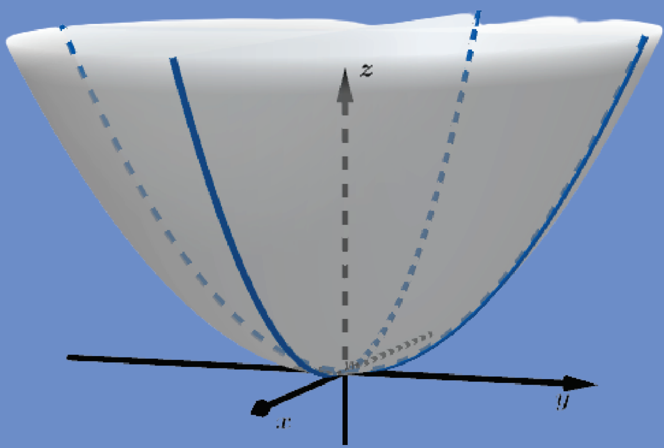
Daiane Silva de Freitas
Eneilson Campos Fontes
Fabiola Aiub Sperotto
Grasiela Martini

GEOMETRIA ANALÍTICA

UM ESTUDO SOBRE CURVAS CÔNICAS E SUPERFÍCIES



Editora da furg

Geometria Analítica:

um estudo sobre curvas cônicas e superfícies

Editora da FURG
Câmpus Carreiros
CEP 96203 900 – Rio Grande – RS – Brasil
editora@furg.br

Integrante do PIDL

Editora Associada à
ABEU ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS
EDUNI-SUL ASSOCIAÇÃO DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS DA REGIÃO SUL

Daiane Silva de Freitas, Eneilson Campos Fontes,
Fabiola Aiub Sperotto, Grasiela Martini

Geometria Analítica:
um estudo sobre curvas cônicas e superfícies

Editora da furg

Rio Grande
2023

2023

Designer e diagramação da capa: Murilo Borges
Pré-formatação do Template: André Meneghetti
Cinthya Maria Meneghetti
Bárbara Rodriguez
Formatação e diagramação final do template: João Balansin
Revisão Ortográfica e Linguística: Júlio Marchand

Ficha catalográfica

G345 Geometria analítica: um estudo sobre curvas cônicas e superfícies [Recurso Eletrônico] / Daiane Silva de Freitas …[et al.]. – Rio Grande, RS : Ed. da FURG, 2023.
198p. : il. color.

Outros autores: Eneilson Campos Fontes, Fabiola Aiub Sperotto, Grasiela Martini.
Modo de acesso: http://repositorio.furg.br
ISBN 978-65-5754-166-1 (eletrônico)

1. Geometria 2. Geometria analítica 3. Matemática I. Freitas, Daiane Silva de II. Fontes, Eneilson Campos III. Sperotto, Fabiola Aiub IV. Martini, Grasiela V. Título.

CDU 514.12

Catalogação na Fonte: Bibliotecário José Paulo dos Santos – CRB10/2344

Sumário

Prefácio

Esta obra, na sua primeira edição, enfatiza os principais tópicos de Geometria Analítica, voltados para o ensino superior, começando por reforçar conteúdos essenciais para o desenvolvimento do seu estudo.

A ideia principal nesta edição é abordar as Curvas Cônicas e Superfícies explorando as suas representações algébrica e geométrica, com o auxílio do software GeoGebra. Além disso, são estudados os sistemas de coordenadas polares, cilíndricas e esféricas.

Este texto emergiu a partir das experiências vivenciadas pelos autores em sala de aula, analisando os principais conteúdos necessários em cada curso de graduação, as dúvidas mais recorrentes apresentadas pelos estudantes e, não menos importante, em conversas com outros professores tanto das áreas de Geometria Analítica como de Cálculo Diferencial e Integral.

Para alcançar esses objetivos, organizamos o livro em 5 capítulos, onde apresentamos a teoria de forma clara e objetiva, além de um vasto número de exemplos resolvidos e ilustrações, visando facilitar a compreensão por parte do leitor. Nesta edição, estamos propondo duas categorias de exercícios, a primeira categoria, no final de cada tópico, as seções "Agora tente resolver!" onde convidamos o leitor a testar seus conhecimentos e promover uma discussão sobre os conteúdos abordados sem o conhecimento prévio da resposta final. Finalizando cada capítulo, propomos exercícios, com gabaritos, que visam à retomada dos conceitos trabalhados.

No Capítulo 1, introduzimos o sistema de coordenadas cartesianas no plano e revisitamos os conceitos básicos necessários para o desenvolvimento dos demais capítulos.

No Capítulo 2, abordamos as Curvas Cônicas a partir da definição como lugar geométrico, enfocando na dedução de cada equação, no reconhecimento de seus elementos e na representação geométrica.

Após esta etapa, no Capítulo 3, apresentamos o espaço tridimensional no sistema de coordenadas cartesianas, estendendo os conceitos desenvolvidos no Capítulo 1.

No Capítulo 4, estudamos as Superfícies Quádricas, Cilíndricas e Cônicas, cujo objetivo principal é o reconhecimento geométrico e algébrico de cada uma delas.

Para finalizar, no Capítulo 5, introduzimos os sistemas de coordenadas polares, cilíndricas e esféricas, muito importantes nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

Por fim, a partir de um estilo claro e acessível de escrita, desejamos que o leitor avance em seus estudos sem muitos obstáculos, de forma mais independente e sintam-se motivados a utilizarem o software GeoGebra.

Os autores.

Capítulo 1

GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO

Objetivos do capítulo

- Localizar pontos em um plano a partir das coordenadas.
- Determinar o ponto médio de um segmento.
- Determinar a equação de uma reta.

Introdução

O papel central da Geometria Analítica consiste, basicamente, no estudo da Geometria por meio da Álgebra. De modo geral, isso significa atribuir equações que, de alguma forma, descrevem os objetos geométricos estudados. Assim, as curvas no plano ou as superfícies no espaço tridimensional são descritas por meio de equações.

Apesar de não haver um consenso entre os historiadores, enquanto muitos defendem que as práticas que levam a esse ramo da Matemática já eram de conhecimento dos gregos, egípcios e romanos; outros creditam aos franceses René Descartes (1596-1650), Figura 1, e Pierre de Fermat (1601-1665), Figura 2, o início do estudo sistemático dessa ciência.

Figura 1. Rene Descartes

Fonte: https://conhecimentocientifico.com/rene-descartes/

Figura 2. Pierre de Fermat

Fonte: http://www.fotos-imagens.net/pierre-de-fermat.html

Assim como Descartes, Fermat associou equações a curvas e superfícies. Embora seja comum a ideia de que a Geometria Analítica é uma redução da Geometria à Álgebra, os escritos de Descartes mostram que sua preocupação era a construção geométrica e a possibilidade de encontrar um correspondente geométrico para as operações algébricas. Já com relação a Fermat, o uso de coordenadas surge da aplicação da Álgebra da Renascença a problemas geométricos da Antiguidade. A criação da Geometria Analítica serviu de pilar para o desenvolvimento do Cálculo

Diferencial e Integral e da Física Clássica, iniciando uma nova era de rápido avanço acadêmico e tecnológico nessas e em outras áreas do conhecimento.

A vantagem de utilizar a Álgebra para analisar e estudar problemas de Geometria reside no fato que nesta área temos uma vasta gama de métodos de resolução, tornando o estudo da Geometria mais dinâmico e independente das figuras e medições. Para viabilizar essa interação entre Álgebra e Geometria, recorremos aos sistemas de coordenadas, em que cada ponto do plano ou do espaço é representado por pares ou ternas coordenadas de números reais.

Neste capítulo, introduziremos algumas definições e notações usuais, estudaremos a representação dos pontos no plano cartesiano e a equação da reta no sistema de coordenadas cartesianas.

1.1 Conceito de Produto Cartesiano

Dados dois conjuntos A e B, o produto cartesiano de A por B, o qual denotamos $A \times B$ é o conjunto formado por todos os pares ordenados (a, b), em que $a \in A$ e $b \in B$, em linguagem matemática:

$$A \times B = \{(a, b) | \forall a \in A; \forall b \in B\}.$$

Exemplo 1.1. *Considere os seguintes conjuntos:* $A = \{-2, 0, 2, 4\}$ *e* $B = \{-1, -3\}$.

$$A \times B = \{(-2, -1), (-2, -3), (0, -1), (0, -3), (2, -1), (2, -3), (4, -1), (4, -3)\}.$$

1.1.1 Produtos cartesianos importantes

Vamos denotar por $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais.

Indicamos por $\mathbb{R}^2$ o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y), em que x e y são números reais.

O produto cartesiano: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) | \forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R}\}$.

O número x é a primeira coordenada (abscissa) e o número y a segunda coordenada (ordenada) do par ordenado (x, y).

Indicamos por $\mathbb{R}^3$ o conjunto formado pelas ternas ordenadas (x, y, z), em que x, y e z são números reais.

O produto cartesiano: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}\}$.

O número x é a primeira coordenada (abscissa), o número y é a segunda coordenada (ordenada) e z é a terceira coordenada (cota) da terna (x, y, z).

Uma reta orientada é uma reta na qual tomamos um sentido positivo de percurso (flecha). Na Figura 3, representamos geometricamente uma reta orientada r.

Figura 3. Reta orientada r

Fonte: os autores

Vamos iniciar apresentando um sistema de coordenadas na reta, de forma intuitiva, ou seja, vamos estabelecer uma correspondência entre pontos da reta e os números reais, conforme apresentamos na Figura 4. Começamos escolhendo um ponto da reta, chamado de *Origem*, para ser o correspondente ao número *zero*. O número associado a um certo ponto é chamado de coordenada desse ponto. Assim, a origem tem coordenada 0. À direita desse ponto estarão os pontos representados por coordenadas positivas e, à esquerda, os representados por coordenadas negativas.

Figura 4. Reta Real

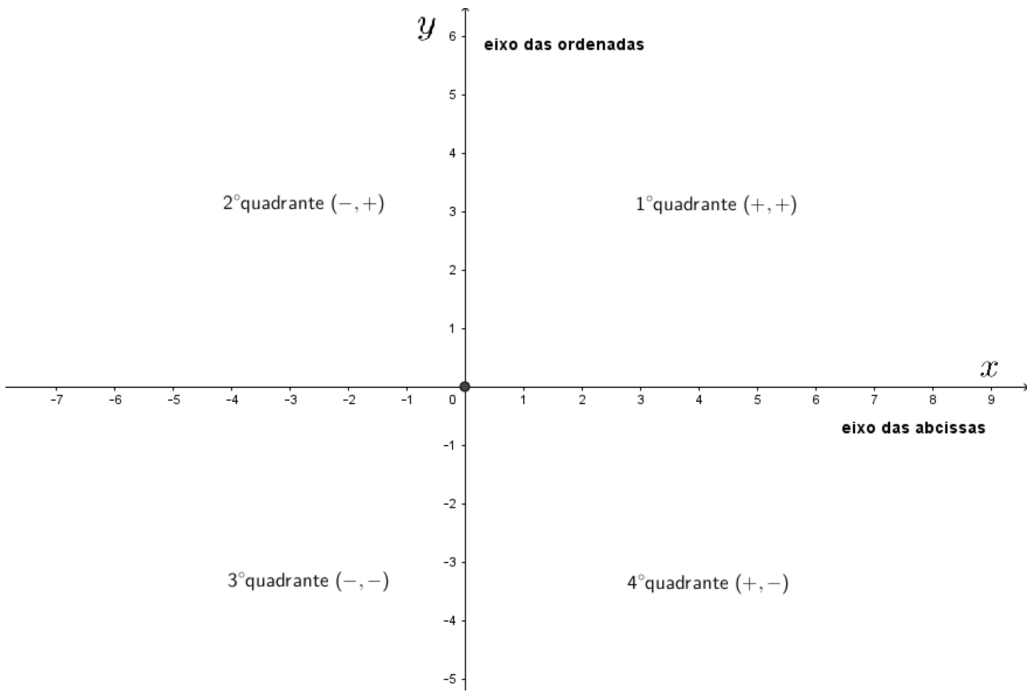
Fonte: os autores

A coordenada corresponderá à distância do ponto até a origem, para pontos à direita da origem, ou menos a distância, no caso de pontos à esquerda da origem. Conforme ilustrado na Figura 4.

A cada ponto P na reta r associamos um único número real e reciprocamente a cada número real associamos um único ponto P da reta, dizemos que existe uma *correspondência biunívoca* entre pontos da reta e números reais.

Vamos estabelecer uma correspondência biunívoca entre pontos do plano e os pares ordenados de números reais, de forma que cada ponto do plano fique associado a um único par ordenado e vice-versa. Para isso, consideramos dois eixos perpendiculares entre si e munidos de seus sistemas de coordenadas, de forma que suas origens coincidam em um ponto O, chamado a origem do sistema e ao qual associamos o ponto $(0,0)$. Um eixo será denominado eixo das abcissas (eixo dos x ou Ox) e o outro eixo será o eixo das ordenadas (eixo dos y ou Oy). Os *eixos coordenados* x e y dividem o plano em 4 partes denominadas quadrantes, conforme a Figura 5.

Figura 5. Plano cartesiano

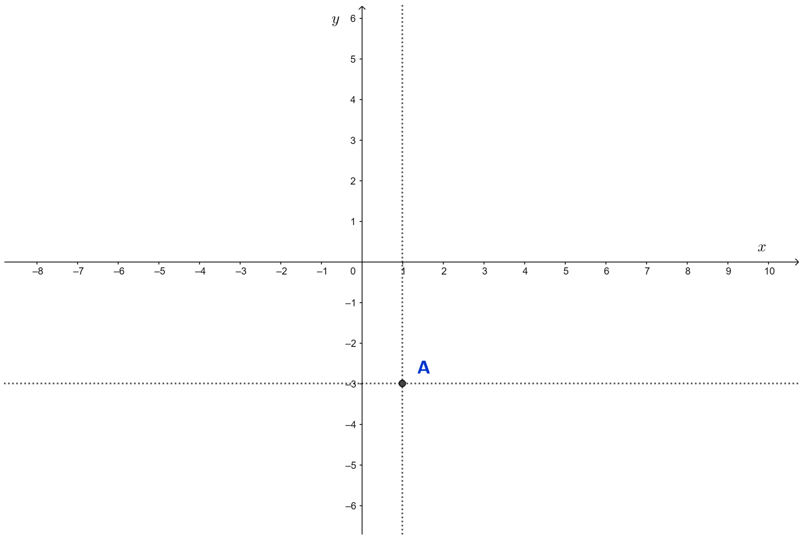


Fonte: os autores

A cada ponto P do plano associaremos um par ordenado $P(x, y)$ de números reais.

Exemplo 1.2. *Vamos marcar o ponto $A(1, -3)$ no plano cartesiano. Para isso, imagine uma reta vertical passando pelo ponto 1 do eixo Ox e uma reta horizontal passando pelo ponto -3 do eixo Oy. A interseção dessas duas retas é o ponto A no $4^{\underline{o}}$ quadrante.*

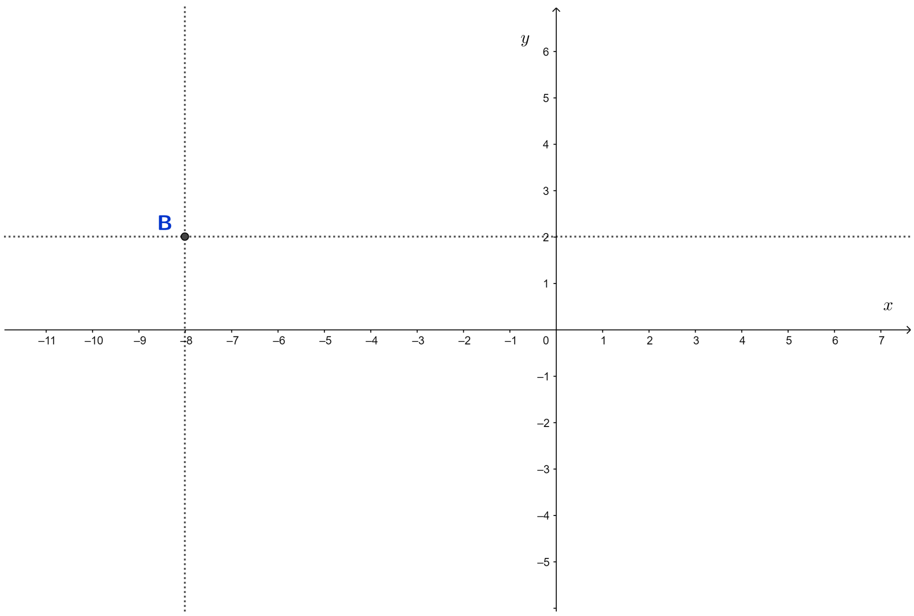
Figura 6. Ponto no plano cartesiano



Fonte: os autores

Exemplo 1.3. *Vamos marcar o ponto $B(-8, 2)$ no plano cartesiano. Para isso, imagine uma reta vertical passando pelo ponto -8 do eixo Ox e uma reta horizontal passando pelo ponto 2 do eixo Oy. A interseção dessas duas retas é o ponto B no $2^{\underline{o}}$ quadrante.*

Figura 7. Ponto no plano cartesiano



Fonte: os autores

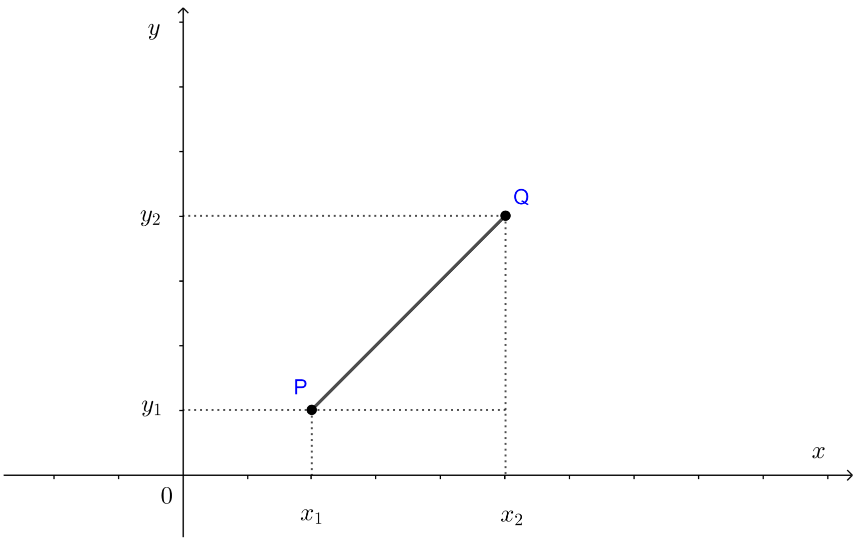
1.1.2 Distância entre dois pontos

Para falarmos sobre a distância entre dois pontos no plano cartesiano, devemos lembrar do *Teorema de Pitágoras*, que relaciona as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Os lados que formam o ângulo reto são denominados catetos e o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa. Se denotarmos as medidas dos catetos por b e c e a medida da hipotenusa por a, temos

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Para estabelecermos uma relação em função das coordenadas cartesianas, consideremos os pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$, conforme ilustra a Figura 8. Denotaremos a distância entre os pontos P e Q por $|\overline{PQ}|$.

Figura 8. Distância entre dois pontos



Fonte: os autores

Assim, temos:

$$|\overline{PQ}|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Portanto, a distância entre os pontos P e Q é dada por:

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Exemplo 1.4. *Determinar a distância entre os pontos* $P(-3, 6)$ *e* $Q(-7, 4)$.

Solução: A distância entre os pontos $P(-3, 6)$ e $Q(-7, 4)$ é

$$\begin{aligned} |\overline{PQ}| &= \sqrt{(-7-(-3))^2 + (4-6)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} \\ |\overline{PQ}| &= \sqrt{20} \text{ unidades de comprimento (u.c.)}. \end{aligned}$$

1.1.3 Ponto Médio

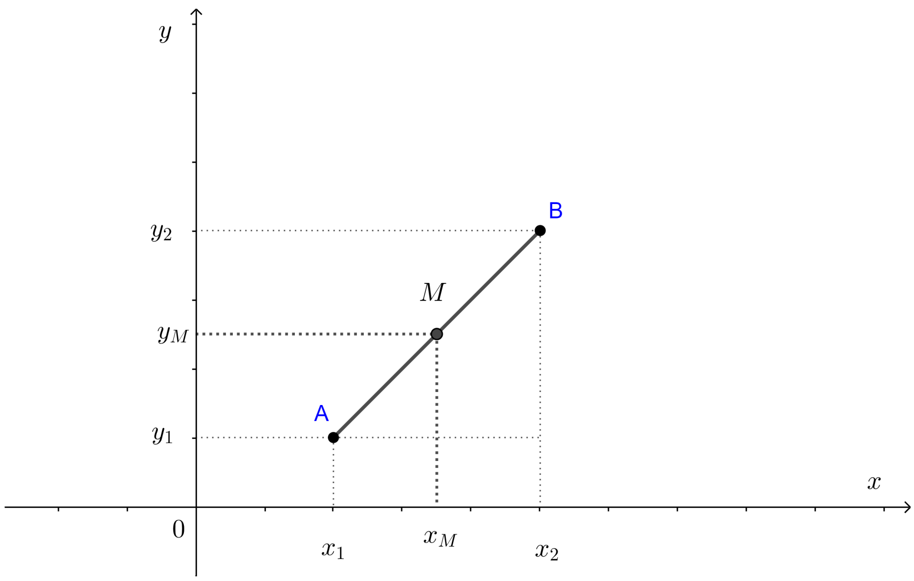
Consideremos dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ no plano cartesiano. A Figura 9, apresenta ponto médio do segmento $\overline{AB}$, denominado de ponto $M(x_M, y_M)$ tal que $|\overline{AM}| = |\overline{MB}|$. Logo,

$$x_M = \frac{(x_1 + x_2)}{2} \qquad \text{e} \qquad y_M = \frac{(y_1 + y_2)}{2}.$$

E, portanto, o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Figura 9. Ponto médio



Fonte: os autores

Exemplo 1.5. *Determinar o ponto médio do segmento determinado pelos pontos* $A(4, -8)$ *e* $B(-9, 5)$.

Solução: O ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é

$$M = \left(\frac{4 + (-9)}{2}, \frac{(-8) + 5}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

1.1.4 Condição de alinhamento de três pontos

Para verificar se três pontos distintos no plano cartesiano estão alinhados, podemos fazer uso de determinantes. Assim, se três pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ estão alinhados, então:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

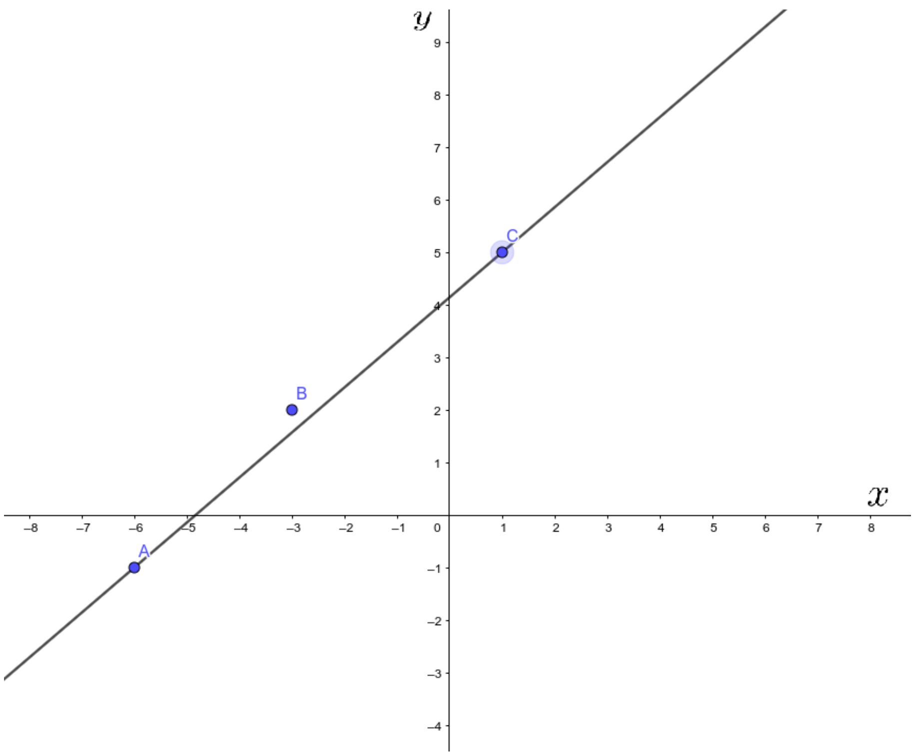
Exemplo 1.6. *Verificar se os pontos* $A(-6, -1)$*,* $B(-3, 2)$ *e* $C(1, 5)$ *estão alinhados.*

Solução: Para verificar se os pontos A, B e C estão alinhados, devemos resolver o seguinte determinante (utilizando a regra de Sarrus).

$$\begin{vmatrix} -6 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (-6)\cdot2\cdot1+(-1)\cdot1\cdot1+1\cdot(-3)\cdot5-1\cdot2\cdot1-5\cdot1\cdot(-6)-1\cdot(-3)\cdot(-1) = -3.$$

Como o determinante resultou em um valor diferente de zero, podemos concluir que os pontos A, B e C não estão alinhados. Pela Figura 10, observamos que o ponto B não pertence à mesma reta que contém os pontos A e C.

Figura 10. Exemplos de pontos não alinhados



Fonte: os autores

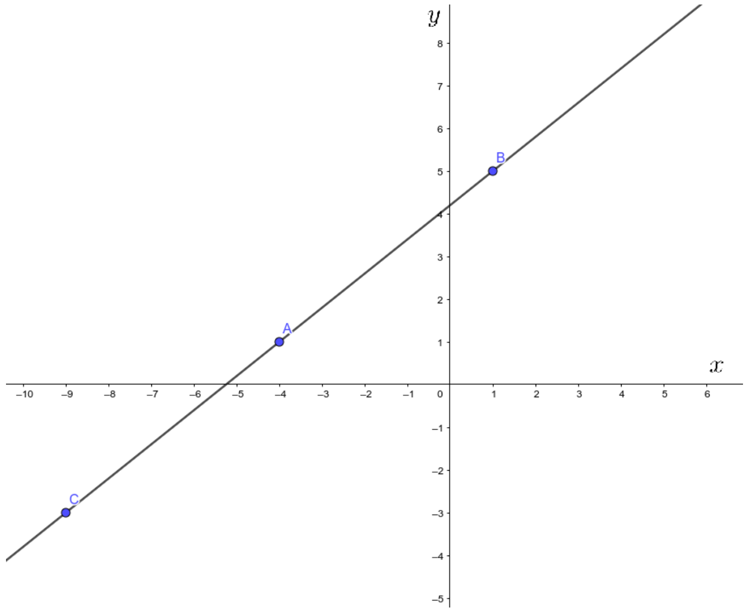
Exemplo 1.7. *Verificar se os pontos $A(-4,1)$, $B(1,5)$ e $C(-9,-3)$ estão alinhados.*

Solução: Para verificar se os pontos A, B e C estão alinhados, devemos resolver o seguinte determinante (utilizando a regra de Sarrus):

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -9 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-4)\cdot 5\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot(-9) + 1\cdot 1\cdot(-3) - (-9)\cdot 5\cdot 1 - (-3)\cdot 1\cdot(-4) - 1\cdot 1\cdot 1 = 0.$$

Como o valor do determinante é igual a zero, concluímos que os pontos A, B e C estão alinhados (Figura 11).

Figura 11. Exemplos de pontos alinhados



Fonte: os autores

Agora chegou o momento de verificar o seu aprendizado, tente resolver os seguintes exercícios.

1.1.5 Agora tente resolver!

1. No aplicativo do GeoGebra, marque os pares de pontos indicados e em seguida determine: $I.$ a distância entre os pontos e $II.$ ponto médio do segmento que une cada par de pontos.

    a) $A(-3,5)$, $B(4,7)$

    b) $A(6,-2)$, $B(-2,3)$

    c) $A(-4,0)$, $B\left(-2,-\dfrac{5}{2}\right)$

2. Dados os pontos $A(3,1)$, $B(-1,-2)$, $C(2,-6)$ e $D(6,-3)$ no plano cartesiano. Esboce e identifique o polígono $ABCD$, determinando a medida dos segmentos que o formam. Em seguida, determine o comprimento das diagonais deste polígono.

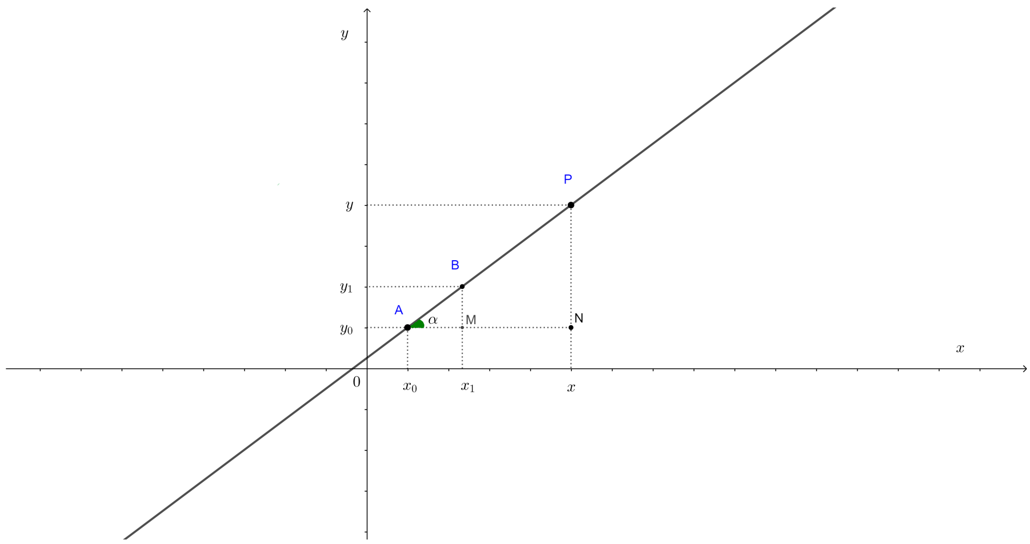
3. Dados os ponto $A(0,3)$, $B(-4,-2)$ e $C(1,-5)$ no plano cartesiano. Esboce e identifique o polígono ABC e calcule os comprimentos de suas medianas*.

$*$ A *mediana* de um triângulo é o segmento que tem como extremidades um vértice e o ponto médio do lado oposto a este vértice.

1.2 A Equação da Reta no plano

É fácil perceber que dois pontos distintos determinam uma única reta. Consideramos a reta definida por $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$. Um ponto $P(x, y)$ está sobre a reta desde que A, B e P sejam colineares, como podemos observar na Figura 12.

Figura 12. Definição da equação da reta



Fonte: os autores

Tal condição de alinhamento é satisfeita se os triângulos ABM e APN forem semelhantes,

$$\frac{|\overline{PN}|}{|\overline{AN}|} = \frac{|\overline{BM}|}{|\overline{AM}|}.$$

Portanto,

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

onde, x_0, y_0, x_1, y_1 são números conhecidos. Tal constante é o *coeficiente angular* da reta a e pode ser calculado dividindo-se a variação Δy das ordenadas dos pontos conhecidos da reta pela variação Δx de suas abscissas.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Então, $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = a$ ou $y - y_0 = a(x - x_0)$ é a equação na forma ponto coeficiente angular. Isolando y, temos $y = ax - ax_0 + y_0$ e fixando $-ax_0 + y_0 = b$, obtemos a equação reduzida da reta dada por

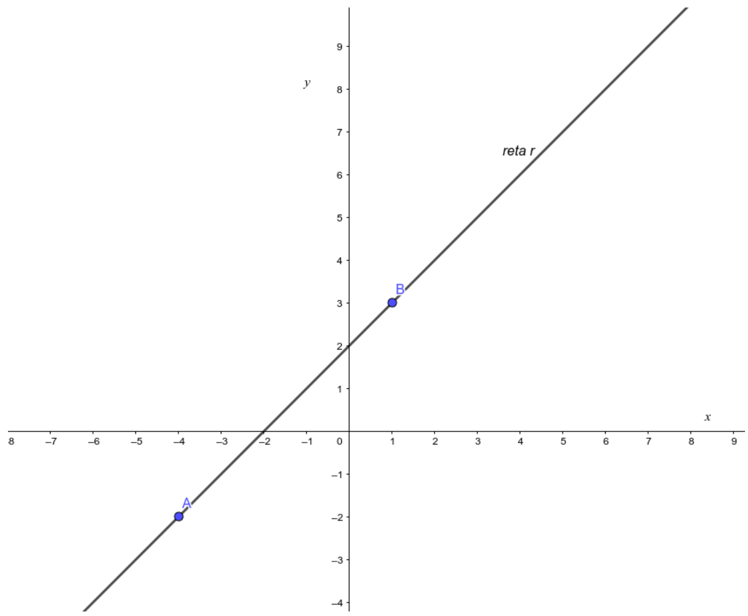
$$y = ax + b.$$

Sendo assim, a é o *coeficiente angular* e b é o *coeficiente linear* da reta. Dizer que $y = ax + b$ é a equação de uma dada reta significa que todo ponto da reta tem coordenadas que satisfazem sua equação. Reciprocamente, todo par ordenado que satisfaz sua equação é um ponto da reta.

Observação: Se o coeficiente linear $b = 0$, então a equação reduzida $y = ax$ representa uma reta que passa pela origem.

Exemplo 1.8. *Determine a equação reduzida da reta r que contém os pontos $A(-4, -2)$ e $B(1, 3)$.*

Figura 13. Reta que passa por A e B

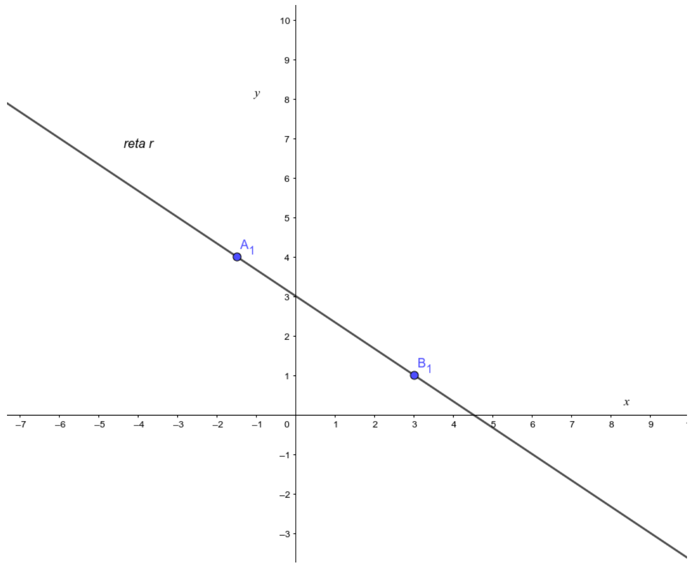


Fonte: os autores

Solução: A forma da equação reduzida da reta é $y = ax + b$. Neste caso, o coeficiente angular da reta é $a = \dfrac{3-(-2)}{1-(-4)} = 1$. Logo, $y = 1x + b$ e, substituindo as coordenadas do ponto $B(1,3)$ na equação, obtemos $3 = 1 + b$, ou seja, $b = 2$ e portanto a equação da reta é $y = x + 2$.

Exemplo 1.9. *Determine a equação reduzida da reta s que contém os pontos $A_1\left(-\dfrac{3}{2}, 4\right)$ e $B_1(3,1)$.*

Figura 14. Reta que passa por A_1 e B_1



Fonte: os autores

Solução: Vamos determinar os coeficientes angular e linear da reta s atribuindo o valor das coordenadas x e y de cada ponto à equação $y = ax + b$. Assim, temos um sistema linear de ordem 2 nas variáveis a e b :

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{2}a + b = 4 \\ 3a + b = 1. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema linear, obtemos $a = -\dfrac{2}{3}$ e $b = 3$ e portanto a equação reduzida da reta s é $y = -\dfrac{2}{3}x + 3$.

Exemplo 1.10. *Determine a equação reduzida da reta r que passa pela origem e pelo ponto $C(5,-6)$.*

Solução: O coeficiente angular da reta é $a = -\dfrac{6}{5}$ e o coeficiente linear é $b = 0$, portanto a equação da reta é $y = -\dfrac{6}{5}x$.

1.2.1 Declividade ou coeficiente angular

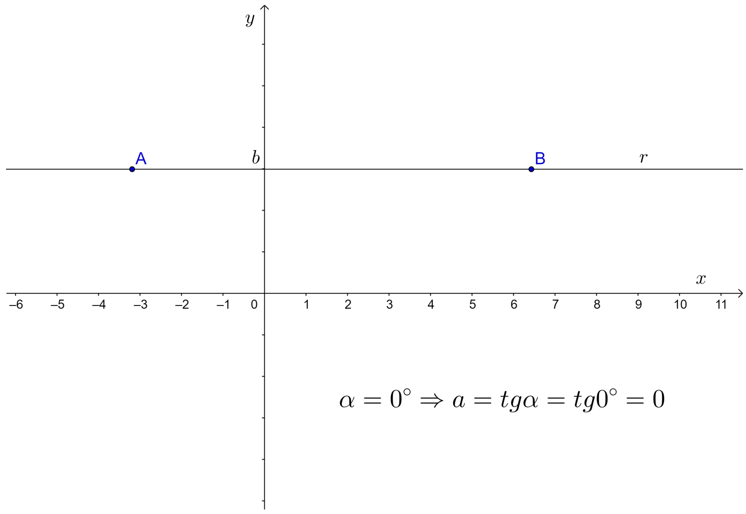
Consideramos uma reta r não paralela ao eixo Oy e α sua inclinação, o coeficiente angular a é o número real que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação α :

$$a = \text{tg}\alpha.$$

A seguir, apresentamos os casos com $0° \leq \alpha < 180°$:

• Se $\alpha = 0°$, como $\text{tg}(0) = 0$, temos uma reta horizontal com equação $y = b$ (Figura 15).

Figura 15. Reta horizontal

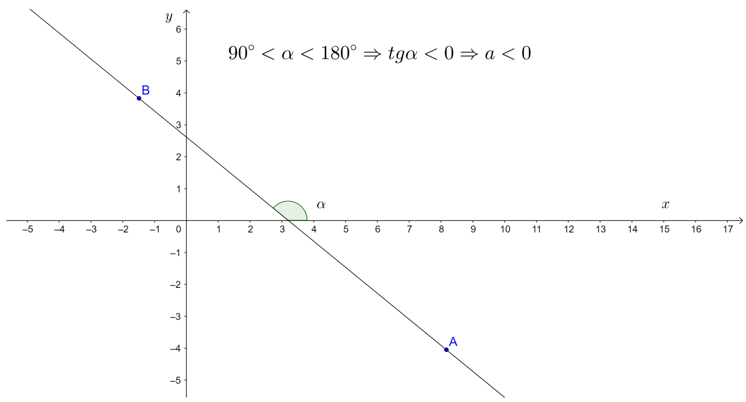


Fonte: os autores

Observamos que $y = 0$ é a equação da reta que contém o eixo coordenado Ox.

• Se $90° < \alpha < 180°$, temos uma reta com coeficiente angular negativo (Figura 16).

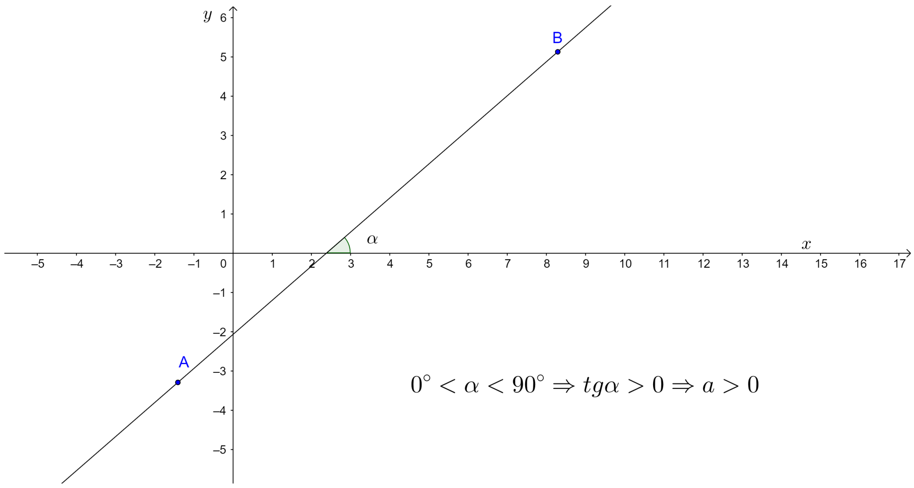
Figura 16. Reta com coeficiente angular negativo



Fonte: os autores

- Se $0° < \alpha < 90°$, temos uma reta com coeficiente angular positivo (Figura 17).

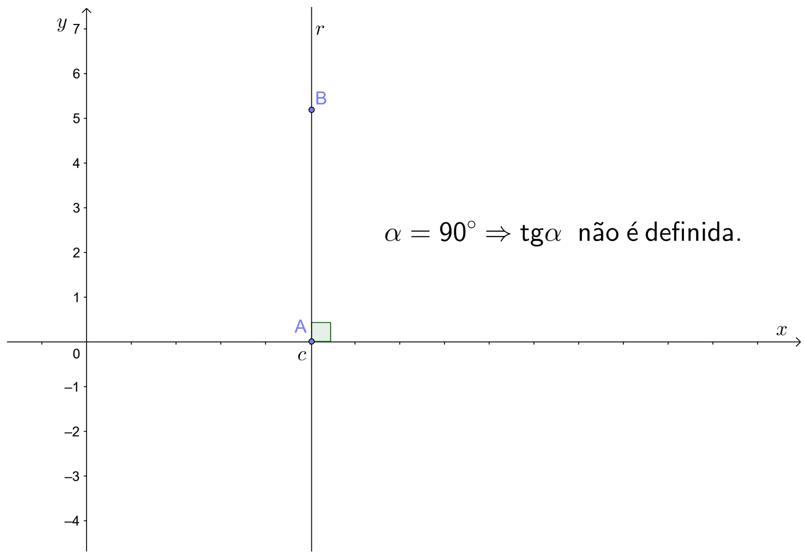
Figura 17. Reta com coeficiente angular positivo



Fonte: os autores

No caso em que r é paralela ao eixo Oy, temos a reta vertical com equação $x = c$ (Figura 18).

Figura 18. Reta vertical



Fonte: os autores

Observamos que $x = 0$ é a equação da reta que coincide com o eixo coordenado Oy.

Uma reta com coeficiente angular positivo dirige-se para cima e para direita, e uma reta com coeficiente angular negativo dirige-se para baixo e para direita.

Exemplo 1.11. *Dados dois pontos* $A(2,3)$ *e* $B(4,7)$ *de uma reta* r*, o coeficiente angular da reta é dado por:*

$$a = \frac{7-3}{4-2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Exemplo 1.12. *Escreva a equação para a reta* r *paralela ao eixo* Ox *e que passa pelo ponto* $P(-3,5)$.

Solução: A forma padrão para a equação da reta r é $y = b$, como r é paralela ao eixo Ox e passa pela ordenada $y = 5$, logo $r : y = 5$ é a equação da reta r.

Exemplo 1.13. *Escreva a equação para a reta* s *paralela ao eixo* Oy *e que passa pelo ponto* $Q(-2,-1)$.

Solução: A forma padrão para a equação da reta r é $x = c$, como r é paralela ao eixo Oy e passa pela abcissa $x = -2$, logo $r : x = -2$ é a equação da reta s.

1.2.2 Equação da reta conhecidos um ponto e a declividade

Considere $P(x,y)$ um ponto genérico sobre a reta e a a declividade (coeficiente angular), temos

$$\text{tg}\alpha = a = \frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow y - y_1 = a(x-x_1).$$

Exemplo 1.14. *Se o ponto* $A(3,2)$ *pertence a reta* r *e o coeficiente angular da reta é* 2*, usando a equação* $(y-y_1) = a(x-x_1)$*, temos:*

$$(y-2) = 2(x-3) \Rightarrow (y-2) = 2x-6 \Rightarrow y = 2x-4.$$

1.2.3 Equação Geral da reta

Toda reta possui uma equação na forma $mx + ny + q = 0$, na qual m, n e q são constantes e m e n não são simultaneamente nulos, chamada de *equação geral da reta.*

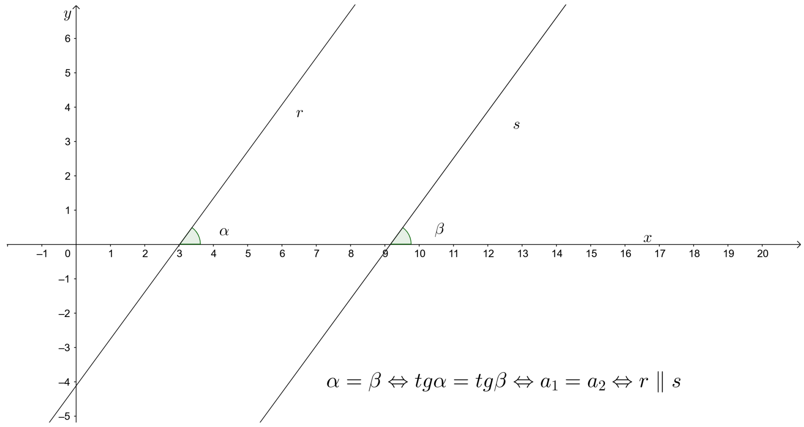
Exemplo 1.15. *Alguns exemplos de equações na forma reduzida escritas na forma geral.*

1. *A equação* $r : y = -\frac{5}{3}x+4$ *pode ser escrita na forma geral* $r : -5x-3y+12 = 0$.
2. *A equação* $r : y = \sqrt{2}$ *pode ser escrita na forma geral* $r : 0x - 1y - \sqrt{2} = 0$.
3. *A equação* $r : x = \frac{7}{3}$ *pode ser escrita na forma geral* $r : 1x + 0y - \frac{7}{3} = 0$.

Retas paralelas

Duas retas são *paralelas* quando não existe um ponto comum a elas. Assim, duas retas são paralelas se, e somente se, possuem a mesma inclinação (Figura 19).

Figura 19. Retas paralelas



Fonte: os autores

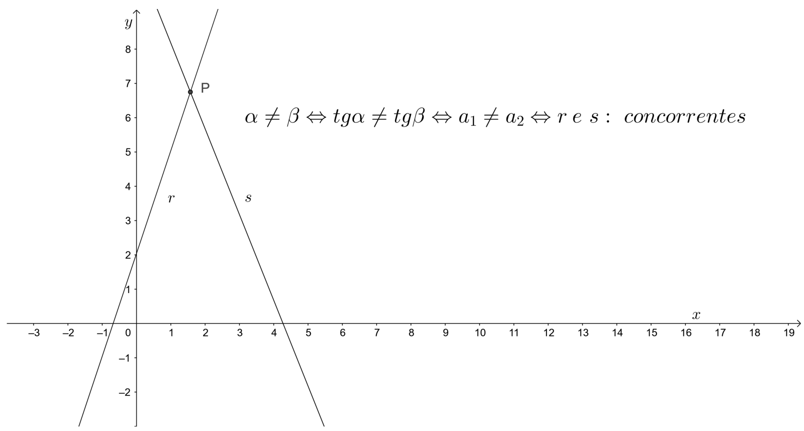
Exemplo 1.16. *As retas* $r : y = \dfrac{7}{4}x - 13$ *e* $s : y = \dfrac{7}{4}x + 50$ *são paralelas.*

Observamos que $a_1 = a_2 = \dfrac{7}{4}$ é o coeficiente angular de ambas as retas r e s.

Retas concorrentes

Duas retas são *concorrentes* quando existe um ponto em comum entre elas (Figura 20).

Figura 20. Retas concorrentes



Fonte: os autores

Quando existem infinitos pontos em comum entre as retas, dizemos que elas são coincidentes.

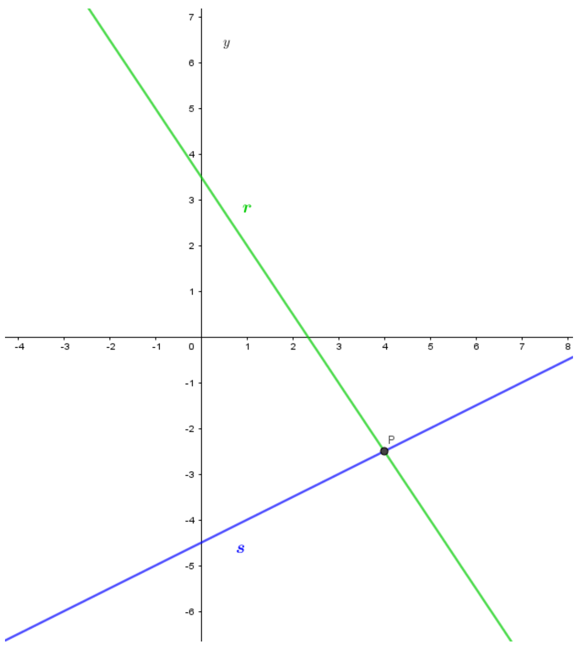
Exemplo 1.17. *Dadas as retas* $r : 3x+2y-7=0$ *e* $s : x-2y-9=0$*, determinar, caso exista, o ponto* P *de interseção das retas* r *e* s*.*

Solução: Observe que o ponto P deve satisfazer a equação das duas retas. Sendo assim, para obtermos o ponto P, temos que resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x+2y-7=0 \\ x-2y-9=0. \end{cases}$$

Temos: $4x-16=0 \Rightarrow 4x=16 \Rightarrow x=4$, substituindo na segunda equação, $y=-\dfrac{5}{2}$. Portanto, $P\left(4,-\dfrac{5}{2}\right)$ é o ponto de interseção entre as retas r e s (Figura 21).

Figura 21. Retas concorrentes



Fonte: os autores

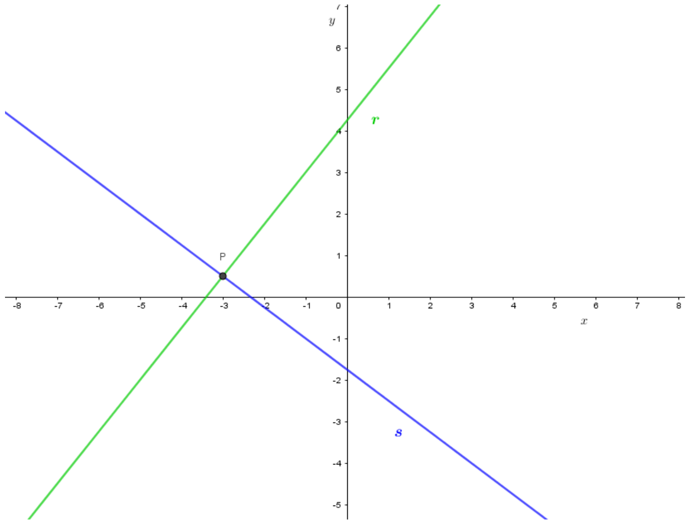
Exemplo 1.18. *Dadas as retas* $r : -5x+4y-17=0$ *e* $s : \dfrac{5}{2}x+3y+6=0$*, determinar, caso exista, o ponto* P *de interseção das retas* r *e* s*.*

Solução: Observe que o ponto P deve satisfazer a equação das duas retas. Sendo assim, para obtermos o ponto P, temos que resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} -5x+4y-17=0 \\ \dfrac{3}{2}x+2y+\dfrac{7}{2}=0. \end{cases}$$

Multiplicando a 2ª equação por -2, obtemos: $-3x - 4y - 7 = 0$. Somando esta última equação com a 1ª equação: $-8x = 24$, logo $x = -3$ e substituindo em qualquer uma das equações, temos $y = \frac{1}{2}$. Portanto, $P\left(-3, \frac{1}{2}\right)$ é o ponto de interseção entre as retas r e s (Figura 22).

Figura 22. Retas concorrentes

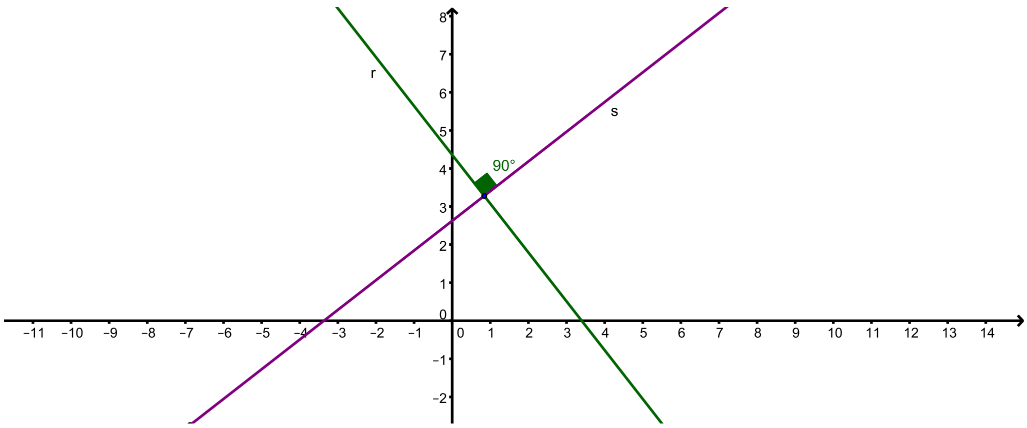


Fonte: os autores

Retas perpendiculares

Duas retas são *perpendiculares* quando o ângulo entre elas é 90°. Pela Figura 23, as retas r e s de equações $r : y = ax + b$ e $s : y = mx + n$ são perpendiculares se o produto dos respectivos coeficientes angulares for igual a -1, isto é, $ma = -1$.

Figura 23. Retas perpendiculares



Fonte: os autores

Exemplo 1.19. *As retas* $r : y = -\frac{3}{5}x$ *e* $s : y = \frac{5}{3}x + \sqrt{3}$ *são perpendiculares.*

1.3 Exercícios

1. Esboce o gráfico e determine a equação da reta que satisfaz as propriedades:

    a) passa pelo pontos $A(-2, 3)$ e $B(4, 0)$;

    b) inclinação de $45°$ e passa pelo ponto $A(-2, 3)$;

    c) paralela à reta $y = 3x - 4$ e passa pelo ponto $A(-2, -4)$;

    d) perpendicular à reta $y = 3x - 4$ e passa pelo ponto $A(-2, -4)$;

    e) paralela ao eixo Ox e passa pelo ponto $A(1, 4)$;

    f) perpendicular ao eixo Ox e passa pelo ponto $A(2, -1)$.

2. Esboce o gráfico das retas $r : y = x - 2$ e $s : y = -2x + 4$ e determine o ponto de interseção entre elas.

3. Calcule a distância entre os pontos $A(-2, -5)$ e $B(0, 0)$.

4. Três vértices de um retângulo são $A(2, -1)$, $B(7, -1)$ e $C(7, 3)$. Determine as coordenadas do quarto vértice.

5. Verifique se os pontos $A(0, 2), B(-3, 1), C(4, 5)$ estão alinhados.

6. Determine a equação da reta que passa no ponto médio do segmento formado pelos pontos $A(-2, 3)$ e $B(-1, 5)$ e pelo ponto sobre o eixo Ox de abcissa 3.

7. Dadas as retas $r : 3x + \frac{3}{2}y + \frac{21}{2} = 0$ e $s : -\frac{3}{2}x + 2y + 3 = 0$. Determine:

    a) o ponto de interseção, caso exista;

    b) os pontos de interseção da reta r com o eixo Ox e com o eixo Oy;

    c) os pontos de interseção da reta s com o eixo Ox e com o eixo Oy.

8. Dados $A(-4, 3)$, $B(-2, -3)$ e $C(2, 1)$, vértices de um triângulo ABC.

    a) determine os pontos M, N e P médios dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ respectivamente.

    b) determine o comprimento de cada uma das medianas do triângulo ABC.

    c) determine as equações para as retas r, s e t que contêm respectivamente cada uma das medianas deste triângulo.

    d) obtenha o ponto de interseção entre as medianas (*baricentro*).

9. Dados os pontos $A(4,-4)$, $B(6,-1)$, $C(3,1)$ e $D(1,-2)$ vértices de um quadrado.

   a) calcule o comprimento dos lados.

   b) calcule o comprimento das diagonais.

   c) determine as equações das retas r e s que contêm cada uma das diagonais.

   d) determine o ponto I de interseção entre as diagonais.

10. Os pontos $A(-3,1)$, $(3,-1)$ $C(-2,3)$ e $D(2,-3)$ são vértices de um retângulo em $\mathbb{R}^2$.

    a) calcule o comprimento dos lados.

    b) determine o ponto médio cada um dos lados.

    c) determine as equações das retas r e s que contêm os pontos médios de lados paralelos (dois a dois) do retângulo.

    d) determine o ponto I de interseção entre retas r e s do item anterior.

