

## XXV SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS

# COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS INERCIAL E MUSKINGUM-CUNGE TODINI PARA A SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE VAZÃO NA BACIA DO RIO IJUÍ

*Lara Cruz Nonnemacher<sup>1</sup>, Nicole Viegas Ramalho<sup>2</sup> & Fernando Mainardi Fan<sup>3</sup>*

**Abstract:** The computational simulation of flow can be conducted using different approaches, depending on the characteristics of the basin, data availability, computational capacity and others variables. The inertial model disregards the advective inertia term of the Saint-Venant equations, simplifying the application. However, the Muskingum-Cunge-Todini model also originates from the Saint-Venant Equations but modifies the calculation of wave celerity and diffusion coefficients. In this study, a comparison was made between these two models using a sub-basin of the Ijuí River basin. The Nash-Sutcliffe coefficients and volume errors obtained, indicated slightly better results with the Inertial model, but the processing time of the MCT was approximately 35% shorter than Inertial. The slight superiority of the inertial model can be explained by the absence of a floodplain, as the MCT is more indicated for scenarios involving a floodplain.

**Resumo:** A simulação computacional da propagação de vazões pode ser realizada através de diversos métodos, dependendo das características da bacia, da disponibilidade de dados, da capacidade computacional, entre outras variáveis. O modelo Inercial desconsidera o termo de inércia advectiva das Equações de Saint-Venant, simplificando sua aplicação. Já o modelo Muskingum-CungeTodini também parte das Equações de Saint-Venant, porém modifica o cálculo da celeridade da onda e do coeficiente de difusão. No presente trabalho, realizou-se a comparação entre estes dois modelos utilizando como caso de estudo uma sub bacia da bacia do rio Ijuí. Os coeficientes de Nash-Sutcliffe e os erros de volume obtidos indicaram resultados levemente melhores com o modelo Inercial, porém o tempo de processamento do MCT foi cerca de 35% menor do que o do Inercial. A pequena superioridade do modelo Inercial pode ser explicada pela ausência de planície de inundação, visto que o MCT é mais indicado para quando há tal planície.

**Palavras-Chave** – Simulação hidrológica; Modelo Inercial; Muskingum-Cunge-Todini.

## INTRODUÇÃO

---

1) UFRGS: Av. Bento Gonçalves, 9500, Porto Alegre, RS, CEP: 91501-970, (51)3308 6324, lara\_nonne@hotmail.com

2) UFRGS: Av. Bento Gonçalves, 9500, Porto Alegre, RS, CEP: 91501-970, (51)3308 6324, nicolevramalho@gmail.com.

3) UFRGS: Av. Bento Gonçalves, 9500, Porto Alegre, RS, CEP: 91501-970, (51)3308 6324, fernando.fan@ufrgs.br.

A propagação de ondas de cheia em rios é um fenômeno amplamente estudado ao redor do mundo e a sua modelagem computacional vem sendo aprimorada com o desenvolvimento de novas metodologias. Os métodos de simulação hidrológica aplicam a resolução numérica de equações de difusão convectiva ou das equações de Saint-Venant (KARAHAN et al., 2013).

Em 1938, McCarthy propôs uma metodologia de simulação hidrológica que se popularizou sob o nome de método Muskingum. Cunge (1969) estendeu o método para parâmetros variáveis no tempo, cujos valores poderiam ser determinados como função de uma vazão de referência, a partir da compreensão de que o modelo Muskingum poderia ser visto como uma aproximação cinemática de primeira ordem do modelo de onda difusa.

Já em 1980, Cunge et al perceberam que o método Muskingum é equivalente à solução da onda cinemática com um esquema numérico de diferenças finitas, e que a difusão da onda de cheia resultante da aplicação do modelo Muskingum era o resultado de um erro numérico dependente dos intervalos de discretização utilizados nas derivadas do tempo e do espaço (PONTES e COLLISCHON, 2012). Dessa forma, o modelo Muskingum-Cunge não linear (MCNL) considera os parâmetros do modelo (K e X) como variáveis no tempo, de forma que a difusão causada pelo erro numérico se iguale à difusão real da onda de cheia (PONTES e COLLISCHON, 2015). O método em que os parâmetros do modelo (K e X) não se alteram ao longo do tempo, denomina-se Muskingum-Cunge linear (MCL; TUCCI, 2005).

