



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

# Turbulência de Langmuir Gerada por Feixes de Elétrons de Intensidade Arbitrária

(Langmuir Turbulence Generated by Electron Beams of Arbitrary Intensity)

**Guilherme Thomas Irumé**

Dissertação de Mestrado realizada sob orientação do Prof. Dr. Rudi Gaelzer e apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Porto Alegre - RS

Agosto de 2023

# Agradecimentos

A busca por entender melhor o universo no qual estamos inseridos, em todas as esferas das nossas vidas, pode ser uma tarefa cansativa e complexa. Sorte temos nós que ao longo desta jornada encontramos companheiros e mentores que tornam este processo menos penoso e mais prazeroso.

Agradeço em primeiro lugar à minha família, em especial à minha mãe, Leila Thomas, pela confiança e motivação depositados em mim ao longo de todos os anos da minha formação pessoal e acadêmica.

Agradeço ao meu orientador, Dr. Rudi Gaelzer, por compartilhar comigo seu conhecimento sempre com imensa paciência e dedicação sem as quais esse trabalho não teria sido possível. Também ao Dr. Joel Pavan pela valiosa contribuição na implementação do código numérico e por se mostrar sempre solícito a sanar as eventuais dúvidas a ele apresentadas.

Por fim, agradeço também ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo auxílio financeiro e aos demais professores e professoras do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul que contribuíram de forma direta ou indireta com a minha formação como físico.

“Though my eyes could see, I still was a blind man  
Though my mind could think, I still was a mad man”

*(Carry on Wayward Son. Kansas, 1976)*

# Resumo

Este trabalho inicia por revisar os conceitos básicos da Teoria Cinética de Plasmas e da Teoria de Turbulência Fraca. A formulação de Klimontovich da Teoria de Turbulência Fraca é aplicada ao sistema plasma-feixe segundo o modelo de modo único tendo a emissão quase térmica como condição inicial da dinâmica das ondas do modo feixe. A utilização da emissão quase térmica como condição inicial se justifica porque sistemas cinéticos possuem espectros característicos de emissão térmica, os quais podem servir como sementes para a excitação de novos modos normais de oscilação.

Soluções numéricas das equações cinéticas são apresentadas para diferentes valores dos parâmetros do feixe (velocidade e densidade). Observamos que o comportamento do sistema plasma-feixe com feixe de alta intensidade se aproxima do comportamento do sistema com feixes de baixa intensidade. Os resultados encontrados para o sistema plasma-feixe segundo o modelo do modo único corroboram a consistência da Teoria de Turbulência Fraca, no sentido de que, em ambos os casos, envolvendo feixes de baixa ou alta intensidade, a dinâmica do sistema não se altera expressivamente.

Por fim, são consideradas possibilidades de pesquisas futuras a partir de aperfeiçoamentos ao modelo do modo único, da inclusão dos demais modos normais à dinâmica do sistema plasma-feixe e da implementação de um código numérico bidimensional.

**Palavras-chave:** Feixes de elétrons; Instabilidade feixe-plasma; Teoria de Turbulência Fraca.

# Abstract

This dissertation begins by reviewing the basic concepts of the Kinetic Theory of Plasmas and the Weak Turbulence Theory. The Klimontovich formulation of the Weak Turbulence Theory is applied to the beam-plasma system according to the single-mode model with the quasi-thermal emission as the initial condition of the beam-mode wave dynamics. The use of quasi-thermal emission as an initial condition is justified because kinetic systems have characteristic spectra of thermal emission, which can serve as seeds for the excitation of new normal oscillating modes.

Numerical solutions of the kinetic equations are presented for different values of beam parameters (velocity and density). We observed that the behavior of the beam-plasma system with a high-intensity beam resembles the behavior of the system with low-intensity beams. The results found for the beam-plasma system according to the single-mode model corroborate the consistency of the Weak Turbulence Theory, in the sense that, in both cases, involving beams of low or high intensity, the dynamics of the system do not change significantly.

Finally, future research possibilities are considered based on improvements to the single-mode model, the inclusion of more normal modes to the dynamics of the beam-plasma system, and the implementation of a two-dimensional numerical code.

**Key words:** Electron beams; Beam-plasma instability; Weak Turbulence Theory.

# Press Release

## **Instabilidades do sistema plasma-feixe são estudadas segundo a Teoria de Turbulência Fraca na Universidade Federal do Rio Grande do Sul**

A Dissertação de Mestrado produzida no programa de pós graduação do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (IF-UFRGS) aborda o tema das instabilidades em plasmas segundo a Teoria de Turbulência Fraca e o modelo de modo único. Intitulada “Turbulência de Langmuir Gerada por Feixes de Elétrons de Intensidade Arbitrária”, foi realizada no período jul/2021 - jul/2023 por Guilherme Thomas Irumé sob a orientação do Dr. Rudi Gaezler com apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Em poucas palavras, o leitor pode entender um plasma como sendo um sistema composto por íons e elétrons, podendo conter partículas neutras, que apresenta quase neutralidade e comportamento coletivo. A interação entre um feixe de elétrons e o plasma que o rodeia é fundamental para muitas aplicações em física dos plasmas, possuem elas caráter de pesquisa básica ou aplicada em plasmas espaciais, astrofísicos ou de laboratório.

Com o intuito descrever de forma mais acurada os fenômenos da dinâmica das partículas e ondas que compõem o chamado sistema plasma-feixe, foram realizadas simulações numéricas das equações que descrevem o comportamento do sistema estudado tendo como condição inicial a chamada *emissão quase térmica*. De maneira geral, observa-se que as soluções obtidas segundo o modelo do modo único apresentam comportamento bastante semelhante quando comparamos a dinâmica envolvendo feixes de baixa e de alta intensidade. Isto é, a formação do *plateau* e da cauda supertérmica na distribuição das partículas e a excitação das ondas, tanto do modo *forward* quanto do modo *backward*, via ressonância com as partículas.

Os resultados obtidos nesta Dissertação motivam diversas pesquisas futuras e se inserem nas linhas de pesquisas em Física de Plasmas da UFRGS, as quais buscam uma melhor compreensão dos fenômenos que ocorrem no Sol, no Sistema Solar e no ambiente espacial nas vizinhanças da Terra e sobre como esses fenômenos afetam a humanidade no seu atual estágio de desenvolvimento.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Revisão Teórica</b>	<b>4</b>
2.1	Teoria Cinética de Plasmas	4
2.2	O Sistema Vlasov-Maxwell de Equações	5
2.2.1	Linearização do Sistema Vlasov-Maxwell	6
2.2.2	Aproximação Quase Linear do Sistema Vlasov-Maxwell	8
2.2.3	Solução do Sistema Vlasov-Maxwell Linearizado	9
2.2.4	O amortecimento de Landau das ondas de Langmuir	15
2.2.5	Ondas em plasmas não magnetizados	16
2.3	Instabilidades	18
2.4	Processos não lineares na teoria de turbulência fraca	20
2.4.1	Interação quase linear onda-partícula	21
2.4.2	Interação não linear onda-onda	22
2.4.3	Interação não linear onda-partícula	22
2.5	Literatura específica	23
<b>3</b>	<b>Teoria de Turbulência Fraca</b>	<b>33</b>
3.1	Formalismo de Klimontovich	33
3.1.1	A equação de Klimontovich-Dupree	33
3.1.2	Médias de ensemble e flutuações	35
3.2	Turbulência eletrostática em plasmas sem campos	36
3.2.1	Equações de evolução da turbulência eletrostática	36
3.2.2	Funções de correlação	38
3.2.3	Hipótese de duas escalas temporais e formas espectrais	41
3.3	Solução perturbativa das equações	43
3.4	A equação de balanço espectral	46
3.5	Equações cinéticas para as partículas	52
3.6	Equações cinéticas para partículas e campos	54
3.6.1	Equações cinéticas para as ondas	54
3.6.2	Equações cinéticas para as partículas	57
3.6.3	Níveis iniciais das ondas	58
<b>4</b>	<b>Teoria de turbulência do sistema plasma-feixe</b>	<b>61</b>
4.1	O sistema plasma-feixe	61
4.2	Modelo de modo único	63
4.3	Solução numérica e resultados	67
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>76</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O termo “plasma” foi cunhado por Lewi Tonks e Irving Langmuir, em 1929, no artigo *Oscillations in Ionized Gases* (Tonks and Langmuir, 1929) para descrever “uma coleção de partículas carregadas” no estudo de oscilações em descargas elétricas. A dinâmica do sistema é caracterizada pela interação Coulombiana; ou seja, a interação entre as partículas ocorre à distância permitindo, então, um comportamento coletivo que é exibido pelas partículas carregadas que compõem o plasma. Nesta Dissertação, a definição adotada descreve um plasma como sendo: *um sistema composto por íons e elétrons, podendo conter partículas neutras, que apresenta quase neutralidade e comportamento coletivo* (Bittencourt, 2004). Por quase neutralidade entende-se que um pequeno elemento de volume do gás deve conter partículas o suficiente para que a diferença entre a densidade de cargas positivas e a densidade de cargas negativas seja considerada apenas uma flutuação.

Dos campos elétricos associados aos portadores de cargas e dos campos magnéticos associados ao movimento, destes surge o comportamento coletivo com muitos graus de liberdade que caracteriza o sistema, uma vez que através da força de Lorentz as partículas afetam as trajetórias umas das outras. O gás ionizado deve também apresentar o que se chama de *efeito de blindagem*, através do qual a efetividade da força elétrica entre qualquer par de partículas carregadas que o compõem acaba sendo limitada a uma distância finita, conhecida como comprimento de Debye e expresso no sistema CGS (ou Gaussiano)<sup>1</sup> como (Jackson, 1999; Chen, 2018; Yoon, 2019)

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi n e^2}}, \quad (1.1)$$

onde  $n$  representa a densidade de partículas de uma dada espécie,  $T$  é a temperatura, em unidades de energia, e  $e$  é a carga elementar. Para que a blindagem eletrônica ocorra e a descrição estatística tenha validade, o número de partículas numa esfera de Debye, cujo raio é dado por (1.1), deve ser enorme e a esta suposição chama-se *aproximação de plasma*. É comum em física de plasmas encontrar resultados em termos do parâmetro de plasma  $g$ ,

$$g = \frac{1}{n\lambda_D^3}, \quad (1.2)$$

onde  $n\lambda_D^3$  é o número de partículas na esfera de Debye. Este parâmetro é interpretado como a medida do grau em que o plasma ou os efeitos coletivos influenciam no comportamento das partículas individualmente, e a aproximação de plasma consiste no limite  $g \ll 1$  (Krall and Trivelpiece, 1986; Yoon, 2019).

A interação entre um feixe de elétrons e o plasma que o rodeia é fundamental para muitas aplicações em física dos plasmas, possuam elas caráter de pesquisa básica ou aplicada em plasmas espaciais, astrofísicos ou de laboratório. Dentre os fenômenos que se enquadram nesta

---

<sup>1</sup>Ao longo desta Dissertação será adotado o sistema Gaussiano de unidades.

classe, de particular importância são as emissões de ondas eletrostáticas longitudinais e/ou eletromagnéticas na vizinhança da frequência eletrônica de plasma  $\omega_{pe}$  e no seu primeiro harmônico  $2\omega_{pe}$ , sendo

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m_e}}.$$

Estas emissões são, em muitas situações, acompanhadas da energização/aquecimento da população eletrônica que compõe o plasma, gerando caudas não térmicas na sua função de distribuição. A emissão de radiação eletromagnética em frequências próximas a  $\omega_{pe}$  e/ou  $2\omega_{pe}$  tem sido observada (de forma remota ou *in situ*) por sondas espaciais que se deslocam através da magnetosfera terrestre e/ou do vento solar. Ondas eletromagnéticas nas mesmas faixas de frequência têm sido também observadas originando-se da coroa solar. Esta classe de fenômenos de emissão de radiação eletromagnética possui a denominação comum de *emissão de plasma*, independente do(s) mecanismo(s) emissor(es) específico(s).

Por sua vez, a observação de ondas eletrostáticas longitudinais deve ser realizada *in situ* por sondas espaciais ou por detectores no laboratório, uma vez que estas se encontram aprisionadas dentro do plasma por não existirem no vácuo. A observação das ondas longitudinais é, muitas vezes, registrada de forma concomitante com a emissão de plasma de ondas eletromagnéticas. Na literatura é possível encontrar diversos mecanismos propostos e simulações realizadas ao longo do tempo para esclarecer estes fenômenos aparentemente correlacionados (Thurgood and Tsiklauri, 2015; Zhou et al., 2020; Akbari et al., 2021).

Por outro lado, a energização de partículas carregadas eletricamente é reconhecida como um dos problemas mais importantes na física dos plasmas contemporânea. Energização de partículas (aceleração e aquecimento) pode resultar de campos eletrostáticos de larga escala tais como ocorrem em ondas de choque não colisionais ou durante reconexão magnética.

Outro importante mecanismo de energização de partículas carregadas é a turbulência no plasma. Transporte induzido por turbulência é importante não somente no ambiente espacial, mas também em dispositivos que buscam a fusão termonuclear controlada, tais como *tokamaks*.

Para o ambiente espacial, energização de partículas possui uma ramificação que transcende a pesquisa básica, uma vez que influencia no funcionamento de satélites de comunicação e pode ter uma influência significativa na exploração humana do espaço (Ferguson, 1993; Scime et al., 1994). Estas questões se tornam continuamente mais importantes, tanto que justificaram o nascimento de uma nova área da ciência denominada clima espacial (*space weather*).

Dentre os diversos fenômenos envolvidos na turbulência em plasmas, esta Dissertação está particularmente interessada na denominada *turbulência de Langmuir*, a qual se caracteriza justamente pela emissão de plasma, emissão de ondas eletrostáticas e pela energização eletrônica provocada pela interação não linear dos elétrons com as ondas geradas pela emissão. A turbulência de Langmuir é um dos fenômenos mais estudados na turbulência de plasmas, sendo a maior parte dos trabalhos existentes focados na dinâmica das ondas. O aspecto relacionado de energização de partículas tem sido estudado em anos mais recentes.

O presente trabalho se propõe a aprofundar o conhecimento já existente da turbulência de Langmuir enfocando aspectos tanto da emissão de plasma quanto da energização de elétrons bem como estender a validade da teoria generalizada de turbulência fraca para incluir os efeitos tanto na relação de dispersão quanto no coeficiente de emissão de um feixe de intensidade arbitrária.

A formulação tradicional da teoria generalizada de turbulência fraca assume tacitamente que os modos normais que existem em um plasma de elétrons e íons em equilíbrio térmico são os modos íon-acústico ( $S$ ) e de Langmuir ( $L$ ) (Krall and Trivelpiece, 1986; Sitenko, 1982; Yoon, 2019; Ziebell et al., 2001, 2008a,b, 2012). Entretanto, no caso de um sistema plasma-feixe as relações de dispersão se modificam por consequência da presença do feixe e esta modificação implica a existência de um novo conjunto de modos normais sustentados pelo plasma (Cairns and Fung, 1988; Cairns, 1989).

Neste contexto, estudamos a dinâmica do modo feixe-modificado a partir do modelo de modo único (Pascoal, 2014), o qual apresenta uma região de baixa frequência e uma região de alta frequência, as quais acabam por desempenhar o papel dos modos normais eletrostáticos usuais (íon-acústico e de Langmuir, respectivamente). Em seguida, é feita uma discussão acerca da determinação da intensidade espectral inicial das ondas. Esta intensidade inicial está relacionada ao fenômeno da *emissão quase térmica* (Yoon, 2005), que se deve ao fato de que as partículas do plasma possuem velocidades descritas por funções de distribuição caracterizadas por dispersões de velocidades que no estado de equilíbrio termodinâmico definem a *temperatura cinética* do sistema. Descreve, portanto, a emissão de radiação (eletrostática) de um plasma que está em uma determinada “temperatura”.

Em poucas palavras, podemos dizer que os resultados apresentados no final desta Dissertação são obtidos da seguinte maneira: A formulação de Klimontovich da Teoria de Turbulência Fraca é aplicada ao sistema plasma-feixe segundo o modelo de modo único tendo a emissão quase térmica como condição inicial da dinâmica das ondas do modo feixe.

Uma revisão dos conceitos básicos da Teoria Cinética de Plasmas é apresentada no capítulo 2 para então, no capítulo 3, abordar o formalismo de Klimontovich no contexto de oscilações eletrostáticas que se manifestam em plasmas térmicos. O capítulo 4 discute o sistema plasma-feixe segundo o modelo de modo único tendo como condição inicial da dinâmica das ondas a emissão quase térmica. Por fim, são apresentados os resultados das soluções numéricas das equações que descrevem a dinâmica do sistema. Finalmente, no capítulo 5 é apresentado um resumo dos conteúdos abordados na Dissertação e possíveis desenvolvimentos futuros.

## Capítulo 2

# Revisão Teórica

### 2.1 Teoria Cinética de Plasmas

No intuito de descrever a dinâmica de um sistema com  $N$  partículas no espaço de fase de seis dimensões, é fundamental que a posição e a velocidade de cada partícula sejam conhecidas. Portanto, se conseguirmos resolver as  $6N$  equações de movimento associadas aos componentes do sistema poderemos, então, descrever completamente sua evolução temporal. Ao nos debruçarmos sobre esta tarefa encontramos três dificuldades principais: O número  $N$  de partículas que compõem o sistema é geralmente gigantesco, existe um alto grau de correlação entre as equações de movimento devido às interações entre as partículas (que se dão via campos eletromagnéticos gerados de forma autoconsistente) e as equações de movimento são altamente não lineares.

Por estas razões, o estudo da dinâmica dos plasmas é normalmente realizado por duas formulações de muitos corpos: a formulação de fluidos ou a mecânica estatística.

Embora a Formulação de Fluidos (Bittencourt, 2004) seja a teoria mais simples que temos para descrever um plasma, impressiona o quão precisa esta pode ser para descrever um grande número de fenômenos envolvendo plasmas. Entretanto, existe também todo um universo de fenômenos para os quais o tratamento proposto por esta formulação se mostra inadequado. A exemplo disto pode-se citar o amortecimento não colisional das ondas de Langmuir, ou amortecimento de Landau, o qual somente pode ser aproximadamente reproduzido na formulação de fluidos, uma vez que este amortecimento se deve a um processo não colisional de transferência de energia entre os campos e as partículas, dependente da forma da função de distribuição de velocidades (Hammett and Perkins, 1990; Hunana et al., 2018). Nestes casos, emprega-se a Teoria Cinética dos Plasmas (Bittencourt, 2004; Krall and Trivelpiece, 1986). Esta teoria faz uso de uma função de distribuição de probabilidades  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  para cada espécie que compõe o plasma, bem como as equações que descrevem a dinâmica das funções de distribuição e dos campos eletromagnéticos de uma forma autoconsistente. Seu estudo acrescenta profundidade aos conceitos de equilíbrio, ondas e estabilidade já explorados sob a ótica da teoria de fluidos (Krall and Trivelpiece, 1986). Esta é uma descrição estatística onde se pode, com um número pequeno de equações, levar em conta as correlações entre as partículas, a distribuição térmica destas e os efeitos autoconsistentes das interações entre as partículas e os campos eletromagnéticos contidos no plasma.

Neste trabalho estudamos plasmas quentes e de densidade suficientemente baixa para que possamos desconsiderar os efeitos de colisões binárias entre as partículas. Em um primeiro momento abordaremos as aproximações linear e quase linear do formalismo de *Vlasov*, para posteriormente, no capítulo 3, direcionarmos nossa atenção aos fenômenos não lineares da dinâmica de plasmas no formalismo de *Klimontovich*. Neste último, a natureza individual das partículas que compõem o plasma é mantida de modo que os chamados efeitos de partícula discreta (como a emissão espontânea, por exemplo) desempenham um papel importante na dinâmica dos sistemas. O formalismo de *Vlasov*, por sua vez, aborda a dinâmica de plasmas fazendo uso de uma

distribuição suave e, portanto, não é capaz de reproduzir os efeitos de partícula discreta.

Uma abordagem comum em teoria cinética dos plasmas consiste em empregar a *equação de Boltzmann não colisional*

$$\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \frac{\mathbf{F}}{m_\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0, \quad (2.1)$$

a qual é conhecida na literatura como a *equação de Vlasov* (Vlasov, 1938; Gurnett and Bhattacharjee, 2005; Bittencourt, 2004; Krall and Trivelpiece, 1986), ou *equação cinética de ordem zero*, na qual todas as correlações entre as partículas são desprezadas. Considere que existem dois tipos de forças que podem atuar sobre as partículas: de curto alcance (comumente chamadas de colisões, estas se originam da interação entre um número pequeno de partículas) e de longo alcance (originam-se dos efeitos coletivos de um grande número de partículas). Então, a derivação da equação de Boltzmann que levará à equação de Vlasov assumirá apenas forças de longo alcance na dinâmica do sistema e que todas as partículas em um determinado elemento infinitesimal de volume do espaço de fase estarão submetidas à mesma força  $\mathbf{F}$ .

Na equação (2.1), a quantidade  $f_\alpha = f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  é a *função de distribuição de probabilidades* das partículas da espécie  $\alpha$  ( $\alpha =$  elétrons, prótons,  $\text{He}^{++}$ , etc), derivada de tal forma que  $V^{-1} f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v}$  é a probabilidade de se encontrar, no instante  $t$ , uma partícula da espécie  $\alpha$  no elemento de volume  $d\mathbf{x} d\mathbf{v}$  situado no ponto  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  do espaço de fase do sistema, sendo  $V$  o volume do sistema.

A equação de Vlasov (2.1) pode ser obtida a partir do *Formalismo de Klimontovich* (Sitenko, 1982; Krall and Trivelpiece, 1986), como será discutido no capítulo 3. Embora as equações do formalismo de Klimontovich forneçam a solução exata da evolução dinâmica do sistema de partículas e campos no plasma, a sua solução analítica é impossível. Por esta razão, as equações exatas são substituídas por um sistema de equações cinéticas aproximadas, as quais formam uma cadeia hierárquica de equações com um grau crescente de complexidade, denominada *hierarquia BBGKY*.

Nas seções a seguir serão discutidos o sistema Vlasov-Maxwell de equações e algumas de suas aplicações no problema da propagação de ondas eletrostáticas ou eletromagnéticas no plasma. Na seção 2.2, o procedimento de linearização das equações e sua solução são apresentados de forma didática. Será realizada também uma breve explicação acerca do fenômeno do amortecimento de Landau e apresentados alguns dos modos normais do plasma, que irão compor o estudo da Teoria de Turbulência Fraca. Dando continuidade à revisão de conceitos importantes, nas seções 2.3 e 2.4 são definidos de forma qualitativa os diferentes tipos de instabilidades e de processos não lineares de interação onda-partícula e onda-onda, respectivamente. Por fim, na seção 2.5, um compilado de artigos é revisado com o intuito de contextualizar a pesquisa e familiarizar o leitor aos estudos que motivam o tema desta dissertação.

## 2.2 O Sistema Vlasov-Maxwell de Equações

Como o sistema é caracterizado por interações governadas por campos eletromagnéticos, uma descrição autoconsistente da dinâmica dos constituintes do plasma (as partículas e os campos) demanda que a equação de Vlasov deve ser acoplada ao sistema de equações de Maxwell. Assim, introduzindo a expressão da força de Lorentz como o termo de força na equação de Boltzmann não colisional (2.1), resulta o *sistema Vlasov-Maxwell de equações* (Krall and Trivelpiece, 1986)

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = 0 \quad (2.2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha} d\mathbf{v} \quad (2.2b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.2c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha} d\mathbf{v} \quad (2.2d)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.2e)$$

onde  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  são, respectivamente, os campos elétrico e de indução magnética no plasma (Jackson, 1999). Nas equações (2.2a) – (2.2e), bem como no restante desta dissertação, é empregado o sistema Gaussiano de unidades físicas.

Nas equações de Maxwell (2.2b) – (2.2e), as densidades de carga  $\rho(\mathbf{x}, t)$  e de corrente  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$  no plasma são dadas pelas seguintes expressões:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (2.4)$$

sendo  $n_{\alpha}$  a *densidade de número*, isto é, o número de partículas da espécie  $\alpha$  por unidade de volume, e  $e_{\alpha}$  é a carga elétrica da espécie  $\alpha$ . As expressões (2.3) e (2.4) correspondem aos valores totais das densidades de carga e corrente, obtidas a partir das somas das contribuições parciais das partículas das espécies  $\alpha$ . Finalmente, a definição das densidades de carga e corrente implicam que as funções de distribuição de probabilidade para todas as espécies são normalizadas à unidade; *i.e.*, para todo  $\alpha$ ,

$$\frac{1}{V} \int f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = 1.$$

O sistema Vlasov-Maxwell de equações descreve estados estacionários do plasma, ondas no plasma, fenômenos de instabilidades bem como outros fenômenos de curta escala de tempo (escalas mais curtas que o tempo típico entre colisões binárias), em termos da função distribuição  $f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ .

### 2.2.1 Linearização do Sistema Vlasov-Maxwell

O sistema de equações (2.2a) – (2.2e) consiste em um sistema de equações acopladas e altamente não linear, por conta dos produtos entre os campos e a função de distribuição. No entanto, muitos fenômenos podem ser descritos como pequenas perturbações das soluções de equilíbrio de Vlasov e podem ser tratados pelo método da *linearização* (Krall and Trivelpiece, 1986).

Será realizado então um processo de linearização das equações do sistema. As equações linearizadas são substancialmente mais simples de resolver e formam a base de grande parte da física de plasmas moderna.

Começamos o processo realizando um tratamento perturbativo na função de distribuição e nos campos elétrico e magnético, que serão descritos como uma soma de seus valores no equilíbrio, com índice “0”, mais uma perturbação, com índice “1”. Por exemplo, a função de distribuição exata  $f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  será descrita como uma pequena perturbação  $f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  que ocorre em torno de um estado inicial do plasma  $f_{\alpha 0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ , supostamente conhecido. O mesmo ocorrendo com os campos.<sup>1</sup>

Com este intuito, escrevemos então

$$f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_{\alpha 0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \epsilon f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (2.5a)$$

<sup>1</sup>Alguns autores se referem aos campos  $\mathbf{E}_0$  e  $\mathbf{B}_0$  e à função  $f_{\alpha 0}$  omitindo suas dependências temporais (Gurnett and Bhattacharjee, 2005; Chen, 2018). Entretanto, como será discutido na seção 3.2.3, a dinâmica dos sistemas estudados neste trabalho será interpretada como ocorrendo em duas escalas de tempo distintas, identificadas como escala lenta e escala rápida (Yoon, 2019). Neste momento, sem entrar em mais detalhes, será mantida a dependência empregada em Krall and Trivelpiece (1986).

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}, t) + \epsilon \mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) \quad (2.5b)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{x}, t) + \epsilon \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t), \quad (2.5c)$$

onde  $\epsilon \ll 1$  é um parâmetro que explicita o fato de que as perturbações possuem intensidade muito menor que a parte não perturbada. Em seguida substituímos estas quantidades na equação de Vlasov (2.2a), obtendo

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( \mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right] f_{\alpha 0} \\ + \epsilon & \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( \mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right] f_{\alpha 1} + \left( \mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0} \right\} \\ & + \epsilon^2 \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( \mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 1} = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

A linearização das equações (aproximação linear) consiste em negligenciar os termos de ordem  $\epsilon^2$  ou superior em (2.6).

Assume-se que o estado do plasma descrito por  $f_{\alpha 0}$  satisfaz o sistema de equações

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha 0} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( \mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0} = 0 \quad (2.7a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = 4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha 0} d\mathbf{v} \quad (2.7b)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha 0} d\mathbf{v} \quad (2.7c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t}, \quad (2.7d)$$

o qual é suposto possuir solução conhecida. Então, subtraindo as equações de equilíbrio das equações perturbadas linearizadas, resultam<sup>2</sup> as equações de Vlasov-Maxwell linearizadas para a função distribuição perturbada  $f_{\alpha 1}$  e para os campos perturbados  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{B}_1$ :

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha 1} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( \mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 1} = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( \mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0} \quad (2.8a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = 4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha 1} d\mathbf{v} \quad (2.8b)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha 1} d\mathbf{v} \quad (2.8c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}. \quad (2.8d)$$

Este conjunto de equações linearizadas para as quantidades perturbadas pode ser solucionado por métodos convencionais para investigar propriedades do plasma em intervalos de tempo menores que o tempo típico entre colisões binárias.

<sup>2</sup>A partir deste ponto  $\epsilon$  será omitido e as perturbações  $f_{\alpha 1}$ ,  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{B}_1$  entendidas como da ordem de  $\epsilon$ .

### 2.2.2 Aproximação Quase Linear do Sistema Vlasov-Maxwell

A inclusão de efeitos não lineares na teoria cinética é usualmente realizada em mais baixa ordem com a *teoria quase linear*, a qual será brevemente discutida para o sistema Vlasov-Maxwell.

Seja o plasma espacialmente uniforme (homogêneo) e descrito por um função distribuição de probabilidade que no instante  $t = 0$  é uma solução de equilíbrio da equação de Vlasov. Então, visto que mesmo no equilíbrio há uma distribuição térmica das ondas do plasma<sup>3</sup>, a distribuição média  $\langle f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle$  para um plasma espacialmente uniforme é definida como a média espacial da função distribuição  $f_\alpha$  (Krahl and Trivelpiece, 1986), pois

$$\langle f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle = \frac{1}{V} \int f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{x}, \quad (2.9)$$

$$\langle f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle = \langle f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t) \rangle + \langle f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle, \quad (2.10)$$

(onde  $V$  representa o volume do plasma). As flutuações relacionadas à  $f_{\alpha 1}$  são assumidas aleatórias. Sendo assim, sua média é nula e resulta que a média espacial da função distribuição é igual a distribuição homogênea de equilíbrio (Gurnett and Bhattacharjee, 2005)

$$\langle f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \rangle = f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t).$$

Assumindo, por simplicidade, o caso de oscilações eletrostáticas ( $\mathbf{E}_1 \neq 0$ ,  $\mathbf{B}_1 = 0$ ) em um plasma livre de campos externos ( $\mathbf{E}_0 = 0$  e  $\mathbf{B}_0 = 0$ ), e com o termo perturbativo do potencial elétrico tendendo a zero nas extremidades do sistema, a média espacial do campo elétrico é zero

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle \mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) \rangle = -\frac{1}{V} \int \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} = 0.$$

Quando particularizado para o caso eletrostático livre de campos externos, o sistema composto por (2.2a) – (2.2e) pode ser expresso pelo seguinte sistema reduzido:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = 0, \quad (2.11a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha} d\mathbf{v}. \quad (2.11b)$$

Fazendo a média espacial, definida em (2.9), da equação de Vlasov (2.11a) se obtém uma expressão para a evolução temporal da solução de equilíbrio  $f_{\alpha 0}$ , isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle f_\alpha \rangle}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \langle \nabla f_\alpha \rangle + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \langle \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha \rangle &= 0, \\ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} &= -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \langle \mathbf{E}_1 f_{\alpha 1} \rangle. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Na obtenção da expressão (2.12) foi utilizado o fato de que a média do campo elétrico  $\langle \mathbf{E}_1 \rangle$ , o gradiente da distribuição homogênea  $\nabla f_{\alpha 0}$  e a média do gradiente da perturbação na distribuição  $\langle \nabla f_{\alpha 1} \rangle$  são nulos, bem como a homogeneidade da solução de equilíbrio  $f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t)$ . A expressão acima é de segunda ordem em termos perturbados (termo  $\langle \mathbf{E}_1 f_{\alpha 1} \rangle$ ), demonstrando o porque a teoria linear não é capaz de prever qualquer alteração em  $f_{\alpha 0}$ , de modo que esta permanece constante no tempo nesta aproximação.

<sup>3</sup>Na seção 2.2.3 será discutida a solução do sistema Vlasov-Maxwell de equações e demonstrado que o plasma sustenta ondas que obedecem à relação de dispersão  $\omega(\mathbf{k})$  apropriada.

A derivada temporal da solução de equilíbrio é então substituída em (2.11a) com o intuito de obter uma expressão para a evolução temporal da perturbação  $f_{\alpha 1}$  em termos de  $f_{\alpha 0}$ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) f_{\alpha 1} = -\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0} - \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{E}_1 f_{\alpha 1} - \langle \mathbf{E}_1 f_{\alpha 1} \rangle). \quad (2.13)$$

O segundo e terceiro termos ao lado direito do sinal de igualdade são de segunda ordem em quantidades perturbadas e por este motivo este é um sistema dito aberto. De forma mais geral observa-se que são necessários termos de ordem  $n+1$  para descrever uma perturbação de ordem  $n$ . No contexto da aproximação linear os termos de segunda ordem são desprezados em (2.12) e (2.13). No tratamento quase linear, por outro lado, o termo de segunda ordem é desprezado em (2.13), mas mantido na equação (2.12). A teoria quase linear continuará a ser desenvolvida na seção 2.4.1.

### 2.2.3 Solução do Sistema Vlasov-Maxwell Linearizado

O caso mais simples para demonstrar como a implementação do método de linearização fornece resultados interessantes, a despeito da sua simplicidade, é o caso das oscilações *longitudinais* (comumente denominadas *eletrostáticas*), no qual é suposto que o plasma não possui campos no estado de equilíbrio ( $\mathbf{E}_0 = \mathbf{B}_0 = 0$ ) e as perturbações dos campos possuem apenas componente elétrico, sem componente magnético. Visto que as perturbações são eletrostáticas, o campo elétrico pode ser descrito pelo gradiente do potencial escalar  $\Phi_1(\mathbf{x}, t)$ , ou seja,  $\mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) = -\nabla \Phi_1(\mathbf{x}, t)$ .

Fazendo uso da aproximação eletrostática no conjunto de equações para as quantidades perturbadas, o sistema de equações lineares (2.8a) – (2.8d) é reduzido a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) f_{\alpha 1} = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla \Phi_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0} \quad (2.14a)$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = -4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha 1} d\mathbf{v}. \quad (2.14b)$$

Dentre os possíveis métodos de solução do sistema de Vlasov-Maxwell linearizado, faremos uso da abordagem que consiste em realizar, sobre  $f_{\alpha 1}$  e  $\Phi_1$ , transformações de Fourier no espaço, e de Laplace no tempo (Riley et al., 1999),

$$\tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int_0^{\infty} e^{-pt} f_{\alpha 1} dt \quad (2.15a)$$

$$\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int_0^{\infty} e^{-pt} \Phi_1 dt, \quad (2.15b)$$

salientando que a transformada de Laplace só estará definida para  $\text{Re}(p) \geq p_0$ , onde  $p_0$  é suficientemente grande para garantir a convergência da integral. Em (2.15a) e (2.15b), a quantidade  $\mathbf{k}$  é denominada o *vetor de onda* das perturbações que ocorrem no plasma, ao passo que a quantidade  $p$  está relacionada à *frequência angular* das perturbações, conforme será discutido abaixo.

Aplicando as transformações (2.15a) e (2.15b) sobre o sistema (2.14a) e (2.14b), resulta

$$(p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}}(p) = f_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t=0) + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} i\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p) \quad (2.16)$$

$$k^2 \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p) = 4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \int \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}} d\mathbf{v}. \quad (2.17)$$

É importante ressaltar aqui que em (2.16) o efeito da perturbação inicial  $f_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t = 0)$  é relevante na determinação do valor da função de distribuição  $\tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}}(p)$  no espaço de Fourier-Laplace.

Eliminando  $\tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}}$  das equações acima, obtemos uma expressão para  $\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}$ , o potencial escalar no espaço de Fourier-Laplace,

$$k^2 \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \int \frac{f_{\alpha\mathbf{k}}(t=0) d\mathbf{v}}{p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}}{1 + 4\pi \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha} e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \frac{1}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0} d\mathbf{v}}{ip - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}}. \quad (2.18)$$

O denominador desta equação é a *função dielétrica*  $D(\mathbf{k}, ip)$  de um plasma livre de campos para ondas eletrostáticas com frequência angular  $\omega = ip$  e vetor de onda  $\mathbf{k}$ , isto é,

$$D(\mathbf{k}, ip) = 1 + 4\pi \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha} e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \frac{1}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0} d\mathbf{v}}{ip - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}. \quad (2.19)$$

A expressão (2.18) para  $\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}$  pode ser simplificada escolhendo uma sistema de coordenadas no qual um dos eixos coordenados é orientado na direção do vetor de onda  $\mathbf{k}$  e definindo  $F_{\alpha 0}(u)$  como a integral de  $f_{\alpha 0}(\mathbf{v})$  sobre as outras duas coordenadas (Krall and Trivelpiece, 1986),

$$F_{\alpha 0}(u) \equiv \int \delta\left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{k}\right) f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad (2.20)$$

$$\tilde{F}_{\alpha\mathbf{k}} \equiv \int \delta\left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{k}\right) \tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}} d\mathbf{v}. \quad (2.21)$$

Utilizando estas definições nas expressões para as perturbações transformadas e para a função dielétrica, obtemos as equações

$$\tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v}, p) = \frac{1}{p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \left[ f_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t = 0) + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} (i\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}) \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} \right], \quad (2.22)$$

$$\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} = \frac{-i}{|k^3| D(\mathbf{k}, ip)} \sum_{\alpha} 4\pi n_{\alpha} e_{\alpha} \int \frac{F_{\alpha\mathbf{k}}(u, t = 0)}{u - ip/k} du, \quad (2.23)$$

$$D(\mathbf{k}, ip) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_{\alpha 0} / \partial u}{u - ip/k} du, \quad (2.24)$$

onde foi definida também a frequência angular de plasma para partículas do tipo  $\alpha$ ,

$$\omega_{p\alpha} \equiv \sqrt{\frac{4\pi n_{\alpha} e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}}}.$$

Para resolver este sistema é preciso empregar as transformadas inversas. Estas são definidas como

$$f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} e^{pt} \tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}} dp \quad (2.25a)$$

$$\Phi_1(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} e^{pt} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} dp. \quad (2.25b)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace em (2.23) é possível obter a dependência temporal da transformada de Fourier do potencial elétrico,

$$k^2 \Phi_{\mathbf{k}}(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \frac{4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} e_{\alpha} \int \frac{F_{\alpha\mathbf{k}}(u, t = 0)}{p + iku} du}{D(\mathbf{k}, ip)} e^{pt} \frac{dp}{2\pi}, \quad (2.26)$$

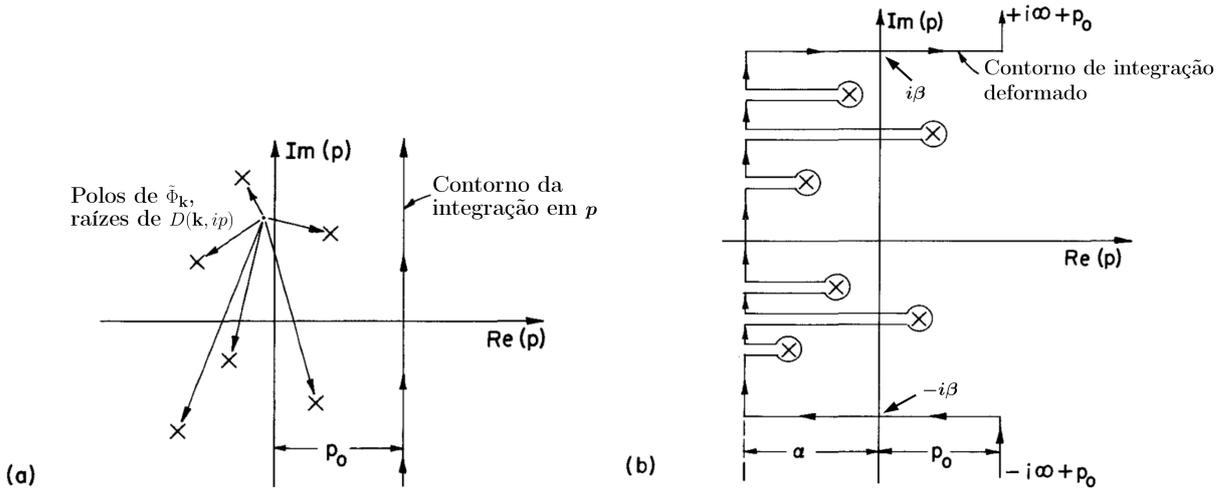


Figura 2.1: (a) Contorno de integração em  $p$  na equação (2.26). (b) Contorno deformado de integração.

chamando atenção para o fato que as raízes da função dielétrica  $D(\mathbf{k}, ip)$  são polos do potencial  $\Phi_{\mathbf{k}}(t)$ .