Gabarito:

1. a) $y = -\dfrac{x}{2} + 2$
   b) $y = x + 5$
   c) $y = 3x + 2$
   d) $y = \dfrac{-x-14}{3}$
   e) $y = 4$
   f) $x = 2$

2. $P(2,0)$

3. $\sqrt{29}$

4. $D(2,3)$

5. Não

6. $8x + 9y = 24$

7. a) $I(-2,-3)$

b) interseção com o eixo Ox: $P\left(-\frac{7}{2},0\right)$ e interseção com o eixo Oy: $Q(0,-7)$

c) interseção com o eixo Ox: $R(2,0)$ e interseção com o eixo Oy: $S\left(0,-\frac{3}{2}\right)$

8. a) $M(-3,0)$, $N(-1,2)$ e $P(0,-1)$

b) comprimento medianas: $\overline{AP}=5,66$, $\overline{BN}=5,1$ e $\overline{CM}=5,1$

c) $r: x+y=-1$, $s: -5x+y=7$ e $t: -x+5y=3$

d) $I\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$

9. a) $3,61$

b) $5,1$

c) $r: -2x+10y=-22$ e $r: 5x+y=16$

d) $I\left(\frac{7}{2},-\frac{3}{2}\right)$

10. a) $2,24$ u.c. e $6,4$ u.c.

b) $M\left(-\frac{5}{2},2\right)$, $N\left(\frac{5}{2},-2\right)$, $P\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ e $Q\left(\frac{1}{2},1\right)$

c) $r: -2x+y=0$ e $s: 4x+5y=0$

d) $I(0,0)$

Capítulo 2

CURVAS CÔNICAS

Objetivos do capítulo

- Identificar que as cônicas originam-se da interseção de um cone com planos.
- Identificar e classificar as cônicas.
- Deduzir as equações das cônicas através da definição de lugar geométrico.
- Reconhecer os elementos de cada uma das curvas cônicas.
- Deduzir a equação geral das cônicas com centros transladados.
- Representar geometricamente as curvas cônicas com todos os seus elementos.
- Utilizar um software de geometria dinâmica para reconhecer as curvas e seus elementos.

Introdução

Durante vários séculos, a humanidade acreditou que as órbitas descritas pelos planetas eram circunferências e que a Terra era o centro.

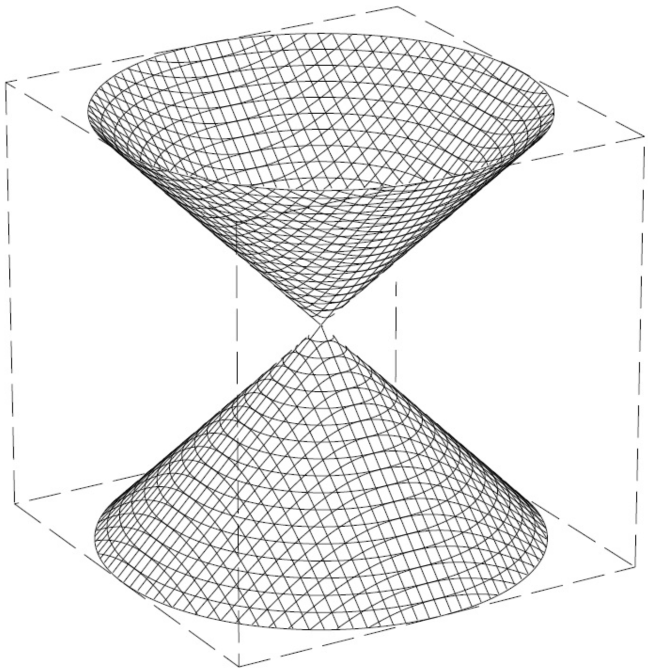
O matemático e astrônomo Johannes Kepler (1571-1630) estudou as órbitas planetárias e observou que a órbita de Marte em volta do Sol era uma elipse e não um círculo, assim como as demais, embora sejam elipses menos esticadas. Esses estudos levaram às leis do movimento planetário. Ele observou também que a velocidade de cada corpo celeste varia ao longo da trajetória.

Uma das descobertas também foi que o Sol não se encontra no centro da elipse e sim em um ponto fixo que chamamos de foco, e, por isso, os planetas acabam em algum momento estando mais próximos do Sol e em outros mais afastados.

Outro matemático e astrônomo chamado Apolônio ($\pm 262 - 190$ a.C.) apresentou, em sua obra *Seções cônicas*, os resultados iniciados pelos seus antecessores, mostrando que a partir de um cone é possível obter as três espécies de seções cônicas, apenas variando a inclinação do plano de seção. Foi Apolônio também quem introduziu os nomes parábola, elipse e hipérbole, utilizados até hoje.

Uma seção cônica é uma curva obtida cortando-se um cone de duas folhas, como mostra a Figura 24, por um plano que não passa pelo vértice, chamado de plano secante.

Figura 24. Superfície cônica

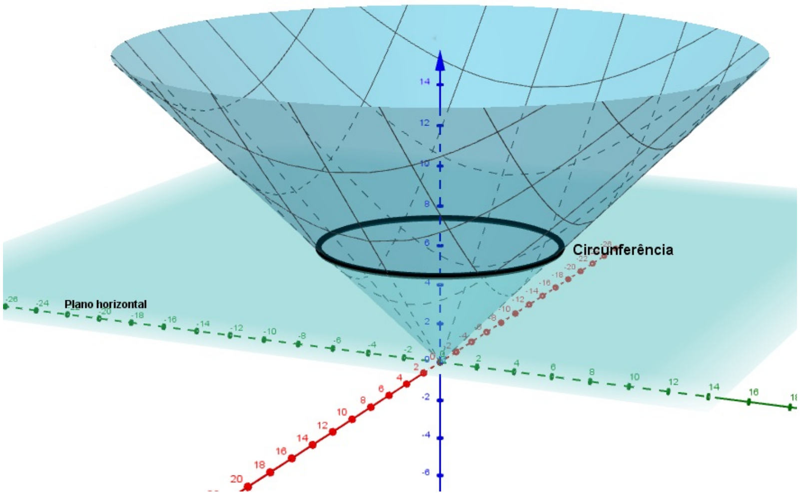


Fonte: os autores

Se o cone de duas folhas for seccionado por um plano, dependendo da sua inclinação, teremos:

- A **origem**, quando o plano for perpendicular, passando pelo vértice O.
- Uma **circunferência**, quando o plano for perfeitamente horizontal, não passando pelo vértice, conforme a Figura 25.

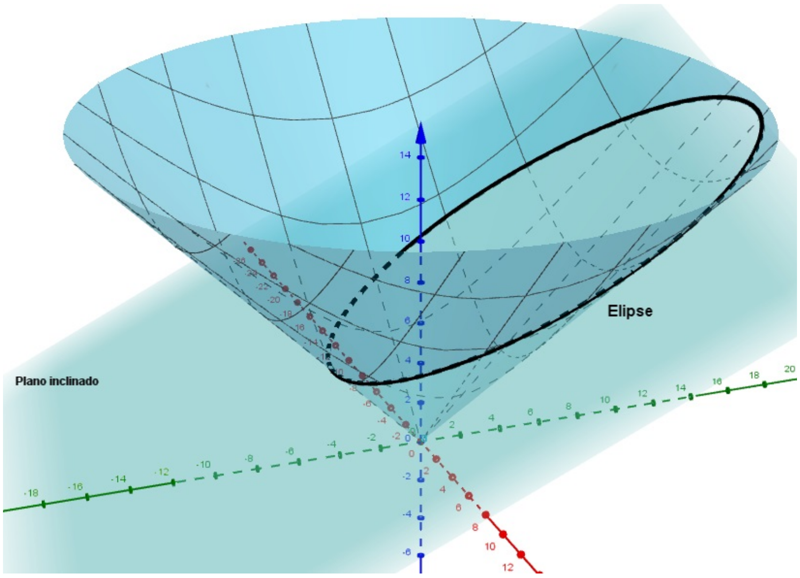
Figura 25. Circunferência: interseção da superfície com um plano horizontal



Fonte: os autores

- Uma **elipse**, quando o cone é seccionado por um plano ligeiramente inclinado, deformando a circunferência, conforme a Figura 26.

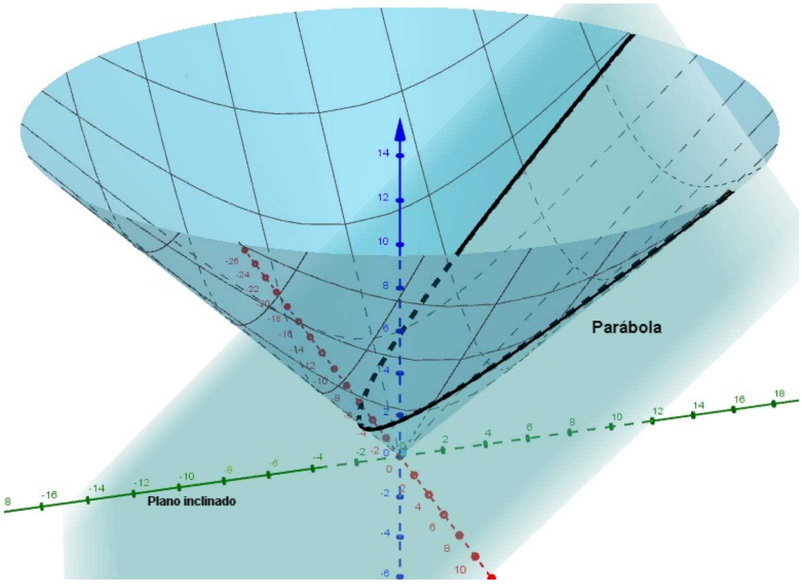
Figura 26. Elipse: interseção da superfície com um plano pouco inclinado



Fonte: os autores

- Uma **parábola**, conforme a Figura 27. Observamos que aumentando a inclinação do plano, a elipse não se fecha e a curva obtida é uma parábola, que é uma curva aberta.

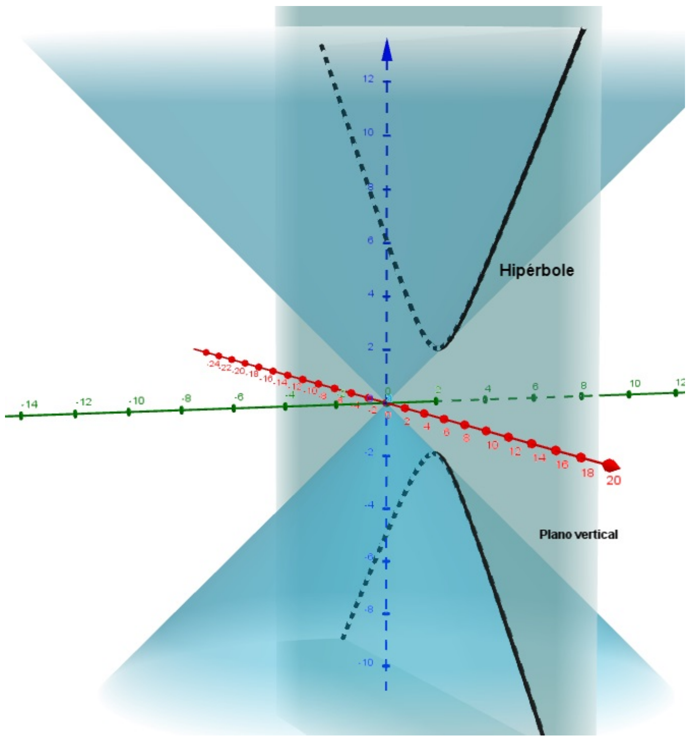
Figura 27. Parábola: interseção da superfície com um plano mais inclinado



Fonte: os autores

- Uma **hipérbole**, conforme mostra a Figura 28, é a única das seções cônicas que possui dois ramos, isto acontece quando seccionamos o cone por um plano vertical.

Figura 28. Hipérbole: interseção da superfície com um plano vertical



Fonte: os autores

Algumas aplicações:

- As elipses são usadas na fabricação de engrenagens de máquinas (Engenharia Mecânica).
- Os arcos de pontes de concreto e de pedras ou tetos têm muitas vezes formas elípticas ou parabólicas (Engenharia Civil e Arquitetura).
- As parábolas são usadas em espelhos refletores e faróis de automóveis.
- Em um teto curvo, como uma abóboda de uma catedral, os sons emitidos em um foco têm melhor audibilidade nos pontos próximos ao outro foco.
- Os refletores de dentistas são refletores elípticos que têm como objetivo concentrar o máximo de luz onde se está trabalhando.
- Alguns telescópios denominados refletores usam um espelho hiperbólico secundário, além do refletor parabólico principal, para redirecionar a luz do foco principal para um ponto mais conveniente.

Neste capítulo, vamos estudar cada uma das curvas cônicas, partindo da definição de lugares geométricos, reconhecer os elementos de cada uma das curvas (que são basicamente: pontos e retas) e as representações geométricas.

2.1 A Parábola

2.1.1 A Geometria da Parábola

A parábola é o conjunto dos pontos P que estão equidistantes de um ponto fixo, denominado *foco* representado pela letra F e de uma reta fixa, denominada *diretriz* d nesse plano. Ou seja,

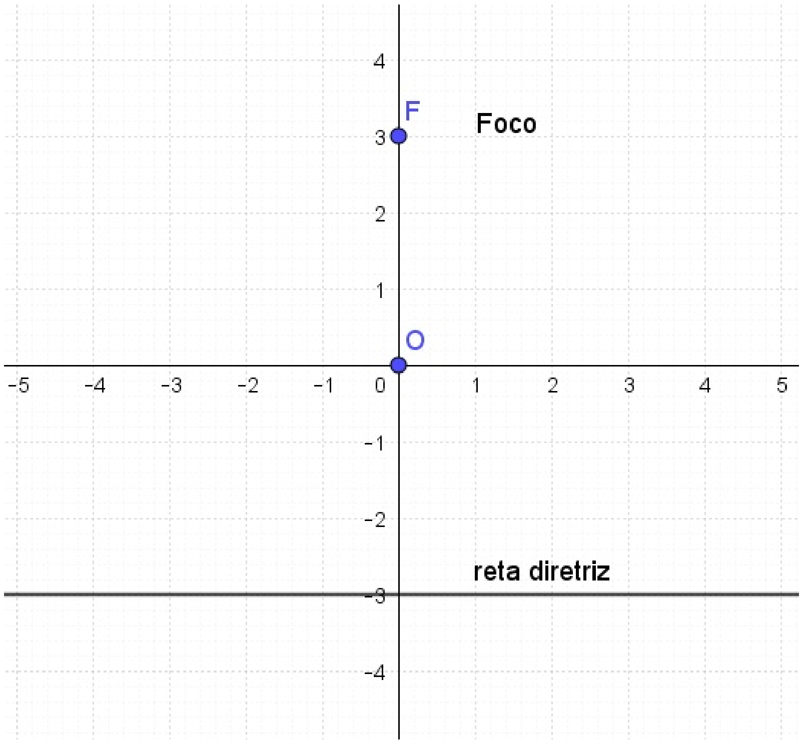
$$\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}^2 | d(P, F) = d(P, d)\}.$$

Consideremos inicialmente o ponto $(0, 0)$ como sendo o vértice da parábola no sistema de coordenadas cartesianas. Para compreender melhor a definição, ela mesma será utilizada para resolver o Exemplo 2.1 e as Figuras 29 e 30 apresentam a geometria da parábola, nesse caso.

Exemplo 2.1. *Considere a reta $r : y = -3$ e o ponto $F(0, 3)$. Seja $P(x, y)$ um ponto arbitrário da parábola, escreva uma equação para essa curva a partir do ponto F e da reta r.*

Solução: Inicialmente, observemos a Figura 29,

Figura 29. Foco e reta diretriz da parábola



Fonte: os autores

a distância do foco ao ponto $O(0,0)$, origem do sistema de coordenadas cartesianas, é a mesma distância da reta diretriz até a origem do sistema. Partindo da definição $\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}^2 | d(P,F) = d(P,d)\}$, à esquerda da igualdade, estamos tratando da distância entre dois pontos, o foco F, que é o ponto fixo, e P um ponto qualquer que pertence à curva. E, à direita da igualdade, temos a distância do mesmo ponto P da curva até reta $y = -3$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} d(P,F) &= d(P,r) \\ \sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} &= |y+3| \\ x^2 + (y-3)^2 &= (y+3)^2 \\ x^2 + y^2 - 6y + 9 &= y^2 + 6y + 9 \end{aligned}$$

que é equivalente à equação

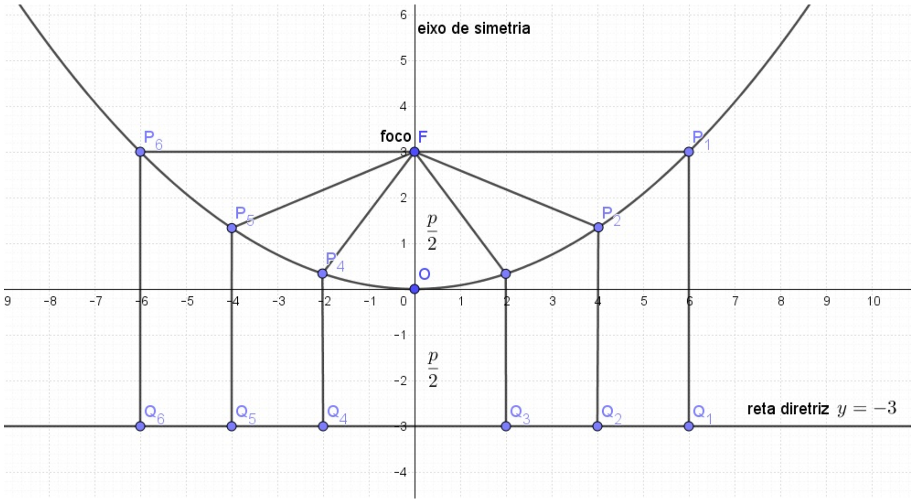
$$x^2 - 12y = 0$$

ou

$$x^2 = 12y.$$

A equação $x^2 = 12y$, é a equação reduzida da parábola com vértice na origem e abertura voltada para cima. A Figura 30 apresenta o gráfico da parábola:

Figura 30. Parábola do Exemplo 2.1



Fonte: os autores

Analisando a Figura 30, identificamos a definição de lugar geométrico da parábola, visto que, a distância do ponto P_1 até o foco F da parábola é a mesma distância do ponto P_1 até o ponto Q_1, que pertence a reta diretriz. Relação igual para os demais pontos pertencentes à curva. Também é visível que existem pontos simétricos que pertencem à curva, em relação ao eixo de simetria, que, nesse caso, é o eixo das ordenadas (eixo dos y).

2.1.1.1 Elementos da Parábola

- Foco: é o ponto F (sobre o eixo de simetria).
- Vértice: é o ponto de interseção da parábola com seu eixo de simetria, chamaremos de V.
- Diretriz: é a reta d perpendicular ao eixo de simetria.
- Eixo de simetria: é a reta que passa por F e é perpendicular a d. A curva é *simétrica* em relação ao seu eixo de simetria.
- $\frac{p}{2}$: observando a Figura 30, note que a distância do vértice da parábola ao Foco é o comprimento $|\overline{FV}|$, essa distância será denotada por $\frac{p}{2}$ (como se trata de uma distância, o valor é sempre positivo). Por definição, essa é a mesma distância do vértice à reta diretriz.

Curiosidade: A geometria da parábola aumenta, por exemplo, a capacidade de captação de ondas pelas antenas parabólicas, usadas em comunicação e astronomia. O formato da parábola faz com que as ondas sejam refletidas todas no foco, não importando em que ponto elas batam. Se o dispositivo receptor estiver localizado no foco, é garantido que todas as ondas sejam captadas.

2.1.2 Equações reduzidas da Parábola

Conforme estudamos no Exemplo 2.1, vamos apresentar a partir de agora as equações reduzidas da parábola com vértice no ponto $V(0, 0)$, no sistema de coordenadas cartesianas.

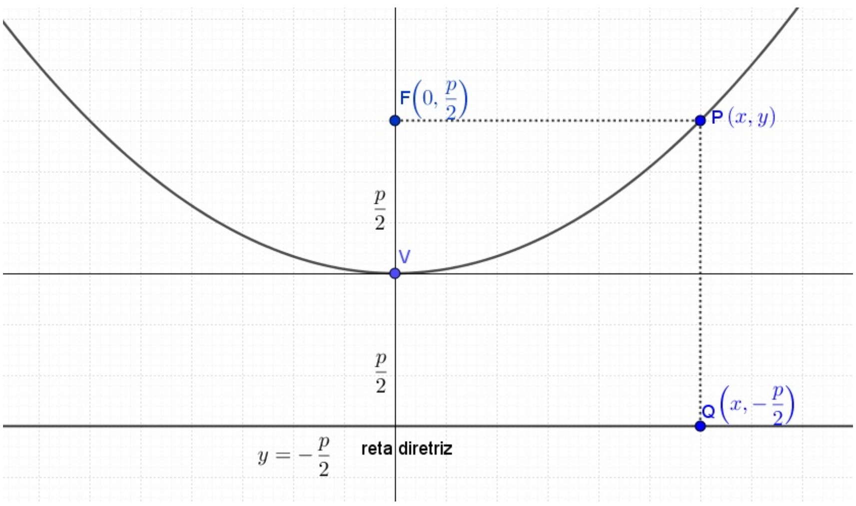
Nesse caso, temos duas situações que precisamos considerar: a parábola com eixo de simetria no eixo dos x e a parábola com eixo de simetria no eixo dos y. Vamos observar o que muda em cada situação principalmente com relação à abertura da curva, a posição da reta diretriz e as respectivas equações.

2.1.2.1 Equação da Parábola com eixo de simetria no eixo dos y

Partindo da definição, consideramos um ponto $P(x, y)$ qualquer da parábola e as seguintes coordenadas para o foco da parábola $F(0, \frac{p}{2})$. Nessa situação, a equação da reta diretriz é $y = -\frac{p}{2}$, que representa uma reta horizontal que intersecta o eixo das ordenadas.

Usando as relações de distância entre um ponto P qualquer da curva com o foco F, e, levando em consideração que $Q(x, -\frac{p}{2})$ é um ponto na reta diretriz, tal como mostra a Figura 31.

Figura 31. Parábola com eixo de simetria no eixo dos y



Fonte: os autores

Dessa forma,

$$\begin{aligned} d(P,F) &= d(P,Q) \\ \left(x-0, y-\frac{p}{2}\right) &= \left(x-x, y+\frac{p}{2}\right) \\ \sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2} &= \sqrt{(x-x)^2+\left(y+\frac{p}{2}\right)^2} \\ (x-0)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2 &= (x-x)^2+\left(y+\frac{p}{2}\right)^2 \\ x^2+y^2-py+\frac{p^2}{4} &= y^2+py+\frac{p^2}{4} \end{aligned}$$

$$x^2 = 2py. \tag{2.1}$$

A equação (2.1) é a **equação reduzida da parábola de vértice na origem e eixo de simetria sobre o eixo dos** y.

O Exemplo 2.2, ilustra uma outra situação em que abertura da parábola está voltada para baixo, compare a equação obtida com a equação da parábola do Exemplo 2.1.

Exemplo 2.2. *Considere a reta* $r : y = 4$ *e o ponto* $F(0,-4)$. *Seja* $P(x,y)$ *um ponto arbitrário da parábola, escreva uma equação para essa curva a partir do ponto* F *e da reta* r.

Solução: Usando a definição $\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}^2 | d(P,F) = d(P,d)\}$, à esquerda da igualdade, temos a distância entre dois pontos e à direita, a distância de um ponto a uma reta, portanto:

$$\begin{aligned} d(P,F) &= d(P,r) \\ \sqrt{(x-0)^2+(y+4)^2} &= |y-4| \\ x^2+(y+4)^2 &= (y-4)^2 \\ x^2+y^2+8y+16 &= y^2-8y+16 \end{aligned}$$

que é equivalente a equação

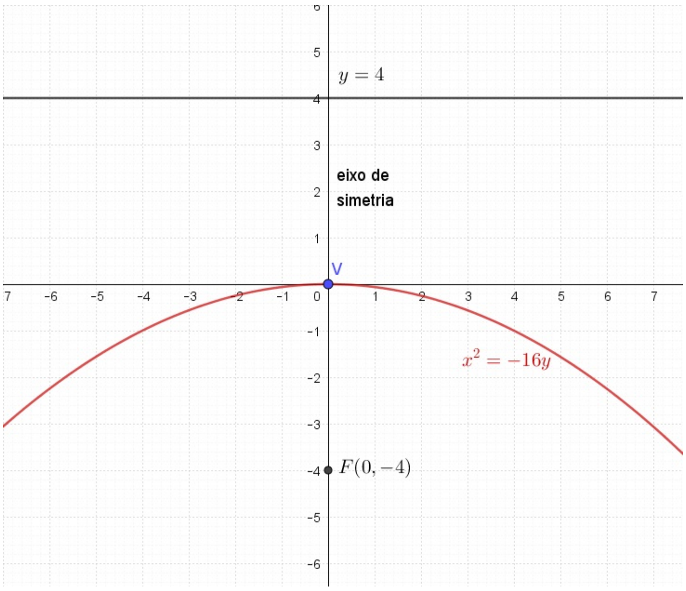
$$x^2 + 16y = 0$$

ou

$$x^2 = -16y.$$

Equação que representa a parábola com eixo de simetria no eixo dos y, observe o gráfico dessa curva na Figura 32, o eixo de simetria da curva é o eixo dos y e que a reta diretriz $y = 4$ é uma reta horizontal. A abertura da parábola está voltada para baixo.

Figura 32. Gráfico da Parábola do Exemplo 2.2



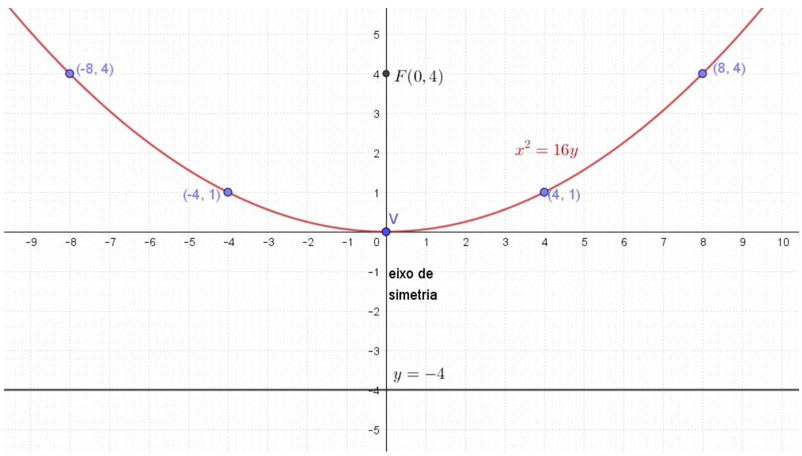
Fonte: os autores

Abertura da Parábola com eixo de simetria no eixo dos y

Quando o eixo de simetria da parábola é o eixo das ordenadas ou eixo dos y, temos duas situações possíveis:

✓ **Abertura voltada para cima**: a Figura 33 apresenta uma parábola com abertura voltada para cima, de equação $x^2 = 2py$, o foco pertence ao semieixo positivo das ordenadas $F(0, \frac{p}{2})$, a diretriz é uma reta horizontal $y = -\frac{p}{2}$, e o eixo de simetria é o eixo dos y.

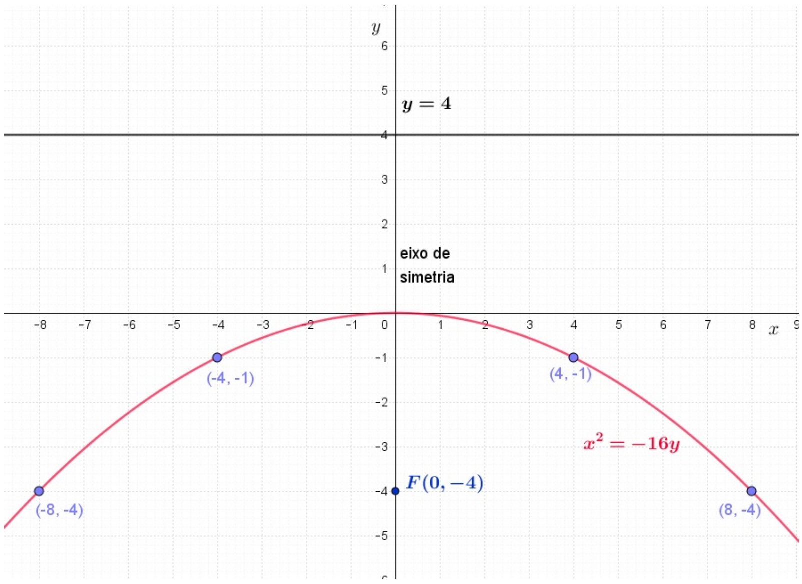
Figura 33. Parábola com abertura voltada para cima



Fonte: os autores

✓ **Abertura voltada para baixo**: a Figura 34 apresenta uma parábola com abertura voltada para baixo, de equação $x^2 = -2py$, o foco pertence ao semi-eixo negativo das ordenadas $F(0, -\frac{p}{2})$, a diretriz é uma reta horizontal $y = \frac{p}{2}$, e o eixo de simetria é o próprio eixo dos y.

Figura 34. Parábola com abertura voltada para baixo



Fonte: os autores

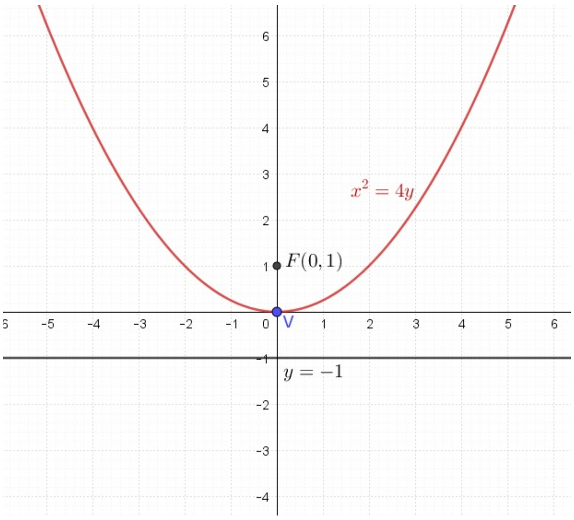
Pela equação (2.1), entendemos que o gráfico da curva é simétrico em relação ao eixo dos y, já que substituindo x por $-x$ não altera a equação. Sendo assim, se o ponto (x, y) pertence a curva, o ponto $(-x, y)$ também pertence. Isso fica evidente nas Figuras 33 e 34, em que mostramos alguns pontos simétricos pertencentes a curva.

O próximo exemplo mostra como determinar os elementos da parábola e como identificar o gráfico conhecendo a sua equação.

Exemplo 2.3. *Determine o foco e a equação da reta diretriz da parábola $x^2 = 4y$ e esboce a curva.*

Solução: Pela equação $x^2 = 4y$, observamos que a parábola tem vértice na origem, eixo de simetria no eixo dos y, e a abertura da curva está voltada para cima, sendo assim se a equação é da forma $x^2 = 2py$. Sabemos também que $2p = 4$, portanto $p = 2$ e $\frac{p}{2} = 1$, lembramos que $\frac{p}{2}$ é a distância do foco ao vértice e do vértice à reta diretriz. Assim, se o foco tem coordenadas $F(0, \frac{p}{2})$ então, $F(0, 1)$ localizado no semieixo positivo do eixo dos y. A reta diretriz é uma reta horizontal de equação $y = -1$ conforme apresenta a Figura 35.

Figura 35. Gráfico da Parábola do Exemplo 2.3



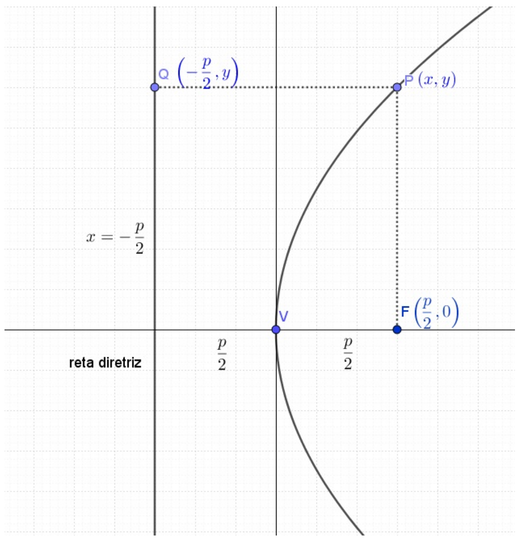
Fonte: os autores

Agora, vamos analisar outra situação, se a diretriz da parábola é uma reta vertical, o que muda na curva com relação à abertura da parábola, o eixo de simetria e a sua equação?

2.1.2.2 Equação da Parábola com eixo de simetria no eixo dos x

Consideramos um ponto arbitrário $P(x, y)$ da parábola de foco $F(\frac{p}{2}, 0)$ e a reta diretriz de equação $x = -\frac{p}{2}$, uma reta vertical que intercepta o eixo das abscissas, e, levando em consideração que $Q(-\frac{p}{2}, y) \in d$, conforme a Figura 36, temos:

Figura 36. Parábola com eixo de simetria no eixo dos x



Fonte: os autores

$$\begin{aligned}
d(P,F) &= d(P,Q)\\
\left(x-\frac{p}{2},y-0\right) &= \left(x+\frac{p}{2},y-y\right)\\
\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+(y-0)^2} &= \sqrt{(x+\frac{p}{2})^2+(y-y)^2}\\
x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2 &= x^2+px+\frac{p^2}{4}
\end{aligned}$$

simplificando, temos

$$y^2 = 2px. \tag{2.2}$$

A equação (2.2) é a **equação reduzida da parábola com eixo de simetria sobre o eixo dos** x.

No próximo exemplo, mostramos como determinar a equação da curva, conhecendo dois elementos: a equação da reta diretriz e as coordenadas do foco.

Exemplo 2.4. *Considere a reta* $r : x = -3$ *e o ponto* $F(3,0)$. *Seja* $P(x,y)$ *um ponto arbitrário da parábola, escreva uma equação para essa curva a partir do ponto* F *e tal que sua diretriz seja a reta* r.

Solução: Usando novamente a definição, temos:

$$\begin{aligned}
d(P,F) &= d(P,r)\\
\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2} &= |x+3|\\
(x-3)^2+y^2 &= (x+3)^2\\
x^2+y^2-6x+9 &= x^2+6x+9
\end{aligned}$$

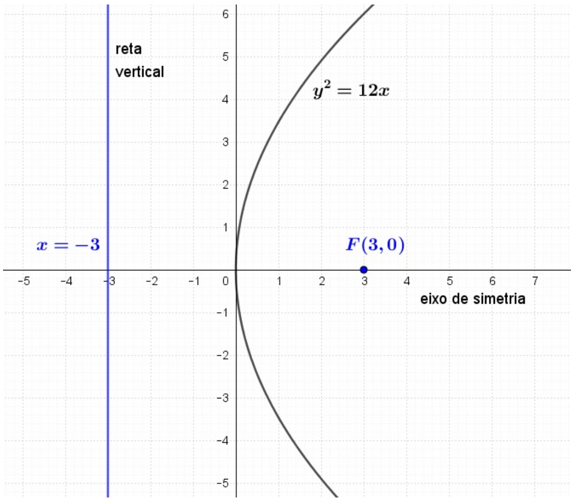
que é equivalente a equação

$$y^2-12x=0 \quad \text{ou} \quad y^2=12x,$$

que representa a equação da parábola com eixo de simetria no eixo dos x.

Gráfico: Observamos que o eixo de simetria da curva é o eixo dos x e que a reta diretriz de equação $x=-3$ é uma reta vertical. A abertura da parábola está voltada para direita, isto é, voltada para o semieixo positivo do eixo dos x, Figura 37.

Figura 37. Parábola do Exemplo 2.4



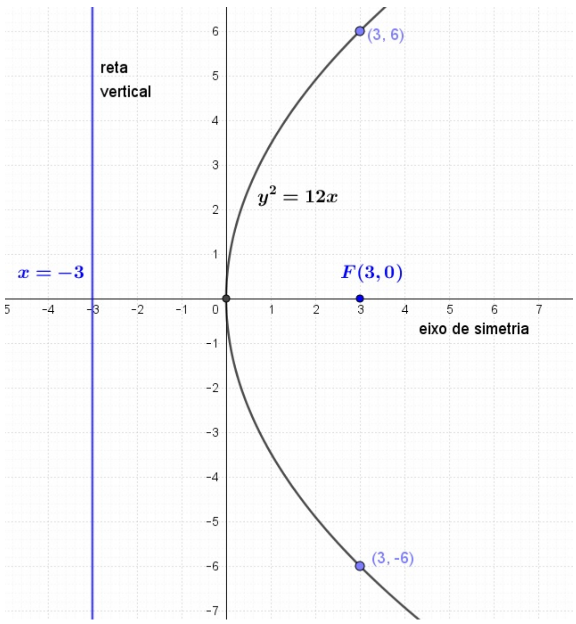
Fonte: os autores

Abertura da Parábola com eixo de simetria no eixo dos x

Quando o eixo de simetria da parábola é o eixo das abscissas, temos duas situações possíveis:

✓ **Abertura voltada para direita**: parábola de equação $y^2 = 2px$, o foco pertence ao semieixo positivo das abscissas $F(\frac{p}{2}, 0)$, a diretriz é uma reta vertical $x = -\frac{p}{2}$ e portanto, o eixo de simetria é o eixo dos x , conforme a Figura 38.

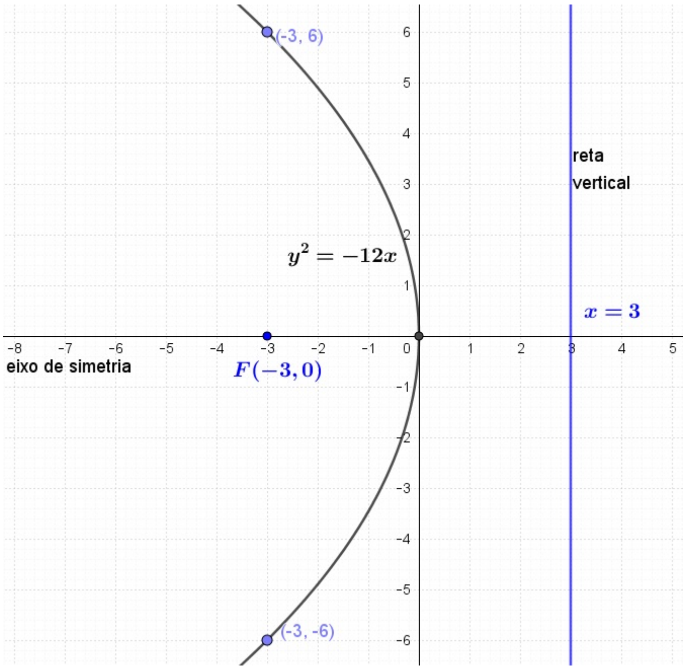
Figura 38. Parábola com abertura voltada para direita



Fonte: os autores

✓ **Abertura voltada para esquerda**: parábola de equação $y^2 = -2px$, na Figura 39, o gráfico mostra que o foco pertence ao semieixo negativo das abscissas $F(-\frac{p}{2}, 0)$, a diretriz é uma reta vertical $x = \frac{p}{2}$ e o eixo de simetria é o próprio eixo dos x.

Figura 39. Parábola com abertura voltada para esquerda



Fonte: os autores

Com relação a simetria da parábola, quando a equação da parábola é do tipo $y^2 = 2px$ ou $y^2 = -2px$, temos valores de y que são simétricos. Então, a parábola é simétrica em relação ao eixo dos x. Observamos este fato analisando as Figuras 38 e 39. Essa relação de simetria é útil para a construção de gráficos, pois determinando uma das metades da parábola; a outra é uma reflexão desta.

Exemplo 2.5. *Dada a equação da parábola $y^2 = 7x$, obtenha as coordenadas do foco, a equação da reta diretriz e faça o esboço da curva.*

Solução: Observamos que, pela equação da parábola $y^2 = 7x$, a curva possui vértice na origem $V(0, 0)$ e o eixo de simetria é o eixo dos x, pois a equação é do tipo: $y^2 = 2px$, tal como a equação (2.2).

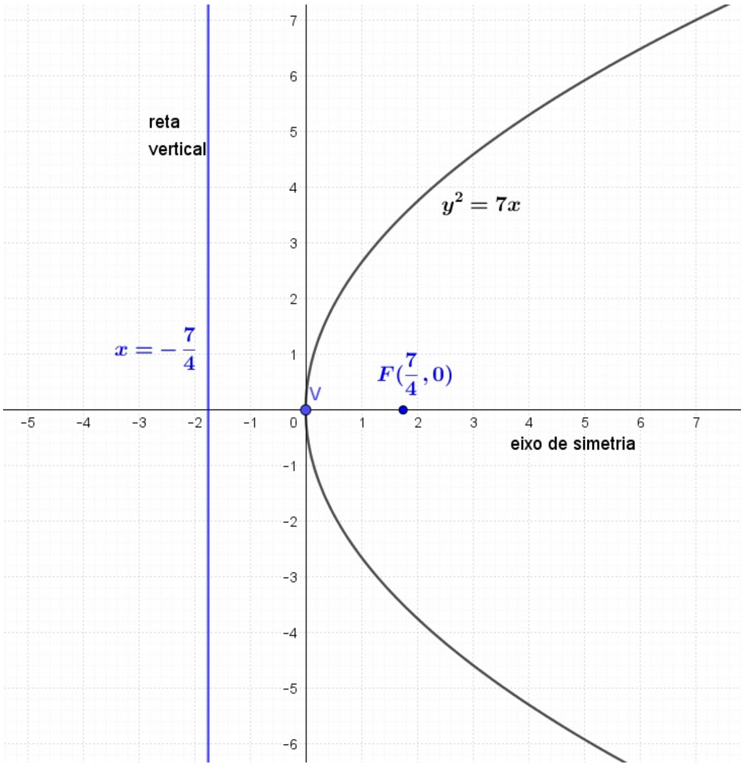
Portanto, temos que $2p = 7$.

Logo o parâmetro é $p = \dfrac{7}{2}$.

As coordenadas do foco são: $F(\frac{p}{2}, 0) \Rightarrow F(\frac{7}{4}, 0)$. Dessa forma, se o foco está localizado no semieixo positivo do eixo dos x, então a abertura da parábola está voltada para a direita.

A equação da reta diretriz é $x = -\dfrac{7}{4}$ ou $x + \dfrac{7}{4} = 0$, isto é, uma reta vertical (Figura 40).

Figura 40. Gráfico da Parábola do Exemplo 2.5

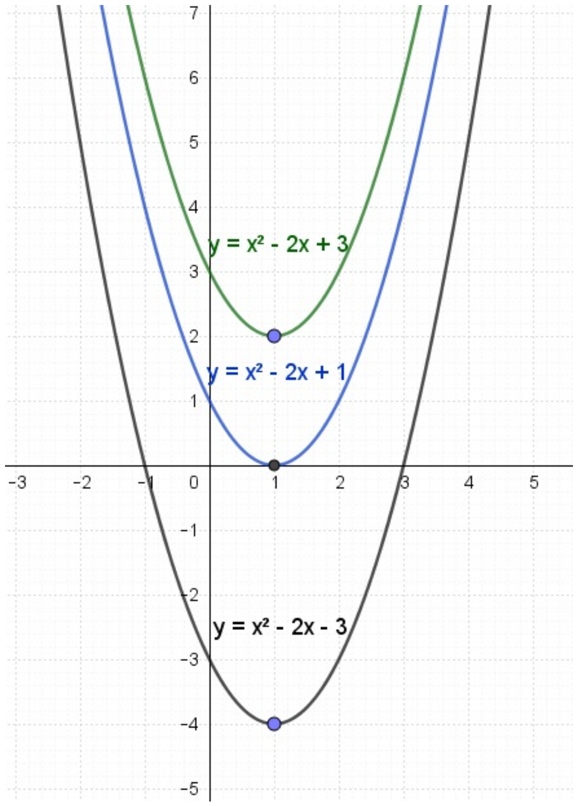


Fonte: os autores

2.1.3 A Função Quadrática ou Função Polinomial do segundo grau

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se polinomial do segundo grau (ou função quadrática) se existem constantes reais a, b e c, com $a \neq 0$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$. O gráfico dessa função é uma parábola, com abertura voltada para cima ou para baixo. Observando os gráficos da Figura 41, notamos como é possível deduzir uma série de informações sobre a parábola, apenas analisando a função que a define:

Figura 41. Exemplos de Funções quadráticas



Fonte: os autores

- as três parábolas estão com a abertura voltada para cima;
- em todas as funções, o coeficiente $a = 1$;
- a parábola na cor verde não tem raiz (a curva não cruza o eixo Ox);
- a parábola na cor azul tem uma única raiz, que coincide com o vértice;
- a parábola na cor preta tem duas raízes (a curva cruza o eixo Ox em dois pontos distintos);
- nas três funções, o valor do coeficiente c coincide com o ponto em que a curva corta o eixo dos y.

Observando o conjunto de parábolas na Figura 41, concluímos que:

✓ o parâmetro a está relacionado à abertura da parábola;

✓ o parâmetro c é exatamente o valor da coordenada y do ponto em que a parábola corta o eixo Oy (no ponto em que $x = 0$);

✓ o número de raízes está relacionado com o número de pontos em que a parábola cruza o eixo dos x;

✓ quando a abertura ou concavidade é voltada para cima, dizemos que o vértice é um ponto de **mínimo**, ou seja, o vértice é o ponto da parábola no qual a coordenada y tem o menor valor possível. De forma análoga, se a parábola tem abertura voltada para baixo, chamamos o vértice de ponto de **máximo**, que é aquele em que a coordenada y atinge o maior valor possível.

Exemplo 2.6. *Esboçar o gráfico da função quadrática* $f(x) = x^2 - 2x - 3$*, identificando os elementos da parábola:*

a) Abertura da curva, indicada pelo coeficiente a de x^2*;*

b) Pontos onde o gráfico intercepta o eixo Ox *(são as raízes, determinadas pela solução da equação* $f(x) = 0$*);*

c) Ponto onde o gráfico intercepta o eixo Oy *(cálculo de* $f(0)$ *ou termo independente);*

d) Vértice da curva: $V\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\triangle}{4a}\right)$*;*

e) Eixo de simetria: $\left(x = \dfrac{-b}{2a}\right)$.

Solução: Pela função quadrática $f(x) = x^2 - 2x - 3$, temos que $a = 1$, $b = -2$ e $c = -3$. Então:

a) A abertura da parábola está voltada para cima, pois $a = 1 > 0$.

b) Os pontos onde a curva intercepta o eixo dos x são os pontos para os quais $f(x) = 0$. Dessa forma, pela equação $x^2 - 2x - 3 = 0$,

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16 \Rightarrow \Delta > 0,$$

portanto, há duas raízes $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$. Logo, os pontos onde a curva corta o eixo dos x são: $(-1, 0)$ e $(3, 0)$.

c) O ponto onde o gráfico intercepta o eixo dos y é o valor de f no ponto zero, ou seja, $f(0) = (0)^2 - 2(0) - 3 = -3$. Assim, o ponto $(0, -3)$ é o ponto que a parábola intercepta o eixo dos y.

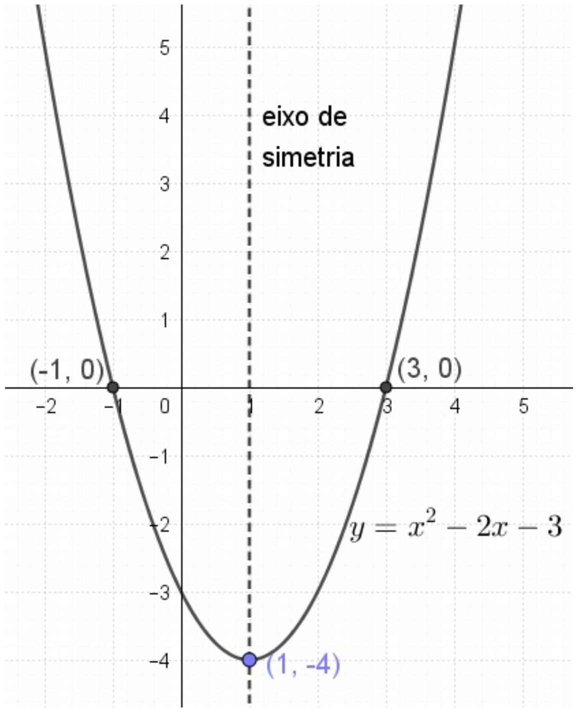
d) Vértice: é dado por

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$
$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-16}{4} = -4.$$

Logo, o vértice é o ponto $V(1, -4)$.

e) Eixo de simetria: é a reta: $x = \dfrac{-b}{2a}$. Então: $x = \dfrac{2}{2} = 1$. Como $x = 1$ é a reta que indica o eixo da simetria, dizemos que a parábola tem eixo de simetria paralelo ao eixo dos y.

Figura 42. Função quadrática do Exemplo 2.6



Fonte: os autores

Observamos que a função quadrática escolhida no Exemplo 2.6, Figura 42 tem seu vértice localizado em um ponto diferente da origem do sistema cartesiano. O que ocorreu foi uma translação de eixos, tópico que abordaremos na próxima seção.

2.1.4 Translação de eixos

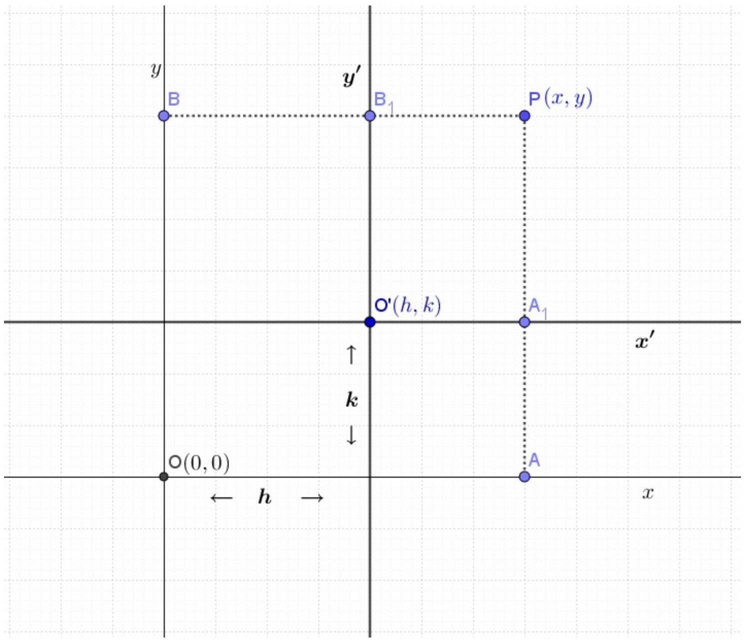
Uma curva não é afetada pela posição de seus eixos coordenados, no entanto, suas respectivas equações sofrem alterações. Isso fica evidente comparando o gráfico da Figura 42 com os gráficos anteriores.

Vamos analisar agora o caso em que o vértice de uma cônica é um ponto (h, k) do sistema cartesiano, isto é, obtemos um novo sistema $x'O'y'$ cuja origem é $O'(h, k)$. Esse novo sistema tem a mesma unidade de medida, mesma direção e mesmo sentido dos eixos Ox e Oy.

Nesses casos, com relação às curvas estudadas até aqui, as parábolas da equação $x^2 = 2py$ e $y^2 = 2px$ são transladadas horizontalmente por h unidades e verticalmente por k unidades, desta forma, o vértice da parábola se move da origem do sistema cartesiano para o ponto (h, k).

Na Figura 43, as relações $x = x' + h$ e $y = y' + k$ ou $x' = x - h$ e $y' = y - k$ são as fórmulas de translação e que permitem transformar coordenadas de um sistema para outro.

Figura 43. Translação de eixos



Fonte: os autores

A partir de um ponto P qualquer, a relação entre os dois conjuntos de coordenadas é dado por:

$$\overline{A_1P} = \overline{AP} - \overline{AA_1} \Rightarrow y' = y - k$$
$$\overline{B_1P} = \overline{BP} - \overline{BB_1} \Rightarrow x' = x - h. \tag{2.3}$$

A partir de agora, apresentamos as equações das curvas com vértices localizados em qualquer ponto no sistema cartesiano. Começamos na próxima seção com as equações da parábola as quais são alteradas quando os vértices estão localizados em pontos diferentes da origem. Posteriormente, as demais curvas também serão estudadas com seus centros na origem e transladados.

2.1.5 Translações de Parábolas

Considerando o novo sistema $x'O'y'$, vamos apresentar as equações reduzidas da parábola com vértice em qualquer ponto do sistema cartesiano ortogonal. De forma análoga às curvas estudadas anteriormente, temos dois casos a considerar: parábolas com eixo de simetria paralelo ao eixo dos y e parábolas com eixo de simetria paralelo ao eixo dos x.

2.1.5.1 Eixo da Parábola paralelo ao eixo dos y

A equação da parábola no novo sistema $x'O'y'$, é $x'^2 = 2py'$, usando as fórmulas de translação (2.3), obtemos a equação da parábola na forma padrão no sistema xOy

$$(x-h)^2 = 2p(y-k). \tag{2.4}$$

O vértice da parábola é o ponto de interseção da curva com o eixo de simetria. Dessa forma, pela equação (2.4), observamos que o Vértice é um ponto arbitrário no sistema cartesiano, $V(h,k) \neq (0,0)$. Nesse caso, pela Figura 43, a nova origem é dada pelo ponto O', que é considerado o vértice da parábola ($O' = V$).

O foco da parábola deverá ser transladado verticalmente em relação ao vértice, pois o eixo de simetria é paralelo ao eixo dos y, portanto $F\left(h, k+\dfrac{p}{2}\right)$.

A reta diretriz também será transladada em relação ao novo vértice e sua equação é $y = k - \dfrac{p}{2}$.

A equação (2.4) é a **equação da parábola de vértice** $V(h,k)$ e **eixo de simetria paralelo ao eixo dos** y. Desenvolvendo a equação (2.4) e isolando a variável y, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 - 2xh + h^2 &= 2py - 2pk \\ y &= \frac{1}{2p}x^2 - \frac{h}{p}x + \frac{h^2+2pk}{2p} \\ y &= ax^2 + bx + c, \text{ com } a \neq 0, \end{aligned}$$

equação explícita da parábola, similar às expressões que foram estudadas na seção 2.1.3. Observamos que: $a = \dfrac{1}{2p}$, $b = -\dfrac{h}{p}$ e $c = \dfrac{h^2+2pk}{2p}$.

Dessa forma, para uma parábola de vértice em $V(h,k)$ eixo de simetria paralelo ao eixo dos y temos:

A equação $(x-h)^2 = 2p(y-k)$ é a **equação reduzida** da parábola.
A equação $y = ax^2 + bx + c$ é a **equação explícita** da parábola.
E a **equação geral** da parábola é $ax^2 + bx + cy + d = 0$, com $a \neq 0$.

2.1.5.2 Eixo da Parábola paralelo ao eixo dos x

A equação da parábola no novo sistema $x'O'y'$, é $y'^2 = 2px'$ usando as fórmulas de translação (2.3), obtemos a forma padrão no sistema xOy

$$(y-k)^2 = 2p(x-h). \tag{2.5}$$

A equação (2.5) representa a **parábola de vértice** $V(h,k)$ e **eixo de simetria paralelo ao eixo dos** x.

O foco deverá ser transladado horizontalmente em relação ao vértice, pois o eixo de simetria é paralelo ao eixo dos x, portanto $F\left(h+\frac{p}{2}, k\right)$.

A reta diretriz estará localizada mais à esquerda ou mais a direita do vértice, isto é, é uma reta vertical de equação $x = h - \frac{p}{2}$.

De forma análoga ao que realizamos no item anterior, desenvolvendo a equação (2.5) e isolando a variável x, temos a equação explícita da parábola:

$$\begin{aligned} y^2 - 2yk + k^2 &= 2px - 2ph \\ x &= \frac{1}{2p}y^2 - \frac{k}{p}y + \frac{k^2+2ph}{2p} \\ x &= ay^2 + by + c, \text{ com } a \neq 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, para uma parábola de vértice em $V(h,k)$ e eixo de simetria paralelo ao eixo dos x temos:

A equação $(y-k)^2 = 2p(x-h)$ é a **equação reduzida** da parábola.
A equação $x = ay^2 + by + c$ que é a **equação explícita** da parábola.
A **equação geral** da parábola é $by^2 + cx + dy + f = 0$, com $b \neq 0$.

