Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 10, n. 1, 2023.

Trabalho apresentado no XLII CNMAC, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Bonito - MS, 2023

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Equilíbros de Nash Puro em Jogos Evolucionários com Biestabilidade sob o Grafo da Estrela Fechada

Jean Carlo Moraes[1] Tassio Feitosa[2]
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS

A teoria dos jogos evolutivos explica comportamentos persistentes em animais em situações de conflito. Ela usa um jogo em que os jogadores não precisam ser racionais, mas cada jogador tem uma estratégia que pode ser medida pela natureza. A dinâmica dos jogos evolutivos é modelada usando um sistema de equações de replicação, que descrevem fenômenos biológicos e dinâmicas socioeconômicas em redes sociais. Um modelo (EGN) recente integra o sistema de equações de replicação com uma estrutura de jogos finitos sobre um grafo, conectando a estabilidade do equilíbrio interno com a topologia da rede, [1]. Quando todos os jogadores têm as mesmas matrizes de pagamento, as coordenadas do equilíbrio interno são independentes da topologia da rede. No entanto, não foram apresentados resultados semelhantes para equilíbrios puros em geral.

Neste trabalho, vamos analisar quando os pontos fixos puros de um jogo evolutivo sob um grafo estrela fechado (wheel graph $\mathcal{W}_n$) - grafo formado conectando um único vértice universal a todos os vértices de um ciclo - são assintoticamente estáveis e consequentemente equilíbrios de Nash estritos do jogo.

Seja $V = 1, 2, ..., N$ uma população finita de jogadores conectados em uma rede representada por um grafo não direcionado $\mathcal{G}$ com uma matriz de adjacência $A = [a_{v,w}]$, onde $a_{v,w} = 1$ se o jogador v e w estiverem conectados, e $a_{v,w} = 0$ caso contrário. O modelo desenvolvido em [1] considera interações de N indivíduos, como jogos de dois jogadores em que um indivíduo de uma subpopulação v joga contra um representante de uma das subpopulações w conectadas a v. Para simplificar, assumimos que v joga contra w. Consideramos um jogo com duas estratégias puras: cooperar (C) e trair (D). A frequência relativa com que a estratégia cooperar é jogada pelo jogador v é denotada por x_v. Então, $x_v = 1$ se v sempre coopera e $x_v = 0$ se v sempre trai, essas são as estratégias puras de v. O jogador v também pode jogar uma estratégia mista, neste caso, dizemos v coopera com frequência relativa x_v. Seja $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$ o perfil de estratégia no jogo. Como $x_v \in \Delta = [0, 1]$ para todos os $v \in V$, o conjunto de estratégias S é $\Delta^N = [0, 1]^N$. A matriz de pagamento para o jogador v é dada por

$$B_v = \begin{bmatrix} b_{v,C,C} & b_{v,C,D} \\ b_{v,D,C} & b_{v,D,D} \end{bmatrix}$$

E a função de pagamento do jogo de dois agentes para o jogador v contra um vizinho w é dada por

$$\phi(x_v, x_w) = \begin{bmatrix} x_v & (1 - x_v) \end{bmatrix} B_v \begin{bmatrix} x_w \\ 1 - x_w \end{bmatrix}$$

No caso $(N, 2)$-jogo (N jogadores, 2 estratégias), a equação de replicação em grafos, que modela a dinâmica de um jogo evolutivo em populações em rede (EGN), conforme definido em [1] pelo sistema de N equações diferenciais, é dado por