Visto que  $p_0 > 0$  foi escolhido de forma que as transformadas de Laplace em (2.15a) e (2.15b) converjam, o contorno de integração deve ser escolhido de sorte que passe à direita de qualquer um dos polos de  $\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}$ , conforme pode ser visto no painel (a) da figura 2.1. Este contorno poderá ser distorcido de maneira conveniente para aplicação do Teorema de Resíduos (AbLOWITZ and FOKAS, 2003).

Com exceção de algumas poucas distribuições de equilíbrio  $F_{\alpha 0}(u)$  e perturbações iniciais  $F_{\alpha k}(t = 0)$ , a integral que realiza a transformada inversa de Laplace do potencial  $\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}$  não pode ser resolvida analiticamente para obter soluções de  $\Phi_{\mathbf{k}}(t)$ . Entretanto, é possível obter a solução de tempo assintótico ( $t \rightarrow \infty$ ) para uma ampla classe de distribuições de equilíbrio. Estas soluções descrevem o comportamento do sistema “muito tempo”<sup>4</sup> após a perturbação inicial, tendo seu comportamento determinado pelos *modos normais* de oscilação do plasma, sem incluir a resposta transiente do plasma aos detalhes específicos da perturbação inicial (KRALL and TRIVELPIECE, 1986).

Para obter uma solução assintótica de (2.26), é necessário levar o contorno de integração na variável  $p$  para  $\text{Re}(p) < p_0$ ; mais especificamente, para  $\text{Re}(p) < 0$ , de tal maneira que o novo contorno de integração se encontre agora à esquerda dos polos, porém contornando os mesmos. Este novo contorno de integração é apresentado no painel (b) da figura 2.1, onde é possível ver que uma parte do novo contorno de integração está ao longo da reta  $\text{Re}(p) = -\alpha < 0$ .

Como o novo contorno nunca cruza os polos do integrando, é possível empregar-se o teorema de Cauchy para expressar a integração em (2.26) ao longo do novo contorno, desde que o integrando seja analítico ao longo do mesmo e na região do plano complexo de  $p$  entre os dois contornos. Em particular, é necessário verificar a analiticidade, para  $\text{Re}(p) \leq 0$ , da função dielétrica  $D(\mathbf{k}, ip)$ , originalmente definida em (2.24) para  $\text{Re}(p) > p_0$ , uma vez que suas raízes são os polos do integrando em (2.26).

Isto pode ser realizado analisando-se a analiticidade de integrais do tipo

$$h(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{u - \omega/k} du \quad (\text{Im}(\omega) > 0), \quad (2.27)$$

na qual foi empregada a relação  $\omega = ip$ , observando que a análise para  $\text{Re}(p) \leq 0$  equivale à análise da continuação analítica do integrando de  $h(\omega)$  para  $\text{Im}(\omega) \leq 0$ . Em (2.27), a função  $f(u)$  foi suposta inteira.

<sup>4</sup>Instantes de tempo da ordem do tempo de relaxação  $\tau_r$  do sistema. Este é definido como o tempo necessário para que o sistema entre no regime estacionário de oscilações a partir de alguma perturbação inicial.

Escrevendo  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ , para fazer  $\omega_i \rightarrow 0^+$  a integração acima pode ser calculada como

$$\begin{aligned} h(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(u - \omega_r/k) - i\omega_i/k} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(u - \omega_r/k)f(u)}{(u - \omega_r/k)^2 + \omega_i^2/k^2} du + i \frac{\omega_i}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(u - \omega_r/k)^2 + \omega_i^2/k^2} du. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Então,

$$\lim_{\omega_i \rightarrow 0^+} h(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{u - \omega_r/k} du + i \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \lim_{\omega_i \rightarrow 0^+} \frac{\omega_i/k}{(u - \omega_r/k)^2 + \omega_i^2/k^2} du, \quad (2.29)$$

onde,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{u - \omega_r/k} du \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-\infty}^{\omega_r/k - \epsilon} \frac{f(u)}{u - \omega_r/k} du + \int_{\omega_r/k + \epsilon}^{\infty} \frac{f(u)}{u - \omega_r/k} du \right], \quad (2.30)$$

representa o valor principal de Cauchy e, como

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2}, \quad (2.31)$$

é uma possível representação da função delta de Dirac, resulta

$$\lim_{\omega_i \rightarrow 0^+} h(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{u - \omega_r/k} du + i\pi f\left(\frac{\omega_r}{k}\right). \quad (2.32)$$

Por outro lado, um processo análogo, porém partindo da suposição que  $h(\omega)$  é definida originalmente para  $\text{Im}(\omega) < 0$ , leva a:

$$\lim_{\omega_i \rightarrow 0^-} h(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{u - \omega_r/k} du - i\pi f\left(\frac{\omega_r}{k}\right). \quad (2.33)$$

Existe, portanto, uma descontinuidade em  $h(\omega)$  quando  $\omega_i \rightarrow 0$ . Isto se deve ao polo presente em  $u = \omega/k$ . A continuidade analítica de  $h(\omega)$ , conforme originalmente definida em (2.27), pode ser obtida somando-se  $2i\pi f(\omega_r/k)$  à expressão (2.33). Generalizando este termo aditivo para  $\omega_i$  finito, obtém-se a seguinte forma para  $h(\omega)$ :

$$h(\omega) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{u - \omega/k} du, & \omega_i > 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{u - \omega_r/k} du + i\pi f\left(\frac{\omega_r}{k}\right), & \omega_i = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{u - \omega/k} du + 2i\pi f\left(\frac{\omega_r}{k}\right), & \omega_i < 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

a qual é agora uma função inteira, isto é, uma função holomorfa definida no corpo dos complexos. Os cálculos realizados em (2.34) correspondem aos contornos de integração descritos na *prescrição de Landau*. Esta prescrição consiste em realizar a integração sempre de tal forma que o caminho passe sob o polo em  $u = \omega/k$ . Identificando-se em (2.34) a função  $f(u) = \partial F_{\alpha 0} / \partial u$ , obtém-se a continuação analítica da função dielétrica de plasma definida em (2.24).

Uma vez obtida a continuação analítica das integrais envolvidas no cálculo de  $\Phi_{\mathbf{k}}(t)$ , o contorno de integração de (2.26) pode ser deslocado até o ponto  $\text{Re}(p) = -\alpha < 0$ , à esquerda de todas as raízes de  $D(\mathbf{k}, ip)$ , conforme ilustrado no painel (b) da figura 2.1. O *Teorema de Cauchy* (Ablowitz and Fokas, 2003) garante solução contanto que o caminho de integração não cruze nenhum dos polos. Neste caso, a expressão (2.26) pode ser escrita

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{k}}(t) = & \sum_j R_j e^{p_j(\mathbf{k})t} + \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0-i\infty}^{p_0-i\beta} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p) e^{pt} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0-i\beta}^{-\alpha-i\beta} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p) e^{pt} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha-i\beta}^{-\alpha+i\beta} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p) e^{pt} dp \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha+i\beta}^{p_0+i\beta} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p) e^{pt} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0+i\beta}^{p_0+i\infty} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p) e^{pt} dp, \end{aligned}$$

sendo  $\beta > 0$  escolhido de tal forma que as partes horizontais do contorno de integração estejam abaixo ou acima de todos os polos de  $\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p)$ .

Fazendo  $\beta \rightarrow \infty$ , o segundo e o último termos se anulam, restando

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{k}}(t) = & \sum_j R_j e^{p_j(\mathbf{k})t} + \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0-i\infty}^{-\alpha-i\infty} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p) e^{pt} dp \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p) e^{pt} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha+i\infty}^{p_0+i\infty} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p) e^{pt} dp. \quad (2.35) \end{aligned}$$

O segundo e o quarto termos de (2.35) tendem a zero para  $|p| \rightarrow \infty$ . Isto pode ser verificado empregando-se uma modificação do *Lema de Jordan* (Ablowitz and Fokas, 2003). Restam então as contribuições do primeiro e do terceiro termos.

O terceiro termo é obtido a partir da integração ao longo da reta vertical à esquerda na figura 2.1(b). Esta integração implica que o resultado será proporcional ao fator  $\exp(-\alpha t)$ , o qual é monotonicamente decrescente no tempo. Além disso, a integral resultante contém as contribuições da perturbação inicial, conforme pode ser visto em (2.26). Este termo, portanto, descreve os efeitos transientes típicos de osciladores forçados (Thornton and Marion, 2021).

Por fim, o primeiro termo de (2.35) contém a contribuição dos resíduos  $R_j$ , dados por

$$R_j = \lim_{p \rightarrow p_j} (p - p_j) \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p),$$

nos pontos singulares do integrando em (2.26), os quais são as soluções da equação

$$D(\mathbf{k}, ip_j) = 0, \quad (2.36)$$

ou seja, são as raízes da função dielétrica do plasma (2.24). É importante enfatizar que estas raízes não dependem da perturbação inicial, mas somente da forma da distribuição de equilíbrio, conforme pode ser visto em (2.19) ou em (2.24).

Conforme ilustrado no painel (b) da figura 2.1 algumas das raízes de  $D(\mathbf{k}, ip)$  podem estar localizadas no lado direito do eixo imaginário, *i.e.*,  $\text{Re}(p_j) > 0$ , enquanto que outras raízes são tais que  $\text{Re}(p_j) < 0$ . As raízes com  $\text{Re}(p_j) > 0$  dão origem a oscilações com amplitudes crescentes do potencial elétrico, ou seja, do campo elétrico. Estas oscilações crescentes no tempo são denominadas *instabilidades*. Contudo, as raízes da função dielétrica usualmente ocorrem com  $\text{Re}(p_j) < 0$ , dando origem a oscilações amortecidas. Porém, mesmo neste último caso, uma vez que todas as raízes são tais que  $\text{Re}(p_j) > -\alpha$ , as contribuições oriundas do primeiro termo de (2.35) permanecem durante um intervalo de tempo muito maior que a contribuição dos efeitos transientes, dada pelo terceiro termo de (2.35).

Assim sendo, se  $t_{\text{trans}}$  corresponde ao intervalo de tempo típico de duração dos efeitos transientes, oriundos da perturbação inicial aplicada ao plasma, então para  $t > t_{\text{trans}}$  a evolução temporal do potencial elétrico entra no *regime estacionário* dado por

$$\Phi_{\mathbf{k}}(t) = \sum_j R_j e^{p_j(\mathbf{k})t}. \quad (2.37)$$

A expressão (2.37) mostra que no regime estacionário a evolução do potencial é determinada pela combinação linear das oscilações descritas pelas raízes da função dielétrica do plasma, obtidas a partir da equação (2.36). Em outras palavras, no regime estacionário a evolução do potencial e, por conseguinte, da função de distribuição perturbada, são determinadas pelos *modos normais de oscilação* do plasma, obtidos a partir de (2.36).

As expressões obtidas até este ponto podem ser reescritas em termos da frequência angular (complexa)  $\omega = ip = \omega_r + i\omega_i$ . Em termos da frequência, a equação (2.36), que determina os modos normais no plasma, passa a ser escrita

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (2.38)$$

sendo então denominada *equação de dispersão*. As soluções de (2.38),

$$\omega_j = \omega_j(\mathbf{k}) = \omega_{rj}(\mathbf{k}) + i\omega_{ij}(\mathbf{k}), \quad (j = 1, 2, \dots),$$

sendo  $\omega_{rj} = \text{Re}(\omega_j)$  e  $\omega_{ij} = \text{Im}(\omega_j)$ , ao serem inseridas na expressão (2.37) para a evolução do potencial no regime estacionário, resultam que

$$\Phi_{\mathbf{k}}(t) = \sum_j R_j e^{\omega_{ij}t} e^{-i\omega_{rj}t}. \quad (2.39)$$

Em (2.39), observamos que a parte real  $\text{Re}(\omega_j) = \omega_{rj}(\mathbf{k})$  é responsável por uma oscilação harmônica com frequência (real)  $\omega_{rj}$ , dependente do vetor de onda  $\mathbf{k}$ . Por esta razão, a função  $\omega_{rj}(\mathbf{k})$  é denominada a *relação de dispersão* do  $j$ -ésimo modo normal de oscilação do plasma. Por sua vez, a parte imaginária  $\text{Im}(\omega_j) = \omega_{ij}(\mathbf{k})$  gera um fator exponencial que determina a evolução temporal da amplitude do  $j$ -ésimo modo normal. Se  $\omega_{ij}(\mathbf{k}) < 0$ , a amplitude deste modo normal decai com o tempo, o que significa que este é amortecido. Por outro lado, se  $\omega_{ij}(\mathbf{k}) > 0$  a amplitude do modo normal aumenta com o tempo, em cuja situação surge uma instabilidade no plasma.

A análise tradicional acerca das oscilações amortecidas de um oscilador harmônico mostra que o movimento resultante somente pode ser classificado como uma oscilação quando o oscilador está sofrendo um subamortecimento, caracterizado por ter a frequência angular maior do que o parâmetro de amortecimento (Thornton and Marion, 2004). Empregando o mesmo critério ao regime estacionário das perturbações longitudinais no plasma, descrito por (2.39), conclui-se que as mesmas somente podem ser classificadas como oscilações se  $|\omega_{ij}| < |\omega_{rj}|$ , para todos os modos normais do conjunto  $\{\omega_j\}$ . Nesta situação, é possível realizar uma expansão da função  $D(\mathbf{k}, \omega)$  em uma série de Taylor centrada em  $\omega_r$ ,

$$D(\mathbf{k}, \omega) = D(\mathbf{k}, \omega_r) + i\omega_i \left. \frac{\partial D(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_r} + \mathcal{O}(\omega_i^2).$$

Supondo que  $|\omega_i| \ll |\omega_r|$ , trunca-se a série acima, mantendo somente os dois primeiros termos. Lembrando também que  $D(\mathbf{k}, \omega_r)$  continua sendo, em geral, uma função complexa, escreve-se

$$D(\mathbf{k}, \omega_r) = D_r(\mathbf{k}, \omega_r) + iD_i(\mathbf{k}, \omega_r).$$

Inserindo esta expressão na série truncada acima,

$$\begin{aligned} D(\mathbf{k}, \omega) &\simeq D(\mathbf{k}, \omega_r) + i\omega_i \left. \frac{\partial D(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_r}, \\ &\simeq D_r(\mathbf{k}, \omega_r) - \omega_i \left. \frac{\partial D_i(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_r} + i \left[ D_i(\mathbf{k}, \omega_r) + \omega_i \left. \frac{\partial D_r(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_r} \right]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Dessa forma, a equação de dispersão (2.38) é fatorada em duas equações reais

$$D_r(\mathbf{k}, \omega_r) - \omega_i \left. \frac{\partial D_i(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_r} = 0 \quad (2.41a)$$

$$D_i(\mathbf{k}, \omega_r) + \omega_i \left. \frac{\partial D_r(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_r} = 0. \quad (2.41b)$$

Na ausência de amortecimento ou amplificação dos modos normais (*i.e.*, se  $\omega_i = 0$ ), as duas equações acima se reduziriam somente a  $D_r(\mathbf{k}, \omega_r) = 0$ , cujas soluções seriam as relações de dispersão dos modos normais de oscilações harmônicas do plasma. Na presença de *fraco amortecimento/amplificação*, as soluções de (2.41a) continuam determinando as relações de dispersão e o segundo termo da equação é usualmente desprezado frente ao primeiro, por ser assumido que o mesmo tem efeito desprezível na determinação das relações de dispersão. Uma vez determinadas as partes reais, estas são empregadas em (2.41b) para a obtenção das correspondentes partes imaginárias.

Portanto, o conjunto de equações que determina as partes reais e imaginárias das relações de dispersão  $\omega(\mathbf{k}) = \omega_r(\mathbf{k}) + i\omega_i(\mathbf{k})$  fica escrito

$$D_r(\mathbf{k}, \omega_r) = 0, \quad (2.42a)$$

$$\omega_i = -\frac{D_i(\mathbf{k}, \omega_r)}{\left. \partial D_r(\mathbf{k}, \omega) / \partial \omega \right|_{\omega=\omega_r}}. \quad (2.42b)$$

É importante ressaltar que o sistema (2.42) não é somente válido para o caso particular de oscilações longitudinais fracamente amortecidas/amplificadas em um plasma sem campos, mas pode, outrossim, ser aplicado de forma genérica na análise de ondas propagando-se em um plasma qualquer, desde que as hipóteses realizadas na sua derivação continuem válidas.

Para o plasma em consideração neste trabalho, as formas específicas das funções  $D_r(\mathbf{k}, \omega_r)$  e  $D_i(\mathbf{k}, \omega_r)$  a serem empregadas em (2.42) são obtidas pela aplicação da expressão para a continuação analítica da função dielétrica em (2.38), resultando então

$$D_r(\mathbf{k}, \omega_r) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_{\alpha 0} / \partial u}{u - \omega_r/k} du, \quad (2.43a)$$

$$D_i(\mathbf{k}, \omega_r) = -\pi \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \left. \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial u} \right|_{u=\omega_r/k}. \quad (2.43b)$$

As expressões genéricas (2.43a) e (2.43b) podem ser empregadas para determinar as relações de dispersão dos modos longitudinais e para interpretar o amortecimento de Landau que se manifesta tanto em oscilações de alta frequência (ondas de Langmuir) quanto em oscilações de baixa frequência (ondas íon-acústicas).

Por fim, cabe ressaltar que como as transformadas inversas em (2.15a) geram funções reais no espaço e no tempo, as relações de dispersão  $\omega(\mathbf{k}) = \omega_r(\mathbf{k}) + i\omega_i(\mathbf{k})$  devem satisfazer as *condições de realidade*

$$\omega(\mathbf{k}) = -\omega^*(-\mathbf{k}) \implies \begin{cases} \omega_r(\mathbf{k}) = -\omega_r(-\mathbf{k}) \\ \omega_i(\mathbf{k}) = \omega_i(-\mathbf{k}). \end{cases} \quad (2.44)$$

#### 2.2.4 O amortecimento de Landau das ondas de Langmuir

O mecanismo físico responsável pelo amortecimento não colisional das ondas longitudinais de altas frequências é a interação onda-partícula, *i.e.*, a interação dos elétrons com os campos elétricos das ondas. Os elétrons que inicialmente possuem velocidades próximas da velocidade de fase das ondas são aprisionados em poços de potencial resultando uma troca de energia entre os elétrons e as ondas.

Matematicamente, o fator de amortecimento de Landau se deve ao polo no integrando da função dielétrica do plasma (2.24), que ocorre quando a componente da velocidade do elétron que é paralela a  $\mathbf{k}$  é igual à velocidade de fase das ondas  $v_{\phi} = \omega_r/k$ . Esta propriedade é uma manifestação matemática do fato de que a interação onda-partícula é efetiva somente quando

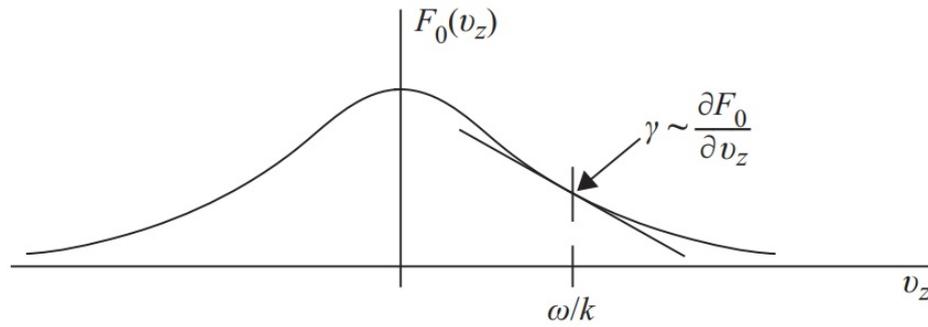


Figura 2.2: A função distribuição eletrônica em função da velocidade. Nesta figura,  $\gamma$  representa o fator de amortecimento, sendo este proporcional à inclinação da reta que tangencia a curva, *i.e.* sua derivada. O fator de amortecimento é dado pela parte imaginária da frequência angular  $\omega(\mathbf{k})$ . Enquanto alguns autores definem  $\omega(\mathbf{k}) = \omega_r + i\omega_i$ , outros definem como  $\omega(\mathbf{k}) = \omega_r + i\gamma$  (Krall and Trivelpiece, 1986; Yoon, 2019).

a velocidade dos elétrons é muito próxima da velocidade de fase das ondas (Bittencourt, 2004; Chen, 2018).

Em distribuições cuja amplitude decresce monotonicamente com o aumento do módulo da velocidade, a exemplo das distribuições Maxwellianas, o *critério de instabilidade de Penrose*<sup>5</sup> (Penrose, 1960) afirma que não ocorrerão instabilidades e, portanto, se conclui que ocorrerá exclusivamente o fenômeno de amortecimento descrito por Landau (Landau, 1946). Em distribuições com estas características, ilustradas na figura 2.2, o número de partículas movendo-se um pouco mais devagar do que as ondas é maior do que o número de partículas movendo-se um pouco mais rápido do que as ondas. Partículas com velocidade menor do que a velocidade de fase são aceleradas pelas ondas, enquanto que partículas com  $v_z > v_\phi$  são desaceleradas. Este processo resulta no amortecimento das ondas, pois ocorre uma transferência líquida de energia das ondas para as partículas (Akhiezer et al., 1975; Krall and Trivelpiece, 1986).

Podemos dizer, então, que o amortecimento de Landau é característico de plasmas não colisionais e que consiste num fenômeno de ressonância proporcional à inclinação da função distribuição e caracterizado pela parte imaginária e negativa da frequência.

A figura 2.2 representa a distribuição  $F_0$  como função da velocidade  $v_z$ , bem como a região do espaço de velocidades na qual  $\partial F_0/\partial v_z < 0$ . Um plasma descrito por este tipo de função de distribuição de velocidades no equilíbrio somente será capaz de sustentar oscilações amortecidas.

Por fim, é válido salientar que o mecanismo físico através do qual o descrito acima se manifesta no modo longitudinal chamado de ondas íon-acústicas é o mesmo estudado no contexto das oscilações de alta frequência, *i.e.*, nas ondas de Langmuir, e por este motivo as afirmações feitas acerca deste modo longitudinal são válidas também no contexto de oscilações de baixa frequência.

### 2.2.5 Ondas em plasmas não magnetizados

Como discutido na seção 2.2.3, a solução da equação de dispersão (2.38) fornece os modos normais de oscilação  $\omega(\mathbf{k})$  sustentados pelo plasma. Abaixo, será realizada uma breve descrição qualitativa a respeito destes modos. Posteriormente, quando estudarmos processos não lineares de acoplamento entre ondas na seção 2.4, veremos que estes modos podem interagir entre si de uma forma que não pode ser explicada pela teoria linear. Nas expressões que serão apresentadas a seguir  $v_{Te}$ ,  $v_{Ti}$ ,  $T_e$ ,  $T_i$  e  $\lambda_D$  representam a velocidade térmica dos elétrons, a velocidade

<sup>5</sup>Este critério foi deduzido por Oliver Penrose com a finalidade de determinar se uma dada função de distribuição de probabilidades pode sustentar modos que crescem exponencialmente. Está diretamente conectado à presença da instabilidade *bump-in-tail* que será discutida na seção 2.3.

térmica dos íons, a temperatura dos elétrons, a temperatura dos íons e o comprimento de Debye, respectivamente.

Será assumido também que as distribuições de ambas as espécies são Maxwellianas, *i.e.*, descritas por

$$f_{\alpha}(v) = \frac{e^{-v^2/v_{T\alpha}^2}}{(\pi v_{T\alpha}^2)^{3/2}}, \quad (2.45)$$

sendo

$$v_{T\alpha} = \sqrt{\frac{2T_{\alpha}}{m_{\alpha}}}$$

a velocidade térmica da espécie/população  $\alpha$ .

**Ondas de Langmuir:** As ondas de Langmuir<sup>6</sup> são oscilações rápidas da densidade de elétrons que ocorrem em meio condutores, dentre eles os plasmas. Em plasmas frios, sua relação de dispersão fornece uma frequência angular igual à frequência de plasma  $\omega_{pe}$ ; entretanto, quando efeitos térmicos da função distribuição são levados em consideração, há um desvio de frequência angular que apresenta uma dependência com o número de onda  $k$ . No limite de pequenos números de onda ( $k\lambda_D \ll 1$ ) (1.1), a relação de dispersão destas ondas pode ser aproximada pela *relação de dispersão de Bohm-Gross* (Bohm and Gross, 1949), cuja expressão matemática é dada por:

$$\omega_L^2 = \omega_{pe}^2(1 + 3\lambda_D^2 k^2).$$

No limite de pequeno número de onda é assumido que a velocidade de fase da onda é grande comparada com a velocidade térmica dos elétrons,  $v_{Te} \ll \omega_r/k$ , de tal forma que somente elétrons no extremo da cauda da distribuição entram em ressonância com as ondas. Assume-se também que os íons estão em repouso e portanto sua contribuição é desprezada.

**Ondas íon-acústicas:** Neste caso, o efeito dos íons não pode mais ser desprezado como foi suposto nas ondas de Langmuir. Se a distribuição eletrônica é mais quente que a distribuição dos íons ( $T_e \gg T_i$ ), o modo eletrostático que envolve os íons existe em frequências mais baixas ( $v_{Ti} \ll \omega/k \ll v_{Te}$ ). A sua relação de dispersão é, aproximadamente,

$$\omega_S^2 = \frac{k^2 C_s^2}{1 + k^2 \lambda_D^2} \left(1 + \frac{3T_i}{T_e}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad C_s \equiv \left(\frac{T_e}{m_i}\right)^{1/2}.$$

O nome dado a estas ondas se refere ao fato de que, para  $k\lambda_D \ll 1$ , todas as ondas se propagam com a mesma velocidade  $C_s$ , denominada *velocidade íon-acústica*, em contraste com as ondas de Langmuir, que possuem todas a mesma frequência independentemente de  $k$  quando  $k\lambda_D \ll 1$  (Krall and Trivelpiece, 1986).

**Ondas eletromagnéticas:** No caso de plasmas não colisionais e não magnetizados, estas ondas não sofrem amortecimento de Landau nem são excitadas, pois sua velocidade de fase é superluminal. É importante ressaltar que esta afirmação não viola as condições impostas pela relatividade, pois estas ondas continuam tendo sua velocidade de grupo menor que a velocidade da luz. Este modo normal obedece à seguinte relação de dispersão (Krall and Trivelpiece, 1986):

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\alpha 0}}{\omega - ku} du,$$

<sup>6</sup>Assim nomeadas em homenagem ao físico Irving Langmuir (1881-1957).

que no caso em que a velocidade de fase  $v_\phi = \omega/k \gg v_{Te}$  pode ser aproximada por

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_{pe}^2.$$

Este é o mesmo resultado obtido pela formulação de fluidos e representa “ondas luminosas” em um plasma. Estas ondas são dispersivas e o índice de refração do plasma é dependente da frequência angular.

**Ondas do modo feixe:** Este modo se torna relevante no contexto do estudo da dinâmica de sistemas plasma-feixe e tem sido objeto de estudos teóricos e experimentais há décadas (O’Neil and Malmberg, 1968; Cairns and Fung, 1988; Cairns, 1989). Inicialmente caracterizado por uma relação de dispersão linear, o modo feixe tem se mostrado complexo e fortemente dependente dos parâmetros (densidade, velocidade e temperatura) que caracterizam o feixe. Portanto, diferentes regimes de parâmetros apresentaram modos feixe com diferentes características, isto é, diferentes relações de dispersão e regiões espectrais amortecidas e/ou amplificadas. O modo feixe é de importância fundamental para esta dissertação e será abordado com mais detalhes na seção 2.5.

## 2.3 Instabilidades

Quando as partículas que compõem o plasma apresentam uma distribuição de velocidades não Maxwelliana, uma instabilidade pode ser gerada por processos internos e é dita *instabilidade microscópica*. Este fenômeno característico de plasmas fora do equilíbrio termodinâmico atua como um mecanismo que dissipa a energia livre do plasma e tende a restaurar o equilíbrio do sistema.

Vamos considerar um plasma composto por uma população de íons e duas populações eletrônicas (*core* e feixe) e cuja fonte de energia livre é a energia cinética dos elétrons do feixe. Estas instabilidades podem se apresentar nas formas *reativa* e *cinética*, as quais caracterizam casos limites de uma única instabilidade (*weak-beam instability*). Para um conjunto de parâmetros físicos qualquer, a instabilidade pode ser mista, parcialmente reativa e cinética. Esta instabilidade se manifesta quando consideramos um feixe rarefeito de elétrons se propagando por uma distribuição eletrônica suposta estacionária (Melrose, 1986).

Como discutido na seção 2.2.3, a parte real da contribuição do feixe ao tensor dielétrico fornece a frequência real da perturbação, ao passo que a parte imaginária é responsável pelo efeito de amplificação das ondas. É justamente a contribuição vinda do feixe que faz com que a relação de dispersão das ondas sustentadas pelo plasma difira da relação de dispersão das ondas de Langmuir (*frequency shift*).

Também em Melrose (1986) encontramos uma caracterização possível e bastante utilizada no contexto do estudo das instabilidades em plasmas térmicos. Sua classificação é baseada nos parâmetros físicos considerados no sistema e divide as instabilidades em cinética (ou ressonante) e reativa (ou não ressonante). No caso da instabilidade cinética, são assumidas frequências reais em uma primeira aproximação para posteriormente incluir efeitos de fraco amortecimento ou crescimento, de acordo com o método introduzido no final da seção 2.2.3. No tratamento da instabilidade reativa a parte imaginária do tensor dielétrico é ignorada e resolve-se uma relação de dispersão real para encontrar soluções complexas (Melrose, 1986).

O fenômeno de *frequency shift* que ocorre por conta da presença do feixe motiva o questionamento sobre a validade das relações de dispersão teorizadas na ausência do feixe. Este questionamento levou O’Neil e Malmberg a deduzirem que a relação de dispersão de Bohm-Gross é válida somente quando um certo parâmetro “*s*” (*scaled beam thermal spread*) satisfaz a seguinte condição (O’Neil and Malmberg, 1968):

$$s = \frac{v_b}{V_b} \left( \frac{2n_0}{n_b} \right)^{\frac{1}{3}} \gtrsim 1, 47 \quad (2.46)$$

sendo  $v_b = (T_b/m_e)^{1/2}$  a dispersão térmica de velocidades das partículas do feixe,  $V_b$  a velocidade média do feixe,  $n_0$  a densidade do plasma de fundo e  $n_b$  a densidade do feixe. Tendo definido o parâmetro desta forma concluem que:

- $s \lesssim 0, 2$ : A instabilidade é não ressonante (reativa) e ocorre em pares complexo-conjugados de raízes da relação de dispersão.
- $0, 2 \lesssim s \lesssim 1, 4$ : A instabilidade é ressonante, mas ocorre ao longo de um modo de propagação denominado *modo feixe-modificado* (*modified-beam mode*), o qual se caracteriza por uma relação linear do tipo  $\omega \simeq kV_b$  para  $k$  pequeno.
- $s \gtrsim 1, 5$ : A instabilidade é fortemente ressonante e ocorre ao longo de um modo que se aproxima assintoticamente do modo de Langmuir quando  $s \rightarrow \infty$ , ou seja, quando  $V_b \rightarrow 0$  e/ou  $n_b \rightarrow 0$ .

Os parâmetros físicos muitas vezes adotados nos estudos de turbulência fraca geralmente satisfazem de forma marginal a condição  $s \gtrsim 1, 5$  e, portanto, o uso da relação de dispersão de Bohm-Gross se justifica em grande parte das aplicações.

Uma análise mais cuidadosa foi realizada posteriormente por Iver Cairns (Cairns, 1989), resultando em condições ainda mais restritivas para a validade desta aproximação. Em sua análise o autor divide as características dispersivas das oscilações eletrostáticas em intervalos dos parâmetros  $s$  (2.46),  $P$  (2.47a) e  $\zeta$  (2.47b), correspondentes a diferentes gradações do caráter ressonante ou não ressonante da interação plasma-feixe. O artigo de Cairns, entretanto, dá foco maior aos outros dois parâmetros, cujas definições são:

$$P = \frac{v_b}{V_b} \left( \frac{n_b}{n_0} \right)^{1/3}, \quad (2.47a)$$

$$\zeta_\alpha = (\omega_r - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_\alpha) / \sqrt{2} k V_\alpha. \quad (2.47b)$$

Em um primeiro momento<sup>7</sup>, observando que (2.46) e (2.47a) se relacionam como  $P = 2^{1/3}/s$ , Cairns afirma que seria possível inferir que a instabilidade reativa ocorreria somente nos modos feixe e feixe-modificado, enquanto que a instabilidade cinética ocorreria apenas no modo feixe-Langmuir (Cairns, 1989). Esta inferência se mostrará errada quando confrontada com o comportamento do parâmetro  $\zeta_\alpha$  (2.47b), em especial na seção 2.5 e na figura 2.6.

O parâmetro  $\zeta_\alpha$  (2.47b), por sua vez, é o argumento da função de Fried e Conte (2.48b)<sup>8</sup> (Fried and Conte, 1961). Esta função é bastante utilizada no contexto da física de plasmas e comumente empregada para reescrever a equação de dispersão (2.24) no caso específico em que a distribuição é Maxwelliana:

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{2k^2 V_\alpha^2} Z'(\zeta_\alpha) = 0, \quad (2.48a)$$

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{-y^2}}{y - \zeta}, \quad (2.48b)$$

$$Z'(\zeta) = -2[1 + \zeta Z(\zeta)]. \quad (2.48c)$$

É importante salientar que na definição de (2.47b) a hipótese de fraco amortecimento ( $|\omega_i| \ll \omega_r$ ) implica  $|\zeta_i| \ll |\zeta_r|$ , em cuja situação  $|\zeta| \sim |\zeta_r|$ . Será interpretada como instabilidade reativa a que apresentar  $|\zeta_r| > 2$  ( $P \gtrsim 6$ ), enquanto que quando  $|\zeta_r| < 1$  ( $P \lesssim 2$ ) diremos que a instabilidade é fortemente ressonante. Valores do parâmetro que estejam no intervalo  $2 > |\zeta_r| > 1$

<sup>7</sup>Antes da publicação de Cairns (1989) um critério teórico utilizado para determinar se a instabilidade é reativa ou cinética era  $P > 1$  e  $P < 1$ , respectivamente (Melrose, 1986).

<sup>8</sup>A função de Fried e Conte pode ser obtida através da Transformada de Hilbert de uma distribuição gaussiana (Fried and Conte, 1961).

caracterizam uma instabilidade mista, ou marginalmente ressonante. Cairns define estes valores a partir do estudo da variação dos parâmetros do feixe e sua consequência sobre as características dispersivas do plasma. Os valores específicos adotados para definir a natureza da instabilidade são corroborados pelas figuras 2.4 – 2.7, e analisados em detalhes em Cairns and Fung (1988).

De forma mais sintética, desta seção em diante entenderemos as instabilidades reativa e cinética como:

**Instabilidade Reativa:** Do ponto de vista do tratamento matemático, a parte imaginária do tensor dielétrico é ignorada e resolve-se uma relação de dispersão real para encontrar soluções complexas. Soluções complexas para o tensor dielétrico de um sistema plasma-feixe se apresentam na forma de um par de raízes quase complexo-conjugadas. As raízes apresentam partes imaginárias com sinais opostos, sendo a parte imaginária positiva da frequência responsável pelo crescimento e a parte imaginária negativa responsável pelo amortecimento das ondas.

Em seu artigo, Bohm e Gross, ao estudar os processos microscópicos que levam a um comportamento do meio (do plasma), observaram que esta instabilidade é uma resposta do meio que se deve ao mecanismo de agrupamento (*bunching*) de elétrons ocasionando um crescimento na densidade de cargas (Bohm and Gross, 1949; Melrose, 1986). Uma breve discussão sobre um possível método para estender a Teoria de Turbulência Fraca para o contexto de instabilidades reativas pode ser encontrada no artigo (Yoon, 2010) e no “*apêndice E*” do livro de Peter Yoon (Yoon, 2019). A teoria de turbulência fraca será discutida com mais profundidade no capítulo 3.

**Instabilidade Cinética:** A abordagem utilizada para o tratamento deste tipo de instabilidade determina a contribuição do feixe na parte imaginária do tensor dielétrico para então calcular a taxa de crescimento ou amortecimento do modo (Melrose, 1986). Estamos interessados no caso onde é a presença de gradientes positivos na distribuição de velocidades das partículas ressonantes que causa a instabilidade cinética. A descrição do mecanismo físico por trás da instabilidade cinética é essencialmente a descrição da ressonância onda-partícula na condição de ressonância e pela existência da inversão de população. Ou seja, o mecanismo inverso do amortecimento de Landau.

## 2.4 Processos não lineares na teoria de turbulência fraca

A adaptação da teoria cinética que leva em consideração as interações não lineares consiste em um grande passo no sentido de compreender de forma mais completa o comportamento complexo da dinâmica dos sistemas estudados na física de plasmas. Podemos dizer que a teoria cinética de processos não lineares fracamente turbulentos ajudou a formar a fundação da física de plasmas moderna. Nesta seção são apresentadas formas de interação onda-partícula e onda-onda comumente encontradas no contexto dos processos não lineares de acoplamento.

Ondas com amplitude finita exibem fenômenos que dependem do produto das amplitudes das ondas e que são necessariamente não lineares. O balanço energético das interações onda-partícula, as mudanças nas propriedades médias do plasma e os processos de acoplamento entre os modos normais do plasma são todos exemplos de fenômenos que demandam um tratamento não linear para que possam ser completamente compreendidos.

Nesta seção será realizada uma descrição qualitativa de alguns processos não lineares típicos que surgem na Teoria de Turbulência Fraca, tratada a partir do sistema Vlasov-Maxwell. Uma derivação mais detalhada, incluindo também os efeitos de partícula única, será realizada a partir da *Teoria de Klimontovich* no capítulo 3.

### 2.4.1 Interação quase linear onda-partícula

No contexto da aproximação quase linear da teoria de Vlasov (ainda no caso eletrostático<sup>9</sup> e não magnetizado, mas não limitado a este), os termos de segunda ordem serão desprezados na equação (2.13) para a perturbação  $f_{\alpha 1}$ , mas mantidos na expressão (2.12) para  $f_{\alpha 0}$ .

Assim, obtemos uma equação que é formalmente idêntica à (2.14a), com a diferença que na aproximação quase linear  $f_{\alpha 0}$  varia lentamente no tempo,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) f_{\alpha 1} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0} = 0, \quad (2.49)$$

ao passo que  $f_{\alpha 1}$  varia numa escala de tempo muito mais rápida, da ordem do período das ondas (Gurnett and Bhattacharjee, 2005). É possível demonstrar que a função distribuição de equilíbrio  $f_{\alpha 0}$  obedece a uma *equação de difusão quase linear* (Krall and Trivelpiece, 1986) expressa em termos do coeficiente de difusão,  $D_v$ , como segue:

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = \nabla_{\mathbf{v}} \cdot D_v \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}(t), \quad (2.50a)$$

$$D_v = \left( \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \right)^2 8\pi \int \frac{\omega_i \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t)}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r)^2 + \omega_i^2} \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} d\mathbf{k}. \quad (2.50b)$$

Na expressão acima, o coeficiente de difusão quase linear (2.50b) é definido em termos de  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t)$ , a densidade espectral do campo elétrico<sup>10</sup> associada ao vetor de onda  $\mathbf{k}$  que, por sua vez, pode ser obtida a partir da expressão para o campo elétrico como função do tempo

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}} \equiv \frac{1}{V} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}}{8\pi},$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(0) e^{-i\omega(\mathbf{k})t},$$

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{V} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(0) \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}(0)}{8\pi} e^{-i[\omega(\mathbf{k}) + \omega(-\mathbf{k})]t} = \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(0) e^{2i\omega_i(\mathbf{k})t}.$$

Por fim, a equação diferencial que completa o conjunto de equações da aproximação quase linear descreve a evolução temporal da densidade espectral do campo eletrostático:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} = 2\omega_i(\mathbf{k}, t) \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t). \quad (2.51)$$

É válido salientar que  $\omega_i(\mathbf{k}, t)$  é uma função do tempo. Contudo, a sua variação temporal será lenta, pois esta depende de  $f_{\alpha 0}$ , a qual depende fracamente do tempo segundo (2.50a).