Exemplo 2.7. *Determinar as equações geral e explícita da parábola com vértice* $V(3,3)$ *e foco* $F(5,3)$.

Solução: Nesse caso, é interessante começarmos o exercício marcando o vértice e o foco no sistema cartesiano, isso facilita no momento de identificar o eixo de simetria. Lembre-se de que o eixo de simetria é a reta que passa pelo vértice e pelo foco.

Após marcar os pontos, observe a Figura 44, o foco da parábola está mais à direita do vértice, portanto a abertura da parábola deve estar voltada para a direita.

Concluímos que a equação terá a forma padrão $(y-k)^2 = 2p(x-h)$, pois o eixo de simetria é paralelo ao eixo dos x.

Novamente olhando a Figura 44, observamos que a distância do vértice ao foco corresponde a duas unidades. Então, parâmetro $\frac{p}{2} = 2$, portanto concluímos que $p = 4$ e $2p = 8$. Substituindo na equação padrão as coordenadas do vértice e o valor $2p$:

$$(y-3)^2 = 8(x-3).$$

Desenvolvendo o lado esquerdo,

$$\begin{aligned} y^2 - 6y + 9 &= 8x - 24 \\ y^2 - 6y - 8x + 33 &= 0. \end{aligned}$$

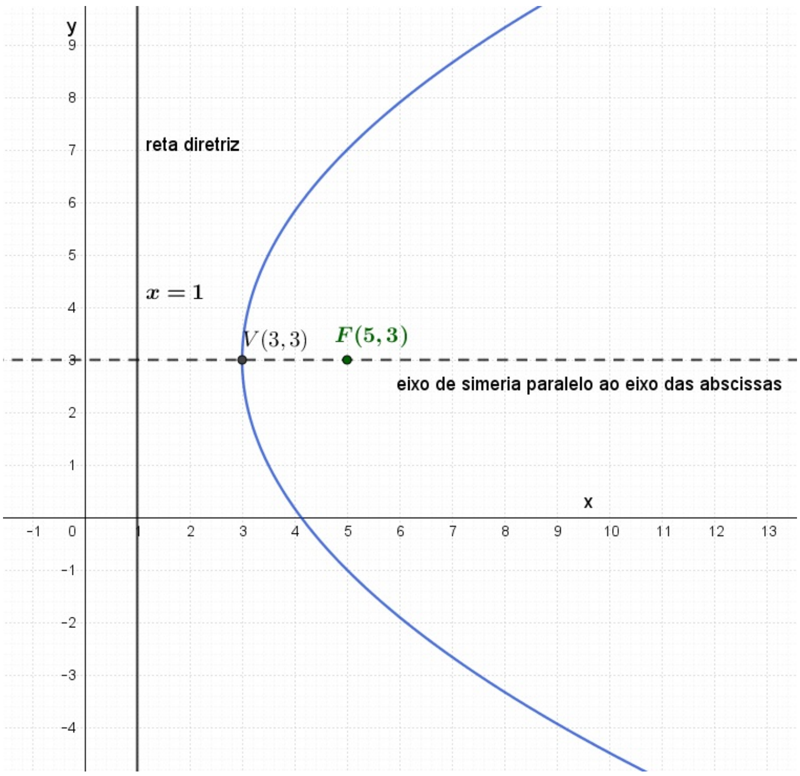
Portanto, a equação geral é

$$y^2 - 6y - 8x + 33 = 0$$

e a equação explícita é

$$x = \frac{y^2}{8} - \frac{6}{8}y + \frac{33}{8}.$$

Figura 44. Gráfico da Parábola do Exemplo 2.7



Fonte: os autores

2.1.6 Completamento de quadrados

Quando a equação da parábola estiver na forma $ax^2 + bx + cy + d = 0$ ou $by^2 + cx + dy + f = 0$, e precisamos reescrever nas formas padrão como (2.4) ou (2.5), utilizamos a técnica de completar o quadrado.

Esse processo tem como base as formas dos produtos notáveis $(a+b)^2$ e $(a-b)^2$, através de uma simples comparação direta entre os termos. Completando o trinômio quadrado perfeito podemos reescrever a equação de uma cônica na sua forma reduzida. Vejamos o próximo exemplo.

Exemplo 2.8. *Reescreva a equação da parábola $y^2 + 2y - 12x + 25 = 0$ na forma reduzida.*

Solução: A equação esta escrita na forma $by^2 + cy + dx + f = 0$, com $b = 1$. Vamos usar a técnica de completar quadrado para reescrever a equação na forma $(y-k)^2 = 2p(x-h)$, assim à esquerda da igualdade os termos serão escritos na forma $(y-k)^2$:

$$y^2 + 2y - 12x + 25 = 0$$

$$y^2 + 2y = 12x - 25.$$

Agora, realizando uma comparação direta do termo do lado esquerdo da equação com $(a+b)^2$, temos

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Se $a = y$, pela equação anterior $2ab = 2y$, então

$$2yb = 2y$$

$$b = \frac{2y}{2y} = 1.$$

Se $b = 1$, então $b^2 = 1$, precisamos somar 1 ao membro à esquerda da igualdade da equação, para completar o trinômio quadrado e também compensar somando 1 ao membro da direita da igualdade,

$$y^2 + 2y + 1 = 12x - 25 + 1$$

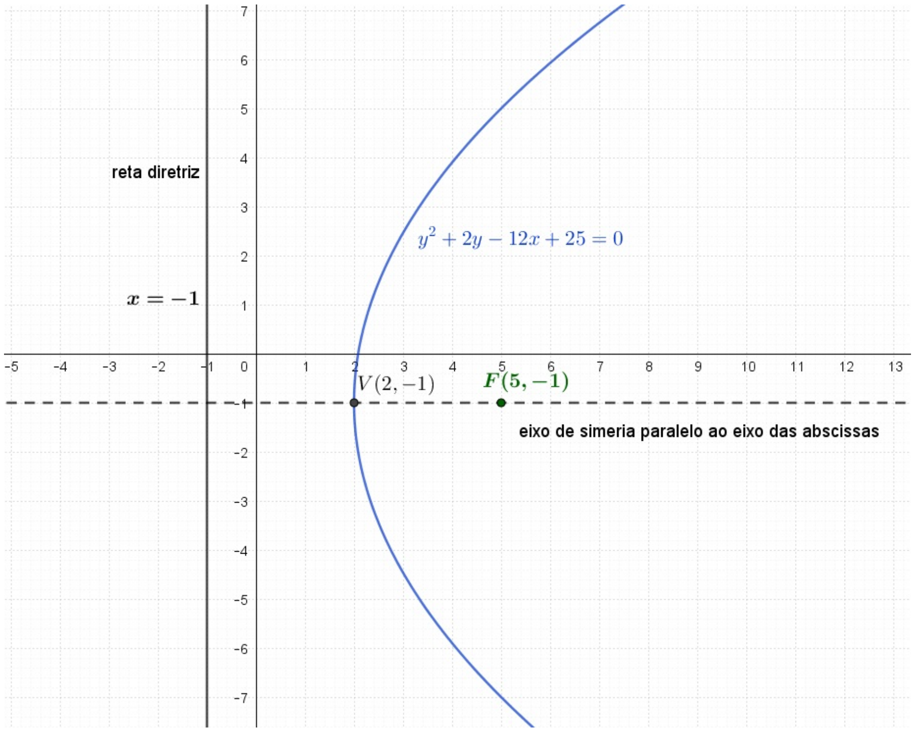
$$y^2 + 2y + 1 = 12x - 24.$$

Sendo assim, observamos que o lado esquerdo da igualdade pode ser escrito de forma equivalente $(y+1)^2$, pois $(y+1)^2 = y^2 + 2y + 1$ exatamente o que encontramos, e os termos $12x - 24$ podem ser escritos como $12(x-2)$ e

$$(y+1)^2 = 12(x-2),$$

é a equação reduzida da parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo Ox e vértice $V(2,-1)$, lembrando que pela forma padrão $h = 2$ e $k = -1$. A abertura da parábola está voltada para direita e a reta diretriz é uma reta vertical de equação $x = -1$.

Figura 45. Gráfico da Parábola do Exemplo 2.8



Fonte: os autores

2.1.7 Equações Paramétricas da Parábola

Em alguns problemas, é mais fácil descrever uma curva por meio de suas equações paramétricas, nessa situação, as coordenadas (x, y) de cada ponto são dadas em função de uma variável real, que chamamos de parâmetro, aqui usamos a variável t.

Por definição, uma curva paramétrica no plano é um par de funções:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.6}$$

As equações paramétricas de uma curva auxiliam na localização de pontos na própria curva, dessa forma, podemos pensar que a trajetória da curva começa em $(x(t_{inicial}), y(t_{inicial}))$ até $(x(t_{final}), y(t_{final}))$, por exemplo, observamos uma partícula móvel se deslocando sobre o plano em um determinado intervalo de tempo.

Vamos começar pela equação da parábola com eixo de simetria no eixo das ordenadas, cuja equação padrão é dada por $x^2 = 2py$. A posição $P(x, y)$ de uma partícula que se move no plano xOy é dada pelas equações paramétricas e pelo intervalo de variação do parâmetro.

Se fizermos $x = t$ (t é o parâmetro), obtemos $t^2 = 2py$ e isolando a variável y na equação, temos $y = \dfrac{1}{2p}t^2$. Então, as **equações paramétricas** da parábola com eixo de simetria no eixos dos y são

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{2p}t^2, \text{ onde } t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Exemplo 2.9. *Dada a equação $x^2 = 2y$, escreva as equações paramétricas da curva.*

Solução: Substituindo $x = t$ na equação, obtemos:

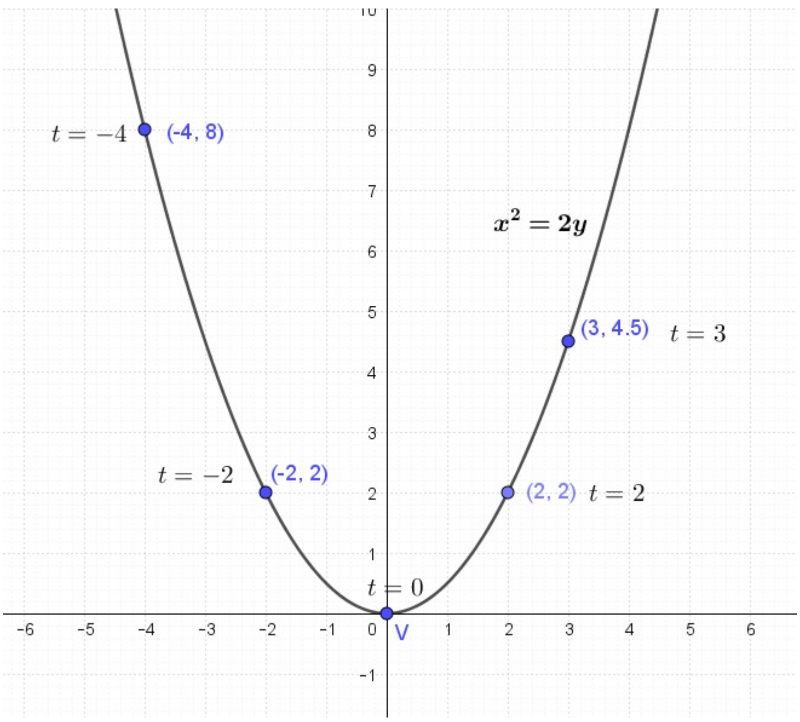
$$t^2 = 2y$$

portanto, $y = \frac{t^2}{2}$. Assim,

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t^2}{2}, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

A Figura 46 mostra alguns pontos da curva de acordo com o parâmetro t.

Figura 46. Gráfico da Parábola do Exemplo 2.9



Fonte: os autores

De forma análoga, se tivermos a parábola com eixo de simetria no eixo dos x, sua equação reduzida é $y^2 = 2px$ e suas **equações paramétricas** são

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2p}t^2 \\ y = t, \text{ onde } t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Usamos a mesma ideia para escrever as equações paramétricas para as parábolas com vértice em (h, k).

No caso da parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo dos y de equação reduzida $(x - h)^2 = 2p(y - k)$, as equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = t + h \\ y = \dfrac{t^2 + 2pk}{2p}, \text{ onde } t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.9}$$

E, no caso da parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo dos x de equação reduzida $(y - k)^2 = 2p(x - h)$, as equações paramétricas são

$$\begin{cases} y = t + k \\ x = \dfrac{t^2 + 2ph}{2p}, \text{ onde } t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.10}$$

Exemplo 2.10. *Escreva as equações paramétricas da parábola* $y^2 = \frac{1}{2}x$.

Solução: Se fizermos $y = t$, teremos $t^2 = \frac{1}{2}x$.

Então $x = 2t^2$, portanto escrevemos:

$$\begin{cases} y = t \\ x = 2t^2, t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

que representam as equações paramétricas da parábola. No instante em que $t = 0$, obtemos o ponto $(0, 0)$, vértice da curva.

Exemplo 2.11. *Escreva as equações paramétricas da parábola*

$$(x + 2)^2 = 2(y - 1).$$

Solução: Se fizermos $x + 2 = t$, então $x = t - 2$.

Assim, se $x+2 = t$, substituindo na equação obtemos $t^2 = 2(y-1)$ ou $t^2 = 2y-2$. Isolando a variável y, escrevemos as equações paramétricas da curva:

$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = 1 + \dfrac{t^2}{2}, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

No instante que $t = 0$, temos o ponto $(-2, 1)$, vértice da parábola.

Exemplo 2.12. *Usando a parametrização da parábola e o aplicativo do GeoGebra, vamos determinar o conjunto de pontos P no plano que pertencem à curva, sabendo que o foco é $F(4,0)$ e a reta diretriz é $x = -4$.*

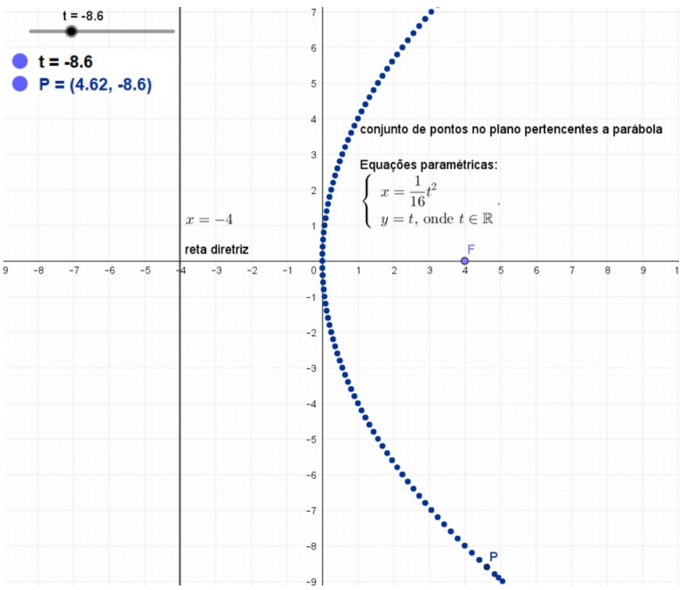
Solução: A ideia é usar o aplicativo do GeoGebra para realizar a construção da curva e identificar o conjunto de pontos no plano que a satisfazem. Para isso, a construção geométrica da curva levará em consideração a definição de lugar geométrico e a parametrização da curva.

Abra o aplicativo do GeoGebra, e no campo entrada digite $F = (4,0)$, o ponto será apresentado na janela de visualização. Agora vamos inserir a equação da reta diretriz, $x = -4$, ela aparecerá na janela de visualização. A equação reduzida da curva é $y^2 = 16x$, parametrizando, ficamos com $y = t$ e $x = \frac{t^2}{16}$.

Assim, o próximo passo é criar um controle deslizante, ferramenta disponível na barra de ferramentas do aplicativo. Na janela do controle deslizante, escolher número, escolha o nome t e o intervalo mínimo -20 e máximo 20 e incremento 0.1. Dessa forma, será criado na janela de visualização o controle deslizante.

Por fim, no campo de entrada digite $P = (\frac{t^2}{16}, t)$, o ponto aparecerá na janela de visualização. Habilite o rastro do ponto, selecionando a opção no próprio ponto. Agora, movimente o controle deslizante, observamos que para cada valor do parâmetro t determinamos um ponto que pertence à parábola. Em destaque, a Figura 47 mostra que, para $t = -8.6$ o ponto na curva tem coordenadas $(4.62, -8.6)$.

Figura 47. Gráfico da Parábola do Exemplo 2.12



Fonte: os autores

Agora chegou o momento de verificar o seu aprendizado, tente resolver os seguintes exercícios.

2.1.8 Agora tente resolver!

1. Determinar a equação reduzida, o foco, a equação da reta diretriz e construir a parábola de vértice na origem $V(0,0)$, nos seguintes casos:

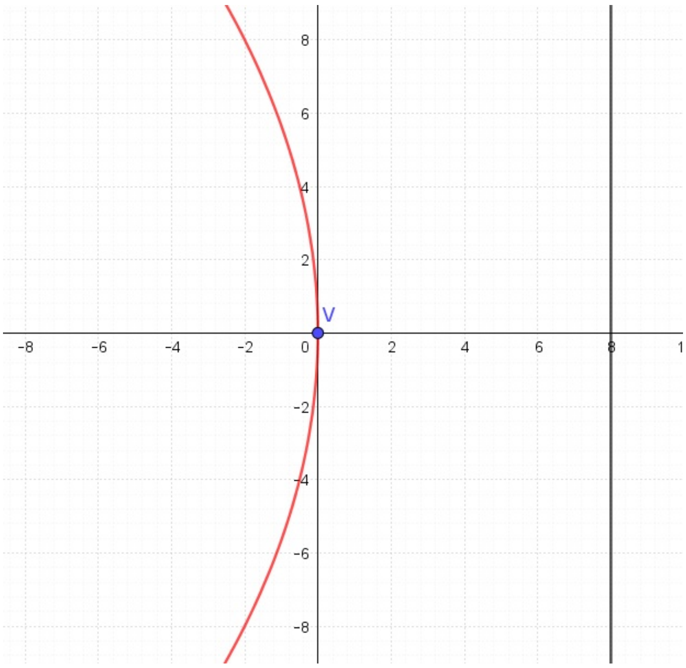
   a) Foco: $F(0,5)$

   b) Diretriz: $x = 5$

2. Dada a equação da parábola $x^2 + 6y = 0$, faça um estudo da curva, reescrevendo a equação na forma padrão, identificando todos os elementos da curva, incluindo eixo de simetria e abertura da curva, ao final esboce o gráfico com todos os elementos.

3. A Figura 48 representa uma parábola, observe a curva e responda: qual a sua equação reduzida e as coordenadas do foco?

Figura 48. Gráfico da Parábola do exercício 3



Fonte: os autores

4. Dada a equação geral da parábola $2y^2 - 5x + 8y - 7 = 0$, determine a equação reduzida, as coordenadas do vértice, do foco e a equação da reta diretriz. Faça o esboço da curva.

5. Escreva as equações paramétricas das seguintes parábolas:

   a) $(y-2)^2 = 2(x+3)$

   b) $y^2 = 12x$

6. Utilizando o aplicativo do GeoGebra, crie um controle deslizante como número, nomeie como t, com intervalo mínimo de -20 e máximo 20 e incremento de 0.1. Depois, digite no campo de entrada $P = (t, -\frac{t^2}{16})$, habilite o rastro do ponto tal como realizamos nos passos do Exemplo 2.12. Após, movimente o controle deslizante. Identifique a curva construída, seus elementos, a abertura da curva e escreva a sua equação reduzida.

2.2 A Circunferência

2.2.1 A Geometria da Circunferência

A circunferência é o lugar geométrico dos pontos que estão equidistantes de um ponto fixo. Tal ponto fixo chama-se *centro* da circunferência C e a medida da distância é o *raio* r.

Sendo assim, um ponto $P(x, y)$ qualquer no sistema de coordenadas cartesianas pertence à circunferência se, e somente se, a distância do ponto P ao centro C da curva é igual ao raio, dessa forma, $d(P, C) = r$, isto é,

$$\mathcal{C} = \{P \in \mathbb{R}^2 | d(P, C) = r\}.$$

Usando a definição, vamos determinar a equação de uma circunferência no próximo exemplo.

Exemplo 2.13. *Sabendo que o centro da circunferência é o ponto $C(0, 0)$, determine a equação da curva que passa pelo ponto $P(-4, 4)$.*

Solução: Usando a definição de lugar geométrico da circunferência, temos que a distância do ponto P ao centro C é igual ao raio, então:

$$d(P, C) = r$$

$$\sqrt{(-4-0)^2 + (4-0)^2} = r$$

$$\sqrt{(-4)^2 + (4)^2} = r$$

$$\sqrt{16+16} = r$$

$$\sqrt{32} = r \text{ ou } r^2 = 32.$$

Pela definição, se o centro é a própria origem $C(0,0)$, temos

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=r$$

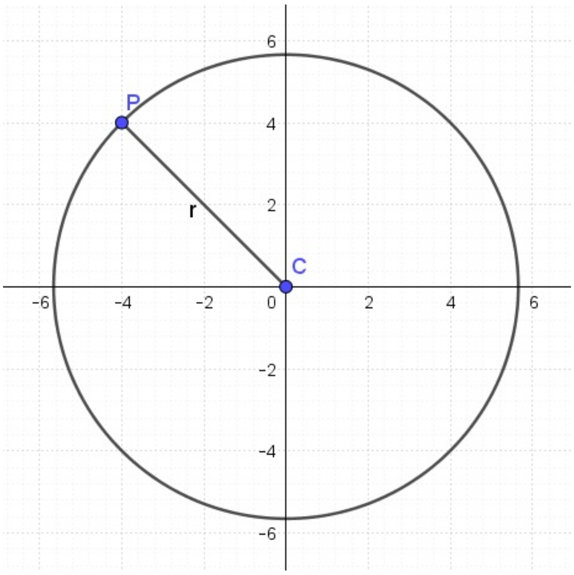
portanto,

$$x^2+y^2=r^2.$$

Sendo assim, se $r^2=32$, a equação da circunferência é

$$x^2+y^2=32.$$

Figura 49. Gráfico da Circunferência do Exemplo 2.13



Fonte: os autores

2.2.1.1 Elementos da Circunferência

- Centro da circunferência C.
- Raio: medida do centro até um ponto qualquer que pertence à curva.

2.2.2 Equações da Circunferência

No caso da circunferência, temos apenas duas situações a considerar, quando a curva possui centro na origem do sistema cartesiano e quando o centro é um ponto qualquer no sistema cartesiano. Vejamos as duas situações a seguir.

2.2.2.1 Equação da Circunferência com centro na origem $(0, 0)$

Se o centro da circunferência é o ponto $C(0, 0)$ então, pela definição da circunferência, temos que

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = r.$$

A **equação da circunferência com centro na origem** é:

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{2.11}$$

2.2.2.2 Equação da Circunferência com centro em (h, k)

Se o centro da circunferência é o ponto $C(h, k)$ então, pela definição da circunferência, temos que

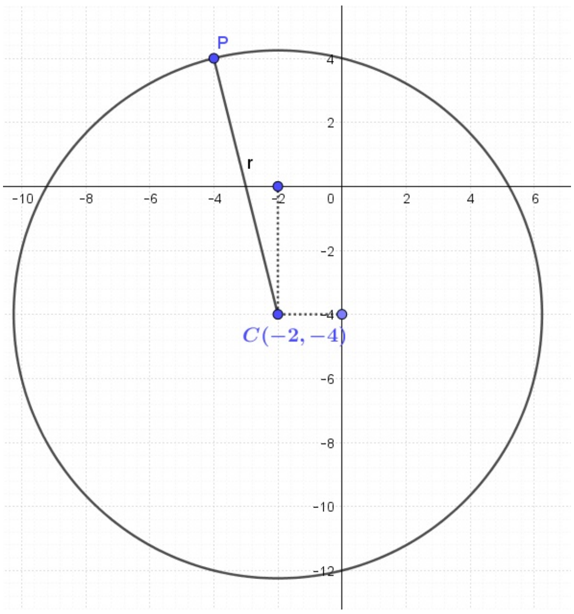
$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r.$$

A **equação da circunferência com centro em um ponto qualquer do sistema de coordenadas cartesianas** é:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2, \tag{2.12}$$

também conhecida como **equação centro raio** e é satisfeita apenas para as coordenadas dos pontos que estão na circunferência, observe a Figura 50.

Figura 50. Circunferência com centro em um ponto qualquer no plano cartesiano



Fonte: os autores

2.2.2.3 Equação geral da Circunferência

Desenvolvendo a equação (2.12):

$$\begin{aligned}(x-h)^2+(y-k)^2 &= r^2\\ x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2-r^2 &= 0\\ x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2 &= 0.\end{aligned} \tag{2.13}$$

A equação (2.13) é a equação geral da circunferência e pode ser escrita como:

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0, \tag{2.14}$$

considerando $A=-2h$, $B=-2k$, $C=h^2+k^2-r^2$.

Exemplo 2.14. *Escreva a equação geral da circunferência com centro $C(2,3)$ e raio $r=2$.*

Solução: Partindo da equação centro raio, com $C(2,3)$ e raio $r=2$ temos:

$$(x-2)^2+(y-3)^2=2^2.$$

Desenvolvendo essa equação,

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(y-3)^2 &= 2^2\\ x^2-4x+4+y^2-6y+9 &= 4\\ x^2+y^2-4x-6y+9 &= 0,\end{aligned}$$

obtemos a equação geral da circunferência.

Observação: uma equação nas variáveis x e y representa uma circunferência se, e somente se, pode ser escrita na forma $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, com $h\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{R}$ e $r>0$. Os coeficientes de x^2 e y^2 devem ser iguais e não existe na equação um termo misto.

2.2.3 Posições relativas entre uma reta e uma circunferência:

Para determinarmos a posição relativa entre uma reta s e uma circunferência, devemos:

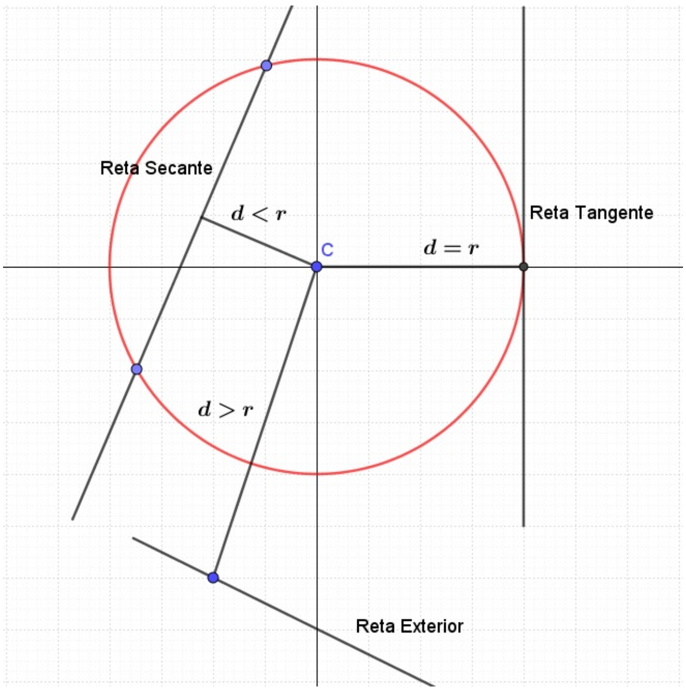
- ✓ determinar o raio r e o centro C da circunferência;
- ✓ calcular a distância $d=d(C,s)$ do centro à reta dada;

✓ e comparar a distância obtida com o raio r da circunferência:

* Se $d = r \Rightarrow$ reta **tangente** à circunferência.
* Se $d < r \Rightarrow$ reta **secante** à circunferência.
* Se $d > r \Rightarrow$ reta **exterior** à circunferência.

✓ Sendo necessário determinar o ponto de interseção da curva com a reta, basta substituir a equação da reta na equação da circunferência e determinar o ponto de interseção (no caso da reta tangente) ou os pontos de interseção (no caso da reta secante). A Figura 51 ilustra as situações.

Figura 51. Posição relativa entre reta e circunferência



Fonte: os autores

Exemplo 2.15. *Verifique se a reta* $s : x = 5$ *é tangente à circunferência de equação* $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$. *Em caso afirmativo, determine o ponto de interseção da reta com a circunferência.*

Solução: Escrevendo a equação geral na forma padrão $(x - h)^2 + (y + k)^2 = r^2$ completando quadrados, temos: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$, portanto o raio é 4.

Lembrando que, dada uma reta de equação $mc+ny+q = 0$ e um ponto qualquer, $P(x_1, y_1)$ não pertencente à reta, é possível calcular a distância do ponto à reta.

Nesse caso, o ponto é centro da circunferência $C(1,-2)$ e a reta dada é $x = 5$, assim:

$$\begin{aligned} d(C,s) &= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ d(C,s) &= \frac{|1\cdot(1) - 5|}{\sqrt{1^2+0^2}} \\ d(C,s) &= 4. \end{aligned}$$

Portanto, se $d(C,s) = r$, a reta é tangente à circunferência. Para determinar o ponto de interseção, substituímos $x = 5$, na equação $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$, assim

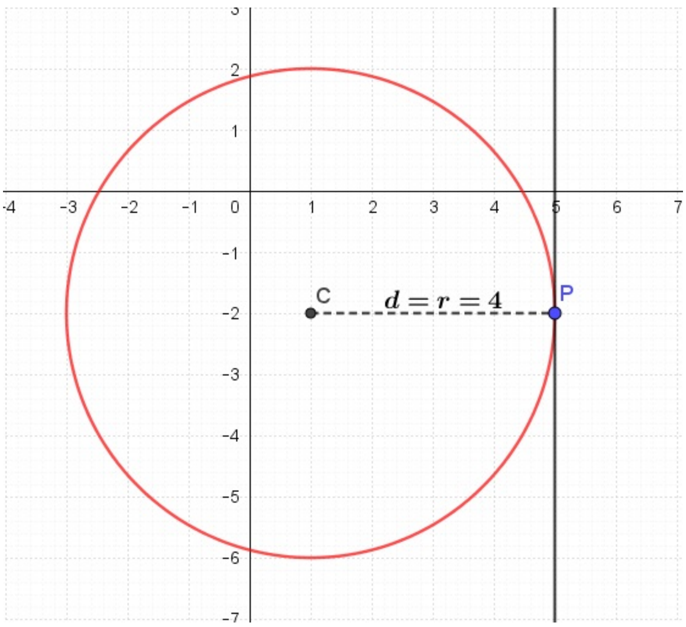
$$25 + y^2 - 10 + 4y - 11 = 0,$$

ajustando os termos

$$y^2 + 4y + 4 = 0,$$

resolvendo essa equação, obtemos que $y = -2$. Então, $P(5,-2)$ é o ponto de interseção da reta s com a circunferência, observamos que é possível resolver o problema apenas esboçando o gráfico, Figura 52.

Figura 52. Gráfico da Circunferência do Exemplo 2.15



Fonte: os autores

2.2.4 Equações Paramétricas da Circunferência

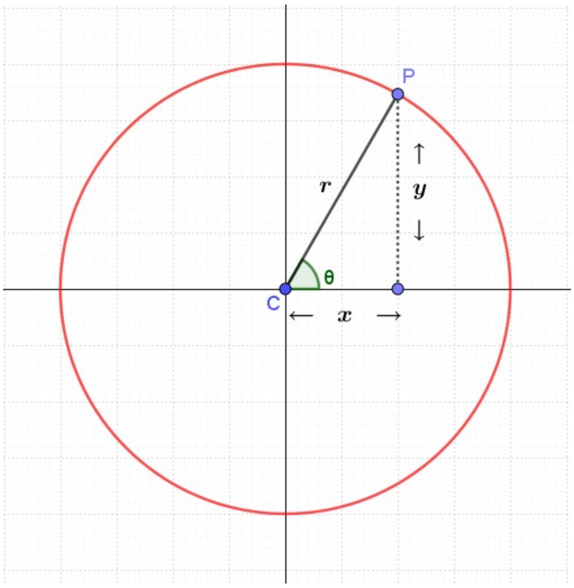
Assim como determinamos as equações paramétricas da parábola, vamos escrever as equações paramétricas da circunferência.

Partindo da circunferência com centro na origem $C(0, 0)$ e raio r e levando em consideração as seguintes identidades trigonométricas do triângulo retângulo:

$$\cos(\theta) = \frac{CA}{H} \quad \text{e} \quad \text{sen}(\theta) = \frac{CO}{H},$$

onde H é a medida da hipotenusa do triângulo retângulo, que nesse caso é o raio da circunferência, CA é a medida do cateto adjacente e CO é a medida do cateto oposto. As medidas CA e CO são relacionadas respectivamente por x e y, conforme a Figura 53.

Figura 53. Parametrização da circunferência



Fonte: os autores

Dessa forma, se o ângulo central θ percorrer todos valores do intervalo $[0, 2\pi)$, temos pelas identidades trigonométricas que:

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} \quad \text{e} \quad \text{sen}(\theta) = \frac{y}{r}.$$

Portanto, as **equações paramétricas da circunferência com centro na origem** $C(0, 0)$ são

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\text{sen}(\theta). \end{cases} \tag{2.15}$$

Para obter a equação cartesiana, basta lembrar que $\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = 1$, logo,

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \text{ ou } x^2 + y^2 = r^2.$$

E, as **equações paramétricas da circunferência de centro** $C(h,k)$ são

$$\begin{cases} x = h + r\cos(\theta) \\ y = k + r\,\text{sen}(\theta). \end{cases} \tag{2.16}$$

Agora chegou o momento de verificar o seu aprendizado, tente resolver os seguintes exercícios.

2.2.5 Agora tente resolver!

1. Escreva a equação da circunferência $x^2 + 4x + y^2 = 12$ na forma centro raio e as suas equações paramétricas.

2. Encontre a área da região acima da reta $y = 5$ e abaixo da curva $x^2 + y^2 - 6x - 10y - 18 = 0$.

3. Escreva a equação cartesiana padrão da circunferência de equações paramétricas:
$$\begin{cases} x = -3 + 5\cos(\theta) \\ y = 1 + 5\,\text{sen}(\theta). \end{cases}$$

2.3 A Elipse

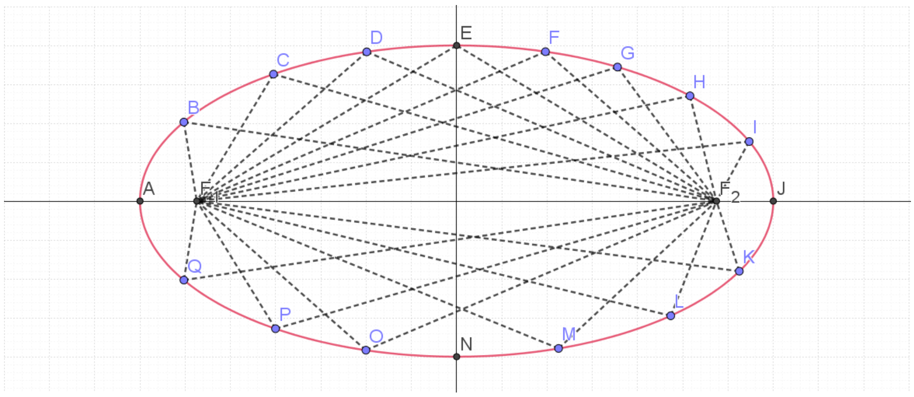
2.3.1 A Geometria da Elipse

A elipse é o lugar geométrico formado pelo conjunto de todos os pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2, denominados *focos*, desse plano, é igual a uma constante $2a$. Ou seja,

$$\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}^2 | d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a\}.$$

Consideramos inicialmente a origem $O(0,0)$ do sistema cartesiano como sendo o centro da elipse. Para entender melhor a definição, vamos observar a Figura 54, nessa situação marcamos uma série de pontos, tal que a soma das distâncias aos pontos fixos F_1 e F_2 seja sempre uma constante. O conjunto de todos os pontos do plano que satisfazem essa propriedade, ou seja, o lugar geométrico, é denominado de elipse, Figura 54.

Figura 54. Definição de lugar geométrico da elipse



Fonte: os autores

Usando a definição, vamos determinar a equação cartesiana de uma elipse conhecendo os focos e a constante $2a$, no próximo exemplo.

Exemplo 2.16. *Considere os focos $F_1(-\sqrt{7},0)$ e $F_2(\sqrt{7},0)$ e a constante $2a=8$. Seja P(x,y) um ponto arbitrário da elipse, escreva uma equação dessa curva a partir desses dados.*

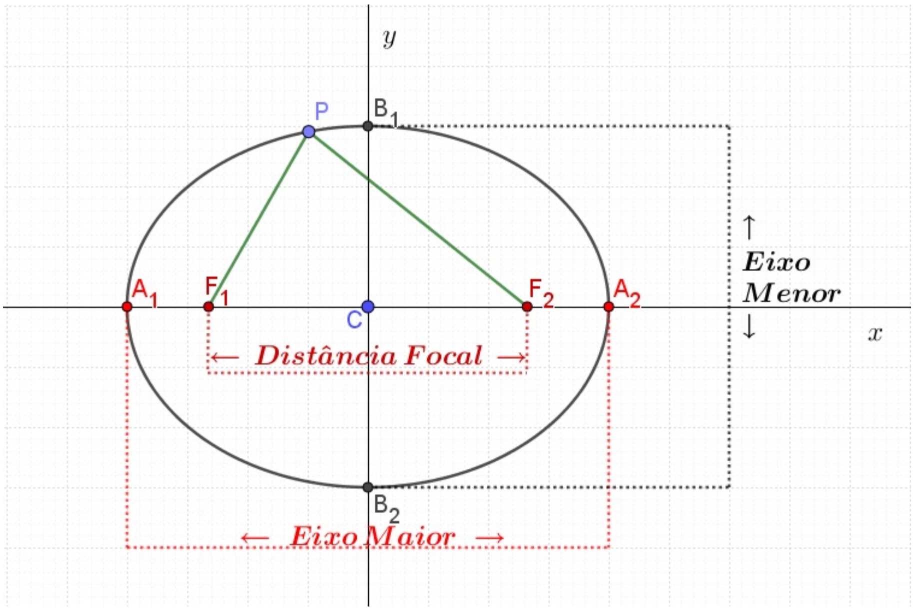
Solução: Usando a definição de lugar geométrico da elipse $\mathcal{E}=\{P\in\mathbb{R}^2|d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a\}$, considerando $P(x,y)$ um ponto que pertence à curva, as coordenadas dos focos e a constante $2a$ informadas pelo exemplo, temos:

$$\begin{array}{rcl}
d(P,F_1)+d(P,F_2) & = & 2a\\
\sqrt{(x+\sqrt{7})^2+y^2}+\sqrt{(x-\sqrt{7})^2+y^2} & = & 8\\
\sqrt{(x+\sqrt{7})^2+y^2} & = & 8-\sqrt{(x-\sqrt{7})^2+y^2}\\
(\sqrt{(x+\sqrt{7})^2+y^2})^2 & = & (8-\sqrt{(x-\sqrt{7})^2+y^2})^2\\
(x+\sqrt{7})^2+y^2 & = & 64-16\sqrt{(x-\sqrt{7})^2+y^2}+(x-\sqrt{7})^2+y^2\\
x^2+2x\sqrt{7}+7 & = & 64-16\sqrt{(x-\sqrt{7})^2+y^2}+x^2-2x\sqrt{7}+7\\
4x\sqrt{7}-64 & = & -16\sqrt{(x-\sqrt{7})^2+y^2}\\
x\sqrt{7}-16 & = & -4\sqrt{(x-\sqrt{7})^2+y^2}\\
(x\sqrt{7}-16)^2 & = & (-4\sqrt{(x-\sqrt{7})^2+y^2})^2\\
7x^2-32x\sqrt{7}+256 & = & 16(x^2-2x\sqrt{7}+7+y^2)\\
7x^2-32x\sqrt{7}+256 & = & 16x^2-32x\sqrt{7}+112+16y^2\\
-9x^2-16y^2 & = & -144
\end{array}$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

A equação $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ representa uma elipse de eixo maior sobre o eixo das abscissas e a Figura 55 é a sua representação geométrica:

Figura 55. Gráfico da Elipse do Exemplo 2.16



Fonte: os autores

Analisando a Figura 55, observamos que a elipse é uma curva fechada, que a distância do ponto A_1 até o centro $C(0,0)$ é igual à distância do ponto A_2 ao centro $C(0,0)$. Essa distância denominada de a chamamos de semieixo maior, que é constante da definição. Então, o segmento $\overline{A_1A_2}$ é igual a $2a$, chamado de eixo maior da elipse e o centro é o ponto médio do segmento.

2.3.1.1 Elementos da Elipse

- Focos: são os pontos F_1 e F_2, que não pertencem à elipse.
- Centro: é o ponto médio em relação aos vértices e focos da curva. Também podemos considerar o centro como o ponto de interseção do eixo maior com o eixo menor da elipse.
- Eixo maior: é o segmento $\overline{A_1A_2}$ de comprimento $2a$, esse segmento contém também os focos.
- Eixo menor: é o segmento $\overline{B_1B_2}$ de comprimento $2b$, esse segmento é perpendicular ao segmento $\overline{A_1A_2}$ no seu ponto médio.

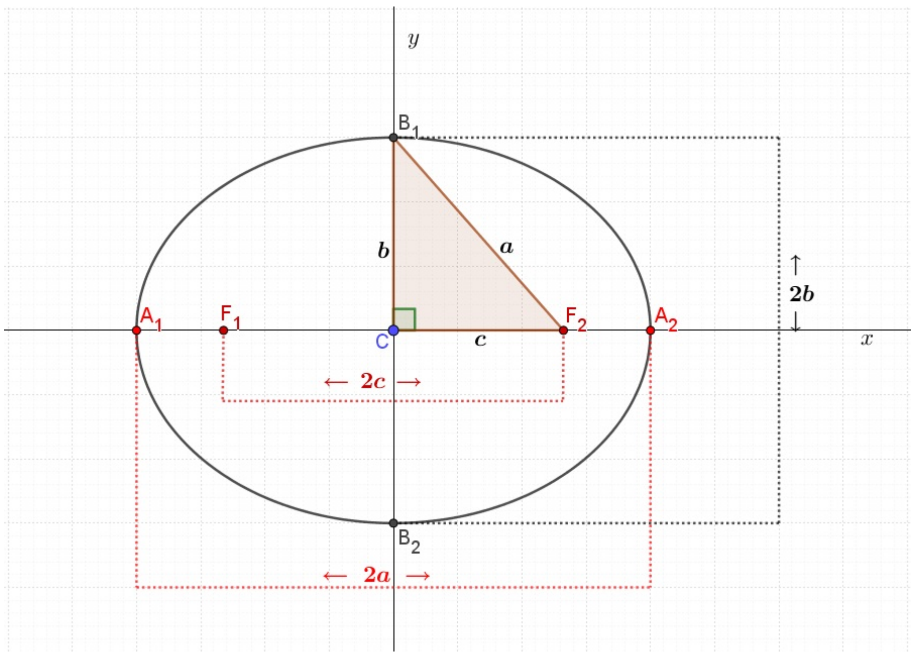
- Eixo focal: é o segmento $\overline{F_1F_2}$ de comprimento $2c$, o qual chamamos de distância entre os focos.
- Vértices: são os pontos A_1, A_2, B_1, B_2 que pertencem à elipse.
- O número $e = \frac{c}{a}$ é a excentricidade da elipse, que é a razão entre o tamanho do semieixo focal e o semieixo maior.

2.3.1.2 Relação Fundamental da Elipse

A Figura 56 mostra uma elipse e o triângulo B_1F_2C. Observamos que, $B_1F_2 = a$ é a hipotenusa do referido triângulo, vimos que a soma das distâncias entre B_1F_2 e B_1F_1 é igual a $2a$, pela definição de elipse e considerando que $B_1F_2 = B_1F_1$, pois ambos têm a mesma medida a, é possível verificar na Figura 56 que o triângulo B_1F_2C satisfaz a seguinte relação fundamental, a qual decorre do Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{2.17}$$

Figura 56. Relação fundamental da elipse



Fonte: os autores

2.3.1.3 Excentricidade da Elipse

A excentricidade está ligada à forma da elipse, existem, por exemplo, elipses alongadas, as quais podemos comparar com órbitas de cometas.

Sabemos que alguns cometas, têm órbitas muito achatadas, é o caso do cometa Halley, sua excentricidade é de $0,97$, o que faz com que o cometa quase não feche a curva elíptica. Outras órbitas são mais arredondadas, que é o caso das órbitas dos planetas do nosso Sistema Solar. A excentricidade da órbita da Terra é aproximadamente $0,017$, a de Marte $0,093$. Portanto, podemos dizer que a excentricidade determina quanto achatada é a curva.

Se a excentricidade for igual, a zero, a curva torna-se uma circunferência onde $O = F_1 = F_2$, por outro lado, quanto mais achatada for a elipse, mais o valor da excentricidade aproxima-se de 1.

Se a excentricidade for igual a 1, a curva descreve uma parábola. Se pensarmos nas trajetórias de cometas, caso a trajetória descrevesse uma parábola, o cometa passaria perto do Sol, apenas uma vez, visto que a parábola descreve uma curva aberta, ver Seção 2.1.

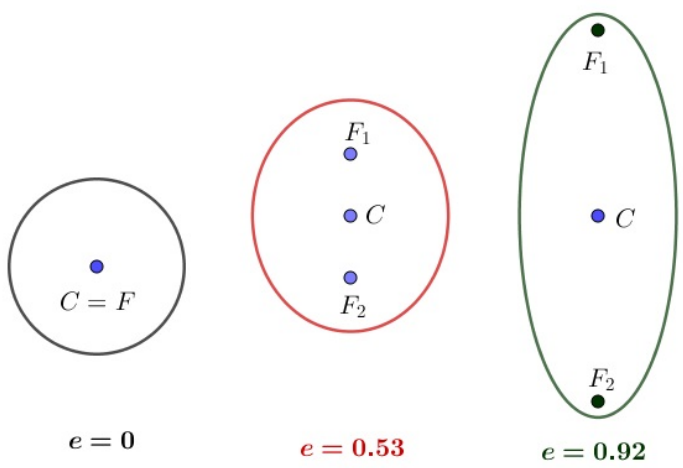
Chamamos de excentricidade o número real, $e = \dfrac{c}{a}$, pois

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}, \qquad 0 < e < 1.$$

Como $c \geq 0$ e sempre menor que a, a excentricidade é um número positivo e menor que 1.

Quando os focos são muito próximos, isto é, c é muito pequeno, a elipse aproxima-se de uma circunferência. A Figura 57, mostra exemplos de elipses e suas excentricidades.

Figura 57. Excentricidade da elipse



Fonte: os autores

2.3.2 Equações Reduzidas da Elipse

Consideramos, primeiramente, uma elipse de centro $C(0,0)$, na origem do sistema cartesiano. Partindo da definição de elipse, veremos que existem dois casos a considerar: uma elipse com eixo maior sobre o eixo dos x e uma elipse com eixo maior sobre o eixo dos y. Vamos apresentar a seguir cada uma de suas equações cartesianas.

2.3.2.1 Equação reduzida da Elipse de eixo maior sobre o eixo dos x

Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer na elipse de focos $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, com $a>c$ e $c \geq 0$.

Pela definição de elipse, $\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}^2 | d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a\}$,

$$\begin{aligned} |d(F_1,P)| + |d(F_2,P)| &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} &= 2a \\ \sqrt{x^2+y^2+2cx+c^2} &= 2a - \sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2} \\ (\sqrt{x^2+y^2+2cx+c^2})^2 &= (2a - \sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2})^2 \end{aligned}$$

desenvolvendo os quadrados de ambos os lados da igualdade,

$$\begin{aligned} x^2+y^2+2cx+c^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2} \\ &+ x^2+y^2-2cx+c^2 \\ 4a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2} &= 4a^2-4cx \\ a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2} &= a^2-cx \\ (a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2})^2 &= (a^2-cx)^2 \\ a^2(x^2+y^2-2cx+c^2) &= a^4-2a^2cx+c^2x^2 \\ a^2x^2+a^2y^2-2a^2cx+a^2c^2 &= a^4-2a^2cx+c^2x^2 \\ a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2 &= a^4-a^2c^2 \\ \underbrace{(a^2-c^2)}_{b^2}x^2+a^2y^2 &= a^2\underbrace{(a^2-c^2)}_{b^2}. \end{aligned}$$

Pela relação fundamental da elipse 2.17, $a^2-c^2=b^2$, desta forma

$$b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2,$$

dividindo ambos os membros da equação por a^2b^2,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2.18}$$

A equação (2.18) é a **equação reduzida da elipse de centro na origem e eixo maior sobre o eixo dos** x.

No próximo exemplo, vamos determinar todos os elementos da elipse conhecendo sua equação reduzida.

Exemplo 2.17. *Determine os focos, vértices, excentricidade e faça um esboço da elipse:* $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Solução: Observamos pela equação que a elipse dada possui eixo maior horizontal, pois:

O maior denominador na equação reduzida está relacionado ao eixo maior da elipse, sendo assim:

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5,$$

onde a é a medida do semieixo maior da elipse. E o menor denominador é b^2, então o eixo menor está sobre o eixo dos y:

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3.$$

Usando a relação fundamental da elipse, determinamos o valor do semieixo focal da curva, calculando: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = 4$.

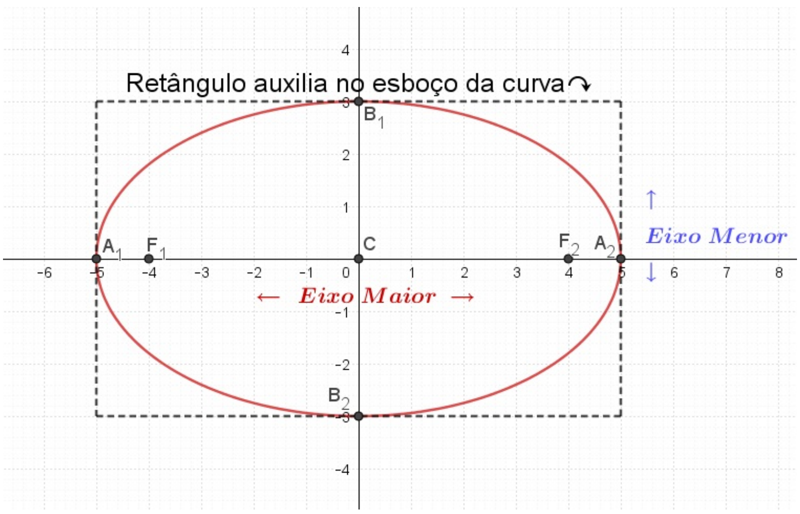
Dessa forma, temos as coordenadas dos Vértices: $A_1(-5,0)$ e $A_2(5,0)$ (sobre o eixo maior), $B_1(0,-3)$ e $B_2(0,3)$ (sobre o eixo menor).

Os focos são os pontos: $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$.

Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5} = 0,8$.

Dica: Para esboçar a elipse, podemos usar o desenho de um retângulo como guia, centralizado na origem e com lados paralelos aos eixos. Observe a Figura 58.

Figura 58. Gráfico da Elipse do Exemplo 2.17



Fonte: os autores

2.3.2.2 Equação reduzida da Elipse de eixo maior sobre o eixo dos y

Novamente, consideramos $P(x, y)$ um ponto qualquer na elipse de focos em $F(0, -c)$, $F_2(0, c)$, agora o eixo maior está sobre o eixo das ordenadas. Sendo a elipse de centro na origem $C(0, 0)$ partindo da definição e efetuando um procedimento análogo ao caso anterior, temos que

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \tag{2.19}$$

é a **equação reduzida da elipse de centro na origem e eixo maior sobre o eixo dos** y.

No exemplo a seguir são fornecidos alguns elementos da curva e a partir destes obtemos a equação cartesiana, devemos estar atentos à interpretação do problema.

Exemplo 2.18. *Escreva uma equação reduzida e o gráfico da elipse que satisfaz as seguintes condições: as coordenadas dos focos são* $(0, 2)$ *e* $(0, -2)$ *e o eixo maior tem comprimento* 10.

Solução: Observamos agora que os focos são pontos sobre o eixo das ordenadas (eixo Oy), portanto, o eixo focal está sobre esse eixo e $c = 2$.

Pelo enunciado da questão, o eixo maior tem comprimento 10, sabemos que o segmento $\overline{A_1A_2} = 2a$, então

$$10 = 2a \Rightarrow a = 5.$$

Assim, temos as coordenadas dos vértices de interseção da elipse com o eixo maior: $A_1(0, 5)$ e $A_2(0, -5)$, observamos que a distância entre um destes pontos ao centro é maior que a distância de um dos focos ao centro, mostrando que de fato $a > c$.

Sabendo que $a = 5$ e $c = 2$, pela relação fundamental $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = 21$. Portanto, a equação da elipse é

$$\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

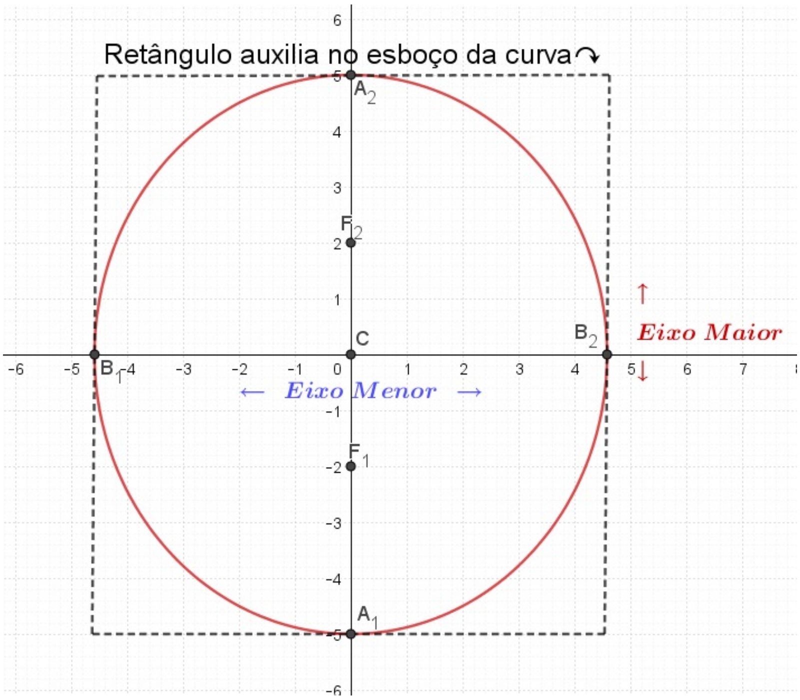
A elipse possui eixo maior sobre o eixo das ordenadas, portanto:

As coordenadas dos Vértices são: $A_1(0, 5)$ e $A_2(0, -5)$ (sobre o eixo maior), $B_1(-\sqrt{21}, 0)$ e $B_2(\sqrt{21}, 0)$ (sobre o eixo menor), são pontos que pertencem à curva.

Os focos são os pontos: $F_1(0, -2)$, $F_2(0, 2)$.

Excentricidade: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{5} = 0,4$. Veja o gráfico na Figura 59.

Figura 59. Gráfico da Elipse do Exemplo 2.18



Fonte: os autores

2.3.3 Translações da Elipse

Quando transladamos uma elipse horizontalmente por h unidades e verticalmente por k unidades, seu centro se move de $(0, 0)$ para (h, k). Observamos que a translação não modifica o comprimento dos eixos. Dizemos, nesse caso, que o eixo maior será paralelo ao eixo dos x ou ao eixo dos y. Nos próximos itens, vamos apresentar as equações reduzidas para as elipses considerando a translação de seus centros. Vamos observar o que muda em cada situação principalmente com relação aos eixos maior e menor, a posição dos focos e as respectivas equações.

2.3.3.1 Equação reduzida da Elipse de eixo maior paralelo ao eixo dos x

Escrevendo a equação da elipse com eixo maior paralelo ao eixo das abscissas no sistema $x'O'y'$ e utilizando as equações de translação de eixos, da seção 2.1.4,

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \text{ (no sistema } x'O'y')$$
$$x' = x - h, y' = y - k, \text{(equações de translação)}$$

e substituindo as equações de translação na equação da elipse, obtemos a **equação da elipse de centro $C(h, k)$ com eixo maior paralelo ao eixo dos x**, no sistema original xOy:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \tag{2.20}$$

Equação Geral: Se eliminarmos os denominadores da equação (2.20), desenvolvermos os quadrados e ordenarmos os termos, obtemos a equação geral, com a e b de mesmo sinal:

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0.$$

As coordenadas dos focos e vértices A_1 e A_2 devem ser transladadas mais à **esquerda** e à **direita** em relação ao novo centro $C(h, k)$, portanto:

Vértices: $A_1(h + a, k)$, $A_2(h - a, k)$.

Focos: $F_1(h + c, k)$, $F_2(h - c, k)$.

