singularidades presentes no passado. A ideia central por trás destes novos estudos se baseava na percepção de que os glúons presentes na troca deveriam ser não-perturbativos, ou seja, deveriam ser glúons apresentando massas dinâmicas. Os novos modelos conseguiam descrever com certa precisão os dados experimentais no regime de energia do *Intersecting Storage Rings* (ISR), ou seja, em energias de centro de massa da ordem de até  $\sqrt{s} \sim 62$  GeV.

Porém, quando aplicado em dados experimentais obtidos no *Large Ha-*

*dron Collider* (LHC), o modelo do Pomeron com troca de dois glúons não-perturbativos não funciona, ou seja, não é possível uma descrição dos dados experimentais disponíveis. Nessa dissertação estudamos um modelo do Pomeron aprimorado, mostrando quais novos ingredientes são necessários para a descrição de dados em altas energias.

A dissertação é organizada da seguinte forma: os dois primeiros capítulos são uma revisão sistemática dos principais aspectos da Física Hadrônica, de modo que separamos em duas partes. No Capítulo 1, apresentamos uma revisão sobre a Matriz-S e sobre as suas principais propriedades: unitaridade, analiticidade e simetria de cruzamento. Enunciamos os principais teoremas decorrentes destas propriedades e obtivemos o principal observável na Física de Partículas, a seção de choque, a partir dos elementos da Matriz-S. Na terceira seção, apresentamos uma revisão sobre a Teoria de Regge e seus principais conceitos: trajetórias, polos e cortes de Regge.

No Capítulo 2, apresentamos alguns conceitos sobre a QCD, em particular, a distinção entre o regime perturbativo e o não-perturbativo e sobre como o Pomeron, mesmo tendo surgido na Teoria de Regge, pode ser interpretado em seu contexto. Em seguida apresentamos os dois formalismos mais utilizados para estudar os aspectos não-perturbativos em teorias de calibre, as equações de Schwinger-Dyson e a teoria de calibre na rede. Ambos os formalismos são complementares, na medida em que o primeiro é baseado em um espaço-tempo contínuo e o segundo em um espaço-tempo discreto.

Pela construção das equações de Schwinger-Dyson como um conjunto infinito de equações integrais acopladas, precisamos de métodos de truncamento. Dessa forma, exploramos na primeira seção do Capítulo 3, um importante método utilizado com esta finalidade, a saber *Background Field Method*. O restante do capítulo é dedicado ao modelo utilizado para estudar o Pomeron através da geração dinâmica de massa dos glúons. Apresentamos a amplitude de espalhamento reggeizada e os propagadores e cargas efetivas não-perturbativas.

No Capítulo 4 discutimos os resultados numéricos obtidos através da minimização de parâmetros utilizando os dados experimentais do ATLAS e TOTEM. De posse dos parâmetros obtidos, calculamos e plotamos a seção de choque diferencial (em função de  $|t|$ ) e seção de choque total (em função de  $\sqrt{s}$ ). Plotamos ainda as massas dinâmicas, as cargas efetivas e os propagadores não-perturbativos em função de  $q^2$ . Por fim retomamos brevemente os resultados obtidos e apresentamos as perspectivas futuras.

No Apêndice A explicitamos alguns aspectos do método dos mínimos quadrados utilizado na minimização dos parâmetros e como avaliamos a qualidade do ajuste baseado na quantidade  $\chi^2$ . Ainda neste apêndice apresentamos um exemplo da utilização da biblioteca MINUIT. No Apêndice B revisamos a integração de Monte Carlo e apresentamos algumas características do algoritmo VEGAS, utilizado no cálculo das integrais envolvendo as amplitudes de espalhamento.

## INTRODUÇÃO

---

O presente estudo foi publicado em [1].

---

# Capítulo 1

## Aspectos gerais da Física Hadrônica - Parte I

A Física Hadrônica é o ramo da Física que estuda os hádrons, partículas que compõem o núcleo atômico como prótons, nêutrons e seus constituintes. Em particular, este ramo da Física está interessado nas interações entre estes constituintes, ou seja, na interação entre os quarks e glúons que formam os hádrons.

### 1.1 Invariantes de Mandelstam

Vamos introduzir nesta seção os chamados invariantes de Mandelstam. Vamos considerar uma reação de dois corpos do tipo

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4. \quad (1.1)$$

Podemos definir três variáveis, usualmente chamadas de variáveis de Mandelstam. Estas variáveis são invariantes de Lorentz e podem ser definidas como [2, 3, 4]

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \quad (1.2)$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \equiv -q^2 \quad (1.3)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2 \quad (1.4)$$

onde  $p_1, p_2, p_3$  e  $p_4$  são os quadrimomenta das partículas no processo (1.1). A quantidade  $s$  é o quadrado da energia centro de massa e  $t$  e  $u$  são os momenta transferido ao quadrado. Este processo (1.1) está definido no chamado *canal-s*, de forma que podemos reescrevê-lo nos *canais t* e  $u$ , respectivamente

$$1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4 \quad (1.5)$$

$$1 + \bar{4} \rightarrow \bar{2} + 3. \quad (1.6)$$

## 1.2 Propriedades da Matriz-S

Na Figura 1.1, vemos uma representação dos canais. Estas três variáveis não são independentes, e a partir de suas definições (1.2)-(1.4), obtemos

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2 \quad (1.7)$$

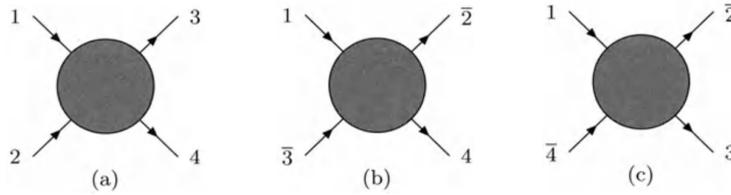


Figura 1.1: Canais das variáveis de Mandelstam.

A validade das variáveis de Mandelstam, para partículas de mesma massa, reside em

$$\text{canal} - s : s \geq 4m^2, \quad t \leq 0, \quad u \leq 0 \quad (1.8)$$

$$\text{canal} - t : s \leq 0, \quad t \geq 4m^2, \quad u \leq 0 \quad (1.9)$$

$$\text{canal} - u : s \leq 0, \quad t \leq 0, \quad u \geq 4m^2. \quad (1.10)$$

## 1.2 Propriedades da Matriz-S

A matriz de espalhamento ou matriz-S<sup>1</sup> [2, 3, 4] é responsável por evoluir um estado inicial  $|i\rangle$  para um estado final  $|f\rangle$

$$S |i\rangle = |f\rangle, \quad (1.11)$$

de forma que estes estados inicial e final são definidos em um tempo  $t = -\infty$  e  $t = \infty$ , respectivamente, e representam partículas livres. Podemos relacionar os elementos da matriz-S com a probabilidade de encontrar o sistema no estado final, partindo do estado inicial pela definição

$$P_{i \rightarrow f} = |\langle f | S | i \rangle|^2 = |S_{if}|^2. \quad (1.12)$$

Escrevendo a matriz-S em termos da matriz de transição  $T$ , temos

$$S = \mathbb{I} + iT, \quad (1.13)$$

e os elementos  $S_{if}$  podem ser escritos como

$$S_{if} \equiv \langle f | S | i \rangle = \delta_{if} + iT_{if} \quad (1.14)$$

$$= \delta_{if} + i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) A(i \rightarrow f), \quad (1.15)$$

<sup>1</sup>S de *scattering*.

onde  $A(i \rightarrow f)$  é a amplitude de espalhamento.

Uma outra forma de escrever a matriz-S é através de uma série de Dyson

$$S = \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \mathcal{T}(H_{int}(x_1) \dots H_{int}(x_n)), \quad (1.16)$$

onde  $H_{int}$  é o hamiltoniano de interação e  $\mathcal{T}$  é o operador de ordenamento temporal. Outras três propriedades muito importantes da matriz-S são: *unitariedade*, *analiticidade* e *cruzamento*. Estudaremos com mais detalhes estas propriedades da matriz-S nas seções a seguir.

### 1.2.1 Seção de choque

Um dos observáveis mais importantes na Física de Partículas é a seção de choque, que pode ser escrita como uma seção de choque diferencial ou uma seção de choque total. Vamos definir o que é a seção de choque considerando o caso de um espalhamento do tipo

$$1 + 2 \rightarrow 1 + 2 + \dots + n, \quad (1.17)$$

onde duas partículas iniciais colidem e produzem  $n$  partículas finais. A seção de choque diferencial é definida como a taxa de transição de um fluxo unitário incidente à um grupo de estados finais. Ou seja, dividimos a taxa de transição de encontrarmos um determinado estado (ou vários estados) pelo fluxo incidente. A taxa de transição está relacionada com a amplitude de espalhamento, uma vez que pela expressão (1.12), vemos que os elementos da matriz-S estão relacionados com a probabilidade de obtermos um estado final partindo de um estado inicial. Dessa forma, a taxa de transição para *um* estado final é definido como

$$(2\pi)^4 \delta^4 \left( p_1 + p_2 - \sum_{j=1}^n p'_j \right) |A(i \rightarrow f_n)|^2. \quad (1.18)$$

Para levarmos em conta todas as possibilidades de estados finais, aplicamos sobre a taxa de transição (1.18) o produtório

$$\prod_{j=1}^n \frac{d^3\mathbf{p}'_j}{(2\pi)^3 2E'_j}. \quad (1.19)$$

O fluxo incidente  $\Phi$  pode ser calculado como

$$\Phi = 2E_1 E_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|. \quad (1.20)$$

Este fluxo é invariante de Lorentz, de modo que reescrevendo-o considerando as duas partículas incidentes em um referencial colinear

$$\Phi = 4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}. \quad (1.21)$$

## 1.2 Propriedades da Matriz-S

---

Definindo a função triangular  $\lambda$  como

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz, \quad (1.22)$$

e da definição da variável de Mandelstam  $s = (p_1 + p_2)^2$ , temos

$$\begin{aligned} \Phi &= 4\sqrt{\left(\frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2}\right)^2 - m_1^2 m_2^2} \\ &= 2\sqrt{s^2 + m_1^4 + m_2^4 - 2sm_1^2 - 2sm_2^2 - 2m_1^2 m_2^2} \\ &= 2\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Unificando todos os resultados, a seção de choque diferencial fica

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{2\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_1^2, m_2^2)} \prod_{j=1}^n \frac{d^3 \mathbf{p}'_j}{(2\pi)^3 2E'_j} \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4\left(p_1 + p_2 - \sum_{j=1}^n p'_j\right) |A(i \rightarrow f_n)|^2. \end{aligned} \quad (1.24)$$

A seção de choque total será obtida integrando (1.24) e somando sobre todas as possíveis partículas finais

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} &= \frac{1}{2\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_1^2, m_2^2)} \sum_n \int \prod_{j=1}^n \frac{d^3 \mathbf{p}'_j}{(2\pi)^3 2E'_j} \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4\left(p_1 + p_2 - \sum_{j=1}^n p'_j\right) |A(i \rightarrow f_n)|^2. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Como o nosso caso de interesse é o espalhamento  $p+p \rightarrow p+p$ , ou  $p+\bar{p} \rightarrow p+\bar{p}$ , podemos escrever (1.24) explicitamente para este processo

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{2\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m^2, m^2)} \frac{d^3 \mathbf{p}'_1}{(2\pi)^3 2E'_1} \frac{d^3 \mathbf{p}'_2}{(2\pi)^3 2E'_2} \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) |A(pp \rightarrow pp)|^2. \end{aligned} \quad (1.26)$$

A  $\delta^3$  pode ser usada para integrar  $d^3 \mathbf{p}'_2$ . Escrevendo (1.26) em termos das variáveis  $s$  e  $t$ , em termos de  $(|\mathbf{p}'_2|, \theta', \phi')$  e usando a última delta de Dirac para integrar  $d|\mathbf{p}'_2|$ , encontra-se

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{1}{64\pi^2 s \lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_1^2, m_2^2)} |A(s, t)|^2. \quad (1.27)$$

Será útil reescrever (1.27) em termos de  $t$ . O ângulo  $\theta'$  é o ângulo de espalhamento entre os tri-momenta do centro de massa antes e depois da colisão, de modo que pode ser reescrito em termos do momentum transferido

$t = (p_1 - p'_1)^2$ . Com esta mudança e assumindo que  $A$  não depende de  $\phi'$ , (1.27) fica

$$\frac{d\sigma}{dt}(s, t) = \frac{|A(s, t)|^2}{16\pi\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}. \quad (1.28)$$

Como estamos interessados no caso de  $m_1 = m_2$ , a função triangular fica

$$\lambda(s, m^2, m^2) = s^2 - 4sm^2, \quad (1.29)$$

de forma que (1.28) se torna

$$\frac{d\sigma}{dt}(s, t) = \frac{|A(s, t)|^2}{16\pi\lambda(s, m^2, m^2)}. \quad (1.30)$$

Se considerarmos que  $s \rightarrow \infty$ , então esta última expressão se reduz a uma forma ainda mais simples

$$\frac{d\sigma}{dt}(s, t) = \frac{1}{16\pi s^2} |A(s, t)|^2. \quad (1.31)$$

A seção de choque total pode ser obtida de (1.27) integrando-se em  $\Omega'$ , entretanto, conforme veremos nas seções seguintes, podemos obter a seção de choque total tomando a parte imaginária da amplitude de espalhamento  $A$ , utilizando o chamado Teorema Óptico.

## 1.2.2 Unitaridade

A unitaridade da matriz-S pode ser escrita como

$$S^\dagger S = S S^\dagger = \mathbb{I}, \quad (1.32)$$

que decorre diretamente da conservação de probabilidade. Substituindo (1.13) em (1.32), obtemos

$$(\mathbb{I} - iT^\dagger)(\mathbb{I} + iT) = \mathbb{I}, \quad (1.33)$$

$$\mathbb{I} + iT - iT^\dagger + T^\dagger T = \mathbb{I}, \quad (1.34)$$

$$i(T^\dagger - T) = T^\dagger T. \quad (1.35)$$

Multiplicando pela esquerda por  $\langle f|$  e pela direita  $|i\rangle$  a expressão (1.35) e inserindo a relação de completeza, obtemos

$$i \langle f| T^\dagger - T |i\rangle = \sum_{\{n\}} \langle f| T^\dagger |n\rangle \langle n| T |i\rangle. \quad (1.36)$$

A expressão anterior pode ser simplificada da seguinte forma

$$i(T_{if}^* - T_{if}) = \sum_{\{n\}} T_{fn}^* T_{in}, \quad (1.37)$$

$$i(\text{Re}\{T_{if}\} - i \text{Im}\{T_{if}\} - \text{Re}\{T_{if}\} - i \text{Im}\{T_{if}\}) = \sum_{\{n\}} T_{fn}^* T_{in}, \quad (1.38)$$

$$2 \text{Im} T_{if} = \sum_{\{n\}} T_{fn}^* T_{in}. \quad (1.39)$$

## 1.2 Propriedades da Matriz-S

A soma em (1.39) contém toda integração sobre todos os momenta e a soma sobre todos os números quânticos discretos:

$$\sum_{\{n\}} \equiv \sum_n \int \prod_{j=1}^n \frac{d^3 \mathbf{q}_j}{(2\pi)^3 2E_j}. \quad (1.40)$$

As equações (1.39) formam um conjunto acoplado de equações integrais das quais podemos extrair toda informação sobre a unitariedade. A Figura 1.2 a exemplifica.

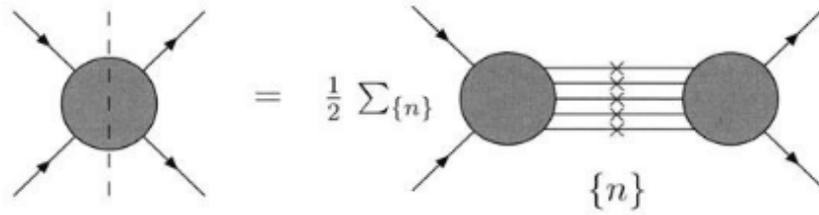


Figura 1.2: Representação gráfica das equações de unitariedade [2].

Na Figura 1.2, no lado esquerdo, o corte representa a descontinuidade da amplitude, enquanto que no lado direito, os  $\times$  representam as partículas *on shell*.

Podemos reescrever a expressão (1.39) em termos da amplitude de espalhamento  $A$ . Substituindo os elementos da matriz-T dados por (1.15) em (1.39), obtemos

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Im} A(i \rightarrow f) &= \sum_n \int \prod_{j=1}^n \frac{d^3 \mathbf{p}'_j}{(2\pi)^3 2E'_j} \\ &\times (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) A^*(f \rightarrow n) A(i \rightarrow n), \end{aligned} \quad (1.41)$$

A expressão (1.41) é de extrema importância porque podemos relacionar os elementos da matriz de transição com a amplitude de espalhamento. Com a amplitude de espalhamento, podemos obter as seções de choque, que são observáveis importantes da física de partículas. Além disso, de posse da parte imaginária da amplitude de espalhamento, podemos obter a parte real através de relações de dispersão [5] e encontrar a amplitude de espalhamento completa.

### 1.2.3 Analiticidade

A segunda principal propriedade da matriz-S é a analiticidade. Ela nos diz que as amplitudes de espalhamento (elementos da matriz-S) são funções analíticas das variáveis cinemáticas, quando estas são continuadas para valores complexos. As amplitudes físicas são as fronteiras reais dessas funções analíticas [2]. Em nosso caso, um processo de dois corpos, a amplitude  $A = A(s, t)$

será uma função de  $s$  e  $t$ , fazendo  $s$  e  $t$  quantidades complexas. As amplitudes físicas serão obtidas quando fizermos  $s \rightarrow real$  e  $t \rightarrow real$ .

