UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESPECIALIZAÇÃO EM MERCADO DE CAPITAIS

Aluno: Jeverson Peruzzato
Orientador: Prof. Dr. Marcelo Savino Portugal

O MODELO DE FATORES DE DIEBOLD - LI APLICAÇÃO AO CASO BRASILEIRO

Porto Alegre
2009

Jeverson Peruzzato

O MODELO DE FATORES DE DIEBOLD - LI
APLICAÇÃO AO CASO BRASILEIRO

Trabalho de conclusão de curso de Especialização apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Administração da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista em Mercado de Capitais.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Savino Portugal

Porto Alegre

2009

Jeverson Peruzzato

O MODELO DE FATORES DE DIEBOLD - LI
APLICAÇÃO AO CASO BRASILEIRO

Material para consulta na homepage da Biblioteca da Escola de Administração da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, disponível em http://biblioteca.ea.ufrgs.br//index.asp.

Conceito final:
Aprovado em .... de .... de ....

BANCA EXAMINADORA

____

Prof.. - UFRGS

____

Prof.. - UFRGS

____

Prof... - UFRGS

____

Orientador – Prof. Dr. Marcelo Savino Portugal - UFRGS

Dedico este trabalho a Cristine Abreu Cecílio, pelo seu caráter, força e perseverança. Sua maneira de viver é um exemplo e me inspira, alimentando o meu amor e a minha mais profunda e incondicional admiração.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais pelo esforço que sempre fizeram para que nunca me faltasse acesso ao bem mais valioso, e intransferível, que uma pessoa pode possuir: o conhecimento.

Agradeço ao amigo João Fróis Caldeira pelo apoio e pelas horas de rica discussão a respeito do tema deste trabalho.

Agradeço ao meu orientador, Marcelo Savino Portugal, pela confiança e apoio dispensados para o desenvolvimento deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho aborda um assunto de grande relevância, principalmente para aqueles que trabalham na gestão de investimentos: a previsão da estrutura a termo da taxa de juros. A partir do estudo do modelo de fatores para previsão da estrutura a termo da taxa de juros nos Estados Unidos, realizado por Francis Diebold e Canlin Li, testamos através de métodos estatísticos a sua aplicabilidade para o caso brasileiro. Os resultados obtidos foram animadores, pois o modelo de fatores mostrou-se apto a reproduzir todas as formas possíveis da curva de juros, além de obter bons resultados de ajuste e previsão.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A produção científica para o desenvolvimento de teorias e modelos que buscam entender e descrever o comportamento da estrutura a termo da taxa de juros é bastante rica. O tema, além de instigar e desafiar os pesquisadores, motiva a concentração de esforços de economistas e gestores de recursos financeiros. O desafio de compreender e construir um arcabouço teórico que forneça condições para previsão da curva de juros, aliado a grande aplicabilidade prática dos modelos resultantes para economistas e gestores de recursos, já motivaram inúmeros trabalho, assim como motivaram este.

Fora do Brasil estes estudos desenvolvem-se há mais tempo. Os fundamentos econômicos, estruturados sobre políticas de condução de política monetária e fiscal ortodoxas, e que geram um cenário de estabilidade econômica nestes países, permitem uma melhor análise das variáveis econômicas e dos componentes da curva de juros. No Brasil, a medida que a estabilidade econômica é conquistada, criam-se condições para o estudo fundamentado da estrutura a termo da taxa de juros, pois é permitido aos agentes precificar os títulos sem interferência de choques e negociá-los com prazos cada vez maiores para seu vencimento. Essa condição qualifica, principalmente, a base de dados necessária para aplicação das ferramentas estatísticas. Se observarmos os dados a respeito dos negócios realizados no mercado financeiro na década de 90, veremos a inexistência de negócios envolvendo títulos do governo com maturidades maiores que dois anos. No entanto, é possível observar que a o número de negócios envolvendo esses títulos aumentou. Há cinco anos atrás, a maturidade dos títulos com aceitável liquidez não superavam dois anos. Hoje, observamos títulos com maturidades maiores que cinco anos com elevados níveis de negociação.

Modelar o comportamento da estrutura a termo da taxa de juros adquire extrema relevância, quando na administração de recursos componentes do mercado financeiro. Prever as taxas de juros futuras é de suma importância para a tomada de decisão de investimento, pois permite comparar as possibilidades de investimento na medida em que reflete as expectativas futuras para as taxas de juros.

Algumas teorias, onde destacam-se a teoria da não arbitragem e a teoria do equilíbrio, oferecem arcabouços teóricos para explicar a formação da estrutura a termo da taxa de juros. Contudo, o modelo de fatores desenvolvido por Nelson e Siegal, e posteriormente reinterpretado por Diebold e Li, vem sendo bastante estudado e amplamente aplicado no mercado financeiro fora do Brasil. Por isso é o foco deste trabalho.

Esse modelo parcimonioso, a partir da estimação de três fatores (nível, inclinação e curvatura) tenta modelar o comportamento da curva de juros. A partir do trabalho realizado por Diebold e Li para modelar a curva de juros norte-americana, aplicamos essa metodologia para o caso brasileiro. Foram realizadas adaptações, principalmente, no que se refere à determinação de uma base de dados, visto que o nível de negociação de títulos no mercado financeiro brasileiro ainda é incipiente se comparado ao mercado norte-americano.

Este trabalho inicia-se com uma revisão das diversas teorias sobre formação das taxas de juros e da estrutura a termo da taxa de juros. Depois é apresentado o modelo de fatores e a interpretação de Diebold e Li para o modelo. Por último apresentamos os dados utilizados e aplicamos o modelo para o caso brasileiro.

O modelo mostrou-se eficiente, pois foi capaz de prever a curva de juros assumindo todas as formas possíveis que esta pode assumir ao longo do tempo. Além disso, o erro quadrático médio resultante da previsão foi também satisfatório. É claro que existem possibilidades para o aperfeiçoamento do modelo e conseqüente obtenção de melhores resultados. Estas possíveis melhorias são apresentadas na conclusão do trabalho, pois suas adoções implicam na continuidade do desenvolvimento do que será mostrado aqui e apresentam um potencial bastante grande para melhoria dos resultados apresentados.

2. REVISÃO TEÓRICA

2.1. Formação da Taxa de Juros

Para que possamos replicar o trabalho de modelagem desenvolvido por Diebold – Li para o caso brasileiro é necessário entender os mecanismos que atuam na formação da taxa de juros de mercado. A formação da taxa de juros de curto prazo é importante, pois baliza os agentes em seu ponto de partida para avaliação da sua trajetória futura.

Sabemos que em economias ortodoxas, onde o Banco Central é o responsável pela condução da política monetária, como no caso brasileiro, a taxa básica indicada pelo Banco Central é referência para construção da estrutura a termo da taxa de juros. Como conseqüência, surgem as taxas de empréstimos para diversos prazos, custo de oportunidade para projetos de diferentes maturidades e a remuneração dos ativos negociados no mercado financeiro.