Em síntese, a teoria quase linear de Vlasov mostra que a evolução da distribuição das partículas do plasma implica consequências que se manifestam como um processo de difusão no espaço de velocidades de  $f_{\alpha 0}$  e alterações na intensidade espectral dos modos normais sustentados pelo plasma.

<sup>9</sup>Um estudo aplicando a aproximação quase linear ao fenômeno das flutuações eletromagnéticas em raios cósmicos extragaláticos em um meio não magnetizado pode ser encontrado em Schlickeiser and Yoon (2014). O artigo faz uso do *formalismo de Klimontovich* que, por sua vez, será abordado em detalhes do capítulo 3.

<sup>10</sup>Essa quantidade representa a densidade espectral das flutuações que ocorrem no plasma. Dada a condição de realidade das transformadas inversas de Fourier-Laplace, resulta uma condição imposta sobre a frequência  $\omega(\mathbf{k})$  (cuja demonstração não será apresentada, embora seja relativamente simples de reproduzir), é possível mostrar que  $\omega(\mathbf{k}) + \omega(-\mathbf{k}) = 2i\omega_i(\mathbf{k})$  (Krall and Trivelpiece, 1986).

### 2.4.2 Interação não linear onda-onda

Neste momento é importante que sejam apresentadas algumas definições de instabilidades cuja aplicação será abordada com mais profundidade nos capítulos 3 e 4. Consideremos uma onda que pode causar uma modulação periódica dos parâmetros que caracterizam os modos naturais do plasma, a qual chamaremos de indutora, que tenha amplitude finita e que tenha sido excitada num plasma. Quando a intensidade desta onda indutora excede um certo limiar necessário para compensar as dissipações naturais do plasma, como o amortecimento de Landau, por exemplo, os modos naturais deste começam a crescer a partir do nível de ruído, absorvendo energia e momentum da onda indutora. Tal tipo de instabilidade definimos como *instabilidade paramétrica*.

Condições de casamento entre as ondas requerem que todas as ondas envolvidas na interação satisfaçam às regras de adição vetorial quando representadas como vetores no espaço  $(\omega, \mathbf{k})$ . A frequência e o número de onda para cada modo devem satisfazer a relação de dispersão ( $\omega = \omega(k)$ ) apropriada.

**Instabilidade de decaimento:** a onda indutora decai em dois modos naturais do plasma satisfazendo às condições de casamento de frequências e números de onda, isto é, condições de conservação de energia e momentum. Um exemplo recorrente na literatura é conhecido como decaimento eletrostático de Langmuir, representado como  $L \rightarrow L' + S$ . Neste processo uma onda de Langmuir, a indutora, decai em uma onda de Langmuir contra-propagante  $L'$  e uma onda íon acústica  $S$  propagando na direção da onda indutora. O diagrama de acoplamento de fase deste processo está representado no painel (a) da figura 2.3.

**Instabilidade de coalescência:** Neste processo duas ondas se unem, coalescem, para formar uma terceira onda satisfazendo às mesmas condições de casamento e conservação citadas acima. Esta instabilidade é muito importante no contexto do estudo do fenômeno de emissão de plasma nos modos fundamental e seus harmônicos. Como exemplo, o processo de coalescência  $L + S \rightarrow T$  no qual uma onda de Langmuir  $L$  e uma onda íon acústica  $S$  coalescem em uma onda transversal  $T$ . O diagrama de acoplamento de fase deste processo está representado no painel (b) da figura 2.3.

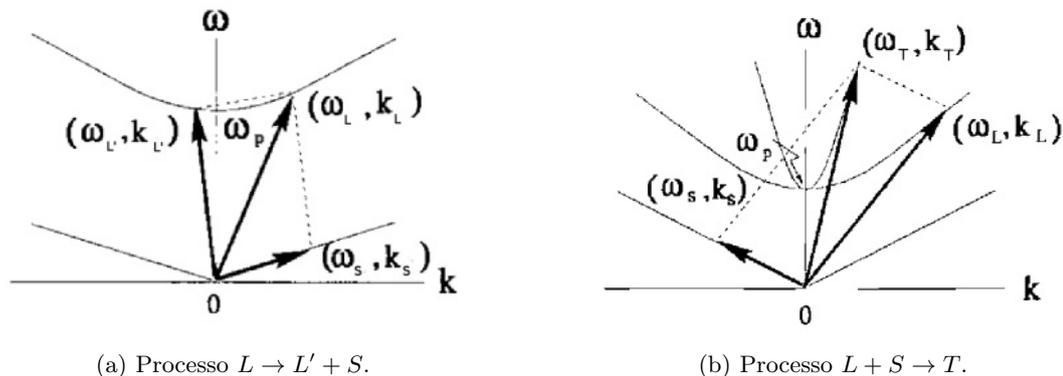


Figura 2.3: Diagrama de acoplamento de fase dos processos  $L \rightarrow L' + S$  e  $L + S \rightarrow T$  (Guedes, 1995).

### 2.4.3 Interação não linear onda-partícula.

A interação não linear onda-partícula é importante para o intervalo de velocidades ressonantes e números de onda que são inacessíveis do ponto de vista da interação linear onda-partícula.

O processo de espalhamento é similar à interação de decaimento, com a diferença que, ao invés de uma interação ressonante entre três ondas, duas ondas interagem de forma ressonante com uma terceira onda virtual que representa as partículas. Abaixo, uma breve descrição de três possíveis interações de espalhamento induzido envolvendo os modos normais sustentados pelo plasma:

**Espalhamento induzido envolvendo duas ondas de Langmuir:** Este processo envolve uma onda de Langmuir sendo espalhada por uma partícula em outra onda de Langmuir, podendo ganhar ou perder energia no decorrer de tal interação. No espalhamento não linear onda-partícula envolvendo duas ondas de Langmuir a velocidade ressonante é muito menor que na interação linear e o processo é similar ao caso da emissão induzida. Neste último, as partículas que se movem no campo de fundo das ondas (*background wave field*) interagem de forma ressonante podendo ganhar ou perder energia.

No tratamento algébrico do tipo de espalhamento em questão as partes imaginárias das susceptibilidades não lineares de segunda e terceira ordem são relevantes para o coeficiente de espalhamento e o termo dominante é dado pela resposta dos elétrons. O termo principal na expressão da intensidade das ondas, por sua vez, é o termo de espalhamento induzido de ondas de Langmuir mediado pelos íons, isto é, espalhamento por íons térmicos. Este espalhamento pode ser considerado, pois, como um amortecimento de Landau não linear, e se difere de sua contrapartida linear pelo fato de que no presente caso são os íons, e não os elétrons, que mediam o espalhamento de duas ondas de Langmuir.

**Espalhamento induzido envolvendo ondas de Langmuir e íon-acústica:** Neste caso, devido ao fato de que  $|\omega_{\mathbf{k}}^L| \gg |\omega_{\mathbf{k}}^S|$ , as condições de ressonância não linear praticamente se sobrepõem àquelas da ressonância onda-partícula na aproximação linear. Por este motivo, o espalhamento induzido envolvendo ondas de Langmuir de alta frequência e ondas íon-acústicas de baixa frequência pode, na melhor das hipóteses, ser tratado essencialmente como uma correção à interação linear onda-partícula e pode, portanto, ser ignorado.

**Espalhamento induzido envolvendo duas ondas íon-acústicas:** A susceptibilidade não linear de segunda ordem, em contraste ao caso envolvendo ondas de Langmuir de alta frequência, ambas as respostas não lineares dos elétrons e dos íons são importantes. Já a resposta não linear de terceira ordem, por sua vez, é dominada pelos íons.

## 2.5 Literatura específica

A escolha do tema desta dissertação é motivada pelo estudo realizado por Iver Cairns nos anos finais da década de 1980. Em seu artigo “*Electrostatic wave generation above and below the plasma frequency by electron beams*” (Cairns, 1989), o autor investiga o crescimento de ondas eletrostáticas próximas à frequência de plasma em um sistema plasma-feixe. Com este intuito resolve numericamente a relação de dispersão não magnetizada resultante de um sistema plasma-feixe. Sua atenção é direcionada principalmente a encontrar as relações de dispersão, frequências de máximo crescimento e determinar o caráter ressonante (cinético) ou não ressonante (reativo) das instabilidades geradas por escolhas particulares dos parâmetros dos feixes.<sup>11</sup>

São apresentadas condições para que as diferentes descrições das instabilidades sejam válidas, bem como para crescimento significativo acima ou abaixo da frequência de plasma. Conclui que as ondas instáveis não possuem a relação de dispersão de Langmuir, exceto no limite de feixes muito diluídos. Conclui também que as propriedades do modo instável dependem fortemente

<sup>11</sup>Um estudo semelhante aplicado ao fenômeno de *electron foreshock* pode ser encontrado em Cairns and Fung (1988).

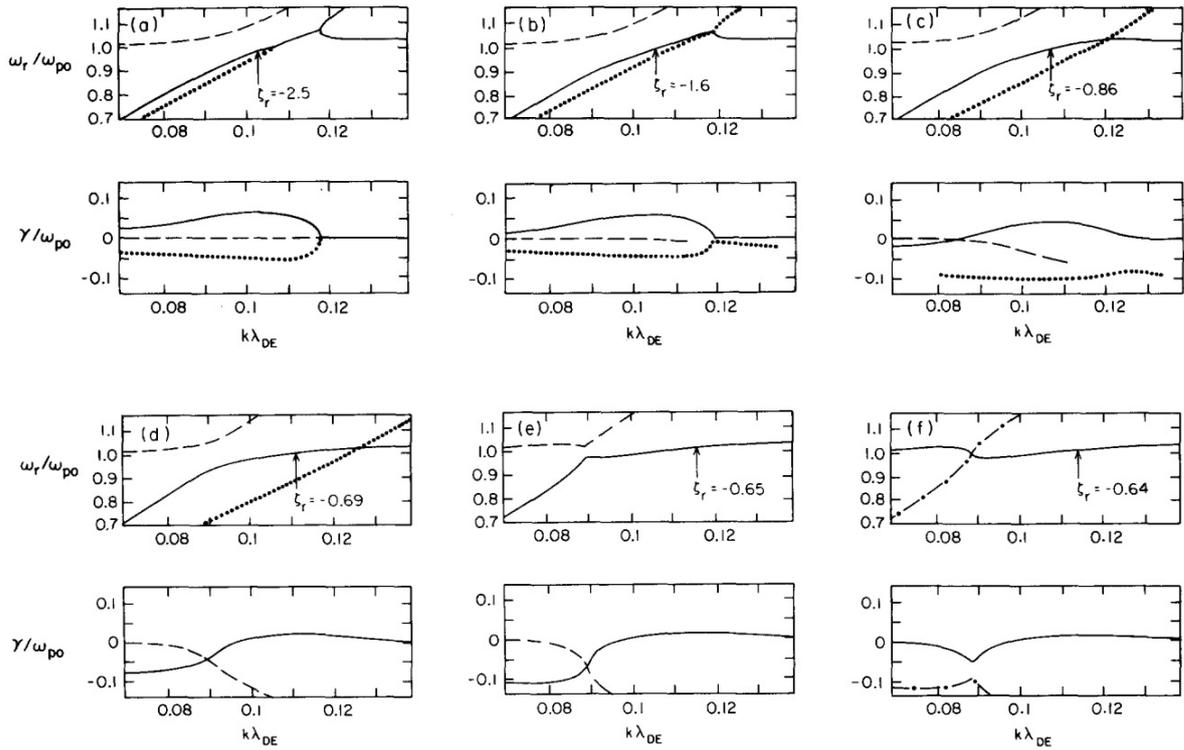


Figura 2.4: Relações de dispersão e taxas de crescimento (normalizadas pela frequência eletrônica de plasma) para o modo amplificado (linha cheia), modo feixe amortecido (linha pontilhada), modo Langmuir (linha tracejada) e modo feixe-Langmuir [linha cheia no painel (f)] para várias temperaturas do feixe. Para os painéis (a)-(f)  $T_b/T_e$  é igual a 0.017, 0.067, 0.33, 1.0, 1.5 e 1.67, respectivamente. Os parâmetros fixos do feixe são  $n_b/n_0 = 10^{-3}$ ,  $v_b/V_e = 10$  e  $T_e/T_i = 3$  (Cairns, 1989).

dos parâmetros do feixe (densidade, velocidade e temperatura) e que a frequência de máximo crescimento  $\omega_m$  pode ser encontrada significativamente acima ou abaixo da frequência de plasma, diferindo bastante daquela prevista pela relação de dispersão das ondas de Langmuir.

Segundo Cairns, crescimento abaixo de  $0.9\omega_{pe}$  requer ou um feixe com  $n_b/n_0 > 0.1$  para  $v_b/V_e > 5$  (e  $T_b/T_e < 10$ ) ou um feixe mais lento com  $v_b/V_e < 2$  e  $n_b/n_0 < 10T_b/T_e$ , sendo estes os mesmos parâmetros físicos já introduzidos na seção 2.3.

O crescimento é cinético (ressonante) se  $n_b/n_0 \geq 0.1T_b/T_e$  com uma condição ótima de  $n_b/n_0 \sim 0.1T_b/T_e$ . Condições ótimas para crescimento acima de  $1.05\omega_{pe}$  são feixes lentos com  $2 < v_b/V_e < 5$ ,  $n_b/n_0 < 0.1$  e  $n_b/n_0 < 0.1T_b/T_e$ . O autor propõe que processos não lineares envolvendo ondas próximas à frequência de plasma geradas por feixes podem encontrar dificuldades para satisfazer condições cinéticas de conservação de frequência e vetor de onda. Como exemplo cita o decaimento  $L \rightarrow L' + S$  (frequentemente discutido como um mecanismo de saturação para a instabilidade gerada pelo feixe) e as emissões fundamental e harmônica. Abaixo, uma descrição mais aprofundada do artigo supracitado esclarece os resultados obtidos através das análises das características dispersivas dos sistemas plasma-feixe.

A evolução das curvas de dispersão com o incremento da temperatura relativa do feixe  $T_b/T_e$ , mantendo fixos a densidade relativa  $n_b/n_0 = 10^{-3}$ , a velocidade de deriva  $v_b/V_e = 10$  e a razão das temperaturas dos elétrons de fundo e dos íons  $T_e/T_i = 3$ , é abordada com bastante clareza no texto. No painel (a) da figura 2.4 é possível identificar as duas raízes quase complexo-conjugadas que correspondem à instabilidade reativa ( $\zeta_r = -2.5$ ). Estas apresentam uma dispersão de tipo feixe ( $\omega_r \sim kv_b$ ) para pequenos números de onda ( $k \leq \omega_{pe}/v_b$ ) e se dividem em algum  $k > \omega_{pe}/v_b$

quando a taxa de crescimento cai para zero. Nos painéis (b) e (c) vemos que a continuação do modo amplificado identificado em (a) corresponde à raiz de baixa frequência do feixe para grandes números de onda. Conforme a temperatura do feixe  $T_b$  é incrementada entre os painéis (b) e (d) observa-se que:

1. As raízes complexo-conjugadas do feixe desaparecem;
2. A curva de dispersão do modo amplificado cruza a curva de dispersão do modo amortecido num ponto  $k_*$ ;
3. A relação de dispersão se assemelha à uma dispersão do tipo feixe ( $\omega_r \sim kv_b$ ) para números de onda menores que  $k_*$  e é aproximadamente constante ( $\omega_r \sim A$ ), e da ordem de  $\omega_{pe}$ , para números de onda maiores que  $k_*$ ;
4. O número de onda  $k_m$  e a frequência real  $\omega_m$  que correspondem ao maior crescimento das ondas aumentam com a temperatura  $T_b$ , o que, por sua vez, corresponde a um pico na curva de taxa de crescimento (como função do número de onda) movendo-se continuamente em direção e ao longo da porção  $\omega_r \sim A$  da curva de dispersão com o aumento de  $T_b$ ;
5. A instabilidade torna-se cada vez mais ressonante com o incremento em  $T_b$  e o pico da taxa de crescimento se move ao longo da curva de dispersão.

A instabilidade é marginalmente ressonante ( $\zeta_r = -1.6$ ) em (b) e fortemente ressonante ( $\zeta_r = -0.86$ ) em (c), correspondendo a instabilidade cinética. No painel (d) a temperatura já é grande o suficiente para que a região de pequenos números de onda do modo amplificado (porção linear do tipo feixe) e a região de grandes números de onda do modo de Langmuir sejam fortemente amortecidas. Em contraste, o modo de Langmuir para pequenos comprimentos de onda e o *modo feixe-modificado* para grandes números de onda são amplificados ou apenas fracamente amortecidos. Conforme a temperatura aumenta ainda mais as duas porções fortemente amortecidas e as duas porções fracamente amortecidas (ou amplificadas) dos modos feixe-modificado e Langmuir se conectam formando o chamado *modo feixe-Langmuir (BL)*.

A título de clareza de nomenclatura é conveniente frisar o que caracteriza cada um destes modos:

**Modo feixe:** porções das relações de dispersão que apresentam  $\omega_r \sim kv_b$ ;

**Modo feixe-modificado:** modo fortemente modificado identificado entre os painéis (b) e (e) no qual o crescimento ocorre após a modificação do modo de feixe complexo-conjugado;

**Modo feixe-Langmuir:** modo conectado de O'Neil-Malmberg observado no painel (f).

Tendo sido esta terminologia apresentada, Cairns afirma que a instabilidade será ressonante (cinética) nos modos feixe-modificado e feixe-Langmuir, e não ressonante (reativa) no modo feixe. Afirma também que é possível criar uma figura análoga que apresente a progressão observada entre os painéis (a) e (f) tanto diminuindo a densidade do feixe (mantendo os demais parâmetros fixos) quanto diminuindo a velocidade do feixe. A progressão em questão se caracteriza justamente pela transição suave do modo no qual a instabilidade atua (do modo feixe para o modo feixe-modificado para o modo feixe-Langmuir) e pela transição suave da natureza da instabilidade atuante (reativa para cinética). Esta afirmação é corroborada pela figura 2.5, onde é apresentado o gráfico da variação da taxa de crescimento máximo  $\gamma_m$  em função da densidade relativa do feixe  $n_b/n_0$ . Neste, observa-se a tendência de  $\gamma_m$  de ser proporcional a  $(n_b/n_0)^{1/3}$  para densidades maiores (instabilidade reativa,  $|\zeta_r| > 2$ ) ao passo que na medida em que a densidade diminui a proporcionalidade passa a ser simplesmente com  $n_b/n_0$  (instabilidade ressonante,  $|\zeta_r| < 1$ ). O gráfico apresenta curvas com diferentes temperaturas e velocidades e demonstra que a transição entre os tipos de instabilidade ocorre de forma suave e no modo feixe-modificado.

É possível, então, construir uma imagem esquemática representando as mudanças nas características dispersivas e no caráter ressonante da instabilidade conforme o parâmetro  $P$  varia com a velocidade relativa do feixe ( $5 < v_b/V_e$ ), a temperatura ( $10^{-2} < T_b/T_e < 10^2$ ) e a densidade relativa ( $10^{-4} < n_b/n_0 < 10^{-2}$ ), como apresentado na figura 2.6. Assim, o autor afirma que: (i) Para  $P \gtrsim 6$  a instabilidade é não ressonante (reativa), ocorre numa raiz quase complexo-conjugada e obedece à relação de dispersão do modo-feixe. (ii) Para  $0.9 \lesssim P \lesssim 6$  a instabilidade é ressonante e acontece na raiz feixe-modificado (equação de dispersão é do tipo feixe para pequenos números de onda e aproximadamente constante e da ordem de  $\omega_{pe}$  para números de onda maiores). (iii) Para  $P \lesssim 0.8$  (correspondendo a  $s \gtrsim 1.5$ ) a instabilidade é fortemente ressonante e ocorre no modo feixe-Langmuir. É, portanto, de extrema importância determinar a natureza da instabilidade, seja pelo uso do critério do parâmetro  $P$  ou pela solução numérica da equação de dispersão, para que se entenda as características dispersivas dos diferentes sistemas plasma-feixe.

O autor demonstra que para um determinado conjunto de parâmetros fixos a modificação nas características dispersivas do modo instável pode se apresentar como um crescimento expressivo de ondas com frequência abaixo ou acima (geralmente abaixo no modo *forward*) da frequência de plasma, e que este desvio do comportamento da relação de dispersão se torna irrelevante na medida em que o feixe se torna mais tênue [ver equação (2.46)]. Assim, podemos dizer que o modo feixe-Langmuir tende assintoticamente ao comportamento do modo de Langmuir conforme a densidade relativa do feixe diminui, sendo esta densidade “crítica”<sup>12</sup> dependente dos demais parâmetros adotados.

Análise análoga feita com o modo contrapropagante (*backward*) mostra tendências opostas: a tendência de aumento da frequência de máximo crescimento do modo *backward* de Langmuir em um dado número de onda com o aumento da densidade é oposta à tendência de diminuição da frequência de máximo crescimento do modo *forward* de Langmuir com o aumento da densidade. São estas observações que se manifestam como a questão mais importante abordada pelo artigo Cairns (1989). Estas diferenças nas relações de dispersão implicam uma possível dificuldade em satisfazer às condições cinéticas de conservação dos processos não lineares de interação entre ondas no caso de feixes relativamente densos ( $n_b/n_0 \geq 10^{-3}$ ), como apontado por Cairns e corroborado pelo artigo Thurgood and Tsiklauri (2015).

De forma um pouco mais geral, podemos ignorar os desvios da relação de dispersão do modo de Langmuir quando a densidade relativa do feixe for um fator de 10 menor do que aquela que satisfaz o critério de O’Neil-Malmberg<sup>13</sup>.

Estudando o comportamento da frequência na qual o crescimento é máximo, denotada por  $\omega_m$ , em função da densidade relativa do feixe observa-se que esta decresce monotonicamente para valores menores que  $\omega_{pe}$  na medida em que  $n_b/n_0$  aumenta, sendo este comportamento independente do tipo de instabilidade (reativa ou cinética), do modo no qual a instabilidade opera (modo feixe, feixe-modificado ou feixe-Langmuir) e da velocidade e temperatura do feixe.

Por outro lado, ao investigar o papel da velocidade e da temperatura do feixe na determinação de  $\omega_m$  nos deparamos com um comportamento um pouco mais complexo, como se observa na figura 2.7. Neste caso, são mantidos fixos  $n_b/n_0 = 10^{-2}$  e  $T_e = T_i$  e varia-se  $v_b/V_e$ , para diferentes temperaturas do feixe. Para altas velocidades ( $v_b/V_e > 20$ ),  $\omega_m$  se torna aproximadamente constante (dependendo apenas de  $n_b/n_0$ ). Diminuir progressivamente a velocidade do feixe faz com que  $\omega_m$  aumente<sup>14</sup> gradualmente para valores maiores do que  $\omega_{pe}$  quando  $v_b/V_e < 10$  e subsequentemente diminua para valores cada vez mais próximos de zero quando  $v_b/V_e < 2$

<sup>12</sup>Aqui entende-se densidade “crítica” como aquela na qual o desvio da relação de dispersão observada em relação ao modo de Langmuir pode ser desprezada.

<sup>13</sup>O critério de O’Neil-Malmberg (O’Neil and Malmberg, 1968) tem como propósito determinar se a instabilidade ocorre em um modo feixe (incluindo o modo feixe-modificado) ou no modo conectado feixe-Langmuir  $s < 1.47$  ou  $s > 1.47$ , respectivamente, conforme discutido na seção 2.3 e no artigo Cairns (1989).

<sup>14</sup>Este aumento na frequência de máximo crescimento  $\omega_m$  para valores maiores que  $\omega_{pe}$  se torna mais expressivo com a diminuição de  $n_b/n_0$ .

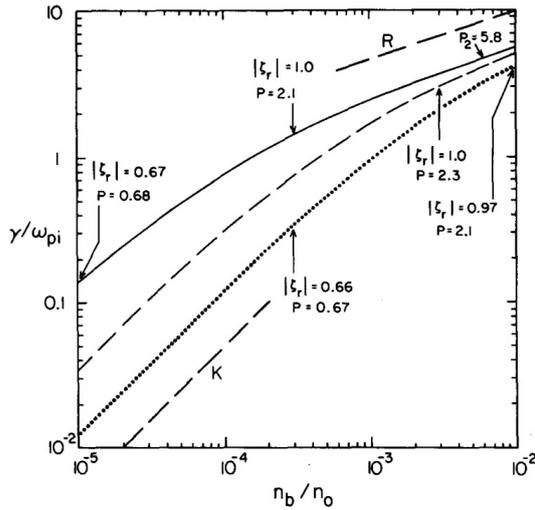


Figura 2.5: Variação da taxa de crescimento  $\gamma$  (normalizada pela frequência iônica de plasma) com  $n_b/n_0$  para vários feixes:  $v_b/V_e = 100$ ,  $T_b/T_e = 10$  e  $T_e/T_i = 1$  (linha cheia);  $v_b/V_e = 50$ ,  $T_b/T_e = 10$  e  $T_e/T_i = 1$  (linha tracejada);  $v_b/V_e = 100$ ,  $T_b = T_e = T_i$  (linha pontilhada). As linhas tracejadas rotuladas R e K têm gradientes correspondentes às instabilidades reativa e cinética, respectivamente. A seta rotulada  $P_2 = 5.8$  indica que  $|\zeta_r| = 2$  quando  $P_2 = 5.8$  (Cairns, 1989).

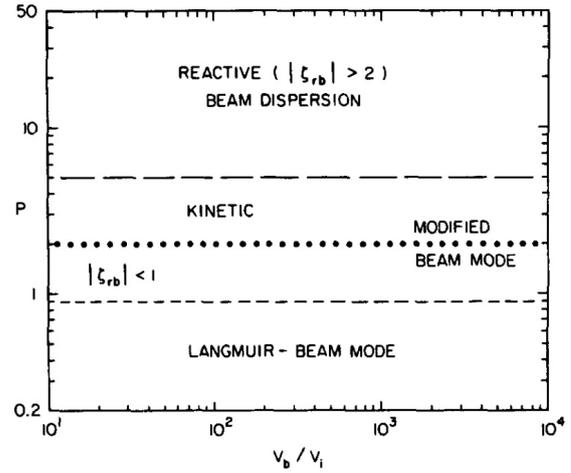


Figura 2.6: Ilustração esquemática das mudanças na relação de dispersão e tipo de instabilidade conforme  $P$  varia com a velocidade e temperatura do feixe para  $10^{-4} < n_b/n_0 < 10^{-2}$  (Cairns, 1989).

(contanto que a temperatura do feixe seja suficientemente baixa). Este resultado expressa a importância de não assumirmos *a priori* que o crescimento ocorre em um modo do plasma que não é afetado pela presença do feixe.

De forma mais sintética podemos dizer que há duas formas principais de se obter crescimento significativamente abaixo de  $\omega_{pe}$ : feixes densos ou feixes relativamente tênues, frios e lentos. Crescimento significativo acima de  $\omega_{pe}$ , por sua vez, requer feixes lentos e tênues que podem ser tanto frios quanto quentes.

Dando continuidade à revisão teórico-experimental são apresentados de forma breve alguns artigos recentes com o intuito de melhor contextualizar o tema de instabilidades em plasmas e sua relação com a geração da emissão de plasma em seus modos fundamental e harmônicos. Os resumos abaixo não tem como objetivo substituir a leitura dos artigos, uma vez que estes contém termos que não são diretamente abordados neste trabalho, mas de apresentar o leitor ao processo de familiarização com a literatura recente que motiva a escrita da presente dissertação.

### Artigo de simulação TT2015

Diversos trabalhos de simulação de um sistema plasma-feixe publicados desde o estudo conduzido por Iver Cairns destacam o modo feixe-modificado como o modo instável (Simões Júnior et al., 2010). Entretanto, poucos se dedicaram a realizar uma análise detalhada das conclusões do autor, sob o ponto de vista de um experimento numérico, e a verificar as consequências para a dinâmica das partículas e ondas no plasma no regime não linear.

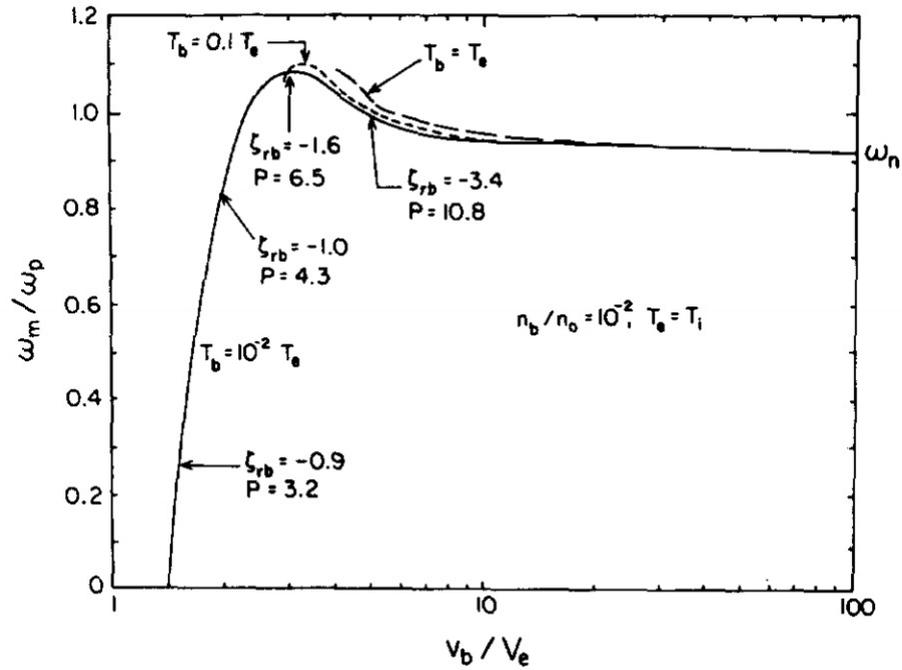


Figura 2.7: Frequência de máximo crescimento  $\omega_m$  em função de  $v_b/V_e$  para  $n_b/n_0 = 10^{-2}$  e várias temperaturas do feixe (Cairns, 1989).

Um trabalho de especial interesse para esta dissertação e que tinha estes objetivos está no artigo “*Self-consistent particle-in-cell simulations of fundamental and harmonic plasma radio emission mechanisms*” (Thurgood and Tsiklauri, 2015). Este consiste em duas simulações completamente cinéticas do tipo *particle-in-cell* (PIC) eletromagnética e multidimensional de emissão de plasma baseada em interação não linear entre três ondas. As simulações foram realizadas utilizando os seguintes parâmetros para os feixes de elétrons: Run 1 ( $n_b/n_0 = 0.0057$ ,  $v_b/V_e = 16$ ) e Run 2 ( $n_b/n_0 = 0.05$ ,  $v_b/V_e = 8$ ). Nestas, os autores reportam terem encontrado evidências de que a emissão de plasma é permitida na Run 1 e proibida na Run 2. É demonstrado que a possibilidade de emissão de plasma depende da frequência das ondas eletrostáticas inicialmente geradas pela instabilidade *bump-in-tail* e que estas podem ser proibidas de participar nas interações necessárias entre três ondas devido a requerimentos de conservação de frequência. Os eventos observados nas simulações podem ser sintetizados da seguinte forma:

- (i) O crescimento do modo feixe na relação de dispersão das ondas de Langmuir (Run 1) e o aparente “desacoplamento” dos modos feixe e Langmuir (Run 2), onde a presença do feixe mais denso modificou significativamente a natureza dos modos de onda eletrostática de propagação *forward*.
- (ii) A aparente diferença entre a susceptibilidade dos dois sistemas a processos do tipo  $L \rightarrow L' + S$ , com consequências para a produção de população *seed* de ondas eletrostáticas de Langmuir contrapropagantes (*backward*).
- (iii) São observadas emissões de plasma na frequência fundamental em ambos os casos, entretanto a densidade espectral de energia associada a esta emissão na Run 1 tem seu pico uma ordem de magnitude mais intenso que o pico associado a emissão fundamental na Run 2. Portanto, a emissão fundamental é mais fraca no caso do feixe mais intenso, Run 2.
- (iv) Emissão no primeiro harmônico claramente distinguível do ruído de fundo inerente ao

método PIC é observada somente na Run 1, ao passo que na Run 2 apenas sinais fracos quando comparados ao ruído são detectados. Assim, emissão harmônica é muito menos eficiente na Run 2, possivelmente ao ponto de ser totalmente proibida.

A demonstração desta inibição do processo de decaimento devido ao não cumprimento dos requisitos de correspondência entre as frequências das ondas é a primeira verificação dos argumentos feitos a partir de uma perspectiva teórica em Cairns (1989). Por fim, concluem que a Run 1 apresenta evidências consistentes com todos os estágios do mecanismo de emissão fundamental e harmônica baseado na interação entre três ondas. São estes: o acoplamento entre o modo feixe e o modo Langmuir, o crescimento de uma população de ondas eletrostáticas de Langmuir contrapropagantes via processos de espalhamento e decaimento, a emissão fundamental e a coalescência entre as ondas de Langmuir e as ondas contrapropagantes para produzir emissão harmônica. A Run 2, por sua vez, evidencia que o fato de se tratar de um feixe mais lento e mais denso faz com que a relação de dispersão (modo feixe) difira daquela de Langmuir. Isto acaba por suprimir significativamente o processo de geração da população *seed*, ondas contrapropagantes, para o processo  $L + L' \rightarrow H$ . Portanto, os autores foram capazes de demonstrar com bastante clareza que é preciso prosseguir com cautela quando se tenta simular sistemas plasma-feixe astrofísicos usando feixes de densidade não realística. Ao passo que uma razão de densidade maior pode reduzir tempos de relaxação, isto é, tempo computacional, é improvável que os resultados sejam fisicamente representativos do sistema que se quer estudar devido à sensibilidade dos parâmetros do feixe. Vale ressaltar que o modelo adotado pelos autores não leva em consideração efeitos de magnetização, o que é equivalente a assumir que o processo de emissão de plasma não é afetado pelo modo *Whistler* (W) e que o chamado modo eletromagnético superluminal Z é irrelevante (Chen et al., 2022).

### Artigo teórico Z+15

Este artigo se propõe a aprofundar a discussão sobre o processo de emissão de plasma a partir da solução numérica completa das equações de turbulência fraca eletromagnética. Com esse intuito, comparam os resultados da simulação de turbulência fraca aos obtidos via simulação PIC (Ziebell et al., 2015).

A abordagem utilizada resolve o sistema autoconsistente de equações acopladas da Teoria de Turbulência Fraca desenvolvida a partir do formalismo de Klimontovich, com o intuito de estudar a evolução temporal da função de distribuição de velocidades dos elétrons e o espectro das ondas eletrostáticas e transversais. Esta formulação incorpora efeitos de diferentes mecanismos físicos e possibilita que os papéis dos diferentes processos físicos sejam identificados de forma inequívoca “ligando” e “desligando” certos termos arbitrariamente. Esta formulação é, pois, uma ferramenta conveniente para testar a validade de teorias propostas na literatura e o conjunto completo de equações<sup>15</sup> pode ser resolvido sem suposições *a priori*, com o intuito de analisar quantitativamente o fenômeno da emissão de plasma.

A simulação PIC, por sua vez, conta com um número menor de restrições teóricas, visto que esta abordagem basicamente resolve as equações de movimento de Lorentz para um conjunto de partículas carregadas em conjunto com as equações de Maxwell. No entanto, também possui suas restrições. Por exemplo, a necessidade de discretização do sistema e o tamanho finito da grade nos espaços de velocidade e de número de onda, impõem algumas limitações na resolução de comprimentos de onda muito pequenos. Além disso, este método precisa considerar um grande número de partículas em cada célula para diminuir o ruído numérico, acarretando um aumento expressivo dos recursos computacionais requeridos para a obtenção de uma resolução satisfatória dos dados. Além disso, por se tratar de um experimento numérico, não é uma tarefa fácil criar

<sup>15</sup>A derivação das equações é feita inteiramente a partir de primeiros princípios (a partir da formulação de Klimontovich). Este formalismo será discutido em detalhes no capítulo 3.

um diagnóstico claro dos fenômenos que ocorrem, uma vez que todos os mecanismos agem simultaneamente e não podem ser arbitrariamente “ligados” e “desligados” para a verificação de certos processos físicos que operam no sistema. Tal característica se apresenta em contraste com a Teoria de Turbulência Fraca, na qual estas manipulações se apresentam naturalmente e os recursos computacionais demandados são bem menores.

Os resultados numéricos discutidos em detalhe no artigo indicam uma grande compatibilidade entre a abordagem da Teoria de Turbulência fraca e as simulações PIC. A concordância entre os resultados é mais notável no caso de feixes com baixas velocidades, o que não é tão surpreendente, visto que a Teoria de Turbulência Fraca se baseia na suposição de um crescimento, ou amortecimento, moderado e baixa densidade de energia das ondas quando comparada com a densidade térmica de energia das partículas. Para os casos de feixes com velocidades intermediárias ou altas, após a formação do *plateau* a região de altas velocidades do feixe apresenta uma componente perpendicular  $v_{\perp}$  um pouco mais larga na Teoria de Turbulência Fraca do que no caso dos resultados obtidos via PIC. Além disso, no caso de feixes com alta velocidade (especificamente para o caso  $V_b/v_{th} = 10$ ), os cálculos realizados utilizando a Teoria de Turbulência Fraca resultam na formação de uma cauda estendida ao longo da direção positiva de propagação (*forward*). A mesma não é observada nos resultados da simulação PIC. Este parece ser um indício de que o caso do feixe com alta velocidade, quando todos os outros parâmetros são mantidos constantes, corresponde ao limite de aplicabilidade das equações da Turbulência Fraca.

Acerca dos espectros das ondas, é conveniente salientar que a abordagem da Turbulência Fraca é capaz de separar o espectro de cada modo normal presente no plasma, sendo esta uma característica típica deste método. Em contraste, no caso da simulação PIC os diversos modos normais, como o modo de Langmuir ou as ondas transversais, precisam ser cuidadosamente interpretados. Para construir o espectro das ondas de Langmuir com base na simulação PIC, por exemplo, é usual considerar apenas a componente do campo elétrico que está ao longo da direção paralela à velocidade do feixe. Embora este método de fato separe as ondas eletrostáticas das ondas transversais, ainda pode haver intensidade associada aos modos harmônicos não lineares das ondas eletrostáticas. Portanto, a interpretação dos resultados da simulação PIC, no que diz respeito as ondas de Langmuir, apresenta um grau de ambiguidade (Lee et al., 2019).

No entanto, os resultados obtidos com as duas abordagens distintas são amplamente compatíveis. Nos dois casos os resultados mostram a formação do pico primário das ondas de Langmuir com larguras comparáveis ao longo das direções paralela e perpendicular dos números de onda, o crescimento das ondas contrapropagantes e também o alargamento (*spread*) do pico primário em direção à região de números de onda menores.

A discrepância entre as abordagens se concentra principalmente nos casos onde o feixe apresenta velocidade baixa ou intermediária, isto é  $V_b/v_{th} = 6$  ou  $8$ , onde a simulação PIC mostra o aparecimento precoce de ondas com  $k \simeq 0$ , o chamado efeito de condensação de Langmuir (Robinson, 1997), ao passo que no caso da Turbulência Fraca a região de pequenos números de onda só é atingida nos instantes finais de computação. No caso do feixe com alta velocidade abordado no artigo em questão, por outro lado, a Teoria de Turbulência Fraca também apresenta algum crescimento das ondas com  $k \simeq 0$ . A razão para esta discrepância localizada entre as duas abordagens ainda não é completamente compreendida.

Em síntese, com o intuito de obter informações a respeito do espectro das ondas eletromagnéticas, os autores comparam o espectro das flutuações do campo magnético resultante da simulação PIC ao espectro das ondas transversais computadas com base no método da Turbulência Fraca. Apontam que a compatibilidade entre os resultados apresenta aparente melhora com o aumento da velocidade do feixe. Concluem, por fim, que sua análise comparativa sugere que a Teoria de Turbulência Fraca é uma ferramenta confiável e adequada para estudar o problema das emissões solares de rádio (*solar radio bursts*), contanto que seja cuidadosamente aplicada a um conjunto de parâmetros no qual a teoria é válida.