Os vértices: $B_1(h, k + b)$ e $B_2(h, k - b)$ são transladados mais acima e abaixo do novo centro.

2.3.3.2 Equação reduzida da Elipse de eixo maior paralelo ao eixo dos y

De forma análoga à seção anterior e usando as equações de translação, escrevemos:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1, \tag{2.21}$$

que representa a **equação da elipse de centro** $C(h, k)$ **e eixo maior paralelo ao eixo dos** y, no sistema xOy.

As coordenadas dos focos e vértices A_1 e A_2 devem ser transladadas mais **acima** e **abaixo** em relação ao novo centro $C(h, k)$:

Vértices: $A_1(h, k + a)$, $A_2(h, k - a)$.

Focos: $F_1(h, k + c)$, $F_2(h, k - c)$.

Os vértices: $B_1(h + b, k)$ e $B_2(h - b, k)$ são transladados mais à esquerda e à direita do novo centro.

Equação Geral: A equação geral é escrita da mesma forma:

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0.$$

Em resumo, para uma elipse de centro em $V(h, k)$, temos:

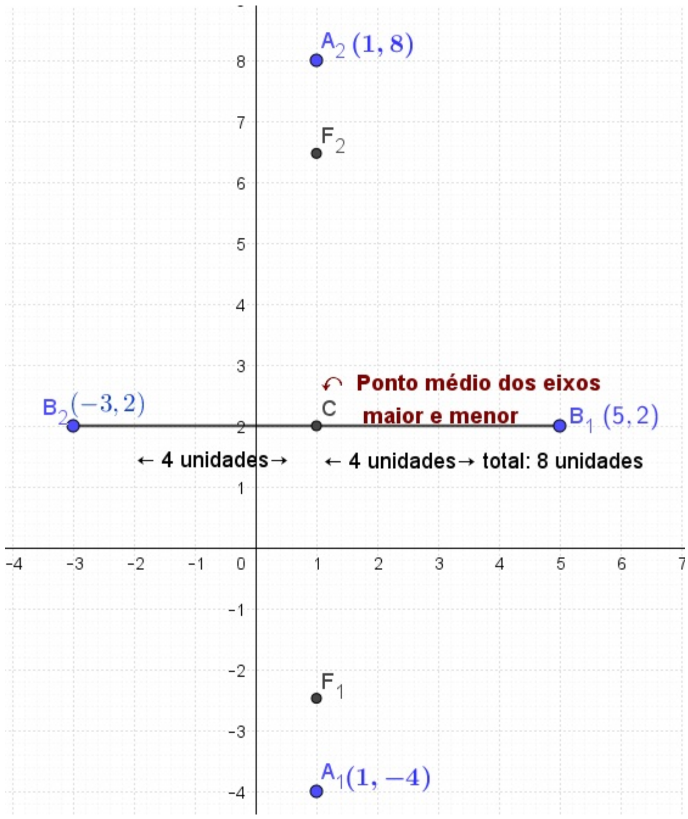
> A equação $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ é a **equação reduzida** da elipse de eixo maior paralelo ao eixo dos x.
> A equação $\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ é a **equação reduzida** da elipse de eixo maior paralelo ao eixo dos y.
> A **equação geral** da elipse é $ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0$, com a e b de mesmo sinal.

No exemplo seguinte, vamos determinar a equação da elipse e fazer a construção da curva a partir de alguns de seus elementos.

Exemplo 2.19. *Determine a equação da elipse de eixo maior nos extremos* $(1,-4)$ *e* $(1,8)$ *e com comprimento do eixo menor igual a* 8.

Solução: Para resolver o exemplo, primeiro devemos marcar os pontos indicados no enunciado $(1,-4)$ e $(1,8)$ no sistema de coordenadas cartesianas. A Figura 60 mostra os extremos do eixo maior.

Figura 60. Construção da elipse do Exemplo 2.19



Fonte: os autores

Sabendo que o centro da elipse é o ponto médio do eixo maior, definimos as coordenadas do centro, $C(1,2)$. A partir do centro, identificamos o eixo menor, que totaliza 8 unidades.

Dessa forma, apenas identificando os elementos da curva, já concluímos que a elipse tem eixo maior paralelo ao eixo dos y. Assim, a equação para a elipse será do tipo:

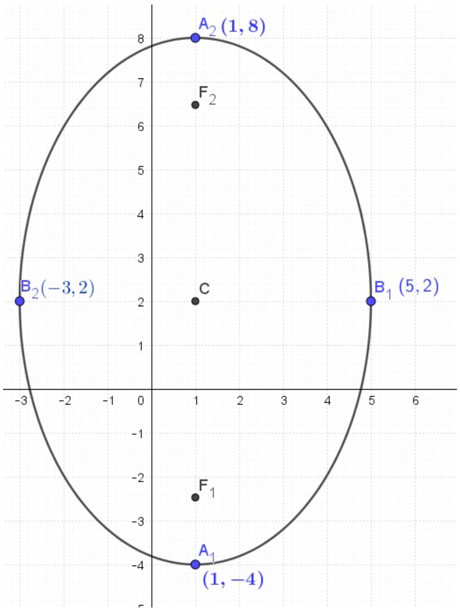
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1.$$

Os valores de a e b, são, respectivamente

$$a = \frac{8-(-4)}{2} = 6, \quad b = \frac{8}{2} = 4.$$

A equação que procuramos é $\dfrac{(x-1)^2}{16} + \dfrac{(y-2)^2}{36} = 1$. Veja a Figura 61.

Figura 61. Gráfico da Elipse do Exemplo 2.19



Fonte: os autores

Agora, no exemplo a seguir, precisamos retomar o tópico de completamento de quadrados 2.1.6, dependendo da curva, será necessário completar quadrados nas variáveis x e y, por isso precisamos de muita atenção ao efetuar os cálculos e reescrever a equação reduzida padrão.

Exemplo 2.20. *Identifique a cônica de equação* $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$, *seus elementos e construa o gráfico.*

Solução: Iniciamos escrevendo a equação geral da elipse e agrupamos os termos com mesma variável:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 &= 0 \\ 4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y &= 11 \\ 4(x^2 - 4x) + 9(y^2 + 2y) &= 11, \end{aligned}$$

evidenciamos os fatores 4 e 9 para facilitar a construção dos trinômios quadrados nestes parênteses assim, à esquerda da igualdade, observamos que, no primeiro parênteses, o termo que completa o trinômio é 4 e, no segundo, é o termo 1 que são compensados do lado direito da igualdade:

$$\begin{aligned} 4(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 + 2y + 1) &= 11 + 4(4) + 9(1) \\ 4(x-2)^2 + 9(y+1)^2 &= 36. \end{aligned}$$

Após completar os quadrados, é possível escrever as formas quadráticas $(x-h)^2$ e $(y-k)^2$, ficando claro, a partir de agora, as coordenadas do centro da elipse. Simplificando para obter a equação reduzida padrão, temos que

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

é a equação da elipse de centro $C(2,-1)$ e eixo maior paralelo ao eixo Ox. Neste caso,

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2.$$

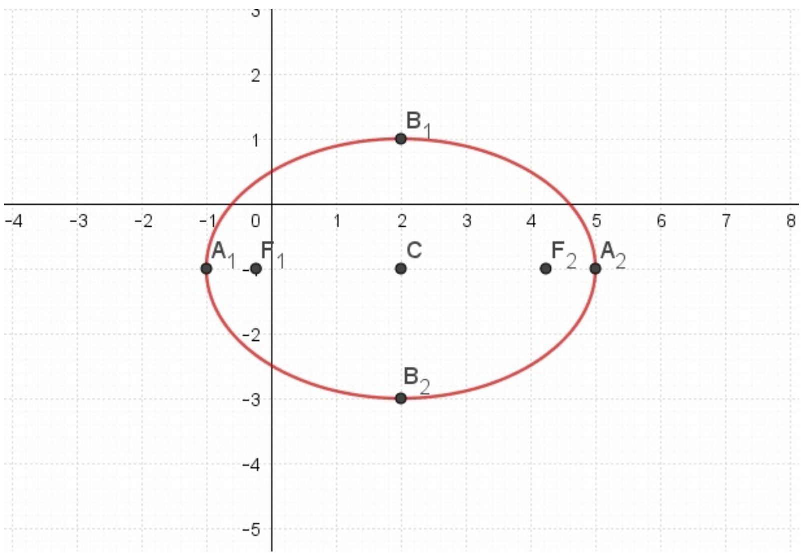
Para determinar os focos, precisamos do valor do semieixo focal c. Pela relação fundamental $a^2 = b^2 + c^2$ ou $9 = 4 + c^2$, temos $c = \sqrt{5}$, então os focos são $F_1(2+\sqrt{5},-1)$ e $F_2(2-\sqrt{5},-1)$.

Assim como os focos, os vértices $A_1(5,-1)$, $A_2(-1,-1)$ são transladados mais à esquerda e à direita do centro da curva.

Os vértices sobre o eixo menor são: $B_1(2,-3)$ e $B_2(2,1)$.

Excentricidade: $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Veja a Figura 62.

Figura 62. Gráfico da Elipse do Exemplo 2.20

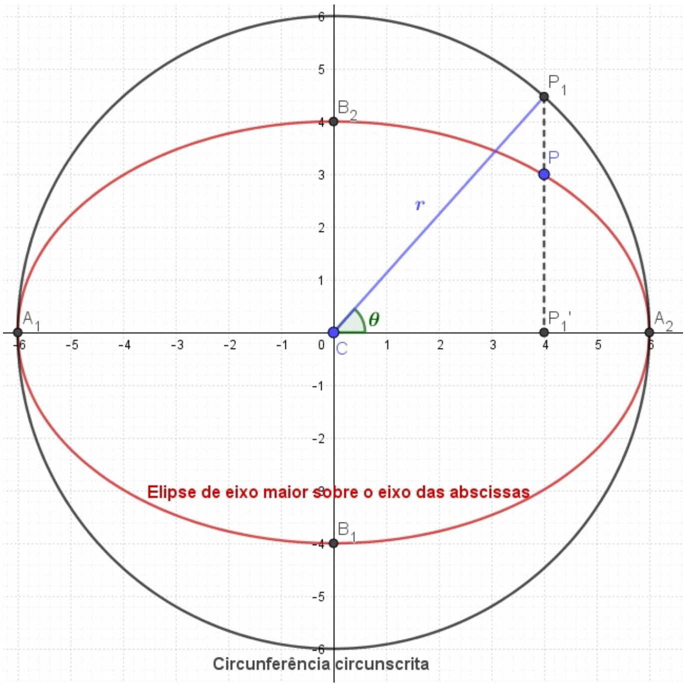


Fonte: os autores

2.3.4 Equações Paramétricas da Elipse

Para escrever as equações paramétricas da elipse, traçamos uma circunferência de centro $C(0,0)$ e raio igual ao semieixo maior a da elipse, conforme a Figura 63. Observe que neste caso a circunferência está circunscrita à elipse.

Figura 63. Elipse com centro na origem com circunferência circunscrita



Fonte: os autores

Sabendo que a equação da elipse de eixo maior sobre o eixo Ox é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

considere um ponto $P(x, y)$ que pertence à elipse e uma reta que passa por P paralela ao eixo dos y interceptando a circunferência em P_1. O raio da circunferência $r = CP_1$ determina com o eixo Ox um ângulo θ.

Como a projeção do raio da circunferência no eixo dos x é dada por $x = a\cos(\theta)$ (trigonometria do triângulo retângulo), então, substituindo o valor de x na equação, temos

$$\frac{(a\cos(\theta))^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.22}$$

Resolvendo a equação (2.22) e considerando que $1 - \cos^2(\theta) = \operatorname{sen}^2(\theta)$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \cos^2(\theta) = \operatorname{sen}^2(\theta),$$

obtemos $y = b\,\mathrm{sen}(\theta)$. Logo,

$$\left\{\begin{array}{l} x = a\cos^2(\theta) \\ y = b\,\mathrm{sen}(\theta), \text{ onde } 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array}\right. \tag{2.23}$$

são as **equações paramétricas da elipse de eixo maior sobre o eixo dos** x.

O parâmetro usado na equação é θ, então, para cada valor de θ corresponde apenas um ponto P da elipse, quando o parâmetro varia de 0 a 2π. O ponto parte de $(a, 0)$ e descreve a curva no sentido anti-horário.

As **equações paramétricas da elipse de eixo maior sobre o eixo dos** y são:

$$\left\{\begin{array}{l} x = b\cos(\theta) \\ y = a\,\mathrm{sen}(\theta). \end{array}\right. \tag{2.24}$$

No caso em que o centro da elipse é o ponto $C(h, k)$, temos:

As **equações paramétricas da elipse de eixo maior paralelo ao eixo dos** x:

$$\left\{\begin{array}{l} x = h + a\cos(\theta) \\ y = k + b\,\mathrm{sen}(\theta). \end{array}\right. \tag{2.25}$$

As **equações paramétricas da elipse de eixo maior paralelo ao eixo dos** y:

$$\left\{\begin{array}{l} x = h + b\cos(\theta) \\ y = k + a\,\mathrm{sen}(\theta). \end{array}\right. \tag{2.26}$$

Exemplo 2.21. *Escrever as equações paramétricas da elipse* $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{25} = 1$.

Solução: Se $a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$ e $b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$, então

$$\left\{\begin{array}{l} x = 6\cos(\theta) \\ y = 5\,\mathrm{sen}(\theta). \end{array}\right.$$

são as equações paramétricas da elipse de centro $C(0, 0)$ e eixo maior sobre o eixo dos x.

Exemplo 2.22. *Escrever as equações paramétricas da elipse*

$$9x^2 + 4y^2 - 54x + 6y + 61 = 0.$$

Solução: A equação acima pode ser escrita na forma padrão como:

$$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1,$$

portanto, trata-se de uma elipse com eixo maior paralelo ao eixo Oy. Então, as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = 3 + 2\cos(\theta) \\ y = -2 + 3\operatorname{sen}(\theta). \end{cases}$$

Exemplo 2.23. *Utilizando o aplicativo do GeoGebra, vamos determinar uma equação para uma família de elipses, com centro em $C(-3,3)$ e eixo maior paralelo ao eixo dos x, sabendo que a excentricidade é $e=\frac{4}{5}$.*

Solução: Usando o GeoGebra escolha o aplicativo Geometria ou o GeoGebra Clássico, para que seja possível usar a ferramenta elipse.

No campo de entrada, digite as coordenadas do centro $C=(-3,3)$. O eixo maior é paralelo ao eixo dos x, sendo assim vamos usar o parâmetro t de forma que os focos e vértices sobre o eixo maior dependam deste parâmetro.

Criamos um controle deslizante (ou seletor), como número, nomeamos de t, valor mínimo 0, máximo 10 e incremento 1.

Como a excentricidade é $e=\frac{4}{5}$, então faremos $c=4t$ e $a=5t$. Como os focos e vértices precisam ser transladados mais à direita e à esquerda do centro, vamos inserir no campo de entrada do aplicativo as seguintes coordenadas: $F_1=(-3-4t,3)$, $F_2=(-3+4t,3)$, $A_1=(-3-5t,3)$, $A_2=(-3+5t,3)$.

Usando a ferramenta elipse, selecionamos os focos e depois um dos vértices. A elipse será construída.

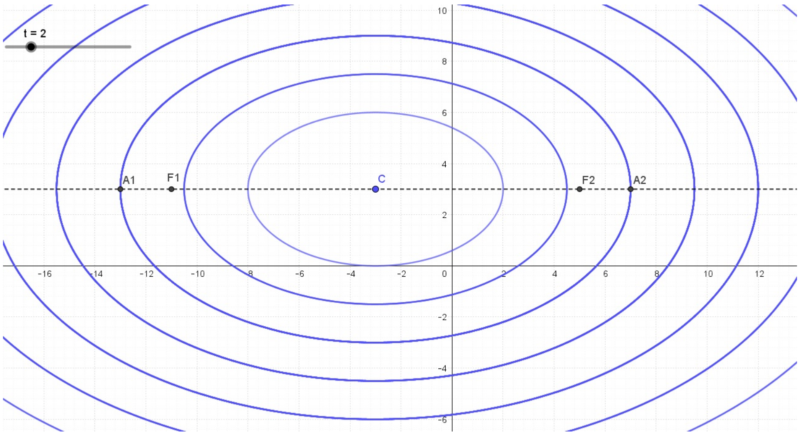
Para visualizar uma família de elipses, selecione a curva, escolha a opção habilitar rastro (ou mostrar rastro) e movimente o seletor ou controle deslizante.

A Figura 64 apresenta família de elipses. Observamos que, conforme alteramos o valor do parâmetro, os focos e vértices se deslocam mais à direita e à esquerda do centro da elipse.

Como $c=4t$ e $a=5t$, pela relação fundamental da elipse, temos que $b=3t$, portanto a equação da família de elipses é

$$\frac{(x+3)^2}{25t^2}+\frac{(y-3)^2}{9t^2}=1.$$

Figura 64. Família de elipses



Fonte: os autores

Agora chegou o momento de verificar o seu aprendizado, tente resolver os seguintes exercícios.

2.3.5 Agora tente resolver!

1. Determinar os vértices, os focos, as extremidades do eixo maior e menor e construir a elipse de equação $2x^2 + y^2 = 2$.

2. Sabendo que os focos de uma elipse são $F_1(0, \sqrt{3})$ e $F_2(0, -\sqrt{3})$ e a excentricidade $e = \dfrac{1}{2}$, determine sua equação.

3. Determinar a elipse de centro na origem e eixo maior igual a 8, semieixo menor igual a 2 e eixo focal $y = 0$.

4. Determine todos os elementos da elipse de equação $4x^2+9y^2-24x-36y-252 = 0$ e escreva as equações paramétricas de cada uma delas:

5. Utilizando o aplicativo do GeoGebra, crie um controle deslizante como ângulo, nomear como t, com intervalo mínimo de $0°$ e máximo $360°$ e incremento de $1°$. Depois, digite no campo de entrada o ponto $P = (6\cos(t), 5\,\text{sen}(t))$, habilite o rastro do ponto tal como realizamos nos passos do Exemplo 2.12. Após, movimente o controle deslizante. Identifique a curva construída, seus elementos e escreva a sua equação reduzida.

2.4 A Hipérbole

2.4.1 A Geometria da Hipérbole

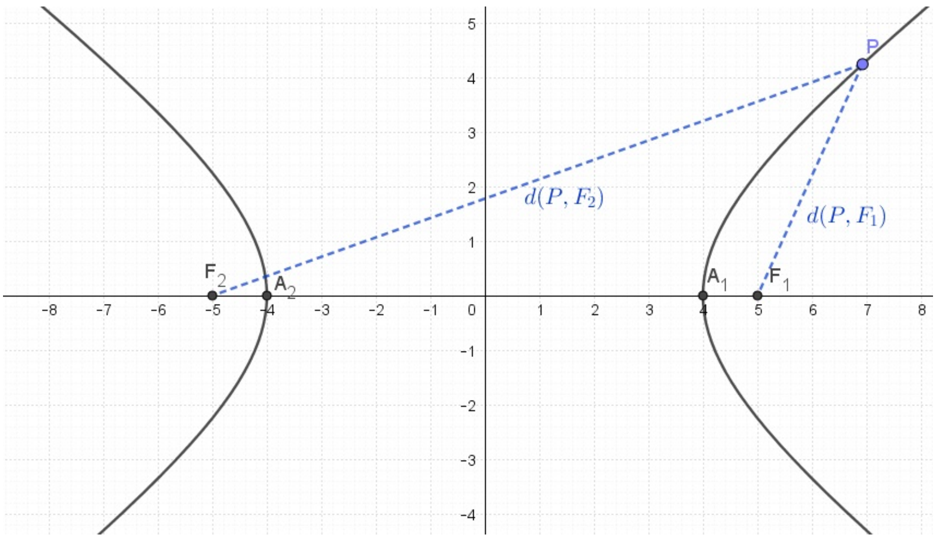
A hipérbole é o lugar geométrico formado pelo conjunto de todos os pontos de um plano cuja diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos, F_1 e F_2, desse plano é uma constante $2a$. Os pontos fixos são os focos da hipérbole.

$$\mathcal{H} = \{P \in \mathbb{R}^2 | \mid d(P, F_1) - d(P, F_2) \mid = 2a\}.$$

A hipérbole é a única cônica que possui dois ramos, resultantes da interseção do cone de duas folhas com um plano paralelo ao eixo de simetria do cone, conforme a Figura 28.

Observe a Figura 65, dados dois pontos distintos no plano F_1 e F_2, a distância entre esses pontos é igual a $2c$ e o número a é tal que $2a < 2c$. O conjunto de todos os pontos P do plano, tais que $\mid d(P, F_1) - d(P, F_2) \mid = 2a$, reconhecemos como uma hipérbole.

Figura 65. Definição de lugar geométrico da hipérbole



Fonte: os autores

Usando a definição, vamos resolver um primeiro problema, partindo apenas das coordenadas dos focos e da constante a.

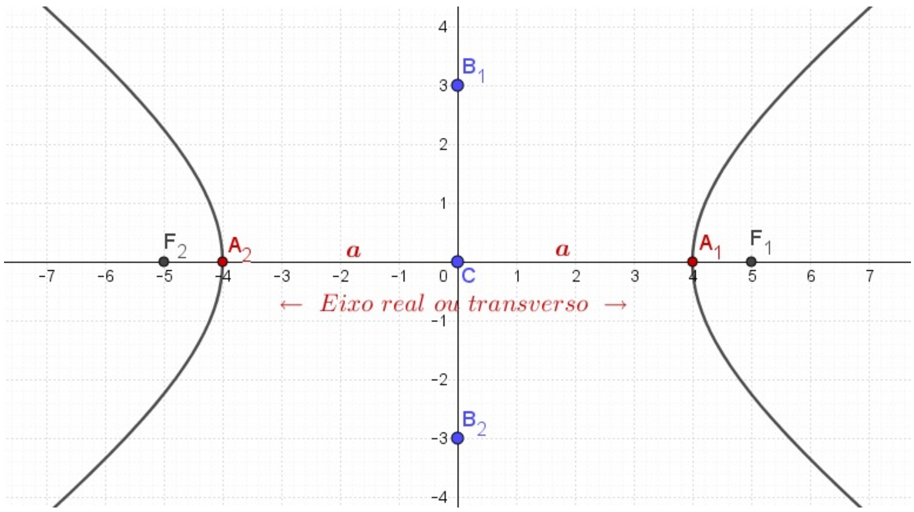
Exemplo 2.24. *Escreva a equação de uma hipérbole com focos $F_1(-5, 0)$ e $F_2(5, 0)$, em que a constante é igual a 8.*

Solução: Sabendo que $\mid d(P, F_1) - d(P, F_2) \mid = 8$, e considerando $P(x, y)$, temos:

$$\begin{aligned}
|\sqrt{(x+5)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-5)^2+(y-0)^2}| &= 8\\
(\sqrt{(x+5)^2+y^2}-\sqrt{(x-5)^2+y^2})^2 &= 64\\
(x+5)^2+y^2+(x-5)^2+y^2 &= 64+2\sqrt{(x+5)^2+y^2}\sqrt{(x-5)^2+y^2}\\
x^2+25+10x+y^2+x^2+25-10x+y^2-64 &= 2\sqrt{(x+5)^2+y^2}\sqrt{(x-5)^2+y^2}\\
2x^2+2y^2-14 &= 2\sqrt{(x+5)^2+y^2}\sqrt{(x-5)^2+y^2}\\
x^2+y^2-7 &= \sqrt{(x+5)^2+y^2}\sqrt{(x-5)^2+y^2}\\
(x^2+y^2-7)^2 &= ((x+5)^2+y^2)((x-5)^2+y^2)\\
x^4+y^4+2x^2y^2-14x^2-14y^2+49 &= x^4-10x^3+25x^2+x^2y^2+10x^3\\
&- 100x^2+250x+10xy^2+25x^2-250x+625\\
&+ 25y^2+y^2x^2-10xy^2+25y^2+y^4\\
-14x^2-14y^2+49 &= -50x^2+50y^2+625\\
36x^2-64y^2 &= 576\\
\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9} &= 1,
\end{aligned}$$

a qual mais tarde chamaremos de equação reduzida. A Figura 66 apresenta a hipérbole do Exemplo 2.24.

Figura 66. Gráfico da Hipérbole do Exemplo 2.24



Fonte: os autores

De modo geral, a Figura 66 mostra uma hipérbole, com centro na origem $C(0,0)$, eixo real sobre o eixo dos x ou (eixo focal sobre o eixo dos x). Os vértices A_1 e A_2 são pontos que pertencem aos ramos da hipérbole, interseção com o eixo focal.

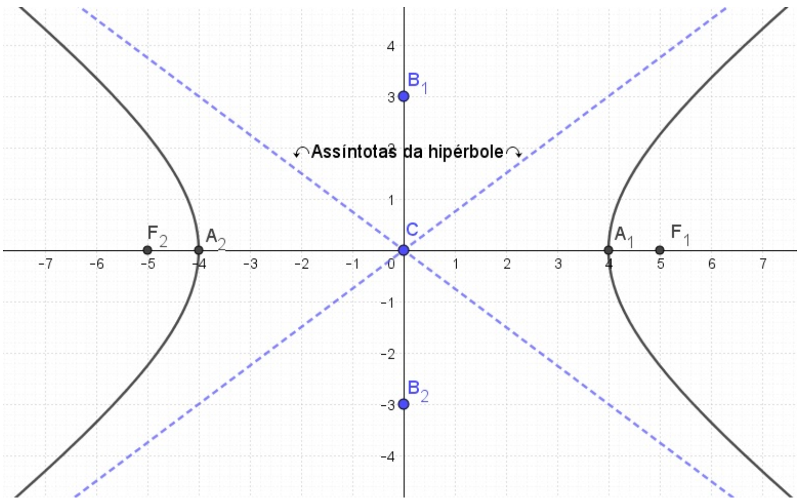
Na hipérbole, os focos estão mais distantes do centro, portanto, $c > a$. Como a hipérbole tem dois ramos, para um ponto P sobre um dos lados da hipérbole, por exemplo, no direito, temos $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$. Sobre o outro lado, $d(P, F_2) - d(P, F_1) = 2a$, então temos $d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$.

2.4.1.1 Elementos da Hipérbole

- Focos: são os pontos F_1 e F_2, que não pertencem à hipérbole.
- Centro: é o ponto médio em relação aos vértices e focos da curva. Também podemos considerar o centro como o ponto de interseção do eixo real com o eixo conjugado da hipérbole.
- Eixo real ou transverso: é o segmento $\overline{A_1A_2}$ com comprimento $2a$, A_1 e A_2 são interseções dos ramos da hipérbole com o eixo focal.
- Eixo imaginário ou conjugado: é o segmento $\overline{B_1B_2}$ com comprimento $2b$ segmento perpendicular ao eixo focal, passando pelo centro.
- Distância focal: é a distância entre os focos e é igual a $2c$.
- Assíntotas: são retas que contêm as diagonais do retângulo fundamental da hipérbole, passando pelo centro da hipérbole, veremos com mais detalhes na seção 2.4.1.4.
- O número $e = \frac{c}{a}$ é a excentricidade da hipérbole, como $c > a$, então $e > 1$.

Os elementos da hipérbole podem ser vistos na Figura 67.

Figura 67. Elementos da hipérbole



Fonte: os autores

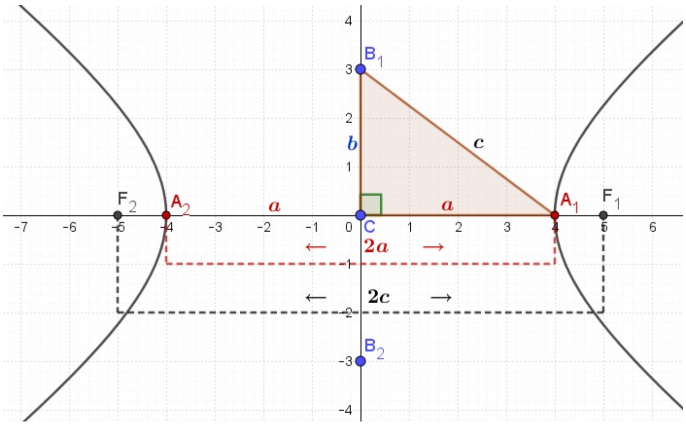
2.4.1.2 Relação Fundamental da Hipérbole

A Figura 68 mostra uma hipérbole com eixo real sobre o eixo x, observando o triângulo retângulo CA_1B_1, notamos que é válida a seguinte relação

$$c^2 = a^2 + b^2, \tag{2.27}$$

onde notamos que $c > b > 0$ e $c > a > 0$.

Figura 68. Relação fundamental da hipérbole

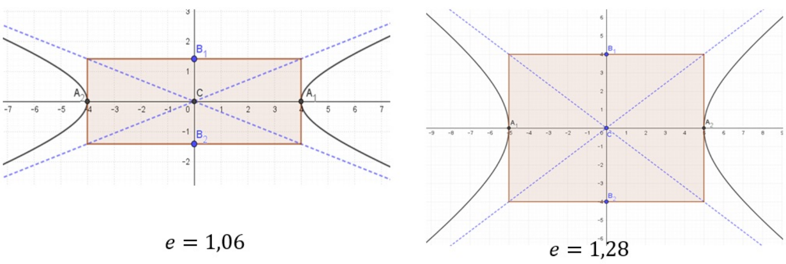


Fonte: os autores

2.4.1.3 Excentricidade da Hipérbole

A excentricidade da hipérbole é o número $e = \dfrac{c}{a}$, em que a é o semieixo transverso e c é a distância do centro a um dos focos. Como $c > a$, o valor da excentricidade é maior que 1. A excentricidade está relacionada com a abertura dos ramos da hipérbole. Quanto maior a excentricidade, maior será a abertura. Na Figura 69, a hipérbole que está mais à esquerda os ramos são mais fechados e a excentricidade é $e = 1,06$ e, na hipérbole à direita, seus ramos são mais abertos e o valor da excentricidade é $e = 1,28$.

Figura 69. Excentricidade da hipérbole



Fonte: os autores

2.4.1.4 As assíntotas da Hipérbole

Os retângulos das Figuras 69 são chamados de retângulos fundamentais da hipérbole, que tem diagonais contidas nas respectivas retas,

$$y = \frac{b}{a}x,\ y = -\frac{b}{a}x,\ y = \frac{a}{b}x,\ y = -\frac{a}{b}x. \tag{2.28}$$

Elas fornecem uma orientação que precisamos para desenhar as hipérboles.

Lembrando que, nesse caso, as equações das assíntotas na forma reduzida são do tipo $y = mx$, pois passam na origem do sistema cartesiano. Sabendo que m é a declividade da reta (ou coeficiente angular da reta), para determinar as equações das assíntotas, devemos encontrar o coeficiente angular das retas. No caso de o eixo real estar sobre o eixo Ox e centrado na origem $C(0,0)$, temos que o coeficiente angular é:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Considerando $P_1(a,b)$ um ponto pertencente a reta de inclinação ascendente, temos:

$$m = \frac{b-0}{a-0} = \frac{b}{a}.$$

Dessa forma, a equação da assíntota crescente é $y = \frac{b}{a}x$.

De forma análoga, a equação da assíntota decrescente é $y = -\frac{b}{a}x$.

O mesmo raciocínio usamos para determinar as equações das assíntotas quando o eixo real ou transverso está sobre o eixo Oy.

A hipérbole pode ser esboçada com o desenho de um retângulo fundamental centralizado na origem e lados paralelos aos eixos coordenados. As retas que contêm as diagonais do retângulo são as assíntotas da hipérbole. Usaremos essa ideia no Exemplo 2.25.

2.4.2 Equações Reduzidas da Hipérbole

Partindo da definição, considerando que o centro das curvas está localizado na origem do sistema cartesiano $C(0,0)$, e sendo dois pontos no plano distintos, nomeados de F_1 e F_2 tal que a distância $d(F_1, F_2) = 2c$, assim como na elipse, temos dois casos a considerar: a hipérbole com eixo real sobre o eixo dos x e a hipérbole com eixo real sobre o eixo dos y.

2.4.2.1 Equação reduzida da Hipérbole de eixo real sobre o eixo dos x

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer na hipérbole de focos $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, com $c > a$ e $c \geq 0$. Pela definição,

$$\begin{aligned} |\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}| &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= \pm 2a \\ \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

De forma análoga à dedução da equação da elipse, queremos chegar a uma equação equivalente a esta, livre de radicais. Elevamos ao quadrado ambos os membros, reagrupamos os termos e elevamos ao quadrado novamente para obtermos,

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Pela relação fundamental da hipérbole, temos $b^2 = c^2 - a^2$, então $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, que é normalmente escrito como:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.29}$$

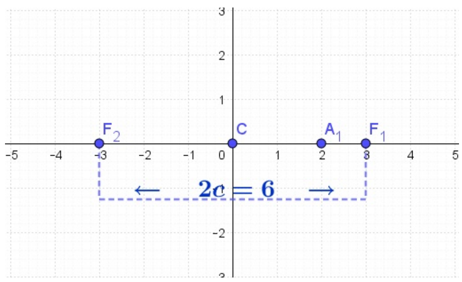
A equação (2.29) é a **equação reduzida da hipérbole de centro na origem e eixo transverso (ou real) sobre o eixo dos** x.

No próximo exemplo, vamos determinar a equação da hipérbole a partir de alguns de seus elementos.

Exemplo 2.25. *Determine a equação de uma hipérbole que passa pelo ponto $A(2, 0)$ de eixo real no eixo Ox e com distância focal igual a 6. Esboce o gráfico indicando todos os elementos.*

Solução: Inicialmente vamos marcar o ponto A no plano cartesiano e determinar a localização dos focos. Como a distância focal é igual a 6, temos: $2c = 6$, portanto, $c = 3$. Os focos estão localizados no eixo dos x, e suas coordenadas são: $F_1(-3, 0)$ e $F_2(3, 0)$.

Figura 70. Vértice A_1 e focos do Exemplo 2.25



Fonte: os autores

Em seguida, determinamos o segundo vértice $A_1(-2,0)$. Agora precisamos determinar o segmento $\overline{B_1B_2}$, que determina o eixo imaginário.

Usando a relação fundamental da hipérbole, já que conhecemos os valores a e c:

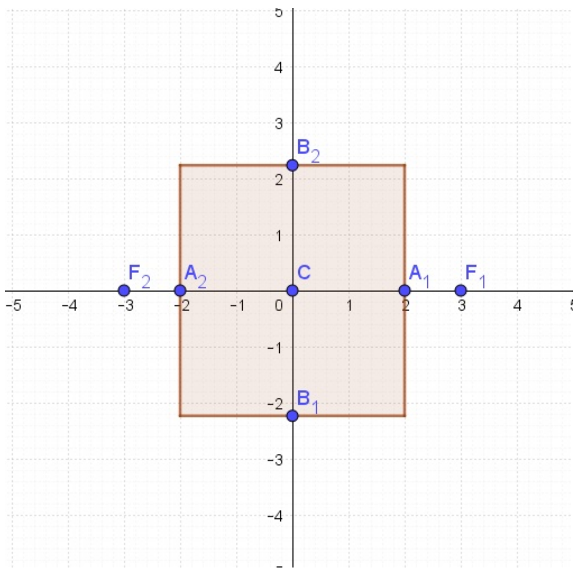
$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 9 = 4 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{5}.$$

Portanto,

$$B_1(0,-\sqrt{5}) \quad B_2(0,\sqrt{5}).$$

Assim, podemos construir o retângulo fundamental, que auxilia na construção da curva, conforme a Figura 71.

Figura 71. Retângulo fundamental da hipérbole



Fonte: os autores

Agora, vamos determinar as equações das retas r e s (assíntotas) que contêm as diagonais do retângulo fundamental. As retas r e s passam pela origem do plano cartesiano, $O(0,0)$. Pelo gráfico da Figura 72, observamos que a reta r passa pelos pontos $(-2,\sqrt{5})$ e $C(0,0)$ e a reta s passa pelos pontos $(2,\sqrt{5})$ e $C(0,0)$.

De acordo com o estudo da reta, quando a reta passa na origem do sistema cartesiano, a equação das retas se reduzem a $y = ax$, onde a é o coeficiente angular da reta. Sendo assim, para a reta r, temos que o coeficiente angular é determinado por:

$$a_r = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\sqrt{5} - 0}{-2 - 0} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

A equação da reta r é: $y = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$.

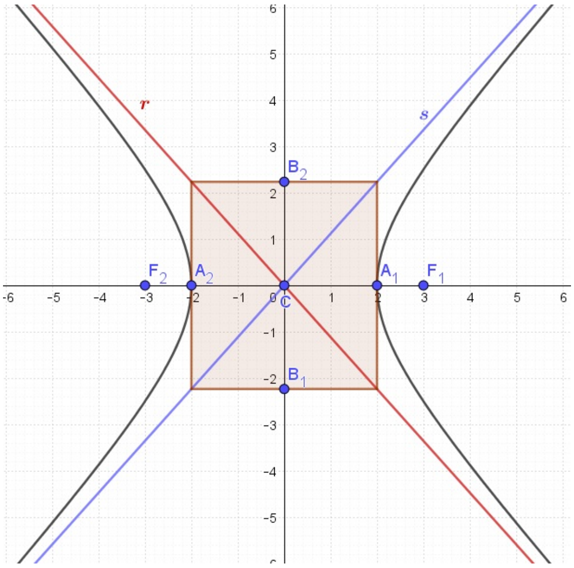
De forma análoga, a equação da reta s é $y = \dfrac{\sqrt{5}}{2}x$.

A Figura 72 apresenta a hipérbole e todos os seus elementos.

A equação da hipérbole é

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

Figura 72. Gráfico da Hipérbole do Exemplo 2.25



Fonte: os autores

2.4.2.2 Equação reduzida da Hipérbole de eixo real sobre o eixo dos y

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer na hipérbole de focos $F_1(0, c)$, $F_2(0, -c)$, com $c > a$ e $c \geq 0$. Pela definição, a hipérbole com centro na origem e eixo vertical y como seu eixo focal tem a seguinte equação:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \tag{2.30}$$

A equação (2.30) é a **equação reduzida da hipérbole de centro na origem e eixo transverso (ou real) sobre o eixo dos** y.

O próximo exemplo apresenta uma situação em que a equação da hipérbole não está na forma reduzida, nesses casos precisamos ter cuidado para reescrever a equação.

Exemplo 2.26. *Escreva a equação na forma padrão e determine o centro, os vértices e focos da hipérbole:* $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$.

Solução: Escrevendo a equação na forma padrão, temos:

$$\begin{aligned} 16x^2 - 9y^2 &= -144 \\ \frac{x^2}{(-9)} - \frac{y^2}{(-16)} &= 1 \\ \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} &= 1, \end{aligned}$$

que é a equação-padrão para uma hipérbole de eixo **transverso sobre o eixo** dos y, com centro $C(0,0)$. Para obter os vértices A_1 e A_2, fazemos $x = 0$, e obtemos

$$\frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow y^2 = 16,$$

logo, $A_1(0,4)$ e $A_2(0,-4)$. Da mesma forma, se $y = 0$, temos

$$-\frac{x^2}{9} = 1 \Rightarrow x^2 = -9,$$

que é uma equação impossível no conjunto dos reais. Então, a curva não corta o eixo dos x. Pela relação fundamental: $c^2 = a^2 + b^2$, temos o semieixo focal,

$$c^2 = 16 + 9$$

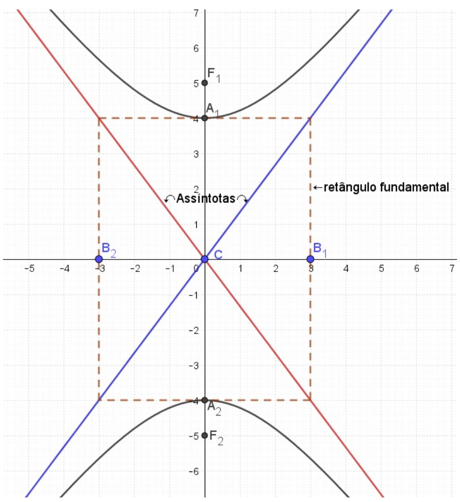
$$c^2 = 25$$

$$c = 5.$$

Portanto, $F_1(0,5)$ e $F_2(0,-5)$. Excentricidade $e = \dfrac{5}{4}$. Agora que já conhecemos os principais elementos da curva é possível fazer o gráfico.

Na Figura 73, observamos que é possível usar o retângulo fundamental para fazer o esboço da curva.

Figura 73. Gráfico da Hipérbole do Exemplo 2.26



Fonte: os autores

2.4.3 Translações da Hipérbole

Quando transladamos uma hipérbole horizontalmente por h unidades e verticalmente por k unidades, seu centro se move de $(0,0)$ para (h,k). Observamos que a translação não modifica o comprimento dos eixos. Dizemos, nesse caso, que o eixo real será paralelo ao eixo x ou ao eixo y. Nos próximos itens, vamos apresentar as equações reduzidas para as hipérboles, considerando a translação de seus centros.

2.4.3.1 Equação reduzida da Hipérbole de eixo maior paralelo ao eixo dos x

Escrevendo a equação da hipérbole com eixo maior paralelo ao eixo das abscissas no sistema $x'O'y'$ e utilizando as equações de translação de eixos, da seção 2.1.4, temos

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x' = x - h \text{ e } y' = y - k.$$

Logo,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \tag{2.31}$$

é a **equação da hipérbole de centro $C(h,k)$ com eixo transverso paralelo ao eixo dos x.**

Equação Geral: Se eliminarmos os denominadores, desenvolvermos os quadrados e ordenarmos os termos, obtemos a equação geral, com a e b de sinais contrários,

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0.$$

As coordenadas dos focos e vértices são transladados em relação ao novo centro (h,k):

Focos: $F_1(h+c,k)$, $F_2(h-c,k)$.

Vértices: $A_1(h+a,k)$, $A_2(h-a,k)$.

Assíntotas: $y = \frac{b}{a}(x-h)+k$ e $y = -\frac{b}{a}(x-h)+k$.

2.4.3.2 Equação reduzida da Hipérbole de eixo maior paralelo ao eixo dos y

De forma análoga, escrevendo a equação da hipérbole com eixo maior paralelo ao eixo das ordenadas no sistema $x'O'y'$,

$$\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x' = x - h \text{ e } y' = y - k.$$

Logo,

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \tag{2.32}$$

é a **equação da hipérbole de centro** $C(h,k)$ **com eixo transverso paralelo ao eixo dos** y.

As coordenadas dos focos e vértices são transladados em relação ao novo centro (h,k):

Focos: $F_1(h, k+c)$, $F_2(h, k-c)$.

Vértices: $A_1(h, k+a)$, $A_2(h, k-a)$.

Assíntotas: $y = \frac{a}{b}(x-h) + k$ e $y = -\frac{a}{b}(x-h) + k$.

Em resumo, para uma hipérbole de centro em $C(h,k)$, temos:

A equação $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ é a **equação reduzida** da hipérbole de eixo real paralelo ao eixo dos x.
A equação $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ é a **equação reduzida** da hipérbole de eixo real paralelo ao eixo dos y.
A **equação geral** da hipérbole é $ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0$, com a e b de sinais contrários.

O exemplo a seguir mostra a equação geral de uma hipérbole, salientamos que nesses casos devemos completar quadrados na expressão e escrever a equação reduzida. Assim, identificamos as coordenadas do centro da curva e seus respectivos eixos.

Exemplo 2.27. *Identifique a cônica de equação* $25x^2 - 36y^2 - 100x - 72y - 836 = 0$, *seus elementos e faça um esboço do gráfico.*

Solução: Para escrever a equação na forma reduzida, agrupamos os termos de mesma variável e evidenciamos os fatores 25 e 36 para facilitar a construção dos trinômios, assim

$$\begin{aligned}
25x^2 - 36y^2 - 100x - 72y - 836 &= 0 \\
25(x^2 - 4x) - 36(y^2 + 2y) &= 836 \\
25(x^2 - 4x + 4) - 36(y^2 + 2y + 1) &= 836 + 100 - 36 \\
25(x^2 - 4x + 4) - 36(y^2 - 2y + 1) &= 900 \\
\frac{(x-2)^2}{36} - \frac{(y+1)^2}{25} &= 1,
\end{aligned}$$

que é a forma padrão da hipérbole de centro $C(2,-1)$ e eixo transverso paralelo ao eixo dos x. Pela relação fundamental da hipérbole 2.27,

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ ou } c^2 = 36 + 25$$

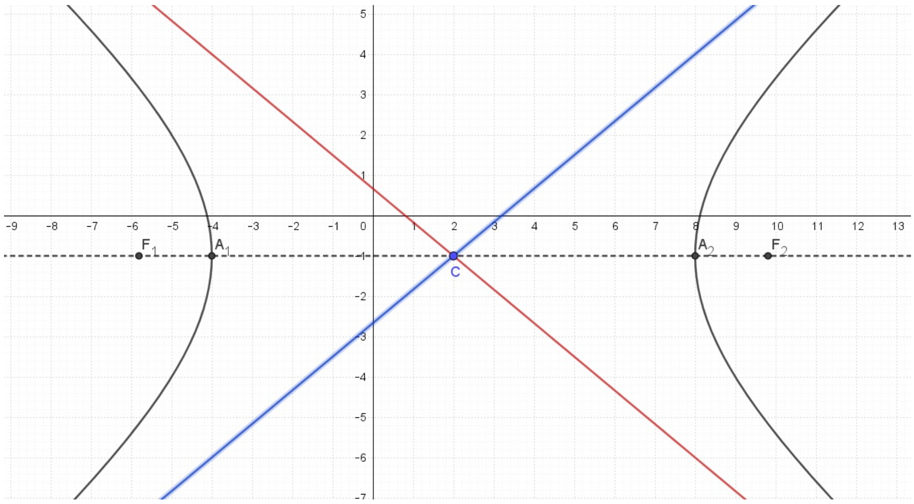
então, $c = \sqrt{61}$ e os focos são $F_1(2+\sqrt{61},-1)$ e $F_2(2-\sqrt{61},-1)$.

Pela equação $\dfrac{(x-2)^2}{36} - \dfrac{(y+1)^2}{25} = 1$, observamos que o eixo real ou transverso é paralelo ao eixo dos x, dessa forma, os vértices A_1 e A_2 devem ser transladados mais à direita e à esquerda, respectivamente, do novo centro, portanto: $A_1(8,-1)$ e $A_2(-4,-1)$.

Excentricidade: $e = \dfrac{\sqrt{61}}{6}$.

Assíntotas: $y = \dfrac{5}{6}(x-2) - 1$ e $y = -\dfrac{5}{6}(x-2) - 1$.

Figura 74. Gráfico da Hipérbole do Exemplo 2.27



Fonte: os autores

Exemplo 2.28. *Determine a equação da hipérbole e os demais elementos da curva sabendo que o centro é o ponto $C(-2,-2)$, um dos vértices é $A_1(3,-2)$ e um dos focos é o ponto $F_1(6,-2)$.*

Solução: Pelos dados do problema, observamos que a distância do centro até um dos vértices são 5 unidades e a distância do centro até um dos focos são 8 unidades. Dessa forma, já reconhecemos que $a = 5$ e $c = 8$.

Usando a relação fundamental da hipérbole 2.4.1.2, determinamos o semieixo imaginário:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 8^2 = 5^2 + b^2$$

então, $b^2 = 39$. Para escrever a equação, observamos que o vértice A_1 e o foco F_1 foram transladados mais à direita do centro C, visto que, com relação às coordenadas dos pontos, a ordenada é igual nos três pontos, mas a abscissa é diferente.

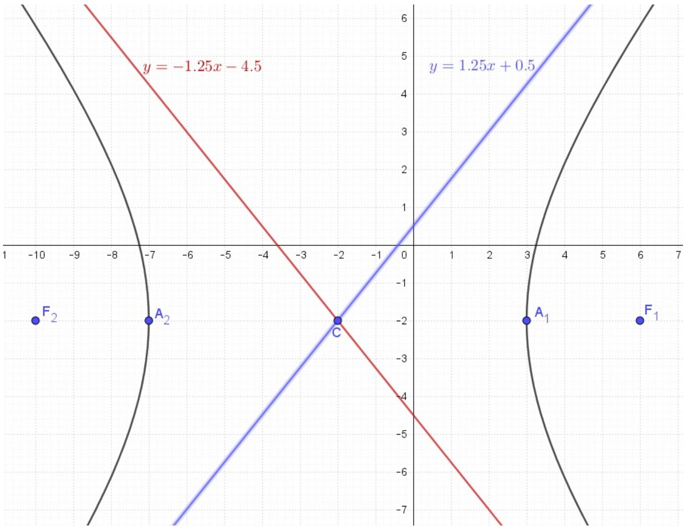
Sendo assim, a hipérbole tem eixo real ou transverso paralelo ao eixo Ox e sua equação é dada por

$$\frac{(x+2)^2}{25} - \frac{(y+2)^2}{39} = 1.$$

Para determinar os demais elementos com o auxílio do gráfico, observamos que o vértice A_2 e o foco F_2 estão mais à esquerda do centro, com as mesmas distâncias em relação ao centro, conforme mostra a Figura 75.

E, a excentricidade da hipérbole é $e = \dfrac{8}{5}$.

Figura 75. Gráfico da Hipérbole do Exemplo 2.28



Fonte: os autores

2.4.4 Equações paramétricas da Hipérbole

Para obter as equações paramétricas da hipérbole, consideremos a equação da hipérbole de eixo transverso sobre o eixo Ox com centro $C(0,0)$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Escrevendo essa equação como $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$, deixando os quadrados em evidência, significa dizer que $\dfrac{x}{a}$ e $\dfrac{y}{b}$ são números reais, cuja diferença de seus quadrados é sempre igual a 1.

Uma relação auxiliar da trigonometria conhecida é

$$\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1,$$

dividindo ambos os membros por $\cos^2(\theta)$, temos $\left(\dfrac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}\right)^2 + 1 = \left(\dfrac{1}{\cos(\theta)}\right)^2$.

Como, $\dfrac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \text{tg}(\theta)$ e $\dfrac{1}{\cos(\theta)} = \sec(\theta)$, então, substituindo, na equação anterior, podemos escrever $sec^2(\theta) - \text{tg}^2(\theta) = 1$.

Agora podemos comparar esse resultado com a equação da hipérbole,

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \sec(\theta) \Rightarrow x = a \sec(\theta) \\ \\ \dfrac{y}{b} = \text{tg}(\theta) \Rightarrow y = b \ \text{tg}(\theta), \end{cases}$$

onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\theta \neq \{\pi/2, 3\pi/2\}$. Assim, as **equações paramétricas da hipérbole de eixo transverso sobre o eixo dos** x são:

$$\begin{cases} x = a \sec(\theta) \\ y = b \ \text{tg}(\theta). \end{cases} \tag{2.33}$$

As **equações paramétricas da hipérbole de eixo real sobre dos** y são:

$$\begin{cases} x = b \ \text{tg}(\theta) \\ y = a \sec(\theta). \end{cases} \tag{2.34}$$

No caso em que o centro da hipérbole é o ponto $C(h, k)$, temos:

As **equações paramétricas da hipérbole de eixo maior paralelo ao eixo dos** x são:

$$\begin{cases} x = h + a \sec(\theta) \\ y = k + b \ \text{tg}(\theta). \end{cases} \tag{2.35}$$

As **equações paramétricas da elipse de eixo maior paralelo ao eixo dos** y são:

$$\begin{cases} x = h + b \ \text{tg}(\theta) \\ y = k + a \sec(\theta). \end{cases} \tag{2.36}$$

Exemplo 2.29. *Determinar a equação reduzida, a equação geral e as equações paramétricas da hipérbole de centro em* $C(4, -2)$*, cujo eixo transverso mede* 8*, é paralelo ao eixo* Oy *e eixo imaginário mede* 4.

Solução: Pelo enunciado, o eixo transverso mede 8, então $2a = 8 \Rightarrow a = 4$ e o eixo imaginário mede 4, então $2b = 4 \Rightarrow b = 2$.

Se a hipérbole tem eixo transverso paralelo ao eixo Oy, significa que o eixo focal está sobre esse eixo.

Então a equação da hipérbole é do tipo: $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$, assim

$$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-4)^2}{4} = 1.$$

Escrevendo a equação geral:

$$\frac{(y^2+4y+4) - 4(x^2-8x+16)}{16} = 1$$

$$y^2 + 4y + 4 - 4x^2 + 32x - 64 = 16$$

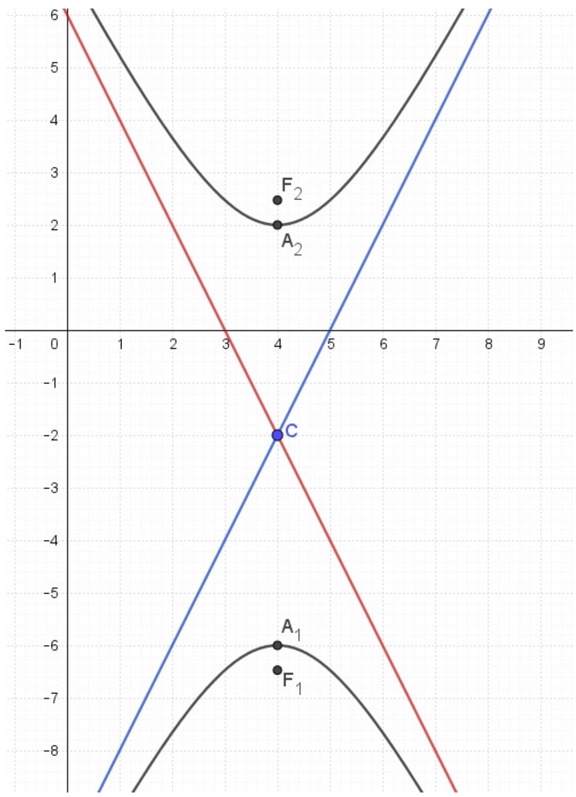
$$y^2 - 4x^2 + 32x + 4y - 76 = 0.$$

E as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = 4 + 2\ \text{tg}(\theta) \\ y = -2 + 4\ \sec(\theta). \end{cases}$$

Um esboço da hipérbole pode ser visto na Figura 76.

Figura 76. Gráfico da Hipérbole do Exemplo 2.29



Fonte: os autores

Exemplo 2.30. *Determine as equações paramétricas da hipérbole de equação:*

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

Solução: A equação da hipérbole indica que a curva tem eixo real ou transverso sobre o eixo Ox, sendo $a = 7$ e $b = 8$, portanto, as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = 7\ \sec(\theta) \\ y = 8\ \text{tg}(\theta). \end{cases}$$

Agora chegou o momento de verificar o seu aprendizado, tente resolver os seguintes exercícios.

2.4.5 Agora tente resolver!

1. Uma hipérbole tem focos nos pontos $F_1(3, 0)$ e $F_2(-3, 0)$ e passa pelo ponto $P(\sqrt{5}, 2)$. Determine sua equação.

2. Calcule o comprimento do segmento $\overline{A_1A_2}$, onde A_1 e A_2 são os vértices da hipérbole de equação $4x^2 - 9y^2 = 36$.

3. Determinar a equação geral da hipérbole de centro (3,5), eixo real igual a 10, paralelo ao eixo Ox e eixo imaginário igual a 6.

4. Escreva as equações paramétricas da hipérbole de equação:

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

5. Determine a equação reduzida padrão e todos os elementos da hipérbole

$$9x^2 - 16y^2 + 54x + 32y - 79 = 0.$$

6. Utilizando o aplicativo do GeoGebra, crie um controle deslizante como ângulo, nomear como t, com intervalo mínimo de 0° e máximo 360° e incremento de 1°. Depois, digite no campo de entrada o ponto $P = (7\sec(t), 8\,\text{tg}(t))$, (no GeoGebra usamos $\text{tg}(t)$ para tangente) habilite o rastro do ponto tal como realizamos nos passos do Exemplo 2.12. Após, movimente o controle deslizante. Identifique a curva construída, seus elementos e escreva a sua equação reduzida.