Para melhor entendimento do desenvolvimento do pensamento a respeito da formação da taxa de juros, são apresentadas a seguir as duas principais teorias sobre o assunto.

2.1.1. Teoria dos Fundos Emprestáveis

A Teoria dos Fundos Emprestáveis tem suas raízes no trabalho desenvolvido por Irving Fisher (1896). Esta teoria de formação das taxas de juros carrega a essência da escola econômica neo-clássica do final do século XIX.

Fischer analisou a determinação da taxa de juros em uma economia focando os motivos pelos quais os indivíduos poupam, gastando apenas parte de sua renda, e porque outros tomam recursos emprestados. Segundo Fisher, existem três variáveis que determinam a poupança dos indivíduos:

a) taxa de preferência intertemporal: disposição dos indivíduos de trocar consumo no presente para consumir mais no futuro;

b) renda: em geral, quanto maior a renda maior a propensão a poupar. Essa pode ser considerada uma premissa verdadeira, apesar de indivíduos com mesmo nível de renda possuírem diferentes preferências intertemporais;

c) taxa de juros: quanto maior a taxa de juros, maior a recompensa por poupar, ou seja, maior a capacidade de consumo no futuro.

Outro agente cujo comportamento é determinante para formação da taxa de juros, segundo essa teoria, é a firma. Na lógica da firma os investimentos são direcionados para ativos com maior capacidade para aumentar a produção futura, ou aumentar o lucro. Na medida em que o número de projetos implementados cresce, os ganhos adicionais caem, pois são aceitos projetos com menor retorno. Desta forma, e considerando que a firma assume algum nível de endividamento para implementar seus projetos, o grau de investimento depende do custo do empréstimo ou, em última instância, da taxa de juros.

Portanto, a taxa de juros de equilíbrio é determinada pelas curvas de oferta e demanda e a taxa de juros de longo prazo pela propensão a poupar e pelas inovações tecnológicas que alteram a produtividade marginal do capital. Como esta teoria se baseia nas forças de oferta e demanda, para que a taxa de equilíbrio seja obtida é necessário que todos os agentes do mercado tenham o mesmo nível de informação. A partir deste conceito surgiram os defensores da liberalização financeira como Shaw (1973) e McKinnon (1973).

A teoria dos Fundos Emprestáveis evidencia algumas inconsistências teóricas como ignorar a interferência do governo através do controle da base monetária, alterando as relações entre oferta e demanda, e não considerar a possibilidade dos indivíduos e firmas investirem em moeda.

2.1.2. Teoria da Preferência pela Liquidez

A Teoria da Preferência pela Liquidez foi concebida por John Maynard Keynes como contraponto a teoria clássica, buscando preencher o espaço deixado por esta ao tentar explicar o comportamento dos agentes diante da escolha entre reter moeda ou reter títulos. Segundo Bibow (2005): "*The theory of liquidity preference is probably the single most controversial of the core constituents of General Theory*".

Essa teoria tem como principais premissas:

a) Existência de apenas duas formas de riqueza à disposição dos indivíduos: moeda e títulos;

b) Moeda é ativo geralmente aceito e não propicia ganho derivado de pagamento de juros (taxa de retorno igual a zero);

c) Títulos são dívidas cujo rendimento está atrelado a uma taxa de juros fixada (taxa de retorno igual a taxa de juros).

Ao contrário da Teoria dos Fundos Emprestáveis, a moeda não tem como única função intermediar trocas, mas também reservar valor para atender aos desejos dos indivíduos diante de uma oportunidade especulativa. Assim sendo, essa teoria tenta explicar como os indivíduos tomam a decisão de compor seu portfólio, definindo a proporção moeda/títulos.

Keynes relacionou três motivos que levam os indivíduos a reterem títulos:

a) Transação: indivíduos necessitam de moeda para realizar transações de troca;

b) Precaução: indivíduos retêm moeda para assegurar o pagamento de despesas não previstas no futuro;

c) Especulação: indivíduos retêm moeda para aproveitar momentos especulativos e comprar títulos.

Indivíduos racionais preferem reter moeda pois temem a incerteza quanto ao futuro. O montante de moeda retida representa o nível de incerteza dos indivíduos. Dito isso, e considerando o motivo precaução, não é irracional a decisão dos indivíduos reterem riqueza em forma de moeda se esperarem mudança no nível das taxas de juros. Mudanças nas taxas de juros geram mudanças nos preços dos títulos, pois geram mudanças nos níveis de perda ou ganho dos seus detentores. Quando se espera que a taxa de juros no futuro caia, a demanda por moeda diminui, pois os indivíduos mantêm posições em títulos em antecipação aos ganhos de capital. Quando há perspectiva de aumento na taxa de juros no futuro, os indivíduos demandam moeda, pois tendem a evitar perdas com a posse dos títulos. Os indivíduos sempre estabelecem uma taxa de juros “normal” que corresponde as suas posições (moeda/títulos) hoje e suas previsões para o futuro. Logo, a taxa de juros mudará na medida que estiver afastada dessa taxa de juros “normal”. Em momentos em que a taxa de juros estiver tão baixa, levando os indivíduos a esperarem sua rápida elevação, a demanda por moeda torna-se totalmente elástica. Esse ponto é chamado de “armadilha da liquidez”.

Pode-se observar que Keynes atribuiu fundamental importância a expectativa dos indivíduos e as divergências entre elas. Assumindo a diversidade nas expectativas, assumimos também a elasticidade da demanda por moeda em relação a taxa de juros. Derivando está conclusão, podemos dizer que títulos de longo prazo devem ter taxas de juros superiores à média geométrica das taxas de juros de curto prazo futuras. Essa conclusão é consequência do fato de que os títulos de mais longo prazo são vistos como mais arriscados, pois quanto mais distante o futuro mais difícil sua previsão. Portanto, deve haver um prêmio pela falta de liquidez nas taxas desses títulos para compensar os riscos pela incerteza.

2.2. Estrutura a Termo da Curva de Juros

A estrutura a termo da taxa de juros (ETTJ), ou curva de juros, é definida por Rossi (1996) como “a relação, no tempo t, entre as taxas de retorno R_t^N para distintas taxas de vencimento dos títulos, dadas por N”. Para Varga (2008) “a ETTJ é representada por um conjunto de pontos no espaço taxa de juros *spot versus* prazo. Cada ponto {t,i(t)} corresponde a uma taxa de juros i associada a um prazo t, obtida com base em algum título negociado no mercado”. De maneira mais intuitiva, a ETTJ relaciona as taxas de juros para cada maturidade ao longo do tempo. Consideremos um pagamento certo e único de \$1 em certo tempo t. Se o preço de mercado de \$1 hoje é igual a P_0, então a taxa de juros para t pode ser dada por uma simples fórmula de desconto:

$$P_0 = \frac{\$1}{(1+r_t)^t}$$

Portanto, nessa fórmula r_t é uma simples taxa de desconto para o tempo t. Conhecida a ETTJ, o preço de um título com pagamentos anuais de juros é dado por:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{N} \frac{C}{(1+r_t)^t} + \frac{D}{(1+r_N)^N}$$

Para uma melhor análise é conveniente assumir que títulos com *coupons* realizam pagamentos contínuos ao longo de 0 até N. Evidenciando o pagamento ao longo do tempo t até t + dt por $C_t dt$, então o preço do título é dado por:

$$P_0 = \int_{t=1}^{N} e^{tr_t} C_t dt$$

Um *zero coupon bond* é um título sem pagamentos intermediários de juros, ou seja, o principal e os rendimentos são pagos apenas na data de vencimento do título onde a curva r_t é representada em função de t.