### Artigo observacional S+2019

Observações *in situ* de funções de distribuição de partículas na magnetosfera terrestre e de outros planetas e no vento solar já são realizadas há mais de 50 anos (Parks, 2004; Marsch, 2006). Os espectros de emissão observados demonstram que ondas eletrostáticas abaixo e acima da frequência local de plasma são características das regiões de *foreshock*. Estas são geradas por feixes de elétrons que se originam no *bow shock* e apresentam um espectro composto por ondas intensas de banda estreita e emissões menos intensas de banda larga.

Em seu artigo “*Direct Measurement of Low-Energy Electron Foreshock Beams*” (Soucek et al., 2019), Jan Soucek, David Piša e Ondrej Santolík avaliam a estabilidade de um grande número de distribuições eletrônicas, observadas individualmente pelas espaçonaves *Cluster*, usando a teoria linear e correlacionam estatisticamente as ondas e as propriedades dos feixes. Comparam a energia dos feixes de elétrons no *foreshock* com o espectro das ondas eletrostáticas e estabelecem uma correspondência entre a energia do feixe e o espectro das ondas. Em seu tratamento estatístico dos dados observacionais, os autores demonstram que as ondas com frequência observada abaixo da frequência de plasma são associadas a feixes lentos com velocidades  $v_b/v_0 < 2.5$  (ou com energias abaixo de 50 eV) enquanto que as ondas com frequência acima da frequência de plasma são correlacionadas com feixes de alta energia com a distribuição da frequência de máximo crescimento  $\omega_{peak}/\omega_{pe}$  (ou  $\omega_m/\omega_{pe}$  se usarmos a notação presente em Cairns (1989)) mais estreita nos feixes mais energéticos. Por fim, propõem que o caráter dos diferentes modos das ondas e suas possíveis instabilidades é completamente determinado por três parâmetros adimensionais: a densidade relativa do feixe  $n_b/n_0$ , sua temperatura relativa  $T_b/T_0$  e sua velocidade relativa  $v_b/v_0$ .

### Artigo de simulação S+22

Em artigo mais recente, (Sun et al., 2022), a interação plasma-feixe é classificada em quatro regimes físicos no espaço dos parâmetros do plasma e dos parâmetros do feixe. No primeiro deles, o regime No-MI/PDI, não há instabilidades modulacionais<sup>16</sup> nem instabilidades paramétricas de decaimento (PDI), o acoplamento não linear das ondas é muito fraco e os pacotes de ondas de Langmuir saturam mediante mecanismo de aprisionamento onda-partícula. O regime PDI é caracterizado pela geração de ondas contrapropagantes (*backward waves*) a partir da instabilidade de decaimento paramétrico e corresponde ao espaço de parâmetros de interesse para esta dissertação. Esta instabilidade geralmente se apresenta com uma taxa de crescimento pequena ( $\omega_i < \omega_{pi}$ , ou  $\gamma < \omega_{pi}$ , dependendo da notação adotada) e a interação entre as ondas ainda é fraca, portanto este regime ainda pode ser chamado de regime de Turbulência Fraca (WT). No regime SWMI (*standing wave modulational instability*) pacotes estacionários de ondas de Langmuir são gerados e a instabilidade cresce na escala de tempo dos íons ( $\sim \omega_{pi}^{-1}$ ). Neste processo a força da pressão térmica devida às perturbações da densidade de íons é quase balanceada pela força ponderomotiva. Este regime determina a fronteira do regime de turbulência forte. Por fim, o regime EMI, no qual a chamada instabilidade modulacional eletrônica cresce em uma escala de tempo mais rápida, ( $< \omega_{pi}^{-1}$ ), e a dinâmica dos íons desacopla do crescimento das ondas no estágio inicial da instabilidade.

### Artigos de simulação Z+22, C+22 e N+20,21

Numa publicação feita recentemente no periódico *The Astrophysical Journal* (Zhang et al., 2022), os pesquisadores observaram emissão fundamental significativa em casos onde a densidade relativa do feixe é suficientemente pequena (digamos,  $n_b/n_0 \leq 0.01$ ). Este resultado está

<sup>16</sup>Instabilidade modulacional: a onda inicialmente plana se torna modulada e se divide em pacotes de onda (Robinson, 1997).

alinhado com os obtidos por estudos anteriores utilizando domínios de simulação muito menores (Thurgood and Tsiklauri, 2015). Sua simulação também permitiu constatar que a intensidade relativa de todos os modos, exceto o modo feixe-eletromagnético associado à *instabilidade de Weibel*<sup>17</sup>, decresce com o aumento relativo da densidade do feixe (Zhang et al., 2022). Os autores comparam os resultados encontrados em seu estudo de plasmas não magnetizados aos resultados obtidos no caso de um plasma de fundo fracamente magnetizado (Chen et al., 2022). Observam soluções similares, em particular na evolução temporal das funções de distribuição de velocidades dos elétrons (EVDF), no crescimento e nas características do modo feixe-Langmuir (BL), e na presença de ondas secundárias do modo generalizado de Langmuir (GL) com propagação *forward* e *backward*.

A diferença principal entre as duas abordagens reside no fato de que em Chen et al. (2022) ocorre a geração dos modos superluminal  $Z$  (com frequência de corte abaixo da frequência de plasma  $\omega_{pe}$ ) e whistler. No caso não magnetizado, por sua vez, o modo Langmuir generalizado (GL), que consiste em um modo majoritariamente superluminal de banda estreita e uma componente contrapropagante de banda mais larga, e o modo eletromagnético induzido pela instabilidade de Weibel estão presentes. Concluem, pois, que as grandes semelhanças observadas concorrem a favor da ideia de que a teoria padrão de emissão de plasma é adequada para o regime de parâmetros de ambos os casos. Qual seja, o decaimento do modo eletromagnético para gerar a emissão fundamental (F) e a coalescência não linear do modo feixe-Langmuir (BL) com a onda de Langmuir contrapropagante para gerar emissão do modo harmônico (H).

Por outro lado, estes resultados não apoiam o mecanismo de emissão de plasma proposto por Ni et al. (2020, 2021). Neste, o modo fundamental é gerado por modos  $Z$  e  $W$  quase contrapropagantes, enquanto que a emissão harmônica é gerada por uma onda de Langmuir quase contrapropagante com grande ângulo de propagação em relação ao campo magnético de fundo chamada de modo *upper-hybrid* (UH). O modelo proposto por Ni et al. (2020, 2021) é baseado em simulações PIC de plasmas interagindo com elétrons energéticos aprisionados com funções de distribuição de velocidade do tipo cone de perda (*loss-cone-type*). O modo primário UH e os modos secundários  $Z$  e  $W$  são excitados diretamente pela *electron cyclotron maser instability* (ECMI).

Concluem, então, que a comparação entre os diferentes modelos e os resultados obtidos a partir das respectivas simulações sugere que o mecanismo de emissão de plasma pode ser diferente para elétrons energéticos com funções de distribuição de velocidade diferentes: Para feixes de elétrons, o mecanismo padrão de emissão de plasma funciona bem, ao passo que para elétrons aprisionados, a emissão induzida por ECMI pode ser importante.

<sup>17</sup>Ondas transversais eletromagnéticas auto-excitadas que envolvem apenas os elétrons de um plasma, desde que sua distribuição de velocidades seja suficientemente anisotrópica (Weibel, 1959). A instabilidade de Weibel é caracterizada por uma frequência real nula satisfazendo  $\omega_r = 0$ ,  $\omega_i \neq 0$  e  $c^2 k^2 / |\omega_i|^2 \gg 1$  (Yoon, 2019).

## Capítulo 3

# Teoria de Turbulência Fraca

O presente capítulo apresenta uma revisão da teoria cinética de plasmas, conforme desenvolvida a partir do formalismo de Klimontovich, o qual é uma extensão da teoria cinética que inclui os efeitos das flutuações, com os quais é possível estudar fenômenos que não são descritos na teoria cinética usual.

A partir do formalismo de Klimontovich, será realizada também uma revisão da Teoria de Turbulência Fraca em plasmas. Esta descreve satisfatoriamente a interação entre as partículas do plasma e os campos incorporando efeitos não lineares até a terceira ordem e é válida quando o plasma é fracamente instável e quando a instabilidade resultante da interação onda-partícula excita uma larga faixa espectral.

Neste contexto, analisamos a evolução temporal da função de distribuição dos elétrons do sistema plasma-feixe e das intensidades das ondas eletrostáticas de Langmuir e íon-acústicas incorporando efeitos da teoria de turbulência fraca dos plasmas.

### 3.1 Formalismo de Klimontovich

O formalismo de Klimontovich foi desenvolvido com o intuito de realizar uma derivação autoconsistente das equações cinéticas completas de um plasma térmico, a partir de primeiros princípios (Klimontovich, 1967; Krall and Trivelpiece, 1986; Yoon, 2019).

#### 3.1.1 A equação de Klimontovich-Dupree

O plasma é assumido ser composto por partículas pontuais, sem momento angular intrínseco, cuja dinâmica é determinada pela Mecânica Newtoniana não relativística. As partículas possuem massa e carga elétrica e sua dinâmica é determinada pela ação da força de Lorentz, a qual contém campos eletromagnéticos gerados tanto externamente ao plasma quanto os campos autoconsistentes. As partículas do plasma são divididas em diferentes espécies, cada uma caracterizada pelas suas massas e cargas elétricas.

Desta maneira, se  $\mathbf{r}_i^a(t)$  e  $\mathbf{v}_i^a(t)$  são, respectivamente, a posição instantânea<sup>1</sup> da  $i$ -ésima partícula da espécie  $a$  e sua correspondente velocidade instantânea, as equações de movimento desta partícula são

$$\frac{d\mathbf{r}_i^a(t)}{dt} = \mathbf{v}_i^a(t), \quad (3.1a)$$

$$m_a \frac{d\mathbf{v}_i^a(t)}{dt} = e_a \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}_i^a(t), t) + \frac{1}{c} \mathbf{v}_i^a(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i^a(t), t) \right]'. \quad (3.1b)$$

---

<sup>1</sup>Neste capítulo a notação adotada para o vetor posição instantânea é a mesma utilizada em Yoon (2019) [ $\mathbf{r}(t)$ ] e irá substituir a notação de Krall and Trivelpiece (1986) presente no capítulo 2 [ $\mathbf{x}(t)$ ].

Em (3.1a) e (3.1b),  $m_a$  é a massa de uma partícula da espécie  $a$  e  $e_a$  a sua carga elétrica. Adicionalmente,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  são os campos eletromagnéticos totais percebidos pela carga na sua posição instantânea. O apóstrofe (') na equação (3.1b) indica que os campos gerados pela própria partícula devem ser excluídos, evitando assim a ocorrência de autointeração.

Os campos  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  devem ser determinados a partir das equações<sup>2</sup> de Maxwell:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.2b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \rho(\mathbf{r}, t), \quad (3.2c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (3.2d)$$

Nestas equações, os termos de fonte, isto é, as densidades de carga e corrente elétricas, contém somente as contribuições das partículas do plasma. Devido à natureza discreta das mesmas, os termos de fonte são dados por

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \sum_{i=1}^{\bar{N}_a} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^a(t)], \quad (3.2e)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \sum_{i=1}^{\bar{N}_a} \mathbf{v}_i^a(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^a(t)], \quad (3.2f)$$

sendo  $\bar{N}_a$  o número total de partículas da espécie  $a$  e  $\delta$  a função delta de Dirac.

Neste ponto, define-se a densidade de pontos representativos no espaço de fase do sistema,

$$N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{i=1}^{\bar{N}_a} \delta[\mathbf{v} - \mathbf{v}_i^a(t)] \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^a(t)]. \quad (3.3)$$

A quantidade  $N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  é denominada *distribuição de Klimontovich* (Klimontovich, 1967; Krall and Trivelpiece, 1986; Yoon, 2019). Na literatura,  $N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  também é denominada *função de Klimontovich*, embora formalmente seja uma distribuição, ou função generalizada. Temos,

$$\int N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{v} = \bar{N}_a.$$

As equações de Maxwell (3.2a) – (3.2d) podem ser reescritas em termos de  $N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  como:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.4a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.4b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \sum_a e_a \int N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (3.4c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \sum_a e_a \int \mathbf{v} N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (3.4d)$$

<sup>2</sup>Neste momento é feita mais uma modificação na notação. Com o intuito de mantê-la consistente com a notação de Yoon (2019) os operadores diferenciais divergente e rotacional foram substituídos por  $\nabla \cdot \rightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$  e  $\nabla \times \rightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times$ , respectivamente.

Verifica-se facilmente que  $N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , em conjunto com as equações de movimento (3.1a) e (3.1b), satisfazem a equação de Klimontovich-Dupree

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_a}{m_a} \left( \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right)' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right] N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0. \quad (3.5)$$

Entre outras propriedades, (3.5) reflete o fato de que as partículas não podem ser criadas nem destruídas.

A equação de Klimontovich-Dupree é formalmente idêntica à equação de Vlasov (Krall and Trivelpiece, 1986), porém com a diferença que  $N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  não é uma distribuição suave, mas sim dada por uma coleção de funções delta (3.3). As singularidades associadas às distribuições delta de Dirac que compõe a função de Klimontovich  $N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  geram os efeitos discretos, como será ressaltado posteriormente (Yoon, 2019).

### 3.1.2 Médias de ensemble e flutuações

Formalmente, as equações de Klimontovich-Dupree (3.5), para todas as espécies de partículas, em conjunto com as equações de Maxwell (3.4a) – (3.4d) descrevem de forma exata e autoconsistente a dinâmica do plasma como um sistema composto por partículas carregadas e campos eletromagnéticos. Contudo, estas equações possuem limitada aplicação por serem demasiado complicadas.

Para simplificar o tratamento matemático da dinâmica do plasma, adota-se neste ponto uma descrição estatística baseada em médias de *ensemble* sobre o espaço de fase, aplicadas nas equações (3.4a) – (3.4d) e (3.5). A descrição adotada aqui segue a abordagem apresentada em Yoon (2019) a qual, por sua vez, é baseada na derivação realizada por Sitenko (1982).

Seja  $\Gamma$  o espaço de fase de  $6N$  dimensões composto pelas  $3N$  coordenadas e  $3N$  componentes das velocidades das  $N = \sum_a N_a$  partículas que compõe o plasma. Tratando este plasma como um sistema estatístico, o conjunto das  $N$  partículas que o compõe ocupam, em um determinado instante  $t$ , um *ponto representativo* no espaço de fase  $\Gamma$ , em função tanto das interações autoconsistentes internas entre as partículas, quanto em função dos campos externos e outros agentes externos que atuam sobre o plasma. Para um determinado conjunto de valores dos agentes externos, o número de diferentes estados internos acessíveis às partículas no mesmo instante de tempo é usualmente muito grande, o que resulta na existência de um número grande de pontos representativos no espaço de fase que são acessíveis ao plasma. Cada ponto representativo representa assim um sistema físico fictício possível e a coleção de sistemas idênticos, cada um ocupando um ponto representativo no espaço de fase  $\Gamma$  sob o mesmo conjunto de agentes externos, é denominado um *ensemble* (Huang, 1987; Reichl, 2016).

Para introduzir a descrição estatística, escreve-se as quantidades físicas como uma média e uma flutuação em torno desta média:

$$N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \langle N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle + \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (3.6a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle + \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (3.6b)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle + \delta \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (3.6c)$$

onde  $\langle \dots \rangle$  representa a média de ensemble e  $\delta$  indica as flutuações em torno desta média.

No caso em que as quantidades médias são espacialmente uniformes e os campos médios são inexistentes, as médias de ensemble resultam escritas

$$\langle N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = f_a(\mathbf{v}, t), \quad \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0. \quad (3.6d)$$

A quantidade  $f_a(\mathbf{v}, t)$  é a função de Klimontovich suavizada pela média de ensemble. Por sua vez, a imposição de médias de ensemble nulas para os campos é consistente com o tratamento da turbulência em um plasma sem campos externos.

Por sua vez, as flutuações em torno das médias de ensemble serão supostas serem consequências de um estado turbulento do plasma que pode ser caracterizado por variações aleatórias das grandezas físicas. Essas variações aleatórias ocorrem no espaço, no tempo e também nas fases dos campos microscópicos. Por esta razão, será assumido que

$$\langle \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = \langle \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \delta \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0, \quad (3.7)$$

sendo que neste caso a média de ensemble pode ser realizada sobre o tempo, o espaço ou sobre as fases das flutuações. Este tipo de turbulência é denominada *incoerente*. É importante enfatizar que nem todos processos turbulentos satisfazem (3.7). Nesta situação, a turbulência é dita *coerente*.

De agora em diante, o símbolo  $\langle \dots \rangle$  irá representar a média de ensemble sobre as fases aleatórias dos campos em um regime de turbulência incoerente.

## 3.2 Turbulência eletrostática em plasmas sem campos

O formalismo de Klimontovich introduzido na seção 3.1 para uma turbulência genérica em um plasma sem campos externos será agora reduzido para o caso particular de turbulência *eletrostática*, isto é, turbulência gerada por oscilações longitudinais das partículas que geram somente campos elétricos (não estacionários) microscópicos autoconsistentes.

### 3.2.1 Equações de evolução da turbulência eletrostática

Como é bem sabido, neste caso a Lei de Faraday (3.4a) permite escrever

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \implies \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}, t),$$

sendo  $\phi(\mathbf{r}, t)$  o potencial escalar elétrico. Como não há campo elétrico externo, (3.6b) leva a

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \implies \phi(\mathbf{r}, t) = \delta \phi(\mathbf{r}, t).$$

Ou seja,  $\langle \phi(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$  e o potencial elétrico é devido unicamente ao potencial flutuante, gerado pela turbulência eletrostática microscópica. Para simplificar a notação, de agora em diante o potencial flutuante será representado sem o símbolo “ $\delta$ ”.

Dessa maneira, as equações (3.4c) e (3.5) se tornam

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) = -4\pi \sum_a e_a \int \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (3.8a)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\phi(\mathbf{r}, t))' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right] N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0, \quad (3.8b)$$

sendo  $\nabla^2$  o operador laplaciano. A forma (3.8a) para a equação de Poisson segue da condição de quase neutralidade

$$\sum_a e_a \int f_a(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = 0.$$

As equações (3.8a) e (3.8b) não serão manipuladas diretamente nestas formas. Será, outrossim, primeiramente considerada a função de Klimontovich para partículas da espécie  $a$  não interagentes (*i.e.*, livres)  $N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . De (3.1a), (3.1b) e (3.3),

$$N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{i=1}^{\bar{N}_a} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i^a(t)] \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i^a), \quad \frac{d\mathbf{r}_i^a}{dt} = \mathbf{v}_i^a, \quad \mathbf{v}_i^a = \text{cte}. \quad (3.9a)$$

De acordo com (3.5), a função  $N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  satisfaz

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0. \quad (3.9b)$$

Aplicando-se a média de ensemble sobre esta equação, resulta

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \langle N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = 0. \quad (3.9c)$$

Introduz-se também a expansão (3.6a) para  $N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ ,

$$N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \langle N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle + \delta N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (3.9d)$$

Lembrando que  $N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  denota o valor exato da densidade de pontos no espaço de fase para um sistema de partículas e campos interagindo de uma maneira autoconsistente, a distribuição  $N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  descreve a mesma densidade de pontos representativos, porém para um gás ideal de partículas livres. Neste sentido, a diferença  $N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  denota a evolução do plasma no espaço de fase enfatizando-se somente os efeitos coletivos das interações entre os objetos do sistema, após a subtração dos efeitos das partículas independentes.

Por esta razão, é conveniente subtrair-se a equação (3.9b) da equação completa (3.8b), obtendo assim a nova equação

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) [N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)] = \frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\phi(\mathbf{r}, t))' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t).$$

Introduzindo agora as expansões (3.6a) e (3.9d), resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_a(\mathbf{v}, t) + \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) [\delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - \delta N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)] \\ = \frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f_a(\mathbf{v}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\phi(\mathbf{r}, t))' + \frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[ \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\phi(\mathbf{r}, t))' \right], \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde foram também empregadas a equação (3.9c) e a identidade

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\phi(\mathbf{r}, t))' = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[ \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\phi(\mathbf{r}, t))' \right].$$

Tomando-se a média de ensemble de (3.10) resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} f_a(\mathbf{v}, t) = \frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left\langle \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\phi(\mathbf{r}, t))' \right\rangle, \quad (3.11)$$

a qual é a equação de evolução da função de distribuição  $f_a(\mathbf{v}, t)$ .

Finalmente, subtraindo (3.11) de (3.10), obtém-se a equação de evolução da flutuação,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) [\delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - \delta N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)] = \frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f_a(\mathbf{v}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\phi(\mathbf{r}, t))' \\ + \frac{e_a}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[ \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\phi(\mathbf{r}, t))' - \left\langle \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\phi(\mathbf{r}, t))' \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

As equações (3.8a), (3.11) e (3.12) formam o núcleo do tratamento adotado neste capítulo. Manipulações adicionais se fazem necessárias para que sejam obtidas expressões adequadas para aplicações práticas da teoria de Klimontovich.

### 3.2.2 Funções de correlação

Embora as flutuações possuam médias de ensemble nulas, as médias dos produtos das flutuações em geral não são zero. Isto ocorre porque os estados das flutuações em dois instantes distintos de tempo e em dois pontos distintos do espaço possuem relações do tipo causa-e-efeito oriundas das interações internas no sistema. Por exemplo, dados os pontos  $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$  e os instantes  $t_1 < t_2$ , o valor de  $\phi(\mathbf{r}_1, t_1)$  poderá afetar o valor de  $\delta N_a(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}, t_2)$  ou de qualquer outra flutuação em  $(\mathbf{r}_2, t_2)$ . Por esta razão, *correlações estatísticas* do tipo  $\langle \phi(\mathbf{r}_1, t_1) \delta N_a(\mathbf{r}_2, \mathbf{v}, t_2) \rangle$  deverão ser consideradas por serem consequência da natureza estatística da turbulência no plasma.

Neste trabalho, o plasma é suposto *homogêneo e estacionário* e a turbulência que ocorre no mesmo devido às interações entre as partículas e os campos terá a mesma natureza. Denotando por  $\delta f(\mathbf{r}, t)$ ,  $\delta g(\mathbf{r}, t)$ , etc, quaisquer flutuações ocorrendo no plasma, as *funções de correlação de dois corpos* ou *de dois pontos* são definidas como a média de ensemble  $\langle \delta f(\mathbf{r}, t) \delta g(\mathbf{r}', t') \rangle$ . A figura 3.1 ilustra a correlação entre dois pontos. A barra conectando os pontos indica a existência de uma interação não local e causal entre os mesmos.



Figura 3.1: Representação pictórica da função de correlação entre dois pontos.

Em um regime de turbulência homogênea e estacionária, a função de correlação de dois pontos deve ter a forma

$$\langle \delta f(\mathbf{r}, t) \delta g(\mathbf{r}', t') \rangle = \langle \delta f \delta g \rangle_{\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t'}, \quad (3.13)$$

sendo que a segunda forma ressalta o caráter homogêneo e estacionário da turbulência.

Para a função  $\delta N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , a função de correlação de dois pontos pode ser calculada a partir de (3.9d), o que leva a

$$\langle \delta N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta N_b^0(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') \rangle = \langle N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) N_b^0(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') \rangle - \langle N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle \langle N_b^0(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') \rangle.$$

Como esta correlação ocorre para partículas independentes, para espécies distintas  $\langle N_a^0 N_b^0 \rangle = \langle N_a^0 \rangle \langle N_b^0 \rangle$ , uma vez que as partículas são todas descorrelacionadas, de onde resulta  $\langle \delta N_a^0 \delta N_b^0 \rangle = 0$  para  $b \neq a$ .

Por outro lado, se  $b = a$ , a partir de (3.9a) e como  $\mathbf{r}_i^a(t) = \mathbf{r}_{i0}^a + \mathbf{v}_i^a t$ , escreve-se

$$\begin{aligned} \langle \delta N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta N_a^0(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') \rangle &= \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}(t - t')] \sum_{i=1}^{\bar{N}_a} \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{i0}^a - \mathbf{v}_i^a t) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i^a) \rangle \\ &\quad + \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^{\bar{N}_a} \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{i0}^a + \mathbf{v}_i^a t) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i^a) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_{j0}^a + \mathbf{v}_j^a t') \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}_j^a) \rangle \\ &\quad - \langle N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle \langle N_a^0(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') \rangle, \end{aligned}$$

onde foi empregada a propriedade  $\delta(x - a) \delta(y - a) = \delta(x - y) \delta(x - a)$ . Novamente, como as partículas são descorrelacionadas, o segundo e o terceiro termo na expressão acima se cancelam. Já o primeiro termo contém

$$\sum_{i=1}^{\bar{N}_a} \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{i0}^a - \mathbf{v}_i^a t) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i^a) \rangle = \langle N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle \approx f_a(\mathbf{v}, t),$$

onde foi suposto que  $\langle N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle \approx \langle N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle$  e empregada (3.6d). Portanto, obteve-se

$$\langle \delta N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta N_b^0(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') \rangle = \delta_{ab} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}(t - t')] \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') f_a(\mathbf{v}, t). \quad (3.14)$$

Introduzindo agora a notação compacta  $x = (\mathbf{r}, \mathbf{v})$ , considera-se a seguir a função de correlação de dois pontos da função de Klimontovich  $N_a(x, t)$ . Inicialmente, a partir de (3.3) escreve-se

$$\langle N_a(x, t) N_b(x', t) \rangle = \sum_{i=1}^{\bar{N}_a} \sum_{j=1}^{\bar{N}_b} \left\langle \delta[x - x_i^a(t)] \delta[x' - x_j^b(t)] \right\rangle.$$

Deve-se observar que a correlação é tomada entre as funções de Klimontovich no mesmo instante de tempo.

Esta expressão pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\langle N_a(x, t) N_b(x', t) \rangle = \delta_{ab} \delta(x - x') f_a(\mathbf{v}, t) + \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{\bar{N}_a} \sum_{j=1}^{\bar{N}_b} \left\langle \delta[x - x_i^a(t)] \delta[x' - x_j^b(t)] \right\rangle,$$

tendo sido empregado (3.6d). Note que a condição  $i \neq j$  somente faz realmente sentido quando  $a = b$ .

Definindo agora a *função de distribuição de probabilidades de duas partículas*

$$f_2^{ab}(x, x', t) = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{\bar{N}_a} \sum_{j=1}^{\bar{N}_b} \left\langle \delta[x - x_i^a(t)] \delta[x' - x_j^b(t)] \right\rangle,$$

obtém-se então

$$\langle N_a(x, t) N_b(x', t) \rangle = \delta_{ab} \delta(x - x') f_a(\mathbf{v}, t) + f_2^{ab}(x, x', t).$$

A função de distribuição de duas partículas  $f_2^{ab}(x, x', t)$  descreve a densidade de probabilidade de se encontrar, no mesmo instante  $t$ , uma partícula da espécie  $a$  em  $x$  e uma partícula da espécie  $b$  em  $x'$ . Esta distribuição é muitas vezes escrita como

$$f_2^{ab}(x, x', t) = f_a(\mathbf{v}, t) f_b(\mathbf{v}', t) + g_2^{ab}(x, x', t),$$

sendo que  $g_2^{ab}(x, x', t) = 0$  caso as partículas  $a$  sejam descorrelacionadas das partículas  $b$ . Esta função contém, portanto, a informação da correlação irreduzível entre estas partículas.

Portanto, uma outra expressão para a função de correlação de dois corpos é

$$\langle N_a(x, t) N_b(x', t) \rangle = f_a(\mathbf{v}, t) f_b(\mathbf{v}', t) + \delta_{ab} \delta(x - x') f_a(\mathbf{v}, t) + g_2^{ab}(x, x', t). \quad (3.15)$$

Dado o resultado (3.15), obtém-se facilmente a seguinte expressão para a função de correlação envolvendo as flutuações  $\delta N_a(x, t)$ ,

$$\langle \delta N_a(x, t) \delta N_b(x', t) \rangle = \delta_{ab} \delta(x - x') f_a(\mathbf{v}, t) + g_2^{ab}(x, x', t), \quad (3.16)$$

onde foram novamente empregados (3.6a) e (3.6d).

Define-se agora a *função de correlação de três corpos* ou *três pontos* em um regime de turbulência homogênea e estacionária como

$$\langle \delta f(\mathbf{r}, t) \delta g(\mathbf{r}', t') \delta h(\mathbf{r}'', t'') \rangle = \langle \delta f \delta g \delta h \rangle_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{r}'', t-t'-t''}. \quad (3.17)$$

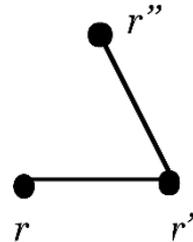


Figura 3.2: Representação da função de correlação de três pontos.

A correlação de três pontos está representada na figura 3.2. A barra conectando os três pontos indica a existência de uma interação não local e causal entre os três pontos.

Para obter a função de correlação de três pontos para a função de Klimontovich e sua flutuação, procede-se de forma semelhante ao processo de derivação de (3.15) e (3.16). Obtém-se dessa forma as seguintes funções de correlações de três pontos (Yoon, 2019)

$$\begin{aligned}
\langle N_a(x, t) N_b(x', t) N_c(x'', t) \rangle &= f_a(\mathbf{v}, t) f_b(\mathbf{v}', t) f_c(\mathbf{v}'', t) + f_a(\mathbf{v}, t) g_2^{bc}(x', x'', t) \\
&+ f_b(\mathbf{v}', t) g_2^{ac}(x, x'', t) + f_c(\mathbf{v}'', t) g_2^{ab}(x, x', t) \\
&+ \delta_{ac} \delta(x - x'') [f_a(\mathbf{v}, t) f_b(\mathbf{v}', t) + g_2^{ab}(x, x', t)] \\
&+ \delta_{ab} \delta(x - x') [f_b(\mathbf{v}', t) f_c(\mathbf{v}'', t) + g_2^{bc}(x', x'', t)] \\
&+ \delta_{bc} \delta(x' - x'') [f_a(\mathbf{v}, t) f_c(\mathbf{v}'', t) + g_2^{ac}(x, x'', t)] \\
&+ \delta_{ab} \delta_{bc} \delta(x - x') \delta(x - x'') f_a(\mathbf{v}, t) \\
&+ g_3^{abc}(x, x', x'', t),
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
\langle \delta N_a(x, t) \delta N_b(x', t) \delta N_c(x'', t) \rangle &= \delta_{ab} \delta_{bc} \delta(x - x') \delta(x - x'') f_a(\mathbf{v}, t) \\
&+ \delta_{ac} \delta(x - x'') g_2^{ab}(x, x', t) \\
&+ \delta_{ab} \delta(x - x') g_2^{bc}(x', x'', t) \\
&+ \delta_{bc} \delta(x' - x'') g_2^{ac}(x, x'', t) \\
&+ g_3^{abc}(x, x', x'', t),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

onde  $g_3^{abc}(x, x', x'', t)$  descreve a parte irreduzível da correlação entre as três espécies de partículas.

Finalmente, a *função de correlação de quatro corpos* ou *quatro pontos* pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\langle \delta f(\mathbf{r}, t) \delta g(\mathbf{r}', t') \delta h(\mathbf{r}'', t'') \delta w(\mathbf{r}''', t''') \rangle &= \langle \delta f \delta g \rangle_{\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t'} \langle \delta h \delta w \rangle_{\mathbf{r}''-\mathbf{r}''', t''-t'''} \\
&+ \langle \delta f \delta h \rangle_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'', t-t''} \langle \delta g \delta w \rangle_{\mathbf{r}'-\mathbf{r}''', t'-t'''} \\
&+ \langle \delta f \delta w \rangle_{\mathbf{r}-\mathbf{r}''', t-t'''} \langle \delta g \delta h \rangle_{\mathbf{r}'-\mathbf{r}'', t'-t''} \\
&+ \langle \delta f \delta g \delta h \delta w \rangle_{\mathbf{r}-\mathbf{r}', \mathbf{r}'-\mathbf{r}'', \mathbf{r}''-\mathbf{r}''', t-t', t'-t'', t''-t'''} .
\end{aligned} \tag{3.20}$$

De forma distinta ao que ocorreu com as correlações de ordem mais baixa, as correlações entre quatro pontos podem ser divididas por interações entre pares de pontos mais uma correlação irreduzível entre os quatro pontos. A figura 3.3 ilustra essas possibilidades.

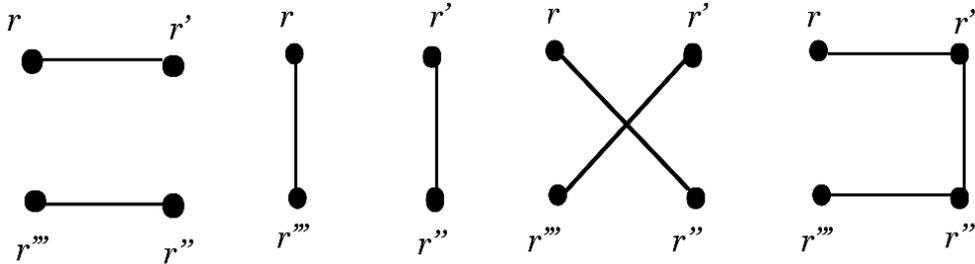


Figura 3.3: Representações das possíveis interações que compõe a função de correlação de quatro pontos.

Em todas as expressões obtidas nesta seção para as correlações da função de Klimontovich e sua flutuação, ou seja, expressões (3.14) – (3.20), observa-se a presença de pelo menos um termo semelhante a  $\delta(x - x') f_a(\mathbf{v}, t)$ , embora as correlações tenham sido obtidas por cálculos de médias de ensemble. A permanência de termos como esses é devida a efeitos de partículas discretas que ainda ocorrem sobre as correlações.

Se esses termos oriundos dos efeitos de partículas discretas fossem ignorados nas correlações, as expressões acima ((3.14), (3.15), (3.16), (3.18) e (3.19)) se reduziriam a

$$\begin{aligned} \langle \delta N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta N_b^0(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') \rangle &= 0, \\ \langle N_a(x, t) N_b(x', t) \rangle &= f_a(\mathbf{v}, t) f_b(\mathbf{v}', t) + g_2^{ab}(x, x', t), \\ \langle \delta N_a(x, t) \delta N_b(x', t) \rangle &= g_2^{ab}(x, x', t), \\ \langle N_a(x, t) N_b(x', t) N_c(x'', t) \rangle &= f_a(\mathbf{v}, t) f_b(\mathbf{v}', t) f_c(\mathbf{v}'', t) + f_a(\mathbf{v}, t) g_2^{bc}(x', x'', t) \\ &\quad + f_b(\mathbf{v}', t) g_2^{ac}(x, x'', t) + f_c(\mathbf{v}'', t) g_2^{ab}(x, x', t) \\ &\quad + g_3^{abc}(x, x', x'', t), \\ \langle \delta N_a(x, t) \delta N_b(x', t) \delta N_c(x'', t) \rangle &= g_3^{abc}(x, x', x'', t), \end{aligned}$$

e o tratamento acabaria levando à teoria de Vlasov discutida no capítulo 2 (Yoon, 2019). Isto ocorre justamente porque na teoria de Vlasov os efeitos de partículas discretas são ignorados.

Contudo, não há justificativa *a priori* para se ignorar esses efeitos e as expressões completas (3.14) – (3.20) devem ser consideradas. Não obstante, será mostrado *a posteriori* que esses termos possuem contribuições da ordem de grandeza do parâmetro de plasma,  $g = 1/n\lambda_D^3$  (1.2), o qual é muito pequeno nas condições típicas do regime de turbulência fraca. Por esta razão, termos não lineares oriundos dessas contribuições de partícula única podem ser desprezados frente a termos de maior importância.

### 3.2.3 Hipótese de duas escalas temporais e formas espectrais

Será realizada agora a hipótese de que a evolução dinâmica do plasma ocorre em duas escalas temporais típicas, denominadas *escala rápida* ( $t_r$ ) e *escala lenta* ( $t_\ell$ ). Se  $\tau_r$  é um intervalo de tempo típico na escala rápida, enquanto que  $\tau_\ell$  é um intervalo típico na escala lenta, então  $\tau_r \ll \tau_\ell$ .

A existência de duas escalas temporais está baseada na suposição de que as médias de ensemble variam no tempo na escala lenta. Por sua vez, as flutuações em torno das médias ocorrem nas duas escalas, sendo que as variações nas amplitudes das flutuações ocorrem na escala lenta, existindo porém oscilações sobrepostas que ocorrem na escala rápida. A concepção da variação temporal das flutuações ocorrendo em duas escalas temporais pode ser comparada ao que ocorre com uma onda de rádio de amplitude modulada, na qual a onda portadora é gerada em uma alta frequência (*i.e.*, na escala rápida), mas com uma amplitude que varia em uma escala de tempo muito mais lenta.

De acordo com a hipótese das duas escalas temporais, as funções de Klimontovich e o potencial elétrico para o tratamento da turbulência eletrostática em um plasma sem campos passam a ser formalmente escritos como

$$\begin{aligned} N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= f_a(\mathbf{v}, t_\ell) + \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t_r, t_\ell), \\ N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= \langle N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t_\ell) \rangle + \delta N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t_r, t_\ell), \\ \phi(\mathbf{r}, t) &= \phi(\mathbf{r}, t_r, t_\ell). \end{aligned}$$

Uma vez estabelecidas as escalas temporais, aplicam-se sobre as flutuações transformações de Fourier no espaço e transformações de Laplace na escala rápida do tempo, definindo-se dessa forma as quantidades

$$\delta N_{\mathbf{k}, \omega}^a(\mathbf{v}, t_\ell) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{r} \int_0^\infty dt_r \delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t_r, t_\ell) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t_r)} \quad (3.21a)$$

$$\delta N_{\mathbf{k}, \omega}^{a0}(\mathbf{v}, t_\ell) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{r} \int_0^\infty dt_r \delta N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t_r, t_\ell) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t_r)} \quad (3.21b)$$

$$\phi_{\mathbf{k},\omega}(t_\ell) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{r} \int_0^\infty dt_r \phi(\mathbf{r}, t_r, t_\ell) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t_r)}, \quad (3.21c)$$

sendo que as flutuações no espaço de Fourier-Laplace continuam sendo funções do tempo na escala lenta.

As quantidades  $\delta N_{\mathbf{k},\omega}^a$ ,  $\delta N_{\mathbf{k},\omega}^{a0}$  e  $\phi_{\mathbf{k},\omega}$  são denominadas as *formas espectrais* das correspondentes quantidades físicas no espaço de configuração.

As correspondentes transformações inversas são:

$$\delta N_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t_r, t_\ell) = \int d\mathbf{k} \int_L d\omega \delta N_{\mathbf{k},\omega}^a(\mathbf{v}, t_\ell) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t_r)} \quad (3.22a)$$

$$\delta N_a^0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t_r, t_\ell) = \int d\mathbf{k} \int_L d\omega \delta N_{\mathbf{k},\omega}^{a0}(\mathbf{v}, t_\ell) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t_r)} \quad (3.22b)$$

$$\phi(\mathbf{r}, t_r, t_\ell) = \int d\mathbf{k} \int_L d\omega \phi_{\mathbf{k},\omega}(t_\ell) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t_r)}, \quad (3.22c)$$

sendo que o caminho de integração  $L$  ocorre ao longo da reta sobre o plano complexo de  $\omega$ , estendendo-se de  $\omega = -\infty$  a  $\omega = +\infty$  e sendo deformado de forma a ficar abaixo de todas as singularidades no integrando, como descrito pela prescrição de Landau (Krall and Trivelpiece, 1986).

Os caminhos e intervalos de integração escolhidos para as integrações em  $t_r$  e  $\omega$  garantem a causalidade e a irreversibilidade nas interações que ocorrem durante a evolução da turbulência no plasma. Uma discussão mais aprofundada envolvendo o conceito do amortecimento de Landau já foi realizada na seção 2.2.3.