Diversos modelos foram desenvolvidos a partir do modelo Muskingum para simulações da onda de cheia, sendo alguns bastante específicos e outros, aplicáveis de forma geral (WANG et al, 2023). No entanto, o modelo Muskingum-Cunge não linear apresenta um problema em relação à conservação do volume. Uma das metodologias propostas para a resolução deste problema foi desenvolvida por Todini (2007). O autor percebeu uma inconsistência na forma como eram obtidas as equações para a aplicação do MCNL a partir das equações originais de Muskingum-Cunge e desenvolveu uma metodologia que contempla a conservação de volume, denominada método Muskingum-CungeTodini (MCT; PONTES e COLLISCHON, 2012).

Outro método utilizado para a simulação da propagação de vazão é a aproximação inercial das Equações de Saint-Venant. O método consiste em considerar nulo o termo da advecção de quantidade de movimento para dentro do volume de controle, simplificando a equação da quantidade de movimento (FAN et al, 2014).

O modelo havia sido aplicado por Pontes e Collischonn (2012) em um trecho do rio São Francisco, área com grandes planícies de inundação, onde obtiveram resultados melhores com o MCT do que com o modelo Inercial. Nesta linha, o presente estudo tem como objetivo a comparação dos métodos MCT e inercial a partir da aplicação de ambos na Bacia Hidrográfica do Rio Ijuí, localizada no noroeste do Rio Grande do Sul, a partir das métricas estatísticas do coeficiente de eficiência Nash-Sutcliffe e do erro de volume entre as séries de vazões observadas e simuladas.

## **MODELO INERCIAL**

A representação do escoamento em um rio é realizada através das Equações de Saint-Venant, as quais consistem em duas equações: a equação da continuidade (1) e a da quantidade de movimento (2).

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{Q^2}{A}\right)}{\partial x} + gA \frac{\partial h}{\partial x} = gAS_0 - gAS_f \quad (2)$$

Onde  $Q$  é a vazão,  $A$  é a área da seção transversal ao escoamento,  $x$  é a distância longitudinal,  $t$  é o tempo,  $h$  é a profundidade do rio,  $S_0$  é a declividade do fundo do rio,  $S_f$  é a perda de energia por atrito e  $g$  é a aceleração da gravidade.

O modelo inercial considera nulo o termo da advecção de quantidade de movimento para dentro do volume de controle, de forma que a equação 2 se torna:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial h}{\partial x} = gAS_0 - gAS_f \quad (3)$$

Dessa forma, o algoritmo que representa o modelo inercial utiliza a equação da continuidade na forma da equação 4, e a equação da quantidade de movimento na forma da equação 5.

$$h_j^{i+1} = h_j^i - \frac{\Delta t}{B \cdot \Delta x} \left( Q_{j+\frac{1}{2}}^{i+1} - Q_{j-\frac{1}{2}}^{i+1} \right) \quad (4)$$

$$Q_{j+\frac{1}{2}}^{i+1} = \frac{Q_{j+\frac{1}{2}}^i - gB\Delta t h_{j+\frac{1}{2}}^i \frac{y_{j+1}^i - y_j^i}{\Delta x}}{1 + g\Delta t \frac{Q_{j+\frac{1}{2}}^i n^2}{B} \left( h_{j+\frac{1}{2}}^i \right)^{\frac{7}{3}}} \quad (5)$$

Onde o  $B$  é a largura da seção transversal,  $\Delta t$  é passo de tempo, o índice  $j$  refere-se à posição no espaço e o índice  $i$  refere-se à situação no tempo. Assim,  $h_j^i$  é a profundidade  $h$  na posição  $j$ , no instante de tempo  $i$ ;  $Q_{j+\frac{1}{2}}^{i+1}$  é a vazão na saída do subtrecho  $j$ , no intervalo de tempo  $i+1$ .

Para mais detalhes sobre o modelo Inercial, recomenda-se consultar Fan et al. (2014).