Como elevamos as amplitudes para um plano complexo, surgirão singularidades [5, 6, 7] e dentre elas, teremos polos simples e pontos de ramificação. Considerando o caso mais simples de um processo de espalhamento entre dois corpos de mesma massa  $m$ , e denominando  $A_I(s, t)$  a amplitude de espalhamento que descreve este processo no canal- $s$ , então deve existir uma singularidade do tipo polo simples em  $s = m^2$  devido a troca de *uma* partícula no canal- $s$ . Além de polos simples, as amplitudes também exibem pontos de ramificação no eixo real de  $s$  nos limites  $s = (2m)^2$ ,  $s = (3m)^2, \dots$ , que são interpretados como trocas de *duas ou mais* partículas físicas. Na Figura 1.3 vemos estas singularidades.



Figura 1.3: Singularidades da amplitude  $A_I(s, t)$  no eixo real de  $s$  pra o canal- $s$  [2].

O mesmo raciocínio pode ser utilizado para os canais  $t$  e  $u$ . Supondo que tenhamos uma amplitude  $A_{II}(s, t)$  que descreve o processo no canal- $t$ , esta amplitude terá um polo simples em  $t = m^2$  e pontos de ramificação em  $t = (2m)^2, (3m)^2, \dots$ . Para uma amplitude  $A_{III}(s, t)$  no canal- $u$ , teremos polos simples em  $u = m^2$  e pontos de ramificação em  $u = (2m)^2, (3m)^2, \dots$ . Da mesma forma, polos simples descrevem troca de uma partícula enquanto pontos de ramificação descrevem troca de duas ou mais partículas. Na próxima seção veremos que estas três amplitudes  $A_I(s, t)$ ,  $A_{II}(s, t)$  e  $A_{III}(s, t)$  que a princípio poderiam ter expressões explícitas diferentes, tem na verdade a mesma forma, nas variáveis de Mandelstam.

### 1.2.4 Simetria de Cruzamento

Outra importante propriedade é a simetria de cruzamento. Ela nos diz que, em uma colisão, uma partícula de momentum  $p$  “entrando” pode ser vista como uma anti-partícula com momentum  $-p$  “saindo”. Conforme visto na seção 1.1, temos os três canais definidos através das variáveis de Mandelstam

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \quad \text{canal} - s \quad (1.42)$$

$$1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4 \quad \text{canal} - t \quad (1.43)$$

$$1 + \bar{4} \rightarrow \bar{2} + 3 \quad \text{canal} - u. \quad (1.44)$$

## 1.2 Propriedades da Matriz-S

Além disso, temos as reações transformadas por uma operação  $CPT^2$

$$\bar{3} + \bar{4} \rightarrow \bar{1} + \bar{2} \quad \text{canal} - s \quad (1.45)$$

$$2 + \bar{4} \rightarrow \bar{1} + 3 \quad \text{canal} - t \quad (1.46)$$

$$2 + \bar{3} \rightarrow \bar{1} + 4 \quad \text{canal} - u. \quad (1.47)$$

O cruzamento postula que a mesma amplitude de espalhamento, ou combinações de amplitudes, descreve os 6 diferentes processos (1.42-1.47). Se conhecermos as propriedades analíticas da amplitude, então pode-se fazer uma continuação analítica para os outros canais. A força desse postulado reside no fato de que, conhecendo a amplitude como uma função das variáveis de Mandelstam em um canal, também conhecemos nos outros canais.

Assumindo que  $A(s, t)$  é a amplitude de espalhamento para todos os processos (1.42)-(1.47), podemos escrever  $s$  em termos de  $t$  e  $u$  a partir da relação fundamental entre eles

$$s + t + u = 4m^2, \quad (1.48)$$

$$s = 4m^2 - t - u. \quad (1.49)$$

Inserindo as singularidades do canal-u, podemos escrever as singularidades no plano complexo  $s$  como

$$s = 3m^2 - t \quad \text{polo simples} \quad (1.50)$$

$$\left. \begin{array}{l} s = -t \\ s = -5m^2 - t \end{array} \right\} \text{pontos de ramificação} \quad (1.51)$$

Os polos e os pontos de ramificação no domínio complexo de  $s$  podem ser visualizados na Figura 1.4.



Figura 1.4: Singularidades no plano complexo  $s$  [2].

Podemos visualizar o domínio dos três canais através das expressões (1.8)-(1.10). Graficamente estes domínios estão representados na Figura 1.5.

### 1.2.5 Alguns teoremas

Apresentamos três importantes consequências das propriedades da matriz-S vistas nas seções anteriores. O primeiro teorema que veremos é o chamado *Teorema Óptico*, que relaciona a parte imaginária da amplitude de espalhamento com a seção de choque total. Se os estados inicial e final são iguais,

<sup>2</sup>Carga, paridade e reversão temporal.

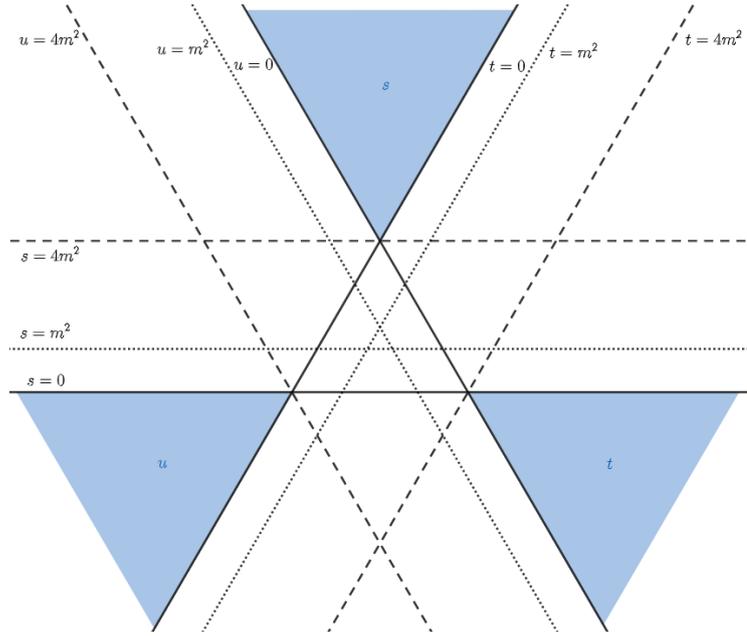


Figura 1.5: Domínio dos três canais para o caso do espalhamento de massas iguais. As regiões físicas são as regiões coloridas.

ou seja, os momenta das partículas não se alteram na colisão, então para uma colisão  $2 \rightarrow 2$ , temos que  $t = p_{1f} - p_{1i} = 0$ . A partir de (1.41), escrevemos

$$2 \operatorname{Im} A(s, t = 0) = \sum_n \int d\Pi_n |A(i \rightarrow n)|^2 \quad (1.52)$$

onde unimos o produto, as deltas e os elementos de integração em  $d\Pi_n$ . Identificamos que o lado direito de (1.52) como o produto da seção de choque total pelo fator de fluxo, logo

$$\sigma_{tot} = \frac{2}{\Phi} \operatorname{Im} A(s, t = 0). \quad (1.53)$$

No limite de altas energias  $s \rightarrow \infty$ , vemos de (1.23) que  $\Phi \approx 2s$ , logo

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{s} \operatorname{Im} A(s). \quad (1.54)$$

O segundo resultado importante é o chamado *limite de Froissart-Martin*. Este teorema impõe um limite para o crescimento da seção de choque total no limite  $s \rightarrow \infty$

$$\sigma_{tot} \leq C \ln^2 s, \quad (1.55)$$

onde  $C$  é uma constante. A prova deste teorema envolve escrever a amplitude de espalhamento na representação integral de Froissart-Gribov<sup>3</sup> assumindo o regime de  $s \rightarrow \infty$ .

<sup>3</sup>A representação de Froissart-Gribov é uma representação integral para as amplitudes em ondas parciais.

### 1.3 Teoria de Regge

---

O último teorema importante é o *Teorema de Pomeranchuk para as seções de choque totais*. Este teorema nos diz que para reações entre partícula-partícula e partícula-antipartícula do tipo

$$a + b \rightarrow a + b, \quad (1.56)$$

$$a + \bar{b} \rightarrow a + \bar{b}, \quad (1.57)$$

no limite assintótico, as seções de choque totais para este processo coincidem

$$\frac{\sigma_{tot}(ab)}{\sigma_{tot}(a\bar{b})} \underset{s \rightarrow \infty}{=} 1. \quad (1.58)$$

### 1.3 Teoria de Regge

O que veremos a seguir são alguns aspectos da chamada Teoria de Regge, desenvolvida no final da década de 50 [9]. Esta teoria ainda é muito utilizada pelo seu sucesso fenomenológico em descrever uma grande classe de problemas, nas quais ainda não se tem um formalismo teórico alternativo [2].

Formulada originalmente no contexto da Mecânica Quântica não-relativística, se baseia em potenciais esfericamente simétricos para os estados ligados, de modo que podemos usar uma expansão em ondas parciais para escrever as amplitudes de espalhamento  $f(k, \theta)$  como

$$f(k, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(k) P_l(\cos \theta), \quad (1.59)$$

onde  $l$  é o momento angular,  $P_l(\cos \theta)$  são os polinômios de Legendre e  $a_l(k)$  são as amplitudes de ondas parciais, dadas por

$$a_l(k) = \frac{e^{2i\delta_l(k)} - 1}{2ik}, \quad (1.60)$$

com  $\delta_l(k)$  sendo a fase de deslocamento da  $l$ -th onda.

A ideia central da Teoria de Regge é continuar estas amplitudes de ondas parciais  $a_l(k)$  para o plano complexo de  $l$ , de modo que

$$a_l(k) \rightarrow a(l, k). \quad (1.61)$$

Para valores inteiros de  $l$ , ou seja, para  $l = 0, 1, 2, \dots$ , a função (1.61) se reduz à  $a_l(k)$ . Para potenciais bem comportados, como o potencial de Yukawa <sup>4</sup>, as singularidades de  $a(l, k)$  serão polos localizados em

$$l = \alpha(k), \quad (1.62)$$

---

<sup>4</sup>Potenciais do tipo Yukawa são descritos pela forma

$$V(r) = \frac{e^{-r}}{r}.$$

onde  $\alpha(k)$  é a trajetória de Regge. Uma única trajetória corresponde a uma família de estados ligados ou ressonâncias, como veremos mais adiante.

No contexto da Matriz-S, denotando a amplitude de espalhamento em onda parciais por  $A(l, t)$ , a trajetória de Regge correspondente será

$$l = \alpha(t). \quad (1.63)$$

Cada polo contribui para a amplitude com um termo proporcional a

$$A(s, t) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} s^{\alpha(t)}. \quad (1.64)$$

### 1.3.1 Trajetórias de Regge

Segundo a Teoria de Regge, a interação forte não ocorre segundo a troca de partículas, mas sim de trajetórias de Regge, também denominadas por *reggeons*. Uma troca de reggeons ao invés de partículas nos leva à amplitudes de espalhamento do tipo (1.64) que geralmente é menos divergente. Além disso, elas não violam o limite de Froissart-Martin se  $\alpha(0) < 1$ .

Para obter uma forma explícita para a trajetória, podemos expandir  $\alpha(t)$  em série de potência ao redor de  $t = 0$ , e considerando que  $t$  é pequeno, escrevemos

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha' t, \quad (1.65)$$

onde  $\alpha(0)$  é o intercepto e  $\alpha'$  é a inclinação da trajetória. Um fato surpreendente é que a expressão (1.65) é válida para grandes valores de  $t$ .

Para explicar o comportamento assintótico das seções de choque totais, foi necessário introduzir uma trajetória de Regge com intercepto igual a 1. Este reggeon foi nomeado de *Pomeron*, devido ao físico I. Pomeranchuk. O Pomeron é resultado de uma troca de dois glúons entre os quarks do hádron. Além disso, ele é a trajetória dominante em processos elásticos e difrativos e possui os números quânticos do vácuo. No próximo capítulo, vamos abordar alguns aspectos da QCD, que é a teoria *fundamental* que descreve a interação forte e com isso podemos discutir como o Pomeron pode ser introduzido na QCD.

### 1.3.2 Polos de Regge

Polos de Regge são singularidades no plano complexo de momento angular e representam a troca de um único reggeon. A contribuição do polo dominante para a amplitude de espalhamento pode ser escrita como

$$A(s, t) \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} -\beta(t) \frac{1 + \xi e^{-i\pi\alpha(t)}}{\sin \pi\alpha(t)} s^{\alpha(t)}, \quad (1.66)$$

onde  $\xi$  é a assinatura e pode assumir valores  $-1$  ou  $+1$  e  $\beta(t)$  é o resíduo neste polo. A assinatura vem da propriedade de simetria de cruzamento da Matriz-S, uma vez que podemos ter amplitudes pares e ímpares.

### 1.3 Teoria de Regge

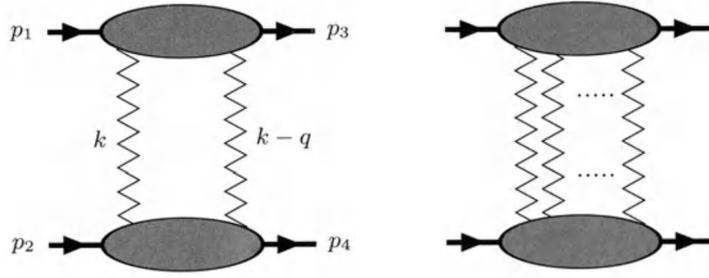


Figura 1.6: Troca de dois ou mais reggeons [2].

A forma para a amplitude de espalhamento para o polo de Regge do Pomeron é [10]

$$A^P(s, t) = C_P s e^{\beta_P t} \left[ i - \cot \left( \frac{\pi}{2} \alpha_P(t) \right) \right] \left( \frac{s}{s_0} \right)^{\alpha_P(t)-1}, \quad (1.67)$$

onde  $C_P$  e  $\beta_P$  são constantes fenomenológicas,  $s_0 = 1 \text{ GeV}$  e  $\alpha_P(t)$  é a trajetória de Regge do polo do Pomeron, dado por

$$\alpha_P(t) = \alpha_P(0) + \alpha'_P t, \quad (1.68)$$

com  $\alpha_P(0) = 1$ , o intercepto do Pomeron e  $\alpha'_P = 0.25 \text{ GeV}^{-2}$ , sua inclinação. Quando  $t = 0$ , obtemos a seção de choque, via o Teorema Óptico (1.54)

$$\sigma_{tot} \sim C s^{\alpha_P(0)-1}. \quad (1.69)$$

#### 1.3.3 Cortes de Regge

Conforme citado nas seções 1.2.2 e 1.2.3, pontos de ramificação, ou cortes, no plano complexo representam uma troca de dois ou mais reggeons, visto esquematicamente na Figura 1.6.

A forma para a amplitude de espalhamento para o corte de Regge Pomeron-Pomeron é [10]

$$A^{PP}(s, t) = C_{PP} s e^{\beta_{PP} t} \left[ i \sin \left( \frac{\pi}{2} \alpha_{PP}(t) \right) - \cos \left( \frac{\pi}{2} \alpha_{PP}(t) \right) \right] \times \frac{\left( \frac{s}{s_0} \right)^{\alpha_{PP}(t)-1}}{\ln \left[ \frac{s}{s_0} e^{-\frac{i\pi}{2}} \right]}, \quad (1.70)$$

onde  $C_{PP}$  e  $\beta_{PP}$  são constantes fenomenológicas e  $\alpha_{PP}(t)$  é a trajetória de Regge do corte Pomeron-Pomeron, dado por

$$\alpha_{PP}(t) = \alpha_{PP}(0) + \alpha'_{PP} t, \quad (1.71)$$

com  $\alpha_{PP}(0) = 1$  e  $\alpha'_{PP} = \frac{1}{2} \alpha'_P$ .

Novamente podemos avaliar a seção de choque total, tomando  $t = 0$  de acordo com (1.54), de modo que

$$\sigma_{tot} \sim C \frac{\left(\frac{s}{s_0}\right)^{2(\alpha(0)-1)}}{\ln s}. \quad (1.72)$$

---

## Capítulo 2

# Aspectos gerais da Física Hadrônica - Parte II

A Teoria de Regge, apresentada no capítulo anterior, é uma descrição fenomenológica das interações hadrônicas. A teoria fundamental que descreve as interações fortes é a Cromodinâmica Quântica.

### 2.1 Cromodinâmica Quântica

A Cromodinâmica Quântica (*Quantum Chromodynamics*), ou QCD, é a teoria quântica de campos que descreve a interação forte entre partículas de *cor*, como quarks e glúons. A QCD é uma teoria não-abeliana e o seu grupo de simetria é o SU(3). Devido à isso ela possui duas características peculiares diferentes da Eletrodinâmica Quântica (QED): o *confinamento* e a *liberdade assintótica*.