2.5 Exercícios

2.5.1 Parábola

1. Para cada uma dos itens a seguir, determine as coordenadas do foco, a equação da diretriz e as equações paramétricas da cada uma das parábolas. Esboçar o gráfico:

   a) $y^2 + 8x = 0$

   b) $3y^2 - 12x = 0$

   c) $x^2 = 5y$

2. Determine a equação e esboce o gráfico das parábolas que satisfazem as condições dadas:

   a) Foco $F(5, 0)$, diretriz $x = -5$

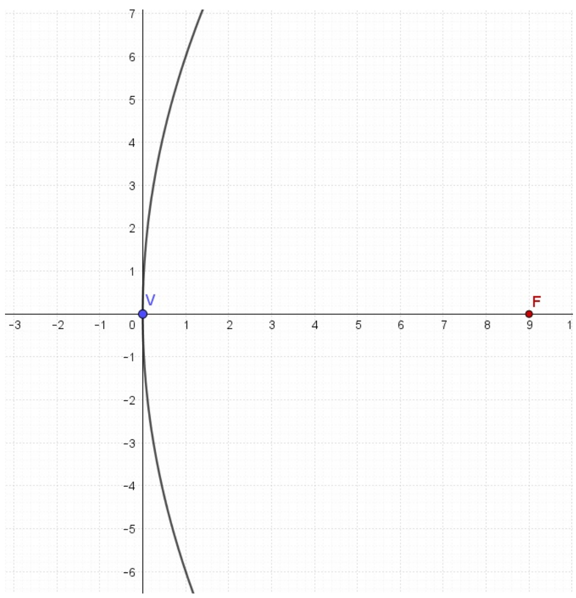
   b) Vértice $V(0, 0)$, diretriz $y = -2$

   c) Vértice $V(0, 0)$, Foco $F(0, -3)$

3. Determine uma equação da parábola que tenha seu vértice na origem, o eixo Oy como seu eixo e que passe pelo ponto $(-2, -4)$.

4. Observe a Figura 77, representa uma parábola. Identifique o eixo de simetria da curva e escreva a sua equação e a equação da reta diretriz:

Figura 77. Parábola



Fonte: os autores

5. Traçar um esboço do gráfico e obter uma equação da parábola de $V(3,-1)$ e $F(-1,-1)$.

6. Traçar um esboço do gráfico e obter uma equação da parábola de $V(-4,2)$ e $F(-4,5)$.

7. Determinar a equação da parábola cujo foco é $F(1,2)$ e cuja diretriz é a reta $x-5=0$.

8. Obter a equação padrão das parábolas, determine seus elementos e faça o gráfico:

   a) $y^2-12x+2y=11$

   b) $x^2+2x+4y-3=0$

   c) $x^2-2x-20y-39=0$

   d) $y=-2x^2+8x-8$

2.5.2 Circunferência

1. Nos itens abaixo, escreva as equações da circunferência na forma centro-raio, na forma geral e as equações paramétricas:

   a) $C(4,-3)$, $r=5$

   b) $C(-5,-12)$, $r=3$

2. Determine o centro e o raio das circunferências e escreva suas equações paramétricas:

   a) $x^2+y^2-6x-8y+9=0$

   b) $x^2+y^2-4x-6y+9=0$

3. O segmento de extremidade $P(2,8)$ e $Q(4,0)$ é o diâmetro de uma circunferência. Determine a equação da circunferência.

4. Obter a interseção da reta $s: y=x$ com a curva $x^2+y^2=2$.

5. Obter a interseção da reta $s: y=x-2$ com a curva $x^2+y^2=2$.

2.5.3 Elipse

1. Em cada um dos problemas, determinar os vértices, os focos, a excentricidade e as equações paramétricas de cada elipse. Esboçar o gráfico:

   a) $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$

   b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

   c) $y^2 + 2x^2 - 8 = 0$

2. Em cada um dos problemas, determinar uma equação da elipse que satisfaça as condições dadas:

   a) Focos $F_1(-6, 0)$ e $F_2(6, 0)$, eixo maior igual a 14.

   b) Foco $F(3, 0)$ e vértice $A(4, 0)$.

3. Uma elipse tem centro $C(0, 0)$ e excentricidade $\frac{4}{5}$, determine a equação e esboce o gráfico, sabendo que seu eixo focal está sobre o eixo dos x e mede 16.

4. Determine o centro, os focos, os vértices da elipse: $\dfrac{(x-3)^2}{225} + \dfrac{(y-4)^2}{289} = 1.$

5. Determine a equação reduzida padrão, as equações paramétricas, todos os seus elementos e esboce as elipses de equação geral:

   a) $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$

   b) $16x^2 + 9y^2 + 96x - 36y + 36 = 0$

   c) $5x^2 + 9y^2 - 20x - 18y - 151 = 0$

2.5.4 Hipérbole

1. Em cada um dos problemas, determinar os vértices, os focos, a excentricidade, as equações das assíntotas e as equações paramétricas das hipérboles:

   a) $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{25} = 1$

   b) $y^2 - 2x^2 - 8 = 0$

   c) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

2. Determinar uma equação da hipérbole que satisfaça as condições dadas e esboçar o gráfico:

   a) Focos em $F_1(2, 0)$ e $F_2(-2, 0)$, vértices em $A_1(1, 0)$ e $A_2(-1, 0)$.

b) Vértices em $A_1(4,0)$ e $A_2(-4,0)$, excentricidade $\dfrac{5}{4}$.

c) Focos em $F_1(0,5)$ e $F_2(0,-5)$ e equações das assíntotas $y = \pm\dfrac{3}{4}x$.

3. Determine as equações das retas do plano que passam pela origem do sistema de coordenadas e que não intersectam a curva do plano dada pela equação $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$.

4. Determine a equação da hipérbole de centro $C(2,-1)$, um vértice $A(2,-5)$ e um foco $F(2,-6)$.

5. Determine o centro, os focos, os vértices da hipérbole: $\dfrac{(x-3)^2}{225} - \dfrac{(y-4)^2}{289} = 1$.

6. Determine a equação reduzida padrão, as equações paramétricas, todos os seus elementos e esboce as hipérboles de equação geral:

   a) $-16x^2 + 9y^2 - 160x - 54y - 895 = 0$

   b) $25x^2 - 36y^2 - 100x - 72y - 836 = 0$

   c) $9x^2 - 16y^2 + 54x + 32y - 79 = 0$

   d) $16y^2 - 9x^2 + 96y + 36x - 36 = 0$

2.5.5 Identificando elementos e equações de curvas

1. No exercício abaixo, são dadas equações de parábolas, elipses e hipérboles e é dito em quantas unidades para cima ou para baixo e para direita ou para esquerda cada uma foi transladada. Determine a equação das novas cônicas e determine o novo centro, foco(s), vértices, diretriz (parábola) e assíntotas (hipérbole):

   a) $y^2 = 4x$ para a esquerda 2, para baixo 3.

   b) $x^2 = 8y$ para a direita 1, para baixo 7.

   c) $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ para a esquerda 2, para baixo 1.

   d) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ para a direita 2, para cima 3.

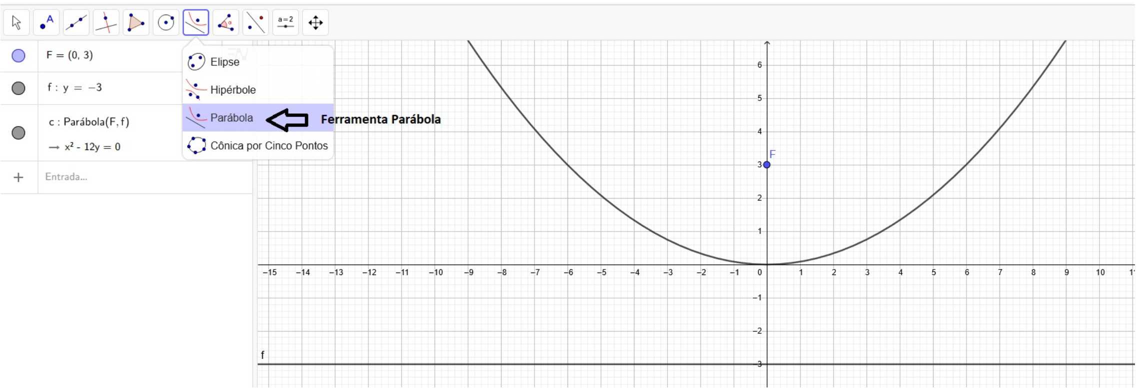
   e) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$ para a direita 2, para cima 2.

   f) $y^2 - x^2 = 1$ para a esquerda 1, para baixo 1.

2.5.6 Exercícios com o GeoGebra

1. Siga as instruções e complete o quadro. Para essa atividade, você pode acessar www.geogebra.org e usar o aplicativo GeoGebra Clássico online ou fazer o download de uma de suas versões. No aplicativo online, no canto esquerdo da tela, digite no campo de entrada as coordenadas do foco da parábola, $F = (0, 3)$ (usar letra maiúscula, assim o aplicativo entende que deve marcar um ponto de coordenadas (0,3)), depois selecione enter. Agora, vamos inserir a reta diretriz, no campo de entrada digite $y = -3$ e tecle enter. Usando a ferramenta parábola, selecionamos o foco e a reta diretriz, o aplicativo apresenta à curva, conforme a Figura 78. Repetir esses passos e preencher a Tabela 1 abaixo.

Figura 78. Aplicativo online Geometria do GeoGebra



Fonte: os autores

Tabela 1. Parábola

Foco	Diretriz	Vértice	Eixo de simetria	Abertura da parábola	Equação
$F(0,3)$	$y = -3$				
$F(3,0)$	$y = 3$				
$F(2,3)$	$y = -3$				
$F(-2,3)$	$x = 2$				
$F(-2,3)$	$x = -6$				

Fonte: os autores

2. Abra o aplicativo do GeoGebra Clássico online, selecione a ferramenta ponto e escolha dois pontos distintos. Após, selecione a ferramenta elipse, selecione os dois pontos escolhidos e depois um terceiro ponto que pertence à curva de forma que a elipse seja mais achatada. O aplicativo apresentará a curva, a

partir dela, identifique o centro da curva, seus eixos maior e menor e a equação reduzida.

3. Usando o aplicativo GeoGebra Clássico online, no campo de entrada, digite $C = (0,0)$, será o centro de uma circunferência. Observe que o ponto ficará na cor azul, de forma que poderemos movê-lo posteriormente. Usando a ferramenta Círculo, dados centro e um de seus pontos, selecione o centro C e o ponto $(2,3)$ que pertence à circunferência, observe que o aplicativo nomeia o ponto de A. Observe o gráfico e preencha a tabela. Para os próximos itens, com o botão direito do mouse, movimente o centro e o ponto da curva para os pontos indicados, observe o gráfico e complete a Tabela 2 abaixo.

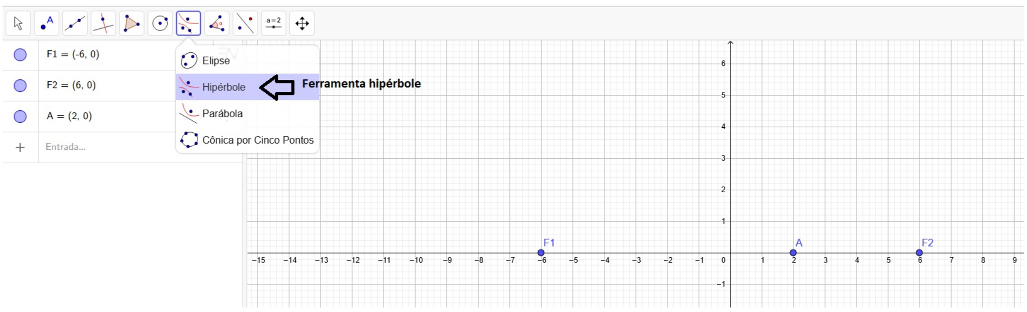
Tabela 2. Circunferência

Centro	Ponto na circunferência	Equação
$C(0,0)$	$(2,3)$	
$C(-3,-2)$	$(2,3)$	
$C(-4,3)$	$(-4,0)$	

Fonte: os autores

4. Abra o aplicativo do GeoGebra Clássico online e digite, no campo de entrada, os seguintes pontos $F1 = (-6,0)$ e $F2 = (6,0)$, o aplicativo mostrará, na janela de visualização, os dois pontos. Agora digite, $A = (2,0)$. Usando a ferramenta hipérbole, selecione os focos $F1$ e $F2$ e depois o ponto A, conforme a Figura 79 e responda as seguintes questões:

Figura 79. Pontos elementares para construção da hipérbole



Fonte: os autores

- Qual o eixo real ou transverso da hipérbole?
- Quais as coordenadas do outro vértice simétrico ao ponto A?
- Qual o tamanho do eixo real e do eixo focal da hipérbole?

- Escreva a equação da hipérbole, observe que o aplicativo apresenta a equação na janela à esquerda da tela, a equação está na forma padrão? Caso não esteja, reescreva a equação na forma reduzida padrão.

Gabarito

Parábola

1. a) $F(-2,0)$, reta diretriz: $x=2$, Equações paramétricas: $y=t, x=-\frac{t^2}{8}$

   b) $F(1,0)$, reta diretriz: $x=-1$, Equações paramétricas: $y=t, x=\frac{t^2}{4}$

   c) $F(0,\frac{5}{4})$, reta diretriz: $y=-\frac{5}{4}$, Equações paramétricas: $x=t, y=\frac{t^2}{5}$

2. a) $y^2=20x$

   b) $x^2-8y=0$

   c) $x^2=-12y$

3. $x^2=-y$

4. $y^2=36x$, $x=-9$ é a reta diretriz

5. $y^2=-16x-2y+47$ ou $(y+1)^2=-16(x-3)$

6. $(x+4)^2=12(y-2)$.

7. $y^2+8x-4y=20$ ou $(y-2)^2=-8(x-3)$.

8. a) $(y+1)^2=12(x+1)$

   b) $(x+1)^2=-4(y-1)$

   c) $(x-1)^2=20(y+2)$

   d) $(x-2)^2=-\frac{1}{2}y$

Circunferência

1. a) $(x-4)^2+(y+3)^2=25$

   b) $(x+5)^2+(y+12)^2=9$

2. a) $C(3,4), r=4$

   b) $C(2,3), r=2$

3. $(x-3)^2+(y-4)^2=17$

4. $s \cap c : \{(1,1),(-1,-1)\}$

5. $s \cap c : \{(1,-1)\}$

Elipse

1. a) focos: $(\sqrt{7},0),(-\sqrt{7},0)$, vértices: $(4,0),(-4,0),(0,3)(0,-3)$, excentricidade: $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$, equações paramétricas: $x=4\cos(\theta), y=3\,\mathrm{sen}(\theta)$

   b) focos: $(0,\sqrt{12}),(0,-\sqrt{12})$, vértices: $(0,4),(0,-4),(-2,0)(2,0)$, excentricidade: $e=\frac{\sqrt{12}}{4}$, equações paramétricas: $x=2\cos(\theta), y=4\,\mathrm{sen}(\theta)$

   c) focos: $(0,2),(0,-2)$, vértices: $(0,\sqrt{8}),(0,-\sqrt{8})$, $(2,0),(-2,0)$, equações paramétricas: $x=2\cos(\theta)$, $y=\sqrt{8}\,\mathrm{sen}(\theta)$.

2. a) $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{13}=1$

   b) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$

3. $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$

4. focos: $F_1(3,-4)$ e $F_2(3,12)$, vértices: $A_1(3,21)$ e $A_2(3,-13)$

5. a) $\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$

   b) $\dfrac{(x+3)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$

   c) $\dfrac{(x-2)^2}{36}+\dfrac{(y-1)^2}{20}=1$

Hipérbole

1. a) a. focos: $(0,\sqrt{34}),(0,-\sqrt{34})$, vértices: $(0,3),(0,-3)$, excentricidade: $e=\frac{\sqrt{34}}{3}$, equações paramétricas: $x=5\,\mathrm{tg}(\theta), y=3\sec(\theta)$

   b) focos: $(0,\sqrt{12}),(0,-\sqrt{12})$, vértices: $(0,\sqrt{8}),(0,-\sqrt{8})$, equações paramétricas: $x=\sqrt{8}\,\mathrm{tg}(\theta), y=2\sec(\theta)$

   c) focos: $(\sqrt{20},0),(-\sqrt{20},0)$, vértices: $(4,0),(-4,0)$, equações paramétricas: $x=4\sec(\theta), y=2\,\mathrm{tg}(\theta)$.

2. a) $\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{9}=1$ ou $-3x^2+y^2=-3$

   b) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

   c) $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{16}=1$

3. $3x - 2y = 0$ ou $y = \frac{3}{2}x$ e $-3x - 2y = 0$ ou $y = -\frac{3}{2}x$

4. $\dfrac{(y+1)^2}{16} - \dfrac{(x-2)^2}{9} = 1$

5. $C(3,4)$, focos: $F_1(\sqrt{514}+3, 4)$, $F_2(-\sqrt{514}+3, 4)$, vértices: $A_1(18,4)$ e $A_2(-12,4)$

6. a) $\dfrac{(y-3)^2}{64} - \dfrac{(x+5)^2}{36} = 1$

   b) $\dfrac{(x-2)^2}{36} - \dfrac{(y+1)^2}{25} = 1$

   c) $\dfrac{(x+3)^2}{16} - \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$

   d) $\dfrac{(y+3)^2}{9} - \dfrac{(x-2)^2}{16} = 1$

Identificando elementos e equações de curvas

1. a) Parábola: $V(-2,-3), F(-1,-3)$

   b) Parábola: $V(1,-7), F(1,-5)$

   c) Elipse: $C(-2,-1)$, $\dfrac{(x+2)^2}{6} + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$, $F(-2, \sqrt{3}-1)$, $F(-2, -\sqrt{3}-1)$

   d) Elipse: $C(2,3)$, $\dfrac{(x-2)^2}{3} + \dfrac{(y-3)^2}{2} = 1$, $F(3,3)$, $F(1,3)$

   e) Hipérbole: $C(2,2)$, $\dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{(y-2)^2}{5} = 1$

   f) Hipérbole: $C(-1,-1), F(-1,-1+\sqrt{2}), F(-1,-1-\sqrt{2})$

Capítulo 3

GEOMETRIA ANALÍTICA NO ESPAÇO

Objetivos do capítulo

- Localizar pontos no sistema tridimensional a partir de suas coordenadas.
- Calcular a distância entre dois pontos no Espaço Tridimensional.
- Determinar o ponto médio de um segmento em $\mathbb{R}^3$.

Introdução

O espaço tridimensional (espaço) é justamente tudo o que nos envolve e na prática é o local onde podemos nos mover para a frente (ou para trás), para os lados e para cima (ou para baixo). Logo, conhecendo estas direções podemos identificar exatamente a posição relativa que ocupamos. De fato, em nosso cotidiano, somos mais acostumados com objetos tridimensionais do que com qualquer outra figura geométrica. Objetos tridimensionais são aqueles em que é possível medir comprimento, largura e altura (ou profundidade). São exemplos desses objetos, os cubos, pirâmides, prismas, cones, cilindros, esferas etc. Neste capítulo, estudaremos como localizar pontos no espaço tridimensional, o cálculo de distância entre pontos e determinação do ponto médio utilizando coordenadas.

3.1 Sistema de Coordenadas no Espaço Tridimensional

Como vimos no Capítulo 1, para localizar um ponto P no plano cartesiano, associamos o par ordenado (x, y) de coordenadas reais x e y a este ponto.

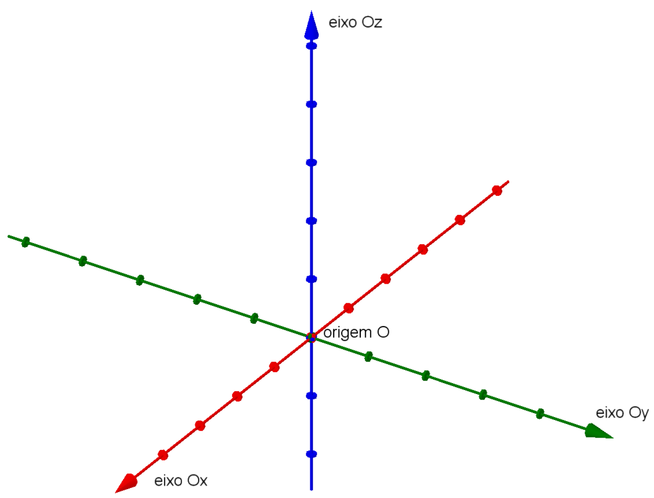
O produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^3$ é o conjunto

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

e sua representação geométrica é o espaço cartesiano determinado pelos três eixos cartesianos Ox, Oy e Oz, ortogonais dois a dois. Portanto, x, y, z formam o sistema cartesiano ortogonal tridimensional $Oxyz$.

Agora vamos estabelecer uma correspondência biunívoca entre pontos no espaço tridimensional e ternas ordenadas de números reais, de forma que cada ponto do espaço fique associado a uma única terna ordenada e vice-versa. Para isso, consideraremos três eixos ortogonais entre si e munidos de seus sistemas de coordenadas, de forma que suas origens coincidam em um ponto O, chamado a origem do sistema e ao qual associamos o ponto $(0, 0, 0)$. Os eixos coordenados serão denominados eixo das abcissas (eixo dos x ou Ox), o eixo das ordenadas (eixo dos y ou Oy) e o eixo das cotas (eixo dos z ou Oz), veja a Figura 80.

Figura 80. Eixos coordenados



Fonte: os autores

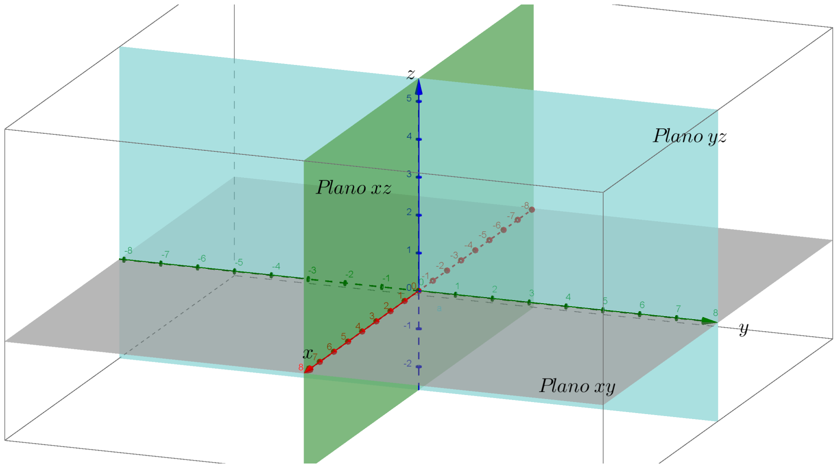
No espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$, cada dupla de eixos determina um *plano coordenado* (Figura 81):

a) o plano xOy ou simplesmente xy;

b) o plano xOz ou xz;

c) o plano yOz ou yz.

Figura 81. Planos coordenados



Fonte: os autores

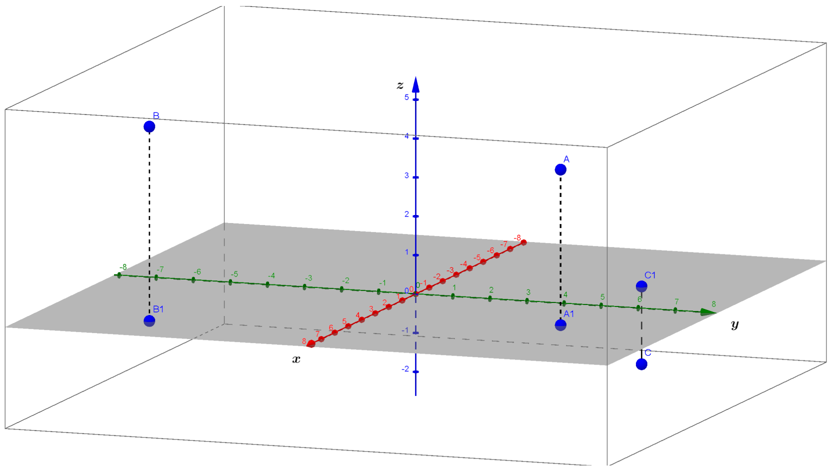
Os três planos dividem o espaço em oito partes, chamadas de octantes:

- Primeiro octante: (x, y, z);
- Segundo octante: $(-x, y, z)$;
- Terceiro octante: $(-x, -y, z)$;
- Quarto octante: $(x, -y, z)$;
- Quinto octante: $(x, y, -z)$;
- Sexto octante: $(-x, y, -z)$;
- Sétimo octante: $(-x, -y, -z)$;
- Oitavo octante: $(x, -y, -z)$.

Para marcarmos um ponto no espaço tridimensional, traçamos pelo ponto P planos paralelos aos planos coordenados formando um paralelepípedo retângulo, a interseção destes planos forma a terna (x, y, z) de números reais, chamadas coordenadas de P.

Na prática, também podemos marcar um ponto $P'(x, y, 0)$ no plano xOy e deslocamos este ponto paralelamente ao eixo z tantas unidades para cima, se z for positivo ou para baixo, caso seja negativo. Na Figura 82, por exemplo, $A_1(3, 5, 0)$ e $A(3, 5, 4)$, marcamos A_1 no plano xOy e deslocamos 4 unidades para cima no sentido do eixo z positivo.

Figura 82. Pontos no espaço tridimensional



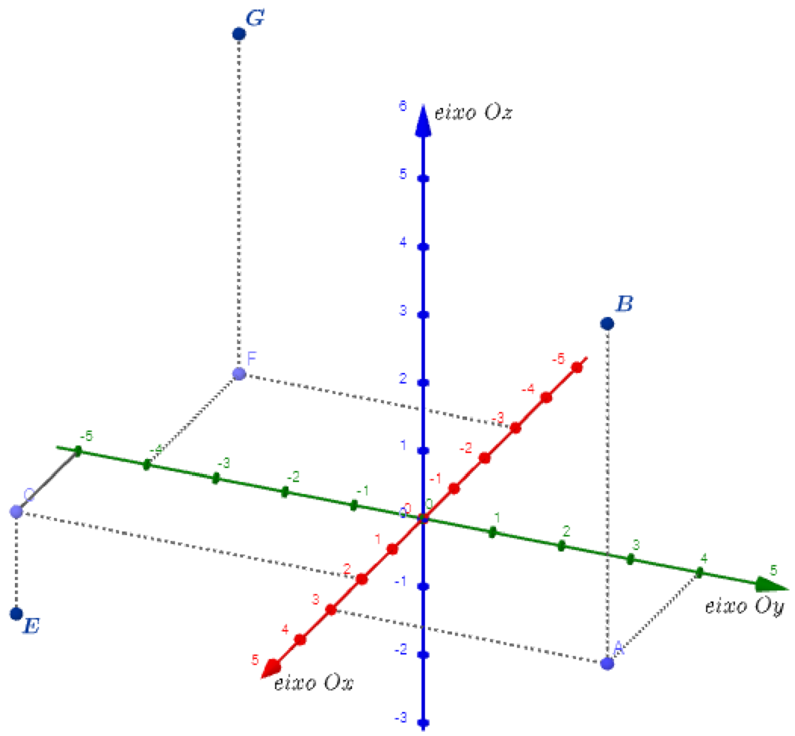
Fonte: os autores

Exemplo 3.1. *Vamos marcar o ponto $B(3, 4, 5)$ no espaço tridimensional. Para isso, imagine uma reta paralela ao eixo Oy passando pelo ponto $(3, 0, 0)$, uma reta paralela ao eixo Ox passando pelo ponto $(0, 4, 0)$, na interseção destas retas, teremos o ponto $(3, 4, 0)$. Finalmente, a partir do ponto $(3, 4, 0)$, avance 5 unidades na direção positiva do e teremos o ponto $B(3, 4, 5)$ no 1º octante (Figura 83).*

Exemplo 3.2. *Vamos marcar o ponto $E\left(2, -5, -\dfrac{3}{2}\right)$ no espaço tridimensional. Para isso, imagine uma reta paralela ao eixo Oy passando pelo ponto $(2, 0, 0)$, uma reta paralela ao eixo Ox passando pelo ponto $(0, -5, 0)$, na interseção destas retas, teremos o ponto $(2, -5, 0)$. Finalmente, a partir do ponto $(2, -5, 0)$, avance $\dfrac{3}{2}$ unidades na direção negativa do eixo Oz e teremos o ponto $E\left(2, -5, -\dfrac{3}{2}\right)$ no 8º octante (Figura 83).*

Exemplo 3.3. *Vamos marcar o ponto $G(-3, -4, 3)$ no espaço tridimensional. Para isso, imagine uma reta paralela ao eixo Oy passando pelo ponto $(-3, 0, 0)$, uma reta paralela ao eixo Ox passando pelo ponto $(0, -4, 0)$, na interseção destas retas,* *teremos o ponto* $(-3, -4, 0)$. *Finalmente, a partir do ponto* $(-3, -4, 0)$, *avance 3 unidades na direção positiva do eixo* Oz *e teremos o ponto* $G(-3, -4, 3)$ *no 3º octante (Figura 83).*

Figura 83. Exemplo de pontos em R^3



Fonte: os autores

Observação 1: Em linguagem de conjuntos, os eixos do sistema tridimensional podem ser representados da seguinte forma:

- eixo $Ox = \{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{R}\}$;
- eixo $Oy = \{(0, y, 0) | y \in \mathbb{R}\}$;
- eixo $Oz = \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\}$.

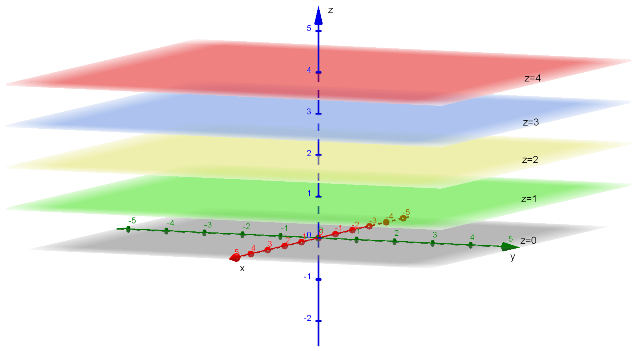
E os planos cartesianos coordenados podem ser representados por:

- plano $xOy = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\}$, ou ainda, plano $xOy : \ z = 0$;

- plano $xOz = \{(x,0,z) | x, z \in \mathbb{R}\}$, ou ainda, plano $xOz : y = 0$;
- plano $yOz = \{(0,y,z) | y, z \in \mathbb{R}\}$, ou ainda, plano $yOz : x = 0$.

Se k é um número real fixado, então o conjunto $\{(x,y,k) | x, y \in \mathbb{R}\}$, ou simplesmente $z = k$, representa, para cada k, um plano paralelo ao plano coordenado $z = 0$. Na Figura 84, ilustramos para $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ e $k = 4$.

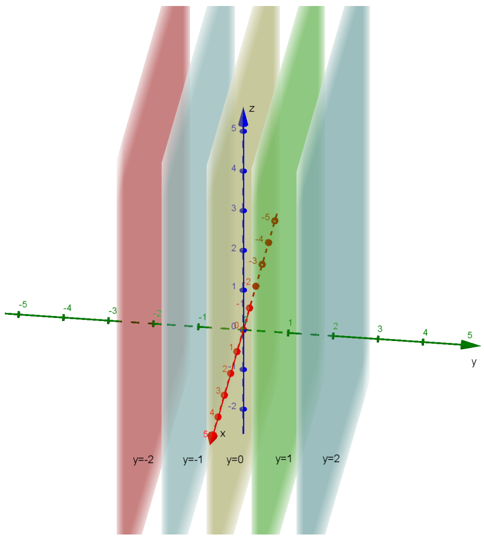
Figura 84. Planos paralelos ao plano coordenado $z = 0$



Fonte: os autores

Se k é um número real fixado, então o conjunto $\{(x,k,z) | x, z \in \mathbb{R}\}$, ou simplesmente $y = k$, representa, para cada k, um plano paralelo ao plano coordenado $y = 0$. Na Figura 85, ilustramos para $y = -2$, $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$ e $y = 2$.

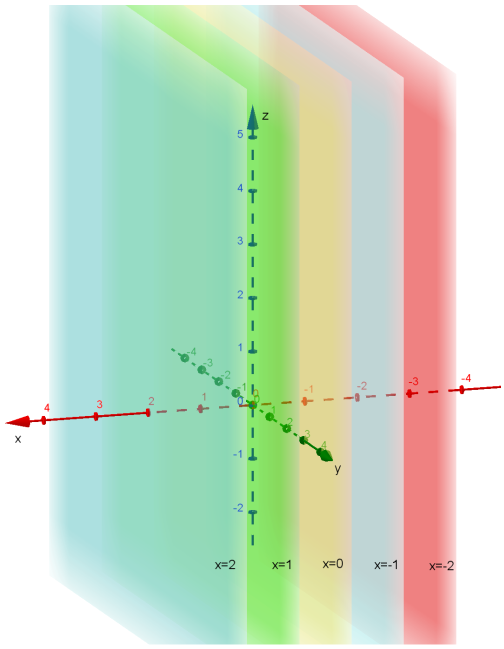
Figura 85. Planos paralelos ao plano coordenado $y = 0$



Fonte: os autores

Se k é um número real fixado, então o conjunto $\{(k, y, z)|y, z \in \mathbb{R}\}$, ou simplesmente $x = k$, representa, para cada k, um plano paralelo ao plano coordenado $x = 0$. Na Figura 86, ilustramos para $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$.

Figura 86. Planos paralelos ao plano coordenado $x = 0$



Fonte: os autores

3.1.1 Distância entre dois pontos no Espaço Tridimensional

A distância entre dois pontos no espaço tridimensional segue o mesmo fundamento da distância entre dois pontos no plano, agora com uma dimensão a mais.

Para determinarmos a distância entre dois pontos A e B ou equivalentemente, o comprimento de um segmento $\overline{AB}$ em $\mathbb{R}^3$, basta utilizarmos o teorema de Pitágoras.

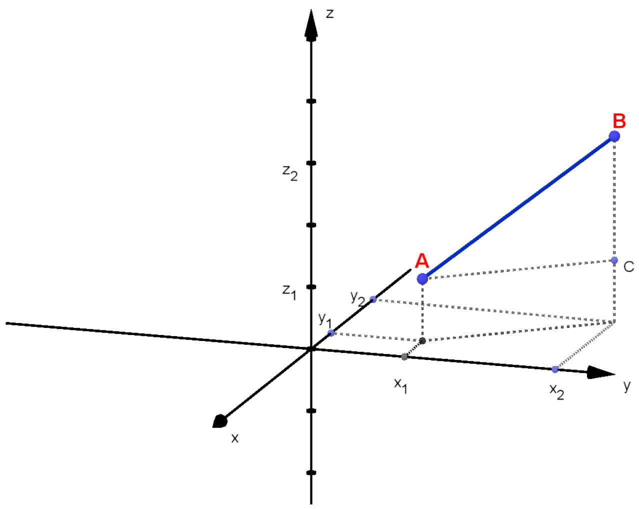
Observe na Figura 87 que o segmento $\overline{AB}$ é a hipotenusa do triângulo retângulo ABC, assim se considerarmos as coordenadas $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ e aplicarmos o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, obtemos:

$$\begin{aligned} |\overline{AB}|^2 &= |\overline{AC}|^2 + |\overline{BC}|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \end{aligned}$$

Portanto, a distância entre os pontos A e B é dada por:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Figura 87. Distância em $\mathbb{R}^3$



Fonte: os autores

Exemplo 3.4. *A distância entre os pontos $P(-3,6,-2)$ e $Q(-7,4,-5)$ é*

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(-7-(-3))^2 + (4-6)^2 + (-5-(-2))^2} = \sqrt{29}$$

unidades de comprimento (u.c).

3.1.2 Ponto Médio no Espaço Tridimensional

Consideremos dois pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, y_2)$ no espaço tridimensional. O ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é o ponto $M(x,y,z)$ tal que $|\overline{AM}| = |\overline{MB}|$. Logo,

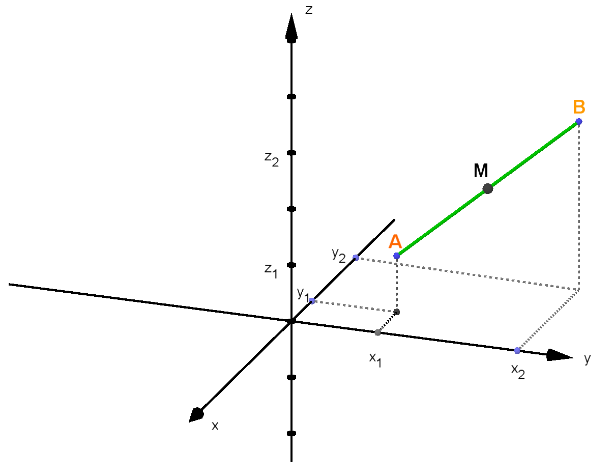
$$x = \frac{(x_1 + x_2)}{2}, \qquad y = \frac{(y_1 + y_2)}{2} \qquad \text{e} \qquad z = \frac{(z_1 + z_2)}{2}.$$

Portanto, o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

Um exemplo pode ser visto na Figura 88.

Figura 88. Ponto médio em $\mathbb{R}^3$

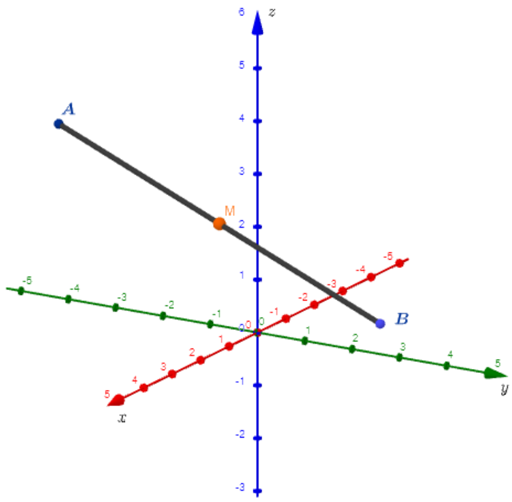


Fonte: os autores

Exemplo 3.5. *Dados os pontos $A = (2, -3, 4)$ e $B = (4, 5, 2)$, calcule o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.*

Solução: M é o ponto médio entre A e B, então $M = \left(\dfrac{2+4}{2}, \dfrac{-3+5}{2}, \dfrac{4+2}{2}\right) =$ $(3, 1, 3)$. Veja a Figura 89.

Figura 89. Exemplo Ponto médio em $\mathbb{R}^3$



Fonte: os autores

Exemplo 3.6. *Determine o comprimento do segmento* $\overline{AB}$*, onde* A *e* B *são os pontos do Exemplo 3.5.*

Solução: O comprimento do segmento $|\overline{AB}|$ é igual à distância entre os pontos A e B, logo

$$\begin{aligned} |\overline{AB}| &= \sqrt{(4-2)^2 + (5-(-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{2^2 + 8^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{4+64+4} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Agora chegou o momento de verificar o seu aprendizado, tente resolver os seguintes exercícios.

3.1.3 Agora tente resolver!

1. No aplicativo do GeoGebra, marque os pares de pontos indicados e, em seguida, determine: I. a distância entre os pontos e II. ponto médio do segmento que une cada par de pontos.
   a) $A(4,-2,5)$, $B(1,2,-1)$
   b) $A(-3,4,0)$, $B(5,1,6)$
   c) $A(-2,-3,-4)$, $B(0,1,-3)$
2. Traçar os triângulos de vértices:
   a) $A(3,5,5), B(5,7,0), C(0,7,3)$
   b) $A(6,-5,4), B(2,-2,5), C(5,-4,0)$

3.2 Exercícios

1. Representar cada um dos pontos dados a seguir em $\mathbb{R}^3$ e identificar o octante ou plano coordenado a que pertencem.
   a) $A(4,-2,5)$
   b) $B(7,-3,-6)$
   c) $C(-5,1,4)$
   d) $D(0,2,8)$
   e) $E(-4,-9,3)$
   f) $F(6,0,-2)$

2. Identificar e representar os seguintes conjuntos de pontos em $\mathbb{R}^3$.

    a) $A = \{(x, 3, z)|x, z \in \mathbb{R}\}$

    b) $B = \{(-2, y, z)|y, z \in \mathbb{R}\}$

    c) $C = \{(x, y, 4)|x, y \in \mathbb{R}\}$

    d) $D = \{(5, -3, z)|z \in \mathbb{R}\}$

    e) $E = \{(7, y, 4)|y \in \mathbb{R}\}$

    f) $F = \{(x, -6, 2)|x \in \mathbb{R}\}$

3. Três vértices de um paralelogramo em $\mathbb{R}^3$ são $A(4, 2, -1)$, $B(1, 1, 3)$ e $C(2, 3, 4)$. Determine as coordenadas do quarto vértice D.

4. Dados os pontos $A(6, 1, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 5, 0)$, $D(6, 5, 0)$, $E(3, 2, 4)$, $F(3, 6, 4)$, $G(-2, 2, 4)$ e $H(-2, 6, 4)$ em $\mathbb{R}^3$.

    a) Represente o prisma retangular $ABCDEFGH$.

    b) Determine o comprimento do segmento $\overline{AE}$ e do segmento $\overline{AG}$.

    c) Determine os pontos M e N médios dos segmentos $\overline{DF}$ e $\overline{BH}$ respectivamente.

5. Dados $A(4, -3, 0)$, $B(1, -2, 0)$ e $C(3, -1, 0)$ $D(1, -3, 4)$, vértices de uma pirâmide $ABCD$ em $\mathbb{R}^3$.

    a) Determine os pontos M, N e P médios dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ respectivamente.

    b) Determine o comprimento de cada uma das medianas do triângulo ABC.

Gabarito:

1. a) $4^{\underline{o}}$ octante

    b) $8^{\underline{o}}$ octante

    c) $2^{\underline{o}}$ octante

    d) plano yOz

    e) $3^{\underline{o}}$ octante

    f) plano xOz

2. a) plano $y = 3$

   b) plano $x = -2$

   c) plano $z = 4$

   d) reta paralela ao eixo Oz passando por $x = 5$ e $y = -3$

   e) reta paralela ao eixo Oy passando por $x = 7$ e $z = 4$

   f) reta paralela ao eixo Ox passando por $y = -6$ e $z = 2$

3. $D(5, 4, 0)$

4. b) segmento $\overline{AE}$ mede $5,1$ u.c. e o segmento $\overline{AG}$ mede $10,25$ u.c.

   c) $M = \left(\frac{9}{2}, \frac{11}{2}, 2\right)$ e $N = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2\right)$

5. a) $M = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, 0\right)$, $N = \left(\frac{7}{2}, -2, 0\right)$ e $P = \left(2, -\frac{3}{2}, 0\right)$

   b) a mediana relativa ao vértice A mede $2,5$ u.c., a mediana relativa ao vértice B mede $2,5$ u.c. e a mediana relativa ao vértice C mede $1,58$ u.c.

Capítulo 4

SUPERFÍCIES

Objetivos do capítulo

- Conhecer as equações geral e reduzidas das superfícies.
- Associar o gráfico de uma superfície à sua equação reduzida.
- Fazer o esboço da superfície.
- Identificar os traços de uma superfície.

Introdução

Uma superfície é, em geral, o lugar geométrico dos pontos do espaço que satisfazem uma condição dada. Assim, o conjunto dos pontos $P(x, y, z)$, que estão a k unidades da origem, determinam uma superfície. Neste capítulo, vamos estudar as superfícies quádricas (centradas e não centradas na origem do sistema tridimensional), superfícies cilíndricas e superfícies cônicas.

4.1 Superfícies Quádricas

O nome quádricas é designado para algumas superfícies de $\mathbb{R}^3$, que podem ser consideradas a versão tridimensional das cônicas. Faremos uma breve descrição das principais superfícies quádricas a partir de suas equações reduzidas, que nos fornecem informações geométricas para esboçar o gráfico de cada uma das superfícies.

Uma superfície quádrica é o conjunto dos pontos do espaço euclidiano que satisfazem uma equação do segundo grau nas três variáveis x, y e z:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0, \qquad (4.1)$$

onde pelo menos um dos coeficientes a , b, c, d, e ou f é diferente de zero. Se a superfície representada pela equação (4.1) for cortada pelos planos coordenados ou por planos paralelos a eles, a curva de interseção será uma cônica.

A interseção de uma superfície com um plano é chamada **traço** da superfície no plano.

A equação (4.1) permite conhecer propriedades geométricas das quádricas correspondentes e esboçá-las com facilidade. Muito útil são as informações que pudermos obter a respeito das simetrias da quádrica em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem do sistema de coordenadas.

Uma superfície é simétrica, por exemplo, em relação ao plano xOy se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ dessa superfície existir um ponto, $P(x, y, -z)$ pertencente à superfície. A equação não se altera pela substituição de z por $-z$. Portanto, a superfície cuja equação cartesiana não se altera quando trocamos o sinal de uma das variáveis é simétrica em relação ao plano das outras duas variáveis.

Em particular, se a equação cartesiana de uma superfície só contém expoentes pares para a variável z, então essa superfície é simétrica em relação ao plano xOy. Dessa forma, um conjunto S é simétrico com respeito:

- ao plano xOy quando $(x, y, z) \in S \iff (x, y, -z) \in S$;
- ao plano xOz quando $(x, y, z) \in S \iff (x, -y, z) \in S$;
- ao plano yOz quando $(x, y, z) \in S \iff (-x, y, z) \in S$;
- à origem quando $(x, y, z) \in S \iff (-x, -y, -z) \in S$.

Dessa forma, será possível observar que, por exemplo, se a equação da superfície quádrica for $ax^2 + by^2 + cz^2 + j = 0$, isto é, se as incógnitas x, y e z comparecem apenas com expoentes pares, então essa superfície será totalmente simétrica em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

Com relação à equação, através de mudanças de coordenadas a equação de segundo grau nas três variáveis pode ser transformada, em certas formas padronizadas e, então, é possível classificarmos as superfícies quádricas.

A equação (4.1) pode-se reduzir a uma das formas a saber,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D, \qquad (4.2)$$

$$Ax^2 + By^2 + Rz = 0, \tag{4.3}$$

$$Ax^2 + Ry + Cz^2 = 0, \tag{4.4}$$

$$Rx + By^2 + Cz^2 = 0. \tag{4.5}$$

As superfícies que correspondem à equação (4.2) são simétricas em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e ao centro de simetria (centro da superfície). E, as superfícies de equação (4.3), (4.4) e (4.5) possuem dois planos de simetria, um eixo de simetria e não possuem centro de simetria. Desse modo, as superfícies quádricas podem ser classificadas como quádricas centradas e quádricas não centradas.

4.2 Superfícies Quádricas Centradas

Caso nenhum dos coeficientes da equação (4.2) for nulo, ela pode ser escrita sob uma das formas

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{4.6}$$

denominadas como forma canônica de uma superfície quádrica centrada. De acordo com os sinais dos termos, são classificadas em elipsoide, hiperboloide de uma folha e hiperboloide de duas folhas. Na equação (4.6), os coeficientes não podem ser todos nulos, pois nesse caso não existiria lugar geométrico.

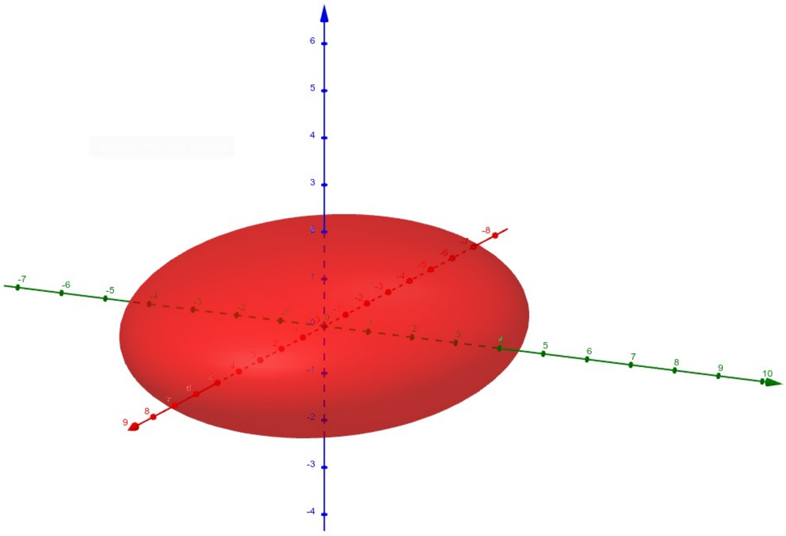
4.2.1 Elipsoide

Chamamos uma superfície quádrica de elipsoide se existem números reais positivos a, b, c, pelo menos dois deles distintos, e um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual a quádrica pode ser descrita pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{4.7}$$

A equação (4.7) mostra que a superfície é totalmente simétrica em relação ao sistema de coordenadas. Os números reais positivos a, b, c representam as medidas dos semieixos da superfície, conforme a Figura 90.

Figura 90. Elipsoide



Fonte: os autores

4.2.2 Estudo da Superfície

Para esboçar o gráfico da superfície, vamos fazer uma análise através da equação (4.7), examinando suas interseções com planos coordenados, planos paralelos aos planos coordenados e com os eixos de coordenados.

- Intersecções com os eixos coordenados: no caso do elipsoide, são seis pontos de interseção da superfície S com os eixos:
  - ✓ com o eixo Ox: $y = z = 0 \to Ox \cap S : (a, 0, 0)$ e $(-a, 0, 0)$;
  - ✓ com o eixo Oy: $x = z = 0 \to Oy \cap S : (0, b, 0)$ e $(0, -b, 0)$;
  - ✓ com o eixo Oz: $x = y = 0 \to Oz \cap S : (0, 0, c)$ e $(0, 0, -c)$.
- **Traços nos planos coordenados**: são interseções da superfície S com os respectivos planos coordenados em que obtemos curvas cônicas. No caso do elipsoide, os traços são elipses nos respectivos planos:
  - ✓ interseção da superfície S com o plano xOy $(z = 0)$ temos a elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

  - ✓ interseção da superfície S com o plano xOz $(y = 0)$ temos a elipse:

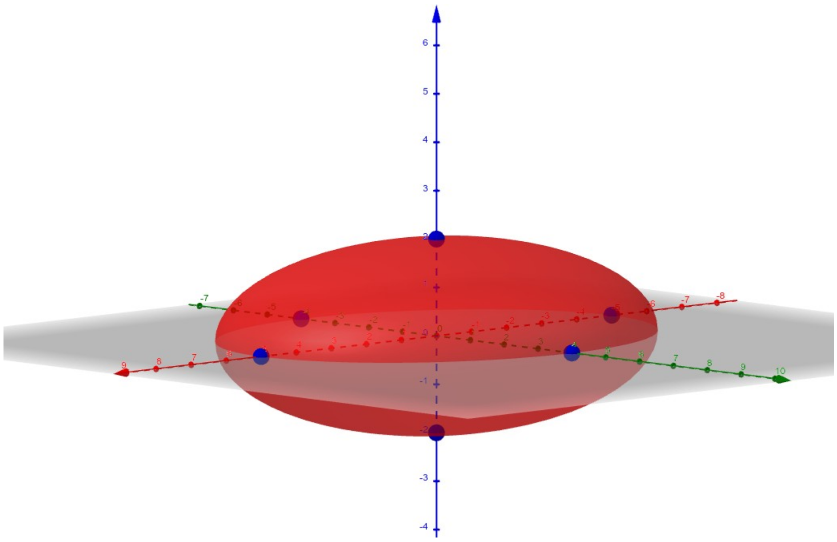
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

✓ interseção da superfície S com o plano yOz $(x = 0)$ temos a elipse:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Exemplo 4.1. *A Figura 91 mostra os seis vértices do elipsoide, interseção dele com os eixos coordenados.*

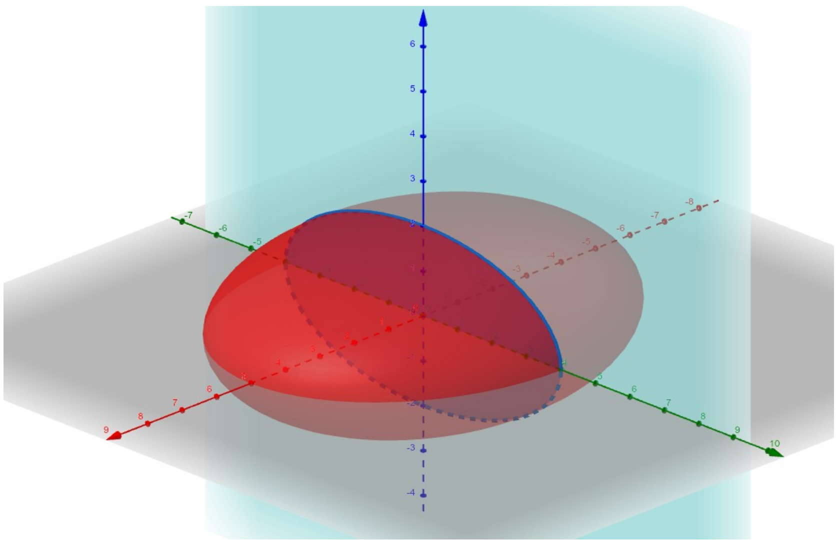
Figura 91. Interseção do elipsoide com os eixos coordenados



Fonte: os autores

Exemplo 4.2. *A Figura 92 apresenta a interseção do elipsoide com o plano yOz.*

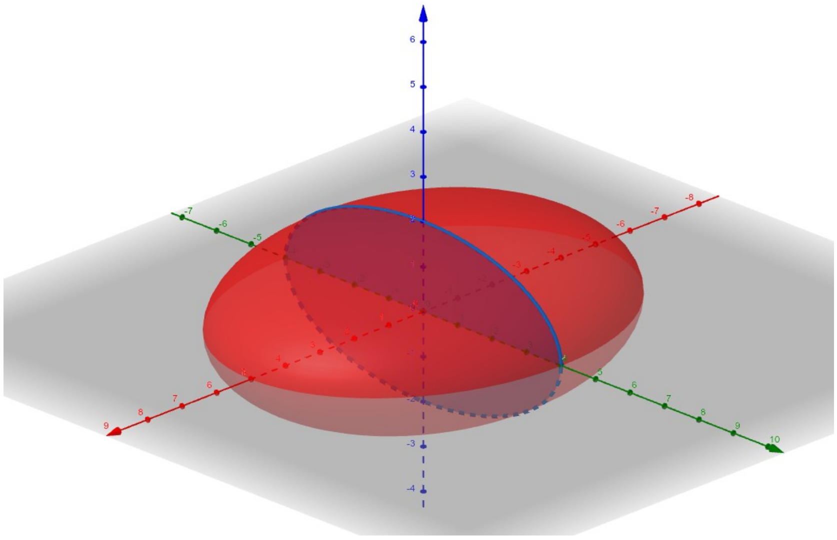
Figura 92. Interseção do elipsoide com o plano yOz



Fonte: os autores

A interseção da superfície com o plano yOz apresenta uma curva, nesse caso uma Elipse no plano yOz, conforme a Figura 93.

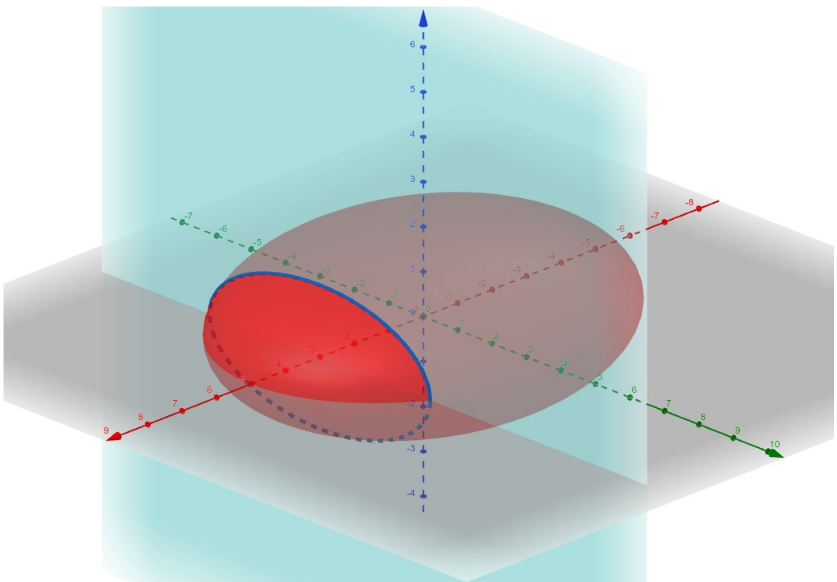
Figura 93. Elipse formada da interseção do plano yOz com a superfície



Fonte: os autores

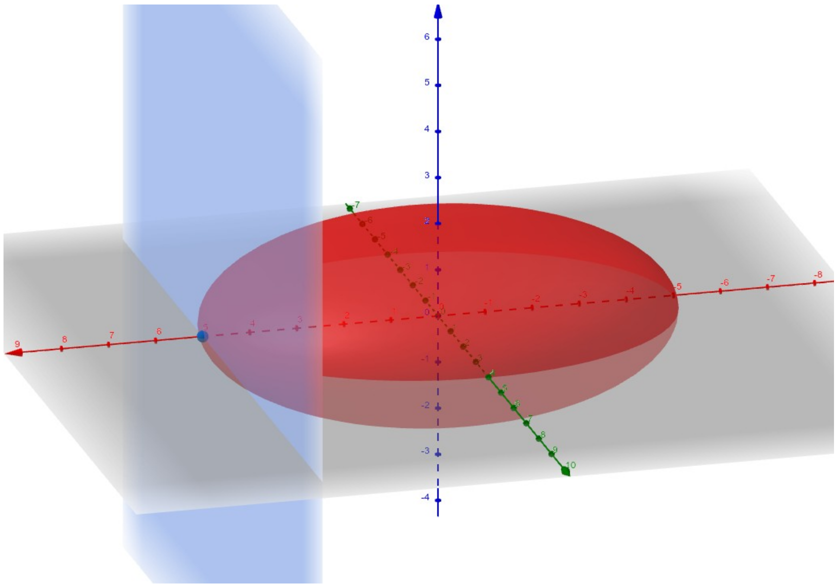
Vamos analisar a interseção da superfície com o plano $\pi : x = k$ paralelo ao plano yOz. Substituindo na equação (4.7) $x = k$, observe que, se $k^2 > a^2$, a interseção será vazia. Será não vazia se, e somente se, $k^2 \leq a^2$, isto é, $-a \leq k \leq a$. Se $k = a$, ela se reduz ao ponto $(a, 0, 0)$ e se $k = -a$, ela se reduz ao ponto $(-a, 0, 0)$. Pela Figura 94, temos o exemplo de um elipsoide interseção com o plano $\pi : x = 3$ paralelo ao plano yOz e na Figura 95 temos o caso em que $k = 5$, então a interseção se reduz ao ponto $(5, 0, 0)$.