## MODELO MUSKINGUM-CUNGE-TODINI

Todini (2007) percebeu duas inconsistências no modelo Muskingum-Cunge, sendo elas: (i) que a perda no balanço de massa se deve ao uso de parâmetros variáveis no tempo, o que viola as premissas do modelo Muskingum original, que requer parâmetros constantes no tempo; e (ii) que os parâmetros estimados pelo método de Cunge violam as duas equações básicas da formulação de Muskingum.

Para a resolução dos problemas detectados, Todini acrescentou um parâmetro  $\beta$  no cálculo do coeficiente de Courant e do coeficiente de difusão, o qual corresponde à razão entre celeridade e velocidade da onda. Dessa forma, o algoritmo do modelo MCT obedece às equações 6 a 15.

$$Qref_{j+1}^i = \frac{Q_j^i + Q_{j+1}^i}{2} \quad (6)$$

$$Qref_{j+1}^{i+1} = \frac{Q_j^{i+1} + Q_0}{2} \quad (7)$$

$$c_{j+1}^i = \frac{5}{3} \frac{S_0^{0.3}}{n^{0.6} B^{0.4}} Qref_{j+1}^i \quad (8)$$

$$\beta_{j+1}^{*i} = \frac{c_{j+1}^i A_{j+1}^i}{Qref_{j+1}^i} \quad (9)$$

$$C_{j+1}^{*i} = \frac{c_{j+1}^i \Delta t}{\Delta x \beta_{j+1}^{*i}} \quad (10)$$

$$D_{j+1}^{*i} = \frac{Qref_{j+1}^i}{c_{j+1}^i \Delta x \beta_{j+1}^{*i} B S_0} \quad (11)$$

$$C1 = \frac{-1 + C_{j+1}^{*i+1} + D_{j+1}^{*i+1}}{1 + C_{j+1}^{*i+1} + D_{j+1}^{*i+1}} \quad (12)$$

$$C2 = \frac{1 + C_{j+1}^{*i+1} - D_{j+1}^{*i+1}}{1 + C_{j+1}^{*i+1} + D_{j+1}^{*i+1}} \quad (13)$$

$$C3 = \frac{1 - C_{j+1}^{*i+1} + D_{j+1}^{*i+1}}{1 + C_{j+1}^{*i+1} + D_{j+1}^{*i+1}} \quad (14)$$

$$Q_{j+1}^{i+1} = C1 \cdot Q_j^{i+1} + C2 \cdot Q_j^i + C3 \cdot Q_{j+1}^i \quad (15)$$

Onde  $c$  é a celeridade,  $A$  é a área da seção transversal,  $Qref$  é a vazão de referência utilizada,  $C^*$  é o número de Courant,  $D^*$  é o coeficiente de difusão e  $C1$ ,  $C2$  e  $C3$  são parâmetros do modelo.

Para mais detalhes sobre o método Muskingum-CungeTodini, recomenda-se consultar Todini (2007) e Pontes e Collischonn (2012).

## MODELO DE GRANDES BACIAS

O Modelo de Grandes Bacias (MGB), desenvolvido por Collischonn (2001), é um modelo que realiza a simulação dos processos hidrológicos em bacias de grande escala. O modelo baseia-se em equações conceituais para simular o ciclo hidrológico terrestre, incluindo balanço de água e energia no solo, evapotranspiração, interceptação de água no dossel das plantas, escoamento superficial, subsuperficial e subterrâneo, além de equações físicas para representar a propagação de vazões ao longo da rede de drenagem (COLLISCHON et al, 2020). A Figura 1 apresenta uma representação esquemática do ciclo hidrológico simulado pelo MGB.