Tanto o acoplamento da QED quanto o da QCD, são acoplamentos *running*, ou seja, são dependentes do momentum transferido,  $\alpha_E = \alpha_E(q^2)$  e  $\alpha_S = \alpha_S(q^2)$ . No caso da QED, o acoplamento é proporcional constante de estrutura fina, que é dada por  $\alpha_E(0) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$ . Como este valor é muito menor que 1, podemos utilizar métodos perturbativos para tratar a QED. Entretanto, o acoplamento da QCD nem sempre é pequeno o suficiente para que um tratamento perturbativo seja possível. Para altas energias e pequenas distâncias, ou seja grande  $q^2$ , o acoplamento  $\alpha_S$  diminui, enquanto que para baixas energias e grandes distâncias, ou seja pequeno  $q^2$ , o acoplamento aumenta.

A propriedade da liberdade assintótica está intimamente relacionada com o fato dela ser baseada em um grupo de gauge não-abeliano. Como uma consequência dessa estrutura não-abeliana, os glúons coloridos, que mediam a interação, se acoplam a eles mesmos. Acredita-se que este auto acoplamento seja responsável pelo confinamento. Como a intensidade do acoplamento se torna menor para distâncias menores, estas forças se tornam mais fortes para

separações maiores. Isto poderia explicar porque não conseguimos observar partículas com cor, mas sim apenas hádrons “brancos”, ou seja, hádrons compostos ou pelas 3 cores (bárions) ou por cor e anticor (méson). Uma confirmação de que a QCD consegue explicar este confinamento só seria possível através de métodos não-perturbativos, uma vez este fenômeno é uma consequência de grandes distâncias, onde a teoria de perturbação falha [11].

Nas próximas seções, 2.2 e 2.3, apresentamos dois formalismos não-perturbativos utilizados na descrição da interação forte.

### 2.1.1 O Pomeron

A primeira tentativa de incorporar o Pomeron na QCD foi feita por Landshoff e Polkinghorne em 1971 [12], onde foi assumido que o Pomeron acopla com os quarks das mesma forma que um fóton  $C = +1$ . Com isso, o espalhamento seria descrito pelo diagrama apresentado na Figura 2.1 e pela amplitude

$$-g^2 \left[ \frac{1 + e^{-i\pi\alpha_P(t)}}{\sin \pi\alpha_P(t)} \left( \frac{s}{s_0} \right)^{\alpha_P(t)-1} \right] (\bar{u}\gamma^\mu u)(\bar{u}\gamma_\mu u), \quad (2.1)$$

onde  $g$  é o acoplamento do Pomeron ao quark,  $u$  é espinor do quark e o termo entre colchetes é o propagador do Pomeron.

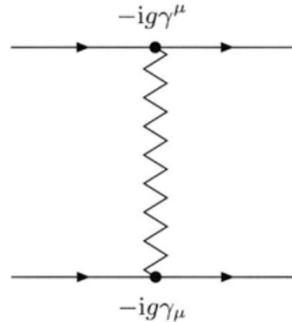


Figura 2.1: Diagrama para o processo quark-quark mediado por um Pomeron como um fóton  $C = +1$  [2].

Uma descrição do Pomeron envolvendo quarks e glúons foi desenvolvida por Low [13] e Nussinov [14]. Conforme já citado, o Pomeron foi proposto como uma *troca de dois glúons*, uma vez que dois glúons é o número mínimo necessário para reproduzir seus números quânticos. Na representação de Low e Nussinov, o diagrama para este processo seria o mostrado na Figura 2.2.

## 2.2 Equações de Schwinger-Dyson

Um dos formalismos conhecidos para tratar de forma não-perturbativa teorias quânticas de campos é a chamada torre infinita das equações de Schwinger-

## 2.2 Equações de Schwinger-Dyson

---

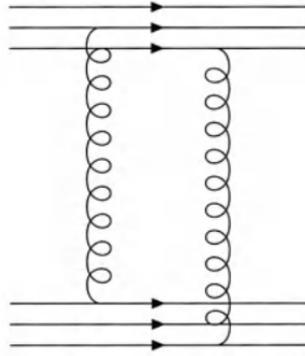


Figura 2.2: Diagrama para o processo quark-quark mediado por um Pomeron como dois glúons [2].

Dyson. Estas equações são equações integrais acopladas que relacionam as funções de Green de uma teoria de campo [15, 16]. Nesta seção, vamos ilustrar alguns aspectos gerais deste formalismo na obtenção de propagadores na QED e QCD.

Iniciando com a QED, consideremos  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  e  $A_\mu$  como sendo os campos do elétron, pósitron e fóton e  $\bar{\eta}$ ,  $\eta$  e  $J_\mu$  como sendo suas fontes externas, respectivamente. Podemos definir um gerador funcional como

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J_\mu] = \int d\mu(\bar{\psi}, \psi, A) \exp \left[ iS[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] + i \int d^4x (\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + A_\mu J^\mu) \right] \quad (2.2)$$

onde  $d\mu(\bar{\psi}, \psi, A) \equiv \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A_\mu$  é a medida de integração e  $S[\bar{\psi}, \psi, A_\mu]$  é a ação definida a partir da Lagrangiana como

$$S[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] = \int d^4x \mathcal{L}(x), \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (2.4)$$

onde  $F^{\mu\nu}$  é o tensor eletromagnético e  $\xi$  é um parâmetro de fixação de calibre.

O gerador (2.2) gera tanto diagramas conectados quanto desconectados. Para eliminar a contribuição dos diagramas desconectados, define-se um segundo gerador a partir de (2.2)

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J_\mu] = e^{W[\bar{\eta}, \eta, J_\mu]}, \quad (2.5)$$

e a sua transformação de Legendre

$$W[\bar{\eta}, \eta, J_\mu] \equiv i\Gamma[\bar{\eta}, \eta, J_\mu] + i \int d^4x (\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + A_\mu J^\mu). \quad (2.6)$$

Em analogia com o cálculo variacional clássico, a expressão (2.2) se torna nula

quando tomamos sua derivada, logo

$$\begin{aligned}
 0 &= \int d\mu(\bar{\psi}, \psi, A) \frac{\delta}{\delta A_\mu} \exp \left[ iS[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] + i \int d^4x (\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + A_\mu J^\mu) \right] \\
 &= \int d\mu(\bar{\psi}, \psi, A) \left\{ \frac{\delta S}{\delta A_\mu} + J_\mu \right\} \exp \left[ iS[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] + i \int d^4x (\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + A_\mu J^\mu) \right] \\
 &= \left\{ \frac{\delta S}{\delta A_\mu} \left[ \frac{\delta}{i\delta J}, \frac{\delta}{i\delta \bar{\eta}}, -\frac{\delta}{i\delta \eta} \right] + J_\mu \right\} Z[\bar{\eta}, \eta, J_\mu] \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

O gerador funcional é, em uma teoria de campos, análogo à função partição na Mecânica Estatística. Uma vez que o funcional é obtido, suas derivadas nos dão as funções de Green da teoria.

Calculando a derivada da ação (2.3) em relação à  $A_\mu$ , temos

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = \left[ \partial_\rho \partial^\rho g_{\mu\nu} - \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A_\nu - e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \quad (2.8)$$

Substituindo na (2.7), obtemos uma equação que representa uma forma compacta das equações de Maxwell não-perturbativas

$$\left[ \partial_\rho \partial^\rho g_{\mu\nu} - \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] \frac{\delta W}{i\delta J_\nu} - e \left( \frac{\delta W}{\delta \eta} \gamma_\mu \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} + \frac{\delta}{\delta \eta} \left[ \gamma^\mu \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} \right] \right) = -J_\mu \quad (2.9)$$

A partir da sua transformação de Legendre  $\Gamma[\bar{\psi}, \psi, A_\mu]$ , dada pela expressão (2.6), podemos reescrever (2.9) em termos de  $\Gamma$

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu(x)} \right|_{\psi=\bar{\psi}=0} &= \left[ \partial_\rho \partial^\rho g_{\mu\nu} - \left( 1 - \frac{1}{\xi_0} \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu(x) \\
 &+ e \text{Tr} [\gamma_\mu S_p(x, x, [A_\mu])], \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

onde identificamos o propagador do elétron em um campo eletromagnético externo  $A_\mu$ <sup>1</sup>

$$S_p(x, y, [A_\mu]) = \left( \left. \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\psi}(x) \delta \psi(y)} \right|_{\psi=\bar{\psi}=0} \right)^{-1}. \quad (2.11)$$

O propagador completo do elétron é obtido tomando  $A_\mu = 0$  na expressão (2.11). De forma análoga, o propagador do fóton é obtido tomando derivadas com relação à  $A^\mu$

$$(D^{-1})^{\mu\nu}(x, y) = \left. \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A^\mu(x) \delta A^\nu(y)} \right|_{A_\mu=\psi=\bar{\psi}=0} \quad (2.12)$$

---

<sup>1</sup>Infelizmente a letra S é a notação padrão tanto para ação, quanto para o propagador de um férmion.

## 2.3 Teoria de calibre na rede

---

Para a QCD, escrevemos a Lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} = & \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu a}F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi_0}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\ & + (\partial_\mu \bar{\omega}_a)(\delta_{ab}\partial^\mu - g_0 f_{abc}A^\mu c)\omega_b, \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde as quantidades  $F_a^{\mu\nu}$  e  $D^\mu$  são dadas por

$$F_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu + g_0 f_{abc}A_b^\mu A_c^\nu, \quad (2.14)$$

$$D^\mu = \partial^\mu - ig_0 A_a^\mu t_a = \partial^\mu - ig_0 A^\mu. \quad (2.15)$$

Os campos  $A_a^\mu$  são os campos dos glúons e  $\psi$  são os campos dos quarks. Os índices  $a$  são os índices de cor, de modo que  $a = 1, \dots, 8$ . Temos ainda que  $t_a = \lambda_a/2$ , onde  $\lambda_a$  são as matrizes de Gell-Mann, geradoras do grupo SU(3). A álgebra destas matrizes é tal que

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c, \quad (2.16)$$

$$Tr(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}. \quad (2.17)$$

Além disso, os campos  $\bar{\omega}_a$  e  $\omega_a$  são campos auxiliares não físicos, necessários para manter a invariância de calibre e unitariedade. São chamados de *ghosts* e possuem spin 0.

O funcional gerador é escrito então como

$$\begin{aligned} Z[\bar{\eta}, \eta, J_\mu, \bar{\xi}, \xi] = & \int d\mu(\bar{\psi}, \psi, A, \bar{\omega}, \omega) \exp \left[ iS[\bar{\psi}, \psi, A_\mu, \bar{\omega}, \omega] \right. \\ & \left. + i \int d^4x (\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + A_{\mu a}J_a^\mu + \bar{\omega}_a\xi_a + \bar{\xi}_a\omega_a) \right], \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde  $S[\bar{\psi}, \psi, A_\mu, \bar{\omega}, \omega]$  é a ação, dada por (2.3).

De forma análoga à expressão (2.12), pode-se obter o propagador do glúon através de derivadas sucessivas de  $\Gamma$

$$(\Delta^{-1})_{\mu\nu}^{ab} = \frac{\delta^2 \Gamma_{QCD}}{\delta A_a^\mu \delta A_b^\nu} \quad (2.19)$$

## 2.3 Teoria de calibre na rede

Abordagens em um espaço-tempo contínuo e em um espaço-tempo discreto são complementares. Conforme visto anteriormente, as equações de Schwinger-Dyson oferecem uma solução contínua para a teoria de campos, entretanto elas são um conjunto infinito de equações integrais acopladas e precisamos truncar o número de equações em algum ponto. Dessa forma, uma abordagem numérica, em um espaço-tempo discreto, é necessária. O primeiro a fazer isso foi Wilson [17] abrindo novas possibilidades para o estudo da QCD no regime não-perturbativo.

Este formalismo também é chamado de formalismo no espaço euclidiano e a prescrição para obter uma teoria de campos no espaço euclidiano a partir de um teoria de campos de Minkowski é dada por [16]

$$\int^M d^4 x^M \rightarrow -i \int^E d^4 x^E, \quad (2.20)$$

$$\not{\partial} \rightarrow i\gamma^E \cdot \partial^E, \quad (2.21)$$

$$\not{A} \rightarrow -i\gamma^E \cdot A^E, \quad (2.22)$$

$$A_\mu B^\mu \rightarrow -A^E \cdot B^E, \quad (2.23)$$

onde  $\gamma_4^E = \gamma^0$  e  $\gamma_j^E = -i\gamma^j$ , com  $j = 1, 2, 3$ . Estas regras de transcrição podem ser usadas como uma implementação da continuação analítica da variável tempo

$$x^0 \rightarrow -ix^4, \quad (2.24)$$

$$\vec{x}^M \rightarrow \vec{x}^E. \quad (2.25)$$

Com isso, pode-se escrever um gerador funcional para a QCD semelhante à (2.18). A partir do método já discutido de tomar derivadas sucessivas desse funcional e tomar as fontes irem à zero, podemos obter as chamadas funções de Schwinger

$$S^n(x_1, \dots, x_n) \quad (2.26)$$

que não as funções de Green no espaço euclidiano. As funções dadas por (2.26) contêm toda a informação necessária para calcular observáveis físicos, como por exemplo as massas e raios de carga em simulações de QCD na rede.

Com a evolução da física computacional, teorias de calibre em rede<sup>2</sup> ganham destaque devido a possibilidade de cálculos numéricos mais precisos e mais sofisticados.

---

<sup>2</sup>*Lattice gauge theory.*

---

# Capítulo 3

## Modelo para o Pomeron não-perturbativo

Conforme mencionado na seção 2.2, as equações de Schwinger-Dyson nos fornecem as funções de Green da teoria de campos em que estamos lidando, através de infinitas equações integrais acopladas. Uma esquema formal de truncar estas equações é fornecido pelo formalismo do *Background Field Method*.

### 3.1 Background Field Method

Este método é uma técnica para quantizar teorias de campo sem perder explicitamente a invariância de calibre [18] e é aplicável para cálculos de processos de um número arbitrário de loops. Além disso, é extensivamente utilizada em teorias de gravidade e super gravidade [19]. Vamos explorar rapidamente a utilidade deste formalismo ao calcular a ação efetiva. Lembremos que a partir da Lagrangiana de interação, podemos construir a Matriz-S, dada por (1.16), e por consequência, obter os observáveis cinemáticos.

Para isso, vamos utilizar o gerador funcional definido em (2.2), porém vamos desconsiderar os campos dos férmions

$$Z[J] = \int \delta A \exp \left[ iS[A] + i \int d^4x A_\mu J^\mu \right]. \quad (3.1)$$

Além disso, as funções de Green são definidas como derivadas sucessivas deste gerador funcional

$$\langle 0 | T \{ \underset{n \text{ times}}{A \dots A} \} | 0 \rangle = \int \delta A \{ \underset{n \text{ times}}{A \dots A} \} e^{iS[A]} = \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right)^n Z[J] \Big|_{J=0}. \quad (3.2)$$

Da mesma forma que fizemos anteriormente, em 2.2, o gerador dos diagramas conectados apenas será a transformação de Legendre

$$W[J] = -i \ln Z[J], \quad (3.3)$$

$$\Gamma[\bar{A}] = W[J] - \int d^4x \bar{A}^\mu J_\mu, \quad (3.4)$$

com

$$\bar{A} = \frac{\delta W}{\delta J}, \quad J = \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{A}} \quad (3.5)$$

onde o campo  $\bar{A}^\mu$  é distinto do campo  $A^\mu$ . Pela expressão (3.2), vemos que

$$\bar{A} = \frac{1}{iZ[J]} \frac{\delta}{\delta J} Z[J] = \frac{\langle 0|A|0 \rangle_J}{\langle 0|0 \rangle_J}. \quad (3.6)$$

Podemos agora aplicar esta mesma metodologia no contexto do *Background Field Method*, ou seja, vamos expandir o campo  $A^\mu$ , visto em (2.14), em duas componentes

$$A \rightarrow A + B, \quad (3.7)$$

onde  $A$  é o campo de flutuação quântica e  $B$  é um campo de *background* clássico. Com isso, o funcional fica

$$\tilde{Z}[J, B] = \int \delta A \exp \left[ iS[A + B] + \int d^4x A^\mu J_\mu \right]. \quad (3.8)$$

Por analogia, escrevemos

$$\tilde{W}[J] = -i \ln \tilde{Z}[J], \quad (3.9)$$

$$\tilde{\Gamma}[\tilde{A}, B] = \tilde{W}[J, B] - \int d^4x \tilde{A}^\mu J_\mu, \quad (3.10)$$

com

$$\tilde{A} = \frac{\delta \tilde{W}}{\delta J}. \quad (3.11)$$

Agora gostaríamos de encontrar uma relação entre  $Z[J]$  e  $\tilde{Z}[J, B]$ , de forma que faremos a seguinte deslocamento  $A \rightarrow A - B$  em (3.8). Com efeito,

$$\tilde{Z}[J, B] = Z[J] \exp \left[ -i \int d^4x B^\mu J_\mu \right], \quad (3.12)$$

$$\tilde{W}[J, B] = W[J] - i \int d^4x B^\mu J_\mu. \quad (3.13)$$

Derivando esta última expressão em relação à  $J$

$$\frac{\delta \tilde{W}}{\delta J} = \frac{\delta W}{\delta J} - B, \quad (3.14)$$

$$\tilde{A} = \bar{A} - B. \quad (3.15)$$

### 3.2 Amplitude para o Pomeron

---

Com os resultados obtidos, e de (3.10), vemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}[\tilde{A}, B] &= W[J] - i \int d^4x [B^\mu J_\mu + (\tilde{A} - B)^\mu J_\mu] \\
&= W[J] - i \int d^4x \tilde{A}^\mu J_\mu \\
&= \Gamma[\tilde{A}] \\
&= \Gamma[\tilde{A} + B],
\end{aligned} \tag{3.16}$$

que é o resultado que estávamos buscando. Um caso particular é  $\tilde{A} = 0$ , logo

$$\tilde{\Gamma}[0, B] = \Gamma[B]. \tag{3.17}$$

O resultado (3.17) é importante pois relaciona a ação efetiva convencional e a de *background*. Os observáveis físicos calculados nestes dois formalismos são iguais, entretanto as funções de Green não são, pois dependem da escolha de calibre (campo  $B$ ). A vantagem aqui está no fato de que as funções e Green no formalismo de *background* obedecem as identidades de Ward-Takahashi, enquanto as funções de Green do formalismo convencional obedecem as identidades de Slavnov-Taylor, que são muito mais complicadas.