Neste ponto é interessante discutir propriedades das formas espectrais das funções de correlação introduzidas na seção 3.2.2. Sem realizar a distinção entre as duas escalas temporais, se  $\delta f(\mathbf{r}, t)$ ,  $\delta g(\mathbf{r}, t)$ , etc, forem as partes flutuantes de quaisquer campos físicos em um regime de turbulência homogênea e estacionária, a função de correlação de dois pontos deve ter a forma dada por (3.13). Introduzindo as transformadas inversas (3.22), escreve-se

$$\langle \delta f(\mathbf{r}, t) \delta g(\mathbf{r}', t') \rangle = \int d\mathbf{k} d\omega \int d\mathbf{k}' d\omega' \langle \delta f_{\mathbf{k},\omega} \delta g_{\mathbf{k}',\omega'} \rangle e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}' - \omega t - \omega' t')},$$

onde o integrando  $\langle \delta f_{\mathbf{k},\omega} \delta g_{\mathbf{k}',\omega'} \rangle$  é uma forma espectral para a correlação no espaço de configuração.

Contudo, se a correlação entre pontos distintos no espaço de Fourier-Laplace tiver a forma

$$\langle \delta f_{\mathbf{k},\omega} \delta g_{\mathbf{k}',\omega'} \rangle = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega') \langle \delta f \delta g \rangle_{\mathbf{k},\omega}, \quad (3.23a)$$

obtem-se então

$$\langle \delta f(\mathbf{r}, t) \delta g(\mathbf{r}', t') \rangle = \int d\mathbf{k} d\omega \langle \delta f \delta g \rangle_{\mathbf{k},\omega} e^{i[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \omega(t-t')]} = \langle \delta f \delta g \rangle_{\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t'}. \quad (3.23b)$$

Ou seja, a forma (3.13) para um regime de turbulência homogênea e estacionária é automaticamente obtida.

Portanto, expressão (3.23a) é a forma correta para a forma espectral da correlação entre dois pontos. Uma expressão equivalente para (3.23a) é

$$\langle \delta f \delta g \rangle_{\mathbf{k},\omega} = \langle \delta f_{\mathbf{k},\omega} \delta g_{-\mathbf{k},-\omega} \rangle. \quad (3.23c)$$

Finalmente, se  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  e  $t = t'$ , obtém-se uma outra propriedade útil para a correlação entre duas flutuações no mesmo ponto,

$$\langle \delta f(\mathbf{r}, t) \delta g(\mathbf{r}, t) \rangle = \int d\mathbf{k} d\omega \langle \delta f_{\mathbf{k},\omega} \delta g_{-\mathbf{k},-\omega} \rangle = \int d\mathbf{k} d\omega \langle \delta f \delta g \rangle_{\mathbf{k},\omega},$$

dada diretamente a partir de sua forma espectral.

Realizando um procedimento semelhante para as funções de correlação de três pontos (3.17) ou de quatro pontos (3.20), obtém-se as expressões (Yoon, 2019)

$$\begin{aligned} \langle \delta f_{\mathbf{k},\omega} \delta g_{\mathbf{k}',\omega'} \delta h_{\mathbf{k}'',\omega''} \rangle &= \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'') \delta(\omega + \omega' + \omega'') \langle \delta f \delta g \delta h \rangle_{\mathbf{k},\omega; \mathbf{k}+\mathbf{k}',\omega+\omega'}, \quad (3.24) \\ \langle \delta f_{\mathbf{k},\omega} \delta g_{\mathbf{k}',\omega'} \delta h_{\mathbf{k}'',\omega''} \delta w_{\mathbf{k}''',\omega'''} \rangle &= \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''') \delta(\omega + \omega' + \omega'' + \omega''') \\ &\times \left[ \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega') \langle \delta f \delta g \rangle_{\mathbf{k},\omega} \langle \delta h \delta w \rangle_{\mathbf{k}'',\omega''} \right. \\ &+ \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'') \delta(\omega + \omega'') \langle \delta f \delta h \rangle_{\mathbf{k},\omega} \langle \delta g \delta w \rangle_{\mathbf{k}',\omega'} \\ &+ \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}''') \delta(\omega + \omega''') \langle \delta f \delta w \rangle_{\mathbf{k},\omega} \langle \delta g \delta h \rangle_{\mathbf{k}'',\omega''} \\ &\left. + \langle \delta f \delta g \delta h \delta w \rangle_{\mathbf{k},\omega; \mathbf{k}+\mathbf{k}',\omega+\omega'; \mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'',\omega+\omega'+\omega''} \right]. \quad (3.25) \end{aligned}$$

Neste ponto é também importante obter a forma espectral da correlação de segunda ordem entre as funções de partículas livres, dada por (3.14). Em primeiro lugar, observa-se que a mesma apresenta claramente a dependência espaço-temporal dada por (3.13), a qual é a esperada em turbulência homogênea e estacionária. Neste caso, de acordo com (3.23b), pode-se escrever

$$\int d\mathbf{k} d\omega \langle \delta N_a^0(\mathbf{v}) \delta N_b^0(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{k},\omega} e^{i(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega \tau)} = \delta_{ab} \delta(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{v}\tau) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') f_a(\mathbf{v}, t),$$

onde foram definidas as variáveis auxiliares  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  e  $\tau = t - t'$  e  $\delta_{ab}$  é a função delta de Kronecker.

Aplica-se agora a transformação de Fourier-Laplace (3.21) em ambos os lados da expressão acima. É importante mencionar aqui que, embora a transformação no tempo em (3.21) seja realizada no intervalo  $0 \leq t < \infty$ , a correlação contém também a variável  $0 \leq t' < \infty$ . Por esta razão o intervalo correto de integração em  $\tau$  é  $-\infty < \tau < \infty$ . Fazendo uso das identidades

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{\pm i\omega\tau}, \quad \delta(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} e^{\pm i(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \cdot \mathbf{k}}, \quad (3.26)$$

as quais são válidas para qualquer escolha de sinais, chega-se à forma espectral desejada,

$$\langle \delta N_a^0(\mathbf{v}) \delta N_b^0(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{k},\omega} = (2\pi)^{-3} \delta_{ab} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}, t). \quad (3.27)$$

### 3.3 Solução perturbativa das equações de evolução na teoria de turbulência fraca de Klimontovich

Serão aplicadas agora as transformações de Fourier-Laplace (3.21a) – (3.21c) sobre as equações de evolução (3.8a), (3.11) e (3.12).

Iniciando por (3.8a), obtém-se diretamente

$$\phi_{\mathbf{k},\omega}(t) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_a e_a \int d\mathbf{v} \delta N_{\mathbf{k},\omega}^a(\mathbf{v}, t). \quad (3.28)$$

Por outro lado, em (3.11) introduz-se as transformadas inversas (3.22b) e (3.22c) para obter

$$\frac{\partial}{\partial t} f_a(\mathbf{v}, t) = \frac{ie_a}{m_a} \int d\mathbf{k} d\omega \int d\mathbf{k}' d\omega' \mathbf{k}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \langle \delta N_{\mathbf{k},\omega}^a(\mathbf{v}, t) \phi_{\mathbf{k}',\omega'}(t) \rangle e^{i[(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r} - (\omega+\omega')t]}. \quad (3.29)$$

Finalmente, em (3.12) também se faz necessário usar (3.22b) e (3.22c), resultando

$$\left( \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[ \delta N_{\mathbf{k},\omega}^a(\mathbf{v}, t) - \delta N_{\mathbf{k},\omega}^{a0}(\mathbf{v}, t) \right] = -\frac{e_a}{m_a} \phi_{\mathbf{k},\omega}(t) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}}$$

$$- \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{e_a}{m_a} \int d\mathbf{r} \int_0^\infty dt_r \int d\mathbf{k}' d\omega' \int d\mathbf{k}'' d\omega'' e^{-i[(\mathbf{k}-\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{r}-(\omega-\omega'-\omega'')t_r]} \\ \times \mathbf{k}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left[ \delta N_{\mathbf{k}'', \omega''}^a(\mathbf{v}, t) \phi_{\mathbf{k}', \omega'}(t) - \left\langle \delta N_{\mathbf{k}'', \omega''}^a(\mathbf{v}, t) \phi_{\mathbf{k}', \omega'}(t) \right\rangle \right].$$

Usando novamente (3.26), obtém-se

$$\int d\mathbf{r} \int_0^\infty dt_r e^{-i[(\mathbf{k}-\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{r}-(\omega-\omega'-\omega'')t_r]} = (2\pi)^4 \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'-\mathbf{k}'') \delta(\omega-\omega'-\omega'').$$

Desta maneira, as integrais em  $\mathbf{k}''$  e  $\omega''$  podem ser calculadas, resultando então

$$\left( \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[ \delta N_{\mathbf{k}, \omega}^a(\mathbf{v}, t) - \delta N_{\mathbf{k}, \omega}^{a0}(\mathbf{v}, t) \right] = - \frac{e_a}{m_a} \phi_{\mathbf{k}, \omega}(t) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f_a(\mathbf{v}, t) \\ - \frac{e_a}{m_a} \int d\mathbf{k}' d\omega' \mathbf{k}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left[ \delta N_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^a(\mathbf{v}, t) \phi_{\mathbf{k}', \omega'}(t) - \left\langle \delta N_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^a(\mathbf{v}, t) \phi_{\mathbf{k}', \omega'}(t) \right\rangle \right]. \quad (3.30)$$

É importante lembrar que todas as dependências temporais remanescentes em (3.28), (3.29) e (3.30) ocorrem na escala lenta.

Para iniciar o método perturbativo de solução destas equações de evolução, é conveniente primeiro definir

$$\omega + i \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \omega. \quad (3.31)$$

A derivada temporal na escala lenta será novamente explicitada durante o procedimento de derivação das equações cinéticas.

Em seguida, define-se o operador vetorial diferencial

$$\mathbf{g}_{\mathbf{k}, \omega}^a = - \frac{e_a}{m_a} \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i0^+} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}, \quad (3.32)$$

no qual a quantidade  $\omega$  já é dada por (3.31). O símbolo  $+i0^+$  indica explicitamente que a frequência angular  $\omega$  deve sempre ser interpretada como tendo uma parte imaginária positiva infinitesimalmente pequena, em conformidade com a definição da transformada inversa de Laplace realizada em (3.22). O símbolo também indica que a prescrição de Landau, conforme discutida na seção (2.2.3), deve sempre ser obedecida.

Com as definições (3.31) e (3.32), a equação (3.30) pode ser formalmente resolvida como

$$\delta N_{\mathbf{k}, \omega}^a(\mathbf{v}, t) = \delta N_{\mathbf{k}, \omega}^{a0}(\mathbf{v}, t) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}, \omega}^a f_a(\mathbf{v}, t) \phi_{\mathbf{k}, \omega}(t) \\ + \int d\mathbf{k}' d\omega' \mathbf{k}' \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{k}, \omega}^a \left[ \delta N_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^a(\mathbf{v}, t) \phi_{\mathbf{k}', \omega'}(t) - \left\langle \delta N_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^a(\mathbf{v}, t) \phi_{\mathbf{k}', \omega'}(t) \right\rangle \right]. \quad (3.33)$$

Observa-se que esta solução ainda está numa forma transcendental<sup>3</sup>, uma vez que a flutuação  $\delta N_{\mathbf{k}}^a$  faz parte também dos integrandos.

A equação (3.33) será resolvida aproximadamente de forma perturbativa por meio de um processo iterativo de solução. Primeiro, para simplificar a notação, define-se  $q = (\mathbf{k}, \omega)$ ; além disso, o símbolo “ $\delta$ ” na flutuação será excluído. Nesta notação compacta, (3.33) fica escrita

$$N_q^a = N_q^{a(1)} + T^{(2+)} \left\{ N_{q-q_1}^a, \phi_{q_1} \right\}. \quad (3.34)$$

Em (3.34),

$$N_q^{a(1)} = N_q^{a0} + \left( \mathbf{k} \cdot \mathbf{g}_q^a \right) f_a \phi_q, \quad (3.35a)$$

<sup>3</sup>Para diferentes métodos de solução de equações transcendentais ver Boyd (2014).

$$T^{(2+)} \{N_{q-q_1}^a, \phi_{q_1}\} = \int dq_1 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{g}_q^a) [N_{q-q_1}^a \phi_{q_1} - \langle N_{q-q_1}^a \phi_{q_1} \rangle].$$

Analisando os termos de (3.34) sob o ponto de vista de ordens de grandeza nas flutuações, a função  $N_q^{a(1)}$  é de primeira ordem, o que é representado por  $N_q^{a(1)} \simeq \mathcal{O}(\delta^1)$ . Já o termo remanescente em (3.34) contém contribuições de todas as ordens  $n \geq 2$  nas flutuações, uma vez que o mesmo é um funcional da solução completa multiplicada pela flutuação  $\phi_{q_1}$ .

Por outro lado, se forem definidas as novas funções

$$N_q^{a(2)} = \int dq_1 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{g}_q^a) [N_{q-q_1}^{a(1)} \phi_{q_1} - \langle N_{q-q_1}^{a(1)} \phi_{q_1} \rangle], \quad (3.35b)$$

$$N_q^{a(3)} = \int dq_1 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{g}_q^a) [N_{q-q_1}^{a(2)} \phi_{q_1} - \langle N_{q-q_1}^{a(2)} \phi_{q_1} \rangle], \quad (3.35c)$$

$\vdots \quad \vdots$

observa-se claramente que  $N_q^{a(2)} \simeq \mathcal{O}(\delta^2)$ ,  $N_q^{a(3)} \simeq \mathcal{O}(\delta^3)$ , etc.

As funções  $N_q^{a(2)}$ ,  $N_q^{a(3)}$ , ..., podem ser introduzidas em (3.34) ao se escrever

$$\begin{aligned} N_q^a &= N_q^{a(1)} + N_q^{a(2)} + T^{(3+)} \{N_{q-q_1}^a, \phi_{q_1}\} \\ &= N_q^{a(1)} + N_q^{a(2)} + N_q^{a(3)} + T^{(4+)} \{N_{q-q_1}^a, \phi_{q_1}\}, \\ N_q^a &= N_q^{a(1)} + N_q^{a(2)} + N_q^{a(3)} + \dots, \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde

$$\begin{aligned} T^{(3+)} \{N_{q-q_1}^a, \phi_{q_1}\} &= T^{(2+)} \{N_{q-q_1}^a, \phi_{q_1}\} - N_q^{a(2)} && \text{(ordem } n \geq 3), \\ T^{(4+)} \{N_{q-q_1}^a, \phi_{q_1}\} &= T^{(3+)} \{N_{q-q_1}^a, \phi_{q_1}\} - N_q^{a(3)} && \text{(ordem } n \geq 4), \\ &\vdots && \vdots \end{aligned}$$

Assim, a solução formal (3.36) consiste em uma expansão perturbativa da solução transcendental (3.34), escrita em termos de uma série (suposta convergente) cujos coeficientes são de ordem monotonicamente crescente nas flutuações.

A *teoria de turbulência fraca de Klimontovich* consiste em obter a solução aproximada de (3.36) ao se truncar a série, desprezando-se todos os termos de ordem  $\mathcal{O}(\delta^{4+})$ . Efetivamente, isto significa que correlações de quarta ordem e superiores são desprezadas.

A forma explícita para (3.35b) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} N_q^{a(2)} &= \int dq_1 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{g}_q^a) [N_{q-q_1}^{a0} \phi_{q_1} - \langle N_{q-q_1}^{a0} \phi_{q_1} \rangle] \\ &\quad + \int dq_1 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{g}_q^a) [(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{g}_{q-q_1}^a] f_a [\phi_{q-q_1} \phi_{q_1} - \langle \phi_{q-q_1} \phi_{q_1} \rangle]. \end{aligned}$$

Já a forma explícita para (3.35c) resulta

$$\begin{aligned} N_q^{a(3)} &= \int dq_1 \int dq_2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{g}_q^a) (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{g}_{q-q_1}^a) \\ &\quad \times [\phi_{q_1} \phi_{q_2} N_{q-q_1-q_2}^{a0} - \phi_{q_1} \langle \phi_{q_2} N_{q-q_1-q_2}^{a0} \rangle - \langle \phi_{q_1} \phi_{q_2} N_{q-q_1-q_2}^{a0} \rangle] \\ &\quad + \int dq_1 \int dq_2 (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{g}_q^a) (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{g}_{q-q_1}^a) [(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{g}_{q-q_1-q_2}^a] f_a \\ &\quad \times [\phi_{q_1} \phi_{q_2} \phi_{q-q_1-q_2} - \phi_{q_1} \langle \phi_{q_2} \phi_{q-q_1-q_2} \rangle - \langle \phi_{q_1} \phi_{q_2} \phi_{q-q_1-q_2} \rangle]. \end{aligned}$$

Pode-se obter uma forma mais compacta para as expressões acima definindo-se os operadores

$$I^{(2)} = \int dq_1 \int dq_2 \delta(q - q_1 - q_2) \quad (3.37a)$$

$$I^{(3)} = \int dq_1 \int dq_2 \int dq_3 \delta(q - q_1 - q_2 - q_3). \quad (3.37b)$$

Em termos destes operadores e adicionando  $N_q^{a(2)}$  e  $N_q^{a(3)}$  em (3.36), obtém-se

$$\begin{aligned} N_q^a &= N_q^{a0} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}_q^a) f_a \phi_q \\ &+ I^{(2)} (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{g}_q^a) [\phi_{q_1} N_{q_2}^{a0} - \langle \phi_{q_1} N_{q_2}^{a0} \rangle] \\ &+ I^{(3)} (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{g}_q^a) (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{g}_{q-q_1}^a) [\phi_{q_1} \phi_{q_2} N_{q_3}^{a0} - \phi_{q_1} \langle \phi_{q_2} N_{q_3}^{a0} \rangle - \langle \phi_{q_1} \phi_{q_2} N_{q_3}^{a0} \rangle] \\ &+ I^{(2)} (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{g}_q^a) (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{g}_{q_2}^a) f_a [\phi_{q_1} \phi_{q_2} - \langle \phi_{q_1} \phi_{q_2} \rangle] \\ &+ I^{(3)} (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{g}_q^a) (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{g}_{q-q_1}^a) (\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{g}_{q_3}^a) f_a [\phi_{q_1} \phi_{q_2} \phi_{q_3} - \phi_{q_1} \langle \phi_{q_2} \phi_{q_3} \rangle - \langle \phi_{q_1} \phi_{q_2} \phi_{q_3} \rangle]. \end{aligned}$$

No resultado acima, os termos que contêm contribuições não lineares das flutuações das partículas livres  $N_q^{a0}$  serão desprezados. A justificativa está relacionada à discussão realizada no final da seção 3.2.2 concernente aos efeitos de partículas discretas. Como esses efeitos, no regime de turbulência fraca, são da ordem de grandeza do parâmetro de plasma  $g = 1/n\lambda_D^3 \ll 1$ , os termos não lineares envolvendo os mesmos na expansão de  $N_q^a$  serão pequenos em comparação com os demais.

Adicionalmente, a expansão acima, embora formalmente correta, não é simétrica frente a troca das variáveis de integração. Entretanto, uma expressão simétrica pode ser obtida levando-se em conta que os operadores  $I^{(2)}$  e  $I^{(3)}$  são invariantes frente às permutações  $q_1 \leftrightarrow q_2 \leftrightarrow q_3$ . Dessa maneira, o termo atuado por  $I^{(2)}$  deve ser simetrizado pela permutação  $q_1 \leftrightarrow q_2$ , ao passo que o termo atuado por  $I^{(3)}$  deve ser simetrizado pela permutação  $q_2 \leftrightarrow q_3$ .

Portanto, a solução perturbada e simétrica para  $N_q^a$  resulta finalmente

$$\begin{aligned} N_q^a &= N_q^{a0} + \alpha(q) f_a \phi_q \\ &+ I^{(2)} \alpha^{(2)}(q_1 | q_2) f_a [\phi_{q_1} \phi_{q_2} - \langle \phi_{q_1} \phi_{q_2} \rangle] \\ &+ I^{(3)} \alpha^{(3)}(q_1 | q_2 | q_3) f_a [\phi_{q_1} \phi_{q_2} \phi_{q_3} - \phi_{q_1} \langle \phi_{q_2} \phi_{q_3} \rangle - \langle \phi_{q_1} \phi_{q_2} \phi_{q_3} \rangle], \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha(q) &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{g}_q^a \\ \alpha^{(2)}(q_1 | q_2) &= \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{g}_q^a) (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{g}_{q_2}^a) + (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{g}_q^a) (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{g}_{q_1}^a) \right] \\ \alpha^{(3)}(q_1 | q_2 | q_3) &= \frac{1}{2} (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{g}_q^a) \left[ (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{g}_{q-q_1}^a) (\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{g}_{q_3}^a) + (\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{g}_{q-q_1}^a) (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{g}_{q_2}^a) \right]. \end{aligned}$$

Observa-se claramente que

$$\alpha^{(2)}(q_2 | q_1) = \alpha^{(2)}(q_1 | q_2), \quad \alpha^{(3)}(q_1 | q_3 | q_2) = \alpha^{(3)}(q_1 | q_2 | q_3).$$

Com a obtenção da solução perturbativa (3.38) é possível prosseguir com a derivação das equações de evolução da turbulência eletrostática fraca em plasmas sem campos.

### 3.4 A equação de balanço espectral

Introduzindo (3.38) na equação de Poisson (3.28) obtém-se

$$\begin{aligned}
& k^2 \epsilon(q) \phi_q - i I^{(2)} k_1 k_2 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| \chi^{(2)}(q_1 | q_2) [\phi_{q_1} \phi_{q_2} - \langle \phi_{q_1} \phi_{q_2} \rangle] \\
& - I^{(3)} k_1 k_2 k_3 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3| \bar{\chi}^{(3)}(q_1 | q_2 | q_3) [\phi_{q_1} \phi_{q_2} \phi_{q_3} - \phi_{q_1} \langle \phi_{q_2} \phi_{q_3} \rangle - \langle \phi_{q_1} \phi_{q_2} \phi_{q_3} \rangle] \\
& = \sum_a 4\pi e_a \int d\mathbf{v} N_q^{a0}, \quad (3.39)
\end{aligned}$$

onde foram introduzidas funções de resposta do plasma

$$\chi_a(q) = -\frac{4\pi e_a n_a}{k^2} \int d\mathbf{v} \alpha(q) F_a \quad (3.40a)$$

$$\epsilon(q) = 1 + \sum_a \chi_a(q) \quad (3.40b)$$

$$\chi^{(2)}(q_1 | q_2) = \sum_a \chi_a^{(2)}(q_1 | q_2) \quad (3.40c)$$

$$\chi_a^{(2)}(q_1 | q_2) = -\frac{4\pi i e_a n_a}{k_1 k_2 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|} \int d\mathbf{v} \alpha^{(2)}(q_1 | q_2) F_a \quad (3.40d)$$

$$\bar{\chi}^{(3)}(q_1 | q_2 | q_3) = \sum_a \bar{\chi}_a^{(3)}(q_1 | q_2 | q_3) \quad (3.40e)$$

$$\bar{\chi}_a^{(3)}(q_1 | q_2 | q_3) = \frac{4\pi e_a n_a}{k_1 k_2 k_3 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3|} \int d\mathbf{v} \alpha_a^{(3)}(q_1 | q_2 | q_3) F_a, \quad (3.40f)$$

sendo que  $\chi_a(q)$  e  $\epsilon(q)$  são respostas lineares do plasma frente a turbulência. A primeira é denominada a *susceptibilidade linear* do plasma, enquanto que a segunda está intimamente relacionada com a função dielétrica  $D(\mathbf{k}, \omega)$  discutida na seção 2.2.3 e em (Krall and Trivelpiece, 1986). Por esta razão,  $\epsilon(q)$  é denominada a *constante dielétrica* do plasma.

Já as respostas  $\chi^{(2)}$  e  $\bar{\chi}^{(3)}$  são as respostas não lineares, respectivamente em segunda e em terceira ordem nas flutuações, denominadas *susceptibilidades não lineares* do plasma. Como a equação de Poisson envolve correlações até a terceira ordem nas flutuações, diz-se que a teoria de turbulência fraca é uma teoria de perturbação de terceira ordem.

Finalmente, foi definida uma nova forma para a função de distribuição de velocidades

$$f_a(\mathbf{v}, t) = n_a F_a(\mathbf{v}, t), \quad \int d\mathbf{v} F_a(\mathbf{v}, t) = 1,$$

sendo  $n_a$  a densidade de número total das partículas da espécie  $a$ .

A equação (3.39) determina o potencial elétrico na sua forma espectral. Pode-se introduzir de volta os operadores integrais (3.37a) e (3.37b) e escrever a mesma equação na forma equivalente

$$\begin{aligned}
& k^2 \epsilon(q) \phi_q - i \int dq_1 k k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| \chi^{(2)}(q_1 | q - q_1) [\phi_{q_1} \phi_{q - q_1} - \langle \phi_{q_1} \phi_{q - q_1} \rangle] \\
& - \int dq_1 \int dq_2 k k_1 k_2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| \bar{\chi}^{(3)}(q_1 | q_2 | q - q_1 - q_2) \\
& \quad \times [\phi_{q_1} \phi_{q_2} \phi_{q - q_1 - q_2} - \phi_{q_1} \langle \phi_{q_2} \phi_{q - q_1 - q_2} \rangle - \langle \phi_{q_1} \phi_{q_2} \phi_{q - q_1 - q_2} \rangle] \\
& = \sum_a 4\pi e_a \int d\mathbf{v} N_q^{a0}. \quad (3.41)
\end{aligned}$$

A equação (3.41) determina a evolução do potencial elétrico no regime de turbulência fraca. Contudo, o potencial não é a grandeza de maior interesse na teoria. É mais interessante obter-se as equações de evolução das *intensidades espectrais dos modos normais de oscilação do plasma*, as quais serão definidas mais adiante. Essas intensidades espectrais estão relacionadas com o módulo quadrado do campo elétrico no espaço de Fourier-Laplace.

Com este intuito, multiplica-se (3.41) por  $\phi_{-q}$  e toma-se a média de ensemble do resultado. Dessa forma, obtém-se

$$\begin{aligned}
k^2 \epsilon(q) \langle \phi_{-q} \phi_q \rangle &- i \int dq_1 k k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| \chi^{(2)}(q_1 | q - q_1) \langle \phi_{-q} \phi_{q_1} \phi_{q - q_1} \rangle \\
&- \int dq_1 \int dq_2 k k_1 k_2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| \bar{\chi}^{(3)}(q_1 | q_2 | q - q_1 - q_2) \\
&\quad \times [\langle \phi_{-q} \phi_{q_1} \phi_{q_2} \phi_{q - q_1 - q_2} \rangle - \langle \phi_{-q} \phi_{q_1} \rangle \langle \phi_{q_2} \phi_{q - q_1 - q_2} \rangle] \\
&= \sum_a 4\pi e_a \int d\mathbf{v} \langle \phi_{-q} N_q^{a0} \rangle.
\end{aligned}$$

Observa-se a presença de correlações de segunda, terceira e quarta ordens neste resultado. Essas diferentes correlações serão analisadas separadamente.

Em primeiro lugar, de (3.23c), conclui-se que  $\langle \phi_{-q} \phi_q \rangle = \langle \phi^2 \rangle_q$ . Por outro lado, de (3.23a) e (3.25),

$$\begin{aligned}
\langle \phi_{-q} \phi_{q_1} \rangle &= \delta(q - q_1) \langle \phi^2 \rangle_q, \\
\langle \phi_{q_2} \phi_{q - q_1 - q_2} \rangle &= \delta(q - q_1) \langle \phi^2 \rangle_{q_2}, \\
\langle \phi_{-q} \phi_{q_1} \phi_{q_2} \phi_{q - q_1 - q_2} \rangle &\approx \delta(q - q_1) \langle \phi^2 \rangle_q \langle \phi^2 \rangle_{q_2} + \delta(q - q_2) \langle \phi^2 \rangle_q \langle \phi^2 \rangle_{q_1} \\
&\quad + \delta(q_1 + q_2) \langle \phi^2 \rangle_q \langle \phi^2 \rangle_{q_1},
\end{aligned}$$

onde a correlação irreduzível de quarta ordem foi desprezada. Com estes resultados, obtém-se então

$$\begin{aligned}
k^2 \epsilon(q) \langle \phi^2 \rangle_q &- i \int dq_1 k k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| \chi^{(2)}(q_1 | q - q_1) \langle \phi_{-q} \phi_{q_1} \phi_{q - q_1} \rangle \\
&- 2 \int dq_1 k^2 k_1^2 \bar{\chi}^{(3)}(q_1 | -q_1 | q) \langle \phi^2 \rangle_q \langle \phi^2 \rangle_{q_1} \\
&= \sum_a 4\pi e_a \int d\mathbf{v} \langle \phi_{-q} N_q^{a0} \rangle. \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Observa-se que em (3.42) ainda restam as correlações  $\langle \phi_{-q} N_q^{a0} \rangle$  e  $\langle \phi_{-q} \phi_{q_1} \phi_{q - q_1} \rangle$ . Para a primeira, retornando a (3.41) (com  $q \rightarrow -q$ ), multiplicando por  $N_q^{a0}(\mathbf{v})$  e tomando a média de ensemble, resulta

$$\begin{aligned}
k^2 \epsilon^*(q) \langle \phi_{-q} N_q^{a0} \rangle &+ i \int dq_1 k k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| \chi^{(2)*}(q_1 | q - q_1) \langle \phi_{-q_1} \phi_{-q + q_1} N_q^{a0} \rangle \\
&- 2 \int dq_1 k^2 k_1^2 \bar{\chi}^{(3)*}(q_1 | -q_1 | q) \langle \phi^2 \rangle_{q_1} \langle \phi_{-q} N_q^{a0} \rangle \\
&= \sum_b 4\pi e_b \int d\mathbf{v}' \langle N_q^{a0}(\mathbf{v}) N_{-q}^{b0}(\mathbf{v}') \rangle,
\end{aligned}$$

Introduzindo agora a correlação (3.27), resulta

$$\begin{aligned}
[k^2 \epsilon^*(q)] \langle \phi_{-q} N_q^{a0} \rangle &= \left[ 1 - \frac{2 \int dq_1 k^2 k_1^2 \bar{\chi}^{(3)*}(q_1 | -q_1 | q) \langle \phi^2 \rangle_{q_1}}{k^2 \epsilon^*(q)} \right]^{-1} \\
&\quad \times \left[ (2\pi)^{-3} 4\pi e_a \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}, t) \right. \\
&\quad \left. - i \int dq_1 k k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| \chi^{(2)*}(q_1 | q - q_1) \langle \phi_{-q_1} \phi_{-q + q_1} N_q^{a0} \rangle \right].
\end{aligned}$$

O termo no denominador contém a quantidade

$$\left| \frac{2 \int dq_1 k^2 k_1^2 \bar{\chi}^{(3)*}(q_1 | -q_1 | q) \langle \phi^2 \rangle_{q_1}}{k^2 \epsilon^*(q)} \right| \ll 1.$$

Como esta quantidade é suposta pequena, aproxima-se

$$\left[ 1 - \frac{2 \int dq_1 k^2 k_1^2 \bar{\chi}^{(3)*}(q_1 | -q_1 | q) \langle \phi^2 \rangle_{q_1}}{k^2 \epsilon^*(q)} \right]^{-1} \approx 1 + \frac{2 \int dq_1 k^2 k_1^2 \bar{\chi}^{(3)*}(q_1 | -q_1 | q) \langle \phi^2 \rangle_{q_1}}{k^2 \epsilon^*(q)}$$

no primeiro termo no lado direito. Como o segundo termo do produto  $[k^2 \epsilon^*(q)] \langle \phi_{-q} N_q^{a0} \rangle$  contém uma susceptibilidade de segunda ordem, este será simplesmente ignorado.

Obtém-se assim a primeira aproximação

$$\begin{aligned} \langle \phi_{-q} N_q^{a0} \rangle &= \frac{4\pi e_a}{(2\pi)^3 k^2 \epsilon^*(q)} \left( 1 + \frac{2}{\epsilon^*(q)} \int dq_1 k_1^2 \bar{\chi}^{(3)*}(q_1 | -q_1 | q) \langle \phi^2 \rangle_{q_1} \right) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}, t) \\ &\quad - \frac{i}{k^2 \epsilon^*(q)} \int dq_1 k k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| \chi^{(2)*}(q_1 | q - q_1) \langle \phi_{-q_1} \phi_{-q+q_1} N_q^{a0} \rangle. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Contudo, para empregar este resultado em (3.42), a expansão acima será também aproximada pela unidade.

Dessa forma, (3.42) resulta escrita

$$\begin{aligned} k^2 \epsilon(q) \langle \phi^2 \rangle_q - i \int dq_1 k k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| \chi^{(2)}(q_1 | q - q_1) \langle \phi_{-q} \phi_{q_1} \phi_{q-q_1} \rangle \\ - 2 \int dq_1 k^2 k_1^2 \bar{\chi}^{(3)}(q_1 | -q_1 | q) \langle \phi^2 \rangle_q \langle \phi^2 \rangle_{q_1} \\ = \sum_a \int d\mathbf{v} \frac{(4\pi e_a)^2}{(2\pi)^3 k^2 \epsilon^*(q)} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}, t) \\ - i \sum_a \frac{4\pi e_a}{k \epsilon^*(q)} \int dq_1 \int d\mathbf{v} k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| \chi^{(2)*}(q_1 | q - q_1) \langle \phi_{-q_1} \phi_{-q+q_1} N_q^{a0} \rangle, \end{aligned} \quad (3.44)$$

na qual ainda restam as correlações de terceira ordem  $\langle \phi_{-q} \phi_{q_1} \phi_{q-q_1} \rangle$  e  $\langle \phi_{-q_1} \phi_{-q+q_1} N_q^{a0} \rangle$ .

Para calcular estas correlações, retorna-se a (3.41) desprezando o termo de terceira ordem,

$$\begin{aligned} \phi_q \approx \frac{i}{k \epsilon(q)} \int dq_1 k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| \chi^{(2)}(q_1 | q - q_1) [\phi_{q_1} \phi_{q-q_1} - \langle \phi_{q_1} \phi_{q-q_1} \rangle] \\ + \frac{1}{k^2 \epsilon(q)} \sum_a 4\pi e_a \int d\mathbf{v} N_q^{a0}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Usando esta expressão em cada elemento de  $\langle \phi_{-q} \phi_{q_1} \phi_{q-q_1} \rangle$ , resulta

$$\begin{aligned} \langle \phi_{-q} \phi_{q_1} \phi_{q-q_1} \rangle &= 2i k k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| \left( \frac{\chi^{(2)}(q_1 - q | q)}{k_1^2 \epsilon(q_1)} \langle \phi^2 \rangle_{q-q_1} \langle \phi^2 \rangle_q \right. \\ &\quad \left. + \frac{\chi^{(2)}(q | -q_1)}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|^2 \epsilon(q - q_1)} \langle \phi^2 \rangle_q \langle \phi^2 \rangle_{q_1} - \frac{\chi^{(2)*}(q_1 | q - q_1)}{k^2 \epsilon^*(q)} \langle \phi^2 \rangle_{q-q_1} \langle \phi^2 \rangle_{q_1} \right) \\ &\quad + \sum_a 4\pi e_a \int d\mathbf{v} \left( \frac{\langle \phi_{-q} \phi_{q-q_1} N_{q_1}^{a0} \rangle}{k_1^2 \epsilon(q_1)} + \frac{\langle \phi_{-q} \phi_{q_1} N_{q-q_1}^{a0} \rangle}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|^2 \epsilon(q - q_1)} + \frac{\langle \phi_{q_1} \phi_{q-q_1} N_{-q}^{a0} \rangle}{k^2 \epsilon^*(q)} \right). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Inserindo em (3.44), chega-se a

$$\begin{aligned} \epsilon(q) \langle E^2 \rangle_q + 2 \int dq_1 \left[ \chi^{(2)}(q_1 | q - q_1) \left( \frac{\chi^{(2)}(q | q_1 - q)}{\epsilon(q_1)} \langle E^2 \rangle_{q-q_1} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\chi^{(2)}(q | -q_1)}{\epsilon(q - q_1)} \langle E^2 \rangle_{q_1} \right) - \bar{\chi}^{(3)}(q_1 | -q_1 | q) \langle E^2 \rangle_{q_1} \right] \langle E^2 \rangle_q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \int dq_1 \frac{|\chi^{(2)}(q_1 | q - q_1)|^2}{\epsilon^*(q)} \langle E^2 \rangle_{q_1} \langle E^2 \rangle_{q - q_1} \\
& = \sum_a \frac{(4\pi e_a)^2}{(2\pi)^3 k^2 \epsilon^*(q)} \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}, t) \\
& + i \sum_a 4\pi e_a \int dq_1 \int d\mathbf{v} k k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| \left[ \chi^{(2)}(q_1 | q - q_1) \left( \frac{\langle \phi_{-q} \phi_{q - q_1} N_{q_1}^{a0} \rangle}{k_1^2 \epsilon(q_1)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\langle \phi_{-q} \phi_{q_1} N_{q - q_1}^{a0} \rangle}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|^2 \epsilon(q - q_1)} + \frac{\langle \phi_{q_1} \phi_{q - q_1} N_{-q}^{a0} \rangle}{k^2 \epsilon^*(q)} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\chi^{(2)*}(q_1 | q - q_1)}{k^2 \epsilon^*(q)} \langle \phi_{-q_1} \phi_{-q + q_1} N_q^{a0} \rangle \right], \quad (3.47)
\end{aligned}$$

onde foi reintroduzido o campo elétrico, uma vez que  $\langle E^2 \rangle_q = \langle k^2 \phi^2 \rangle_q$ .

Ainda restam quatro correlações de terceira ordem do tipo  $\langle \phi \phi N^{a0} \rangle$  em (3.47). Essas correlações podem ser calculadas de forma conjunta a partir de  $\langle \phi_{q_1} \phi_{-q_1 + q_2} N_{-q_2}^{a0}(\mathbf{v}) \rangle$ . Empregando novamente (3.45), obtém-se então

$$\begin{aligned}
\langle \phi_{q_1} \phi_{-q_1 + q_2} N_{-q_2}^{a0}(\mathbf{v}) \rangle & = \frac{8\pi i e_a}{(2\pi)^3 k_1 k_2 |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| \epsilon(q_2)} \left( \frac{\chi^{(2)}(q_2 | q_1 - q_2)}{\epsilon(q_1)} \langle E^2 \rangle_{q_1 - q_2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\chi^{(2)}(-q_1 | q_2)}{\epsilon(-q_1 + q_2)} \langle E^2 \rangle_{q_1} \right) \delta(\omega_2 - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}, t). \quad (3.48)
\end{aligned}$$

Portanto, (3.47) resulta escrita

$$\begin{aligned}
\epsilon(q) \langle E^2 \rangle_q & - 2 \int dq_1 \frac{|\chi^{(2)}(q_1 | q - q_1)|^2}{\epsilon^*(q)} \langle E^2 \rangle_{q_1} \langle E^2 \rangle_{q - q_1} \\
& + 2 \int dq_1 \left\{ \left[ \chi^{(2)}(q_1 | q - q_1) \right]^2 \left( \frac{\langle E^2 \rangle_{q - q_1}}{\epsilon(q_1)} + \frac{\langle E^2 \rangle_{q_1}}{\epsilon(q - q_1)} \right) \right. \\
& \quad \left. - \bar{\chi}^{(3)}(q_1 | -q_1 | q) \langle E^2 \rangle_{q_1} \right\} \langle E^2 \rangle_q \\
& = \sum_a \frac{(4\pi e_a)^2}{(2\pi)^3 k^2 \epsilon^*(q)} \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}, t) \\
& - \sum_a \int dq_1 \int d\mathbf{v} \frac{2(4\pi e_a)^2}{(2\pi)^3 k_1^2 |\epsilon(q_1)|^2} \left( \frac{[\chi^{(2)}(q_1 | q - q_1)]^2}{\epsilon(q - q_1)} \langle E^2 \rangle_q \right. \\
& \quad \left. - \frac{|\chi^{(2)}(q_1 | q - q_1)|^2}{\epsilon^*(q)} \langle E^2 \rangle_{q - q_1} \right) \delta(\omega_1 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}, t) \\
& - \sum_a \int dq_1 \int d\mathbf{v} \frac{2(4\pi e_a)^2}{(2\pi)^3 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|^2 |\epsilon(q - q_1)|^2} \left( \frac{[\chi^{(2)}(q_1 | q - q_1)]^2}{\epsilon(q_1)} \langle E^2 \rangle_q \right. \\
& \quad \left. - \frac{|\chi^{(2)}(q_1 | q - q_1)|^2}{\epsilon^*(q)} \langle E^2 \rangle_{q_1} \right) \delta[\omega - \omega_1 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{v}] f_a(\mathbf{v}, t), \quad (3.49)
\end{aligned}$$

onde foram empregadas também as propriedades de simetria de  $\chi^{(2)}$  (Yoon, 2019). No lado direito, alguns termos de mais alta ordem, proporcionais a  $\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}, t)$ , foram também desprezados.