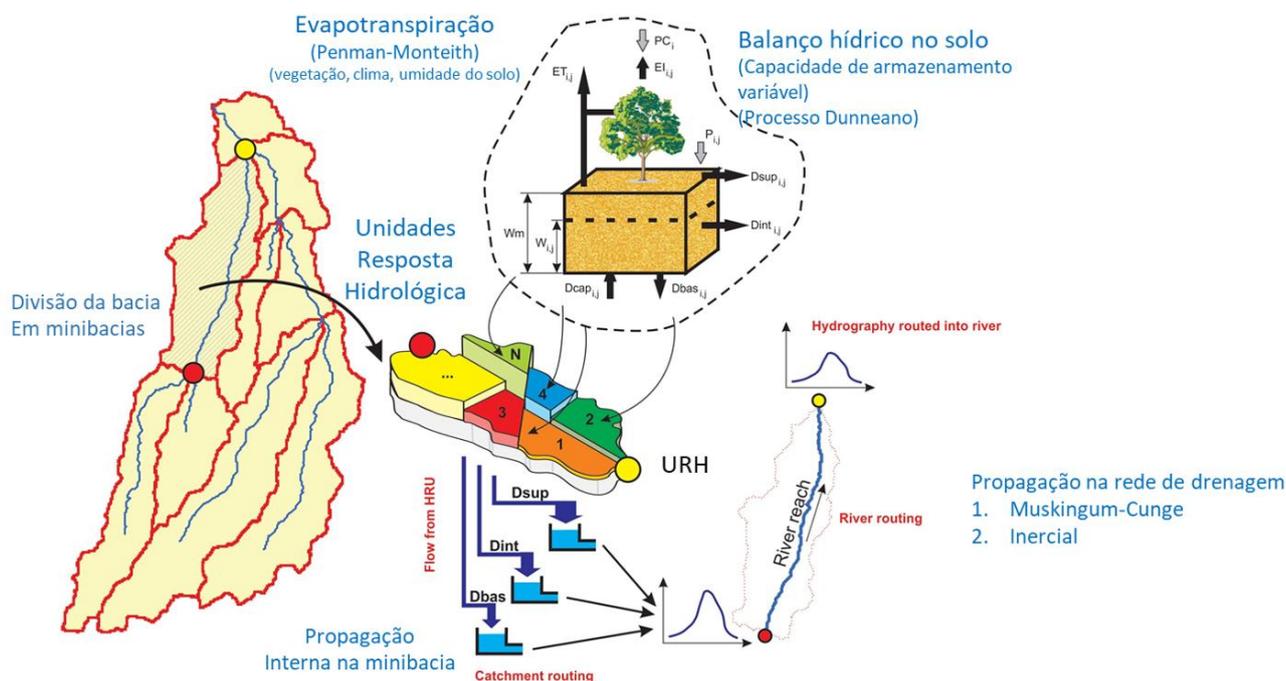


Figura 1. Representação esquemática do ciclo hidrológico simulado pelo MGB (Fonte: COLLISCHONN et al, 2020).

As simulações do presente estudo foram realizadas aplicando os dois métodos no MGB, sendo realizada a calibração dos parâmetros de vegetação e solo para o modelo inercial. Os parâmetros foram aplicados posteriormente ao modelo MCT sem alteração.

## ÁREA DE ESTUDO

A Bacia Hidrográfica do Rio Ijuí, localizada na Região Hidrográfica da Bacia do Rio Uruguai, possui área de 10.766 km<sup>2</sup> e população estimada de 348.203 habitantes (SEMA, 2020). A região foi escolhida para o estudo devido à disponibilidade de estações fluviométricas, pluviométricas e climatológicas.

O rio Ijuí tem extensão de aproximadamente 300 km, e caracteriza-se por ter geometria encaixada e sem planícies de inundação. A bacia é localizada na região do Planalto das Missões, o qual apresenta formas de relevo bastantes homogêneas definidas por colinas suaves, regionalmente conhecidas por coxilhas, esculpidas em rochas vulcânicas, com solos bem desenvolvidos. Além disso, caracteriza-se por um relevo de dissecação homogênea formando colinas e aprofundamento dos vales fluviais, onde o curso do rio ser dado pelas linhas de falhamentos e fraturas das rochas basálticas (SCHEREN & ROBAINA, 2019). Neste estudo, realizou-se a simulação de uma sub bacia de 5.547 km<sup>2</sup>, conforme apresentado na Figura 2.