Para estender o que foi desenvolvido nesta seção para teorias de calibre, é necessário escolher um calibre. A expressão (3.1) pode ser escrita para uma teoria de calibre como

$$Z[J] = \int \delta A \det \left[ \frac{\delta G^a}{\delta \omega^b} \right] \exp \left[ is[A] - \int d^4x \left( \frac{1}{2\xi} G^{a\mu} G_\mu^a - A^{a\mu} J_\mu^a \right) \right], \tag{3.18}$$

onde

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x (F_{\mu\nu}^a)^2. \tag{3.19}$$

A quantidade  $F_{\mu\nu}^a$  está definida em (2.14). De forma análoga ao que foi feito anteriormente, encontramos uma relação para as ações efetivas no formalismo convencional e de *background*, sendo o campo de *background* escrito como  $B_\mu^a$

$$\tilde{\Gamma}[0, B] = \Gamma[B]. \tag{3.20}$$

### 3.2 Amplitude para o Pomeron

Conforme citado na seção 2.1.1, Low [13] e Nussinov [14] foram um dos primeiros a tentarem incorporar ideias da QCD para estudar o Pomeron. Nestas tentativas, percebeu-se que a ordem mais baixa da construção da QCD possuindo os números quânticos corretos do Pomeron é uma troca de dois glúons.

Os primeiros modelos perturbativos não obtiveram sucesso em descrever corretamente as seções de choque, entretanto serviram como ponto de partida [21, 22, 23]. A amplitude de espalhamento nestes modelos é escrita como<sup>1</sup>

$$\mathcal{A}(s, t) = is \frac{8}{9} n_p^2 \alpha_s^2 [T_1 - T_2], \quad (3.21)$$

$$T_1 = \int_0^s d^2k D\left(\frac{q}{2} + k\right) D\left(\frac{q}{2} - k\right) [G_p(q, 0)]^2, \quad (3.22)$$

$$T_2 = \int_0^s d^2k D\left(\frac{q}{2} + k\right) D\left(\frac{q}{2} - k\right) G_p\left(q, k - \frac{q}{2}\right) \times \left[2G_p(q, 0) - G_p\left(q, k - \frac{q}{2}\right)\right], \quad (3.23)$$

onde  $T_1$  representa a contribuição para a amplitude quando ambos os glúons acoplam ao mesmo quark,  $T_2$  a contribuição quando ambos os glúons acoplam a diferentes quarks,  $n_p = 3$  é o número de quarks no próton,  $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$  é a constante de acoplamento canônica da interação forte,  $D(k)$  é o propagador do glúon e  $G_p(q, k)$  é uma convolução das funções de onda do próton [24].

As integrações presentes em (3.22) e (3.23) podem ser interpretadas como

$$\int_0^s d^2k \equiv \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{s}} k dk, \quad (3.24)$$

onde  $\phi$  é o ângulo entre os vetores  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{q}$ . Além disso, a convolução pode ser escrita como

$$G_p(q, k) = \int d^2p d\alpha \psi^*(\alpha, p) \psi(\alpha, p - k - \alpha q), \quad (3.25)$$

onde a função de onda  $\psi(\alpha, p)$  é a amplitude para um quark ter momentum transversal  $p$  e fração  $\alpha$  de momentum longitudinal. Na próxima seção, exploraremos mais a expressão (3.25). Dessa forma, vemos que  $G_p(q, 0)$  é simplesmente o fator de forma elástico do próton  $F_1(q^2)$ . Em termos de  $t$ ,

$$F_1(t) = \frac{4m^2 - 2.79t}{4m^2 - t} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{0.71}\right)^2}. \quad (3.26)$$

Entre os resultados principais dos cálculos utilizando a amplitude (3.21), encontramos uma seção de choque total que é constante em  $s$  [21, 22] da mesma forma que uma amplitude que decresce muito mais rapidamente com o aumento de  $|t|$  do que aquela gerada pela troca de um único Pomeron [23]. Ainda mais importante, o cálculo perturbativo da amplitude de espalhamento hádron-hádron através de uma troca de dois glúons é invariavelmente acompanhada por uma singularidade em  $-t = 0$ . Desde que a origem desta singularidade é o polo no propagador do glúon em  $q^2 = 0$ , Landshoff e Nachtmann (LN) sugeriram que o propagador do glúon é intrinsecamente modificado na região

---

<sup>1</sup>Vamos denotar a amplitude de espalhamento com o símbolo  $\mathcal{A}$ .

### 3.3 Amplitude reggeizada

---

infravermelha [25]. Eles notaram que a singularidade presente no cálculo da troca de dois glúons do espalhamento hádron-hádron é eliminada se o propagador do glúon é finito em  $q^2 = 0$ . Neste modelo LN, a troca do Pomeron corresponde a uma troca de dois glúons. Estes dois glúons acoplam predominantemente ao mesmo quark no hádron, e esta troca se comporta como um diagrama de troca de fóton  $C = +1$  com uma amplitude

$$i\beta_0^2(\bar{u}\gamma_\mu u)(\bar{u}\gamma^\mu u), \quad (3.27)$$

onde  $\beta_0$  representa a intensidade do acoplamento do Pomeron aos quarks, sendo dada por

$$\beta_0^2 = \frac{1}{36\pi^2} \int d^2k [g^2 D(k^2)]^2. \quad (3.28)$$

É válido observar o fato de que a convergência da integral (3.28) requiere um propagador de glúon não-perturbativo, isto é um propagador em que o polo infravermelho em  $q^2 = 0$  é removido por algum mecanismo não-perturbativo. Logo após a introdução destas ideias, muitas consequências fenomenológicas foram discutidas na literatura [24, 26, 27]. Por exemplo, usando propagadores não-perturbativos de glúons em modelos do tipo LN, foi possível descrever dados de baixa energia da seção de choque total do  $J/\Psi - nuleon$ , para computar uma estimativa para a seção de choque diferencial para processos  $\gamma\gamma \rightarrow J/\Psi J/\Psi$ , e para computar a seção de choque diferencial para espalhamento  $pp$  à  $\sqrt{s} = 53$  GeV.

Após medidas precisas do espalhamento elástico  $pp$  no LHC serem feitas, uma abordagem inspirada em LN baseada no formalismo refinado de Gribov-Zwanziger (RGZ) e no propagador massivo do tipo de Cornwall foi usada no cálculo da seção de choque diferencial à  $\sqrt{s} = 7, 8, 13$  TeV [28]. Surpreendentemente, o cálculo está em completo desacordo com os dados experimentais, provendo uma boa descrição da seção de choque diferencial somente para baixas energias,  $\sqrt{s} = 53$  GeV, apresentados nas Figuras 3.1 e 3.2.

É importante ficar claro que a contribuição da componente do Pomeron para  $\chi^2$  é completamente dominante no regime do LHC [29, 30]. Em outras palavras, em energias da ordem de TeV, as contribuições do Reggeon (não Pomeron) são negligenciáveis, e parece plausível que qualquer modelo do tipo Pomeron deveria funcionar precisamente nas energias do LHC.

### 3.3 Amplitude reggeizada

Um dos recursos mais notáveis das teorias de gauge não abelianas é a Reggeização das partículas elementares [31, 32, 33], particularmente no caso da QCD. A Reggeização do glúon é de importância central em altas energias uma vez que seções de choque para processos envolvendo troca de glúons no canal-t

### CAPÍTULO 3. MODELO PARA O POMERON NÃO-PERTURBATIVO

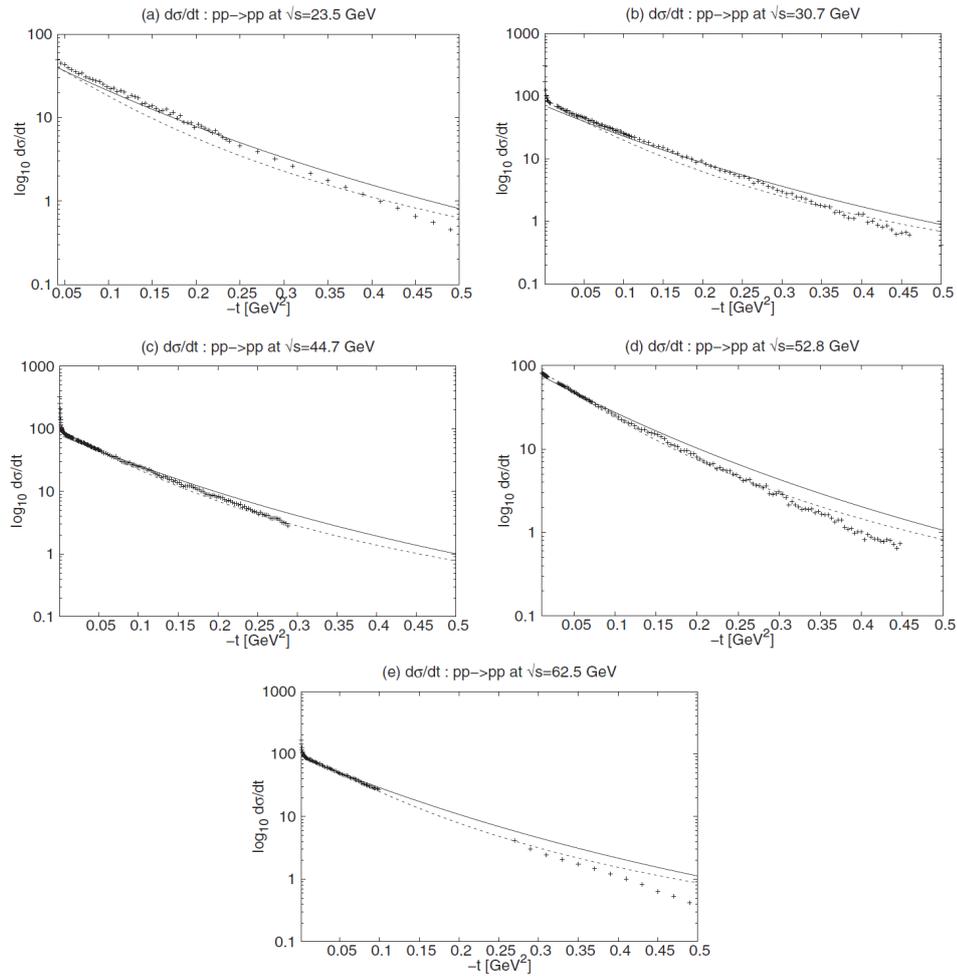


Figura 3.1: Comparação entre RGZ (linha sólida), Cornwall (linha pontilhada) e os dados experimentais (cruzes) do ISR (a) em  $\sqrt{s} = 23.5$  GeV; (b) em  $\sqrt{s} = 30.7$  GeV; (c) em  $\sqrt{s} = 44.7$  GeV; (d) em  $\sqrt{s} = 52.8$  GeV; e (e) em  $\sqrt{s} = 62.5$  GeV. As barras de erro dos dados não são mostradas pois são muito pequenas para serem distinguidas [28].

não desaparecem quando  $s$  aumenta. Em cada ordem fixa de perturbação, a Reggeização dos glúons dominam as amplitudes para estes processos. Além disso, a Reggeização do glúon tem um papel central na derivação da equação BFKL [34]. Esta equação descreve a evolução logarítmica dominante das escadas de glúons em  $\ln s$ , na qual as linhas verticais são glúons Reggeizados. Isto significa que estas linhas gluônicas não são compostas de glúons nus, cujos propagadores (no calibre de Feynman) são dados por

$$D_{\mu\nu}(q^2) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}, \quad (3.29)$$

mas sim compostos por glúons cujo propagador é

$$D_{\mu\nu}(\hat{s}, q^2) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left( \frac{\hat{s}}{\mathbf{k}^2} \right)^{\epsilon_G(q^2)}, \quad (3.30)$$

### 3.3 Amplitude reggeizada

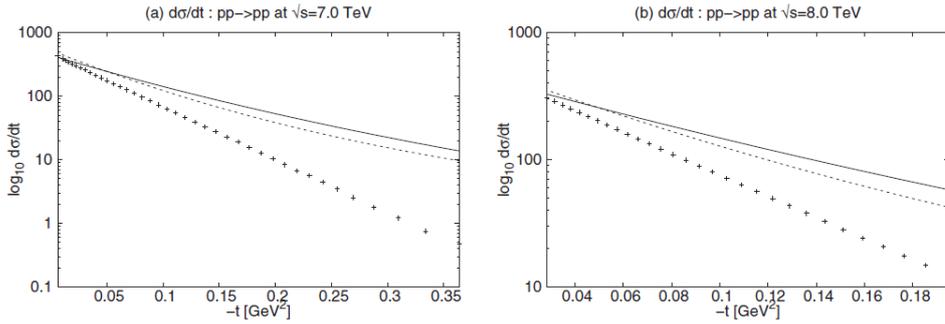


Figura 3.2: Comparação entre RGZ (linha sólida), Cornwall (linha pontilhada) e os dados experimentais (cruzes) para (a) ATLAS em  $\sqrt{s} = 7$  TeV; e (b) TOTEM em  $\sqrt{s} = 8$  TeV. As barras de erro dos dados não são mostradas pois são muito pequenas para serem distinguidas [28].

onde  $\mathbf{k}^2$  é um típico momentum transverso,  $\hat{s}$  é o quadrado da energia de centro de massa das partículas que trocam o glúon Reggeizado e  $\alpha_G(q^2) = 1 + \epsilon_G(q^2)$  é a trajetória de Regge do glúon. Assim, no caso da troca do octeto de cores, no limite  $s \gg |t|$ , a equação BFKL exhibe uma solução de polo, correspondendo a um único glúon Reggeizado se propagando no canal- $t$ . Similarmente, no caso de uma troca de singlete de cor, uma configuração de escada de glúons corresponde a um estado ligado de glúons chamado de Pomeron BFKL.

De forma mais genérica, se a amplitude  $\mathcal{A}(s, t)$  para um processo, no canal- $t$ , envolvendo a troca de números quânticos de partículas de massa  $M$  e spin  $j$  se comporta assintoticamente como  $\mathcal{A}(s, t) \propto s^{\alpha(t)}$ , se diz que estamos tratando de uma partícula Reggeizada, onde  $\alpha(t)$  é a trajetória da partícula. Em particular, a partícula reside na trajetória, isto é,  $\alpha(M^2) = j$ . Seguindo esta linha de raciocínio, poderíamos ser levados a considerar mudanças na forma

$$s \rightarrow s^{\alpha(t)} \quad (3.31)$$

como um procedimento fenomenológico para a Reggeização das amplitudes de espalhamento. Em nosso caso, uma simples mudança como (3.31) na amplitude (3.21) nos levaria a supor que obteríamos uma forma Reggeizada desta amplitude. Desta forma, obtemos

$$\mathcal{A}(s, t) = i s^{\alpha_{\mathbb{P}}(t)} \frac{1}{\tilde{s}_0} \frac{8}{9} n_p^2 [\tilde{T}_1 - \tilde{T}_2], \quad (3.32)$$

onde  $\alpha_{\mathbb{P}}(t) = 1 + \epsilon + \alpha'_{\mathbb{P}} t$  é a trajetória do Pomeron LN e  $\tilde{s}_0$  é dado por  $\tilde{s}_0 \equiv s_0^{\alpha_{\mathbb{P}}(t)-1}$ , onde  $s_0 \equiv 1 \text{ GeV}^2$  é uma escala de massa introduzida para que a seção de choque total tenha dimensão correta. As expressões para  $\tilde{T}_1$  e  $\tilde{T}_2$  se

tornam

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 &= \int_0^s d^2k \bar{\alpha}\left(\frac{q}{2} + k\right) D\left(\frac{q}{2} + k\right) \bar{\alpha}\left(\frac{q}{2} - k\right) D\left(\frac{q}{2} - k\right) \\ &\times [G_p(q, 0)]^2, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_2 &= \int_0^s d^2k \bar{\alpha}\left(\frac{q}{2} + k\right) D\left(\frac{q}{2} + k\right) \bar{\alpha}\left(\frac{q}{2} - k\right) D\left(\frac{q}{2} - k\right) \\ &\times G_p\left(q, k - \frac{q}{2}\right) \left[2G_p(q, 0) - G_p\left(q, k - \frac{q}{2}\right)\right], \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde novamente  $G_p(q, k)$  é dado pela expressão (3.25). Podemos estimar  $G_p\left(q, k - \frac{q}{2}\right)$  assumindo um pico em  $\alpha$  da função de onda do próton e utilizando [27]

$$G_p\left(q, k - \frac{q}{2}\right) = F_1\left(q^2 + \frac{1}{\alpha} \left|k^2 - \frac{q^2}{4}\right|\right). \quad (3.35)$$

Escolhendo o pico em  $\alpha = 1/3$ , temos

$$G_p\left(q, k - \frac{q}{2}\right) = F_1\left(q^2 + 9 \left|k^2 - \frac{q^2}{4}\right|\right). \quad (3.36)$$

Nas expressões (3.33), (3.34) e (3.36), o argumento das funções  $\bar{\alpha}$ ,  $D$  e  $G$  dependem de  $\tilde{q}_\pm^2 = \left(k \pm \frac{q}{2}\right)^2$ , logo devemos usar

$$\left(\frac{q}{2} + k\right)^2 = \frac{q^2}{4} + |\mathbf{q}||\mathbf{k}| \cos \phi + k^2, \quad (3.37)$$

$$\left(\frac{q}{2} - k\right)^2 = \frac{q^2}{4} - |\mathbf{q}||\mathbf{k}| \cos \phi + k^2. \quad (3.38)$$

As expressões (3.33) e (3.34) incluem a informação da QCD não-perturbativa. A natureza do acoplamento  $\bar{\alpha}(q^2)$  e do propagador  $D(q^2)$  serão discutidos na próxima seção. É importante notar que em contraste com (3.21), a expressão (3.32) contém os acoplamentos dentro das integrais. Isto torna evidente que estamos utilizando o esquema de cálculo prescrito na equação (3.28): a intensidade do Pomeron depende do produto do acoplamento  $g^2(k^2)$  com o propagador  $D(k^2)$ . Além disso, este é o mesmo procedimento usado em cálculos de QCD na rede, onde a intensidade do Pomeron é proporcional à integral

$$\beta_{0,lat}^2 = \int d^2p [g_{eff}^2(p^2) D_{lat}(p^2)]^2. \quad (3.39)$$

### 3.4 O propagador não-perturbativo

Um cenário atualmente aceito é que a dinâmica não-perturbativa da QCD pode gerar uma massa dinâmica  $m(q^2)$  para os glúons [35]. Cálculos de QCD

### 3.4 O propagador não-perturbativo

na rede em grandes volumes indicam que uma massa dependente do momentum surge em ambas as simulações SU(2) [36] e SU(3) [37]. Os cálculos em rede também revelam um propagador finito na região infravermelha [38]. Além disso, de acordo com as equações de Schwinger-Dyson, um propagador finito para o glúon corresponde a um glúon dinamicamente massivo [39].