Figura 94. Interseção do plano $x = 3$ com a superfície



Fonte: os autores

Figura 95. Interseção do plano $x = 5$ com a superfície

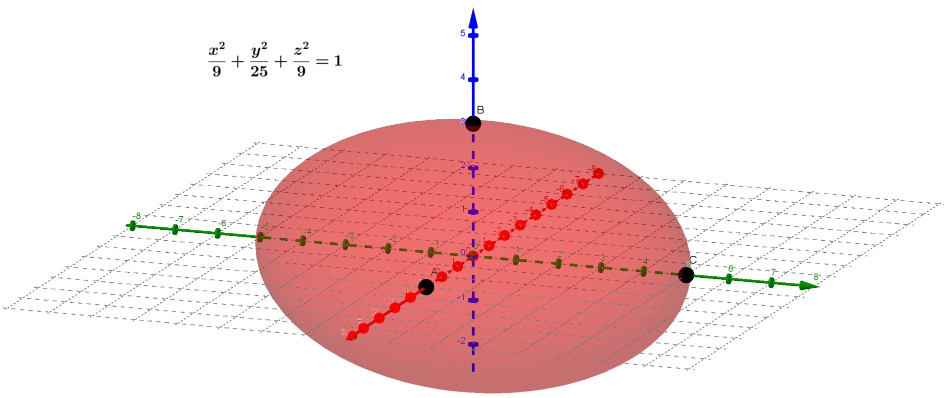


Fonte: os autores

Se pelo menos dois valores a, b, c são iguais, o elipsoide é de **revolução**. O exemplo a seguir apresenta um elipsoide de revolução.

Exemplo 4.3. *O gráfico da Figura 96 mostra um elipsoide de equação* $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{9} = 1$, *no caso em que* $a = c$, *o elipsoide é obtido girando a elipse* $\dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{9} = 1$, $x = 0$ *do plano* yOz *em torno do eixo* Oy.

Figura 96. Elipsoide de Revolução



Fonte: os autores

Pelo exemplo, o traço no plano xOz será uma circunferência de equação $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{9} = 1$ ou $x^2 + z^2 = 9$, para $y = 0$.

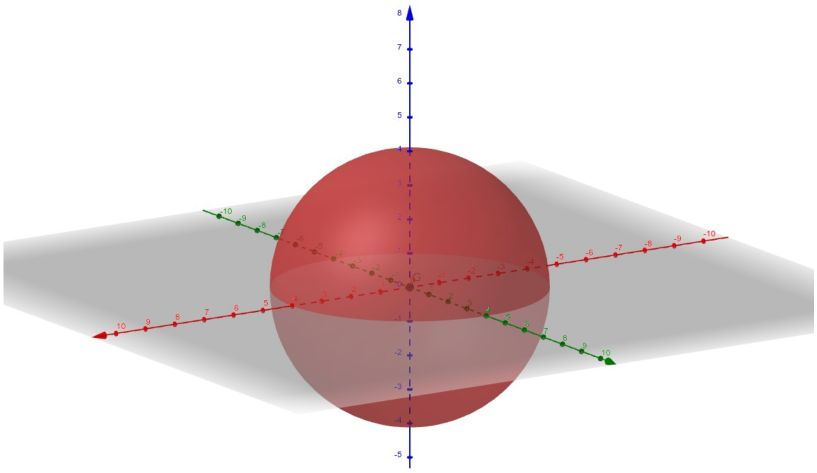
4.2.3 Superfície Esférica ou Esfera

Superfície esférica ou esfera é o lugar geométrico dos pontos do $\mathbb{R}^3$, cuja distância a um ponto fixo (centro) é constante. No caso em que $a = b = c$, a equação (4.7) toma a seguinte forma,

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \tag{4.8}$$

e representa uma **superfície esférica ou esfera** de centro $C(0, 0, 0)$ e raio a, conforme a Figura 97.

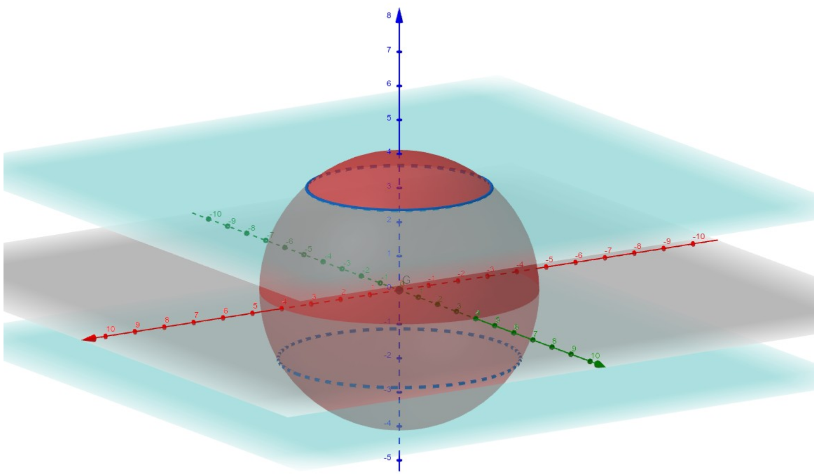
Figura 97. Superfície esférica



Fonte: os autores

Exemplo 4.4. *O gráfico da Figura 98 mostra uma superfície esférica interseção com um plano paralelo ao plano xOy.*

Figura 98. Esfera interseção com plano $z = k$



Fonte: os autores

Exemplo 4.5. *Determine uma equação da superfície esférica de centro* $C(0,0,0)$ *e raio* $r = 5$.

Solução: Pela equação (4.8), temos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Então, sendo o raio $r = 5$, a equação será: $x^2+y^2+z^2 = 5^2$ ou $x^2+y^2+z^2-25 = 0$.

4.2.3.1 Translação de Eixos: Elipsoide e Esfera

Pela translação de eixos, com $C(h,k,l)$, sendo o centro do elipsoide, e seus eixos paralelos aos eixos coordenados temos a equação

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1, \tag{4.9}$$

cuja equação geral é $ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz + h = 0$, com a, b e c números reais positivos. E, na equação da superfície esférica,

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = a^2. \tag{4.10}$$

Desenvolvendo a equação, temos $x^2 + y^2 + z^2 + dx + ey + fz + h = 0$ como sua equação geral.

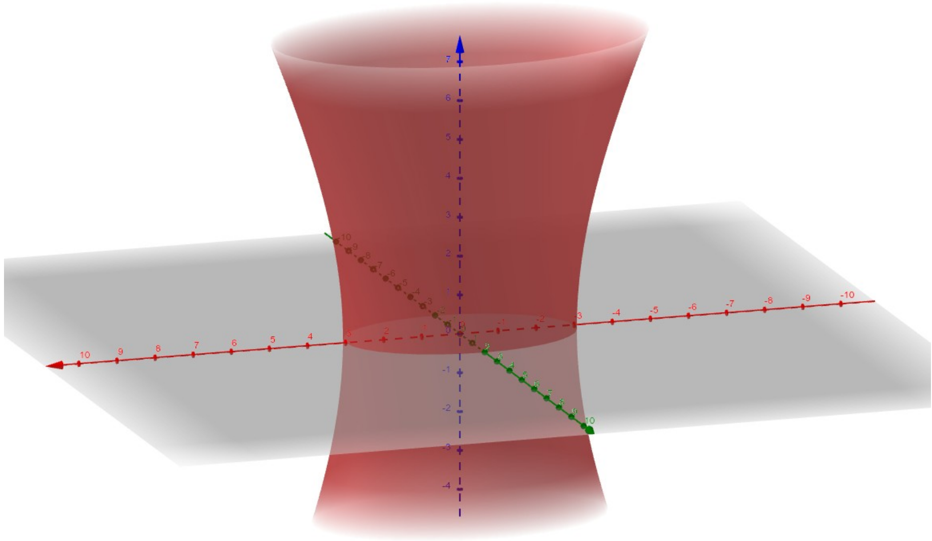
4.2.4 Hiperboloide de uma folha

Chamamos uma superfície quádrica de hiperboloide de uma folha, se existirem números reais a, b e c e um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual a superfície pode ser escrita pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{4.11}$$

ao longo do eixo Oz, conforme a Figura 99. O hiperboloide de uma folha é simétrico em relação ao sistema de coordenadas.

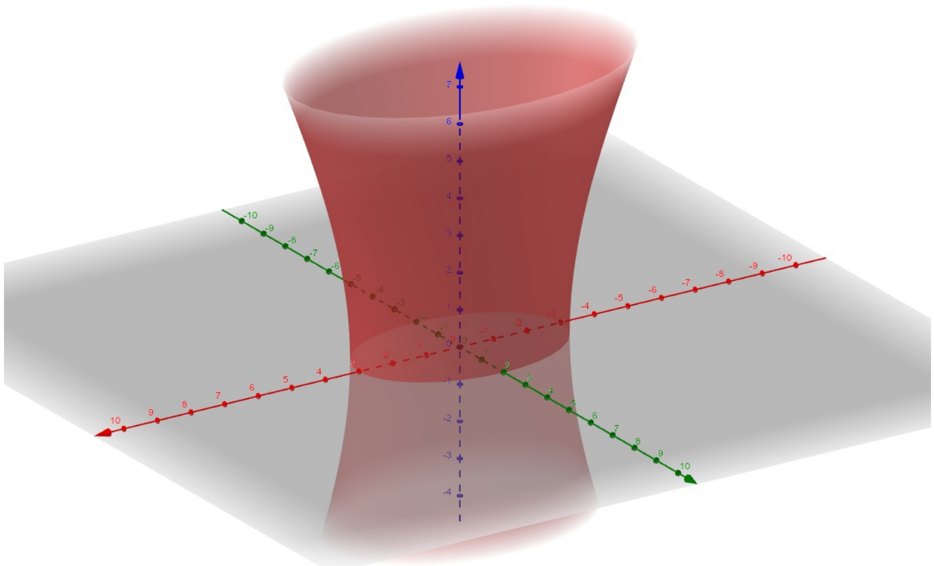
Figura 99. Hiperboloide ao longo do eixo Oz



Fonte: os autores

Exemplo 4.6. *O gráfico mostra um hiperboloide de equação* $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{36} = 1$, *ao longo do eixo* Oz. *Embora a Figura 100 mostre um hiperboloide limitado ao longo do eixo* Oz, *a superfície se prolonga indefinidamente ao longo desse eixo. Mas é possível restringir um valor para* z *em um determinado intervalo.*

Figura 100. Hiperboloide de uma folha



Fonte: os autores

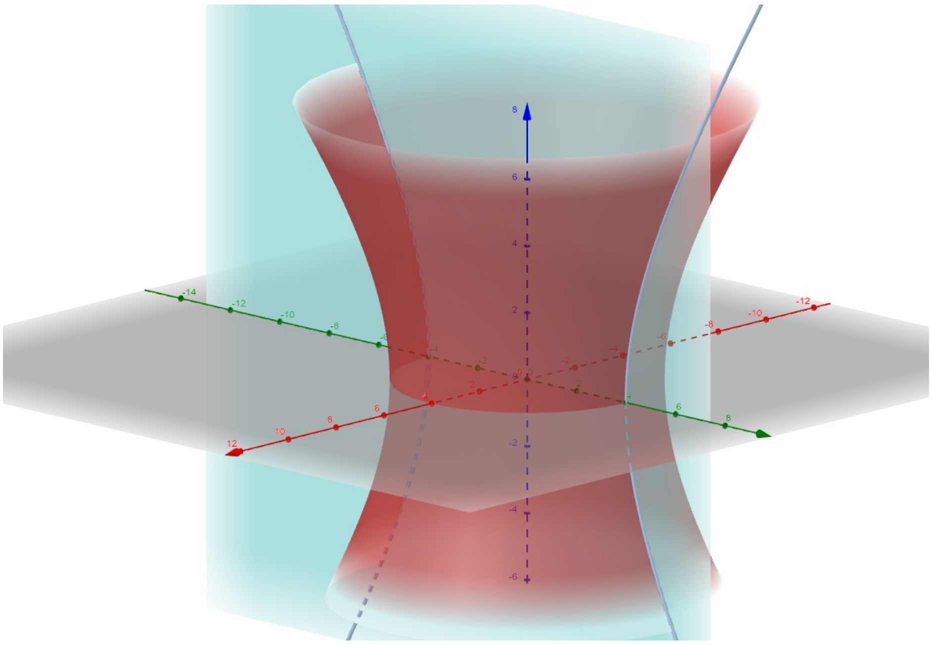
4.2.5 Estudo da Superfície

Para esboçar o gráfico da superfície, vamos fazer uma análise através da equação (4.11), examinando suas interseções com planos coordenados, planos paralelos aos planos coordenados e com os eixos coordenados.

- Intersecções com os eixos coordenados, no caso do hiperboloide de uma folha ao longo do eixo Oz temos:
  - ✓ com o eixo Ox: $y = z = 0 \to Ox \cap S : (a, 0, 0)$ e $(-a, 0, 0)$, pois um ponto $(x, 0, 0)$ pertence a S se, e somente se, $x^2 = a^2$;
  - ✓ com o eixo Oy: $x = z = 0 \to Oy \cap S : (0, b, 0)$ e $(0, -b, 0)$, pois um ponto $(0, y, 0)$ pertence a S se, e somente se, $y^2 = b^2$;
  - ✓ com o eixo Oz: $x = y = 0 \to Oz \cap S$: é um conjunto vazio, pois $z^2 = -c^2$ é o único dos três eixos que não tem ponto comum com o hiperboloide de uma folha, nesse caso.
- **Traços nos planos coordenados**: são as interseções da superfície S com os respectivos planos coordenados:
  - ✓ com o plano xOy: $z = 0 \to \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ é uma elipse para $a \neq b$ ou uma circunferência quando $a = b$;
  - ✓ com o plano xOz: $y = 0 \to \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ é uma hipérbole;
  - ✓ com o plano yOz: $x = 0 \to \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ é uma hipérbole.

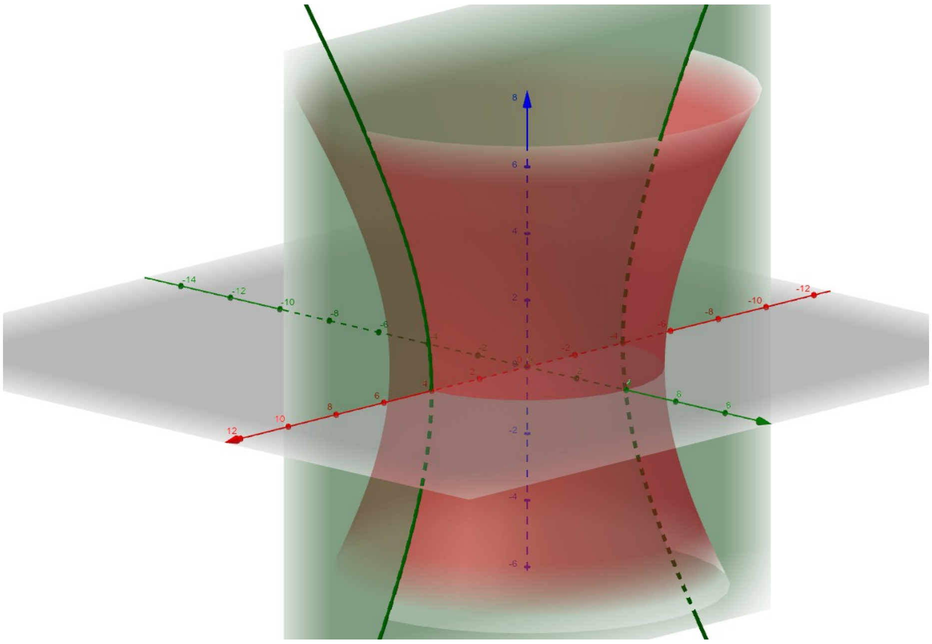
As Figuras 101 e 102 mostram as interseções da superfície com os planos yOz e xOz respectivamente.

Figura 101. Hiperboloide de uma folha interseção com o plano yOz



Fonte: os autores

Figura 102. Hiperboloide de uma folha interseção com o plano xOz

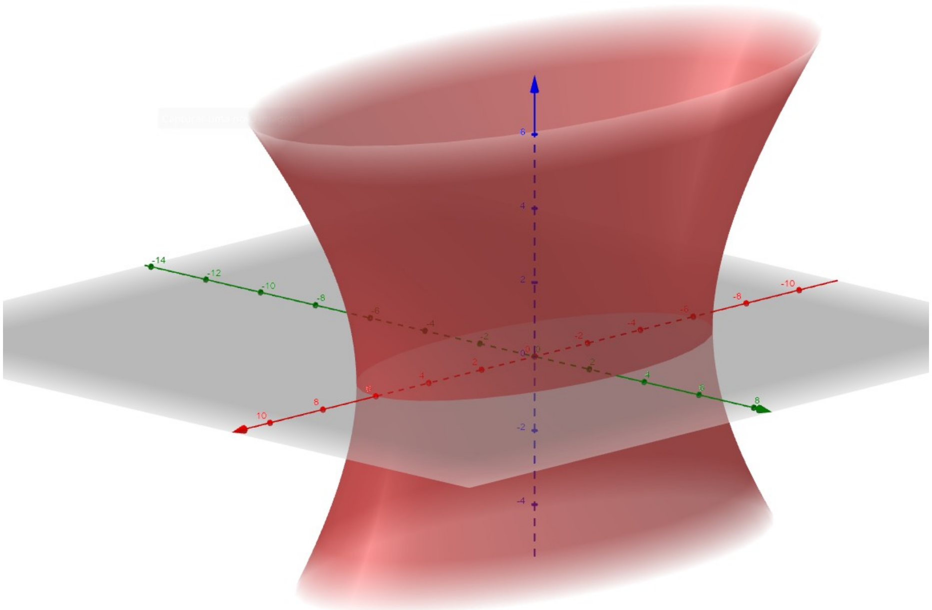


Fonte: os autores

Os hiperboloides de revolução são obtidos por rotações em torno de um de seus eixos. Considere a equação $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, em $x = 0$, a rotação dessa hipérbole em torno do seu eixo Oz resulta no hiperboloide de uma folha ao longo do eixo dos z. Se $a = b$, o traço no plano xOy é uma circunferência.

Exemplo 4.7. *Hiperboloide de uma folha ao longo do eixo dos z de revolução. Equação:* $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{36} = 1$. *Veja a Figura 103.*

Figura 103. Hiperboloide de revolução

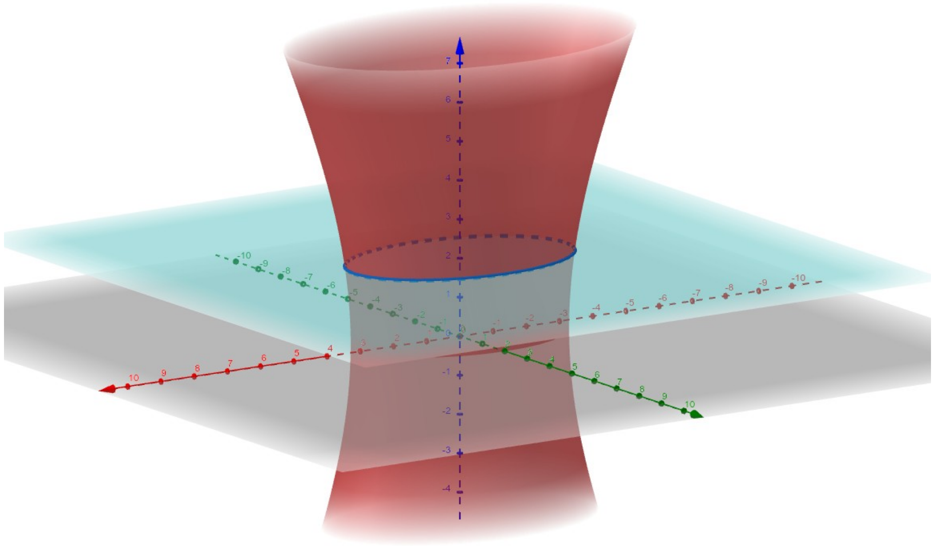


Fonte: os autores

Os traços nos planos $z = k$, paralelos ao plano xOy são elipses, que aumentam de tamanho à medida que estes planos se afastam do plano xOy. Os traços nos planos $y = k$ e $x = k$ são hipérboles.

Exemplo 4.8. *Hiperboloide de uma folha ao longo do eixo dos z, interseção com o plano $z = 2$. Veja Figura 104.*

Figura 104. Hiperboloide de uma folha interseção com plano paralelo ao plano xOy



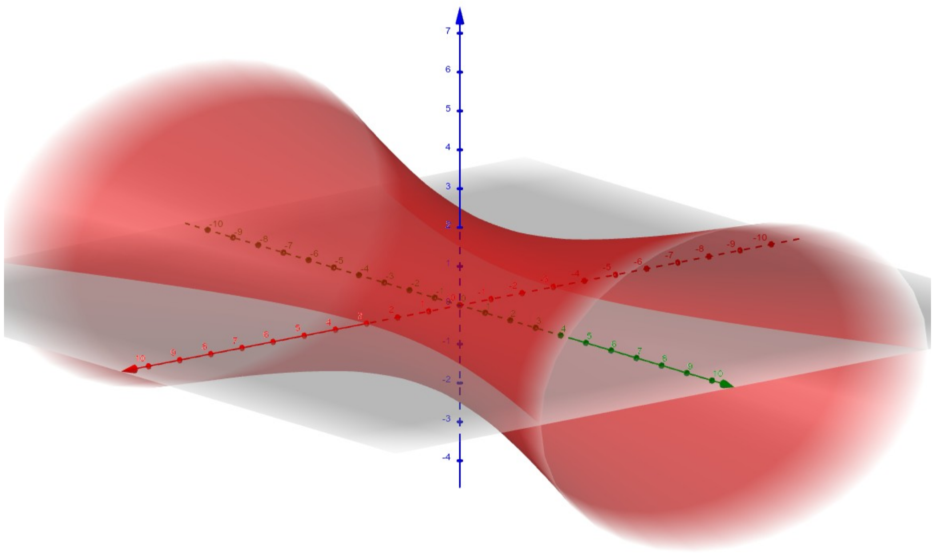
Fonte: os autores

As outras formas para a equação dos hiperboloides de uma folha são:

ao longo do eixo Oy	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$
ao longo do eixo Ox	$-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Exemplo 4.9. *Observe no gráfico da Figura 105 onde temos um hiperboloide de uma folha ao longo do eixo Oy, cuja equação é $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{36} + \dfrac{z^2}{4} = 1$. De forma análoga aos hiperboloides anteriores, aqui a superfície apesar de parecer limitada, ela se prolonga indefinidamente ao longo do eixo Oy.*

Figura 105. Hiperboloide de uma folha ao longo do eixo Oy



Fonte: os autores

4.2.5.1 Translação de Eixos: Hiperboloide de uma folha

Quando o centro da superfície é o ponto $C(h, k, l)$ e seus eixos paralelos aos eixos coordenados, sua equação é dada por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1. \tag{4.12}$$

De forma análoga, para as demais formas da equação dos hiperboloides.

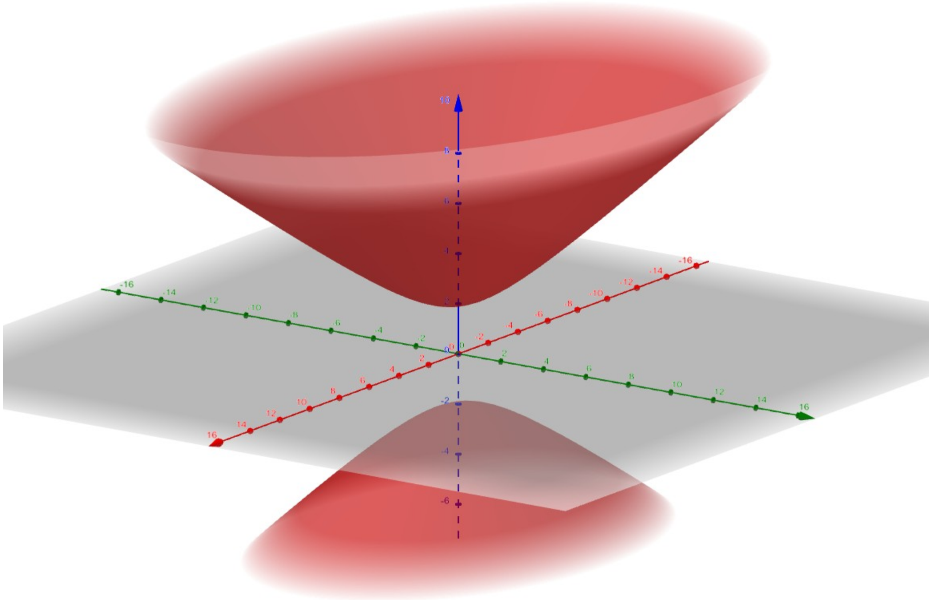
4.2.6 Hiperboloide de duas folhas

Chamamos de hiperboloide de duas folhas, se existirem números reais a, b e c e um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual a superfície pode ser escrita pela equação:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{4.13}$$

A equação (4.13) representa um hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo Oz, conforme a Figura 106. Notemos que apenas um termo do primeiro membro é positivo.

Figura 106. Hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo Oz



Fonte: os autores

4.2.7 Estudo da Superfície

Para esboçar o gráfico da superfície, vamos fazer uma análise através da equação (4.13), examinando suas interseções com planos coordenados, planos paralelos aos planos coordenados e com os eixos coordenados.

- Intersecções com os eixos coordenados, no caso do hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo Oz temos:

  ✓ com o eixo Ox: $y = z = 0 \to Ox \cap S$, é um conjunto vazio, pois $x^2 = -a^2$ não tem ponto comum com o hiperboloide de duas folhas;

  ✓ com o eixo Oy: $x = z = 0 \to Oy \cap S$, é um conjunto vazio, pois $y^2 = -b^2$ não tem ponto comum com o hiperboloide de duas folhas;

  ✓ com o eixo Oz: $x = y = 0 \to Oz \cap S : (0,0,c)$ e $(0,0,-c)$ pois um ponto $(0,0,z)$ pertence a S, se, e somente se $z^2 = c^2$.

- **Traços nos planos coordenados**: são as interseções da superfície S com os respectivos planos coordenados:

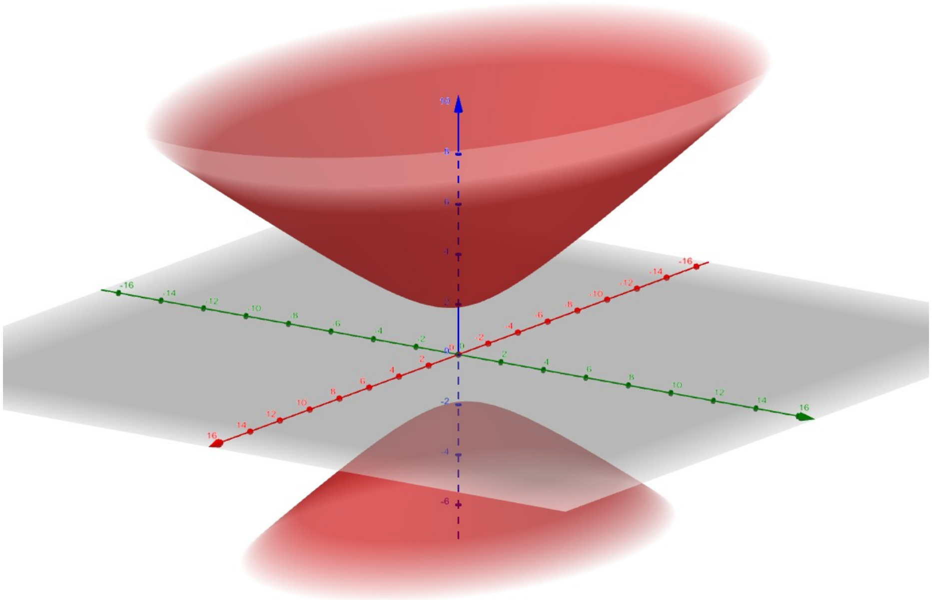
  ✓ com o plano xOy: $z = 0$ não intercepta a superfície, nem qualquer plano $z = k$, onde $|k| < c$. Se $|k| > c$ o traço é uma elipse;

  ✓ com o plano xOz: $y = 0 \to -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ é uma hipérbole;

✓ com o plano yOz: $x = 0 \to -\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ é uma hipérbole.

Exemplo 4.10. *Hiperboloide de duas folhas de equação* $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$. *Veja sua representação na Figura 107.*

Figura 107. Hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo Oz



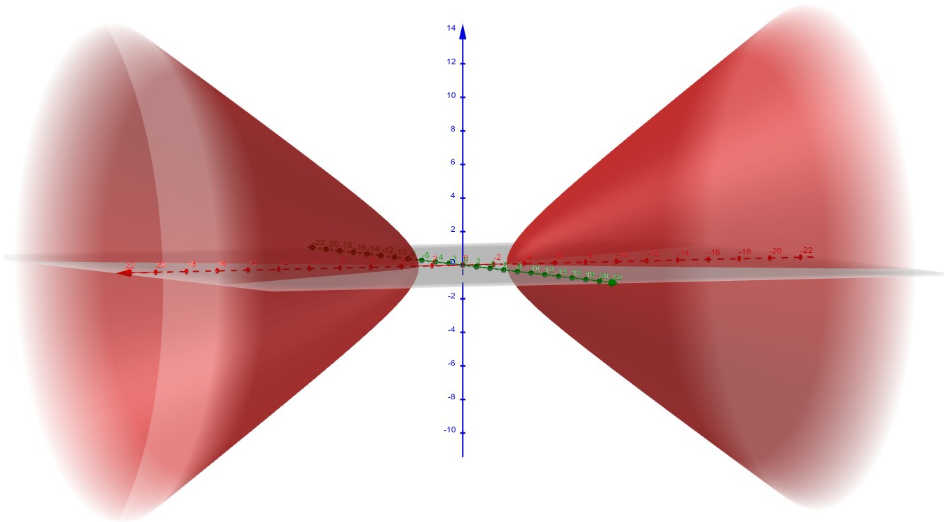
Fonte: os autores

As outras formas para a equação dos hiperboloides de duas folhas são:

ao longo do eixo Oy	$-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$
ao longo do eixo Ox	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

Exemplo 4.11. *Hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo* Ox*, cuja equação é do tipo:* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. *Veja Figura 108.*

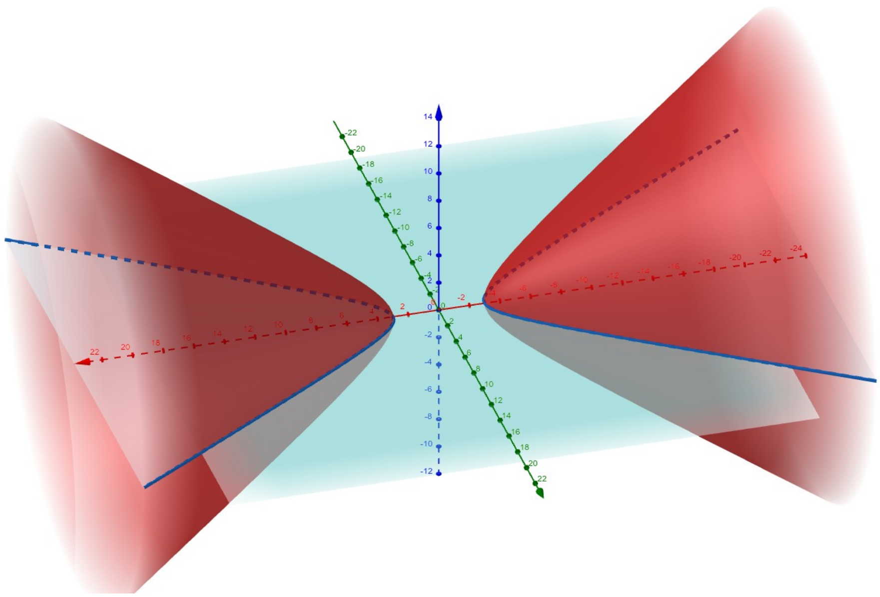
Figura 108. Hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo Ox



Fonte: os autores

Exemplo 4.12. *Hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo Ox interseção com o plano xOy. Veja Figura 109.*

Figura 109. Hiperboloide de duas folhas interseção com plano xOy

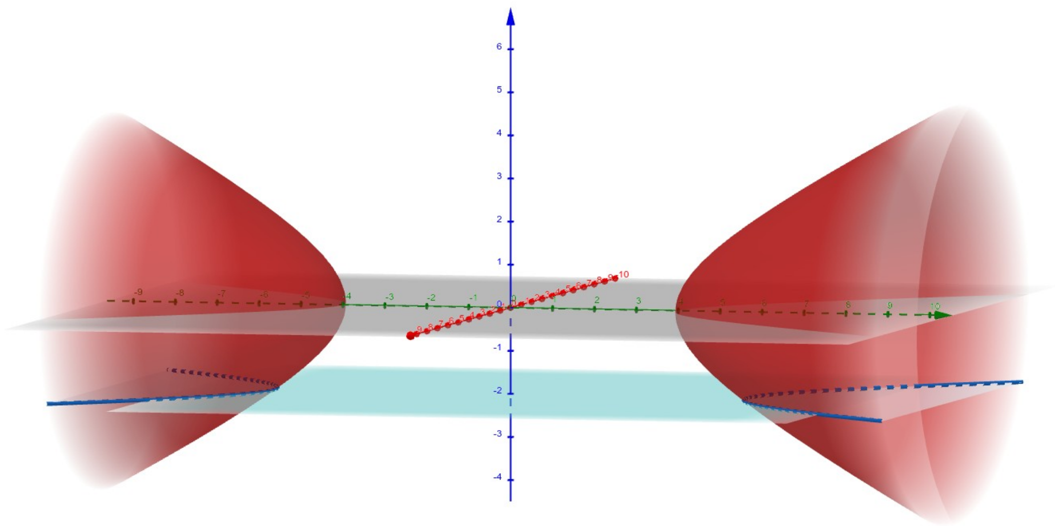


Fonte: os autores

Pela equação (4.13), os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são hipérboles. Quando o hiperboloide estiver ao longo do eixo Ox, temos que os traços nos planos $y = k$ e $z = k$ são hipérboles. E de forma análoga, quando a superfície estiver ao longo do eixo Oy, os traços nos planos $x = k$ e $z = k$ são hipérboles.

Exemplo 4.13. *Hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo Oy, de equação* $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ *interseção com o plano paralelo ao* xOy*. Veja sua representação na Figura 110.*

Figura 110. Interseção do hiperboloide com um plano paralelo ao plano xOy



Fonte: os autores

4.2.7.1 Translação de Eixos: Hiperboloide de duas folhas

Quando o ponto $C(h,k,l)$ é o centro do hiperboloide e seus eixos paralelos aos eixos coordenados, sua equação em uma de suas formas é

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(z-l)^2}{c^2}=1. \tag{4.14}$$

De maneira análoga às demais formas da equação dos hiperboloides.

Agora chegou o momento de verificar o seu aprendizado, tente resolver os seguintes exercícios.

4.2.8 Agora tente resolver!

1. Identifique cada uma das superfícies:

   a) $16x^2+25y^2+20z^2=400$

   b) $x^2+y^2+z^2=25$

c) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{4} = 1$

d) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{2} = 1$

4.3 Superfícies Quádricas não Centradas

As superfícies de equação (4.3), (4.4), (4.5) possuem dois planos de simetria, um eixo de simetria e não possuem centro de simetria e, se os coeficientes dos termos do primeiro termo não forem nulos, elas podem ser escritas como

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz; \ \pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = by; \ \pm\frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = ax. \tag{4.15}$$

As possíveis combinações permitem concluir que apenas dois tipos de superfícies são possíveis. Se os dois termos de segundo grau possuem o mesmo sinal, são classificados como paraboloide elíptico, caso contrário, chamamos de paraboloide hiperbólico.

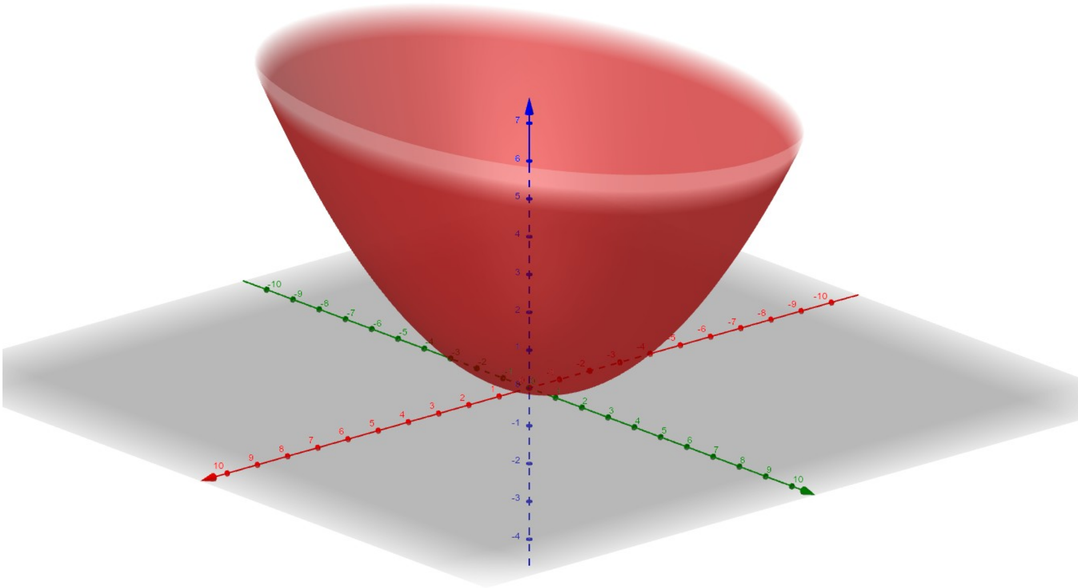
4.3.1 Paraboloide elíptico

Se existem números reais positivos a e b e um sistema ortogonal de coordenadas em relação ao qual uma quádrica seja descrita pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz, \tag{4.16}$$

se $a \neq b$, chamamos de **paraboloide elíptico** e, se $a = b$, é um **paraboloide de rotação** ou **circular**. O paraboloide elíptico da equação (4.16) é simétrico em relação ao plano xOz e ao plano yOz e ao eixo Oz. Portanto, a equação representa um paraboloide ao longo do eixo Oz. Como o eixo Oz é o único dos eixos em relação ao qual a superfície é simétrica, ele é chamado de eixo de simetria. O vértice da superfície é o seu ponto de interseção com o eixo de simetria, nesse caso $(0, 0, 0)$, conforme mostra a Figura 111.

Figura 111. Paraboloide elíptico com eixo de simetria no Oz



Fonte: os autores

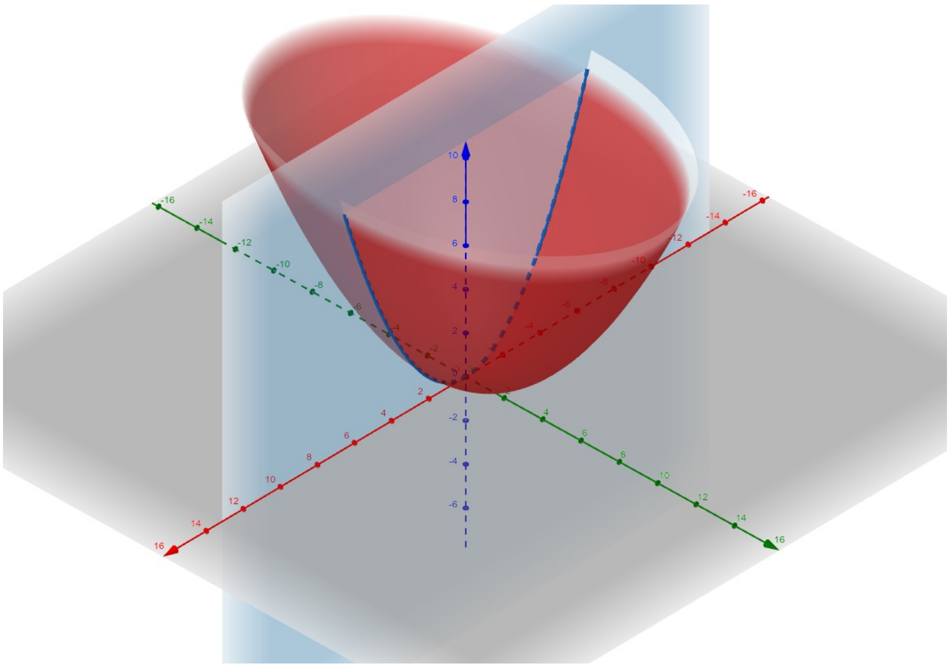
4.3.2 Estudo da Superfície

Para esboçar o gráfico da superfície, vamos fazer uma análise através da equação (4.16), examinando suas interseções com planos coordenados, planos paralelos aos planos coordenados e com os eixos coordenados.

- Intersecções com os eixos coordenados, no caso do paraboloide elíptico ao longo do eixo Oz:
  - ✓ A interseção da superfície com qualquer dos três eixos coordenados reduz-se ao vértice, que é a origem $(0, 0, 0)$.
- **Traços nos planos coordenados**: interseções da superfície S com os respectivos planos coordenados:
  - ✓ com o plano xOy: $z = 0$, é a origem $(0, 0, 0)$;
  - ✓ com o plano xOz: $y = 0$, é uma parábola;
  - ✓ com o plano yOz: $x = 0$, é uma parábola.

Exemplo 4.14. *O gráfico mostra um paraboloide elíptico com eixo de simetria ao longo do eixo Oz interseção com plano xOz. Pela Figura 112, é possível observar que a interseção é uma parábola, que, pela equação (4.16), reduz-se a $x^2 = a^2 z$.*

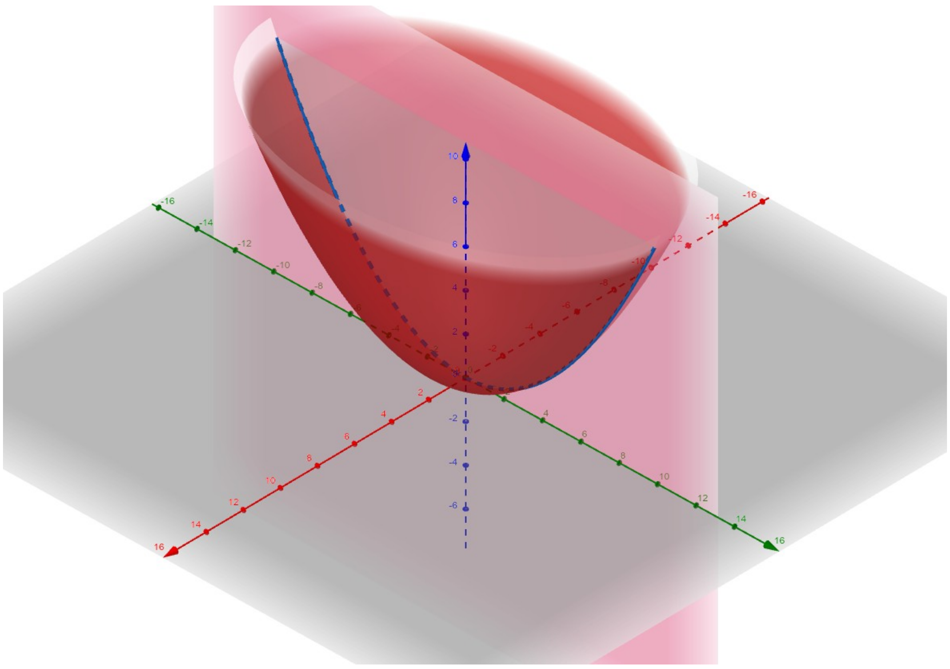
Figura 112. Paraboloide interseção com plano xOz



Fonte: os autores

Exemplo 4.15. *O gráfico mostra um paraboloide elíptico com eixo de simetria ao longo do eixo Oz interseção com plano yOz. Pela Figura 113, é possível observar que a interseção é uma parábola, que, pela equação (4.16), reduz-se a $y^2 = a^2 z$.*

Figura 113. Paraboloide interseção com plano yOz



Fonte: os autores

As outras duas formas para a equação dos paraboloides elípticos são:

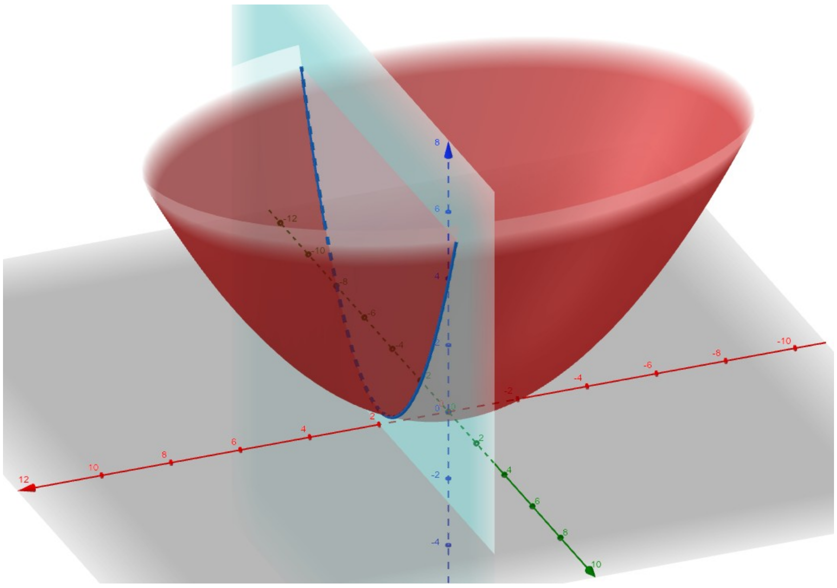
ao longo do eixo Oy	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by$
ao longo do eixo Ox	$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax$

Os traços nos planos $z = k$, se $k < 0$ a interseção é vazia, quando a concavidade da superfície está voltada para o semieixo positivo de Oz, para $k > 0$, será uma elipse para $a \neq b$ ou circunferência para $a = b$.

Nos planos $y = k$ e $x = k$, são parábolas, fazendo variar o valor de k, obtemos parábolas congruentes.

Exemplo 4.16. *Paraboloide elíptico interseção com plano $x = 2$, paralelo ao plano coordenado yOz. Veja Figura 114.*

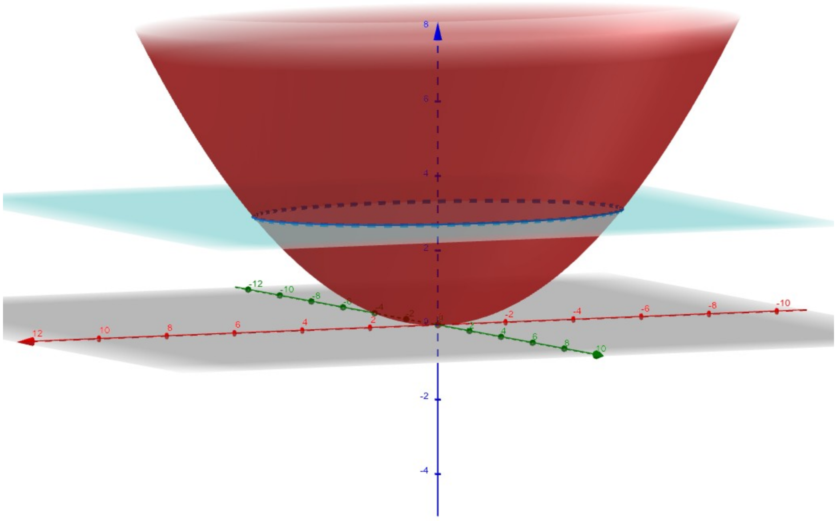
Figura 114. Paraboloide interseção com plano paralelo ao plano yOz



Fonte: os autores

Exemplo 4.17. *Paraboloide elíptico interseção com plano $z = 3$, paralelo ao plano coordenado xOy. Veja Figura 115*

Figura 115. Paraboloide elíptico interseção com plano paralelo ao plano xOy



Fonte: os autores

4.3.3 Paraboloide hiperbólico

Quando nas equações 4.15 os coeficientes dos termos de segundo grau tiverem sinais contrários, a equação representa um paraboloide hiperbólico. A equação a seguir representa um paraboloide ao longo do eixo Oz,

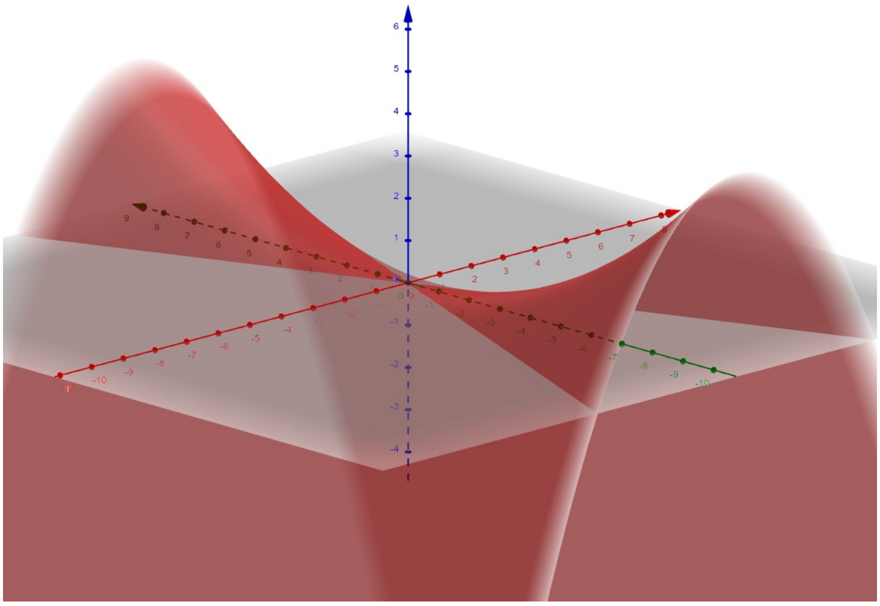
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz. \tag{4.17}$$

As outras duas formas para a equação dos paraboloides hiperbólicos são:

ao longo do eixo Oy	$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = by$
ao longo do eixo Ox	$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = ax$

É possível verificar, pela equação (4.17), que a superfície, Figura 116, é simétrica em relação aos planos xOz e yOz e em relação ao eixo Oz.

Figura 116. Paraboloide hiperbólico ao longo do eixo Oz



Fonte: os autores

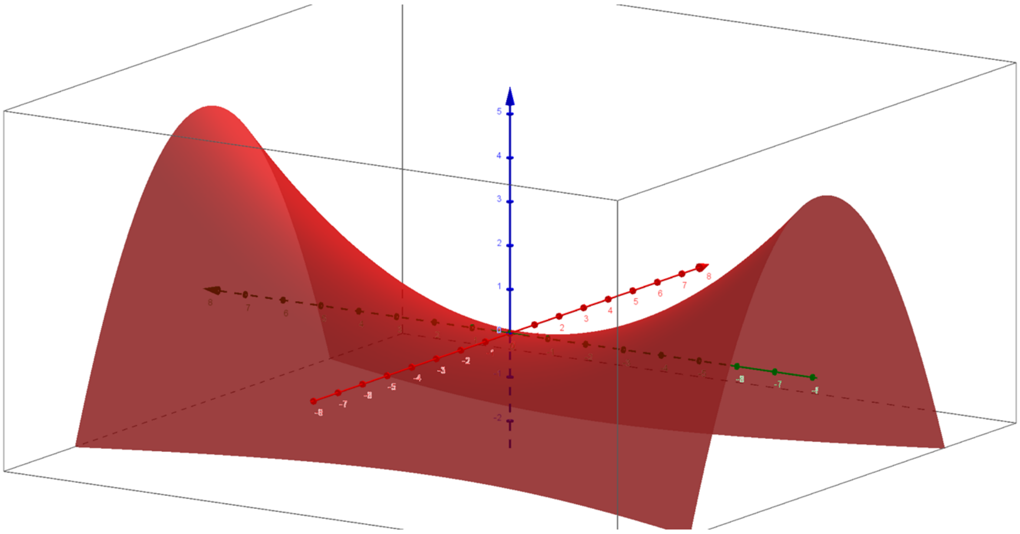
4.3.4 Estudo da Superfície

Para esboçar o gráfico da superfície, vamos fazer uma análise através da equação (4.17), examinando suas interseções com planos coordenados, planos paralelos aos planos coordenados e com os eixos coordenados.

- Intersecções com os eixos coordenados:
  - ✓ A interseção da superfície com qualquer dos três eixos coordenados reduz-se ao vértice, que é a origem $(0, 0, 0)$.
- **Traços nos planos coordenados**: interseções da superfície S com os respectivos planos coordenados:
  - ✓ com o plano xOy: $z = 0$, são duas retas $y = \dfrac{b}{a}x$ e $y = -\dfrac{b}{a}x$;
  - ✓ com o plano xOz: $y = 0$, é uma parábola com concavidade para baixo;
  - ✓ com o plano yOz: $x = 0$, é uma parábola com concavidade para cima.

Exemplo 4.18. *O paraboloide hiperbólico, como mostra a Figura 117, é uma superfície simétrica em relação aos planos xOz e yOz e ao eixo Oz, mas não é simétrico em relação ao demais eixos e ao plano xOy.*

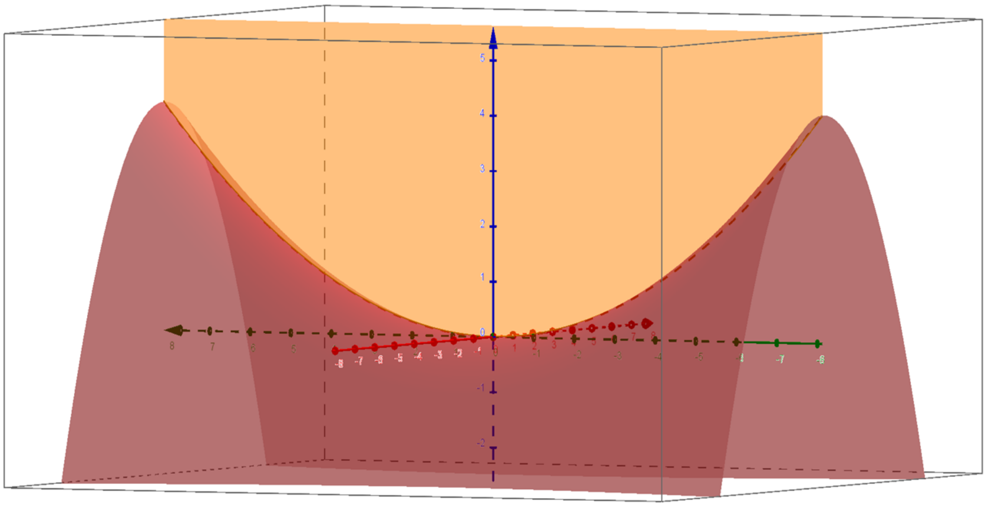
Figura 117. Paraboloide hiperbólico (sela)



Fonte: os autores

Exemplo 4.19. *A interseção do paraboloide hiperbólico com o plano yOz, resulta em uma parábola, conforme a Figura 118.*

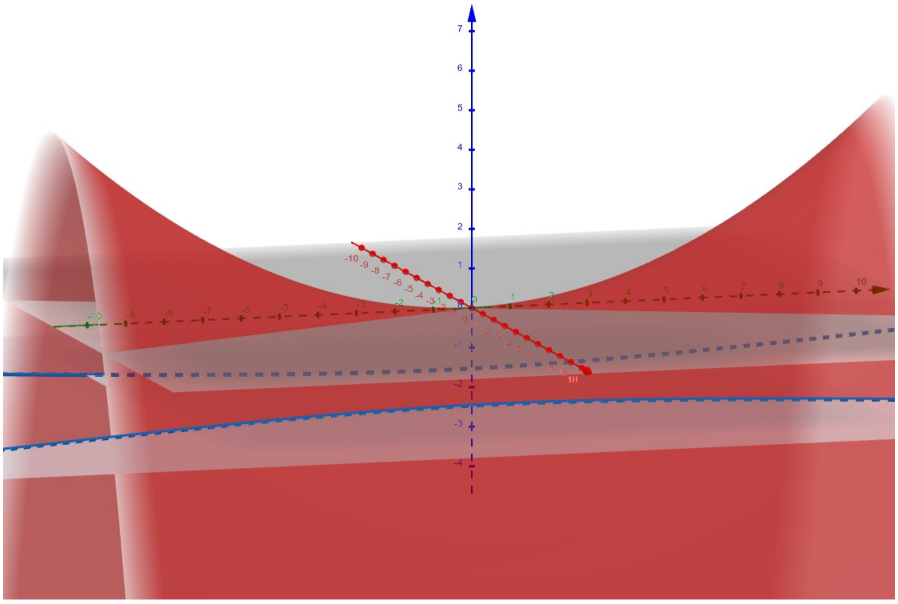
Figura 118. Paraboloide hiperbólico interseção com plano yOz



Fonte: os autores

A Figura 119 apresenta a interseção de um paraboloide hiperbólico com o plano $z = k$, $k \neq 0$, que é uma hipérbole. Vale ressaltar que tanto para $k > 0$, como $k < 0$, a interseção com a superfície são hipérboles, a primeira com eixo real paralelo ao eixo Oy e a segunda paralelo ao eixo Ox.