A ETTJ é construída de forma mais usual utilizando-se as taxas de remuneração de *zero coupon bonds* ou a partir dos *spreads* entre as taxas de remuneração de determinado título e a taxa de juros livre de risco. Em seu trabalho, Diebold e Li utilizaram as taxas dos *treasuries* (*zero coupon bonds* emitidos pelo Tesouro norte americano).

A partir das decisões de política monetária, principalmente a que se refere a determinação da taxa básica de juros, os agentes projetam as taxas de juros futuras embutindo suas expectativas quanto a eficácia desta política e os reflexos na conjuntura econômica. Reflete, portanto, as expectativas futuras para as taxas de juros dadas as atuais condições de mercado. A ETTJ fornece informações quanto às taxas de desconto para análise de investimentos e precificação de ativos financeiros, quanto para construção de cenários econômicos que auxiliarão os agentes na tomada de decisão. Existe uma forte relação entre a taxa de juros de curto prazo estabelecida pelo Banco Central e as taxas de juros de mercado, afetando o investimento e consumo. Portanto, é muito importante estabelecer um nível ótimo para a taxa de juros de curto prazo. Além disso, é importante determinar os efeitos da taxa de juros de curto prazo sobre a taxa de juros de longo prazo. Assim, decisões sobre gastos agregados em investimento e consumo são alternativas que estão fortemente associadas com a taxa de juros de longo prazo, enquanto que os custos de oportunidade em reter moeda estão mais bem representados pela taxa de juros de curto prazo. Podemos então concluir que a taxa de juros ótima em relação a demanda agregada não necessariamente é a mesma em relação à demanda por moeda. Mudanças na taxa de juros de curto prazo, que visam alcançar a meta estabelecida pela autoridade monetária, somente afetarão as decisões da demanda agregada se afetarem a ETTJ de longo prazo. A taxa de juros nominal de longo prazo depende das expectativas futuras da taxa nominal de curto prazo, ou seja, das expectativas futuras sobre a condução da política monetária e da percepção dos agentes quanto à credibilidade do condutor dessa política.

Quando uma economia possui livre fluxo de capitais e taxa de câmbio flutuante, incorporando mais uma variável a condução econômica, passa a perder graus de liberdade ao fixar sua própria taxa de juros. Isso acontece devido ao movimento dos fluxos de capitais, ou seja, sob o ponto de vista de um regime de taxa de câmbio fixa, um aumento na saída de capitais pode causar uma contração monetária e conseqüente aumento da taxa de juros e vice-versa. No regime de câmbio flexível, uma queda na taxa de juros de curto prazo pode causar uma fuga de capitais e uma depreciação da taxa de câmbio. Dentro desses dois regimes, há outras alternativas de taxa de câmbio que o Banco Central pode adotar para o controle do fluxo de capitais. Para entender e explicar estas questões, foram desenvolvidas várias teorias que tentam modelar o comportamento da taxa de juros de curto e longo prazo.

A ETTJ é uma função das taxas de retorno e do tempo. A curva de juros é a plotagem desta função no plano cartesiano para diferentes vencimentos. A curva de juros é o mais importante instrumento para mensuração, comparação e estimativa dos ativos de renda fixa, dado que a maioria dos ativos pagarão rendimentos em uma data futura e que as taxas de juros futuros podem ser consideradas, nestes casos, como o custo de oportunidade no prazo equivalente. Portanto, ETTJ relaciona as taxas de juros de curto prazo e longo prazo através de N vencimentos ao longo do tempo (t). Conforme Blanchard (2001):

> **“Títulos de diferentes maturidades têm, cada um, um preço e uma taxa de juros associada denominados rendimento na maturidade, ou simplesmente, maturidade. Ao observar em um dia qualquer os rendimentos de títulos de diferentes maturidades, podemos representar graficamente a relação entre rendimento e maturidade. Essa relação é chamada de curva de rendimento ou estrutura de prazo da taxa de juros”**.

Esta relação é construída utilizando-se instrumentos de renda fixa de mesmo prazo e risco. Os instrumentos mais utilizados são os títulos públicos federias sem cupom, ou seja, que não pagam cupons intermediários. Dessa forma, as taxas esperadas destes ativos até o vencimento são equivalentes as taxas à vista para os mesmos prazos. A maturidade destes ativos compõe os vértices da curva de juros futuros. Os vencimentos entre vértices podem ser plotados utilizando-se algumas técnicas matemáticas. Uma das mais utilizadas é a *cubic spline*, que consiste na interpolação das taxas através de polinômios de 3ª ordem. A curva de juros de curto prazo é diretamente influenciada pela política monetária, enquanto a parte longa da curva está correlacionada com as expectativas dos agentes quanto a eficácia das medidas de condução da política econômica e monetária para diferentes momentos no futuro.

A ETTJ tem como alicerce explicativo, basicamente, três teorias que apresentaremos abaixo: Teoria das Expectativas Puras, Teoria da Liquidez e Teoria da Segmentação de Mercado.

Teoria das Expectativas Puras

O principal formulador desta teoria foi o norte-americano Irving Fischer (1896) que influenciou fortemente John Mainard Keynes na construção de sua Teoria da Preferência pela Liquidez. A Teoria das Expectativas Puras defende que as taxas a termo refletem unicamente as taxas à vista esperadas no futuro, ou seja, títulos de curto prazo e longo prazo são substitutos perfeitos. A taxa de juros de longo prazo deve ser vista como uma média da taxa de juros atual e das taxas de juros de curto prazo esperadas para o futuro. Conforme Contador (1993):

$$(1+{}_0YTM_n)^n = (1+{}_oF_1)x(1+{}_1F_2)...(1+{}_{n-1}F_n)$$

Onde:

${}_0YTM_n$ = (Yield-to-Maturity): é a taxa *spot* entre hoje e o vencimento do título, ou seja, é a taxa de retorno média que se conseguiria caso invista hoje em um título e o mantenha até o vencimento;

${}_{t}F_{t+1}$ = é a taxa futura implícita ou taxa *foward,* observada hoje, para o período entre t e t+1.

Essa teoria justifica curvas de juros crescentes (elevação das taxas de juros para os vencimentos futuros), decrescentes (queda das taxas de juros para os vencimentos futuros) e planas (sem tendência ou tendência neutra).