O fenômeno da geração de massa dinâmica do glúon está relacionada com o conceito de carga efetiva na QCD [40, 41, 42]. Uma carga efetiva  $\bar{\alpha}(q^2)$  da QCD é uma generalização não-perturbativa do acoplamento  $\alpha_s(q^2)$  e pode ser obtida, por exemplo através do formalismo da *Pinch Technique* [40, 43, 44]. Neste formalismo, as soluções de Schwinger-Dyson para a auto-energia do glúon  $\hat{\Delta}(q^2)$  (no contexto do *Background Field Method* [45]) são usadas para formar uma quantidade invariante do grupo de renormalização definida por

$$\hat{d}(q^2) = g^2 \hat{\Delta}(q^2), \quad (3.40)$$

onde  $g$  é o acoplamento de calibre. Dessa quantidade, podemos definir a carga efetiva como

$$\bar{\alpha}(q^2) = [q^2 + m^2(q^2)] \hat{d}(q^2), \quad (3.41)$$

onde  $m(q^2)$  é a massa dinâmica do glúon. O inverso de  $\hat{d}(q^2)$  é escrito como

$$\hat{d}^{-1}(q^2) = \frac{[q^2 + m^2(q^2)]}{\bar{\alpha}(q^2)}. \quad (3.42)$$

O inverso da carga efetiva pode ser escrito como

$$\frac{1}{\bar{\alpha}(q^2)} = b_0 \ln \left( \frac{q^2 + m^2(q^2)}{\Lambda^2} \right), \quad (3.43)$$

onde  $b_0 = \frac{\beta_0}{4\pi} = \frac{(33-2n_f)}{12\pi}$  é o primeiro coeficiente da função  $\beta$  da QCD e  $\Lambda$  é um parâmetro e escala da QCD. Devemos notar que se fizermos a mudança  $q^2 + m^2(q^2) \rightarrow p^2$  no argumento do logaritmo de (3.43), obtemos

$$\frac{1}{\alpha_s^{LO}(p^2)} = b_0 \ln \left( \frac{p^2}{\Lambda^2} \right), \quad (3.44)$$

ou seja, na prática, a carga efetiva da QCD pode ser diretamente obtida saturando o acoplamento perturbativo da interação forte em ordem dominante (*leading order* - LO)  $\alpha_s^{LO}(q^2)$ , ou seja

$$\bar{\alpha}(q^2) = \alpha_s^{LO}(q^2) \Big|_{q^2 \rightarrow q^2 + m^2(q^2)}. \quad (3.45)$$

Se as equações de Schwinger-Dyson preservam a renormalizabilidade multiplicativa, o mesmo procedimento pode ser usado para construir uma carga efetiva próxima a ordem dominante (*next-to-leading order* - NLO) [46].

Formas funcionais da massa dinâmica  $m(q^2)$  e do propagador não-perturbativo  $D_{\mu\nu}$  foram obtidas por Cornwall usando a *Pinch Technique* com o objetivo de

### CAPÍTULO 3. MODELO PARA O POMERON NÃO-PERTURBATIVO

---

derivar uma equação de Schwinger-Dyson invariante para o vértice triplo do glúon e para o propagador do glúon [40]. No espaço Euclidiano, o propagador é escrito como  $D_{\mu\nu} = -ig_{\mu\nu}D(q^2)$ , de forma que o fator escalar é dado por

$$D^{-1}(q^2) = [q^2 + m^2(q^2)]bg^2 \ln \left( \frac{q^2 + 4m^2(q^2)}{\Lambda^2} \right), \quad (3.46)$$

com a massa dinâmica do glúon dada por

$$m^2(q^2) = m_g^2 \left[ \frac{\ln \left( \frac{q^2 + 4m_g^2}{\Lambda^2} \right)}{\ln \left( \frac{4m_g^2}{\Lambda^2} \right)} \right]^{-\frac{12}{11}}, \quad (3.47)$$

onde  $b = \frac{b_0}{4\pi}$  e  $m_g^2 = m^2(0)$ . A expressão (3.47) é um caso especial de uma massa logarítmica  $m_{log}^2(q^2)$ , obtido em um estudo mais recente utilizando uma versão não linear das equações de Schwinger-Dyson para a auto-energia do glúon [47], dada por

$$m_{log}^2(q^2) = m_g^2 \left[ \frac{\ln \left( \frac{q^2 + \rho m_g^2}{\Lambda^2} \right)}{\ln \left( \frac{\rho m_g^2}{\Lambda^2} \right)} \right]^{-1-\gamma_1}, \quad (3.48)$$

onde  $\gamma_1 = -\frac{6}{5}(1 + c_2 - c_1)$ . As constantes  $c_1$  e  $c_2$  são parâmetros relacionados com o ansatz do vértice de três glúon completamente vestido empregado em análises da auto-energia do glúon. Os valores estão restritos por uma “condição de massa” que controla o comportamento da  $m_{log}^2(q^2)$  na região do ultravioleta, ou seja,  $c_1 \in [0.15, 0.4]$  e  $c_2 \in [-1.07, -0.92]$ . Os parâmetros  $m_g$  e  $\rho$  controlam o comportamento da massa dinâmica na região do infravermelho e também são restritos por uma condição de massa, ou seja,  $m_g \in [300, 800]$  MeV e  $\rho \in [1.0, 8.0]$  [47].

Outro comportamento assintótico possível para a massa dinâmica também pode ser obtido através de uma equação de Schwinger-Dyson não linear, uma massa em lei de potência

$$m_{pl}^2(q^2) = \frac{m_g^4}{q^2 + m_g^2} \left[ \frac{\ln \left( \frac{q^2 + \rho m_g^2}{\Lambda^2} \right)}{\ln \left( \frac{\rho m_g^2}{\Lambda^2} \right)} \right]^{\gamma_2-1}, \quad (3.49)$$

onde  $\gamma_2 = \frac{(4+6c_1)}{5}$ , com as mesmas condições de massa impostas para  $m_g$  e  $\rho$ . O intervalo para  $c_1$  é diferente,  $c_1 \in [0.7, 1.3]$  [47]. Nós fixamos  $\rho = 4$ ,  $\gamma_1 = 0.084$  e  $\gamma_2 = 2.36$  em nossa análises desde que estes valores são aqueles que nos dão o menor valor de  $\chi^2/\nu$ .

A carga efetiva da QCD (3.43) pode agora ser expressa de forma mais geral, dependendo da massa dinâmica escolhida

$$\bar{\alpha}_i(q^2) = \frac{1}{b_0 \ln \left( \frac{q^2 + 4m_i^2(q^2)}{\Lambda^2} \right)} \quad (3.50)$$

### 3.4 O propagador não-perturbativo

---

onde  $i = log, pl$ . Podemos agora escrever uma expressão para o produto  $\alpha_i(\bar{q}^2)D(q^2)$  que garante a convergência das integrais (3.33) e (3.34)

$$\frac{1}{\alpha_i(\bar{q}^2)D(q^2)} = b_0[q^2 + m_i^2(q^2)] \ln \left[ \frac{q^2 + 4m_i(q^2)}{\Lambda^2} \right] \quad (3.51)$$

onde utilizamos  $g^2 = 4\pi\bar{\alpha}_i(q^2)$  na expressão (3.46). Um ponto muito importante é que  $\bar{\alpha}_{log}(q^2)$  e  $\bar{\alpha}_{pl}(q^2)$  domam o polo de Landau, isto é, eles exibem pontos fixos quando  $q^2 \rightarrow 0$ . Em um sentido matemático, estas cargas efetivas da QCD pertencem às mesmas classes dos acoplamentos holomórficos [48].

---

# Capítulo 4

## Resultados e discussões

Podemos agora verificar se este modelo é compatível com os resultados obtidos nos experimentos realizados no ATLAS<sup>1</sup> e TOTEM<sup>2</sup> do LHC. Tais experimentos têm a sensibilidade necessária para acessar os efeitos não-perturbativos, nos permitindo estudar o Pomeron LN. A quantidade observada em questão é a seção de choque diferencial e a seção de choque total, descritas teoricamente nas expressões (1.31) e (1.54). Entretanto, há divergências entre os dados medidos no ATLAS e no TOTEM. Por exemplo, a seção de choque total para  $\sqrt{s} = 7$  TeV foi de  $\sigma_{tot}^{pp} = 95.35 \pm 1.36$  [49] no ATLAS e  $\sigma_{tot}^{pp} = 98.58 \pm 2.23$  [50] no TOTEM, e assumindo que as incertezas são não correlacionadas, corresponde à uma diferença de  $1.4\sigma$ . Para o caso da energia de centro de massa  $\sqrt{s} = 8$  TeV, foi obtido  $\sigma_{tot}^{pp} = 96.07 \pm 0.92$  [51] no ATLAS e  $\sigma_{tot}^{pp} = 101.5 \pm 2.1$  [52] no TOTEM, onde a diferença foi ainda mais significativa,  $2.6\sigma$ . Este grande desacordo entre experimentos sugere diferentes cenários para o crescimento da seção de choque total e conseqüentemente para os parâmetros do Pomeron LN.

### 4.1 Dados experimentais

Desta forma, para investigar essa discrepância entre os resultados dos dois experimentos, vamos considerar dois *ensembles* de dados da seção de choque diferencial, um referente ao ATLAS e o outro ao TOTEM e realizar um ajuste global aos dados pra obter os parâmetros livres do modelo. Esta abordagem de “seleção de *ensemble*” é estatisticamente bem fundamentada e foi usada pela primeira vez nos estudo das discrepâncias de dados de raios cósmicos e seus efeitos na predição das seções de choque total  $pp$  em altas energias [53]. Posteriormente, o mesmo procedimento foi usado em um estudo do Tevatron, em Illinois, sobre a diferença entre os dados do CDF<sup>3</sup> e do E710/E811<sup>4</sup> e seus

---

<sup>1</sup>ATLAS, sigla para **A** Toroidal **L**H**C** Apparatu**S**.

<sup>2</sup>TOTEM, sigla para **T**OT**A**l **E**lastic and diffractive cross section **M**easurement.

<sup>3</sup>CDF, sigla para **C**ollider **D**etector at **F**ermilab.

<sup>4</sup>Experimentos do Fermilab.

## 4.2 Minimização e parâmetros

	ATLAS	TOTEM
$\frac{d\sigma}{dt}$ (7 TeV)	29	65
$\frac{d\sigma}{dt}$ (8 TeV)	29	53
$\frac{d\sigma}{dt}$ (13 TeV)	54	214
TOTAL	112	332

Tabela 4.1: Número de pontos para os dois *ensembles*.

efeitos nos limites extremos do intercepto do Pomeron suave [54]. Em todos os casos, foi verificada uma distinção muito clara entre os valores assintóticos da  $\sigma_{tot}^{pp}$ . Conforme veremos, as diferenças entre os dados do ATLAS e do TOTEM resultarão em valores diferentes para os parâmetros livres do Pomeron LN, e conseqüentemente levará a um comportamento assintótico diferente para  $\sigma_{tot}^{pp}$ . Com isso, os dois *ensembles* serão definidos como:

*Ensemble A*: dados do ATLAS para  $\frac{d\sigma}{dt}$  à  $\sqrt{s} = 7, 8$  e 13 TeV.

*Ensemble T*: dados do TOTEM para  $\frac{d\sigma}{dt}$  à  $\sqrt{s} = 7, 8$  e 13 TeV.

Na tabela 4.1, apresentamos o número de dados experimentais para cada valor de  $\sqrt{s}$ .

## 4.2 Minimização e parâmetros

Com os dados definidos, podemos estudar fenomenologicamente e realizar os ajustes globais para o *Ensemble A* [49, 51, 55] e o *Ensemble T* [56, 57, 58] com um  $|t|_{min} \leq |t| \leq 0.2 \text{ GeV}^2$ , onde os erros estatísticos e sistemáticos foram adicionados em quadratura. Adotamos  $|t|_{min} \sim 10|t|_{int}$  onde  $|t|_{int} = 0.071/\sigma_{tot}$ , uma vez que nestas regiões, o espalhamento nuclear domina. A escolha do limite superior para  $|t|$  será discutida a seguir e envolve a convolução das funções de onda do próton. Em todos os ajustes aos dados experimentais utilizamos o procedimento de ajuste  $\chi^2$ , discutido no apêndice A. Os ajustes foram feitos considerando um intervalo  $\chi^2 - \chi_{min}^2$  correspondendo a um nível de confiança de 90%.

Além da Reggeização da amplitude de espalhamento, precisamos também de uma convolução das funções de onda do próton  $G_p(q, k)$  mais sofisticada. Isso se deve ao fato de que os dados para a seção de choque diferencial no LHC diferem de forma significativa de um comportamento exponencial na região de pequeno  $|t|$ , conforme observado pela TOTEM *Collaboration* [57, 59, 60]. Como um resultado, o valor encontrado para a inclinação nuclear B (usando um ajuste exponencial para pequeno  $|t|$ ) pode ser considerado como um B médio, uma vez que os altos valores de  $\chi^2/\nu$  no ajuste do TOTEM mostram que o modelo exponencial é uma descrição muito simplificada dos dados [60]. Para

obter um melhor ajuste, a TOTEM *Collaboration* generalizou a exponencial pura para uma expansão da seguinte forma

$$\frac{d\sigma}{dt}(t) = \frac{d\sigma}{dt} \Big|_{t=0} \exp \left( \sum_{n=1}^{N_b} b_n t^n \right). \quad (4.1)$$

O caso  $N_b = 1$  corresponde à pura exponencial, que não é satisfatória. Uma descrição melhor dos dados para  $\sqrt{s} = 7$  TeV foi obtida para  $N_b = 3$  com um  $\chi^2/\nu = 1.22$  e  $p$ -valor = 8.0%, usando dados com  $|t|_{max} = 0.15$  GeV<sup>2</sup>, que corresponde ao maior intervalo antes que a seção de choque diferencial acelere o seu decaimento na região de mergulho. Baseado nessas considerações do comportamento de pequeno  $|t|$  da seção de choque diferencial em energias arbitrariamente altas, propomos a seguinte convolução de funções de onda de prótons em  $k^2 = 0$ :

$$G_p(q, 0) = F_1(q^2) = \exp \left[ - \left( \sum_{n=1}^{N_a} a_n |t|^n \right) \right], \quad (4.2)$$

lembrando que  $-t = q^2$ . Podemos investigar 3 casos diferentes para a expansão (4.2),  $N_a = 1$ ,  $N_a = 2$  e  $N_a = 3$ . Adotamos o teste estatístico padrão  $\chi^2$  para avaliar qual das 3 opções se adéqua melhor aos dados experimentais. Como na análise do TOTEM da inclinação nuclear B foi utilizado um intervalo  $0 \leq |t| \leq 0.15$  GeV<sup>2</sup>, em nossa análise, tomamos o intervalo  $|t| \leq 0.2$  GeV<sup>2</sup>, um limite superior próximo ao adotado pela TOTEM *Collaboration*.