Figura 119. A hipérbole com eixo real paralelo ao eixo Oy



Fonte: os autores

Agora chegou o momento de verificar o seu aprendizado, tente resolver os seguintes exercícios.

4.3.5 Agora tente resolver!

1. Identifique cada uma das superfície:

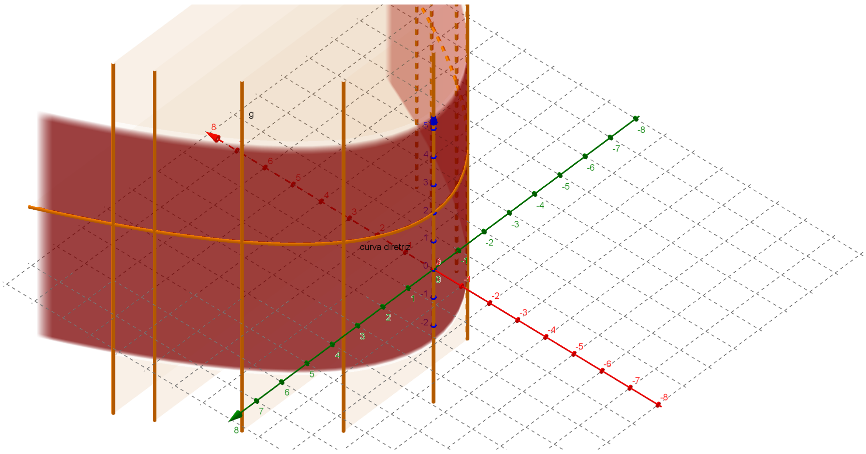
   a) $z = -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4}$

   b) $z = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4}$

4.4 Superfície Cilíndrica

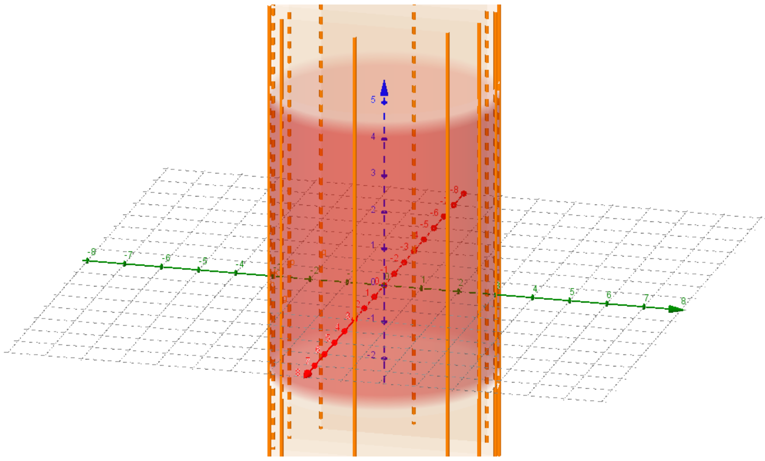
É uma superfície gerada por uma reta que se move paralelamente a uma reta fixa e passando por uma curva fixa dada. Pela Figura 120, observamos que r é a reta fixa, g é a reta que se move paralelamente à reta r – geratriz da superfície e d é a curva fixa – diretriz da superfície. A superfície pode ser vista como um conjunto de infinitas retas paralelas que são as infinitas posições da geratriz, conforme a Figura 121.

Figura 120. Definição



Fonte: os autores

Figura 121. Superfície cilíndrica



Fonte: os autores

Chamamos de Superfície cilíndrica elíptica ou Superfície cilíndrica hiperbólica ou Superfície cilíndrica parabólica, se existem números reais positivos a, b e c e um sistema ortogonal em relação ao qual pode ser escrita, respectivamente, pelas equações

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4.18}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4.19}$$

$$y^2 = cx. \tag{4.20}$$

E pode ser chamada de Superfície cilíndrica de rotação ou circular se existir um número real positivo a, que pode ser descrita pela equação

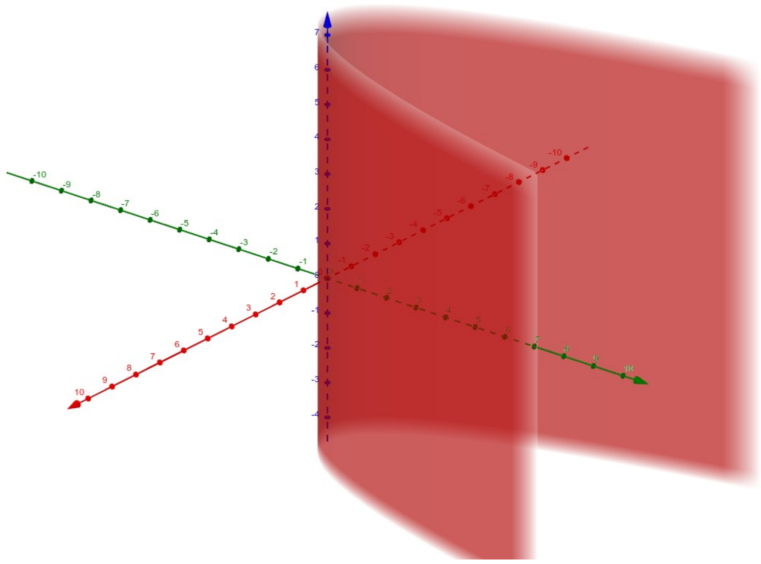
$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{4.21}$$

Com exceção da Superfície cilíndrica parabólica, as demais são simétricas em relação aos eixos coordenados.

Quanto à diretriz, a superfície cilíndrica será circular, parabólica, elíptica ou hiperbólica se a diretriz for uma circunferência, uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole.

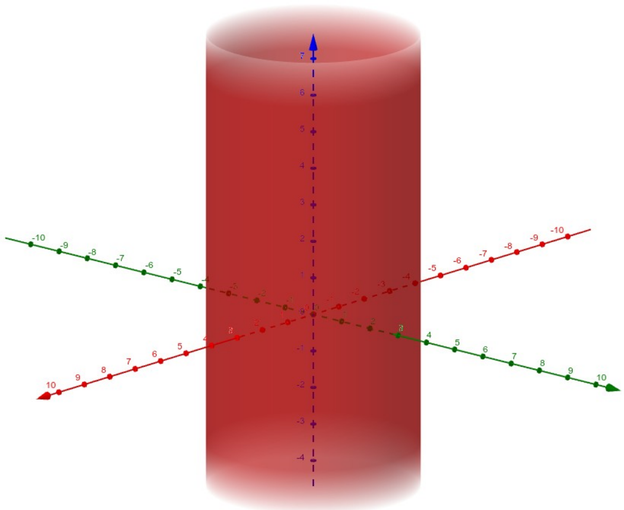
As Figuras 122 e 123 apresentam alguns exemplos de superfícies cilíndricas com geratrizes paralelas ao eixo Oz.

Figura 122. Superfície cilíndrica parabólica (calha)



Fonte: os autores

Figura 123. Superfície cilíndrica circular



Fonte: os autores

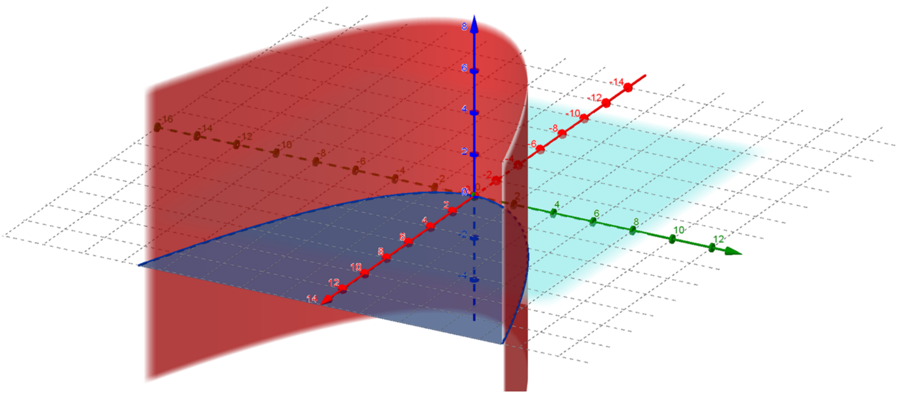
Exemplo 4.20. *Construir o gráfico das seguintes equações de superfícies cilíndricas:*

1. $y^2 = 6x$

2. $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

Solução: Para a equação $y^2 = 6x$, temos que sua diretriz é uma parábola com eixo de simetria no eixo Ox. Também conhecida como calha, devido ao seu formato.

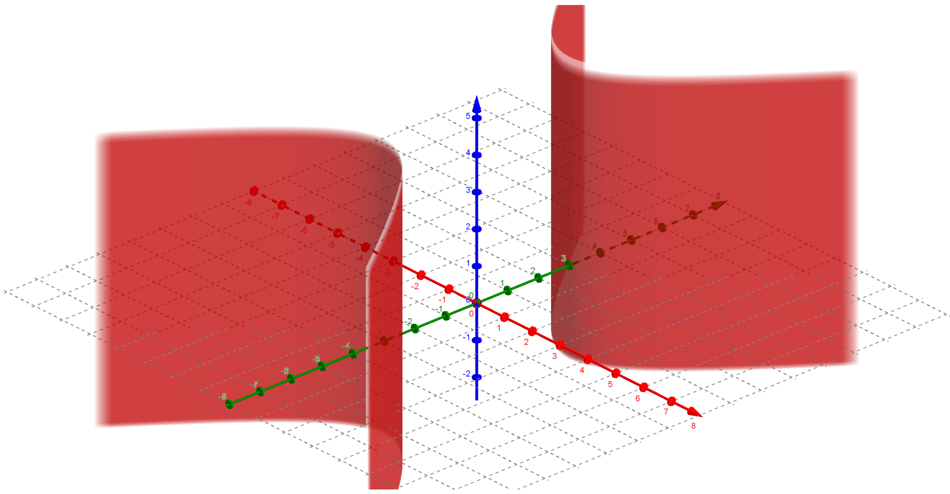
Figura 124. Superfície cilíndrica parabólica $y^2 = 6x$



Fonte: os autores

Para a equação $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$, temos que sua diretriz é uma hipérbole, então, a superfície cilíndrica hiperbólica, Figura 125, mostra que a superfície se desenvolve ao longo do eixo Oz.

Figura 125. Superfície cilíndrica hiperbólica $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1$



Fonte: os autores

4.4.1 Estudo da Superfície

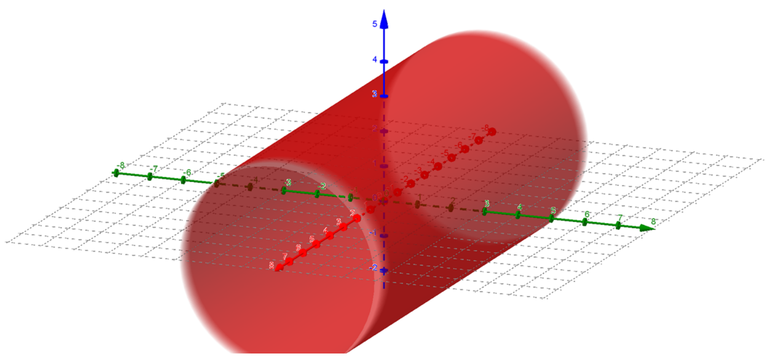
Para esboçar o gráfico da superfície cilíndrica, vamos utilizar outro recurso, propiciado pelo fato de uma das variáveis estar ausente na equação:

✓ Com relação à geratriz, o gráfico de uma equação que não contém uma determinada variável corresponde a uma superfície cilíndrica cuja geratriz é paralela ao eixo da variável ausente.

✓ Com relação à diretriz, o gráfico da equação dada está no plano correspondente.

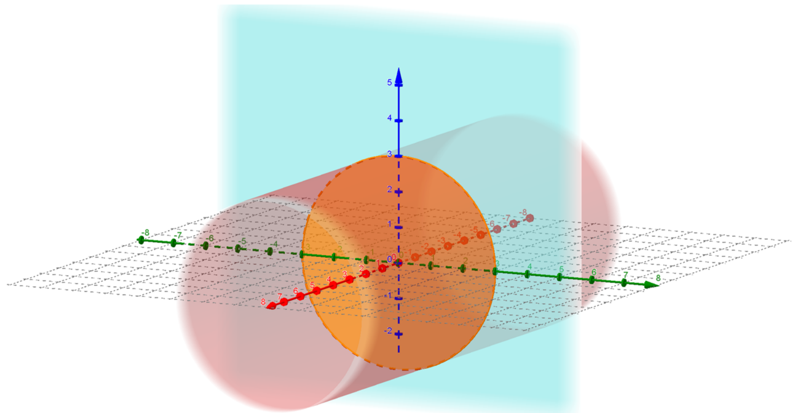
Exemplo 4.21. *Superfície cilíndrica circular de equação* $y^2 + z^2 = 9$, *a curva (circunferência) é a diretriz e está no plano* yOz, *e a superfície se desenvolve ao longo do eixo* Ox, *que corresponde à variável ausente. Nas Figuras 126 e 127, temos as superfícies ao longo do eixo* Ox *e a interseção da superfície com o plano* yOz *em que* $x = 0$, *identificando a diretriz.*

Figura 126. Superfície cilíndrica circular



Fonte: os autores

Figura 127. Interseção da Superfície cilíndrica circular com o plano $x = 0$



Fonte: os autores

Agora chegou o momento de verificar o seu aprendizado, tente resolver os seguintes exercícios.

4.4.2 Agora tente resolver!

1. Identifique, em cada caso, a superfície descrita e comente sua posição em relação aos eixos coordenados:

   a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$

   b) $\dfrac{z^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

   c) $z^2 = cy$

   d) $y^2 = cz$

   e) $x^2 + y^2 = a^2$

2. Esboce cada uma das superfícies:

   a) $x^2 + y^2 = 4$

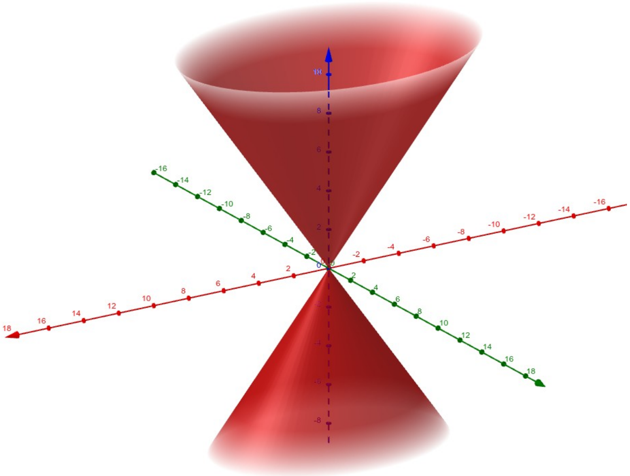
   b) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1$

   c) $y^2 = 8x$

4.5 Superfície Cônica

Considere a reta $r : z = ky$ no plano $x = 0$, se a rotacionarmos em torno do eixo Oz, resulta numa superfície cônica circular, conforme a Figura 128. A reta r denominamos de geratriz da superfície.

Figura 128. Superfície cônica ao longo do eixo Oz



Fonte: os autores

Para obtermos a equação da superfície, substituímos o termo y na equação da reta, por $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, resultando:

$$z^2 = k^2(x^2+y^2) \tag{4.22}$$

ou

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \tag{4.23}$$

Se $a = b$, a superfície será uma cônica de rotação e, se $a \neq b$, a superfície será uma cônica elíptica, ao longo do eixo Oz. Ela é totalmente simétrica em relação ao sistema de coordenadas e a origem é o único ponto comum com os eixos. A origem separa as duas folhas.

4.5.1 Estudo da Superfície

Para esboçar o gráfico da superfície descrita pela equação (4.23), vamos fazer uma análise examinando suas interseções com planos paralelos aos coordenados e com os eixos coordenados.

- Intersecções com os eixos coordenados:

  ✓ A interseção da superfície com qualquer dos três eixos coordenados reduz-se ao vértice, que é a origem $(0,0,0)$.

- **Traços nos planos coordenados**: interseções da superfície S com os respectivos planos coordenados:

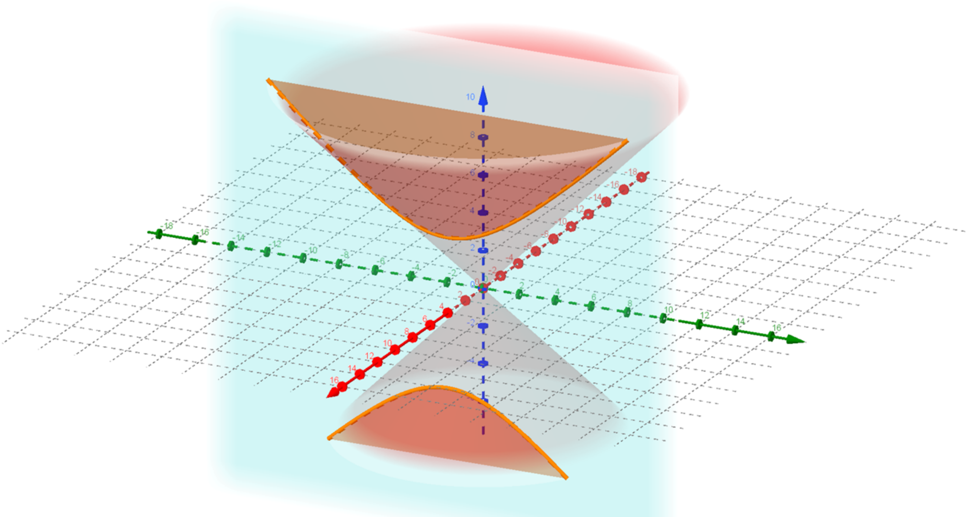
✓ com o plano xOy: $z = 0$, é a origem $(0,0,0)$, planos $z = k$, temos elipses com centros em Oz;

✓ com o plano xOz: $y = 0$, são retas concorrentes $z = \dfrac{x}{a}$ e $z = -\dfrac{x}{a}$, planos $y = k$ são hipérboles, com centros em Oy;

✓ com o plano yOz: $x = 0$, são retas concorrentes $z = \dfrac{y}{b}$ e $z = -\dfrac{y}{b}$, planos $x = k$ são hipérboles, com centros em Ox.

Exemplo 4.22. *Na Figura 129, temos a interseção de uma Superfície cônica com um plano paralelo ao plano yOz, que resulta em uma hipérbole.*

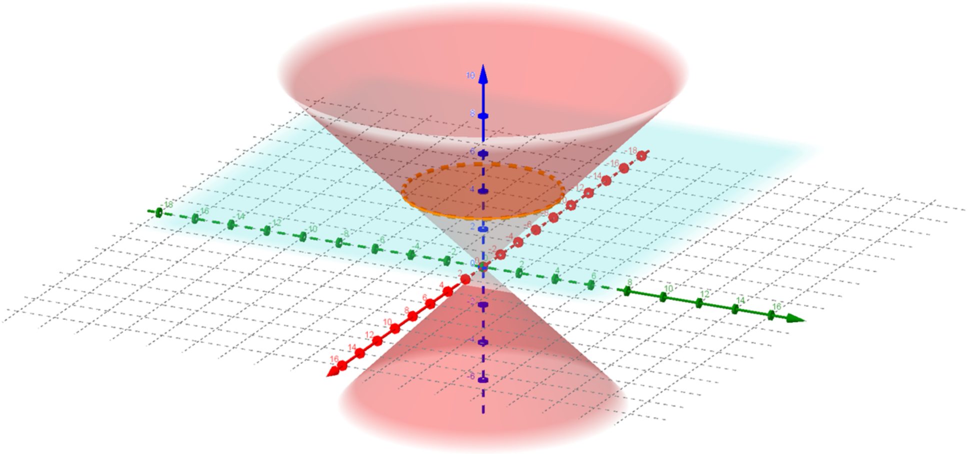
Figura 129. Superfície cônica interseção com o plano $x = 4$



Fonte: os autores

Exemplo 4.23. *A interseção de uma superfície cônica com um plano paralelo ao plano xOy resulta em uma elipse, conforme a Figura 130.*

Figura 130. Superfície cônica interseção com o plano $z = 4$



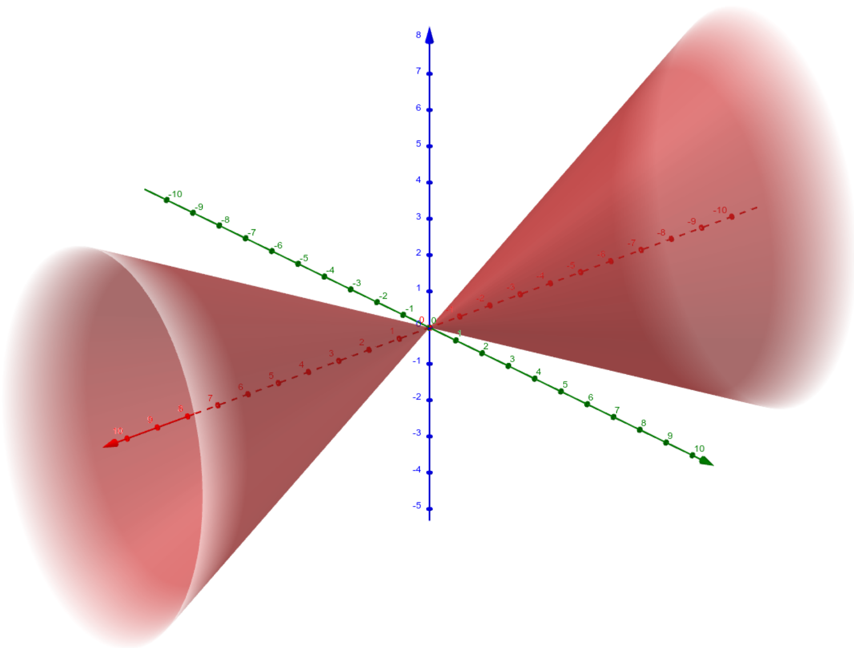
Fonte: os autores

As outras duas formas para a equação da superfície cônica são:

ao longo do eixo Oy	$y^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$
ao longo do eixo Ox	$x^2 = \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$

Exemplo 4.24. *Na Figura 131, temos uma Superfície cônica ao longo do eixo Ox.*

Figura 131. Superfície cônica



Fonte: os autores

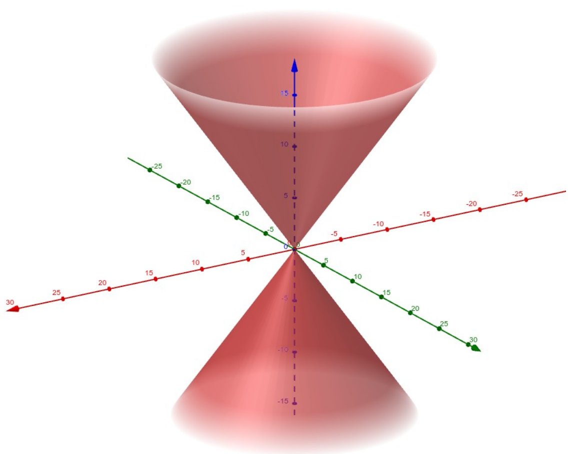
Exemplo 4.25. *Escreva a equação de uma superfície cônica gerada por uma reta de equação $z = \sqrt{2}y$, no plano yOz $(x = 0)$, que gira em torno do eixo Oz.*

Solução: Substituindo na equação da reta, y por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$, temos:

$$z = \pm\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} \therefore z^2 = 2(x^2 + y^2).$$

Na Figura 132, temos o gráfico desta superfície.

Figura 132. Superfície cônica do Exemplo 4.25



Fonte: os autores

Agora chegou o momento de verificar o seu aprendizado, tente resolver os seguintes exercícios.

4.5.2 Agora tente resolver!

1. Identifique, em cada caso, a superfície e comente sua posição em relação aos eixos coordenados:

   a) $y^2 = 16x^2 + 4z^2$

   b) $z^2 = x^2 + y^2$

   c) $z^2 = -x^2 + y^2$

   d) $x^2 = 4y^2 + 16z^2$

4.6 Exercícios

1. Reduzir cada uma das equações à forma canônica, se necessário, identificar a superfície, e encontrar suas interseções com os eixos e os planos coordenados.

   a) $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$

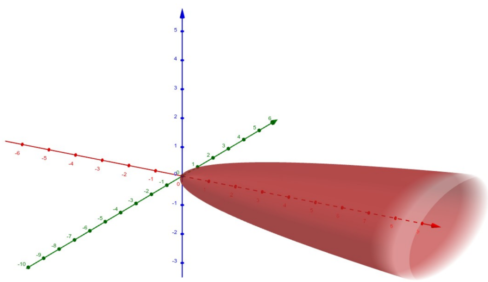
   b) $36x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 36$

   c) $x^2 - 9y^2 - 2z^2 = 18$

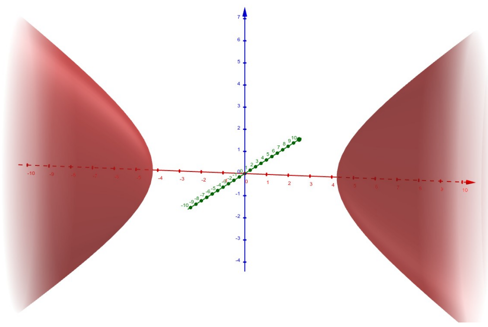
   d) $16z = y^2 - x^2$

   e) $y^2 + 4z^2 - x = 0$

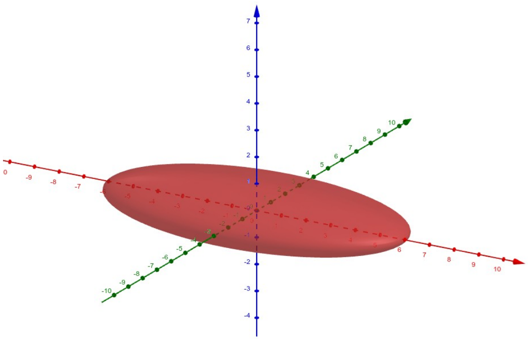
2. Associe cada gráfico abaixo à equação correspondente no exercício 1.

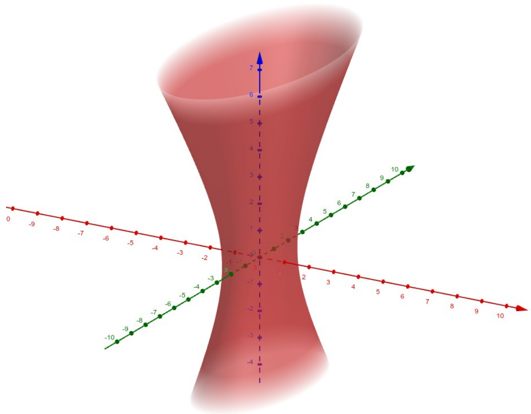


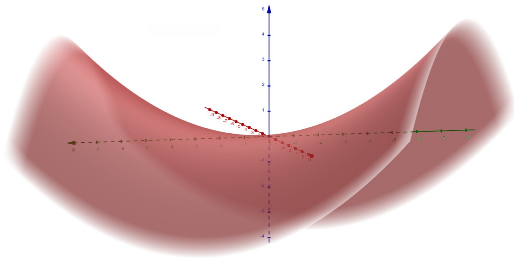
I.



II.

III. 

IV. 

V. 

3. Usando o Geogebra 3D, versão online, faça o esboço de cada uma das superfícies digite, no campo entrada, cada um das equações abaixo, identifique cada uma das superfícies e comente sua posição em relação aos eixos coordenados.

   a) $x^2 + y^2 + z^2 = 36$
   b) $x^2 + y^2 - 9z = 0$
   c) $x^2 - y^2 + 2z^2 = 4$
   d) $2x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$
   e) $4x^2 + y^2 - 4z^2 - 4 = 0$
   f) $z^2 - 4x^2 - 4y^2 = 4$
   g) $9x^2 + 4y^2 + 9z = 0$
   h) $x^2 + 4z^2 - 8y = 0$

4. Faça o esboço de cada uma das superfícies abaixo, utilizando lápis, papel e régua. (*Dica: faça o estudo da superfície.*)

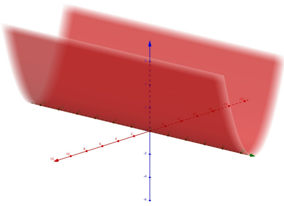
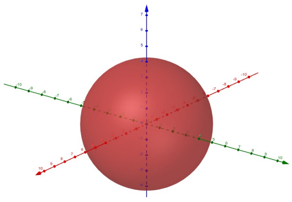
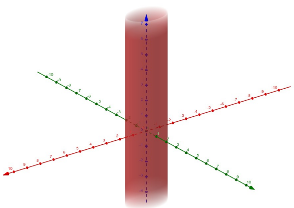
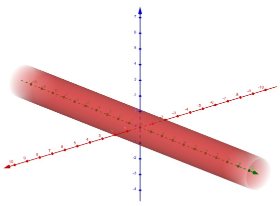
   a) $x^2 = 2z$
   b) $x + y + z - 16 = 0$
   c) $x^2 + 2y^2 = 2$
   d) $x + z = 1$
   e) $x = y +$
   f) $z^2 = x^2 + y^2$

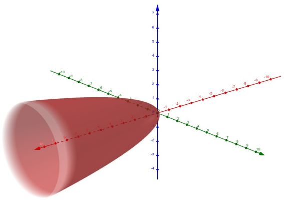
Gabarito

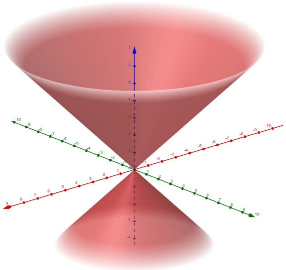
1. a) Elipsoide.
   b) Hiperboloide de uma folha.
   c) Hiperboloide de duas folhas.
   d) Paraboloide hiperbólico.
   e) Paraboloide elíptico.

2. I. e
   II. c
   III. a
   IV. b
   V. d

3. Exercício para utilizar o Geogebra.

4. a) 
   b) 
   c) 
   d) 

e) 

f) 

Capítulo 5

COORDENADAS POLARES, CILÍNDRICAS e ESFÉRICAS

Objetivos do capítulo

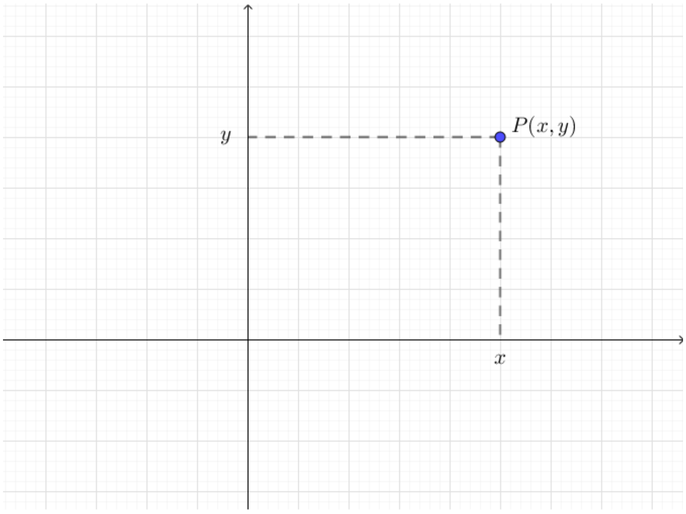
- Conhecer o sistema de coordenadas polares ($\mathbb{R}^2$).
- Conhecer o sistema de coordenadas cilíndricas ($\mathbb{R}^3$).
- Conhecer o sistema de coordenadas esféricas ($\mathbb{R}^3$).

Introdução

Um sistema de coordenadas é um sistema para localizar um objeto num espaço n-dimensional. É utilizado em diversas áreas do conhecimento humano: matemática, física, astronomia, geografia etc. É, portanto, importante a compreensão desse conceito, principalmente a diferenciação entre os vários tipos de sistemas.

O mais conhecido dos sistemas de coordenadas é o cartesiano, talvez por ser bastante trabalhado na educação básica, desde o ensino fundamental até o ensino médio. Nesse sistema, conforme estudamos no Capítulo 1, um ponto no plano é localizado por um par ordenado (x, y) de números reais, exemplificado na Figura 133:

Figura 133. Sistema de coordenadas cartesianas



Fonte: os autores

Outro sistema bidimensional importante é o sistema de coordenadas polares, em que cada ponto no plano é determinado por uma distância e um ângulo em relação a um ponto fixo de referência. A motivação inicial para a introdução desse sistema foi o estudo dos movimentos circular e orbital.

Existem muitos modelos físicos que podem ser representados de forma mais simples e até mais intuitiva, usando coordenadas polares. Como, por exemplo, aqueles relacionados ao movimento de corpos ao redor de um ponto central ou cujo fenômeno é originado neste ponto.

Além disso, coordenadas polares são usadas frequentemente na navegação, uma vez que o destino ou a direção de viagem pode ser dada como um ângulo e a distância do objeto que está sendo considerado.

Já no espaço tridimensional, além do sistema cartesiano já conhecido, existem dois outros sistemas de suma importância: o sistema de coordenadas cilíndricas e o sistema de coordenadas esféricas.

O sistema de coordenadas cilíndricas é muito usado para simplificar os nossos estudos sobre integração múltipla. Este sistema foi concebido a partir da definição das coordenadas polares, em segunda instância, pode-se pensar nele como uma evolução do modelo polar adaptado para o espaço tridimensional.

Já o sistema esférico de coordenadas é um sistema de referenciamento que permite a localização de um ponto qualquer em um espaço de formato esférico através de um conjunto de três valores, chamados de coordenadas esféricas. Também é muito usado no Cálculo Diferencial, Integral e Vetorial.

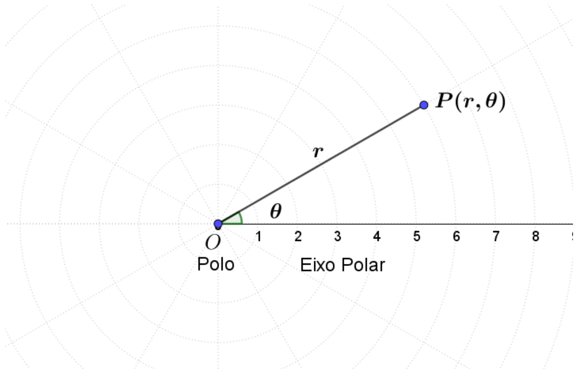
Neste capítulo, vamos estudar os três sistemas de coordenadas: polares, cilíndrico e esférico.

5.1 Coordenadas Polares

O sistema de coordenadas polares nos permite marcar um ponto através de sua direção e de sua distância a partir da origem. Nesse sistema, fixamos uma origem O, chamada polo, uma semirreta orientada, chamada de eixo polar a partir de O.

Um ponto em coordenadas polares é o par (r, θ), onde o raio r é a distância da origem O (polo) até o ponto P e o ângulo θ é o ângulo orientado a partir do eixo polar até o segmento $\overline{OP}$ e deve ser expresso em radianos, observemos a Figura 134.

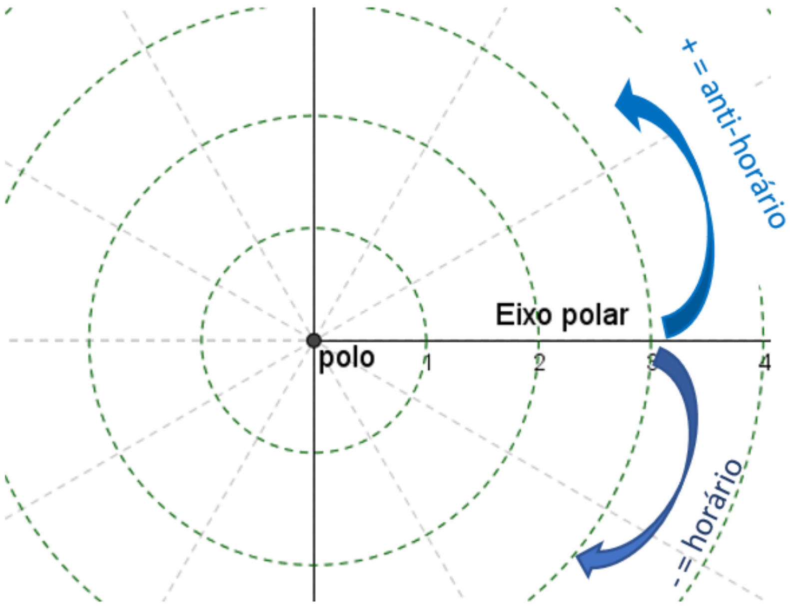
Figura 134. Sistema de coordenadas polares



Fonte: os autores

O sentido positivo é o sentido trigonométrico (anti-horário). A semirreta denominada eixo polar tem o mesmo sentido do semieixo positivo do eixo Ox, conforme a Figura 135.

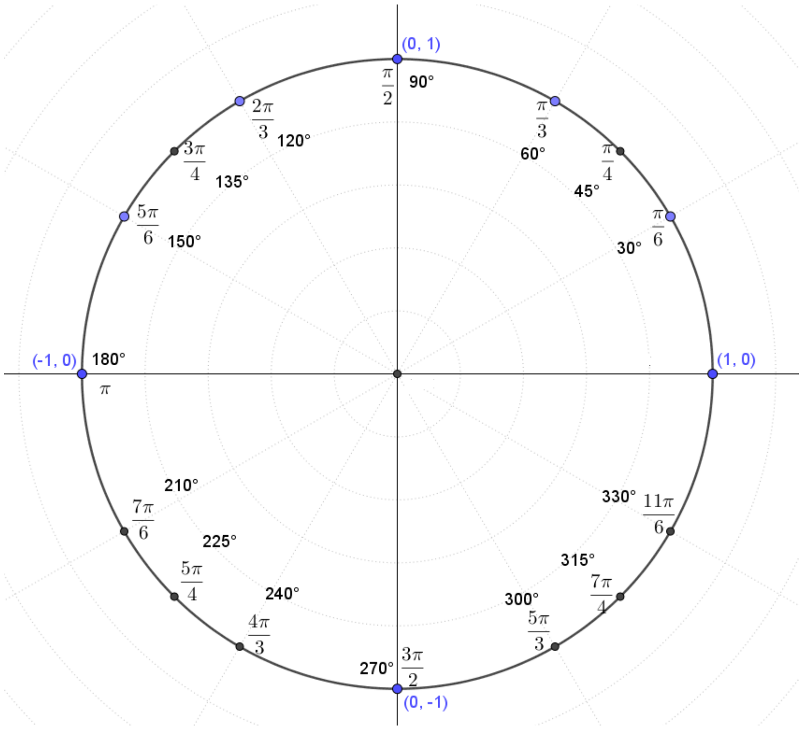
Figura 135. Sentido no sistema de coordenadas polares



Fonte: os autores

Na Figura 136, temos o conhecido círculo trigonométrico (círculo de raio 1) esboçado no sistema de coordenadas polares e cartesiano. O eixo horizontal x, fornece a medida do cosseno do ângulo formado, partindo do zero no sentido anti-horário, e o eixo vertical y fornece a medida do seno do mesmo ângulo.

Figura 136. Círculo Trigonométrico

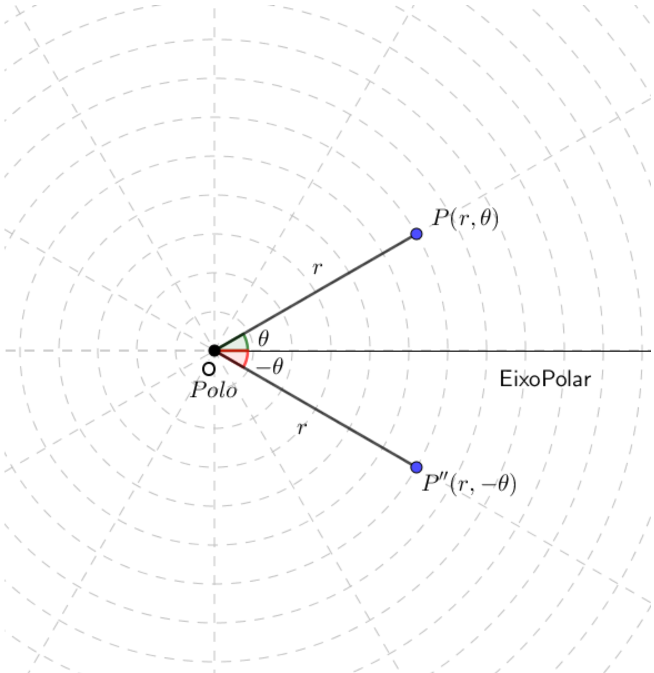


Fonte: os autores

Para marcar um ponto em coordenadas polares, primeiro marcamos o ângulo (observar o sentido), depois a distância que o ponto está da origem, cuidando que o raio r pode ser positivo ou negativo.

Considerando $r > 0$ e $\theta > 0$, na Figura 137, temos a representação dos pontos (r, θ) e $(r, -\theta)$. Notamos que, quando o ângulo for positivo, marcamos a inclinação no sentido anti-horário, partindo do eixo polar, mas, quando for negativo, marcamos no sentido horário a mesma inclinação. Em ambos os casos, distando r unidades, partindo do polo O.

Figura 137. Marcando pontos (r, θ) e $(r, -\theta)$

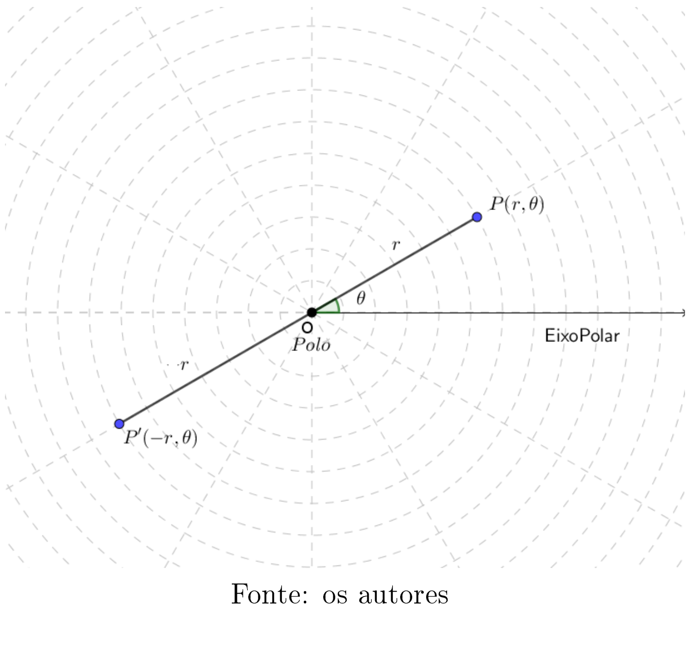


Fonte: os autores

Também considerando $r > 0$ e $\theta > 0$, na Figura 138, temos a representação dos pontos (r, θ) e $(-r, \theta)$.

Marcamos primeiro o ângulo θ (pontilhando uma reta em relação ao eixo polar): como $r > 0$, o ponto $P(r, \theta)$ está no mesmo quadrante que o ângulo θ distando r unidades sobre a reta partindo do polo O e o ponto $P'(-r, \theta)$ está no quadrante do lado oposto do polo, também distando r unidades de O.

Figura 138. Marcando pontos (r, θ) e $(-r, \theta)$

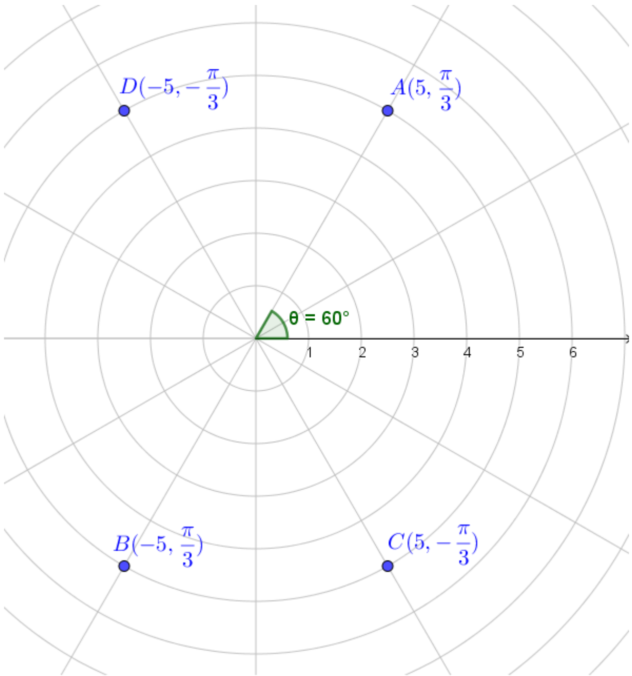


Fonte: os autores

Exemplo 5.1. *Represente graficamente os seguintes pontos em coordenadas polares:* $A(5, \frac{\pi}{3})$, $B(5, -\frac{\pi}{3})$, $C(-5, \frac{\pi}{3})$ *e* $D(-5, -\frac{\pi}{3})$.

Solução: Observe a Figura 139.

Figura 139. Pontos A, B, C e D



Fonte: os autores

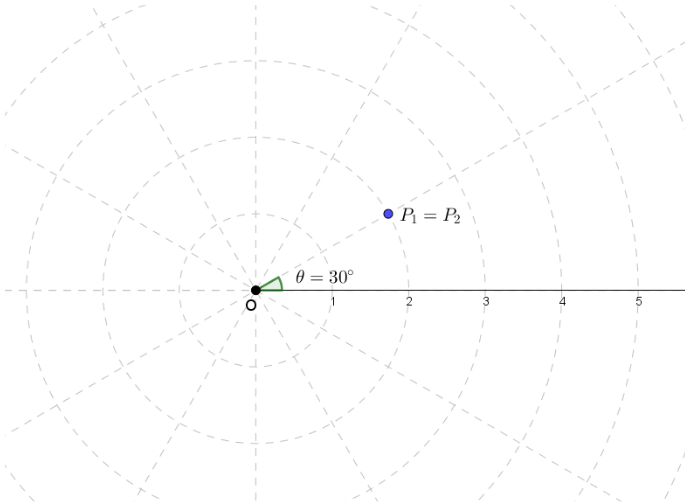
5.1.1 Conjunto Principal

Diferente do sistema cartesiano, no sistema de coordenadas polares, um ponto tem infinitos pares que o representam. Tal fato, pode ser observado na Figura 138, onde $(-r, \theta)$ representa o mesmo ponto que $(r, \theta + \pi)$.

Assim, notamos que cada par (r, θ) no plano pode ser representado por infinitos pares de coordenadas polares, mas todo ponto distinto da origem possui pelo menos uma coordenada na qual o raio é positivo $r > 0$ e o ângulo $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Exemplo 5.2. *Os pontos* $P_1(2, \frac{\pi}{6})$ *e* $P_2(2, \frac{-11\pi}{6})$ *representam o mesmo ponto, conforme observamos na Figura 140.*

Figura 140. Representações em coordenadas polares

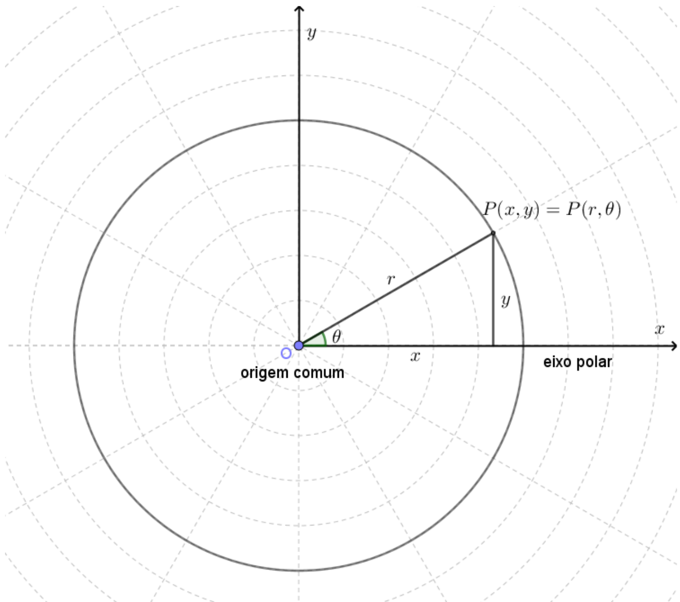


Fonte: os autores

5.1.2 Mudanças de Coordenadas

Suponha que P seja um ponto cuja representação em coordenadas cartesianas é (x, y) e em coordenadas polares (r, θ) e suponha ainda para facilidade de compreensão que o polo e o eixo polar do sistema de coordenadas polares coincidem com a origem e o eixo Ox do sistema de coordenadas cartesianas, respectivamente. Consideremos o caso em que $r > 0$, então o ponto P está no mesmo quadrante do ângulo θ, conforme a Figura 141.

Figura 141. Mudança de Coordenadas



Fonte: os autores

Assim, $r = |\overline{OP}|$, $\cos(\theta) = \dfrac{x}{|\overline{OP}|} = \dfrac{x}{r}$ e $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{y}{|\overline{OP}|} = \dfrac{y}{r}$. Portanto,

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\operatorname{sen}(\theta), \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde θ é livre, mas, como já foi observado, para cada ponto distinto, existe pelo menos uma coordenada no qual $r > 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

A partir das equações (5.1), é possível obter a transformação de coordenadas polares (se forem conhecidas) para coordenadas cartesianas.

Para obtermos fórmulas que dão o conjunto de coordenadas polares de um ponto quando suas coordenadas cartesianas são conhecidas, elevamos ao quadrado ambos os lados das equações (5.1) e obtemos:

$$x^2 = r^2\cos^2(\theta)$$
$$y^2 = r^2\operatorname{sen}^2(\theta).$$

Igualando a soma dos membros esquerdos com a soma dos membros direitos acima,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2\cos^2(\theta) + r^2\operatorname{sen}^2(\theta) \\ x^2 + y^2 &= r^2(\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)) \\ x^2 + y^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Portanto, como $r^2 = x^2 + y^2$ e sempre podemos escolher uma coordenada tal que $r > 0$, temos que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Além disso, sabemos pela Figura 141 que $\operatorname{tg}(\theta) = \left(\dfrac{y}{x}\right)$ e a função arco-tangente tem imagens restritas ao intervalo aberto $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, assim o valor do ângulo θ pode ser obtido por meio de uma das expressões:

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}), & se\ \ x > 0 \\ \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) + \pi, & se\ \ x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & se\ \ x = 0\ \ e\ \ y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & se\ \ x = 0\ \ e\ \ y < 0 \end{cases}.$$

A seguir, apresentamos dois exemplos que ilustram a mudança de coordenadas cartesianas para polares e vice-versa.

Exemplo 5.3. *Converta o ponto $A(-1, \sqrt{3})$ para coordenadas polares e o represente geometricamente.*

Solução: Observe que $x = -1$ e $y = \sqrt{3}$, logo precisamos determinar r e θ usando primeiro a equação $r^2 = x^2 + y^2$ e depois (5.1):

$$r^2 = x^2 + y^2 = (-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4, \quad \text{logo} \quad r = 2.$$

$$\begin{cases} -1 = 2\,\cos(\theta) & \Rightarrow \cos(\theta) = -\frac{1}{2} \\ \sqrt{3} = 2\,\text{sen}(\theta) & \Rightarrow \text{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Assim, o ângulo que satisfaz as duas relações é $\theta = 120° = \frac{2\pi}{3}$.

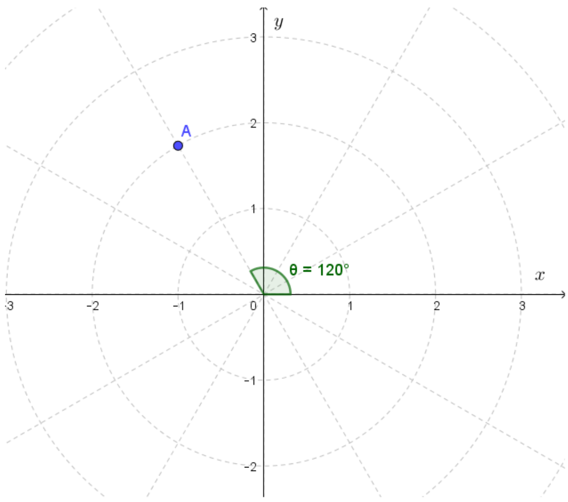
Outra forma de resolver, seria aplicando diretamente a expressão de θ: como $x < 0$ $(x = -1)$, o ponto está localizado no segundo quadrante, logo

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi = \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi$$

$$\theta = \text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

Assim, o ponto em coordenadas polares é $A\left(2, \dfrac{2\pi}{3}\right)$, conforme a Figura 142.

Figura 142. Ponto A



Fonte: os autores

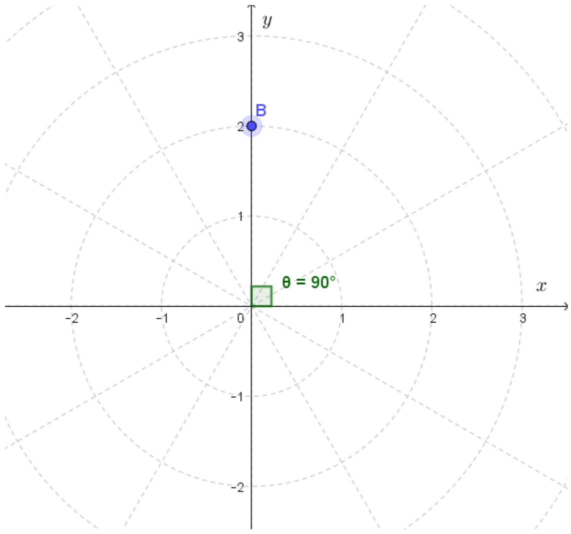
Exemplo 5.4. *Converta o ponto* $B\left(2, \dfrac{\pi}{2}\right)$ *para coordenadas cartesianas e o represente geometricamente.*

Solução: Utilizando diretamente as equações de (5.1) com $r = 2$ e $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, temos:

$$x = 2\,cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{e} \quad y = 2\,sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Assim, o ponto em coordenadas cartesianas é $B(0, 2)$, conforme Figura 143.