Finalmente, no primeiro termo do lado esquerdo será reintroduzida a derivada temporal na escala lenta, a qual havia sido incorporada a  $\omega$  em (3.31). Isto é realizado lembrando-se que a derivada temporal está contida no operador  $\mathbf{g}_{\mathbf{k},\omega}^a$  em (3.32), o qual faz parte da definição da constante dielétrica  $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$ , em (3.40b).

O procedimento neste caso seria escrever formalmente o primeiro termo no lado esquerdo de (3.49) como

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega} \longrightarrow \epsilon \left( \mathbf{k}, \omega + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega}.$$

Contudo, neste ponto é necessário tomar cuidado. Lembrando de todo o desenvolvimento realizado, a equação (3.41) foi multiplicada por  $\delta\phi_{-\mathbf{k},-\omega}$ , sendo em seguida tomada a média de ensemble. Como a constante dielétrica contém a derivada  $\partial/\partial t$  de forma implícita, o procedimento correto seria fazer

$$\langle \delta\phi_{-\mathbf{k},-\omega} k^2 \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \delta\phi_{\mathbf{k},\omega} \rangle = \langle \delta E_{-\mathbf{k},-\omega} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \delta E_{\mathbf{k},\omega} \rangle \longrightarrow \left\langle \delta E_{-\mathbf{k},-\omega} \epsilon \left( \mathbf{k}, \omega + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \delta E_{\mathbf{k},\omega} \right\rangle.$$

Como a derivada temporal ocorre na escala lenta, pode-se aproximar a expressão em forma fechada acima pela expansão em série de Taylor centrada em  $\omega$ , mantendo somente os dois primeiros termos da série. Obtém-se então

$$\begin{aligned} \left\langle \delta E_{-\mathbf{k},-\omega} \epsilon \left( \mathbf{k}, \omega + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \delta E_{\mathbf{k},\omega} \right\rangle &\approx \left\langle \delta E_{-\mathbf{k},-\omega} \left[ \epsilon(\mathbf{k}, \omega) + i \frac{\partial}{\partial \omega} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \frac{\partial}{\partial t} \right] \delta E_{\mathbf{k},\omega} \right\rangle \\ &= \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega} + i \frac{\partial}{\partial \omega} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \left\langle \delta E_{-\mathbf{k},-\omega} \frac{\partial}{\partial t} (\delta E_{\mathbf{k},\omega}) \right\rangle. \end{aligned}$$

Porém,

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega} = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (\delta E_{-\mathbf{k},-\omega}) \delta E_{\mathbf{k},\omega} \right\rangle + \left\langle \delta E_{-\mathbf{k},-\omega} \frac{\partial}{\partial t} (\delta E_{\mathbf{k},\omega}) \right\rangle.$$

Mas, como os termos do lado direito são idênticos, resulta então que

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega} \longrightarrow \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \frac{\partial}{\partial t} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega}.$$

Escrevendo assim a equação (3.49) com os argumentos na forma extensa, obtém-se finalmente a equação não linear de balanço espectral

$$\begin{aligned} &\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \frac{\partial}{\partial t} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega} + \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega} \\ &+ 2 \int d\mathbf{k}' \int d\omega' \left\{ \left[ \chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega') \right]^2 \left( \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}',\omega-\omega'}}{\epsilon(\mathbf{k}', \omega')} + \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}',\omega'}}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')} \right) \right. \\ &\quad \left. - \bar{\chi}^{(3)}(\mathbf{k}', \omega' | -\mathbf{k}', -\omega' | \mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}',\omega'} \right\} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega} \\ &- 2 \int d\mathbf{k}' \int d\omega' \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')|^2}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}',\omega'} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}',\omega-\omega'} \\ &= \frac{2}{\pi k^2 \epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}, t) \\ &- \frac{4}{\pi} \int d\mathbf{k}' \int d\omega' \frac{1}{k'^2 |\epsilon(\mathbf{k}', \omega')|^2} \left( \frac{[\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')]^2}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')|^2}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'} \Bigg) \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega_1 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}, t) \\
& - \frac{4}{\pi} \int d\mathbf{k}' \int d\omega' \frac{1}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 |\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')|^2} \left( \frac{[\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')]^2}{\epsilon(\mathbf{k}', \omega')} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} \right. \\
& \left. - \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')|^2}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'} \right) \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta[\omega - \omega' - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] f_a(\mathbf{v}, t).
\end{aligned} \tag{3.50}$$

A teoria de Vlasov discutida em (Krall and Trivelpiece, 1986) é recuperada se todos os termos do lado direito de (3.50) forem desprezados. Isto porque os termos no lado direito são justamente aqueles devidos aos efeitos de partículas discretas, ausentes na teoria de Vlasov.

As partes real e imaginária da equação de balanço espectral devem ser consideradas separadamente e cada uma destas irá fornecer informações distintas a respeito da evolução não linear do campo elétrico das perturbações longitudinais que ocorrem no regime de turbulência fraca em um plasma sem campos. Esta análise será realizada na seção 3.6.

Antes disso, porém, será discutida a derivação das equações cinéticas para as funções de distribuição de probabilidade.

### 3.5 Equações cinéticas para as funções de distribuição de probabilidade

Será realizada agora a derivação das equações para as partículas. De (3.23a), (3.23c) e (3.29), resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} f_a(\mathbf{v}, t) = -\frac{ie_a}{m_a} \int dq \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \langle \phi_{-q} N_q^a(\mathbf{v}) \rangle.$$

Introduzindo a solução (3.38) para  $N_q^a(\mathbf{v})$  e realizando a média de ensemble, resulta

$$\begin{aligned}
\langle \phi_{-q} N_q^a \rangle &= \langle \phi_{-q} N_q^{a0} \rangle + \alpha(q) f_a \langle \phi^2 \rangle_q + \int dq_1 \alpha^{(2)}(q_1 | q - q_1) f_a \langle \phi_{-q} \phi_{q_1} \phi_{q - q_1} \rangle \\
&+ 2 \int dq_1 f_a \alpha^{(3)}(q_1 | -q_1 | q) \langle \phi^2 \rangle_q \langle \phi^2 \rangle_{q_1}.
\end{aligned}$$

Inserindo agora os resultados (3.43), (3.46) e (3.48), chega-se ao seguinte resultado, após uma quantidade substancial de álgebra:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_a}{\partial t} &= \frac{ie_a^2}{m_a^2} \frac{\partial}{\partial v_i} \int d\mathbf{k} d\omega \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \frac{\partial f_a}{\partial v_j} \\
&- \frac{4\pi i e_a^2}{(2\pi)^3 m_a} \frac{\partial}{\partial v_i} \int d\mathbf{k} d\omega \frac{k_i}{k^2 \epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \left( 1 + \frac{2}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \right. \\
&\times \left. \int d\mathbf{k}' d\omega' \bar{\chi}^{(3)*}(\mathbf{k}', \omega' | -\mathbf{k}', -\omega' | \mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'} \right) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a \\
&+ \frac{e_a^3}{m_a^3} \frac{\partial}{\partial v_i} \int d\mathbf{k} d\omega \int d\mathbf{k}' d\omega' \frac{k_i k'_j (\mathbf{k} - \mathbf{k}')_\ell}{k k' |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} \left[ \chi^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega') \right. \\
&\times \left. \left( \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'}}{\epsilon(\mathbf{k}', \omega')} + \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'}}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega')} \right) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} \right. \\
&\left. - \chi^{(2)*}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega') \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'}}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \left( \frac{\partial}{\partial v_j} \frac{1}{\omega - \omega' - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial v_\ell} + \frac{\partial}{\partial v_\ell} \frac{1}{\omega' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial v_j} \right) f_a \\
& - \frac{ie_a^4}{m_a^4} \frac{\partial}{\partial v_i} \int d\mathbf{k} d\omega \int d\mathbf{k}' d\omega' \frac{k_i k'_j k'_\ell k_r}{k^2 k'^2} \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \\
& \times \frac{\partial}{\partial v_j} \frac{1}{\omega - \omega' - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}} \left( \frac{\partial}{\partial v_\ell} \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial v_r} + \frac{\partial}{\partial v_r} \frac{1}{\omega' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial v_\ell} \right) f_a,
\end{aligned}$$

onde foi empregada a notação de Einstein.

A equação resultante é complexa, mas somente a parte real faz sentido físico, no que concerne a equação para  $f_a(\mathbf{v}, t)$ . Tomando então a parte real, resulta finalmente a *equação cinética para  $f_a(\mathbf{v}, t)$* ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_a}{\partial t} &= \frac{\pi e_a^2}{m_a^2} \int d\mathbf{k} d\omega \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \\
& \times \left[ \boxed{\text{Im} \frac{m_a \epsilon(\mathbf{k}, \omega)}{2\pi^3 k |\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} f_a} + \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} \right) \right] \\
& + \boxed{\frac{e_a^2}{m_a^2} \int d\mathbf{k} d\omega \int d\mathbf{k}' d\omega' \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \text{Im} \frac{1}{\pi^2 k [\epsilon^*(\mathbf{k}, \omega)]^2} \\
& \times \bar{\chi}^{(3)*}(\mathbf{k}', \omega' | -\mathbf{k}', -\omega' | \mathbf{k}, \omega) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a} \\
& + \text{Re} \frac{e_a^3}{m_a^3} \frac{\partial}{\partial v_i} \int d\mathbf{k} d\omega \int d\mathbf{k}' d\omega' \frac{k_i k'_j (\mathbf{k} - \mathbf{k}')_\ell}{k k' |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} \frac{M(\mathbf{k}, \omega | \mathbf{k}', \omega')}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \\
& \times \left( \frac{\partial}{\partial v_j} \frac{1}{\omega - \omega' - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial v_\ell} + \frac{\partial}{\partial v_\ell} \frac{1}{\omega' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial v_j} \right) f_a \\
& + \text{Im} \frac{e_a^4}{m_a^4} \frac{\partial}{\partial v_i} \int d\mathbf{k} d\omega \int d\mathbf{k}' d\omega' \frac{k_i k'_j k'_\ell k_r}{k^2 k'^2} \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}', \omega'}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \\
& \times \frac{\partial}{\partial v_j} \frac{1}{\omega - \omega' - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}} \left( \frac{\partial}{\partial v_\ell} \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial v_r} + \frac{\partial}{\partial v_r} \frac{1}{\omega' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial v_\ell} \right) f_a, \tag{3.51}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
M(\mathbf{k}_1, \omega_1 | \mathbf{k}_2, \omega_2) &= \chi^{(2)}(\mathbf{k}_1, \omega_1 | \mathbf{k}_2, \omega_2) \left( \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}_2, \omega_2}}{\epsilon(\mathbf{k}_1, \omega_1)} + \frac{\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}_1, \omega_1}}{\epsilon(\mathbf{k}_2, \omega_2)} \right) \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \omega_1 + \omega_2} \\
& - \frac{\chi^{(2)*}(\mathbf{k}_1, \omega_1 | \mathbf{k}_2, \omega_2)}{\epsilon^*(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \omega_1 + \omega_2)} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}_1, \omega_1} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}_2, \omega_2}.
\end{aligned}$$

Em (3.51), os termos destacados em azul e dentro de caixas são aqueles oriundos dos efeitos de partículas discretas e que não são previstos pela teoria de Vlasov. Os demais termos incluem os processos de difusão quase linear, devida à interação onda-partícula linear e de difusão não linear, devida aos processos não lineares de interação onda-onda e onda-partícula. Os efeitos de colisões binárias entre as partículas também estão incluídos (Yoon, 2019).

Para este trabalho, a forma completa (3.51) é excessivamente complicada para realizar aplicações práticas. Para simplificar, os efeitos não lineares serão ignorados e serão mantidos somente os efeitos de difusão quase linear e os efeitos oriundos das partículas discretas. As formas resultantes serão apresentadas na seção 3.6.

### 3.6 Equações cinéticas para as partículas e para os modos normais de oscilação

Nesta seção serão derivadas as formas finais para as equações cinéticas, tanto para as partículas quanto para os modos normais de oscilações eletrostáticas que ocorrem em um plasma sem campos. As derivações serão realizadas para um plasma composto por duas espécies: elétrons e íons monovalentes.

#### 3.6.1 Equações cinéticas para as ondas

Para deduzir as formas finais das equações cinéticas para os modos eletrostáticos, retorna-se à equação não linear de balanço espectral (3.50). Trata-se de uma equação complexa, cuja parte real irá fornecer as equações de dispersão dos modos normais de oscilação e cuja parte imaginária irá fornecer as equações de evolução das intensidades espectrais destes modos de oscilação.

Começando pela parte real, serão mantidos somente os termos de mais baixa ordem em (3.50), desprezando-se assim os efeitos dos termos não lineares nas relações de dispersão dos modos normais. Desta maneira, a parte real de (3.50) resulta escrita

$$\operatorname{Re} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \left( \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} - \frac{2}{\pi k^2 |\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}, t) \right) = 0. \quad (3.52)$$

As possíveis soluções da equação (3.52) podem ser consideradas sob o ponto de vista de um diagrama  $\omega \times \mathbf{k}$ . Nas regiões desse diagrama onde

$$\operatorname{Re} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \neq 0,$$

obtem-se a expressão para a intensidade espectral da radiação eletrostática emitida pelo plasma (Yoon, 2005, 2007),

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^0 = \frac{2}{\pi k^2 |\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} \sum_a e_a^2 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}, t). \quad (3.53)$$

A existência da emissão espectral dada por (3.53) é devida aos efeitos de partículas discretas e a mesma é conhecida na literatura como *emissão quase térmica*, pois está diretamente relacionada ao fato de que as partículas do plasma possuem velocidades descritas por funções de distribuição caracterizadas por dispersões de velocidades que no estado de equilíbrio termodinâmico definem a *temperatura cinética* do sistema. Em outras palavras, (3.53) descreve a emissão de radiação (eletrostática) de um plasma que está em uma determinada “temperatura”. A emissão quase térmica de um plasma em equilíbrio termodinâmico será discutida em maiores detalhes na seção 3.6.3.

Por outro lado, nas regiões do diagrama  $\omega \times \mathbf{k}$  onde (3.53) não é válida são justamente as regiões onde ocorrem as *relações de dispersão* determinadas pela *equação* de dispersão

$$\operatorname{Re} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (3.54)$$

Observa-se que (3.54) é justamente a equação de dispersão obtida a partir da teoria cinética linear dos plasmas, em um regime de fraco amortecimento/amplificação (Krall and Trivelpiece, 1986).

Como está sendo considerado um plasma com duas espécies (elétrons e íons monovalentes), existem somente dois modos normais longitudinais: as *ondas de Langmuir* (em alta frequência) e as *ondas íon-acústicas* (em baixa frequência), as quais já foram discutidas na seção 2.2.5. Neste caso, as soluções de (3.54) podem ser escritas  $\omega = \omega^\alpha(\mathbf{k}) \equiv \omega_{\mathbf{k}}^\alpha$ , onde o índice  $\alpha = L, S$  distingue as ondas de Langmuir ( $L$ ) das ondas íon-acústicas ( $S$ ).

No próximo capítulo será discutida a possibilidade da presença do feixe de elétrons acarretar no desvio das relações de dispersão em relação aos modos normais usuais. Assim, a relação de dispersão do modo feixe-modificado, descrito na seção 2.5, desempenhará o papel principal na dinâmica do sistema plasma-feixe no contexto do modelo de modo único (seção 4.2).

Para a região do diagrama  $\omega \times \mathbf{k}$  que satisfaz (3.54), esta equação implica que a média de ensemble do quadrado da flutuação do campo elétrico da turbulência deve ser escrita como

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha=L, S} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}), \quad (3.55)$$

onde  $I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}$  é a *intensidade espectral* da onda propagando-se no modo normal  $\alpha$  e  $\sigma = +1$  ( $-1$ ) identifica uma onda longitudinal propagando-se na forma de uma onda plana com velocidade de fase no sentido paralelo (antiparalelo) ao vetor de onda  $\mathbf{k}$ .

Inserindo a decomposição (3.55) na parte imaginária da equação de balanço espectral (3.50), obtém-se a *equação cinética para a intensidade espectral*

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\partial t} &= \gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} + \boxed{S_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}} - \sum_{\sigma'=\pm 1} \sum_{\beta=L, S} \int d\mathbf{k}' A_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\alpha\beta} I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} \\ &- \boxed{\sum_{\sigma'=\pm 1} \sum_{\beta=L, S} \int d\mathbf{k}' B_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\alpha\beta} \left( \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\epsilon'(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})} - \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta}}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \right)} \\ &- \sum_{\sigma', \sigma''=\pm 1} \sum_{\beta, \gamma=L, S} \int d\mathbf{k}' M_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\alpha\beta\gamma} \left( \frac{I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma''\gamma} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\epsilon'(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})} \right. \\ &\left. + \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\epsilon'(\mathbf{k}-\mathbf{k}', \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma})} - \frac{I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'\beta} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma''\gamma}}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \right) \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma}), \end{aligned} \quad (3.56)$$

sendo

$$\begin{aligned} \epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) &= \frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \Big|_{\omega=\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}} \\ \gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha} &= -\frac{2\text{Im} \epsilon(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \\ S_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} &= \sum_a \frac{4e_a^2}{k^2 [\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})]^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f_a(\mathbf{v}, t) \\ A_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\alpha\beta} &= \frac{4}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \text{Im} \left( P \frac{2 \left[ \chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}) \right]^2}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})} \right. \\ &\quad \left. - \bar{\chi}^{(3)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | -\mathbf{k}', -\sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | \mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) \right) \\ B_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\alpha\beta} &= \sum_a \frac{16e_a^2}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \frac{|\chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})|^2}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 |\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta})|^2} \\ &\quad \times \int d\mathbf{v} \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] f_a(\mathbf{v}, t) \\ M_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\alpha\beta\gamma} &= \frac{4\pi}{\epsilon'(\mathbf{k}, \sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha})} \int d\mathbf{k}' \left| \chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma}) \right|^2, \end{aligned}$$

onde  $P$  denota a parte principal de Cauchy das integrais.

Em (3.56), os termos destacados em caixas e na cor azul são novamente aqueles devidos aos efeitos de partículas discretas e que estão ausentes na teoria de Vlasov. Para ilustrar a origem e os efeitos dos diferentes termos nesta equação, a mesma será escrita de forma simbólica como

$$\frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\partial t} = \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\partial t} \Big|_{\text{em. ind.}} + \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\partial t} \Big|_{\text{em. esp.}} + \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\partial t} \Big|_{\text{esp. ind.}} + \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\partial t} \Big|_{\text{esp. esp.}} + \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\partial t} \Big|_{\text{decaimento}}, \quad (3.57)$$

onde cada termo é identificado na mesma ordem em que os correspondentes termos aparecem em (3.56).

O termo (em. ind.) é denominado *emissão induzida* e é devido à interação linear onda-partícula no plasma. De fato, este termo, individualmente, compõe a equação de evolução temporal da densidade espectral do campo elétrico obtida na teoria de Vlasov, sendo que o coeficiente  $\gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha}$  é exatamente a taxa temporal de absorção/amplificação obtida pela teoria linear.

O termo (em. esp.) é simplesmente  $\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}/\partial t|_{\text{em. esp.}} = S_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}$  e é denominado *emissão espontânea*. Como mencionado, este termo é devido aos efeitos de partículas discretas e já não é previsto pela teoria de Vlasov. Este termo, juntamente com (3.53), compõe a emissão quase térmica gerada por um plasma em um determinado estado termodinâmico.

O termo (esp. ind.) é denominado *espalhamento induzido* ou *espalhamento não linear*, sendo devido aos efeitos não lineares de interação onda-partícula, levando em conta os efeitos coletivos do plasma. Note que este termo é quadrático nas intensidades espectrais.

O termo (esp. esp.) é denominado *espalhamento espontâneo* e é também devido aos processos não lineares de interação onda-partícula, porém agora nos efeitos de partículas discretas. Este termo também não é previsto pela teoria de Vlasov.

Finalmente, o termo (decaimento) é denominado *decaimento não linear* ou *decaimento de três ondas* e é devido aos processos não lineares de interação onda-onda entre os diversos modos normais de oscilação, os quais somente são possíveis pela presença do plasma. Este termo também é quadrático nas intensidades espectrais e as deltas de Dirac  $\delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma})$  selecionam quais são as interações possíveis entre três ondas, satisfazendo as condições de conservação da energia

$$(\mathcal{E}_{\mathbf{k}}^{\alpha} = \hbar\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) \implies \sigma\hbar\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \sigma'\hbar\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - \sigma''\hbar\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\gamma} = 0$$

e *momentum* linear

$$(\mathcal{P}_{\mathbf{k}}^{\alpha} = \hbar\mathbf{k}) \implies \hbar\mathbf{k} + \hbar\mathbf{k}' + \hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = 0$$

nos processos de interação onda-onda. Os processos de decaimento de três ondas fisicamente possíveis podem ser compreendidos também com o auxílio de diagramas de Feynman<sup>4</sup>.

A forma genérica (3.56) para a equação cinética das ondas pode ser manipulada para cada um dos modos eletrostáticos ( $L$  e  $S$ ) em um plasma com duas espécies. Este procedimento é longo e trabalhoso e não será explicitado aqui. Uma longa descrição das aproximações realizadas pode ser vista em Yoon (2019).

Escrevendo a função distribuição no espaço de velocidades com a densidade ambiente retirada da definição  $f_a(\mathbf{v}) = n_a F_a(\mathbf{v}) = n F_a(\mathbf{v})$ , a forma explícita para a equação cinética das ondas de Langmuir é

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} &= \frac{\pi\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \left( \frac{ne^2}{\pi} F_e + \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \right) \\ &+ 2\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \sum_{\sigma', \sigma''=\pm 1} \int d\mathbf{k}' V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{LS} \left( \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' S} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' S} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} \right) \\ &+ \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \sum_{\sigma'=\pm 1} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{LL} \left[ \frac{m_e}{m_i} I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{v}} \right] \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Diagramas de Feynman dos processos de decaimento de três ondas, bem como de processos não lineares de espalhamento, podem ser encontrados em Porkolab and Chang (1978).

$$+ \frac{ne^2}{\pi\omega_{pe}^2} \left( \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'L} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} \right) (F_e + F_i) \Big]. \quad (3.58)$$

Já para o modo íon-acústico, o fator  $\mu_{\mathbf{k}}$  (abaixo) é primeiro incorporado na intensidade espectral:

$$\frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\mu_{\mathbf{k}}} \longrightarrow I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}.$$

Neste caso, a equação cinética do modo íon-acústico fica

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\partial t} &= \frac{\pi\mu_{\mathbf{k}}\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \left[ \frac{ne^2}{\pi} (F_e + F_i) + \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}}^{\sigma S} \left( \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \left( F_e + \frac{m_e}{m_i} F_i \right) \right] \\ &+ \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \int d\mathbf{k}' V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{SL} \left( \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'L} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma''L} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma''L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma S} - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'L} I_{\mathbf{k}}^{\sigma S} \right) \\ &+ \mu_{\mathbf{k}} \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L \sum_{\sigma' = \pm 1} \int d\mathbf{k}' \int d\mathbf{v} \mu_{\mathbf{k}'} \left[ U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{SS} I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'S} I_{\mathbf{k}}^{\sigma S} (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{v}} \right. \\ &\left. + \frac{ne^2}{\pi\omega_{pe}^2} \frac{m_i}{m_e} Y_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{SS} \left( \sigma\omega_{\mathbf{k}}^L I_{\mathbf{k}'}^{\sigma'S} - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L I_{\mathbf{k}}^{\sigma S} \right) (F_e + F_i) \right]. \quad (3.59) \end{aligned}$$

Em (3.58) e (3.59), os diversos parâmetros são

$$\begin{aligned} \omega_{pe} &= \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m_e}}, \quad \lambda_D = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi ne^2}}, \quad v_{Te(i)} = \sqrt{\frac{2T_{e(i)}}{m_{e(i)}}}, \quad c_S = \sqrt{\frac{T_e}{m_i}}, \\ \omega_{\mathbf{k}}^L &= \omega_{pe} \left( 1 + \frac{3}{2} \lambda_D^2 k^2 \right), \quad \omega_{\mathbf{k}}^S = \frac{c_S k \sqrt{1 + 3T_i/T_e}}{\sqrt{1 + \lambda_D^2 k^2}}, \quad \mu_{\mathbf{k}} = \lambda_D^3 k^3 \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \sqrt{1 + \frac{3T_i}{T_e}}, \\ V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{LS} &= \frac{\pi e^2}{2 T_e^2} \frac{\mu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^S) \\ V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{SL} &= \frac{\pi e^2}{4 T_e^2} \frac{\mu_{\mathbf{k}} [\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')]^2}{k^2 k'^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \delta(\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - \sigma''\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^L) \\ U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{LL} &= \frac{\pi e^2}{\omega_{pe}^2 m_e^2} \frac{(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k})^2}{\lambda_D^4 k^4 k'^4} \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] \\ U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{SS} &= \frac{\pi e^2}{\omega_{pe}^2 m_e m_i} \frac{(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k})^2}{\lambda_D^4 k^4 k'^4} W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^S - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}] \\ W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} &= \sigma\sigma' \frac{k'}{k} + \left( 1 + \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2}{(\sigma k - \sigma' k')^2} \right)^2 \left[ \lambda_D^4 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^4 \left| \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^S) \right|^2 \right]^{-1} \\ &\left| \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^S) \right|^2 = \left( 1 + \frac{2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' - \sigma\sigma' k k')}{\lambda_D^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 (k - \sigma\sigma' k')^2} \right)^2 \\ &\quad + \frac{\pi m_e (k - \sigma\sigma' k')^2}{2 m_i \lambda_D^4 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^6} \left[ \exp\left( -\frac{m_e (k - \sigma\sigma' k')^2}{2 m_i |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \right) \right. \\ &\quad \left. \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left( -\frac{T_e (k - \sigma\sigma' k')^2}{2 T_i |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \right) \right] \\ Y_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{SS} &= \frac{\pi e^2}{\omega_{pe}^2 m_e m_i} \frac{(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k})^2}{\lambda_D^4 k^4 k'^4} \left( W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} - \sigma\sigma' \frac{k'}{k} \right) \delta[\sigma\omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma'\omega_{\mathbf{k}'}^S - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}]. \end{aligned}$$

### 3.6.2 Equações cinéticas para as partículas

Para as equações cinéticas das partículas, a forma geral dada por (3.51) será manipulada para um plasma de duas espécies, ressaltando novamente que efeitos não lineares serão ignorados.

Sem apresentar detalhes da longa álgebra necessária, as formas finais das equações cinéticas para as partículas em um plasma com duas espécies são (Yoon, 2019)

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left( \mathbf{A}_a f_a + \mathbf{D}_a \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} \right) \quad (a = e, i), \quad (3.60)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_e &= \frac{e^2}{4\pi m_e} \int d\mathbf{k} \frac{\mathbf{k}}{k^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \\ &\quad \times \left( 1 - \frac{e^2}{m_e^2} \frac{\omega_{pe}^2}{T_e} P \frac{1}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L)} \int d\mathbf{k}' \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \sum_{\sigma'=\pm 1} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma'L}}{(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L)^3 (\sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L)} \right), \\ \mathbf{A}_i &= \frac{e^2}{4\pi m_i} \int d\mathbf{k} \frac{\mathbf{k}}{k^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \mu_{\mathbf{k}} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \\ &\quad \times \left( 1 - \frac{e^2}{m_i^2} \frac{\omega_{pi}^2}{T_i} P \frac{1}{\epsilon^*(\mathbf{k}, \sigma \omega_{\mathbf{k}}^S)} \int d\mathbf{k}' \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \sum_{\sigma'=\pm 1} \frac{I_{\mathbf{k}}^{\sigma'S}}{(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S)^3 (\sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^S)} \right), \\ \mathbf{D}_e &= \frac{\pi e^2}{m_e^2} \int d\mathbf{k} \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} \\ &\quad + \frac{\pi e^4}{2m_e^4} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \sum_{\sigma, \sigma'=\pm 1} \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')(\mathbf{k} - \mathbf{k}') I_{\mathbf{k}}^{\sigma L} I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' L}}{(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2} \\ &\quad \times \left( \frac{1}{(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2} - \frac{\sigma \sigma'}{\omega_{pe}^2} \right) \delta[\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^L - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}], \\ \mathbf{D}_i &= \frac{\pi e^2}{m_i^2} \int d\mathbf{k} \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} \sum_{\sigma=\pm 1} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) I_{\mathbf{k}}^{\sigma S} \\ &\quad + \frac{\pi e^4}{2m_e^4} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \sum_{\sigma, \sigma'=\pm 1} \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')(\mathbf{k} - \mathbf{k}') I_{\mathbf{k}}^{\sigma S} I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' S}}{(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2} \\ &\quad \times \left( \frac{1}{(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2} - \frac{2\sigma \sigma' A_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\sigma, \sigma'}}{kk' c_S^2} \right) \delta[\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^S - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}], \\ A_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\sigma, \sigma'} &= \frac{k^2 + k'^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' - \sigma \sigma' k k'}{\lambda_D^2 |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 (k - \sigma \sigma' k')^2} \frac{1}{\epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^S)}. \end{aligned}$$

Na equação (3.60), o termo  $\mathbf{A}_a$  é denominado *arraste* ou *fricção no espaço de velocidades* e é devido aos efeitos de partículas discretas. Já o termo  $\mathbf{D}_a$  é um *termo de difusão* no espaço de velocidades, determinado pela ação conjunta das interações onda-partícula linear e não linear.

### 3.6.3 Níveis iniciais das ondas

A discussão sobre como determinar os níveis iniciais das intensidades das ondas presentes no plasma permeia o estudo do sistema plasma-feixe e é de fundamental importância para estudos quantitativos da dinâmica do sistema que se deseja estudar. Sem uma forma sistemática e autoconsistente de determinar esses níveis é comum autores e pesquisadores recorrerem a imposições *ad hoc* para definir as condições iniciais do plasma.

Na teoria de turbulência fraca, os níveis iniciais das intensidades espectrais são determinados a partir da emissão espontânea de radiação pelo plasma, devida à existência das flutuações em torno das médias de ensemble. Essas flutuações se manifestam de duas maneiras: (i) como ondas eletrostáticas ou eletromagnéticas descritas pelas relações de dispersão do plasma ou (ii) como oscilações nas regiões do plano  $\omega \times \mathbf{k}$  disjuntas das relações de dispersão. Neste último

caso, a frequência (real)  $\omega$  da oscilação independe do seu vetor de onda  $\mathbf{k}$ , uma vez que estas quantidades não são vinculadas por uma relação de dispersão.

De maneira geral, o efeito de flutuações térmicas pode ser ignorado quando o plasma é não colisional e o parâmetro de plasma (1.2) é insignificamente pequeno. Entretanto, dependendo do plasma em questão, o parâmetro de plasma pode ser, ainda que pequeno, grande o suficiente para não poder ser considerado desprezível (Yoon, 2005). Neste caso, efeitos de flutuações térmicas podem ser incorporados à dinâmica do sistema a partir do uso do formalismo de Klimontovich desenvolvido neste capítulo. A incorporação de efeitos de flutuações espontâneas é indispensável para uma análise quantitativa do ruído inicial. Assim, a emissão espectral devida aos efeitos de partículas discretas dada por (3.53) (*emissão quase térmica*) se configura como um possível ponto de partida para determinar a condição inicial.

Considerando somente as oscilações longitudinais, as duas formas da emissão espontânea são obtidas a partir da equação de balanço espectral, considerando somente a parte real e desprezando os termos não lineares; procedimento que levou à equação (3.52).

Nas regiões do diagrama  $\omega \times \mathbf{k}$  disjuntas das relações de dispersão, a quantidade  $\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega}^0$  é dada pela equação (3.53). Para um plasma em equilíbrio termodinâmico, *i.e.*, descrito pelas distribuições de Maxwell-Boltzmann (2.45), esta quantidade resulta (Yoon, 2005, 2007, 2019)

$$\begin{aligned} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega}^0 &= \frac{T}{2\pi^3\omega} \frac{\text{Im} \epsilon(\mathbf{k}, \omega)}{|\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2} \\ \epsilon(\mathbf{k}, \omega) &= 1 + \sum_a \frac{2\omega_{pa}^2}{k^2 v_{Ta}^2} \left[ 1 + \frac{\omega}{k v_{Ta}} Z \left( \frac{\omega}{k v_{Ta}} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde  $Z(\zeta)$  é a função de Fried & Conte (2.48b),  $T = T_a$  é a temperatura do plasma e  $v_{Ta} = \sqrt{2T_a/m_a}$ .

A figura 3.4 mostra a emissão quase térmica dada por (3.61) para um plasma de elétrons e prótons, na forma de curvas de contorno de  $\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega}^0$  em diagramas  $\omega \times k$ . O painel da esquerda mostra que a emissão é mais intensa ao longo da relação de dispersão das ondas de Langmuir  $\omega = \omega_L(k)$ , mas ocorre emissão também sobre toda a região ilustrada no diagrama. Observa-se também emissão intensa na região de baixa frequência do espectro, distribuída em torno da relação de dispersão das ondas íon-acústicas  $\omega = \omega_S(k)$ . Esta emissão de baixa frequência é ilustrada no painel da direita.

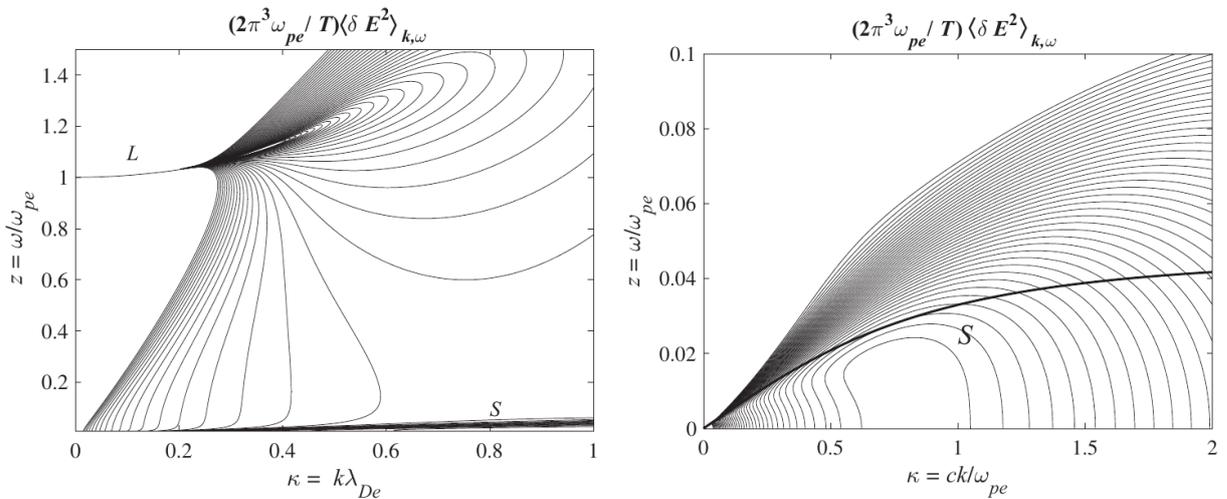


Figura 3.4: Diagrama  $\omega \times k$  mostrando curvas de contorno da emissão térmica (3.61). (Esquerda) Incluindo as relações de dispersão das ondas de Langmuir ( $L$ ) e das ondas íon-acústicas ( $S$ ). (Direita) Região de baixa frequência, incluindo a relação de dispersão das ondas  $S$  (Yoon, 2019).

Por sua vez, um método utilizado para determinar a intensidade dos modos normais no instante inicial consiste em determinar um nível de intensidade espectral em um eventual estado estacionário.

Isto é realizado assumindo que a dinâmica do sistema composto por partículas e campos encontra-se, até o instante  $t = 0^-$ , em um estado fixo onde as intensidades espectrais  $I_{\mathbf{k},0}^{\sigma\alpha} = I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}(t = 0)$  satisfazem a condição  $\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} / \partial t = 0$  na equação (3.56), para todo  $\alpha$  e  $\sigma$ . Esta condição é satisfeita em um sistema no equilíbrio termodinâmico. Contudo, em diversos ambientes espaciais, observa-se que o plasma pode se encontrar em um estado (quase) estacionário turbulento, distante do equilíbrio termodinâmico (Livadiotis and McComas, 2013).

Assim, as intensidades dos modos normais são inicializadas desprezando os termos não lineares em (3.56) e balanceando as emissões espontânea e induzida, resultando em

$$I_{\mathbf{k},0}^{\sigma\alpha} = -\frac{S_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}}{\gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha}}. \quad (3.62)$$

Assume-se também que as mesmas são inicialmente isotrópicas em  $k$ , isto é, que os modos *forward* ( $\sigma = +1$ ) e *backward* ( $\sigma = -1$ ) possuem o mesmo espectro inicial (Ziebell et al., 2015).

Consideramos agora o caso em que um plasma de elétrons e prótons encontra-se inicialmente no equilíbrio termodinâmico, quando então as distribuições das partículas são Maxwellianas (2.45) e os modos normais eletrostáticos são as ondas de Langmuir ( $L$ ) e íon-acústicas ( $S$ ). Abaixo, as equações (3.63) e (3.64) descrevem a evolução dos termos de emissão induzida para as ondas  $L$  e  $S$  enquanto que (3.65) e (3.66) descrevem a evolução dos termos de emissão espontânea para os mesmos modos normais

$$\left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} \right|_{\text{em. ind.}} = \pi \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}, \quad (3.63)$$

$$\left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\partial t} \right|_{\text{em. ind.}} = \pi \mu_{\mathbf{k}} \sigma \omega_{\mathbf{k}}^L \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( F_e + \frac{m_e}{m_i} F_i \right) I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}, \quad (3.64)$$

$$\left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}}{\partial t} \right|_{\text{em. esp.}} = n e^2 \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) F_e, \quad (3.65)$$

$$\left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}}{\partial t} \right|_{\text{em. esp.}} = \mu_{\mathbf{k}}^2 n e^2 \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) (F_e + F_i). \quad (3.66)$$

Introduzindo estas expressões em (3.62), obtém-se para a intensidade espectral inicial dos modos de Langmuir e íon-acústico, respectivamente (Ziebell et al., 2015)

$$I_{\mathbf{k}}^{\sigma L}(0) = \frac{T_e}{4\pi^2} \frac{1}{1 + 3k^2 \lambda_D^2}, \quad (3.67)$$

$$I_{\mathbf{k}}^{\sigma S}(0) = \frac{T_e}{4\pi^2} k^2 \lambda_D^2 \left( \frac{1 + k^2 \lambda_D^2}{1 + 3k^2 \lambda_D^2} \right)^{1/2} \frac{\int d\mathbf{v} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) (F_e + F_i)}{\int d\mathbf{v} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^S - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) [F_e + (T_e/T_i) F_i]}. \quad (3.68)$$

Por outro lado, em muitas situações a suposição de que os modos normais de oscilação do sistema partem de um eventual estado estacionário previamente existente não é justificada, uma vez que com frequência esses sistemas encontram-se em um estado fora do equilíbrio. Um sistema plasma-feixe, por exemplo, não pode ser assumido como em equilíbrio termodinâmico devido às suas características não térmicas, *viz.*, a presença do feixe e as diferentes temperaturas das populações eletrônicas e iônica.

No próximo capítulo retomaremos a discussão sobre a intensidade inicial das ondas no contexto do modelo de modo único (Pascoal, 2014). Neste modelo, o qual será abordado em mais detalhes na seção 4.2, é suposto que o modo instável é identificado como o modo feixe-modificado discutido na seção 2.5.