O caso  $N_a = 1$  não é suportado pelos dois *ensembles* de dados. Entretanto,  $N_b = 2$  provê uma boa descrição para  $\frac{d\sigma}{dt}$  para ambos os *ensembles*. Como queremos um número mínimo de parâmetros livre para o modelo, adotamos  $N_b = 2$ . Dessa forma, nosso modelo possui 4 parâmetros livres:  $m_g$ ,  $\epsilon$ ,  $a_1$  e  $a_2$ . Em nossa análise, tomamos um intervalo  $\chi^2 - \chi_{min}^2 = 7.78$ , correspondendo a um nível de confiança de 90%. Outros parâmetros do modelo foram fixados como a inclinação da trajetória do Pomeron LN  $\alpha'_p = 0.25$  GeV<sup>-2</sup>, que está em acordo com o usualmente obtido para o Pomeron suave nas análises de modelos a la Regge. Além disso, em todos os ajustes, utilizamos  $n_f = 3$  e  $\Lambda = 284$  MeV pois é o valor adotado em outros cálculos de processos de interação forte [61]. O propósito aqui é utilizar os mesmos valores adotados em outros estudos fenomenológicos, pois queremos analisar exclusivamente o comportamento da massa dinâmica do glúon  $m_g$  e verificar se há alguma universalidade em seu valor.

Os valores dos parâmetros do Pomeron LN no caso da massa dinâmica logarítmica (3.48) está exemplificado na Tabela 4.2 para ambos os *ensembles* A e T. O mesmo é apresentado na Tabela 4.3 para a massa dinâmica em lei de potência (3.49).

### 4.3 Seções de choque diferencial e total

	<i>Ensemble A</i>	<i>Ensemble T</i>
$m_g$ (GeV)	$0.356 \pm 0.025$	$0.380 \pm 0.023$
$\epsilon$	$0.0753 \pm 0.0024$	$0.0892 \pm 0.0027$
$a_1$ (GeV <sup>-2</sup> )	$1.373 \pm 0.017$	$1.491 \pm 0.019$
$a_2$ (GeV <sup>-4</sup> )	$2.50 \pm 0.53$	$2.77 \pm 0.60$
$\nu$	108	328
$\chi^2/\nu$	0.71	0.67

Tabela 4.2: Valores para o pomeron de LN obtido em fits para dados de  $d\sigma^{pp}/dt$  utilizando a massa dinâmica logarítmica  $m_{log}(q^2)$ .

	<i>Ensemble A</i>	<i>Ensemble T</i>
$m_g$ (GeV)	$0.421 \pm 0.030$	$0.447 \pm 0.026$
$\epsilon$	$0.0753 \pm 0.0025$	$0.0892 \pm 0.0027$
$a_1$ (GeV <sup>-2</sup> )	$1.517 \pm 0.019$	$1.689 \pm 0.021$
$a_2$ (GeV <sup>-4</sup> )	$2.05 \pm 0.45$	$1.70 \pm 0.51$
$\nu$	108	328
$\chi^2/\nu$	0.64	0.90

Tabela 4.3: Valores para o pomeron de LN obtido em fits para dados de  $d\sigma^{pp}/dt$  utilizando a massa dinâmica em lei de potência  $m_{pl}(q^2)$ .

### 4.3 Seções de choque diferencial e total

As curvas para a seção de choque diferencial, tanto com a massa dinâmica logarítmica quanto com a lei de potência, em função de  $|t|$ , comparadas com os dados experimentais do ATLAS e do TOTEM são mostradas na Figura 4.1.

A dependência da seção de choque total e diferencial com a energia é mediada pelo parâmetro  $\epsilon$ , e notamos que para cada *ensemble*, seu valor não é sentido pelo tipo da massa dinâmica (logarítmica ou lei de potência) usada no ajuste. Os valores de  $\epsilon$  obtidos foram iguais para o *ensemble A*,  $\epsilon = 0.075$  e para o *ensemble T*,  $\epsilon = 0.089$ . Conforme mencionado anteriormente, a diferença nos valores de  $\epsilon$  para os dois *ensembles* dá origem comportamentos diferentes para o crescimento da seção de choque total  $\sigma_{tot}(s)$ . As previsões do modelo para  $\sigma_{tot}^{pp}$  à  $\sqrt{s} = 7, 8$  e  $13$  TeV são apresentadas na Tabela 4.4.

As curvas para  $\sigma_{tot}(s)$  correspondendo aos dois *ensembles* e as duas massas dinâmicas é apresentada na Figura 4.2.

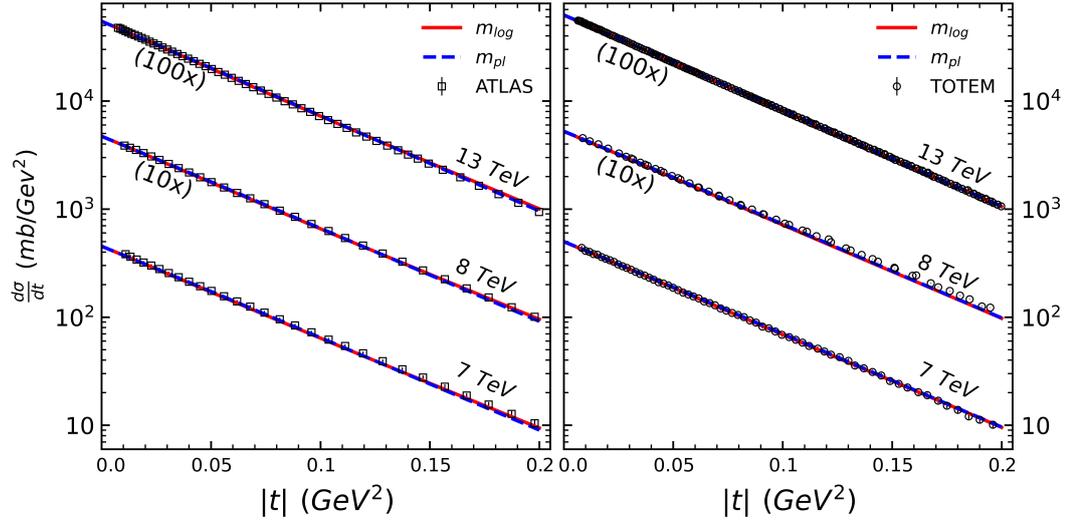


Figura 4.1: Seção de choque diferencial em função de  $|t|$  para diferentes massas dinâmicas e para diferentes  $\sqrt{s}$ . A curva sólida vermelha foi obtida com a massa dinâmica logarítmica e a curva tracejada azul com a massa dinâmica lei de potência.

$\sqrt{s}$ (TeV)	$\sigma_{tot}^{pp}$ (mb)		
	ATLAS	$m_{log}$	$m_{pl}$
7	$95.35 \pm 1.36$	95.0	94.2
8	$96.07 \pm 0.92$	96.9	96.2
13	$104.68 \pm 1.09$	104.3	103.5
$\sqrt{s}$ (TeV)	$\sigma_{tot}^{pp}$ (mb)		
	TOTEM	$m_{log}$	$m_{pl}$
7	$99.1 \pm 4.3$	99.6	99.0
	$98.0 \pm 2.5$		
	$98.6 \pm 2.2$		
	$98.3 \pm 2.8$		
8	$101.5 \pm 2.1$	102.0	101.4
	$101.9 \pm 2.1$		
	$103.0 \pm 2.3$		
	$102.9 \pm 2.3$		
	$101.7 \pm 2.9$		
13	$110.6 \pm 3.4$	111.3	110.9
	$109.5 \pm 3.4$		
	$110.3 \pm 3.5$		

Tabela 4.4: Valores previstos para a seção de choque total obtidos para os dois *ensembles* e para ambas as massas dinâmicas.

## 4.4 Massas dinâmicas, cargas efetivas e propagadores

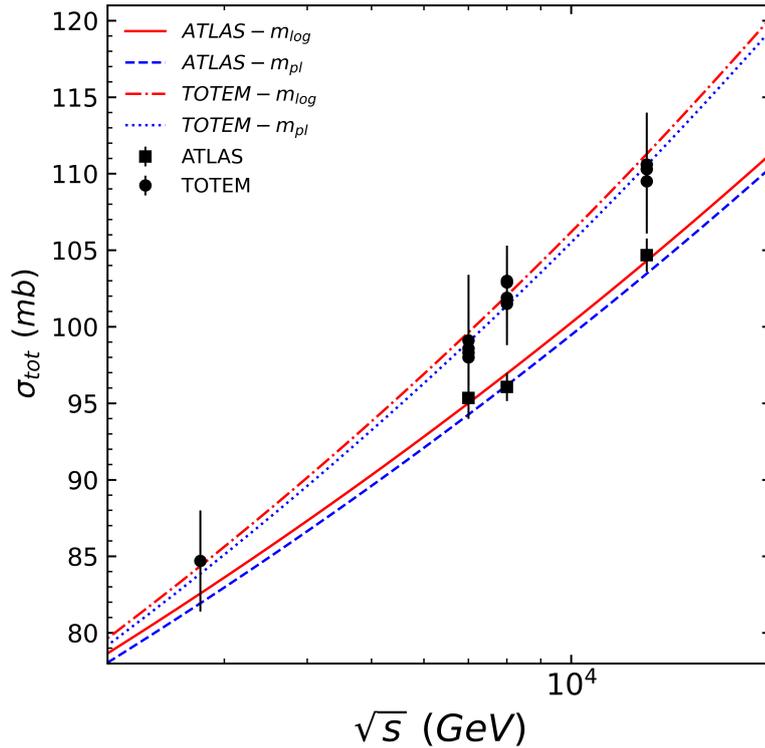


Figura 4.2: Seção de choque total em função da energia de centro de massa para as diferentes massas dinâmicas. As curvas sólida vermelha, ponto-tracejada vermelha, tracejada azul e pontilhada azul correspondem ao Ensemble A usando  $m_{log}(q^2)$ , Ensemble T usando  $m_{log}(q^2)$ , Ensemble A usando  $m_{pl}(q^2)$  e Ensemble T usando  $m_{pl}(q^2)$ , respectivamente.

## 4.4 Massas dinâmicas, cargas efetivas e propagadores

Com os valores da massa dinâmica  $m_g$ , podemos ilustrar o comportamento das massas dinâmicas  $m_i(q^2)$ , das cargas efetivas da QCD  $\bar{\alpha}_i(q^2)$  e do produto  $\bar{\alpha}_i(q^2)D(q^2)$  em função de  $q^2$ . Isto nos dá uma noção da sensibilidade destas quantidades frente aos resultados obtidos nos ajustes. As Figuras 4.3, 4.4 e 4.5 apresentam estas curvas.

É interessante notar que considerando o mesmo tipo de massa dinâmica, a mudança do *Ensemble* A para o *Ensemble* T levou um aumento de cerca de 7% de  $m_g$ , enquanto que quando consideramos o mesmo *Ensemble*, a mudança da massa dinâmica logarítmica para a do tipo lei de potência levou um aumento de 18%. O último já era esperado, uma vez que massas do tipo lei de potência decrescem muito mais rápido do que as do tipo logarítmicas, conforme a Figura 4.3 e este efeito é exatamente compensado por valores maiores de  $m_g$ .

Pela Figura 4.4, podemos ver o comportamento da carga efetiva da QCD e porque ela possui dois regimes distintos. Para pequeno  $q^2$ , ou pequeno  $|t|$ ,

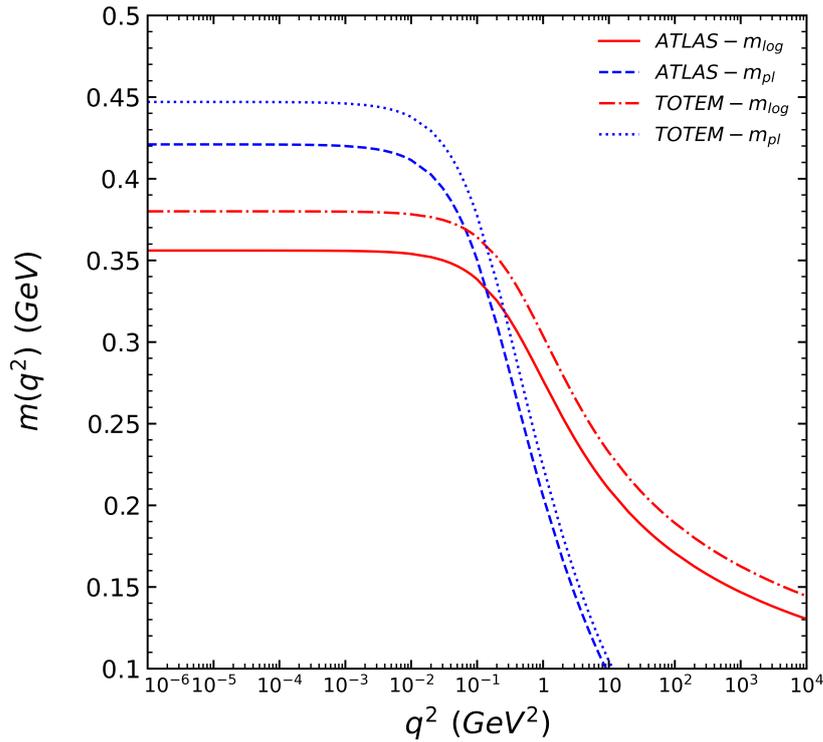


Figura 4.3: Massa dinâmica em função do momentum transferido  $q^2$  para as massas logarítmica e lei de potência, para os *ensembles* A e T.

o acoplamento da QCD é suficientemente grande para que o tratamento perturbativo possa ser aplicado, de forma que devemos buscar alternativas não-perturbativas. Conforme a energia aumenta, o acoplamento diminui, permitindo utilizar técnicas perturbativas, semelhantes ao que se faz em QED. Além disso, juntamente com a Figura 4.3, vemos que no regime perturbativo, a massa dinâmica vai à zero, indicando que este é um fenômeno intrinsecamente não-perturbativo.

## 4.5 Acoplamento do Pomeron

Agora que possuímos os valores fenomenológicos para a massa dinâmica do glúon, podemos calcular a intensidade  $\beta_0$  do acoplamento do Pomeron LN aos quarks, dada pela expressão (3.28). Na tabela 4.5 apresentamos os resultados obtidos. A incerteza nestas quantidades foi estimada variando a massa  $m_g$  do glúon, enquanto todos os outros valores foram mantidos constantes. É óbvio que este procedimento não determina a incerteza formal de  $\beta_0$ . Entretanto, os valores de  $\beta_0$  são mais sensíveis à  $m_g$  do que à variações dos outros parâmetros do modelo. Dessa forma, apesar da abordagem simples, é possível ter uma boa estimativa da incerteza de  $\beta_0$ .

É importante mencionar que as expressões (3.46)-(3.49) são expressões ob-

## 4.5 Acoplamento do Pomeron

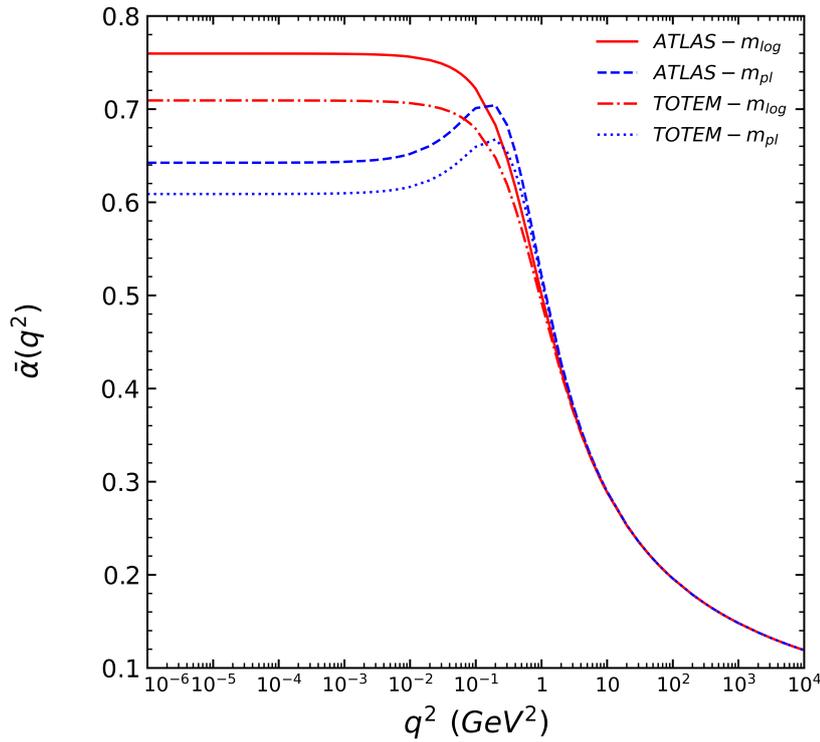


Figura 4.4: Carga efetiva em função do momentum transferido  $q^2$  para as massas logarítmica e lei de potência, para os *ensembles* A e T.

	<i>Ensemble</i> A	<i>Ensemble</i> T
Logarítmica	$2.33^{+0.39}_{-0.30} \text{ GeV}^{-1}$	$2.04^{+0.28}_{-0.22} \text{ GeV}^{-1}$
Lei de potência	$2.13^{+0.33}_{-0.25} \text{ GeV}^{-1}$	$1.91^{+0.22}_{-0.19} \text{ GeV}^{-1}$

Tabela 4.5: Valores para a intensidade  $\beta_0$  do acoplamento do Pomeron de LN aos quarks para as massas logarítmicas e em lei de potência.

tidas dos ajustes das soluções das equações de Schwinger-Dyson. O estudo sistemático das funções de Green da QCD através dos métodos funcionais de Schwinger ofereceu acesso à mecanismos dinâmicos responsáveis pelas propriedades não-perturbativas da teoria. Por outro lado, até onde sabemos, os resultados mais recentes de QCD na rede para a intensidade do Pomeron foi obtido na aproximação “*quenched*” que despreza os loops fermiônicos. Além disso, a dependência do acoplamento com o momentum é desprezada em cálculos na rede, e geralmente é adotado a aproximação  $g_{eff}(p) = g$ . Desta forma, consideramos que os resultados da QCD na rede utilizando a fórmula (3.39) é apenas um guia, confiando mais nos intervalos  $\beta_{0,ATLAS}$  e  $\beta_{0,TOTEM}$ , calculados via o formalismo de Schwinger-Dyson.