É importante salientar que a validade dessa teoria depende de dois pressupostos básicos: inexistência de custos de transação e inexistência da incerteza quanto aos fluxos de caixa futuros, ou seja, as expectativas em relação as taxas de juros devem estar corretas.

Teoria da Liquidez

Essa teoria keynesiana deve ser precedida de definição do conceito de liquidez. Conforme Carvalho (2000):

> **"Um ativo é tanto mais líquido quanto mais rápido seu proprietário puder vendê-lo, e quanto menor for a perda pecuniária resultante da venda num prazo curto".**

Entre os pressupostos para demanda de moeda pelo público está a especulação, relacionada a incerteza quanto ao comportamento da taxa de juros futura. Segundo Hicks (1946) os investidores em ativos financeiros exigem que os títulos de longo prazo tenham retornos maiores que os de curto prazo. Deve, portanto, existir um prêmio pela falta de liquidez. Em oposição a Teoria das Expectativas Puras, a Teoria da Liquidez supõe que os investidores são avessos ao risco, preferindo ativos com vencimentos mais curtos. Para adquirir ativos com longo prazo de maturidade os investidores exigem prêmios altos e esses prêmios aumentam na medida em que o vencimento se afasta do dia de hoje. Quanto mais distante o futuro, mais incerto ele é.

Portanto, para essa teoria, a curva de juros deve ser crescente. A única hipótese da curva de juros ser negativamente inclinada é quando a expectativa de queda dos juros futuros for maior que o prêmio pela liquidez.

Teoria dos Mercados Segmentados

A Teoria dos Mercados Segmentados pressupõe um mercado, segundo Contador (2003), constituído por:

> **"Investidores especializados ou com preferências muito específicas sobre um horizonte de tempo que exigem prêmios para sacrificar suas posições".**

Isso significa que tomadores e doadores de fundos se concentram em determinados segmentos da curva e que as taxas em diferentes vencimentos são determinadas pelas condições oferta e demanda dos vários segmentos de mercado.

A Teoria dos Mercados Segmentados assume que os investidores são extremamente avessos ao risco e que as instituições financeiras e corporações visam sua sobrevivência. Para tanto, elas devem buscar a imunização de seus portfólios, igualando a maturidade dos ativos e passivos, independentemente da relativa atratividade que possa haver em taxas de retorno de títulos com outras maturidades. Um fundo de pensão poderá compor seu portfólio com títulos de longa maturidade, uma vez que seus compromissos são a geração de renda em um longo horizonte de tempo.

Desta forma, as taxas de juros de curto e longo prazo são determinadas de maneira independente, a partir do equilíbrio entre oferta e demanda em mercados segmentados.

2.3. Modelos de Previsão das Taxas de Juros

O relacionamento entre as taxas de juros e o tempo pode ser construída através de modelos que buscam a melhor referência e a melhor descrição do comportamento das taxas de juros ao longo do tempo. Um modelo de estrutura a termo da taxa de juros constitui-se em uma descrição probabilística da sua evolução futura. A incerteza decorre do fato de que a informação disponível em determinado momento do tempo não é suficiente para descrever, de forma perfeita, a estrutura a termo futura. A análise quantitativa representada pelo modelo será, portanto, um espelho dessa incerteza. Estes modelos podem ser divididos, tradicionalmente, em três classes:

Modelos de Equilíbrio

Também chamados de modelos endógenos, pressupõe as variáveis econômicas e derivam um processo para definir a taxa de juros de curto prazo. A partir da definição da taxa de juros de curto prazo é possível precificar ativos e suas curvas de rendimento. Os principais postuladores desse modelo são Vasicek (1977), Hull e White (1990), Rendleman e Bartter (1980) e Cox, Ingersoll e Ross - CIR (1985). Dentre os Modelos de Equilíbrio estão os Modelos de Reversão à Média, cujos principais representantes são CIR (1985). Pressupõe o mercado em equilíbrio, onde as relações de arbitragem para a negociação de títulos não limitam sua tendência de reversão à média. Logo, se o preço do título está acima de seu preço médio haverá uma pressão de venda, que pressionará seu preço para baixo. Se o preço do título estiver abaixo do seu preço médio haverá uma pressão compradora, fazendo seu preço subir. Dessa forma, é intuitivo pensar que a ETTJ segue uma tendência de reverão à média histórica, ou estatisticamente, uma tendência estocástica, onde o único risco é a volatilidade.

A equação de reversão à média é descrita a seguir, onde o primeiro termo descreve a tendência e o segundo termo a perturbação que determinam a variação das taxas de juros:

$$dr = K(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{rdz}$$

Onde:

dr: é a variação da taxa;

K: é a força de reversão à média;

$(\theta - r)$: é o desvio da média;

σ: é o desvio padrão ou volatilidade;

dz: é o processo de Wiener

O maior ponto de discussão quanto a qualidade da modelagem de equilíbrio está no fato de que ela não expressa a ETTJ corrente, havendo divergências para esta no horizonte de curto prazo.

Modelos de Não Arbitragem

Buscam minimizar os erros da ETTJ existente e construída a partir dos modelos de equilíbrio, pressupondo um ambiente de equilíbrio de mercado, onde não existe a possibilidade de arbitragem. A ETTJ corrente é insumo para a construção de uma curva de juros ajustada para o futuro.

Segundo Ho e Lee (1986), postuladores pioneiros desse tipo de modelagem, a versão contínua do processo da taxa de juros de curto prazo pode ser descrito como:

$$dr = \frac{\partial \theta(t)}{\partial t} dt + \sigma dz$$

Onde:

$\theta(t)$: é uma função determinística escolhida de forma a possibilitar que o modelo seja capaz de gerar, no momento zero, uma curva de juros igual a determinada pelo mercado;

σ: é o desvio padrão ou a volatilidade.

Ho e Lee desconsideram uma possível reversão à média da taxa de juros no curto prazo. Segundo Hull e White essa falha no modelo de Ho e Lee propondo um ajuste ao modelo de Vasicek:

$$dr = a\left(\frac{\theta(t)}{a} - r\right)dt + \sigma dz$$

Onde:

$\frac{\theta(t)}{a}$: é a tendência à média da taxa de juros no curto prazo a uma taxa a.

Diferentemente de Ho e Lee, Hull e White abrangem a volatilidade de maneira mais ampla, pois consideram o processo de reversão à média e o desvio padrão.

Os Modelos de Não Arbitragem são bastante implementados para precificação de ativos financeiros, pois são considerados mais completos em relação aos Modelos de Equilíbrio.

Modelos de Fatores

Os modelos de fatores têm como objetivo definir o formato e os movimentos da curva de juros através de métodos estatísticos. As variações nas taxas de juros dependem dos n fatores componentes do modelo e afetam em maior ou menor grau as taxas ao longo de toda a curva de juros. A grande vantagem desse tipo de modelo está na explicação das diversas variáveis econômicas que afetam o comportamento da ETTJ em poucos fatores que identificam e reproduzem as determinantes das taxas de juros. Os fatores, por definição de modelagem, impactam o comportamento da ETTJ de maneira independente, não havendo correlação entre eles.