## Capítulo 4

# Aplicação da Teoria de Turbulência Fraca ao Sistema Plasma-Feixe

Tendo formulado a *Teoria de Turbulência Fraca Eletrostática* no capítulo 3, a qual inclui os efeitos da natureza discreta das partículas que compõem o plasma, e que estende a teoria de Vlasov discutida na seção 2.2, vamos considerar uma aplicação que envolve uma instabilidade em um sistema plasma-feixe. A Teoria de Turbulência Fraca pode ser aplicada a este sistema para estudar os diversos estágios de desenvolvimento das instabilidades. Empregando esta teoria é possível descrever não só o processo de saturação quase linear, que se dá através da formação de um platô no espaço de velocidades, mas também processos que ocorrem muito após o estágio de saturação (Yoon, 2019).

Neste capítulo, aplicaremos as equações cinéticas obtidas a partir do formalismo de Klimontovich ao estudo da evolução de um sistema plasma-feixe unidimensional. Este sistema é descrito na seção 4.1 e sua dinâmica é estudada na seção 4.2 sob a perspectiva de um modelo de modo único (Pascoal, 2014) identificado com o modo feixe-modificado (ver seção 2.5). Ainda na mesma seção será retomada a discussão a respeito da intensidade inicial das ondas a partir do modelo de modo único. Por fim, na seção 4.3 é discutido o método de solução das equações que descrevem a evolução do sistema e apresentados os resultados obtidos a partir das mesmas.

### 4.1 O sistema plasma-feixe

Em física de plasmas, um dos sistemas mais importantes, tanto no âmbito da pesquisa básica quanto em aplicações tecnológicas, é o sistema *plasma-feixe eletrônico*, doravante denominado simplesmente sistema plasma-feixe (*beam-plasma*). O sistema plasma-feixe é composto por duas espécies: elétrons e íons, sendo que os elétrons possuem duas ou mais populações distintas, com velocidades médias não nulas em um referencial em repouso com a distribuição dos íons.

Desde ponto em diante o sistema plasma-feixe estudado será entendido como composto por

- Uma população de íons positivamente carregados ( $\alpha = i$ ) com número atômico  $Z_i = 1$ , massa  $m_i$ , densidade  $n_i$  e em repouso em relação ao referencial do laboratório ( $\mathbf{v}_i = 0$ ).
- Uma população de elétrons térmicos de fundo (*core*) ( $\alpha = c$ ) com densidade  $n_c$  e velocidade de deriva  $\mathbf{v}_c$ .
- Uma população de elétrons térmicos que compõem a população do feixe ( $\alpha = b$ ) com densidade  $n_b$  e velocidade de deriva  $\mathbf{v}_b$ .

Conforme comentado em 1 e 3.2.1, as funções de distribuição de probabilidade devem satisfazer as condições de um plasma globalmente neutro e com corrente nula

$$n_i - n_c - n_b = 0, \quad n_c \int d^3v \mathbf{v} F_c(\mathbf{v}) + n_b \int d^3v \mathbf{v} F_b(\mathbf{v}) = 0.$$

A relação entre as velocidades é obtida tomando a expressão da segunda condição (corrente nula) para  $t = 0$

$$n_c \mathbf{v}_c + n_b \mathbf{v}_b = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{v}_c = -\frac{n_b}{n_c} \mathbf{v}_b.$$

Todas as populações que compõem o sistema podem ser descritas como Maxwellianas  $F_a(\mathbf{v})$  com velocidade térmica dada por  $v_{Ta}$

$$F_a(\mathbf{v}) = \frac{e^{-(\mathbf{v}-\mathbf{v}_a)^2/v_{Ta}^2}}{\pi^{3/2} v_{Ta}^3}, \quad v_{Ta} = \sqrt{\frac{2T_a}{m_a}}.$$

Fazendo uso de (3.61) podemos escrever a função dielétrica para o sistema plasma-feixe (com o feixe orientado no sentido positivo do semieixo  $z$ , isto é,  $\mathbf{v}_b = v_b \hat{\mathbf{z}}$  e  $v_b > 0$ ) como

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_{Ti}^2} Z' \left( \frac{\omega}{k v_{Ti}} \right) - \frac{\omega_{pc}^2}{k^2 v_{Tc}^2} Z' \left( \frac{\omega + k_z v_c}{k v_{Tc}} \right) - \frac{\omega_{pb}^2}{k^2 v_{Tb}^2} Z' \left( \frac{\omega - k_z v_b}{k v_{Tc}} \right) = 0. \quad (4.1)$$

Para escrever a forma adimensional da equação de dispersão apresentada acima começamos por escrever  $n_i = n_e = n_c + n_b$  e definir

$$r_{T1} = \frac{T_c}{T_i}, \quad r_{T2} = \frac{T_b}{T_c}, \quad r_n = \frac{n_b}{n_e}, \quad r_v = \frac{v_b}{v_{Tc}}, \quad r_m = \frac{m_e}{m_i},$$

$$z = \frac{\omega}{\omega_{pe}}, \quad \mathbf{q} = \frac{v_{Tc}}{\omega_{pe}} \mathbf{k}.$$

Fazendo uso das definições

$$\frac{n_c}{n_e} = 1 - r_n, \quad v_c = \frac{r_n v_b}{1 - r_n},$$

$$\omega_{pi}^2 = r_m \omega_{pe}^2, \quad \omega_{pc}^2 = (1 - r_n) \omega_{pe}^2, \quad \omega_{pb}^2 = r_n \omega_{pe}^2,$$

a equação de dispersão fica

$$\epsilon(\mathbf{q}, z) = 1 - \frac{r_{T1}}{q^2} Z' \left( \sqrt{\frac{r_{T1}}{r_m}} \frac{z}{q} \right) - (1 - r_n) \frac{1}{q^2} Z' \left( \frac{z}{q} + \frac{r_n r_v}{1 - r_n} \frac{q_z}{q} \right)$$

$$- \frac{r_n}{r_{T2}} \frac{1}{q^2} Z' \left( \frac{1}{\sqrt{r_{T2}}} \frac{z}{q} - \frac{r_v}{\sqrt{r_{T2}}} \frac{q_z}{q} \right) = 0.$$

No caso de oscilações confinadas à direção de propagação do feixe, a expressão se reduz a

$$\epsilon(q_z, z) = 1 - \frac{r_{T1}}{q_z^2} Z' \left( \sqrt{\frac{r_{T1}}{r_m}} \frac{z}{|q_z|} \right) - (1 - r_n) \frac{1}{q_z^2} Z' \left( \frac{z}{|q_z|} + \frac{r_n r_v}{1 - r_n} \frac{q_z}{|q_z|} \right)$$

$$- \frac{r_n}{r_{T2}} \frac{1}{q_z^2} Z' \left( \frac{1}{\sqrt{r_{T2}}} \frac{z}{|q_z|} - \frac{r_v}{\sqrt{r_{T2}}} \frac{q_z}{|q_z|} \right) = 0. \quad (4.2)$$

O conjunto de modos normais que é solução de (4.2) é apresentado na figura 4.1. Os distintos modos normais são identificados como

**+mL:** modo Langmuir modificado com propagação *forward*,

**-mL:** modo Langmuir modificado com propagação *backward*,

**+S:** modo íon-acústico com propagação *forward*,

**-S:** modo íon-acústico com propagação *backward*,

**uB:** modo feixe instável,

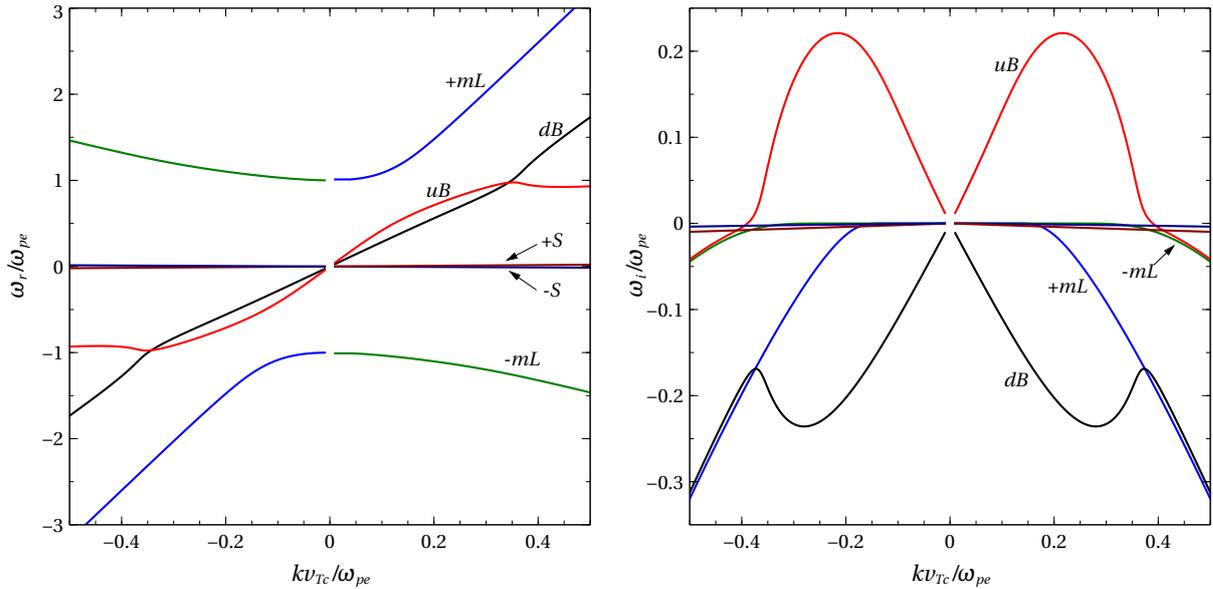


Figura 4.1: Gráficos das soluções de (4.2) para  $r_{T1} = r_{T2} = 1$ ,  $r_n = 10^{-1}$ ,  $r_v = 4.951$ , correspondendo a um parâmetro  $P = 3.25$  (2.47a).

**dB:** modo feixe amortecido.

Os resultados apresentados na figura 4.1 podem ser comparados aos gráficos da figura 2.4, originalmente discutidos por Cairns (1989). Fazendo esta comparação, na figura 2.4 o modo  $uB$  fica representado por curvas contínuas e os modos  $dB$  e  $+mL$  representados por curvas pontilhadas e curvas tracejadas, respectivamente. Observa-se também que as condições de realidade (2.44) são satisfeitas por todos os modos normais ilustrados na figura 4.1.

A geração de turbulência envolvendo ondas longitudinais (e também a radiação eletromagnética), bem como o surgimento de processos de amplificação e de absorção de energia das ondas através da interação entre estas e as partículas que constituem o feixe que atravessa um plasma de fundo, se devem a efeitos não lineares oriundos de um fenômeno conhecido na literatura como instabilidade *bump-in-tail*. Esta, por sua vez, se deve à forma característica da distribuição de velocidades do sistema plasma-feixe. O sistema em questão é encontrado no estudo de fenômenos associados a emissões de radiação solar conhecidas como radiação de tipo II e tipo III (Melrose, 2017).

## 4.2 Modelo de modo único

Uma das formas possíveis de descrever o modo instável em um sistema plasma-feixe é através da modelagem de uma relação de dispersão de um único modo do tipo feixe interagindo consigo mesmo e com as populações de partículas que compõem o plasma. Assim, com o intuito de simplificar a discussão e enfatizar o papel do modo instável na geração da turbulência, é considerada a existência de um único modo normal de oscilação, caracterizado pela relação de dispersão

$$\omega^B(k) = \frac{v_b k}{1 + b v_b k}, \quad (4.3)$$

onde  $b$  é um parâmetro de ajuste e  $v_b$  é proporcional a velocidade de deriva do feixe. Este modo feixe possui uma região de alta frequência e uma região de baixa frequência que desempenham na dinâmica do sistema o papel das ondas de Langmuir e das ondas íon- acústicas, respectivamente.

A intensidade espectral das ondas é calculada conforme a Teoria de Turbulência Fraca e o formalismo de Klimontovich, isto é, levando em consideração ambos os termos da interação

quase linear e linear (termos de emissão espontânea<sup>1</sup> e de emissão induzida), da interação não linear onda-onda e da interação não linear onda-partícula (termos de espalhamento).

Se para simplificar a análise desprezarmos os termos de espalhamento não linear, a equação cinética para a intensidade espectral das ondas do modo  $B$ , relação de dispersão (4.3), fica dada pela soma do termo de decaimento com os termos de emissão. Quando aplicados ao modelo de modo único estes termos são dados pelas seguintes equações

$$\left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma B}}{\partial t} \right|_{\text{em. ind.}} = \pi \frac{(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^B)^3}{k} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^B - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} I_{\mathbf{k}}^{\sigma B}, \quad (4.4)$$

$$\left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma B}}{\partial t} \right|_{\text{em. esp.}} = \frac{(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^B)^6}{\omega_{pe}^4} \frac{ne^2}{k^2} \int d\mathbf{v} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^B - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) F_e, \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma B}}{\partial t} \right|_{\text{decaimento}} &= -\pi \frac{(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^B)^3}{\omega_{pe}^4} \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \int d\mathbf{k}' \left| \chi^{(2)}(\mathbf{k}', \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^B | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^B) \right|^2 \\ &\times \left[ (\sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^B)^3 I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' B} I_{\mathbf{k}}^{\sigma B} + (\sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^B)^3 I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' B} I_{\mathbf{k}}^{\sigma B} + (\sigma \omega_{\mathbf{k}}^B)^3 I_{\mathbf{k}'}^{\sigma' B} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\sigma'' B} \right] \\ &\times \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^B - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^B - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^B). \end{aligned} \quad (4.6)$$

As expressões para os coeficientes de difusão quase linear e de arraste colisional que compõem a equação cinética para a evolução temporal das partículas, por sua vez, são reescritas para o modelo de modo único da seguinte forma

$$D = 2\pi \frac{e^2}{m_e^2} \sum_{\sigma = \pm 1} \int_0^\infty d\mathbf{k} I_{\mathbf{k}}^{\sigma B} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^B - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}), \quad (4.7a)$$

$$A = \frac{e^2}{2\pi m_e \omega_{pe}^2} \sum_{\sigma = \pm 1} \int_0^\infty d\mathbf{k} \frac{(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^B)^3}{k} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^B - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}). \quad (4.7b)$$

Ressaltando que ao analisarmos o modelo de modo único continuaremos desprezando os termos não lineares na equação cinética para as partículas.

As funções delta que caracterizam os termos de emissão espontânea e emissão induzida na equação cinética para o modo feixe  $B$  e que estão presentes nos coeficientes de difusão e de arraste podem ser reescritas para o caso unidimensional como segue

$$\begin{aligned} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^B - kv) &= \left| \frac{v_b}{\sigma v^2 - v_b v} \right| \delta(k - k_*), \quad k_* = \frac{\sigma v_b - v}{v_b v}, \\ \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^B - kv) &= \frac{1}{|k|} \delta(v - v_*), \quad v_* = \frac{\sigma v_b}{1 + b v_b k}. \end{aligned}$$

A condição de ressonância entre três ondas proveniente do termo não linear de decaimento, por sua vez, fica dada, no caso unidimensional, por

$$\begin{aligned} \delta(\sigma \omega_{\mathbf{k}}^B - \sigma' \omega_{\mathbf{k}'}^B - \sigma'' \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^B) &= \left| \frac{\sigma'' v_b}{[1 + b v_b (k - k_+)]^2} - \frac{\sigma' v_b}{(1 + b v_b k_+)^2} \right|^{-1} \delta(k' - k_+) \\ &+ \left| \frac{\sigma'' v_b}{[1 + b v_b (k - k_-)]^2} - \frac{\sigma' v_b}{(1 + b v_b k_-)^2} \right|^{-1} \delta(k' - k_-). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Na expressão acima, os vetores de onda  $k'$  ressonantes que satisfazem as funções delta são dados por

$$k_+ = \frac{-\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{A}\mathcal{C}}}{2\mathcal{A}},$$

<sup>1</sup>O termo de emissão espontânea não está presente na teoria de Vlasov e é característico de tratamentos nos quais a natureza discreta das partículas é levada em consideração, a exemplo da formulação de Klimontovich discutida no capítulo 3.

$$k_- = \frac{-\mathcal{B} - \sqrt{\mathcal{B}^2 - 4\mathcal{A}\mathcal{C}}}{2\mathcal{A}},$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{B} - 4\mathcal{A}\mathcal{C} &\geq 0, \\ \mathcal{A} &= bv_b^2(\sigma' + \sigma'') - \frac{\sigma b^2 v_b^3 k}{1 + bv_b k}, \\ \mathcal{B} &= \frac{\sigma b^2 v_b^3 k^2}{1 + bv_b k} + v_b(\sigma'' - \sigma') - bv_b^2 k(\sigma' + \sigma''), \\ \mathcal{C} &= v_b k(\sigma - \sigma''). \end{aligned}$$

Por fim, tendo sido obtidas as raízes que satisfazem a condição de ressonância entre as ondas do modo  $B$ , é considerada a *aproximação de onda rápida* (Yoon, 2019)

$$\omega' \gg k' v_{Ta}, \quad \omega - \omega' \gg |\mathbf{k} - \mathbf{k}'| v_{Ta}, \quad \omega \gg k v_{Ta},$$

e a quantidade  $\chi_a^{(2)}$  fica dada, de forma aproximada, em mais baixa ordem por

$$\begin{aligned} \chi_a^{(2)}(\mathbf{k}', \omega' | \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega') &= -\frac{i}{2} \frac{e_a}{m_a} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega \omega' (\omega - \omega')} \frac{1}{kk' |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} \\ &\times \left[ \frac{k^2}{\omega} \mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \frac{k'^2}{\omega'} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2}{\omega - \omega'} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \right]. \end{aligned}$$

Na próxima seção discutiremos a emissão quase térmica como condição inicial adotada para a dinâmica do sistema plasma-feixe.

## Nível inicial das ondas do modo feixe

Retomando a discussão começada na seção 3.6.3, uma vez que o sistema plasma-feixe não se encontra em um estado de equilíbrio termodinâmico, não é possível adotar o mesmo critério usado para a dinâmica dos modos eletrostáticos tradicionais (modos  $L$  e  $S$ ), para os quais os níveis das intensidades espectrais em  $t = 0$  são determinados pelo balanço dos termos de emissão espontânea e induzida, de tal forma que  $\partial I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} / \partial t = 0$  neste instante. Este procedimento leva à equação (3.62), a qual determina a quantidade  $I_{\mathbf{k},0}^{\sigma\alpha} = -S_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} / \gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha}$  como o nível inicial para essas ondas.

A determinação do nível inicial da intensidade espectral do modo  $B$  será realizada da seguinte maneira. Supomos que o sistema físico composto por partículas e campos se encontra em um estado de equilíbrio termodinâmico até o instante  $t \rightarrow 0^-$ , quando então o feixe de elétrons é injetado sobre todo o espaço de configuração do sistema, repentinamente removendo este do estado de equilíbrio e injetando a energia livre contida no feixe. Por esta razão, os modos normais de oscilação sustentados pelo sistema plasma-feixe devem colher os seus níveis iniciais de energia a partir das flutuações (quase) térmicas previamente existentes no sistema.

Esta dissertação se propõe a utilizar a emissão quase térmica ao longo do modo feixe descrito pelo modelo de modo único como condição inicial das equações cinéticas, isto é, como nível inicial da intensidade espectral das ondas. Voltando para a expressão da emissão quase térmica para um plasma em equilíbrio térmico (3.61), apresentada no capítulo 3,

$$\begin{aligned} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k},\omega} &= \frac{T}{2\pi^3 \omega} \frac{\text{Im } \epsilon(\mathbf{k}, \omega)}{|\epsilon(\mathbf{k}, \omega)|^2}, \\ \epsilon(\mathbf{k}, \omega) &= 1 + \sum_a \frac{2\omega_{pa}^2}{k^2 v_{Ta}^2} \left[ 1 + \frac{\omega}{k v_{Ta}} Z \left( \frac{\omega}{k v_{Ta}} \right) \right], \end{aligned}$$

e definindo as quantidades

$$z = \frac{\omega}{\omega_{pe}}, \quad \kappa = k\lambda_D, \quad M = \frac{m_i}{m_e},$$

obtemos, para um plasma de elétrons e íons com  $T_i = T_e = T$ ,<sup>2</sup>

$$\epsilon(\kappa, z) = 1 + \frac{2}{\kappa^2} \left[ 1 - \frac{\sqrt{M}z}{\sqrt{2\kappa}} D_i \left( \frac{\sqrt{M}z}{\sqrt{2\kappa}} \right) - \frac{z}{\sqrt{2\kappa}} D_i \left( \frac{z}{\sqrt{2\kappa}} \right) \right] + i \frac{\sqrt{\pi}z}{\sqrt{2\kappa^3}} \left( \sqrt{M}e^{-Mz^2/2\kappa^2} + e^{-z^2/2\kappa^2} \right). \quad (4.10)$$

Como visto anteriormente, a flutuação espectral do campo elétrico se relaciona com a intensidade espectral das ondas segundo (3.55)

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega} = \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\alpha} I_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}).$$

Assim, podemos definir  $I_{\mathbf{k},th}^{\sigma\alpha}$  como a intensidade espectral quase térmica das ondas, sendo dada por

$$\langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}} \doteq \frac{I_{\mathbf{k},th}^{\sigma\alpha}}{\omega_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}} \quad \longrightarrow \quad I_{\mathbf{k},th}^{\sigma\alpha} = \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha} \langle \delta E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha}} = \frac{T}{2\pi^3} \frac{\text{Im } \epsilon(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha})}{|\epsilon(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\sigma\alpha})|^2}. \quad (4.11)$$

Portanto, definindo a intensidade espectral normalizada e um parâmetro proporcional ao parâmetro de plasma como

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2^{3/2}(4\pi)^2 n \lambda_D^3} = \frac{1}{(4\pi)^2 n} \frac{\omega_{pe}^3}{v_{Te}^3}, \quad \mathcal{E}_{\kappa}^{\sigma\alpha} = \frac{4\pi^2 \mathcal{G}}{m_e v_{Te}^2} I_{\kappa}^{\sigma\alpha},$$

temos

$$I_{\kappa,th}^{\sigma\alpha} = \frac{T}{2\pi^3} \frac{\text{Im } \epsilon(\kappa, z_{\kappa}^{\sigma\alpha})}{|\epsilon(\kappa, z_{\kappa}^{\sigma\alpha})|^2} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{E}_{\kappa,th}^{\sigma\alpha} \doteq \frac{4\pi^2 \mathcal{G}}{m_e v_{Te}^2} I_{\kappa,th}^{\sigma\alpha} = \frac{\mathcal{G}}{\pi} \frac{\text{Im } \epsilon(\kappa, z_{\kappa}^{\sigma\alpha})}{|\epsilon(\kappa, z_{\kappa}^{\sigma\alpha})|^2}. \quad (4.12)$$

Se definirmos as quantidades adimensionais

$$r_v = \frac{v_b}{v_{Te}}, \quad \tilde{b} = b\omega_{pe},$$

podemos reescrever a expressão (4.3) da seguinte forma:

$$z_{\kappa}^B = \frac{r_v \kappa}{1 + \tilde{b} r_v \kappa}. \quad (4.13)$$

A expressão para as intensidades espectrais normalizadas (4.12) das ondas com relação de dispersão dada por (4.13)

$$\mathcal{E}_{\kappa,th}^B = \frac{\mathcal{G}}{\pi} \frac{\text{Im } \epsilon(\kappa, z_{\kappa}^B)}{|\epsilon(\kappa, z_{\kappa}^B)|^2}, \quad (4.14)$$

fornece o nível inicial da intensidade espectral do modo  $B$ .

A figura 4.2 mostra, no painel esquerdo, a relação de dispersão do modo  $B$  onde este se situa no diagrama  $\omega \times k$  das flutuações quase térmicas eletrostáticas no estado de equilíbrio termodinâmico. Já o painel direito mostra o gráfico da intensidade espectral em função do número de onda. Deve ser ressaltado que o nível apresentado está normalizado ao parâmetro de plasma  $g \ll 1$ .

Em posse das informações dispostas na figura 4.2, isto é, dos contornos da emissão quase térmica e da intensidade espectral do modo feixe podemos dar continuidade expondo alguns resultados.

<sup>2</sup>A função  $D_i$  presente na expressão (4.10) é chamada de *integral de Dawson* e definida como  $D_i(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{t^2} dt$  (Abramowitz and Stegun, 1972).

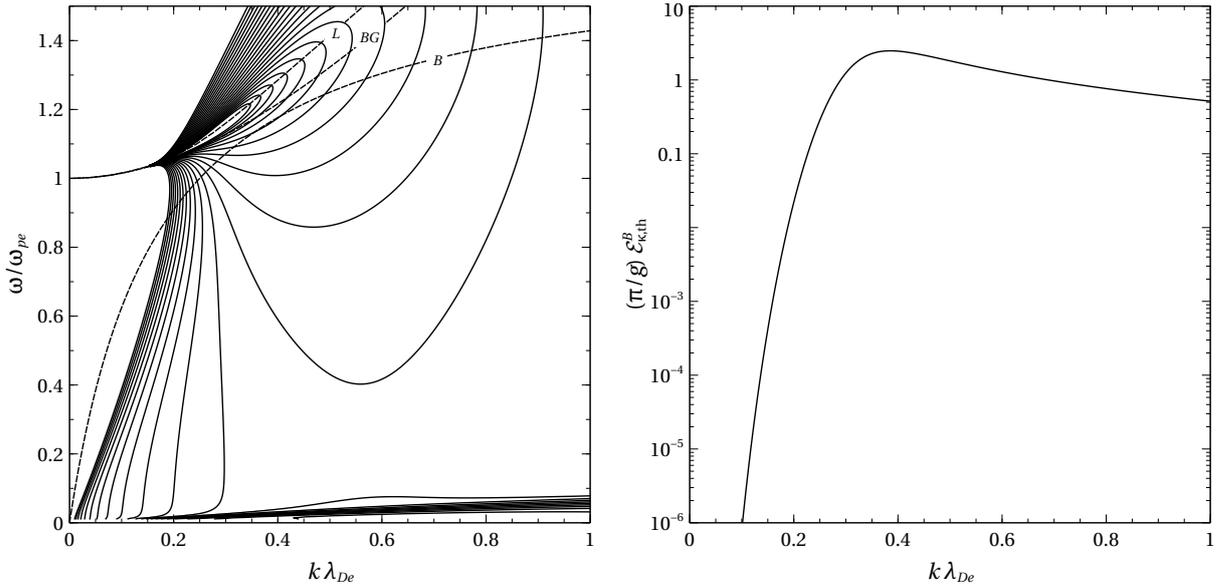


Figura 4.2: No painel da esquerda é apresentado o gráfico de contorno da emissão quase térmica (??). Superimpostas são encontradas as relações de dispersão de Langmuir ( $L$ ), Bohm-Gross ( $BG$ ) e do modo feixe ( $B$ ) (4.13) com  $r_v = 10$  e  $\tilde{b} = 0.6$ . No painel da direita é apresentada a intensidade espectral normalizada do modo feixe (4.14), determinado pelo ruído quase térmico.

### 4.3 Solução numérica e resultados

Com a finalidade de estudar a evolução temporal do sistema plasma-feixe, foi implementado um código numérico baseado no método Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem com passo variável para solução das equações diferenciais ordinárias (Press et al., 1996). A análise é simplificada considerando o limite unidimensional onde as partículas e as ondas excitadas evoluem em um espaço unidimensional. Discretizamos o espaço de velocidade  $u$  e número de onda  $q$ , (onde  $q = kv_{Te}/\omega_{pe}$ , assim como  $u = v/v_{Te}$ , são variáveis adimensionais), em grades com um grande número de pontos nos os intervalos definidos no *input* do programa. Em cada ponto da grade o sistema é resolvido, considerando-o como um problema de valor inicial. Os parâmetros iniciais importantes utilizados pelo programa que resolve as equações são  $r_n = n_b/n_c$ ,  $r_v = v_b/v_{Te}$ ,  $\tilde{b} = b\omega_{pe}$ , juntamente com a condição inicial de equilíbrio termodinâmico ( $r_{T1} = r_{T2} = 1$ ).

Reescrevendo os coeficientes e as equações cinéticas em termos das variáveis normalizadas obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{E}_q^{\sigma B}}{\partial \tau} = (C_s^{QL} + C_s^{NL}) + (C_i^{QL} + C_i^{NL}) \mathcal{E}_q^{\sigma B} \quad (4.15a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial u} \left( A\Phi + D \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \quad (4.15b)$$

$$A = \mathcal{G} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{(\sigma z_{q*}^B)^3}{q_*} \left| \frac{u_b}{\sigma u^2 - u_b u} \right|$$

$$D = \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{E}_{q*}^{\sigma B} \left| \frac{u_b}{\sigma u^2 - u_b u} \right|$$

$$C_s^{QL} = \mathcal{G} \pi \frac{(\sigma z_q^B)^6}{q^2 |q|} \Phi(u_*)$$

$$C_i^{QL} = \pi \frac{(\sigma z_q^B)^3}{q|q|} \frac{\partial \Phi(u_*)}{\partial u_*}$$

$$C_s^{NL} = -\frac{1}{8}(z_q^B)^3 \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \left( C_- \left[ -(\sigma z_q^B)^3 \mathcal{E}_{q-}^{\sigma'B} \mathcal{E}_{q-q-}^{\sigma''B} \right] + C_+ \left[ -(\sigma z_q^B)^3 \mathcal{E}_{q+}^{\sigma'B} \mathcal{E}_{q-q+}^{\sigma''B} \right] \right)$$

$$C_i^{NL} = -\frac{1}{8}(z_q^B)^3 \sum_{\sigma', \sigma'' = \pm 1} \left( C_- \left[ (\sigma' z_{q-}^B)^3 \mathcal{E}_{q-q-}^{\sigma''B} + (\sigma'' z_{q-q-}^B)^3 \mathcal{E}_{q-}^{\sigma'B} \right] \right. \\ \left. + C_+ \left[ (\sigma' z_{q+}^B)^3 \mathcal{E}_{q-q+}^{\sigma''B} + (\sigma'' z_{q-q+}^B)^3 \mathcal{E}_{q+}^{\sigma'B} \right] \right)$$

$$C_- = \left| \frac{\sigma'' u_b}{[1 + bu_b(q - q_-)]^2} - \frac{\sigma' u_b}{(1 + bu_b q_-)^2} \right|^{-1} \\ \times \left| \frac{1}{\sigma z_q^B \sigma' z_{q-}^B \sigma'' z_{q-q-}^B} \frac{1}{qq_-} \left[ \frac{q^2}{\sigma z_q^B} q_- \text{sign}(q - q_-) + \frac{q_-^2}{\sigma' z_{q-}^B} q \text{sign}(q - q_-) + \frac{|q - q_-|}{\sigma'' z_{q-q-}^B} \right] \right|^2$$

$$C_+ = \left| \frac{\sigma'' u_b}{[1 + bu_b(q - q_+)]^2} - \frac{\sigma' u_b}{(1 + bu_b q_+)^2} \right|^{-1} \\ \times \left| \frac{1}{\sigma z_q^B \sigma' z_{q+}^B \sigma'' z_{q-q+}^B} \frac{1}{qq_+} \left[ \frac{q^2}{\sigma z_q^B} q_+ \text{sign}(q - q_+) + \frac{q_+^2}{\sigma' z_{q+}^B} q \text{sign}(q - q_+) + \frac{|q - q_+|}{\sigma'' z_{q-q+}^B} \right] \right|^2$$

$$\chi_a^{(2)}(\mathbf{q}', z' | \mathbf{q} - \mathbf{q}', z - z') = -\frac{i}{2} \frac{e_a}{m_a} \frac{1}{\omega_{pe}^3 v_{Te}} \frac{\omega_{pa}^2}{(z - z')} \frac{1}{qq' |\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \\ \times \left[ \frac{q^2}{z} \mathbf{q}' \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}') + \frac{q'^2}{z'} \mathbf{q} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}') + \frac{(\mathbf{q} - \mathbf{q}')^2}{z - z'} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}' \right],$$

onde os superíndices “QL” e “NL” e os subíndices “s” e “i” indicam a natureza dos termos como quase linear, não linear, espontâneo e induzido, respectivamente. Uma derivação mais detalhada destas expressões pode ser encontrada em [Pascoal \(2014\)](#).

Ainda no contexto da implementação numérica, na figura 4.3 são comparadas as relações de dispersão dos modos  $uB$  e  $B$  (com  $\tilde{b} = 0.6$ ) bem como suas correspondentes velocidades ressonantes para um conjunto específico de parâmetros. Vemos que no modelo de modo único  $z_q^B$  a região de inversão de população ( $\partial \Phi_e / \partial u > 0$ ) ocorre nas mesmas velocidades ressonantes que no caso do modo instável  $uB$ , isto é, que o modo instável obtido a partir da solução numérica da equação de dispersão (4.2). A figura mostra que para os parâmetros adotados esta região compreende intervalo de velocidades  $2.51 \lesssim v/v_{Te} \lesssim 4.95$ .

Analisando a relação de dispersão modelada vemos que a velocidade ressonante varia de 0 a  $v_b$  na medida em que  $k$  varia de  $\infty$  a 0. Para valores típicos de  $b$  e  $k_{min}$  (o valor mínimo de  $k$  na grade numérica), o limite superior da velocidade ressonante  $v_*$  é inferior a velocidade do feixe  $v_b$ . Portanto, a função de distribuição de velocidades não se modifica para valores de velocidade superiores a  $v_b$ .

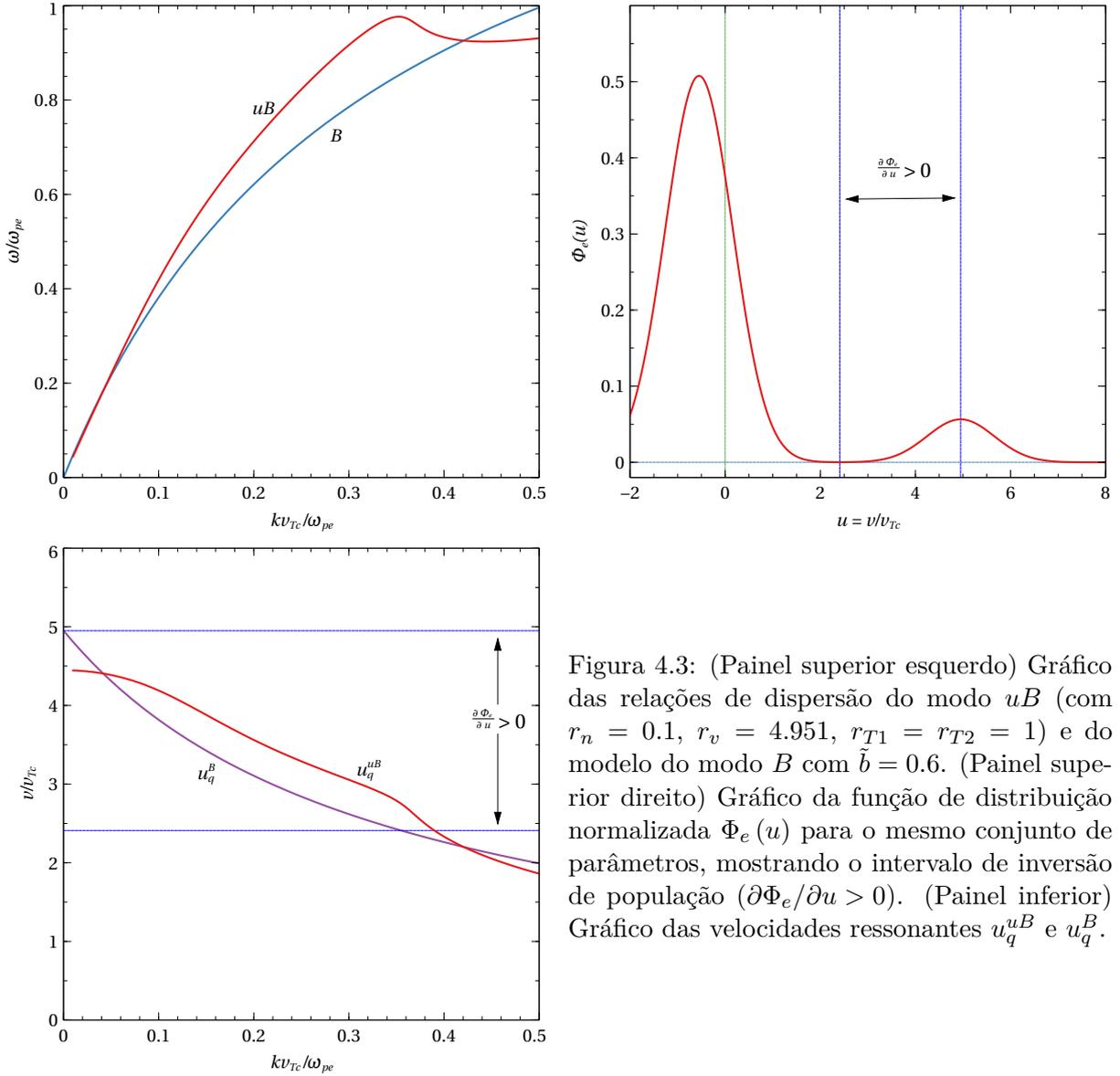


Figura 4.3: (Painel superior esquerdo) Gráfico das relações de dispersão do modo  $uB$  (com  $r_n = 0.1$ ,  $r_v = 4.951$ ,  $r_{T1} = r_{T2} = 1$ ) e do modelo do modo  $B$  com  $\tilde{b} = 0.6$ . (Painel superior direito) Gráfico da função de distribuição normalizada  $\Phi_e(u)$  para o mesmo conjunto de parâmetros, mostrando o intervalo de inversão de população ( $\partial\Phi_e/\partial u > 0$ ). (Painel inferior) Gráfico das velocidades ressonantes  $u_q^{uB}$  e  $u_q^B$ .

A relação de dispersão (4.3) pode ser ajustada introduzindo um parâmetro  $a \geq 1$ , de modo que  $av_b$  é igual ou maior que a velocidade máxima na grade numérica

$$\omega_B(k) = \frac{av_b k}{1 + bv_b k}. \quad (4.16)$$

A mesma alteração é realizada na relação de dispersão normalizada (4.13). Os cálculos realizados com a relação de dispersão original (4.3) permanecem inalterados após uma redefinição de  $v_b$  e  $b$

$$v_b \longrightarrow av_{b,real}, \quad b \longrightarrow b_{real}/a,$$

onde  $v_{b,real}$  e  $b_{real}$  correspondem aos parâmetros em (4.16). A figura 4.4 compara a relação de dispersão redefinida à relação de dispersão de Bohm-Gross para diferentes valores do parâmetro  $a$ . Além disso, podemos comparar a solução numérica da relação de dispersão exata (modo instável  $uB$ ) à relação de dispersão do modo único para diferentes valores do parâmetro de ajuste  $a$ , expressão (4.16). Esta comparação é apresentada na figura 4.5. O sistema plasma-feixe foi simulado para diferentes valores da velocidade relativa do feixe  $r_v = v_b/v_{Te} = 7, 8$  e  $9$  e da densidade relativa entre os elétrons do feixe e do *core*  $r_b = n_b/n_e = 10^{-1}, 10^{-2}$  e  $10^{-3}$ . Os demais parâmetros, por sua vez, foram definidos como  $b = 0.8$ ,  $a = 1.3$  e  $g = 10^{-6}$ .

