XXXV SALÃO de INICIAÇÃO CIENTÍFICA

6 a 10 de novembro

Evento	Salão UFRGS 2023: SIC - XXXV SALÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UFRGS
Ano	2023
Local	Campus Centro - UFRGS
Título	Teorema de Picard-Lindelöf
Autor	JOAO PEDRO DA ROSA ROTH
Orientador	WANDERLEY NUNES DO NASCIMENTO

Na teoria das equações diferenciais, aborda-se a existência e unicidade de soluções para problemas com uma condição inicial, sem necessariamente mostrá-las explicitamente. Neste trabalho, apresenta-se um estudo da demonstração do Teorema de Picard-Lindelöf, que providencia condições para que a solução de um problema de valor inicial (PVI) de uma equação diferencial ordinária exista e seja única. O teorema diz que se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função contínua definida em um aberto Ω do $\mathbb{R}^2$ com $\partial_y f : \Omega \to \mathbb{R}$ também contínua, então, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe um intervalo aberto I contendo x_0 e uma única função diferenciável $\phi : I \to \mathbb{R}$ com $(x, \phi(x)) \in \Omega$ para todo $x \in I$, que é solução do PVI

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Para demonstrar o teorema, verifica-se que se y é solução do PVI, então também é solução da equação integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$$

e vice versa. Isso é provado pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Em seguida, cria-se um retângulo compacto $B \in \Omega$ tal que $(x_0, y_0) \in B$. Posteriormente, forma-se um espaço métrico $\mathcal{C}$ completo composto pelas funções contínuas g que passem pelo ponto (x_0, y_0) e que estejam contidas em B. Define-se $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ como a aplicação tal que, para cada $y \in \mathcal{C}$,

$$y \mapsto \Phi(y) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$$

Sob algumas restrições, é verificável que Φ está bem definida, isto é, $\Phi(y) \in \mathcal{C}$. Portanto, as soluções do PVI são pontos fixos de Φ. Para encontrá-los, usa-se o Teorema do Ponto Fixo de Banach: se $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ for uma contração, então existe um único $y \in \mathcal{C}$ tal que $y = \Phi(y)$. Confirmando que Φ é uma contração, o teorema está demonstrado. O Teorema de Picard-Lindelöf é fundamental para entendimento e formulação precisa de previsões de sistemas descritos por equações diferenciais. A pesquisa foi desenvolvida através do estudo das bibliografias “Equações Diferenciais Aplicadas (Figueiredo, D. G.; Neves, A. F.)”; “Análise Real (Lima, E. L.)”; “Espaços Métricos (Lima, E. L.)” e seminários regulares com o orientador, em que se debatiam temas para o desdobramento do trabalho.