[1]jean.moraes@ufrgs.br
[2]tassiofeitosa@gmail.com

$$\dot{x}_v = x_v\,(1 - x_v)\, f_v(\mathbf{x}), \text{ for } v \in V, \tag{1}$$

onde $f_v(\mathbf{x}) = \frac{\partial \phi_v}{\partial x_v}(\mathbf{x})$. Se denotamos $\sigma_{v,C} = b_{v,C,C} - b_{v,D,C}$ e $\sigma_{v,D} = b_{v,D,D} - b_{v,C,D}$, então

$$f_v(\mathbf{x}) = \sigma_{v,C} \sum_{w=1}^{N} a_{v,w} x_w - \sigma_{v,D} \sum_{w=1}^{N} a_{v,w}\,(1 - x_w) = (\sigma_{v,C} + \sigma_{v,D}) \sum_{w=1}^{N} a_{v,w} x_w - \sigma_{v,D} \sum_{w=1}^{N} a_{v,w}.$$

Observe que $\sum_{w=1}^{N} a_{v,w}$ é o grau do vértice v. Vamos denotá-lo por d_v, então as equações (1) podem ser reescritas como

$$\dot{x}_v = x_v\,(1 - x_v) \left[(\sigma_{v,C} + \sigma_{v,D}) \sum_{w=1}^{N} a_{v,w} x_w - \sigma_{v,D} d_v \right]. \tag{2}$$

Um equilíbrio de Nash estrito, ENE, é um perfil de estratégias no qual nenhum jogador pode melhorar seu payoff unilateralmente, ou seja, para todos os jogadores v o payoff não pode ser aumentado, mudando apenas a sua própria estratégia x_v. Pois x_v está definido como a frequência de cooperação de v, a estratégia de v seria $(x_v, 1 - x_v)$. Seguindo [1], para o modelo EGN dado por (1) este conjunto pode ser escrito como:

$$\Theta^{ENE} = \Big\{ \mathbf{x} \in \Delta^N : \forall v \big((x_v = 0 \wedge f_v(\mathbf{x}) < 0) \vee (x_v = 1 \wedge f_v(\mathbf{x}) > 0) \big) \Big\}.$$

O conjunto de estados estacionários, Θ^* do sistema de EDOs (2) é o conjunto que contém todos os pontos em Δ^N tais que $x_v\,(1 - x_v)\, f_v(\mathbf{x}) = 0$ para todo v em V, portanto:

$$\Theta^* = \left\{ \mathbf{x} \in \Delta^N : \forall v\,(x_v = 0 \vee x_v = 1 \vee f_v(\mathbf{x}) = 0) \right\}$$

Olhando para a definição Θ^* fica claro que ela contém o conjunto $\Theta^p = \{0,1\}^N$. Os elementos em Θ^p são chamados de estados estacionários puros. Entre todos os pontos em Θ^p, denotamos dois pontos especiais onde temos total cooperação, $\mathbf{x_{FC}} = (1, 1, \ldots, 1)$, e deserção total, $\mathbf{x_{FD}} = (0, 0, \ldots, 0)$. Considerando o EGN dado pelo sistema (2), nós provamos o Teorema abaixo que gerneraliza similar resultado de [2].

Teorema 0.1. *Considere o EGN com n jogadores descrito pelo sistema de EDO's em 2 sob $\mathcal{G}$ um grafo estrela fechada (wheel graph $\mathcal{W}_n$). Se $\sigma_{v,C} > 0$ e $\sigma_{v,D} > 0$ $\forall$ v, i.e. todos os jogadores têm matriz de pagamentos de biestabilidade, então $\mathbf{x} \in \Theta^p$ é um ponto fixo assintoticamente estável, e um equilíbrio de Nash estrito do jogo, se e somente se $\mathbf{x}$ é o ponto de cooperação total, $\mathbf{x} = \mathbf{x_{FC}} = (1, 1, \ldots, 1)$, ou defecção total, $\mathbf{x} = \mathbf{x_{FD}} = (0, 0, \ldots, 0)$.*

Referências

[1] D. Madeo e C. Mocenni. "Game Interactions and Dynamics on Networked Populations". Em: **IEEE Transactions on Automatic Control** 60.7 (2015), pp. 1801–1810. DOI: 10.1109/TAC.2014.2384755.

[2] T. F. Feitosa. "Jogos evolucionários sobre grafos estrela fechada". Dissertação de mestrado. UFRGS, 2018.