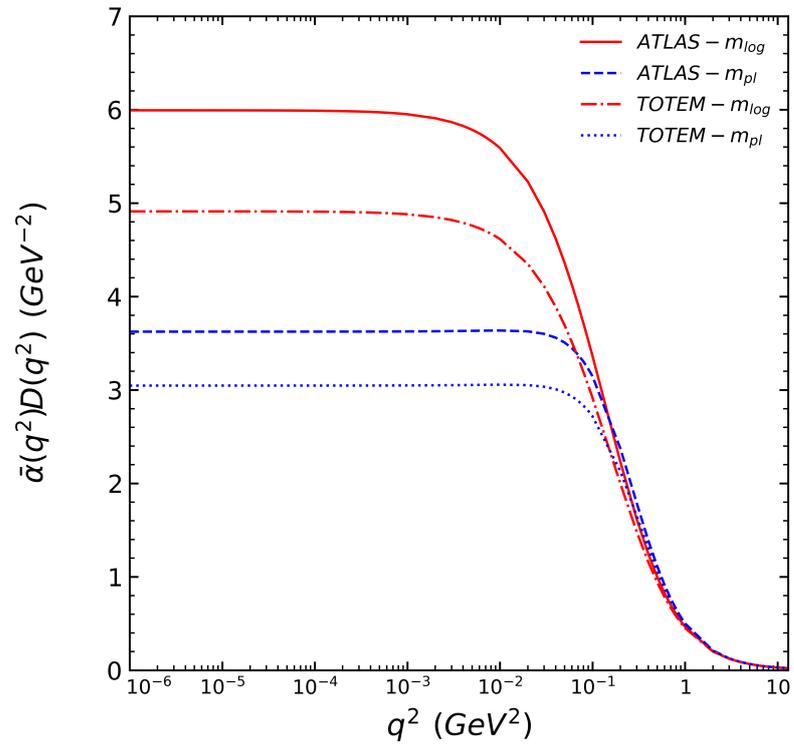


Figura 4.5: Produto da carga efetiva pelo propagador em função do momentum transferido  $q^2$  para as massas logarítmica e lei de potência, para os *ensembles* A e T.

---

# Considerações Finais e Perspectivas

Verificamos que o modelo de troca de dois glúons nos dá uma descrição muito boa para os dados da seção de choque diferencial  $\frac{d\sigma}{dt}$ , desde que façamos a reggeização da amplitude de espalhamento elástico, conforme previsto pela QCD, e escolhamos adequadamente uma convolução das funções de onda do próton em  $k = 0$ . Mais precisamente, avaliamos a plausibilidade relativa das diferentes expansões para o fator de forma e utilizamos dois tipos de cargas efetivas (acoplamentos). Descrevemos pela primeira vez os dados da seção de choque diferencial para altas energias, no intervalo de  $0 < |t| \leq 0.2 \text{ GeV}^2$ , usando um modelo inspirado em LN. Obtivemos excelentes valores também para a seção de choque total para os valores de 7, 8 e 13 TeV.

Planejamos estender nossa análise para a seção de choque diferencial no intervalo  $|t| > 0.2 \text{ GeV}^2$ , uma vez que, para grande  $|t|$ , acredita-se que os Odderons possam ter um papel importante [62]. Em cálculos na região de  $|t|$  da ordem de 1 GeV, é necessário obter a parte real da amplitude de espalhamento,  $\text{Re}\mathcal{A}(s, t)$ . Por isso, é essencial o desenvolvimento de técnicas apropriadas de relação de dispersão.

Estudos posteriores do comportamento de outras formas do fator de forma são interessantes. Por exemplo, dados experimentais de fatores de forma nucleares do tipo espaço e do tipo tempo foram analisados em termos de um modelo de duas componentes para o fator de forma eletromagnético [63, 64]. Desde que os fatores de forma eletromagnético e hadrônico têm estruturas similares (ambos têm zeros na mesma região do espaço de momentum transferido [65]), o estudo de fatores de forma inspirados no fator de forma eletromagnético de duas componentes e outras formas funcionais eletromagnéticas se torna uma extensão natural deste trabalho.

Estamos também interessados em testar a sensibilidade de nossos resultados para constantes de acoplamento que vão à zero na região de infravermelho profundo como observado em simulações na rede [66]. Em particular, estamos interessados no propagador do glúon do tipo Curci-Ferrari e na constante de acoplamento obtida a partir desta abordagem [67].

---

# Apêndice A

## Qualidade do ajuste e MINUIT

Neste apêndice, apresentamos o método utilizado para obter o melhor ajuste e a biblioteca (em FORTRAN) utilizada para obter os parâmetros.

### A.1 Método dos mínimos quadrados

O *método dos mínimos quadrados* é utilizado para deduzir a melhor estimativa de um mensurando e é obtido através de um método mais geral, o *método de máxima verossimilhança* [68]. As condições que devem ser satisfeitas são:

- As distribuições de erros são gaussianas.
- A melhor função  $f(x; a_1, a_2, \dots, a_p)$  tem forma e número de parâmetros predeterminados.

Considerando o conjunto de  $n$  pontos experimentais

$$\{x_1, y_1, \sigma_1\}, \{x_2, y_2, \sigma_2\}, \dots, \{x_i, y_i, \sigma_i\}, \dots, \{x_n, y_n, \sigma_n\}, \quad (\text{A.1})$$

onde  $\sigma_i$  é a incerteza associada à variável  $y_i$ . A probabilidade  $P_i$  de obter um resultado qualquer  $\{x_i, y_i, \sigma_i\}$  é dada por

$$P_i = \frac{C}{\sigma_i} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{y_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2}, \quad (\text{A.2})$$

onde  $\mu_i$  é o valor médio verdadeiro correspondente a  $y_i$  e  $C$  é uma constante de proporcionalidade. A probabilidade  $P$  de ocorrer um conjunto de resultados é o produto das probabilidades de cada resultado, logo

$$P = \prod_{i=1}^n P_i = \frac{C^n}{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2}. \quad (\text{A.3})$$

De acordo com o método da máxima verossimilhança, a melhor aproximação  $f(x)$  deve ser tal que a probabilidade é máxima, se  $f(x)$  é admitida como

## A.2 Teste de $\chi^2$ -reduzido

---

a função verdadeira. Substituindo  $\mu_i$  por  $f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_p)$  em (A.3), obtemos

$$P = \frac{C^n}{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} e^{-\frac{1}{2}\chi^2}, \quad (\text{A.4})$$

onde

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i - f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_p)}{\sigma_i} \right]^2. \quad (\text{A.5})$$

Os parâmetros  $a_1, a_2, \dots, a_p$  devem ser tais que a probabilidade  $P$  seja máxima. Pela dependência de  $P$  em  $\chi^2$ , de acordo com (A.4), vemos que para que  $P$  seja máximo,  $\chi^2$  deve ser mínimo.

## A.2 Teste de $\chi^2$ -reduzido

A partir da quantidade (A.5), podemos definir o chamado  $\chi^2$ -reduzido, definido por

$$\chi_{red}^2 = \frac{\chi^2}{n-p} = \frac{\chi^2}{\nu} \quad (\text{A.6})$$

onde  $p$  é o número de parâmetros ajustados e  $\nu$  é o chamado graus de liberdade do nosso *ensemble*.

A função densidade de probabilidade para  $\chi^2$  é dada por

$$h(\chi^2) = \frac{(\chi^2)^{\frac{1}{2}(\nu-2)} e^{-\frac{1}{2}\chi^2}}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})}, \quad (\text{A.7})$$

onde a função  $\Gamma(q)$  é a função gama usual, relacionada com a função fatorial por

$$\Gamma(q) = (q-1)!. \quad (\text{A.8})$$

Pode-se mostrar que os valores médios de  $\chi^2$  e  $\chi_{red}^2$  são

$$\bar{\chi}^2 = \nu \quad (\text{A.9})$$

$$\bar{\chi}_{red}^2 = 1. \quad (\text{A.10})$$

Portanto, um bom ajuste é obtido se encontrarmos um valor de  $\chi_{red}^2$  próximo à 1.

## A.3 MINUIT

Para obtermos os parâmetros livres de um determinado modelo, podemos utilizar a biblioteca MINUIT do CERN [69]. O MINUIT é uma ferramenta

## APÊNDICE A. QUALIDADE DO AJUSTE E MINUIT

---

$x$	$y$	$\sigma_y$
0.00	0.97	0.05
0.08	1.20	0.05
0.16	1.40	0.05
0.24	1.63	0.05
0.32	1.73	0.05
0.40	1.91	0.05
0.48	2.01	0.05
0.56	2.08	0.05
0.64	2.07	0.05
0.72	2.15	0.05
0.80	2.09	0.05
0.88	2.12	0.05
0.96	2.07	0.05
1.04	1.93	0.05
1.12	1.88	0.05
1.20	1.69	0.05
1.28	1.53	0.05
1.36	1.41	0.05
1.44	1.20	0.05
1.52	0.91	0.05

Tabela A.1: Dados experimentais.

projetada para encontrar valores mínimos de uma função com múltiplos parâmetros e analisar o formato da solução ao redor do mínimo. Suas principais aplicações são: análises estatísticas, funções  $\chi^2$  e log-verossimilhança e cálculo do melhor ajuste para parâmetros e incertezas, incluindo correlação entre as incertezas.

A seguir apresentamos um exemplo simples de como utilizar o MINUIT para encontrar os melhores parâmetros que minimizam  $\chi^2$ .

Na tabela A.1 apresentamos um conjunto de dados experimentais fictícios.

Suponha que a lei que descreve o fenômeno seja do tipo

$$f(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3. \quad (\text{A.11})$$

Como o processo é iterativo, precisamos de um “chute inicial” para os parâmetros  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$ . Quanto mais próximo do valor “correto” o chute inicial for, mais rápida a minimização será. Vamos escolher  $a_1 = -2$ ,  $a_2 = 3$  e  $a_3 = 1$ . O código a seguir implementa a minimização.

```
PROGRAM ajuste
implicit real*8 (a-h,o-z)
EXTERNAL FCN,FUTIL
```

### A.3 MINUIT

---

```
OPEN(1,FILE='minimiza.ini',status='OLD')
OPEN(2,FILE='minimiza.min',status='UNKNOWN')
CALL MINTIO(1,2,7)
CALL MINUIT(FCN,FUTIL)
CLOSE(1)
CLOSE(2)
STOP
END
```

O arquivo `minimiza.ini` contém os parâmetros utilizados como *input*, enquanto o arquivo `minimiza.min` contém os parâmetros obtidos e o valor de  $\chi^2$ . A subrotina `FCN` lê os dados experimentais e calcula o valor de  $\chi^2$  explicitamente. Além disso, é na função `FUTIL` que inserimos a forma funcional da função [A.11](#).

```
SUBROUTINE FCN(NPAR,GRAD,FVAL,XVAL,IFLAG,FUTIL)
implicit real*8 (a-h,o-z)
double precision a1,a2,a3
double precision X(1500),Y(1500),DY(1500)
double precision SIG,FTHEO
double precision CHIAUX,CHISQ,FUTIL,S
dimension XVAL(NPAR),GRAD(NPAR)
EXTERNAL FUTIL
COMMON/inte/j
IF (IFLAG .EQ. 1) THEN
K=1
OPEN(3,FILE='dados.dat',status='OLD')
10 READ(3,*,END=20) X(K),Y(K),DY(K)
K=K+1
GO TO 10
20 NDAT=K-1
CLOSE(3)
END IF
CHISQ=0.D0
a1=XVAL(1)
a2=XVAL(2)
a3=XVAL(3)
DO j=1,NDAT
FTHEO=FUTIL(a1,a2,a3,X(J))
SIG=DABS(DY(j))
CHIAUX=((FTHEO-Y(j))/SIG)**2.d0
CHISQ=CHISQ+CHIAUX
END DO
FVAL=CHISQ
RETURN
```

## APÊNDICE A. QUALIDADE DO AJUSTE E MINUIT

---

```
END

FUNCTION FUTIL(a1,a2,a3,X)
double precision X,FUTIL
double precision func,xx
double precision a1,a2,a3
double precision aa1,aa2,aa3
COMMON/inte/j
aa1=a1
aa2=a2
aa3=a3
IF (1 .le. j .and. j .le. 20) THEN
xx=X
func=aa1*xx*xx+aa2*xx+aa3
END IF
FUTIL=func
RETURN
END
```

Na tabela [A.2](#) apresentamos os resultados.

$a_1$	$-2.0497 \pm 0.1474$
$a_2$	$3.0824 \pm 0.2321$
$a_3$	$0.97642 \pm 0.0761$
$\nu$	17
$\chi^2/\nu$	0.349

Tabela A.2: Parâmetros obtidos usando o MINUIT.

Como o valor de  $\chi_{red}^2$  foi próximo de 1, os parâmetros obtidos são muito razoáveis. Na figura [A.1](#) apresentamos a curva ([A.11](#)) usando os parâmetros de [A.2](#).

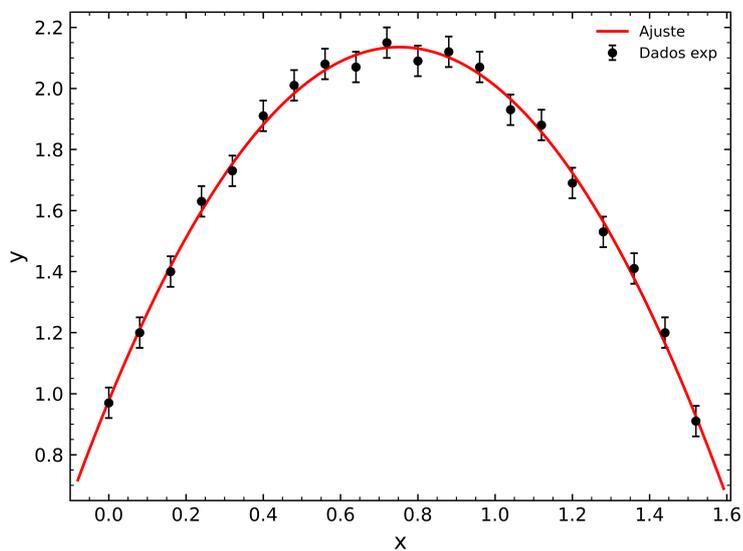


Figura A.1: Ajuste aos dados experimentais.

---

# Apêndice B

## Integração numérica e VEGAS

Neste apêndice, apresentamos uma pequena revisão da integração de Monte Carlo e do algoritmo VEGAS utilizado no cálculo das integrais (3.28), (3.33) e (3.34).

### B.1 Integração de Monte Carlo

Considere a integral de uma função de  $n$  variáveis  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  sobre um volume  $\Omega$  [70]

$$I = \int_{\Omega} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}). \quad (\text{B.1})$$

Se  $M$  pontos  $(\mathbf{x})$  são selecionados aleatoriamente de uma distribuição de pontos em  $\Omega$ , com uma densidade  $p(\mathbf{x})$ , então pode-se mostrar que a integral é aproximada por

$$S^{(1)} = \frac{1}{M} \sum_{\mathbf{x}} \frac{f(\mathbf{x})}{p(\mathbf{x})}, \quad (\text{B.2})$$

com a condição de que

$$S^{(1)} \rightarrow I, \quad \text{quando} \quad M \rightarrow \infty. \quad (\text{B.3})$$

A função densidade de probabilidade é normalizada à 1

$$\int_{\Omega} d\mathbf{x} p(\mathbf{x}) = 1. \quad (\text{B.4})$$

Espera-se que a quantidade  $S^{(1)}$  flutue em torno do valor verdadeiro da integral enquanto diferentes conjuntos de  $M$  pontos aleatórios são escolhidos. A variância dessa flutuação é dada por

$$\sigma^2 = \left\{ \int_{\Omega} d\mathbf{x} \frac{f^2(\mathbf{x})}{p(\mathbf{x})} - \left[ \int_{\Omega} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \right]^2 \right\} M^{-1}. \quad (\text{B.5})$$

## B.2 VEGAS

---

Para  $M$  grande,  $\sigma^2$  é aproximado por

$$\sigma^2 \simeq \frac{S^{(2)} - (S^{(1)})^2}{M - 1}, \quad (\text{B.6})$$

onde

$$S^{(2)} = \frac{1}{M} \sum_{\mathbf{x}} \left( \frac{f(\mathbf{x})}{p(\mathbf{x})} \right)^2. \quad (\text{B.7})$$

O desvio padrão  $\sigma$  indica a precisão de  $S^{(1)}$  como uma estimativa de  $I$ . Existem inúmeras técnicas usadas para reduzir a variância  $\sigma^2$  para um valor fixo de  $M$ . Duas das mais populares é a amostragem por importância e a amostragem estratificada.