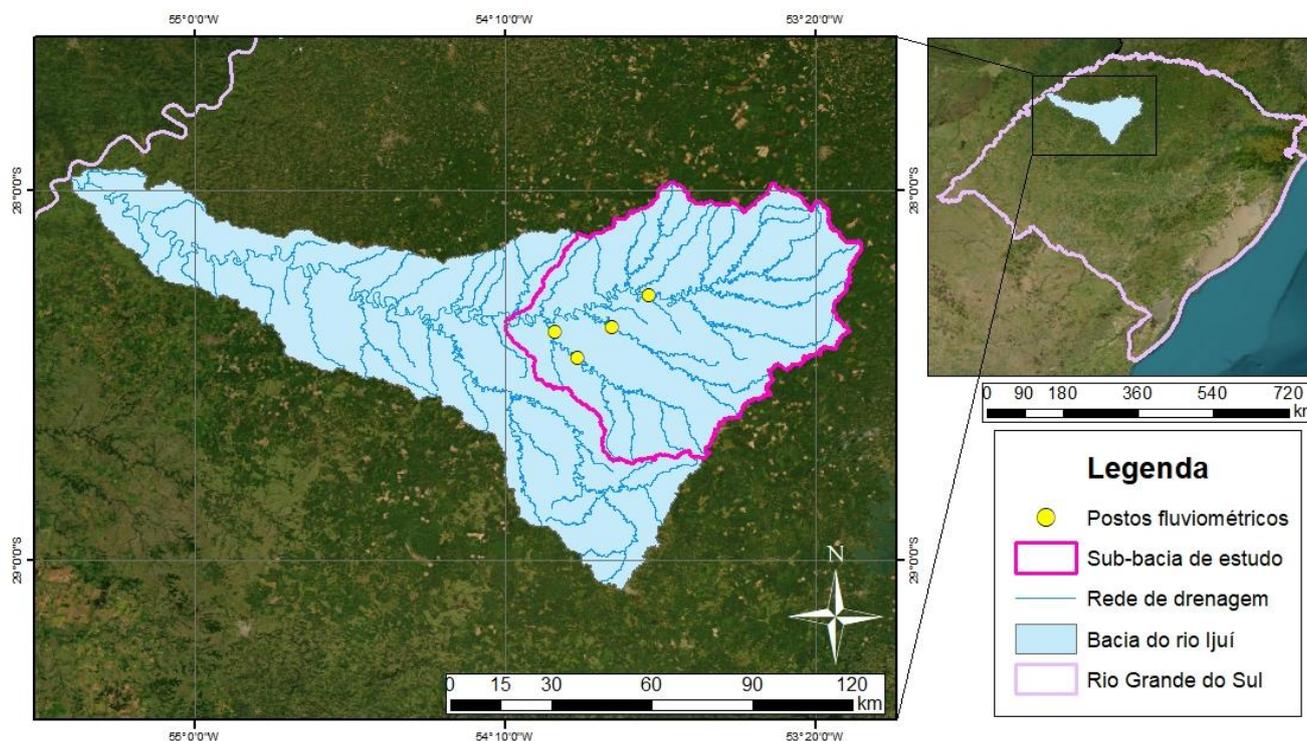


Figura 2. Localização da bacia de estudo.

## RESULTADOS

A atribuição de parâmetros do solo foi realizada com os dados de vazão, precipitação e clima do período entre 1990 e 2020 com o modelo inercial, utilizando os postos apresentados na Figura 3. Os valores obtidos são apresentados nas Tabelas 1 e Tabela 2.