A maior parte das ciências oferece um número significativo de aplicações para a análise de fatores. Em finanças, a aplicação mais destacada relaciona-se com o estudo da curva de juros. Os artigos mais conhecidos sobre este assunto são Litterman e Scheinkman (1991), Knez, Litterman e Scheinkman (1994) e Diebold e Li (2006). Geralmente, os autores partem de uma amostra onde as variáveis aleatórias x_1, x_2, ..., x_p são as taxas de retorno dos títulos sem cupom de diversos prazos de vencimento emitidos pelo Tesouro. Os modelos são construídos a partir de três fatores comuns que capturam razoavelmente bem a variabilidade dos dados, pois a proporção da variância total atribuída a eles alcança 96%. Os três principais fatores utilizados para modelar a ETTJ são: **nível**, **inclinação** e **curvatura**.

Nível

O nível da curva de juros futuros reflete o patamar de expectativa dos agentes. Mudanças provocadas por uma alteração súbita no fator nível são tais que as taxas de retorno associadas aos diversos prazos de vencimento variam igualmente. Segundo Litterman e Scheinkman (1991): "*The first factor represents essentially a parallel change in yields".* Daí a denominação nível para este fator. Medidas heterodoxas na condução da política monetária e mudanças de governo são exemplos de choques que podem alterar as expectativas dos agentes e modificar o nível da curva de juros.

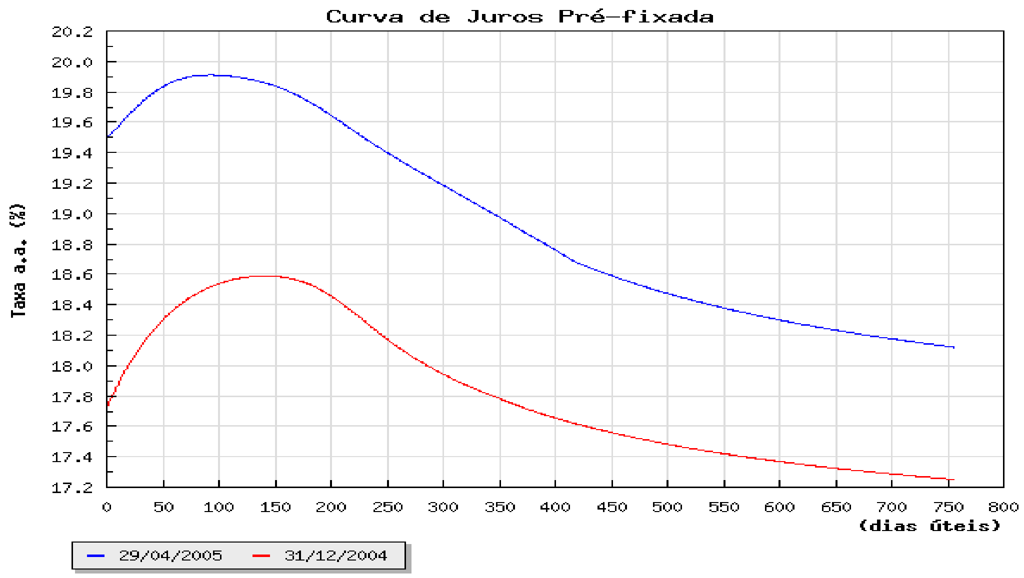

Gráfico 1 - Mudança de nível positiva

Inclinação

A inclinação da curva de juros futuros reflete a relação entre as taxas de juros de curto e longo prazo. É o componente da curva mais intuitivo para percepção das expectativas dos agentes para o comportamento das taxas em períodos futuros. As mudanças provocadas por um choque no fator inclinação são tais que as taxas de retorno associadas aos prazos curtos e longos se movimentam em diferentes direções, ou seja, o choque faz com que a curva de juros se torne mais ou menos inclinada, ou mude o sentido da inclinação. Conforme a linha teórica de autores como Campbell (1995) e Hicks (1946), a inclinação da curva deve ser positiva. Esse comportamento reflete a preferência por liquidez. Os tomadores de recursos preferem o longo prazo enquanto os doadores preferem o curto prazo.