Figura 143. Ponto B



Fonte: os autores

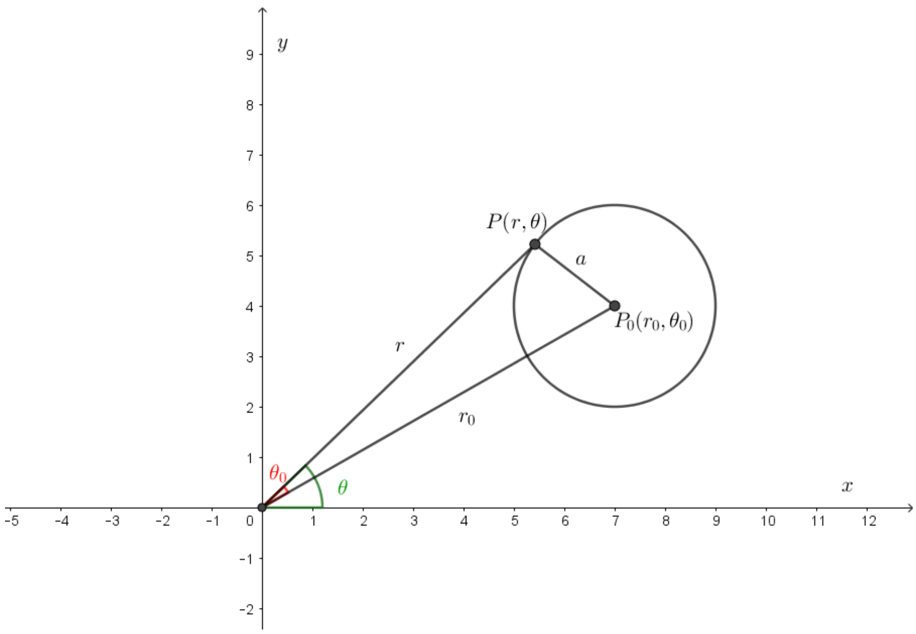
5.1.3 Equações Polares

5.1.3.1 Círculo

Para obtermos a equação polar de um círculo, considere um ponto P sobre o círculo de raio a, cujo centro é o ponto P_0, conforme a Figura 144. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo OP_0P, temos

$$a^2 - r_0^2 - r^2 + 2r_0 r cos(\theta - \theta_0) = 0. \tag{5.2}$$

Figura 144. Círculo de centro em P_0



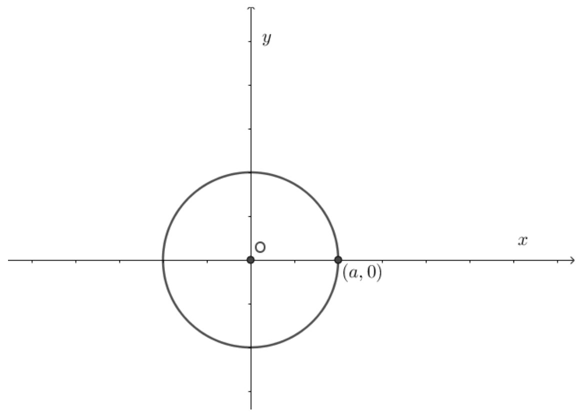
Fonte: os autores

Dessa forma, obtemos todos os pontos do círculo quando o ângulo θ varia no intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$. A partir da equação (5.2), obtemos todas as variações para a equação polar do círculo.

Quando $r_0 = 0$, o círculo de raio a com centro no polo $(0, 0)$, como mostra a Figura 145, a equação (5.2) resulta em: $r^2 = a^2$, portanto a equação do círculo de raio $|a|$ centrado em $(0, 0)$ é

$$r = a.$$

Figura 145. Círculo de centro em $O(0, 0)$



Fonte: os autores

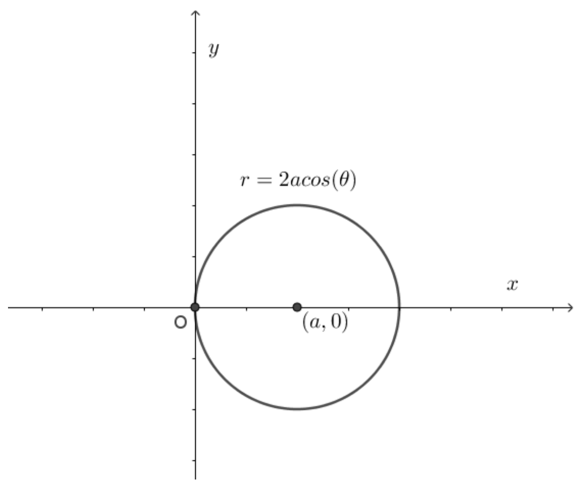
Se $r_0 = a$ e $\theta_0 = 0$, a equação (5.2) do círculo de raio a com centro em $(a, 0)$, fica $r^2 = 2ar\cos(\theta)$, então

$$r = 2a\cos(\theta).$$

Dessa forma, temos duas situações:

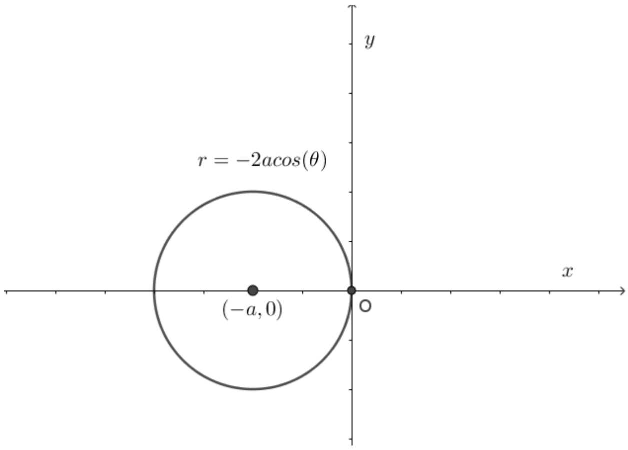
- Se $a > 0$, o gráfico está à direta do polo, Figura 146;
- Se $a < 0$, o gráfico está à esquerda do polo, Figura 147.

Figura 146. Círculo de centro em $C(a, 0)$ à direita do polo



Fonte: os autores

Figura 147. Círculo de centro em $C(-a, 0)$ à esquerda do polo



Fonte: os autores

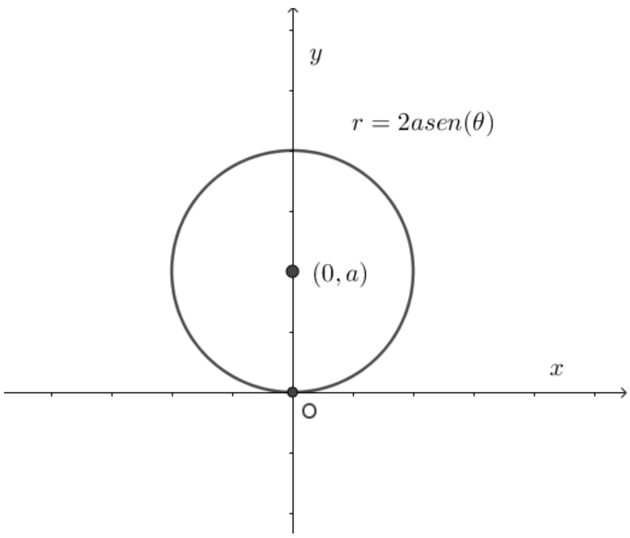
Tomando $r_0 = a$ e $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$, a equação (5.2), de raio a e centro $\left(a, \dfrac{\pi}{2}\right)$, obtemos: $r^2 = 2arcos\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)$, assim

$$r = 2a\,\mathrm{sen}(\theta).$$

Desta forma,

- Se $a > 0$, o gráfico está acima do polo, Figura 148;
- Se $a < 0$, o gráfico está abaixo do polo.

Figura 148. Círculo de centro em $C\left(a, \dfrac{\pi}{2}\right)$ acima do polo

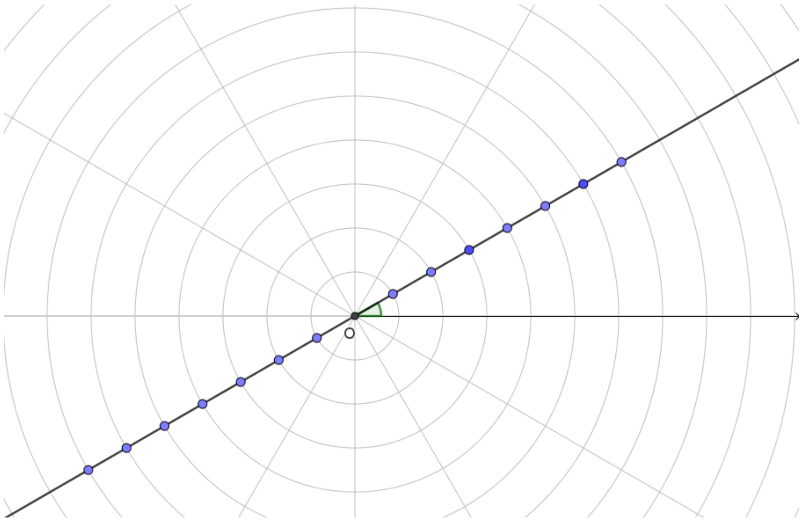


Fonte: os autores

5.1.4 Retas

Vamos considerar um sistema $Or\theta$ (sistema de coordenadas polares). Determinemos o conjunto r dos pontos $P(r,\theta)$ que satisfazem a equação $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Observe a Figura 149.

Figura 149. Reta em coordenadas polares



Fonte: os autores

Assim, o conjunto $r = \left\{(r,\theta) \mid \theta = \dfrac{\pi}{6}\right\}$ com $r \in \mathbb{R}$, r é a reta que passa pelo polo e tem equação $\theta = \theta_0$. Se a reta tem equação cartesiana da forma $y = ax$ (reta não vertical e que passa pela origem), com as equações de mudanças de coordenadas,

$$y = ax$$

$$r\,\mathrm{sen}(\theta) = ar\cos(\theta)$$
$$\mathrm{sen}(\theta) = a\cos(\theta)$$
$$\mathrm{tg}(\theta) = a.$$

Considerando que o coeficiente angular a é a tangente da inclinação θ_0 da reta:

$$\mathrm{tg}(\theta) = \mathrm{tg}(\theta_0).$$

Portanto, $\theta = \theta_0$.

Retas Verticais: para equação $x = a$, temos em coordenadas polares $r\cos(\theta) = a$. Restringindo θ em $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, podemos escrever $r = \dfrac{a}{\cos(\theta)}$, ou

$$r = a\sec(\theta)$$

que é a equação em coordenadas polares de uma reta vertical passando por $(a, 0)$.

Retas Horizontais: para equação $y = a$, temos em coordenadas polares $r\,\text{sen}(\theta) = a$. Podemos reescrever como $r = \dfrac{a}{\text{sen}(\theta)}$, ou

$$r = a\,\text{cossec}(\theta)$$

em $0 < \theta < \pi$, que é a equação em coordenadas polares de uma reta horizontal passando por $(0, a)$.

Agora chegou o momento de verificar o seu aprendizado, tente resolver os seguintes exercícios.

5.1.5 Agora tente resolver!

1. Represente graficamente cada um dos seguintes pontos dados em coordenadas polares:

   a) $A\left(4, \dfrac{\pi}{4}\right)$

   b) $B\left(4, -\dfrac{\pi}{4}\right)$

   c) $C\left(-4, \dfrac{\pi}{4}\right)$

   d) $D\left(-4, -\dfrac{\pi}{4}\right)$

2. Determine as coordenadas cartesianas dos seguintes pontos:

   a) $A(7, \pi)$

   b) $B\left(5, -\frac{\pi}{6}\right)$

3. Determine as coordenadas polares dos seguintes pontos:

   a) $A(-2, 2\sqrt{3})$

   b) $B(4, -4)$

4. Represente geometricamente as seguintes curvas:

   a) $r = 4\,\text{sen}(\theta)$

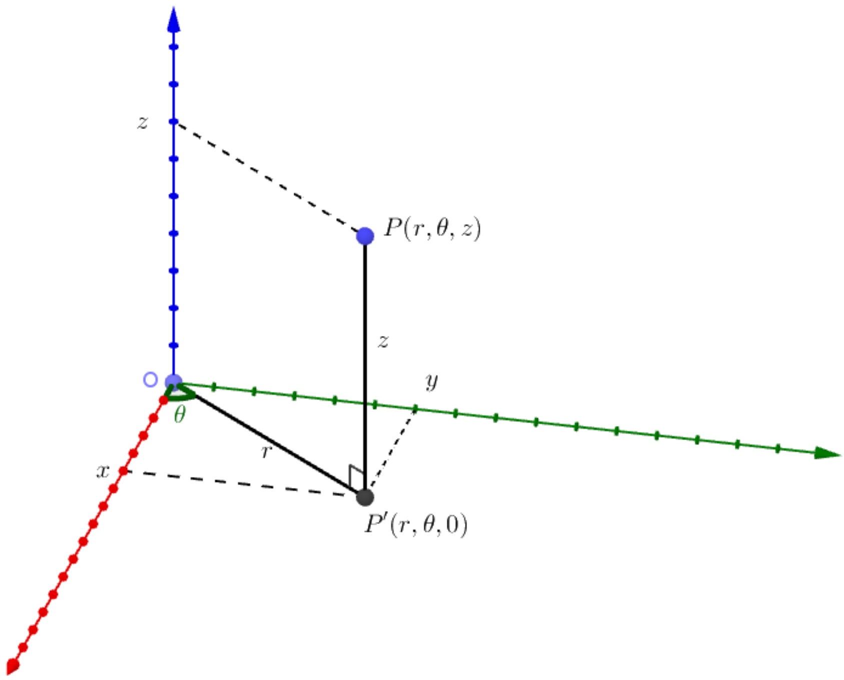
   b) $r = 1$

   c) $\theta = \frac{\pi}{4}$

5.2 Coordenadas Cilíndricas

O sistema de coordenadas cilíndricas é muito semelhante ao sistema de coordenadas cartesianas, exceto que usamos coordenadas polares para um ponto no plano horizontal e a cota z é a própria distância ao plano xOy, conforme a Figura 150.

Figura 150. Coordenadas Cilíndricas (r, θ, z)



Fonte: os autores

Assim, as coordenadas cilíndricas de um ponto são (r, θ, z), onde r e θ são coordenadas polares para a projeção vertical de P sobre o plano xOy. As equações relacionando coordenadas cartesianas e cilíndricas são:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z &= z \\ r^2 &= x^2 + y^2. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Analogamente ao sistema de coordenadas polares, para cada ponto (r, θ, z) do espaço, temos infinitas coordenadas cilíndricas que o representam, mas todo ponto distinto da origem possui pelo menos uma terna de coordenadas na qual $r > 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Os exemplos a seguir mostram como podemos fazer as mudanças de coordenadas cilíndricas para cartesianas e vice-versa de pontos no $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 5.5. *Escreva as coordenadas cartesianas do ponto* $A\left(5, -\frac{\pi}{3}, 3\right)$.

Solução: Nesse caso, temos que $r = 5$, $\theta = -\frac{\pi}{3}$ e $z = 3$. Assim, usando (5.3),

$$\begin{aligned} x &= 5\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{2} \\ y &= 5\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ z &= 3. \end{aligned}$$

Portanto, o ponto em coordenadas cartesianas é $A\left(\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}, 3\right)$.

Exemplo 5.6. *Escreva as coordenadas cilíndricas do ponto* $B(1, 1, 3)$.

Solução: Nesse caso, temos que $x = 1$, $y = 1$ e $z = 3$. Assim, primeiro usando a relação $r^2 = x^2 + y^2$, encontramos que $r = \sqrt{2}$ e por (5.3):

$$1 = \sqrt{2}\cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$1 = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

ou seja, $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$.

Portanto, o ponto em coordenadas cilíndricas é $B\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 3\right)$.

5.2.1 Equações Cilíndricas

Em coordenadas cilíndricas, usando as relações em (5.3), temos que:

- a equação $r = a$ descreve um cilindro inteiro de base circular, de raio a, em relação ao eixo Oz;
- a equação $\theta = \theta_0$ descreve o plano que contém o eixo Oz e forma uma ângulo θ_0 com o eixo Ox positivo;
- a equação $z = z_0$ descreve um plano perpendicular ao eixo Oz, passando pelo ponto $(0, 0, z_0)$.

A seguir, exemplificaremos algumas superfícies com suas respectivas equações cartesianas e cilíndricas:

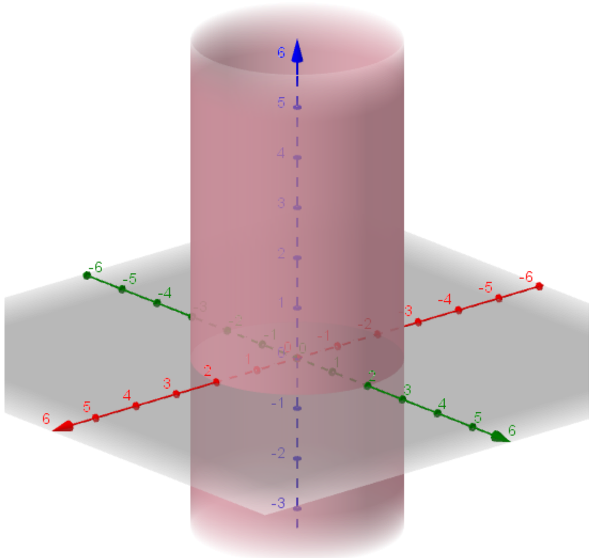
Cilindro:

Equação Cartesiana: $x^2 + y^2 = 4$ (z livre).

Equação Cilíndrica: $r = 2$ (z e θ livres ou $0 \leq \theta \leq 2\pi$).

Veja a Figura 151.

Figura 151. Cilindro $r = 2$



Fonte: os autores

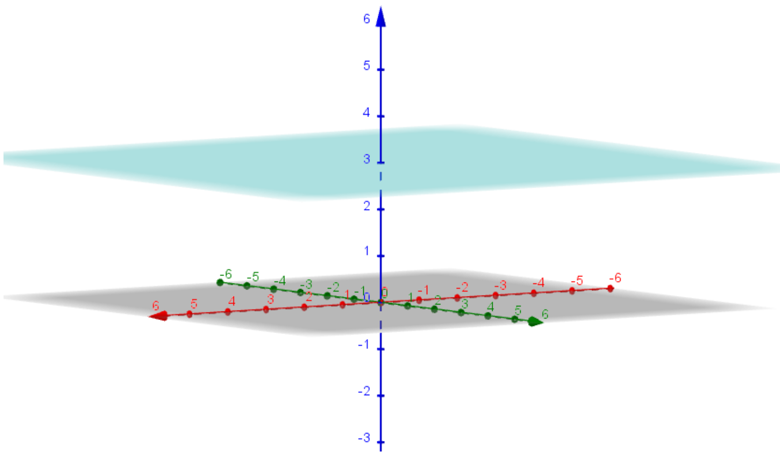
Plano perpendicular ao eixo Oz:

Equação Cartesiana: $z = 3$ (x e y livres).

Equação Cilíndrica: $z = 3$ (r e θ livres ou $0 \leq \theta \leq 2\pi$).

Veja a Figura 152.

Figura 152. Plano $z = 3$



Fonte: os autores

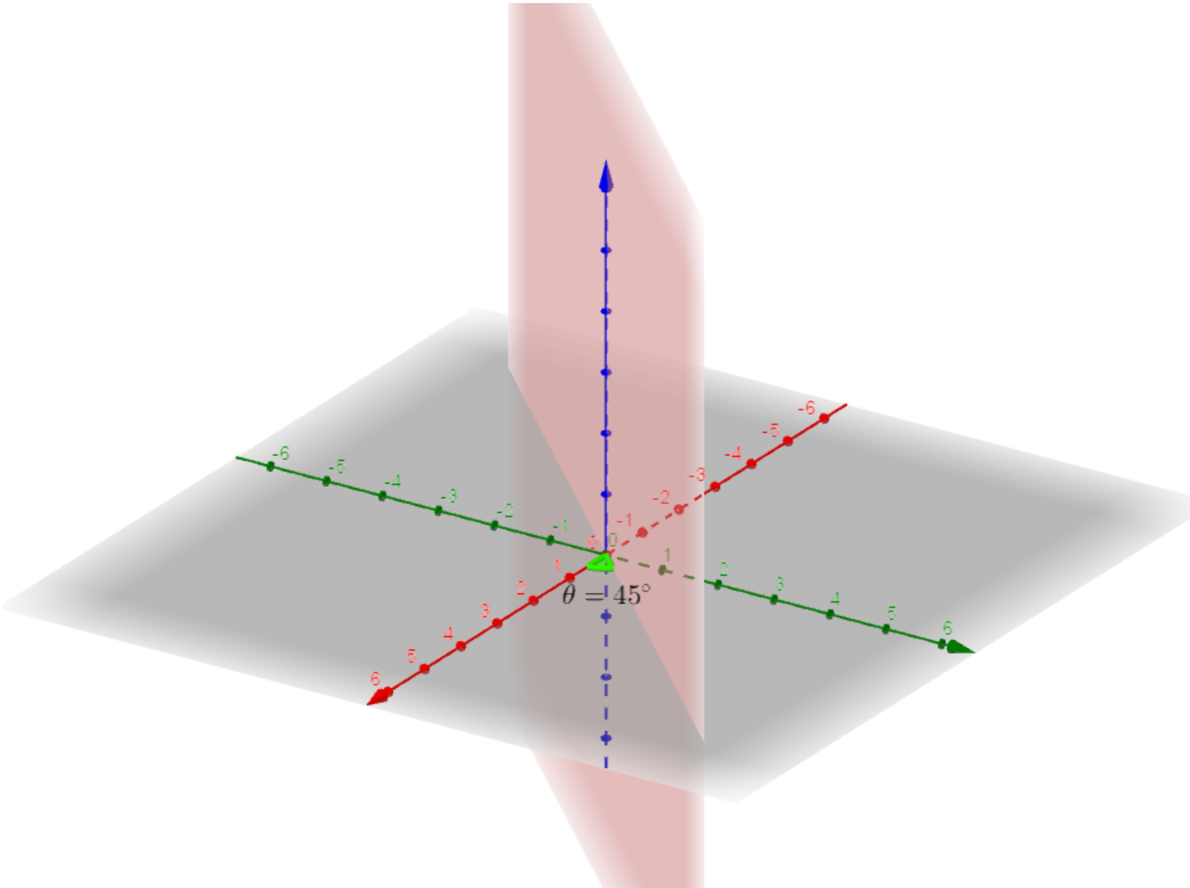
Plano na direção do eixo Oz:

Equação Cartesiana: $y = x$ (z livre).

Equação Cilíndrica: $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ (r e z livres).

Veja a Figura 153.

Figura 153. Plano $y = x$



Fonte: os autores

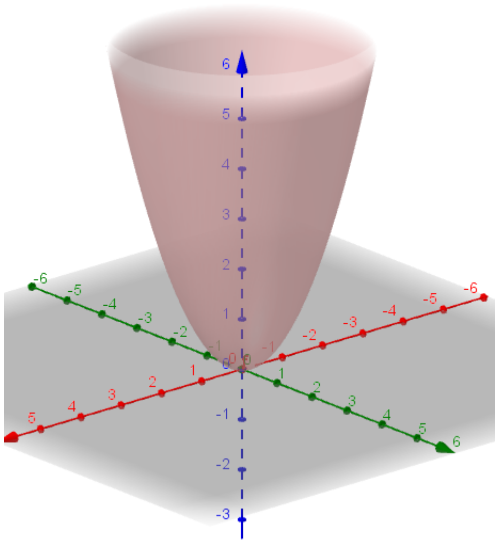
Paraboloide:

Equação Cartesiana: $z = x^2 + y^2$.

Equação Cilíndrica: $z = r^2$ (θ livre ou $0 \leq \theta \leq 2\pi$).

Veja a Figura 154.

Figura 154. Paraboloide $z = r^2$



Fonte: os autores

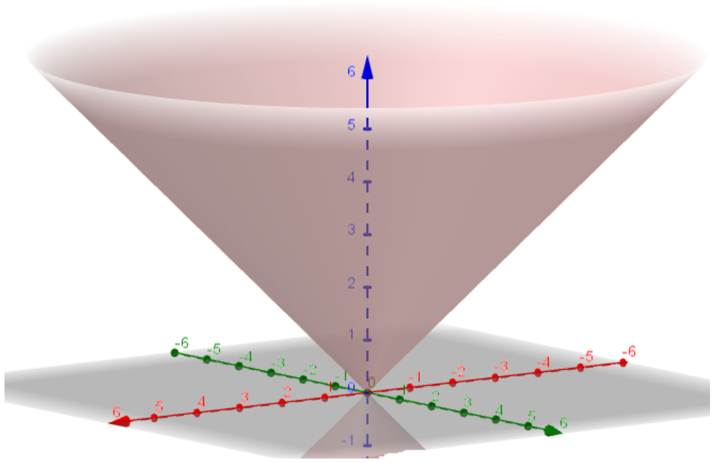
Cone:

Equação Cartesiana: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Equação Cilíndrica: $z = r$ (θ livre ou $0 \leq \theta \leq 2\pi$).

Veja a Figura 155.

Figura 155. Cone $z = r$



Fonte: os autores

Agora chegou o momento de verificar o seu aprendizado, tente resolver os seguintes exercícios.

5.2.2 Agora tente resolver!

1. Determine as coordenadas cartesianas do ponto $A\left(1, \dfrac{\pi}{4}, 2\right)$ e o represente graficamente.

2. Determine as coordenadas cilíndricas do ponto $B(1, -1, 5)$ e o represente graficamente.

3. Represente geometricamente as seguintes superfícies:

   a) $r = 1$

   b) $\theta = \frac{\pi}{3}$

   c) $z = -1$

5.3 Coordenadas Esféricas

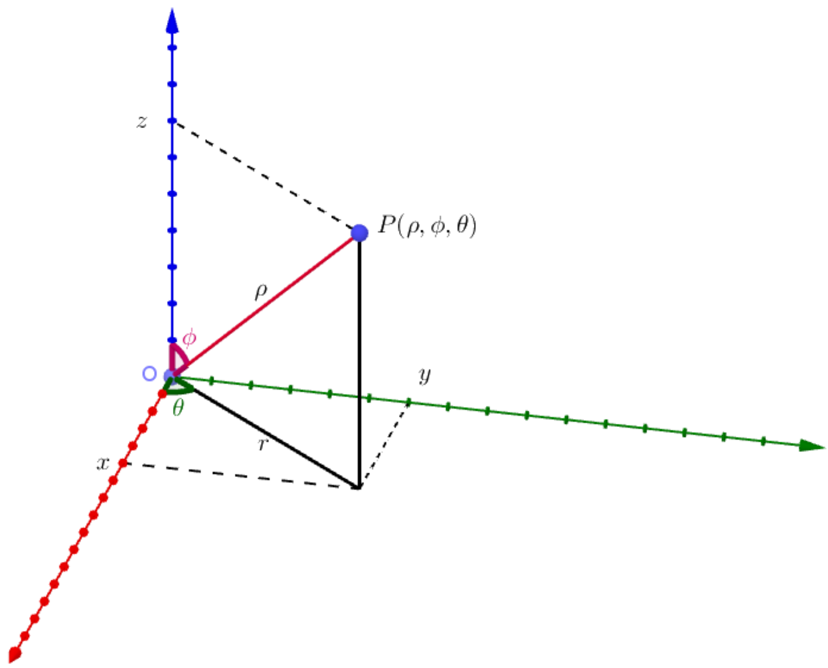
O sistema de coordenadas esféricas difere bastante do sistema de coordenadas cilíndricas e é usado principalmente para reescrever as equações de esferas (e outras superfícies que possuam uma simetria radial em relação à origem) de uma forma mais simples.

No sistema de coordenadas esféricas, um ponto no espaço é dado pelas coordenadas (ρ, θ, ϕ), onde o ângulo θ representa exatamente o mesmo ângulo do sistema de coordenadas cilíndricas. Então, θ localiza um ponto P em um plano contendo o eixo Oz e fazendo um ângulo θ com o eixo positivo x.

A distância entre P e a origem O é representada pela letra grega ρ (lê-se: rô): $\rho = |OP|$. Finalmente, o ângulo de eixo positivo z ao segmento de reta $\overline{OP}$ é representado pela letra grega ϕ (lê-se: fi).

Analogamente ao sistema de coordenadas polares e cilíndricas, existem infinitas representações na forma esféricas de um determinado ponto no $\mathbb{R}^3$. No entanto, dado um ponto $P(\rho, \theta, \phi)$ geralmente as coordenadas são escolhidas de modo que $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi$, conforme a Figura 156.

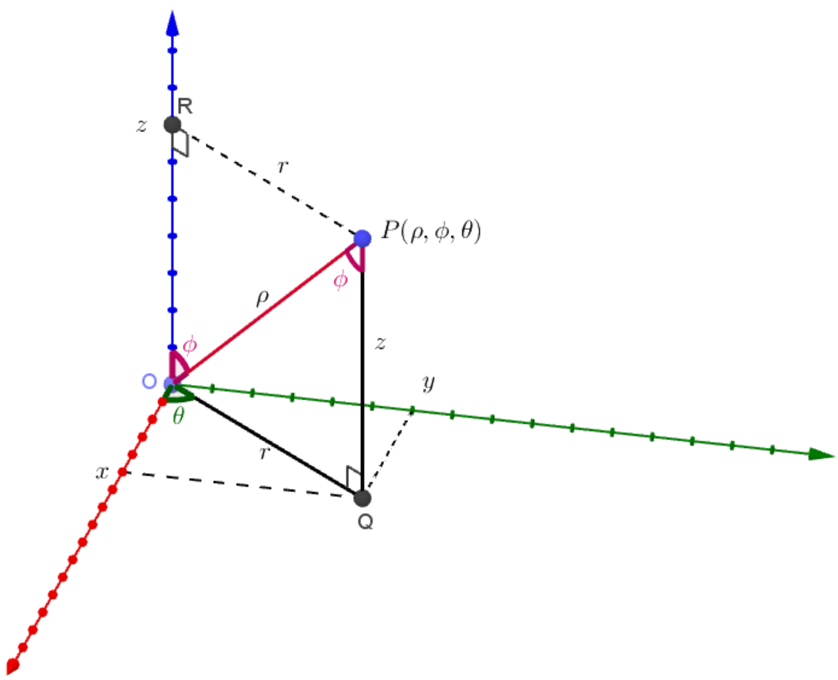
Figura 156. Coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ)



Fonte: os autores

Agora, observando a Figura 157, podemos analisar dois triângulos congruentes ORP e PQO, assim $\operatorname{sen}(\phi) = \dfrac{|\overline{OQ}|}{|\overline{OP}|} = \dfrac{r}{\rho}$, logo $r = \rho \operatorname{sen}(\phi)$.

Figura 157. Mudança de coordenadas esféricas



Fonte: os autores

Note que também temos $r^2 = x^2+y^2$ e, pelas equações $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, temos

$$x = \rho\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\theta)$$
$$y = \rho\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta).$$

Analogamente, do triângulo retângulo ORP, temos que $\cos(\phi) = \dfrac{|\overline{OR}|}{|\overline{OP}|} = \dfrac{z}{\rho}$. Portanto,

$$z = \rho\cos(\phi).$$

Assim, resumidamente, as equações que relacionam as coordenadas cartesianas e esféricas são:

$$\begin{aligned} x &= \rho\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\theta) \\ y &= \rho\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z &= \rho\cos(\phi) \\ \rho^2 &= x^2+y^2+z^2 \\ r &= \rho\,\mathrm{sen}(\phi) \\ r^2 &= x^2+y^2\ . \end{aligned} \tag{5.4}$$

A seguir, mostramos alguns exemplos:

Exemplo 5.7. *Converta o ponto* $A(3, 0, \pi)$ *para coordenadas cartesianas.*

Solução: Nesse caso, temos que $\rho = 3$, $\theta = 0$ e $\phi = \pi$, logo usando as equações (5.4) temos que

$$\begin{aligned} x &= 3\,\mathrm{sen}(\pi)\cos(0) = 0 \\ y &= 3\,\mathrm{sen}(\pi)\,\mathrm{sen}(0) = 0 \\ z &= 3\cos(\pi) = -3. \end{aligned}$$

Portanto, o ponto em coordenadas cartesianas é $A(0, 0, -3)$.

Exemplo 5.8. *Converta o ponto* $B\left(4, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ *para coordenadas cartesianas.*

Solução: Nesse caso, temos que $\rho = 4$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \frac{\pi}{6}$, logo usando (5.4):

$$\begin{aligned} x &= 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 0 = 0 \\ y &= 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = 2 \\ z &= 4\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Portanto, o ponto em coordenadas cartesianas é $B(0, 2, 2\sqrt{3})$.

Exemplo 5.9. *Converta o ponto* $C(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$ *para coordenadas esféricas.*

Solução: Nesse caso, temos que $x = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$ e $z = 2\sqrt{3}$.

Em primeiro lugar, usando a equação $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, temos $\rho^2 = (\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2 = 2 + 2 + 12 = 16$, ou seja, $\rho = 4$.

Em seguida, vamos encontrar o valor de ϕ usando as equações $z = \rho\cos(\phi)$, $r = \rho\,\mathrm{sen}(\phi)$, onde $r^2 = x^2 + y^2$, logo

$$r^2 = (\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2 \quad \Rightarrow \quad r = 2$$

$$2\sqrt{3} = 4\cos(\phi) \quad \Rightarrow \quad \cos(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2 = 4\,\mathrm{sen}(\phi) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{sen}(\phi) = \frac{1}{2}.$$

Portanto, $\phi = \dfrac{\pi}{6}$. Para finalizar, vamos encontrar θ usando as equações $x = \rho\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\theta)$ e $y = \rho\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta)$, logo

$$\sqrt{2} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\sqrt{2} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{sen}(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

ou seja, $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$.

Portanto, o ponto em coordenadas esféricas é $C\left(4, -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{6}\right)$.

A seguir, exemplificaremos algumas superfícies com suas respectivas equações cartesianas e esféricas:

5.3.1 Equações Esféricas

Em coordenadas esféricas, usando as relações em (5.4), temos que:

- a equação $\rho = a$ descreve uma esfera de raio a, centrada na origem;
- a equação $\phi = \phi_0$ descreve um cone cujo vértice está na origem e seu eixo é o eixo Oz.

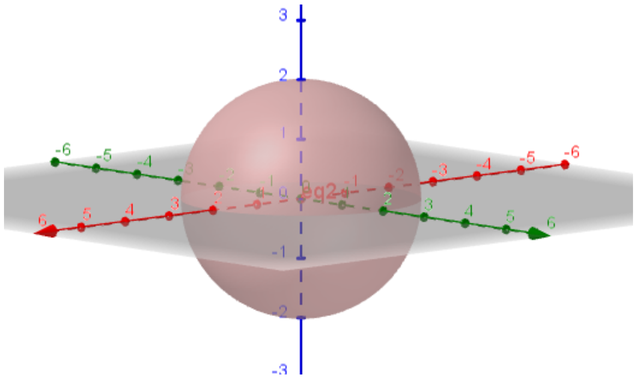
Esfera:

Equação Cartesiana: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Equação Esférica: $\rho = 2$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi)$.

Veja Figura 158.

Figura 158. Esfera $\rho = 2$



Fonte: os autores

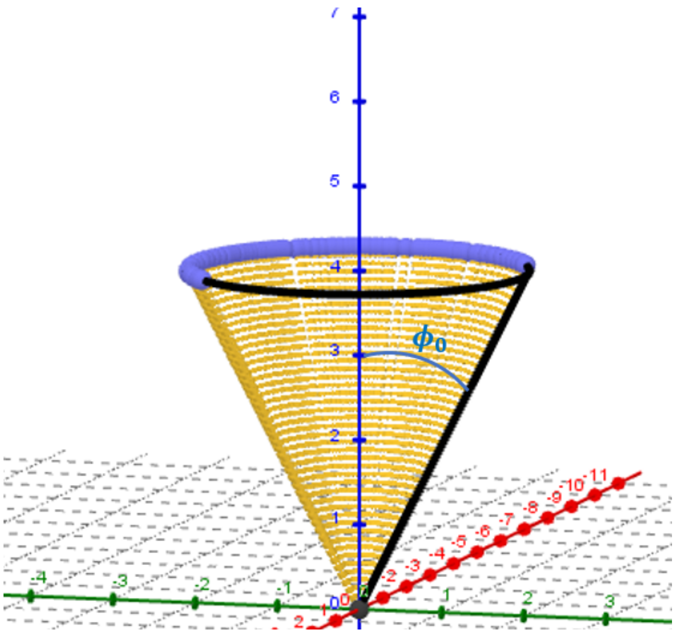
Cone:

Equação Cartesiana: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Equação Esférica: $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$ (ρ é livre e $0 \leq \theta \leq 2\pi$).

Veja a Figura 159.

Figura 159. Cone $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$



Fonte: os autores

Agora chegou o momento de verificar o seu aprendizado, tente resolver os seguintes exercícios.

5.3.2 Agora tente resolver!

1. Determine as coordenadas cartesianas do ponto esférico $A\,(3, 0, \pi)$.

2. Represente geometricamente as seguintes superfícies:

   a) $\rho = 1$

   b) $\phi = \frac{\pi}{3}$

5.4 Exercícios

1. Represente geometricamente, cada um dos seguintes pontos dados em coordenadas polares:

   a) $A\left(-3, \dfrac{4\pi}{3}\right)$

   b) $B\left(2, \dfrac{2\pi}{3}\right)$

   c) $C\left(4, \dfrac{11\pi}{6}\right)$

   d) $D\left(-5, \dfrac{\pi}{3}\right)$

   e) $E\left(6, -\dfrac{3\pi}{4}\right)$

2. Determine as coordenadas cartesianas dos seguintes pontos polares:

   a) $A(3, 0)$

   b) $B\left(-4, \dfrac{\pi}{3}\right)$

3. Determine as coordenadas polares dos seguintes pontos cartesianos:

   a) $A(1, 1)$

   b) $B\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

4. Represente geometricamente, no plano cartesiano, as seguintes equações polares:

   a) $r = 3$

   b) $r = 2\cos(\theta)$

   c) $\theta = \frac{\pi}{3}$

5. Determine as coordenadas cartesianas do ponto cilíndrico $A\left(-2, \dfrac{\pi}{3}, 5\right)$.

6. Determine as coordenadas cilíndricas do ponto cartesiano $B(-1, 1, 2)$.

7. Represente geometricamente as seguintes equações cilíndricas:

   a) $r = 3$

   b) $r = 4\,\mathrm{sen}(\theta)$

   c) $\theta = \frac{\pi}{6}$

   d) $z = 1$

8. Determine as coordenadas cartesianas do ponto esférico $A\,(3, 0, \pi)$.

9. Determine as coordenadas esféricas do ponto cartesiano $B(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3})$.

10. Represente geometricamente as seguintes equações esféricas:

    a) $\rho = 4$

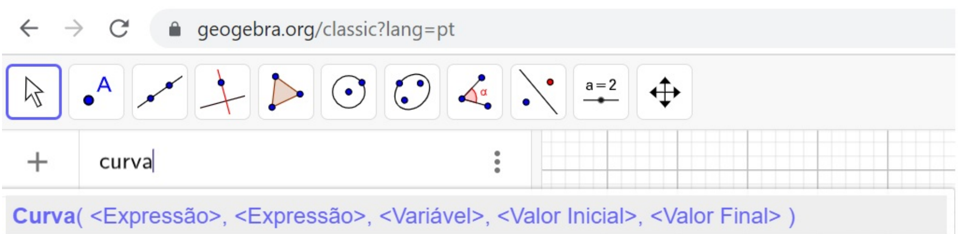
    b) $\phi = \frac{\pi}{6}$

Exercícios com o GeoGebra

Usando o aplicativo GeoGebra (pode ser o Clássico online), podemos usar o comando “curva” para fazer a representação geométrica de algumas curvas e/ou superfícies utilizando as mudanças de coordenadas estudadas neste capítulo.

Na Figura 160, visualizamos as entradas necessárias para esboçar uma curva no $\mathbb{R}^2$, onde as duas primeiras entradas correspondem as mudanças para coordenadas polares das variáveis x e y, respectivamente. A terceira entrada é a variável livre θ (mas aqui por simplicidade vamos usar t) e as últimas duas entradas correspondem o valor inicial e final dessa variável livre, respectivamente.

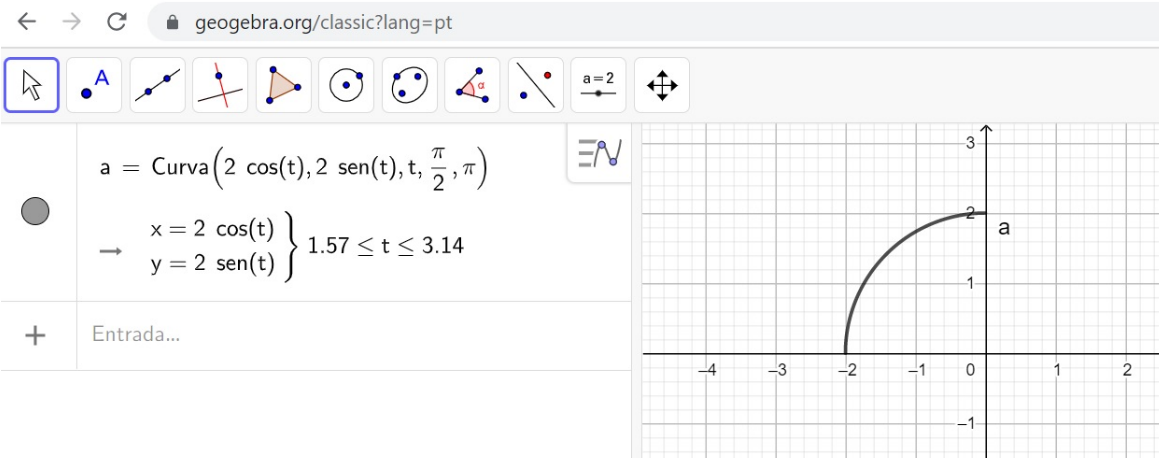
Figura 160. Comando Curva no GeoGebra



Fonte: os autores

Por exemplo, digitando no campo de entrada “curva($2\cos(t)$, $2\,\mathrm{sen}(t)$, t, $\frac{\pi}{2}$, π)”, temos somente a parte no terceiro quadrante da circunferência de raio 2, conforme a Figura 161.

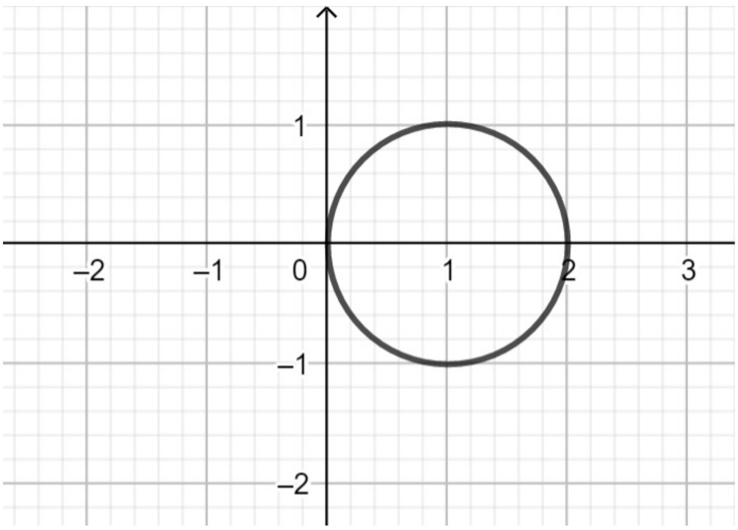
Figura 161. Circunferência de raio 2 no terceiro quadrante



Fonte: os autores

Além disso, o GeoGebra reconhece as equações polares, em função da variável θ. Por exemplo, digitando no campo de entrada "$r = 2\cos(\theta)$", temos a curva da Figura 162.

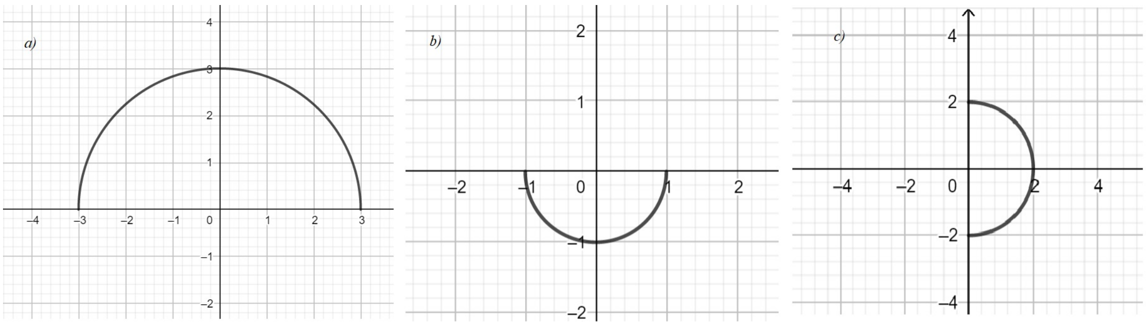
Figura 162. Circunferência $r = 2\cos(\theta)$



Fonte: os autores

1. Usando o aplicativo GeoGebra e o comando curva, represente geometricamente os seguintes itens:

Figura 163. Itens a), b) e c)



Fonte: os autores

2. Usando o aplicativo GeoGebra, represente geometricamente as seguintes curvas:

   a) $r = 2\,\text{sen}(\theta)$

   b) $r = 4\,\text{sen}(\theta)$

   c) $r = -2\,\text{sen}(\theta)$

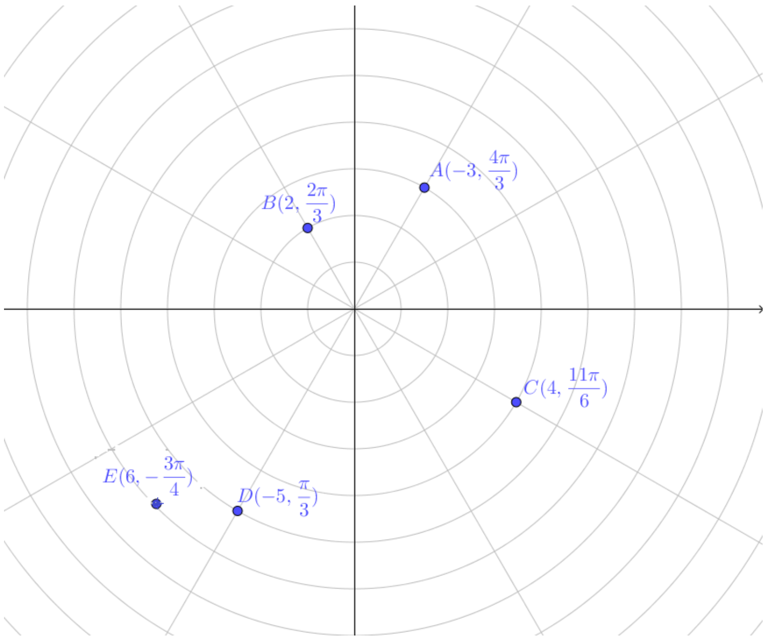
   d) $r = 4\cos(\theta)$

   e) $r = -2\cos(\theta)$

Gabarito

1. Respostas na Figura 164 abaixo:

Figura 164. Resposta Questão 1



Fonte: os autores

2. a) $A(3, 0)$

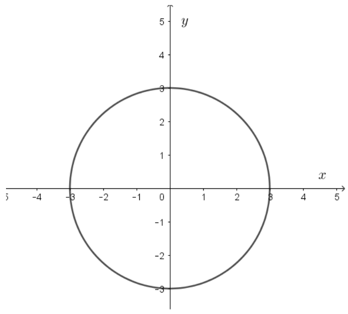
   b) $B(-2, -2\sqrt{3})$

3. a) $A\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$

   b) $B\left(3, -\dfrac{\pi}{4}\right)$

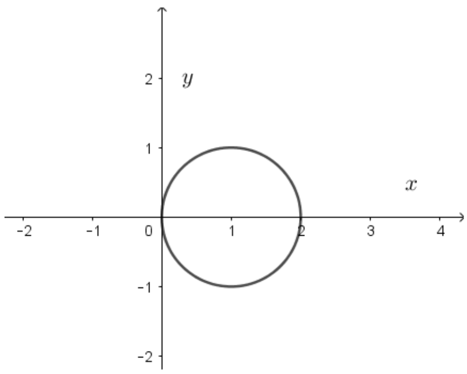
4. Respostas a seguir:

Figura 165. Resposta letra a



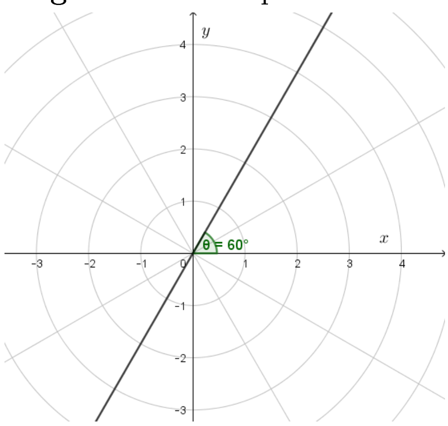
Fonte: os autores

Figura 166. Resposta letra b



Fonte: os autores

Figura 167. Resposta letra c



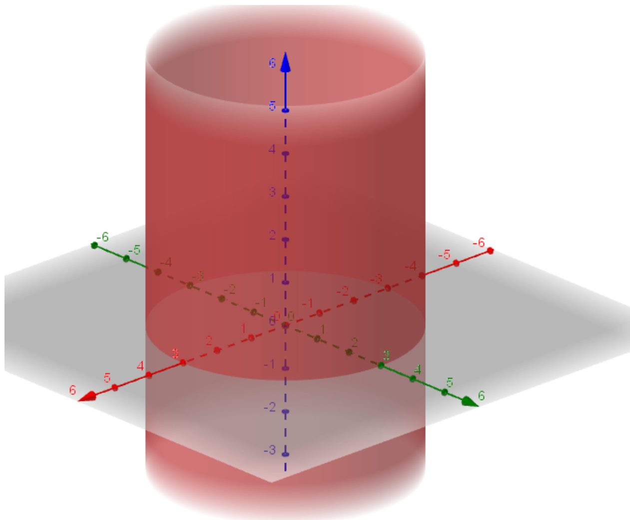
Fonte: os autores

5. $A\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},5\right)$.

6. $B\left(\sqrt{2},\dfrac{3\pi}{4},2\right)$.

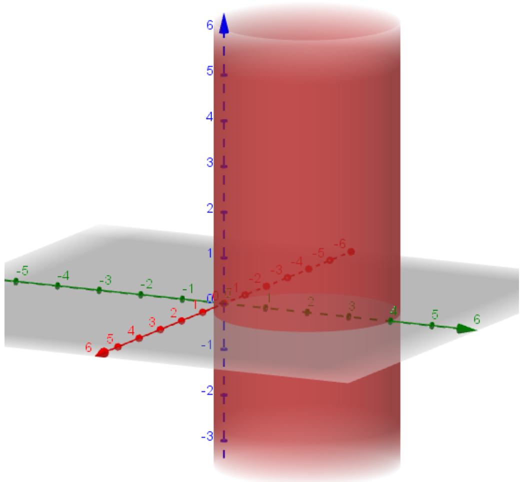
7. Respostas a seguir:

Figura 168. Resposta letra a



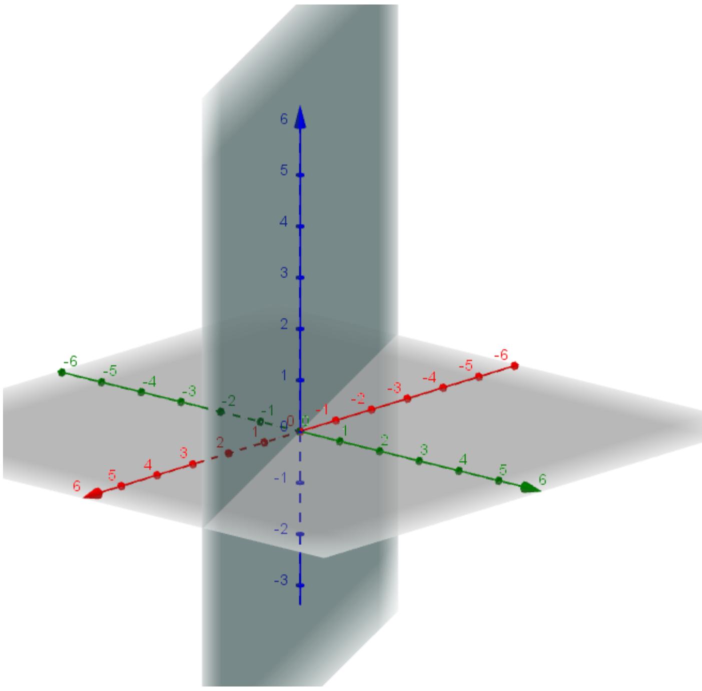
Fonte: os autores

Figura 169. Resposta letra b



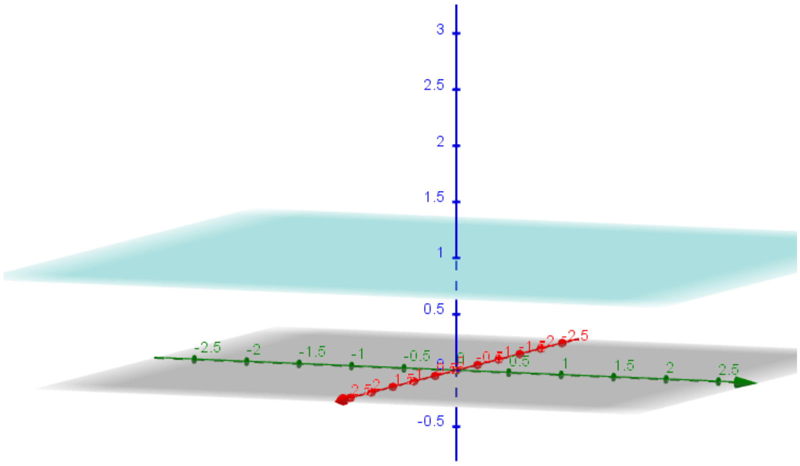
Fonte: os autores

Figura 170. Resposta letra c



Fonte: os autores

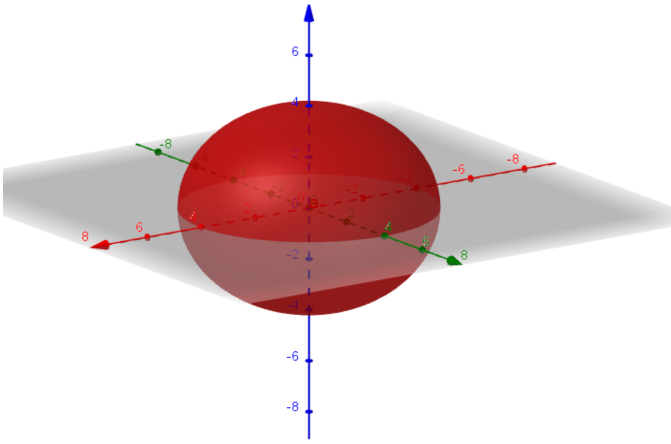
Figura 171. Resposta letra d



Fonte: os autores

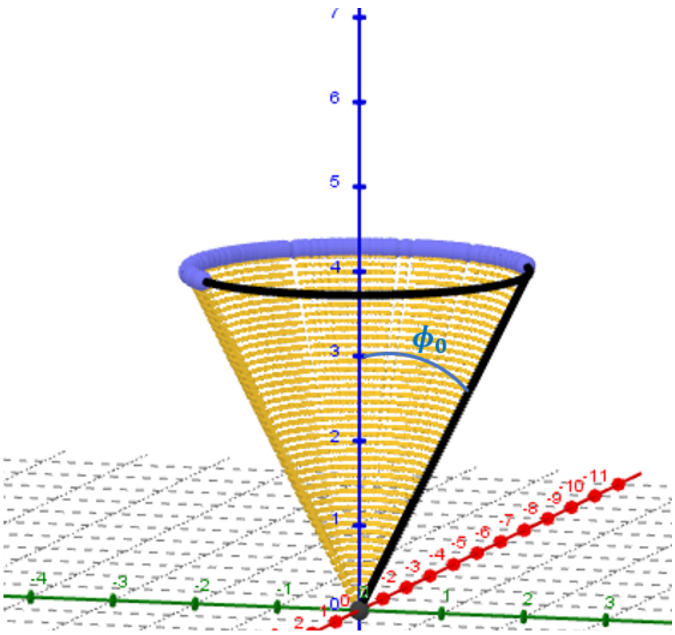
8. $A(0, 0, -3)$
9. $B\left(4, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{6}\right)$.
10. Respostas a seguir:

Figura 172. Resposta letra a



Fonte: os autores

Figura 173. Cone $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$



Fonte: os autores

Referências

1. Steinbruch, A.; Winterle, P. *Geometria Analítica*, São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

2. Winterle, P. *Vetores e Geometria Analítica*, São Paulo: Makron Books, 2 ed., 2014.

3. Boulos, P. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*, São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

4. Weir, M. D. *Cálculo (George B. Thomas)*, Volume II, São Paulo: Addison Wesley, 2009.

5. Santos, Fabiano J. *Geometria Analítica*, Porto Alegre: Bookman, 2009.

EDITORA E GRÁFICA DA FURG
CAMPUS CARREIROS
CEP 96203 900
editora@furg.br

ISBN 978-65-5754-166-1

9 786557 541661