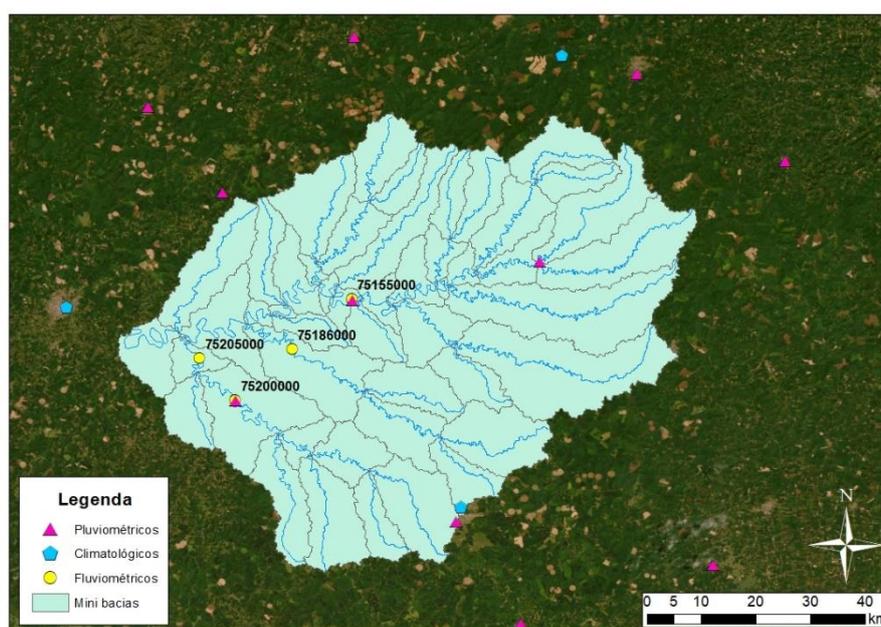


Figura 3. Postos fluviométricos, pluviométricos e climatológicos e delimitação de mini bacias.

Tabela 1. Parâmetros do solo definidos após a atribuição.

Classedo solo	Wm	b	Kbas	Kint	XL	CAP	Wc
WetlandForest	600	0.12	5	4	0.7	0	0.1
WetlandSavanna	600	0.12	5	4	0.7	0	0.1
WetlandFarmland	600	0.12	5	4	0.7	0	0.1
PlateauForest	200	0.12	5	4	0.7	0	0.1
PlateauSavanna	200	0.12	5	4	0.7	0	0.1
PlateauFarmland	200	0.12	5	4	0.7	0	0.1
HillslopeForest	100	0.12	5	4	0.7	0	0.1
HillslopeSavanna	100	0.12	5	4	0.7	0	0.1
HillslopeFarmland	100	0.12	5	4	0.7	0	0.1
Semi-permeável	50	0.12	5	4	0.7	0	0.1
Água	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 2. Parâmetros relativos ao escoamento.

CS	10
CI	100
CB (h)	1200
QB (m <sup>3</sup> /s.km <sup>2</sup> )	0.01

Onde Wm representa a capacidade de armazenamento de água no solo, b representa a relação entre armazenamento e saturação, Kbas controla o escoamento subterrâneo, Kint controla o escoamento sub-superficial, XL controla a forma da curva de redução do do reservatório sub-superficial, CAP representa a água do reservatório subterrâneo que retorna ao solo (ascensão capilar), Wcr epresenta a fração de Wm abaixo da qual não há geração de escoamento subterrâneo e sub-superficial, CS representa a influência no timing dos picos, CI é associado à drenagem sub-superficial, CB representa o tempo de residência e QB é a vazão de base.

O tempo de processamento com o modelo inercial foi de 32 segundos e com o modelo MCT foi de 21 segundos. Como este estudo simulou uma área pequena, com poucas mini bacias, o tempo de processamento não é um parâmetro muito relevante. No entanto, para simulações em bacias maiores, a tendência é que esse seja um critério importante para a escolha do método de simulação.

O coeficiente de eficiência de Nash-Sutcliffe ficou superior com o modelo Inercial para todas as mini bacias, conforme mostrado na Tabela 2. O erro de volume também indicou melhores resultados do modelo Inercial. A Figura 4 apresenta os resultados para a estação 75186000 no período de novembro de 2010 a abril de 2012.

Tabela 3. Métricas estatísticas obtidas para as quatro mini bacias analisadas.