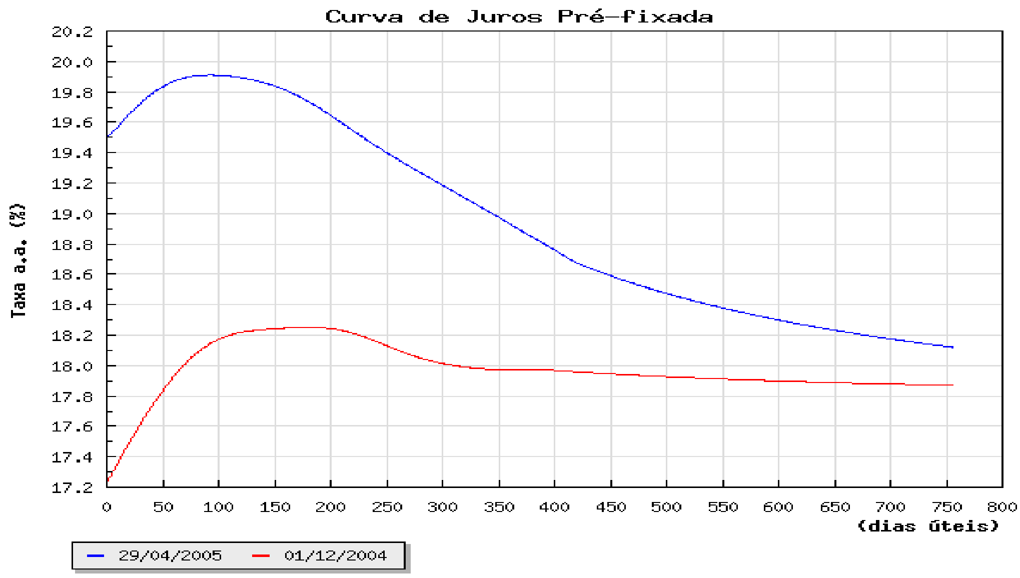

Gráfico 2 - Mudança da inclinação

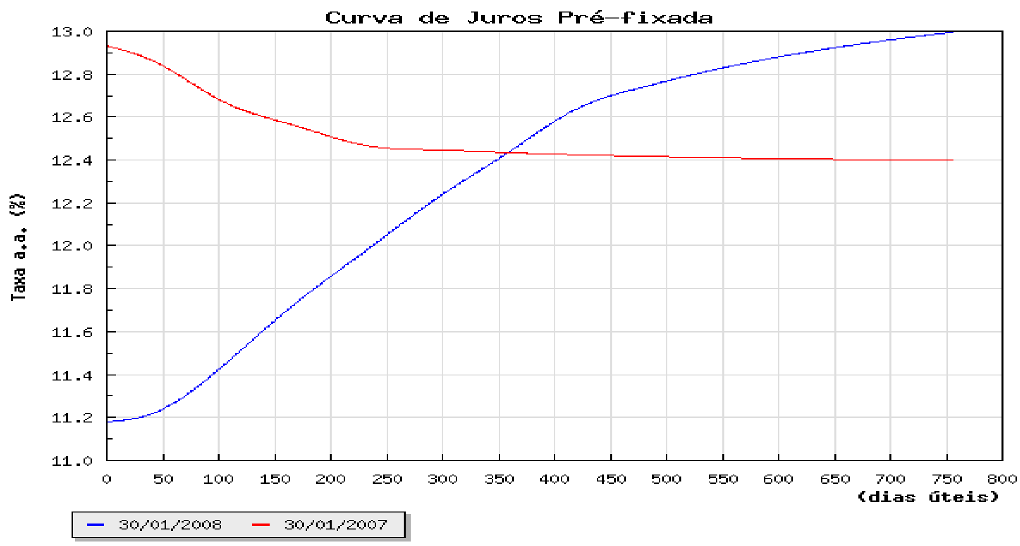

Gráfico 3 - Mudança no sentido da inclinação

Curvatura

O fator curvatura determina o formato da curva de juros, ou seja, sua concavidade ou convexidade, sua homogeneidade ou irregularidade. Mudanças na curvatura podem ocorrer devido a choques tais que as taxas de retorno associadas aos vencimentos de curto, médio e longo prazo se movimentam em sentidos opostos.

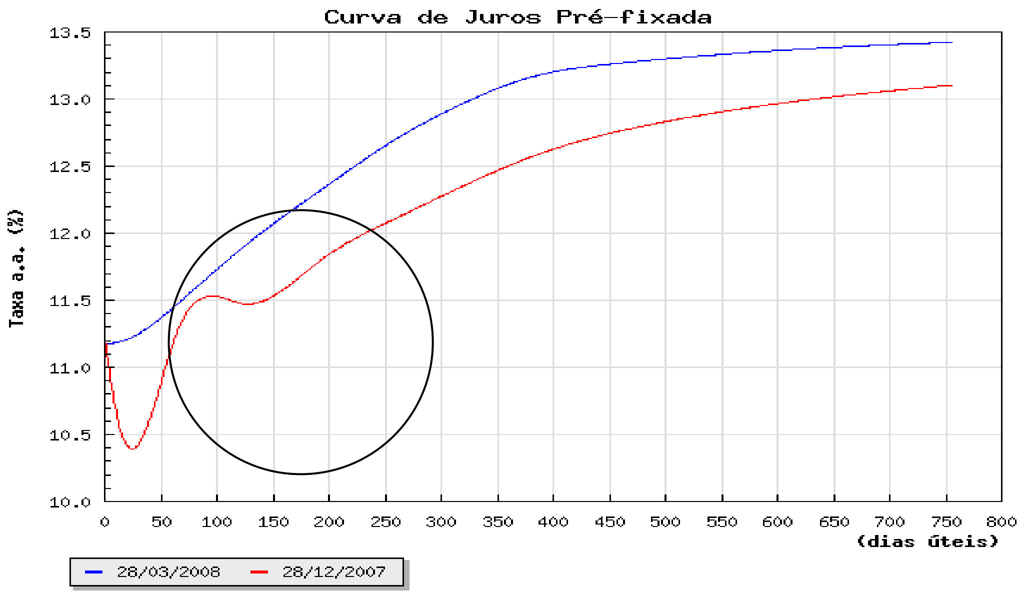

Gráfico 4 - Mudança na curvatura

3. O MODELO DE FATORES DE DIEBOLD – LI

Para entendermos o trabalho realizado por Diebold e Li, e posteriormente, aplicarmos ao caso brasileiro, é necessário examinar os modelos que precederam e ajudaram a construir o arcabouço teórico utilizado por Diebold e Li.

3.1. Nelson e Siegel

O modelo proposto por Nelson e Siegel (1987), é baseado em componentes exponenciais para determinar a curva de juros, período por período, através de parâmetros tri dimensionais que descrevem seu comportamento. Esse modelo funcional e parcimonioso, que pretende explicar o comportamento da curva de juros da maneira mais simples possível, dentro da sua linha de desenvolvimento teórico e técnico. A parcimônia é preferível, do ponto de vista estatístico (que veremos a seguir, é a ferramenta utilizada pelo modelo), porque possibilita uma melhor identificação da explicação a respeito das variáveis, e consequentemente, menor dificuldade para proceder ajustes necessários ao modelo.

Esse modelo é capaz de retratar aspectos fundamentais do comportamento da curva de juros, à medida que é flexível o suficiente para representar todas as possibilidades de formatos que ela pode apresentar a partir da definição de três parâmetros.

A taxa *forward* instantânea y(t), de prazo t, é dada através da resolução de uma equação diferencial de 2ª ordem de mesmas raízes reais. Portanto, seguindo o princípio da parcimônia, o modelo capaz de gerar o maior número de formatos (monotônico, curvado e em S) associados às curvas de retorno, é dado por:

$$y(t) = \beta_1 + \beta_2 e^{-\frac{t}{\tau}} + \beta_3 \left[\left(\frac{t}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$

Se integrarmos a função dentro do intervalo utilizado para previsão, e dividirmos pelo prazo t, obteremos:

$$Y(t) = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau}}}{\frac{t}{\tau}} \right) + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau}}}{\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Substituindo t / τ por $\lambda_t\tau$, teremos:

$$Y(t) = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right) + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right)$$

Esta é a curva de juros correspondente a curva de taxas *fowards.* Esta é a fatorização utilizada no modelo de Diebold e Li.

A parcela $\lambda_t\tau$ estabelece a taxa de decaimento exponencial. Se $\lambda_t\tau$ assumir pequenos valores é produzido um lento decaimento exponencial das taxas de juros, ajustando melhor as taxas de juros para maturidades mais longas. Quanto maiores os valores assumidos por $\lambda_t\tau$, mais rápido será o decaimento e melhor será o ajuste das taxas para maturidades menores. τ é a maturidade da taxa a ser determinada, ou seja, é o número de meses de t até o vencimento do título.

3.2. Litterman e Scheinkman

Em seu trabalho Litterman e Scheinkman (1991) estudam a utilização do modelo de parâmetros para a curva de retornos acima da taxa livre de risco, obtida através dos *treasuries bonds.* A partir disso estabelecem um arcabouço teórico para a construção de *portfólios* utilizando operações com a curva de retornos que simulam ativos.

Eles chamaram β_1, β_2 e β_3 de fatores que determinam o comportamento da curva de retornos e $\left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right)$ e $\left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right)$ de *factor loandings*, ou carga dos fatores.

O β_1, ou fator de curto prazo, foi denominado nível. O β_2, ou fator de médio prazo, foi denominado inclinação e $\beta_{3'}$ ou fator de curto prazo, foi denominado curvatura. Mais a frente, quando abordarmos a metodologia de Diebold e Li, explicaremos o porque dessa denominação e seus impactos na curva de juros.