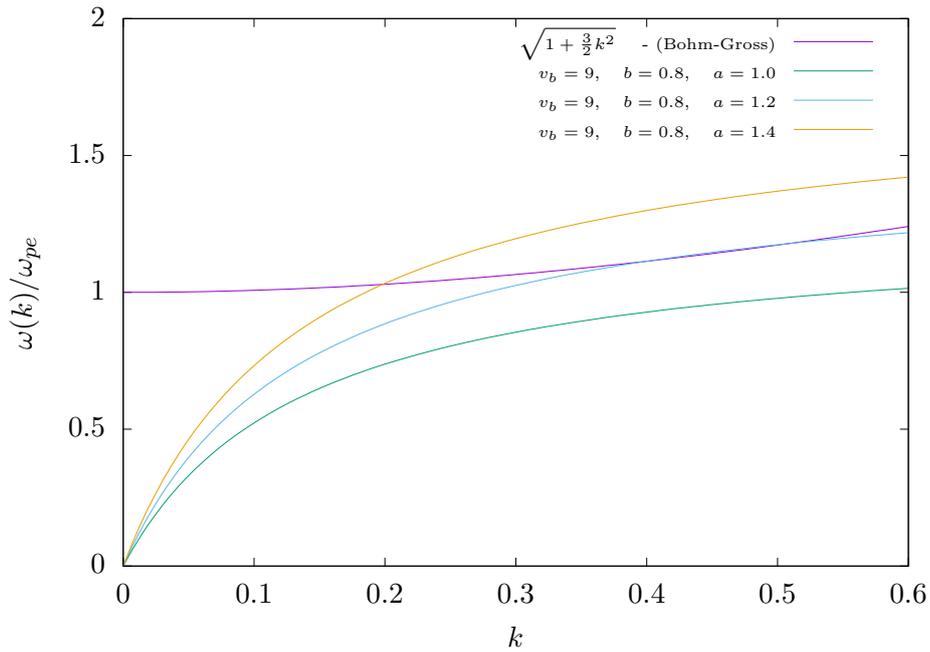


Figura 4.4: Comparação entre a relação de dispersão de Bohm-Gross e a relação de dispersão (4.16) para diferentes valores do parâmetro de ajuste  $a$ .

Começamos por analisar a evolução temporal da função distribuição de velocidades  $\Phi_e(u)$  com a velocidade do feixe e a densidade do feixe mantidas fixas. Estes resultados são apresentados na figura 4.6.

As diferentes curvas identificam diferentes instantes de tempo de modo a demonstrar a evolução dinâmica e suave do sistema. Observa-se claramente a formação do *plateau* quase

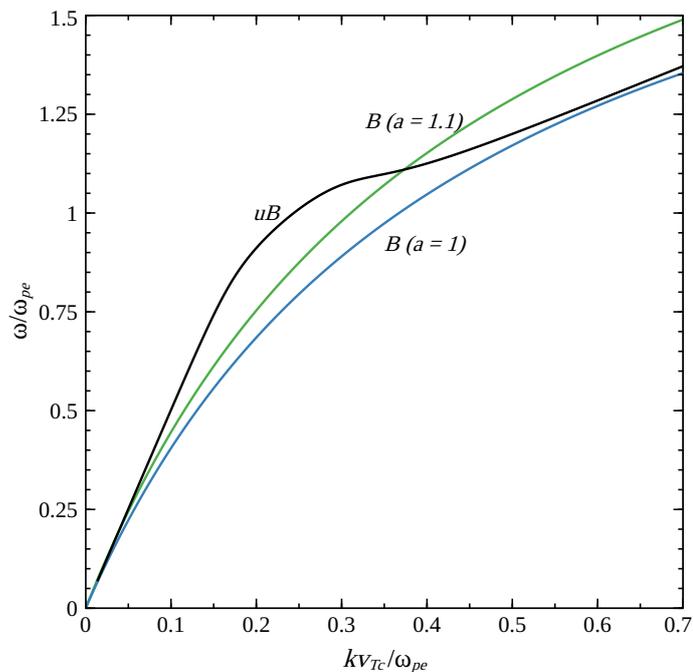


Figura 4.5: Comparação entre as relações de dispersão do modo  $uB$  e do modo único  $B$  para diferentes valores do parâmetro  $a$  com  $n_b/n_c = 10^{-2}$  e  $v_b/v_{Te} = 4.951$ .

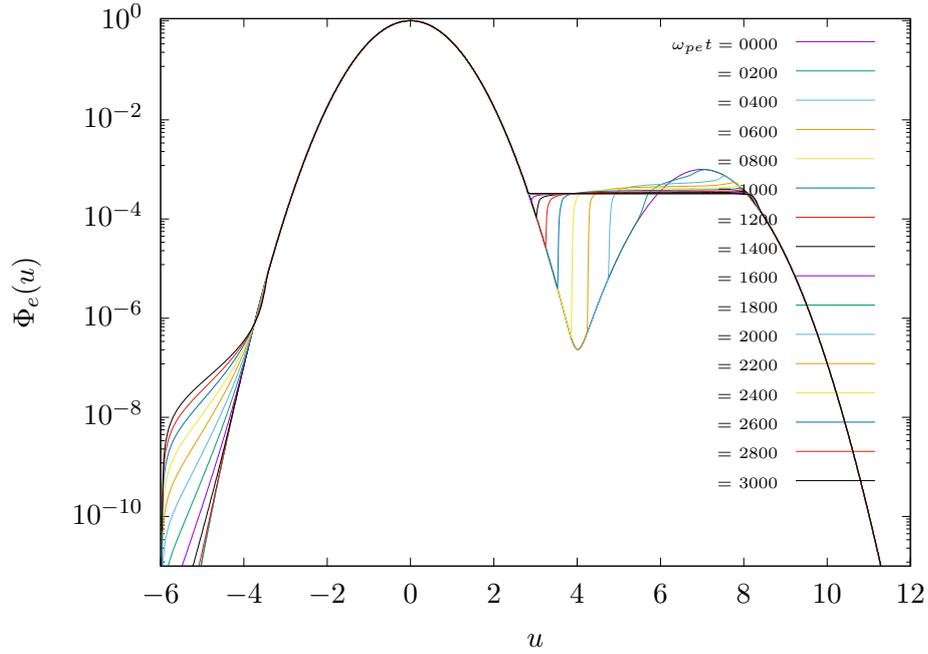


Figura 4.6: Evolução temporal da função distribuição de elétrons ( $v_b/v_{Te} = 7$  e  $n_b/n_c = 10^{-3}$ ).

linear (no lado das partículas com velocidades positivas, as quais entram em ressonância linear com as ondas) e da cauda supertérmica, no lado das partículas com velocidades negativas. Esta cauda supertérmica é gerada pelo termo de decaimento na equação cinética do modo  $B$ .

Analogamente, a análise da evolução temporal da intensidade espectral  $\mathcal{E}_q^B$  das ondas do modo  $B$  como função do número de onda  $q$  é apresentada na figura 4.7. Neste caso, observa-se excitação dos modos *forward* e *backward*. São justamente estas ondas do modo  $B$  com propagação *backward* ( $q < 0$ ) que interagem com os elétrons com velocidade negativa ocasionando o fenômeno de formação da cauda supertérmica na distribuição eletrônica. Além disso, ao comparar as

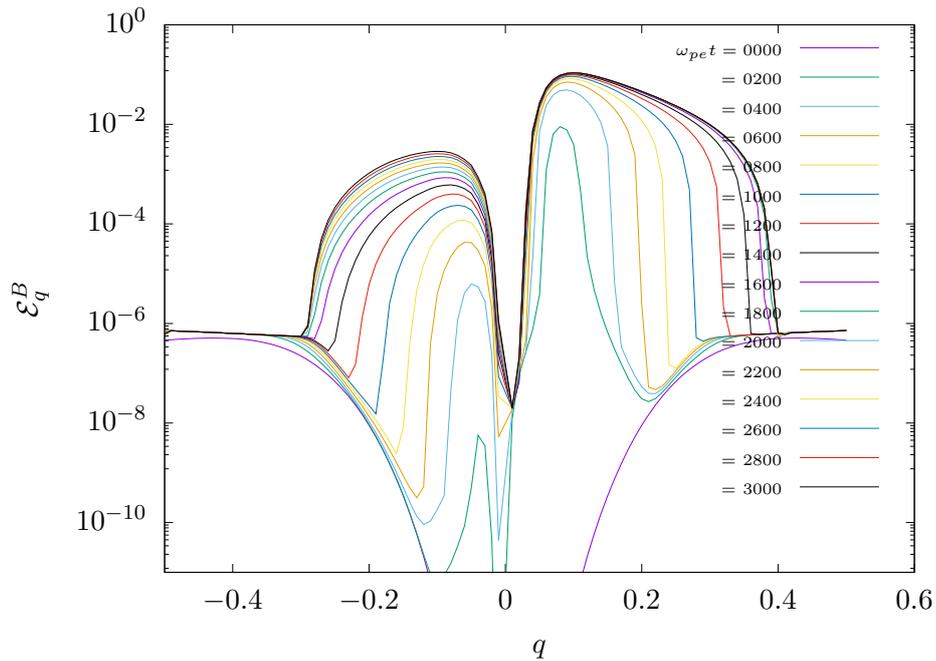


Figura 4.7: Evolução temporal do espectro do modo  $B$  ( $v_b/v_{Te} = 7$  e  $n_b/n_c = 10^{-3}$ ).

figuras 4.4 e 4.7 podemos corroborar a afirmação feita de Cairns (1989) de que a frequência de máximo crescimento frequentemente fica ou significativamente abaixo ou um pouco acima da frequência de plasma  $\omega_{pe}$ . Vemos que a região de maior crescimento das ondas do modo  $B$  ocorre no intervalo  $-0.2 \lesssim q \lesssim 0.2$ .

A seguir, vamos analisar como o sistema se comporta com a variação da velocidade do feixe. Com esse intuito são sobrepostas as curvas no instante final da simulação para três valores distintos de velocidade.

Na função distribuição é observada a diminuição do aquecimento da cauda supertérmica com o aumento da velocidade, sendo a curva que representa o feixe de menor energia aquela que apresenta um maior aquecimento da cauda, como pode ser visto na figura 4.8. Este fenômeno se deve ao termo de interação não linear entre as ondas da equação cinética das intensidades espectrais, descrito pela equação (4.6).

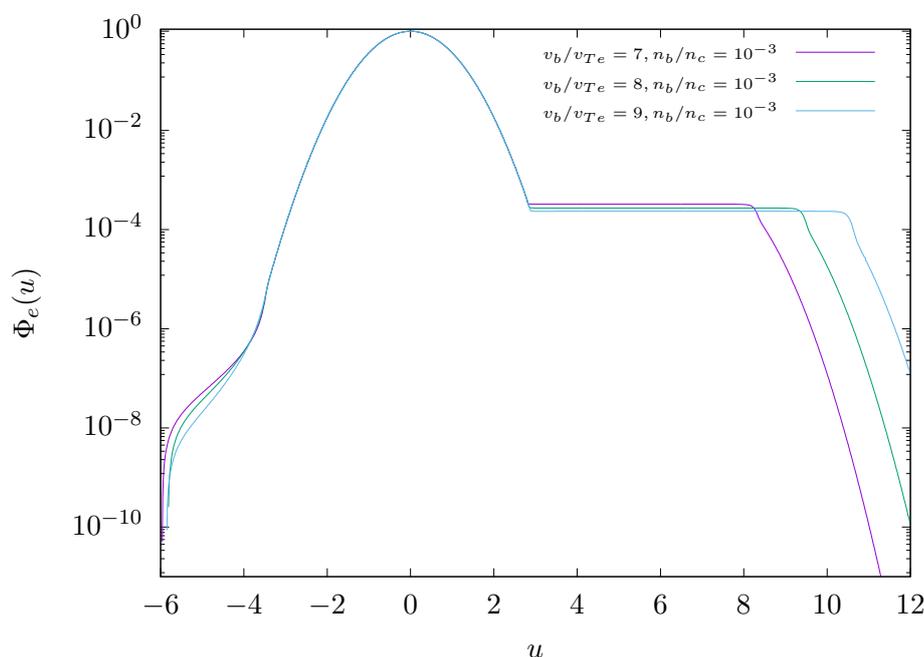


Figura 4.8: Função distribuição eletrônica para diferentes velocidades do feixe ( $n_b/n_c = 10^{-3}$  e  $\omega_{pe}t = 3000$ ).

No gráfico da intensidade espectral ilustrado na figura 4.9, por sua vez, ocorre que na medida em que a velocidade aumenta, a largura do espectro excitado também aumenta e o pico do espectro se torna maior e mais próximo de  $q = 0$ . A relação de dispersão na figura 4.4 indica, portanto, que o pico do espectro se dá em frequências menores que a frequência de plasma  $\omega_{pe}$ .

Para demonstrar o nível de saturação da energia das ondas (normalizado pela energia total inicial das partículas) foi gerado um gráfico da energia associada ao modo  $B$  em função do tempo normalizado (figura 4.10). Neste, vemos que a saturação ocorre em níveis mais altos e instantes de tempo posteriores na medida em que a velocidade do feixe aumenta. Vemos também que, confirmando a condição da Teoria de Turbulência Fraca, a energia das ondas representa uma parcela pequena da energia total do sistema. Isto é, como critério de aplicabilidade da teoria requer-se que a razão entre a energia total das ondas e a energia total das partículas seja muito menor que a unidade.

Dando continuidade à exposição dos resultados, é fixada a velocidade do feixe e variada a densidade do feixe de  $10^{-3}$  a  $10^{-1}$ .

Na função de distribuição velocidades, na figura 4.11, observamos um comportamento distinto daquele observado com a variação da velocidade. Na medida em que aumentamos a intensidade do feixe, isto é, que a densidade aumenta, aumenta também o aquecimento da cauda da

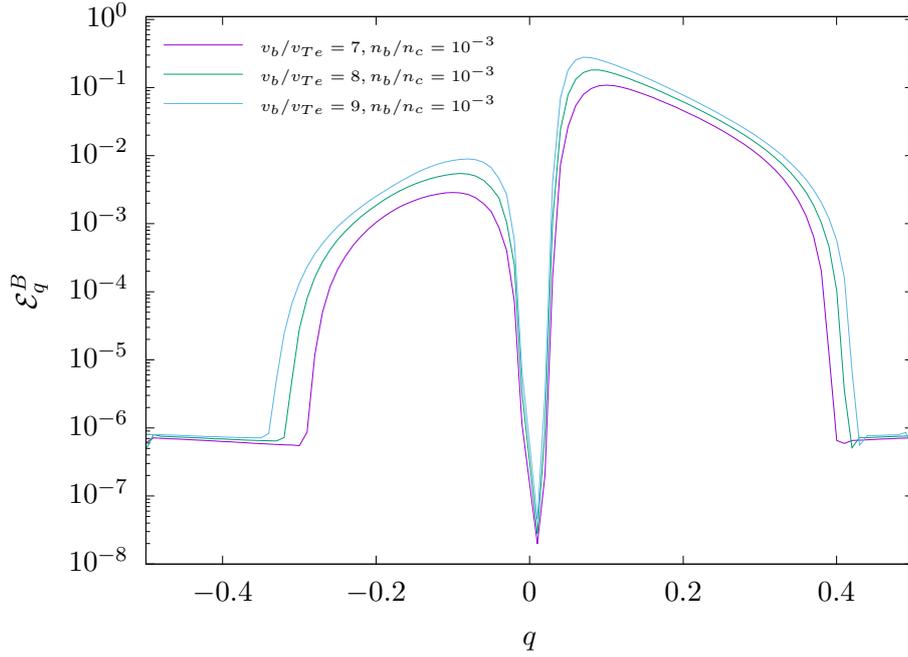


Figura 4.9: Espectro das ondas do modo  $B$  para diferentes velocidades do feixe ( $n_b/n_c = 10^{-3}$  e  $\omega_{pe}t = 3000$ ).

distribuição. Observa-se também, naturalmente, que o *plateau* decorrente da interação linear é formado em valores maiores de  $\Phi_e$  e se estende por um intervalo maior de  $u$ .

Voltando a atenção ao espectro do modo  $B$  e à energia total associada às ondas que o compõem, observamos comportamento análogo ao caso da variação da velocidade. Entretanto, vemos que feixes muito intensos (densidade relativa  $n_b/n_c = 10^{-1}$  na figura 4.12) apresentam valores de energia maiores que a unidade. Neste caso, é assumido que a aproximação perturbativa

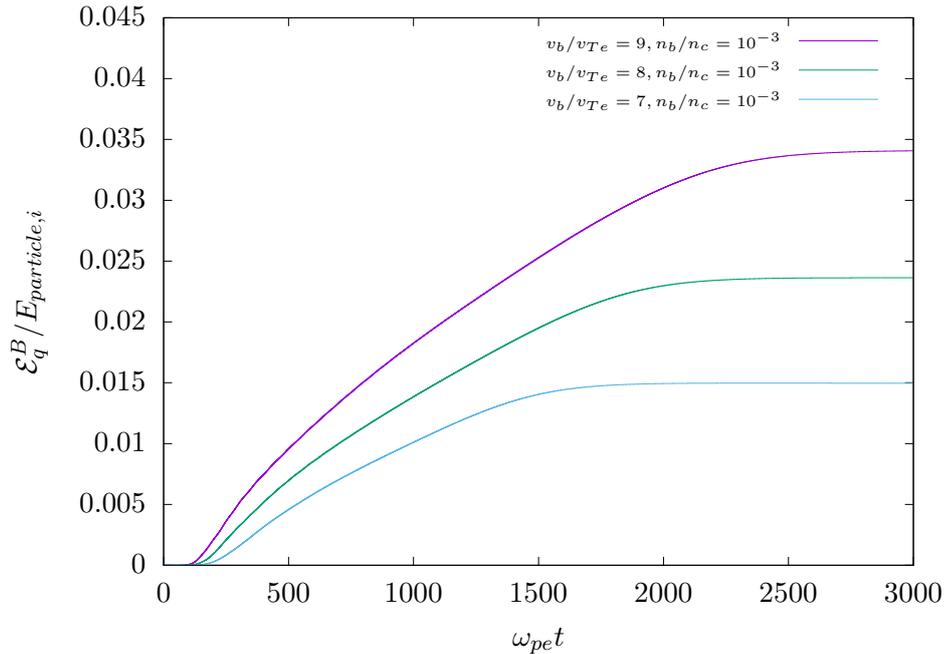


Figura 4.10: Evolução temporal da energia total das ondas do modo  $B$  para diferentes velocidades do feixe e  $n_b/n_c = 10^{-3}$ .

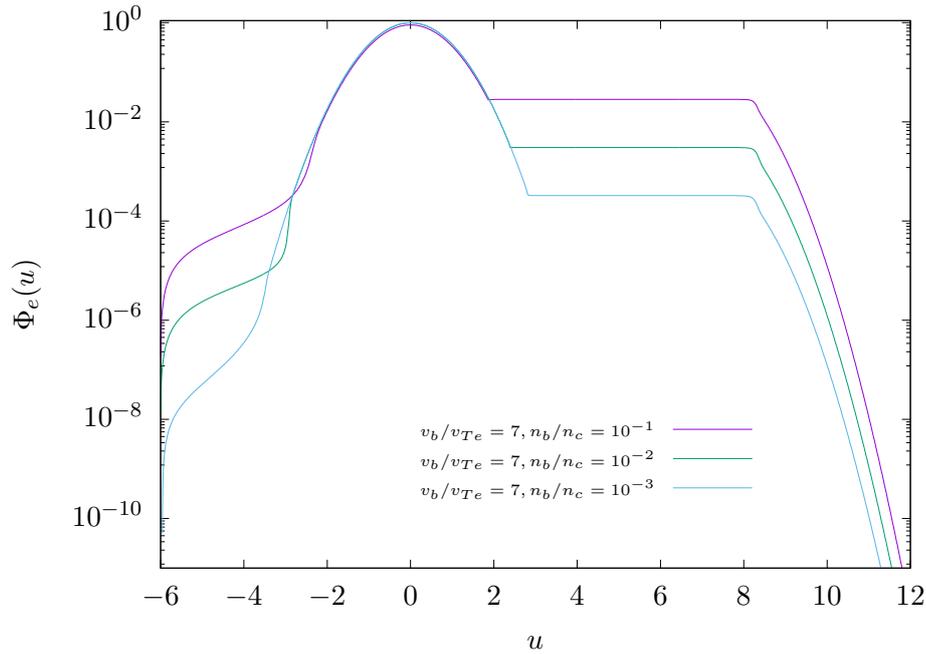


Figura 4.11: Função distribuição eletrônica para diferentes densidades do feixe ( $v_b/v_{Te} = 7$  e  $\omega_{pe}t = 3000$ ).

perde validade pelo fato de representar uma situação na qual a energia total das ondas é muito grande para assumirmos a validade da Teoria de Turbulência Fraca.

Enquanto que com o aumento da densidade o espectro se alarga e o pico se torna mais expressivo em valores de  $q$  mais próximos de zero, também ocorre que a curva correspondente à densidade relativa  $10^{-1}$  apresenta valores maiores que a unidade, isto é, uma inconsistência com relação à normalização adotada. Ainda assim, em conformidade com o comportamento

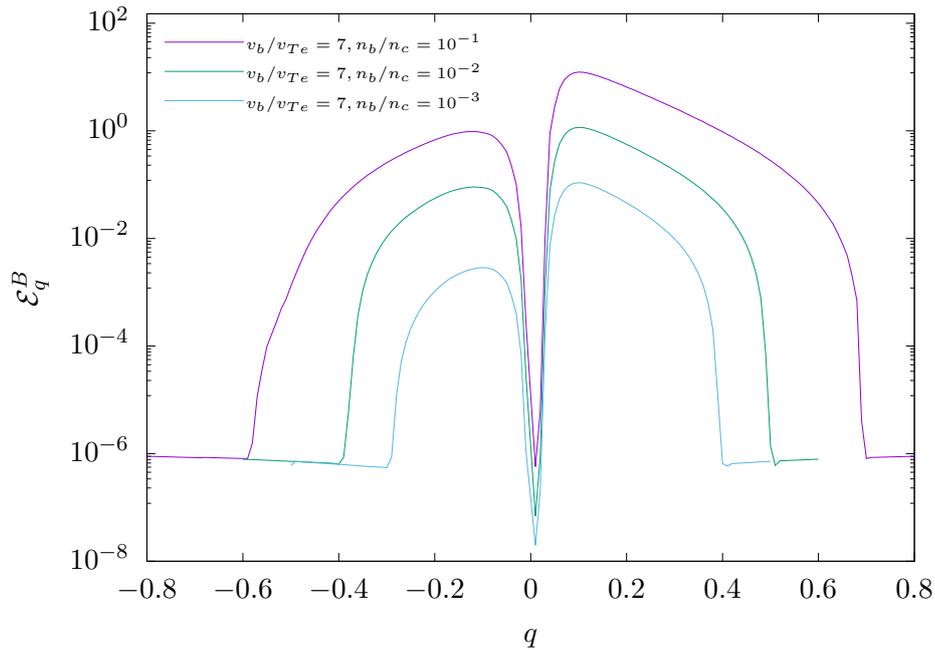


Figura 4.12: Espectro das ondas do modo  $B$  para diferentes densidades do feixe ( $v_b/v_{Te} = 7$  e  $\omega_{pe}t = 3000$ ).

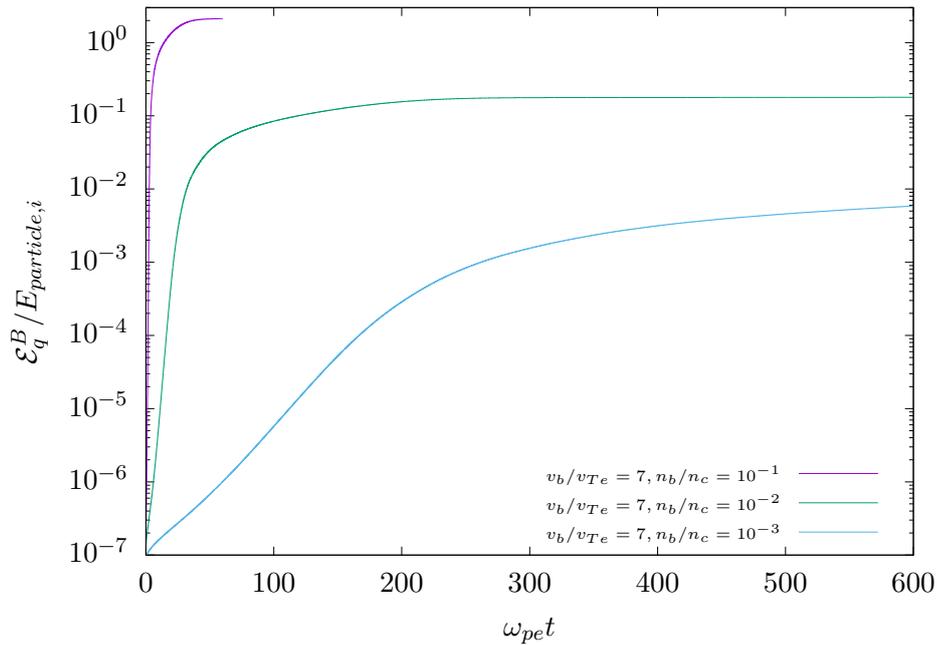


Figura 4.13: Evolução temporal da energia total das ondas do modo  $B$  para diferentes densidades do feixe e  $v_b/v_{Te} = 7$ .

descrito por Cairns (1989), a tendência de diminuição da frequência de máximo crescimento com o aumento da densidade do feixe é observado.

Da mesma forma, o gráfico da energia das ondas em função do tempo, figura 4.13, apresenta uma saturação em níveis mais altos e se dá em uma escala mais rápida na medida em que a densidade aumenta. Entretanto, assim como na figura 4.12, vemos que a teoria perde a validade no caso de alta densidade uma vez que a energia das ondas rapidamente assume valores maiores que a unidade.

Fica claro, conseqüentemente, que em algum valor intermediário entre as densidades relativas  $10^{-2}$  e  $10^{-1}$ , dados os demais parâmetros adotados, a intensidade do feixe é grande o suficiente para que o sistema não possa mais ser descrito segundo os pressupostos da Teoria de Turbulência Fraca.

## Capítulo 5

# Considerações Finais

O sistema plasma-feixe constitui um campo muito importante dentro da área da física de plasmas e tem se mostrado complexo e rico em fenômenos de interesse teórico, experimental e tecnológico. Nesta dissertação foi estudado o sistema plasma-feixe a partir da Teoria de Turbulência Fraca segundo o formalismo de Klimontovich. Este formalismo permite a inclusão dos chamados efeitos de partícula única, ou efeitos discretos, mais especificamente a inclusão dos fenômenos oriundos das flutuações em torno das médias de ensemble e da emissão quase térmica.

A Teoria de Turbulência Fraca usual, largamente explorada nas últimas décadas, descreve a dinâmica das oscilações eletrostáticas em um plasma assumindo que as ondas presentes no sistema ocorrem ao longo dos modos normais eletrostáticos de Langmuir e íon-acústico. Contudo, trabalhos recentes mostram que à medida que os campos associados aos modos normais trocam energia com as partículas que compõem o plasma através de interações lineares e não lineares, a presença do feixe de partículas carregadas no plasma, e a subsequente evolução dinâmica do sistema, ocasionam a geração do chamado modo feixe. Este modo apresenta modificações expressivas na sua relação de dispersão que dependem fortemente das características do feixe, velocidade e densidade, por exemplo. As formas particulares do modo feixe modificado, bem como o caráter reativo ou ressonante das instabilidades que atuam sobre o mesmo, foram estudadas por Cairns (1989) e continuam sendo tema de grande interesse para as linhas de pesquisa em instabilidades em plasmas. Ainda sobre as linhas de pesquisa voltadas ao estudo de instabilidades, é interessante citar a observação do modo feixe nas simulações apresentadas em Thurgood and Tsiklauri (2015) e em Simões Júnior et al. (2010), mais especificamente no diagrama apresentado na figura 5 deste último artigo.

De particular interesse para esta dissertação pode ser citado o trabalho de Pascoal (2014), o qual propõe o modelo de modo único descrito na seção 4.2. Este modelo supõe a existência de um único modo, o modo feixe modificado  $B$  descrito por (4.3), que se propaga em ambos os sentidos do sistema unidimensional interagindo consigo mesmo e com as partículas segundo o formalismo descrito nos capítulos 3 e 4.

A dinâmica das ondas e das partículas que compõem o sistema plasma-feixe foi descrita a partir do modelo de modo único tomando a emissão quase térmica (3.61) como nível inicial para o espectro das ondas do modo  $B$ . A inclusão do parâmetro “ $a$ ” na expressão da relação de dispersão do modo único, por sua vez, permitiu estender a região ressonante na grade numérica de modo a incluir todas as partículas que compõem o feixe.

De maneira geral, observa-se que as soluções obtidas segundo o modelo do modo único apresentam comportamento bastante semelhante quando comparamos a dinâmica envolvendo feixes de baixa e de alta intensidade. Isto é, a formação do *plateau* e da cauda supertérmica na distribuição das partículas, a excitação das ondas via ressonância com as partículas, das ondas tanto do modo *forward* quanto *backward*. Exceção feita ao caso em que a intensidade do mesmo é grande o suficiente para não estar mais no regime de aplicabilidade da Teoria de Turbulência

Fraca.

Os resultados obtidos nesta Dissertação suscitam diversos estudos futuros promissores. A relação entre os parâmetros do feixe e os demais parâmetros que caracterizam o sistema será objeto de um estudo futuro, em especial no que concerne o limite de aplicabilidade da teoria. Posteriormente também será considerada a possibilidade de reajuste dos parâmetros  $a$  e  $b$ , que integram a expressão da relação de dispersão (4.16), a cada troca de parâmetros do feixe (velocidade e densidade).

Outro desenvolvimento futuro importante será a inclusão dos efeitos de todos os modos normais eletrostáticos presentes no sistema, ao invés de apenas o modo único. Assim, pretendemos determinar qual é a sua importância na evolução dinâmica do plasma. Com esta finalidade vamos trabalhar com as soluções numéricas da equação de dispersão, sem realizar modelagem dos modos, para incluir os efeitos de todos os possíveis modos normais bem como determinar as condições de ressonância linear e não linear.

Além disso, a implementação de um código numérico para a solução do sistema plasma-feixe bidimensional permitirá a inclusão do modo eletromagnético, possibilitando assim a análise completa da dinâmica do sistema plasma-feixe não magnetizado e a comparação direta com as simulações computacionais e as observações espaciais relatadas neste trabalho.

# Referências Bibliográficas

- Ablowitz, M. J. and Fokas, A. S. (2003). *Complex Variables: Introduction and Applications*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2 edition.
- Abramowitz, M. and Stegun, I. A., editors (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. U.S. Government Printing Office, Washington, DC, USA, tenth printing edition.
- Akbari, H., LaBelle, J. W., and Newman, D. L. (2021). Langmuir turbulence in the auroral ionosphere: Origins and effects. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, 7:617792.
- Akhiezer, A. I., Akhiezer, I., Polovin, R., Sitenko, A., and Stepanov, K. (1975). Plasma electrodynamics. volume 1-linear theory. volume 2-non-linear theory and fluctuations. *OISNP*, 1.
- Bittencourt, J. A. (2004). *Fundamentals of Plasma Physics*. Springer-Verlag, New York, third edition. 678 pp.
- Bohm, D. and Gross, E. P. (1949). Theory of plasma oscillations. a. origin of medium-like behavior. *Physical Review*, 75:1851–1864.
- Boyd, J. P. (2014). *Solving transcendental equations: the Chebyshev polynomial proxy and other numerical rootfinders, perturbation series, and oracles*. SIAM.
- Cairns, I. H. (1989). Electrostatic wave generation above and below the plasma frequency by electron beams. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, 1(1):204–213.
- Cairns, I. H. and Fung, S. F. (1988). Growth of electron plasma waves above and below  $f_p$  in the electron foreshock. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 93(A7):7307–7317.
- Chen, F. F. (2018). *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. Springer, New York, third edition. 490 + xii pp.
- Chen, Y., Zhang, Z., Ni, S., Li, C., Ning, H., and Kong, X. (2022). Plasma emission induced by electron beams in weakly magnetized plasmas. *The Astrophysical Journal Letters*, 924(2):L34.
- Ferguson, D. (1993). Interactions between spacecraft and their environments. In *31st Aerospace Sciences Meeting*, page 705.
- Fried, B. and Conte, S. (1961). *The Plasma Dispersion Function: The Hilbert Transform of the Gaussian*. Academic Press.
- Guedes, J. R. A. (1995). *Dinâmica não linear de ondas de Langmuir e eletromagnéticas em plasmas espaciais*. Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Geofísica Espacial, São José dos Campos – SP. Orientação: A. C. L.-Chian & M. V. Alves.
- Gurnett, D. and Bhattacharjee, A. (2005). *Introduction to plasma physics: with space and laboratory applications*. Cambridge, Cambridge. 453 + x pp.

- Hammett, G. W. and Perkins, F. W. (1990). Fluid moment models for Landau damping with application to the ion-temperature-gradient instability. *Physical Review Letters*, 64(25):3019–3022.
- Huang, K. (1987). *Statistical Mechanics*. Wiley, New York, second edition.
- Hunana, P., Zank, G. P., Laurenza, M., Tenerani, A., Webb, G. M., Goldstein, M. L., Velli, M., and Adhikari, L. (2018). New Closures for More Precise Modeling of Landau Damping in the Fluid Framework. *Physical Review Letters*, 121(13):135101.
- Jackson, J. D. (1999). *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York, third edition. 808 + xxi pp.
- Klimontovich, Y. L. (1967). *The Statistical Theory of Non-Equilibrium Processes in a Plasma*. Number 9 in International Series of Monographs in Natural Philosophy. Pergamon Press, Oxford. 284 pp.
- Krall, N. A. and Trivelpiece, A. W. (1986). *Principles of Plasma Physics*. San Francisco Press, San Francisco. 687 pp.
- Landau, L. D. (1946). On the vibrations of the electronic plasma. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 10:25.
- Lee, S.-Y., Ziebell, L. F., Yoon, P. H., Gaelzer, R., and Lee, E. S. (2019). Particle-in-cell and weak turbulence simulations of plasma emission. *The Astrophysical Journal*, 871(1):74.
- Livadiotis, G. and McComas, D. J. (2013). Understanding Kappa Distributions: A Toolbox for Space Science and Astrophysics. *Space Science Reviews*, 175(1-4):183–214.
- Marsch, E. (2006). Kinetic Physics of the Solar Corona and Solar Wind. *Living Reviews in Solar Physics*, 3(1):1.
- Melrose, D. B. (1986). *Instabilities in Space and Laboratory Plasmas*. Cambridge University Press.
- Melrose, D. B. (2017). Coherent emission mechanisms in astrophysical plasmas. *Reviews of Modern Plasma Physics*, 1(1):5.
- Ni, S., Chen, Y., Li, C., Sun, J., Ning, H., and Zhang, Z. (2021). An alternative form of the fundamental plasma emission through the coalescence of Z-mode waves with whistlers. *Physics of Plasmas*, 28(4):040701.
- Ni, S., Chen, Y., Li, C., Zhang, Z., Ning, H., Kong, X., Wang, B., and Hosseinpour, M. (2020). Plasma Emission Induced by Electron Cyclotron Maser Instability in Solar Plasmas with a Large Ratio of Plasma Frequency to Gyrofrequency. , 891(1):L25.
- O’Neil, T. and Malmberg, J. (1968). Transition of the dispersion roots from beam-type to landau-type solutions. *The Physics of Fluids*, 11(8):1754–1760.
- Parks, G. B. (2004). *Physics of Space Plasmas: An Introduction*. Westview Press, Boulder, second edition. 597 + x pp.
- Pascoal, K. A. (2014). A teoria da turbulência fraca para oscilações eletrostáticas em plasmas com feixes de alta intensidade. Master’s thesis, UFPel - Programa de Pós Graduação em Física, Pelotas - RS, February 2014. 109 pp. Orientação: J. Pavan & R. Gaelzer. Disponível em: [https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id\\_trabalho=197125](https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=197125). Acesso em: 30 de julho de 2023.

- Penrose, O. (1960). Electrostatic instabilities of a uniform non-maxwellian plasma. *The Physics of Fluids*, 3(2):258–265.
- Porkolab, M. and Chang, R. (1978). Nonlinear wave effects in laboratory plasmas: A comparison between theory and experiment. *Reviews of Modern Physics*, 50(4):745.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P. (1996). *Numerical recipes in Fortran 90 the art of parallel scientific computing*. Cambridge university press.
- Reichl, L. E. (2016). *A Modern Course in Statistical Physics*. Wiley, Weinheim. 467 + xiv pp.
- Riley, K. F., Hobson, M. P., and Bence, S. J. (1999). *Mathematical methods for physics and engineering*.
- Robinson, P. A. (1997). Nonlinear wave collapse and strong turbulence. *Reviews of Modern Physics*, 69:507–574.
- Schlickeiser, R. and Yoon, P. (2014). Quasilinear theory of general electromagnetic fluctuations in unmagnetized plasmas. *Physics of Plasmas*, 21(9):092102.
- Scime, E. E., Phillips, J. L., and Bame, S. J. (1994). Effects of spacecraft potential on three-dimensional electron measurements in the solar wind. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 99(A8):14769–14776.
- Simões Júnior, F. J. R., Alves, M. V., and Gaelzer, R. (2010). One-dimensional electromagnetic simulation of multiple electron beams propagating in space plasmas. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 115(A6):A06105.
- Sitenko, A. G. (1982). *Fluctuations & Non-Linear Wave Interactions in Plasmas*. Number 107 in International Series in Natural Philosophy. Pergamon Press, Oxford. 278 pp.
- Soucek, J., Píša, D., and Santolík, O. (2019). Direct measurement of low-energy electron foreshock beams. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 124(4):2380–2392.
- Sun, H., Chen, J., Kaganovich, I. D., Khrabrov, A., and Sydorenko, D. (2022). Physical regimes of electrostatic wave-wave nonlinear interactions generated by an electron beam propagating in a background plasma. *Physical Review E*, 106:035203.
- Thornton, S. T. and Marion, J. B. (2004). *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Brooks/Cole - Cengage Learning, Belmont, fifth edition edition. 656 + xvi pp.
- Thornton, S. T. and Marion, J. B. (2021). *Classical dynamics of particles and systems*. Cengage Learning.
- Thurgood, J. and Tsiklauri, D. (2015). Self-consistent particle-in-cell simulations of fundamental and harmonic plasma radio emission mechanisms. *Astronomy & Astrophysics*, 584:A83.
- Tonks, L. and Langmuir, I. (1929). Note on "oscillations in ionized gases". *Physical Review*, 33(6):990.
- Vlasov, A. A. (1938). *The oscillation properties of an electron gas*. US Atomic Energy Commission.
- Weibel, E. S. (1959). Spontaneously growing transverse waves in a plasma due to an anisotropic velocity distribution. *Physical Review Letters*, 2:83–84.
- Yoon, P. H. (2005). Effects of spontaneous fluctuations on the generalized weak turbulence theory. *Physics of Plasmas*, 12(4):042306.

- Yoon, P. H. (2007). Spontaneous thermal magnetic field fluctuation. *Physics of Plasmas*, 14(6):064504.
- Yoon, P. H. (2010). Weak turbulence theory for reactive instability. *Physics of Plasmas*, 17(11):112316.
- Yoon, P. H. (2019). *Classical Kinetic Theory of Weakly Turbulent Nonlinear Plasma Processes*. Cambridge University Press, Cambridge. 352 + xii pp.
- Zhang, Z., Chen, Y., Ni, S., Li, C., Ning, H., Li, Y., and Kong, X. (2022). Verification of the standard theory of plasma emission with particle-in-cell simulations. *The Astrophysical Journal*, 939(2):63.
- Zhou, X., Muñoz, P. A., Büchner, J., and Liu, S. (2020). Wave excitation by energetic ring-distributed electron beams in the solar corona. *The Astrophysical Journal*, 891(1):92.
- Ziebell, L., Gaelzer, R., Pavan, J., and Yoon, P. (2008a). Two-dimensional nonlinear dynamics of beam-plasma instability. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 50(8):085011.
- Ziebell, L., Yoon, P., Gaelzer, R., and Pavan, J. (2012). Langmuir condensation by spontaneous scattering off electrons in two dimensions. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 54(5):055012.
- Ziebell, L. F., Gaelzer, R., and Yoon, P. H. (2001). Nonlinear development of weak beam-plasma instability. *Physics of Plasmas*, 8(9):3982–3995.
- Ziebell, L. F., Gaelzer, R., and Yoon, P. H. (2008b). Dynamics of langmuir wave decay in two dimensions. *Physics of Plasmas*, 15(3).
- Ziebell, L. F., Yoon, P. H., Petruzzellis, L. T., Gaelzer, R., and Pavan, J. (2015). Plasma emission by nonlinear electromagnetic processes. *The Astrophysical Journal*, 806(2):237.