Mini Bacia	Posto Fluviométrico	Nash-Sutcliffe		Bias	
		Inercial	MCT	Inercial	MCT
35	75186000	0.68	0.67	-2%	-6%
38	75200000	0.54	0.43	1%	-9%
40	75205000	0.55	0.55	11%	-1%
42	75155000	0.67	0.61	-12%	-20%

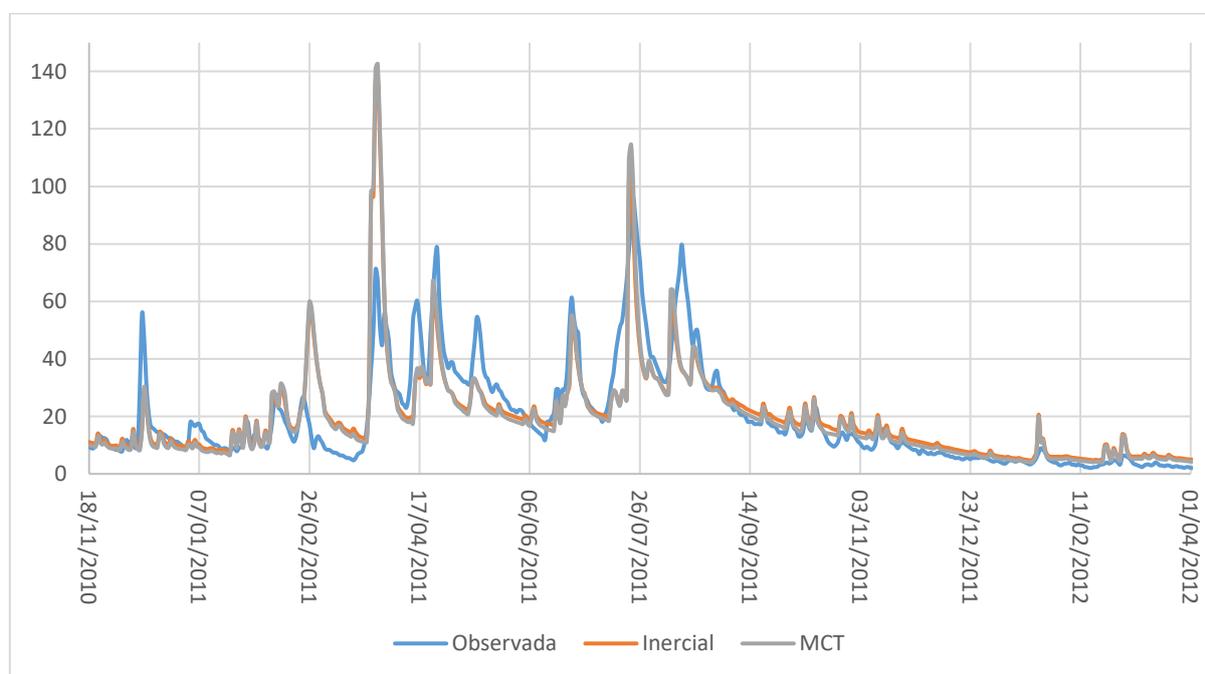


Figura 4. Vazões observadas e simuladas pelos dois métodos para a estação fluviométrica 75186000.

## CONCLUSÕES

Neste estudo realizou-se a comparação entre os métodos de propagação de vazão Inercial e Muskingum-Cunge-Todini para a bacia do rio Ijuí. A diferença entre os coeficientes de NS dos modelos foi pequena em todas as bacias, sendo obtidos valores ligeiramente melhores com o método Inercial. O erro de volume apresentou uma variação maior, sendo menor para o método Inercial em três das quatro mini bacias. O tempo de processamento foi de 32 segundos para o método Inercial e de 21 segundos para o MCT, destacando-se como o parâmetro que apresentou maior vantagem para este último em relação ao primeiro.

A superioridade dos resultados gerados pelo modelo Inercial pode ser explicada pela ausência de planícies de inundação. Como anteriormente o modelo havia sido aplicado em áreas com planícies de inundação e apresentado resultados melhores do que o modelo Inercial (PONTES e COLLISCHONN, 2012), é coerente a obtenção de resultados diferentes para um contexto oposto. Isso ocorre porque as planícies de inundação reduzem a celeridade, reduzindo a influência do parâmetro  $\beta$ .