Litterman e Scheinkman concluem que o modelo de três fatores é capaz de replicar de maneira bastante satisfatória a variabilidade dos excessos de retorno, pois a parcela da variância explicada por eles alcança 96%.

3.3. Diebold e Li (2006)

Os autores propuseram uma nova forma de entender o modelo de fatores, a partir dos trabalhos precedentes. Os próprios autores afirmam que fizeram uma releitura do modelo de três fatores a partir da abordagem de Nelson e Siegal.

3.3.1. Interpretação

Diebold e Li interpretam β_1, β_2 e β_3 como três fatores dinâmicos latentes. A carga de β_1 é 1, ou seja, uma constante que no limite não decai a zero. Por isso, é denominado como o fator de longo prazo. Alterações neste fator influenciariam de maneira homogênea toda a curva de juros. É por esta razão que também é chamado de nível. A carga de β_2 é uma função que tem seu início em 1, mas que tem decaimento monotônico e rápido a zero. Portanto, β_2 é visto como um fator de curto prazo, pois alterações nos valores desse fator influenciam mais significativamente as taxas de curto prazo que compõe a curva de juros. Por isso também é chamado de inclinação. Como a inclinação da curva é dada pela taxa mais longa menos a taxa mais curta, Diebold e Li a definiram para o caso particular americano, dentro do período da amostra trabalhada, como sendo:

$$y_t(120) - y_t(3) = -0{,}78\beta_{2t} + 0{,}06\beta_{3t}$$

A carga de β_3 começa em zero, aumenta até determinado ponto e depois decai a zero novamente. Assim sua maior influência ocorre nas taxas da porção intermediária da curva de juros, sendo chamado então de fator de médio prazo. Esse fator foi definido como sendo:

$$2y_t(24) - [y_t(3) + y_t(120)] = 0{,}00053\beta_{2t} + 0{,}37\beta_{3t}$$

O parâmetro λ_t é extremamente importante, na medida em que estabelece o decaimento exponencial das taxas de juros. É ele que determina os valores das cargas dos fatores, e consequentemente, a influência dos fatores no curto e médio prazos. É um parâmetro constante.

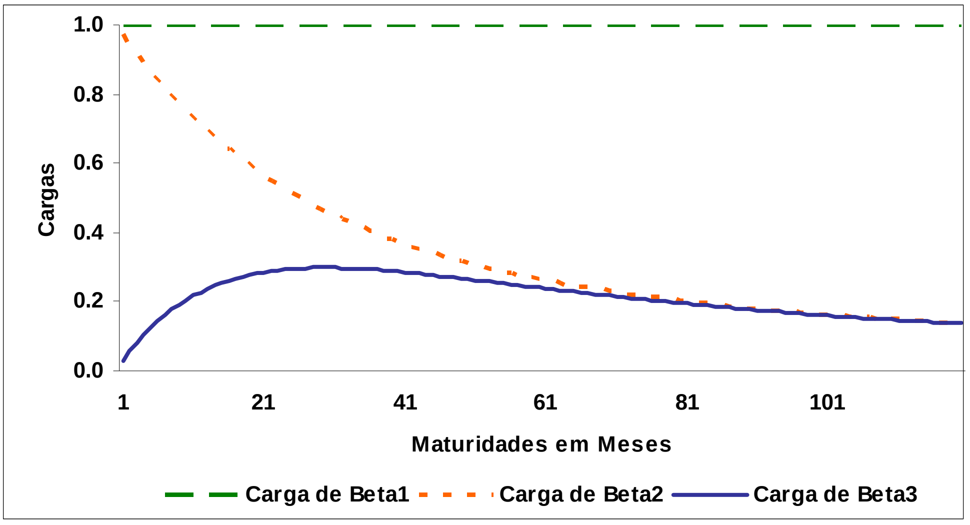

Gráfico 5 - Plotagem das cargas dos fatores do modelo de três fatores.

Beta1 (β_1), Beta2 (β_2) e Beta3 (β_3) são os três fatores que possuem cargas associadas que são 1, $\left(\frac{1-e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau}\right)$ e $\left(\frac{1-e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau}\right)$, onde τ é a maturidade. λ_t foi fixado em 0,0609.

Apesar do modelo de Diebold e Li ser uma reinterpretação e conter pontos em comum com o modelo de Nelson e Siegal, como o número de fatores e o tipo de influência de cada um na curva de juros, existem uma diferença fundamental. A curva para fatorização utilizada por Diebold e Li é diferente da originalmente colocada por Nelson e Siegal em seu trabalho de 1987:

$$Y_t(\tau) = b_1 + b_2 \frac{1-e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} + b_{3t} e^{-\lambda_t \tau}$$

Curva utilizada por Nelson e Siegal

$$Y(t) = \beta_1 + \beta_2\left(\frac{1-e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau}\right) + \beta_3\left(\frac{1-e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} - e^{-\lambda_t\tau}\right)$$

Curva utilizada por Diebold e Li

Observando a curva de Nelson e Siegal temos $(1 - e^{-\lambda t\tau})/\lambda_t\tau$ e $e^{-\lambda t\tau}$ como cargas de fatores similares, com forma monotônica decrescente. Tratando β_2 e β_3 como fatores, incorremos em dois problemas pela curva de Nelson e Siegal: o primeiro é conceitual, já que é bastante difícil prover uma interpretação intuitiva para a curva de juros através dessa formulação. O segundo é operacional, já que pode ser difícil estimar os fatores com precisão na medida em que a alta coerência entre eles pode gerar multicolinearidade[1].

3.3.2. Estilização da Curva de Juros

Um bom modelo que tente explicar e reproduzir o comportamento da dinâmica da curva de juros deve estar apto a reproduzir os fatos históricos estilizados respeitando o formato médio observado da curva de juros, os diferentes formatos assumidos ao longo do tempo, uma forte persistência das taxas e uma fraca persistência dos *spreads*. Não é simples assumir estas premissas para um modelo de fatores parcimonioso. Abaixo estão descritos os fatos estilizados para a curva de juros americana mais importantes e a capacidade do modelo de fatores aplicado por Diebold e Li em replicá-los:

a) A curva de juros média é côncava e crescente. No modelo, a curva de juros média é a curva de juros resultante da utilização dos valores médios dos fatores β_1, β_2 e β_3. É possível aceitar que a curva de juros média daí resultante, seja côncava e crescente;

---

[1] O termo multicolinearidade foi desenvolvido por Ragnar Frisch em Statistical Confluence Analysis by Means of Complete Regression Systems, Economy Institute, Oslo 1934. Originalmente, significava a existência de uma perfeita relação linear entre as algumas ou todas variáveis explicativas de um modelo de regressão. Hoje o termo multicolinearidade é usado em sentido mais abrangente e pode ser dividido em: a) Multicolinearidade perfeita, onde os coeficientes de regressão das variáveis explicativas são indeterminados e seus erros-padrão são infinitos; b) Multicolinearidade menos que perfeita, onde os coeficientes de regressão, apesar de determinados, possuem erros-padrão grandes, significando que os coeficientes não podem ser estimados com precisão.