## B.2 VEGAS

O método escolhido foi o VEGAS [70], um algoritmo de integração multidimensional adaptativa, baseado na amostragem por importância. Algumas características desse algoritmo são:

- Uma estimativa de erro razoável para a integral é facilmente computada.
- O integrando não precisa ser contínuo para que o algoritmo funcione e, em particular, funções degrau não são problemáticas. Então integração em hipervolumes de formatos irregulares é direta.
- A taxa de convergência é independente da dimensão da integral.
- O algoritmo é adaptativo. Ou seja, ele automaticamente concentra suas avaliações do integrando naquelas regiões onde o integrando é maior em magnitude.

---

## Referências Bibliográficas

- [1] G. B. Bopsin, E. G. S. Luna, A. A. Natale and M. Peláez, *Phys. Rev. D* 107, 114011 (2023).
- [2] V. Barone and E. Predazzi, *High Energy Particle Diffraction*, Springer (2002).
- [3] P. D. B. Collins, *Introduction to Regge Theory and High Energy Physics*, Cambridge University Press (1977).
- [4] J. R. Forshaw and D. A. Ross. *Quantum Chromodynamics and the Pomeron*, Cambridge University Press (1997).
- [5] F. W. Byron and R. W. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*, Dover (1992).
- [6] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for physicists*, Elsevier (2007).
- [7] E. Butkov, *Mathematical Physics*, Addison-Wesley (1973).
- [8] S. Donnachie *et al.*, *Pomeron Physics and QCD*, Cambridge University Press (2002).
- [9] T. Regge, *Il Nuovo Cimento* 8, 671 (1958); T. Regge, *Il Nuovo Cimento* 14, 951 (1959).
- [10] R. F. Avila and P. Gauron and B. Nicolescu, *Eur. Phys. J. C* 49, 581 (2007).
- [11] H. J. Rothe, *Lattice Gauge Theory*, McGraw-Hill (2012).
- [12] P. V. Landshoff and J. C. Polkinghorne, *Nucl. Physics B*32, 541 (1971).
- [13] F. E. Low, *Phys. Rev. D* 12, 163 (1975).
- [14] S. Nussinov, *Phys. Rev. Lett.* 34, 1268 (1975).
- [15] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, World Scientific (1980).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [16] C. D. Roberts and A. G. Williams, *Prog. Part. Nucl. Phys.* 33, 477 (1994).
- [17] K. G. Wilson, *Phys. Rev. D* 10, 2445 (1974).
- [18] L. F. Abbott. *Acta Physica Polonica B*13, 33 (1982).
- [19] G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B*185, 189 (1981); S. Deser, J. Kay, K. Stelle, *Phys. Rev. Lett.* 38, 527 (1977).
- [20] D. Binosi and J. Papavassiliou, *Physics Reports* 479, 1 (2009).
- [21] J. F. Gunion, D. Soper, *Rev. D* 15, 2617 (1977).
- [22] E. M. Levin and M. G. Ryskin, *Sov. J. Nucl. Phys.* 34, 619 (1981).
- [23] D. G. Richards, *Nucl. Phys. B* 258, 267 (1985).
- [24] F. Halzen, G. Krein, and A. A. Natale, *Phys. Rev. D* 47, 295 (1993); M. B. Gay Ducati, F. Halzen, and A. A. Natale, *Phys. Rev. D* 48, 2324 (1993); D. S. Henty, C. Parrinello, and D. G. Richards, *Phys. Lett. B* 369, 130 (1996); M. B. Gay Ducati and W. K. Sauter, *Phys. Lett. B* 521, 259 (2001).
- [25] P. V. Landshoff and O. Nachtmann, *Z. Phys. C* 35, 405 (1987).
- [26] A. Donnachie and P. V. Landshoff, *Nucl. Phys. B* 311, 509 (1988); J. R. Cudell, A. Donnachie, and P. V. Landshoff, *Nucl. Phys. B* 322, 55 (1989); J. R. Cudell, *Nucl. Phys. B* 336, 1 (1990).
- [27] J. R. Cudell and D. A. Ross, *Nucl. Phys. B* 359, 247 (1991).
- [28] F. E. Canfora, D. Dudal, I. F. Justo, P. Pais, P. Salgado-Rebolledo, L. Rosa, and D. Vercauteren, *Phys. Rev. C* 96, 025202 (2017).
- [29] E. G. S. Luna, V. A. Khoze, A. D. Martin, and M. G. Ryskin, *Eur. Phys. J. C* 59, 1 (2009); E. G. S. Luna, V. A. Khoze, A. D. Martin, and M. G. Ryskin, *Eur. Phys. J. C* 69, 95 (2010); C. A. S. Bahia, M. Broilo, and E. G. S. Luna, *Phys. Rev. D* 92, 074039 (2015); M. Broilo, E. G. S. Luna, and M. J. Menon, *Phys. Lett. B* 781, 616 (2018); M. Broilo, D. A. Fagundes, E. G. S. Luna, and M. J. Menon, *Phys. Lett. B* 799, 135047 (2019); M. Broilo, D. A. Fagundes, E. G. S. Luna, and M. J. Menon, *Eur. Phys. J. C* 79, 12 (2019).
- [30] M. Broilo, D. A. Fagundes, E. G. S. Luna, and M. Peláez, *Phys. Rev. D* 103, 014019 (2021).
- [31] M. T. Grisaru, H. J. Schnitzer, and H. -S. Tsao, *Phys. Rev. Lett.* 30, 811 (1973); M. T. Grisaru, H. J. Schnitzer, and H. -S. Tsao, *Phys. Rev. D* 8, 4498 (1973).

- [32] L. N. Lipatov, *Yad. Fiz.* 23, 642 (1976).
- [33] V. S. Fadin, V. E. Sherman, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 23, 599 (1976); V. S. Fadin, V. E. Sherman, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 72, 1640 (1977).
- [34] V. S. Fadin, E. A. Kuraev, and L. N. Lipatov, *Phys. Lett. B* 60, 50 (1975); L. N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* 23, 338 (1976); V. S. Fadin, E. A. Kuraev, and L. N. Lipatov, *Sov. Phys. JETP* 44, 443 (1976); V. S. Fadin, E. A. Kuraev, and L. N. Lipatov, *Sov. Phys. JETP* 45, 199 (1977); Y. Y. Balitsky and L. N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* 28, 822 (1978).
- [35] A. C. Aguilar, A. A. Natale, and P. S. Rodrigues da Silva, *Phys. Rev. Lett.* 90, 152001 (2003).
- [36] A. Cucchieri and T. Mendes, *PoS LAT2007*, 297 (2007), arXiv:0710.0412 [hep-lat]. A. Cucchieri and T. Mendes, *Phys. Rev. Lett.* 100, 241601 (2008). A. Cucchieri and T. Mendes, *Phys. Rev. D* 81, 016005 (2010). A. Cucchieri and T. Mendes, *PoS QCD-TNT09*, 026 (2009), arXiv:1001.2584 [hep-lat].
- [37] P. O. Bowman, U. M. Heller, D. B. Leinweber, M. B. Parappilly, A. Sternbeck, L. von Smekal, A. G. Williams, and J. Zhang, *Phys. Rev. D* 76, 094505 (2007); I. L. Bogolubsky, E. M. Ilgenfritz, M. Muller-Preussker, and A. Sternbeck, *PoS LAT2007*, 290 (2007), arXiv:0710.1968 [hep-lat]; O. Oliveira and P. J. Silva, *PoS LAT2009*, 226 (2009), arXiv:0910.2897 [hep-lat]; I. L. Bogolubsky, E. M. Ilgenfritz, M. Muller-Preussker, and A. Sternbeck, *Phys. Lett. B* 676, 69 (2009).
- [38] K. -I. Kondo, *Phys. Lett. B* 514, 335 (2001); A. Cucchieri, T. Mendes, and E. M. S. Santos, *Phys. Rev. Lett.* 103, 141602 (2009); P. Bicudo, D. Binosi, N. Cardoso, O. Oliveira, and P. J. Silva, *Phys. Rev. D* 92, 114514 (2015); A. Cucchieri, D. Dudal, T. Mendes, O. Oliveira, M. Roelfs, and P. J. Silva, arXiv:1812.00429.
- [39] L. von Smekal, A. Hauck and R. Alkofer, *Phys. Rev. Lett.* 79, 3591 (1997); C. S. Fischer and J. M. Pawłowski, *Phys. Rev. D* 75, 025012 (2007); A. C. Aguilar, D. Binosi, C. T. Figueiredo, and J. Papavassiliou, *Eur. Phys. J. C* 78, 181 (2018); C. S. Fischer, J. M. Pawłowski, A. Rothkopf, and C. A. Welzbacher, *Phys. Rev. D* 98, 014009 (2018).
- [40] J. M. Cornwall, *Phys. Rev. D* 26, 1453 (1982).
- [41] A.C. Aguilar and J. Papavassiliou, *JHEP* 0612, 012 (2006).
- [42] A. C. Aguilar, D. Binosi, J. Papavassiliou, and J. Rodriguez-Quintero, *Phys. Rev. D* 80, 085018 (2009); A. C. Aguilar, D. Binosi, and J. Papavassiliou, *JHEP* 1007, 002 (2010).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [43] J. M. Cornwall and J. Papavassiliou, Phys. Rev. D 40, 3474 (1989); J. Papavassiliou and J. M. Cornwall, Phys. Rev. D 44, 1285 (1991).
- [44] N. J. Watson, Nucl. Phys. B 494, 388 (1997); D. Binosi and J. Papavassiliou, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 121, 281 (2003).
- [45] L. F. Abbott, Nucl. Phys. B 185, 189 (1981); A. Denner, G. Weiglein, and S. Dittmaier, Phys. Lett. B 333, 420 (1994); S. Hashimoto, J. Kodaira, Y. Yasui, and K. Sasaki, Phys. Rev. D 50, 7066 (1994); J. Papavassiliou, Phys. Rev. D 51, 856 (1995); D. Binosi and J. Papavassiliou, Phys. Rev. D 66, 111901(R) (2002).
- [46] E. G. S. Luna, A. L. dos Santos, and A. A. Natale, Phys. Lett. B 698, 52 (2011).
- [47] A. C. Aguilar and J. Papavassiliou, Eur. Phys. J. A 35, 189 (2008).
- [48] D. V. Shirkov and I. L. Solovtsov, Phys. Rev. Lett. 79, 1209 (1997); B. R. Webber, JHEP 9810, 012 (1998); A. V. Nesterenko, Phys. Rev. D 62, 094028 (2000); A. V. Nesterenko and J. Papavassiliou, Phys. Rev. D 71, 016009 (2005); A. I. Alekseev, Few Body Syst. 40, 57 (2006); G. Cvetič and C. Valenzuela, J. Phys. G 32, L27 (2006); G. Cvetič and C. Valenzuela, Phys. Rev. D 74, 114030 (2006); G. Cvetič and C. Valenzuela, Braz. J. Phys. 38, 371 (2008); G. Cvetič, R. Kögerler, and C. Valenzuela, Phys. Rev. D 82, 114004 (2010); G. Cvetič and C. Villavicencio, Phys. Rev. D 86, 116001 (2012); C. Ayala and G. Cvetič, Phys. Rev. D 87, 054008 (2013); C. Contreras, G. Cvetič, R. Kögerler, P. Kröger, and O. Orellana, Int. J. Mod. Phys. A 30, 1550082 (2015); G. Cvetič, Few-Body Syst. 55, 567 (2015); C. Ayala and G. Cvetič, Comput. Phys. Commun. 199, 114 (2016); C. Ayala, G. Cvetič, R. Kogerler, and I. Kondrashuk, J. Phys. G 45, 035001 (2018); C. Ayala, G. Cvetič, A. V. Kotikov, and B. G. Shaikhatdenov, Eur. Phys. J. C 78, 1002 (2018); G. Cvetič, Phys. Rev. D 99, 014028 (2019); C. Ayala, G. Cvetič, and L. Gonzalez, Phys. Rev. D 101, 094003 (2020); C. Contreras, G. Cvetič, and O. Orellana, J. Phys. Comm. 5, 015019 (2021); C. Ayala, G. Cvetič, and D. Teca, Eur. Phys. J. C 81, 930 (2021); C. Ayala, G. Cvetič, and D. Teca, Eur. Phys. J. C 82, 362 (2022); C. Ayala, G. Cvetič, and D. Teca, arXiv:2206.05631 [hep-ph].
- [49] G. Aad *et al.*, Nucl. Phys. B 889, 486 (2014).
- [50] G. Antchev *et al.*, Europhys. Lett. 101, 21002 (2013).
- [51] M. Aaboud *et al.*, Phys. Lett. B 761, 158 (2016).
- [52] G. Antchev *et al.*, Nucl. Phys. B899, 527 (2015).
- [53] E. G. S. Luna and M. J. Menon, arXiv:0105076 [hep-ph].

- [54] E. G. S. Luna and M. J. Menon, Phys. Lett. B 565, 123 (2003); E. G. S. Luna, M. J. Menon, and J. Montanha, Nucl. Phys. A 745, 104 (2004); Braz. J. Phys. 34, 268 (2004).
- [55] G.Aad *et al.* Eur. Phys. J. C 83, 441 (2023).
- [56] G. Antchev *et al.*, Europhys. Lett. 95, 41001 (2011).
- [57] G. Antchev *et al.*, Eur. Phys. J. C 76, 661 (2016).
- [58] G. Antchev *et al.*, Eur. Phys. J. C 79, 785 (2019).
- [59] G. Antchev *et al.*, Europhys. Lett. 101, 21004 (2013).
- [60] G. Antchev *et al.*, Eur. Phys. J. C 79, 861 (2019).
- [61] E. G. S. Luna, A. F. Martini, M. J. Menon, A. Mihara, and A. A. Natale, Phys. Rev. D 72, 034019 (2005); E. G. S. Luna, Phys. Lett. B 641, 171 (2006); E. G. S. Luna and A. A. Natale, Phys. Rev. D 73, 074019 (2006); D. Hadjimichef, E. G. S. Luna, and M. Peláez, Phys. Lett. B 804, 135350 (2020).
- [62] L. Lukaszuk and B. Nicolescu, Lett. Nuovo Cimento 8, 405 (1973); D. Joynson, E. Leader, B. Nicolescu, and C. Lopez, Nuovo Cim. A 30, 345 (1975); J. Bartels, C. Contreras, and G. P. Vacca, J. High Energ. Phys. 1603, 201 (2016); J. Bartels, C. Contreras, and G. P. Vacca, Phys. Rev. D 95, 014013 (2017); E. Ferreira, A. K. Kohara, and J. Sesma, Phys. Rev. D 98, 094029 (2018); L. Jenkovszky, I. Szanyi, and C. I. Tan, Eur. Phys. J. A 54, 116 (2018); Y. M. Shabelski and A. G. Shuvaev, Eur. Phys. J. C 78, 497 (2018); W. Broniowski, L. Jenkovszky, E. Ruiz Arriola, and I. Szanyi, Phys. Rev. D 98, 074012 (2018); M. Broilo, E. G. S. Luna, and M. J. Menon, Phys. Rev. D 98, 074006 (2018); E. Gotsman, E. Levin, and I. Potashnikova Phys. Lett. B 786, 472 (2018); P. Lebiedowicz, O. Nachtmann, and A. Szczurek, Phys. Rev. D 98, 014001 (2018); V. A. Khoze, A. D. Martin, and M. G. Ryskin, Phys. Lett. B 784, 192 (2018); S. M. Troshin and N. E. Tyurin, Mod. Phys. Lett. A, Vol. 33, 1850206 (2018); V. A. Khoze, A. D. Martin, and M. G. Ryskin, Phys. Lett. B 780, 352 (2018); E. Martyanov and B. Nicolescu, Phys. Lett. B 786, 207 (2018); V. P. Gonçalves and P. V. R. G. Silva, Eur. Phys. J. C 79, 237 (2019); T. Csörgő, R. Pasechnik, and A. Ster, Eur. Phys. J. C 79, 62 (2019); C. Contreras, E. Levin, R. Meneses, and M. Sanhueza Phys. Rev. D 101, 096019 (2020); M. Broilo, D. A. Fagundes, E. G. S. Luna, and M. J. Menon, Eur. Phys. J. C 79, 1033 (2019); A. A. Godizov, Phys. Rev. D 101, 074028 (2020); T. Csörgő, T. Novak, R. Pasechnik, A. Ster, and I. Szanyi, Eur. Phys. J. C 81, 180 (2021).
- [63] F. Iachello and Q. Wan, Phys. Rev. C 69, 055204 (2004).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [64] R. Binjker and F. Iachello, Phys. Rev. C 69, 068201 (2004).
- [65] P. A. S. Carvalho, A. F. Martini and M. J. Menon, Eur. Phys. J. C 39, 359 (2005); R. F. Ávila and M. J. Menon, Eur. Phys. J. C 54, 555 (2008).
- [66] A. G. Duarte, O. Oliveira and P. J. Silva, Phys. Rev. D 94, 014502 (2016).
- [67] Gracey, M. Peláez, U. Reinosa and M. Tissier, Phys. Rev. D 100, 034023 (2019); M. Peláez, U. Reinosa, J. Serreau, M. Tissier and N. Wschebor, Rep. Prog. Phys. 84, 124202 (2021).
- [68] J. H. Vuolo, *Fundamentos da Teoria de Erros*, Edgar Blücher LTDA (1996).
- [69] F. James, MINUIT - Function Minimization and Error Analysis version 94.1, CERN Program Library (1994).
- [70] G. P. Lepage, J. Comput. Phys. 27, 192 (1978).