Como a calibração do modelo não era o foco do estudo, sugere-se que uma calibração mais aprimorada poderá resultar em melhores parâmetros. Além disso, conclui-se que o MCT é mais indicado para simulações para áreas maiores ou com dados mais robustos devido ao tempo de processamento e à capacidade computacional que a simulação pode exigir.

É necessária uma maior gama de estudos com o MCT para diversos contextos geográficos, como possuindo ou não planície de inundação, para a compreensão de quando ele é adequado e quando o método Inercial, ou diversos outros métodos, pode render melhores resultados.

## AGRADECIMENTOS

As autoras agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelas bolsas de incentivo à pesquisa que possibilitaram o presente estudo.

## REFERÊNCIAS

COLLISCHONN, W. (2001). *“Simulação Hidrológica de Grandes Bacias”*. 270 f. Tese (Doutorado em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental) – Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

COLLISCHONN, W.; GAMA, C.H.A.; SIQUEIRA, V.A.; PAIVA, R.C.D.; FLEISCHMANN, A.S. (2020). *Manual de Referência Teórica do MGB*. HGE, IPH, UFRGS.

CUNGE, J. A. (1969). *“On the subject of a flood propagation computation method (Muskingum method)”*. Delft, The Netherlands, J. Hydr. Res., 7(2), 205–230.

CUNGE, J. A.; HOLLY, F. M.; VERNEY, A. (1980). *“Practical aspects of computational river hydraulics”*. London: Pitman advanced.

FAN, F.M.; PONTES, P.R.M.; PAIVA, R.C.D.; COLLISCHONN, W. (2014). *“Avaliação de um método de propagação de cheias em rios com aproximação das equações de Saint-Venant”*. Revista Brasileira de Recursos Hídricos, vol. 19, n. 4, p. 137 - 147. Porto Alegre.

KARAHAN, H.; GURARSLAN, G.; WOO, G.Z. (2013). *“Parameter estimation of the Nonlinear Muskingum Flood-Routing Model Using a Hybrid Harmony Search Algorithm”*. American Society of Civil Engineers. Journal of Hydrologic Engineering, 18, p. 352-360.

MCCARTHY, G.T. (1939). *“The unit hydrograph and flood routing”*. U.S. Corps Eng., Providence, R.I.

PONTES, P.R.M.; COLLISCHONN, W. (2012). *“Conservação de Volume em Modelos Simplificados de Propagação de Vazão”*. Revista Brasileira de Recursos Hídricos, vol. 17, n. 4, p. 83 - 96. Porto Alegre.

PONTES, P.R.M.; COLLISCHONN, W. (2015). *“O modelo Muskingum-Cunge-Todini em rios com planície de inundação”*. Revista Brasileira de Recursos Hídricos, vol. 20, n. 2, p. 298 - 309. Porto Alegre.

SCHEREN, R.S.; ROBAINA, L.E.S. (2019). *“Classificação geomorfométrica da bacia hidrográfica do rio Ijuí, RS”*. Geografia, Ensino & Pesquisa, vol. 23, n. 1.

SEMA. Secretaria Estadual do Meio Ambiente e Infraestrutura. U090 - *Bacia Hidrográfica do Rio Ijuí*. Disponível em: < <https://www.sema.rs.gov.br/u090-bh-ijui>>. Acesso em 10 de mai. de 2023.

TODINI, E. (2007). “*A mass conservative and water storage consistent variable parameter Muskingum Cunge approach*”. *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, vol. 11, 1645–1659, <https://doi.org/10.5194/hess-11-1645-2007>.

TODINI, E. (2007). *Corrigendum to "A mass conservative and water storage consistent variable parameter Muskingum-Cunge approach" published in Hydrol. Earth Syst. Sci., 11, 1645–1659, 2007*, *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 11, 1783–1783, <https://doi.org/10.5194/hess-11-1783-2007>.

TUCCI, C. E. M. (2005). *Modelos Hidrológicos*. 2.ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS.

WANG, W.; TIAN, W.; XU, D; CHAU, K.; MA, Q.; LIU, C. (2023) *Muskingum Models' Development and their Parameter Estimation: A State-of-the-art Review*. *Water Resources Management*, vol. 37, p. 3129-3150.