b) A curva de juros assume diversas formas ao longo do tempo, côncavas, convexas, positivamente inclinadas e negativamente inclinadas. A curva de juros no modelo de Diebold e Li pode assumir todas as formas possíveis, conforme as variações dos fatores;

c) A dinâmica dos juros possui uma forte persistência e os *spreads* fraca persistência. A persistência da dinâmica dos juros encontra correspondência em β_1, e a fraca persistência dos *spreads* encontra correspondência em na fraca persistência de β_2;

d) As taxas de juros associadas as maturidades mais curtas possuem um comportamento mais volátil do que as taxas de juros associadas as maturidades mais longas. No modelo, esse comportamento é refletido através das cargas dos fatores. As taxas mais curtas dependem de β_2 e β_3 e as taxas mais longas dependem apenas do fator constante β_1.

e) As taxas de juros associadas as maturidades mais longas são mais persistentes que as taxas de juros associadas as maturidades mais curtas. No modelo, as taxas longas dependem apenas de β_1. Se β_1 é o fator mais persistente, logo as taxas longas serão mais persistente.

3.3.3. Base de Dados

A base de dados utilizada por Diebold e Li foi construída a partir de cotações mensais (último dia do mês) dos U.S. *Treasury Bonds*[2] de janeiro de 1985 a dezembro de 2000 retiradas do CRSP *Treasury Database*. Foram fixadas dezessete maturidades: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 30, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108 e 120 meses.

---

[2] *Treasuries* são títulos do tesouro norte-americano. São obrigações de dívida negociáveis do governo norte-americano que são emitidas com vários prazos. Podemos dividir os *Treasuries* em três grupos, de acordo com o prazo: *Treasury Bills* (até um ano) sem pagamento de *coupon*, *Treasury Notes* (de um a dez anos) com pagamentos semestrais de coupon e *Treasury Bonds* (dez anos ou de prazo mais longo) com pagamentos semestrais de *coupon*. Os *Treasuries* são considerados dentre os investimentos mais seguros do mundo, e são constantemente usados como referência para outros investimentos.

Bonds com problema de liquidez foram excluídos da base de dados e então convertidos pelo método não-suavizado de Fama e Bliss (1987) [3].

3.3.4. Estimação

A primeira e importante questão que surge é qual o valor mais apropriado para o λ_t, já que ele determina o decaimento de cada carga dos fatores. Ele deve ser determinado apartir da escolha da maturidade em que a carga do fator curvatura, ou de médio prazo, atinge seu máximo. Usualmente, para o caso norte – americano são utilizadas as maturidades de 24 e 36 meses. Dessa forma, os autores simplesmente definiram λ_t como sendo a média dessas maturidades, ou seja, 30 meses. O valor de λ_t que maximiza a carga de β_3 exatamente no trigésimo mês é 0,0609.

Após a definição do λ_t é possível estimar os fatores β_1, β_2 e β_3 para cada mês utilizando mínimos quadrados ordinários (MQO). Aplicando MQO sobre as taxas que compõe a base de dados, obtemos o β_1, β_2 e β_3 de cada mês e as respectivas séries de resíduos, ou erros, correspondentes. A partir destes vetores de β_1, β_2 e β_3 será possível avaliar o poder de previsão do modelo *in sample*.

Abaixo, é mostrada a derivação da função de regressão da amostra de k variáveis:

$$Y_i = b_1 + b_2X_{2i} + b_3X_{3i} + ... + b_kX_{ki} + u_i$$

Essa função pode ser descrita na notação matricial como:

$$y = Xb + u$$

[3] O procedimento utilizado por Fama e Bliss constrói a curva de juros em função de taxas de juros a termo. O método de Fama e Bliss não-suavizado extrai as taxas de juros a termo do preço dos títulos a partir de uma função de desconto. A função de desconto é estendida a cada passo, através da taxa de juros a termo, necessário para apreçar sucessivamente títulos com vencimentos mais longos resultando na função de retorno ajustada ao dado anteriormente incluído. A a taxa de juros resultante desse procedimento é uma função descontínua do título que está sendo utilizado. Esse procedimento é conhecido no mercado financeiro como *flat forward* ou *bootstrap*.

Na forma matricial a função regressão da amostra é dada como:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 ... X_{21} ... X_{31} ... X_{k1} \\ 1 ... X_{22} ... X_{32} ... X_{K2} \\ 1 ... X_{2n} ... X_{3n} ... X_{kn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_n \end{bmatrix}$$

y =	X	b	u
n x 1	n x k	k x 1	n x 1

Onde b é um vetor coluna de k elementos com estimadores de MQO dos coeficientes de regressão e u é um vetor coluna n x 1 com n resíduos. Os estimadores de MQO são obtidos minimizando:

$$\Sigma u_i^2 = \Sigma(Y_i - b_1 - b_2X_2 - b_kX_{ki})^2$$

Obtemos portanto:

$$u = y - Xb$$

Aplicando as propriedades de transposição de matrizes, temos:

$$u'u = (y - Xb)` (y - Xb)$$
$$u'u = y'y - 2b' X'y + b'X'Xb$$

Na notação escalar o MQO consiste em estimar b_1, b_2,... b_k de forma que Σu_i^2 seja o menor possível. Isso deve ser feito diferenciando parcialmente a equação (3) em relação à b_1, b_2... b_k e igualando a zero as expressões resultantes. Surgem daí k equações simultâneas com k incógnitas, que são as equações normais do MQO. Resumindo o processo de derivação, que é descrita de forma completa em Gujarati (2000), temos a forma matricial concisa:

$$(X'X)b = X'y$$

Onde (X'X) informa a soma bruta dos quadrados e produtos cruzados das variáveis X e X'y informa o produto cruzado entre y e as variáveis X. Usando álgebra matricial, se a matriz inversa de (X'X) existe, a chamaremos de $(X'X)^{-1}$ e multiplicando ambos os lados da equação (6) pela matriz inversa temos:

$$(X'X)^{-1}(X'X)b = (X'X)^{-1}X'y$$

Como $(X'X)^{-1}(X'X)$ é uma matriz identidade I de ordem k x k, obtemos:

$$Ib = (X'X)^{-1}X'y$$

Ou:

$$b = (X'X)^{-1}X'y$$

Portanto, a equação (7) é o resultado da teoria de MQO na notação matricial. É esta equação que mostra como o vetor b pode ser estimado.

3.3.5. Resultados

Após a aplicação do MQO é possível fazer a previsão *in sample* da curva de juros. Os resultados obtidos por Diebold e Li mostram resultados satisfatórios. O modelo foi capaz de replicar os diversos formatos que a curva de juros assumiu ao longo do tempo. A partir das estatísticas apresentadas observa-se, através das autocorrelações residuais, a existência de persistência nos erros. Como já havia ressaltado Fama e Bliss (1997), independente do modelo utilizado para prever a curva de juros, existe uma persistente diferença entre os preços observados e os preços estimados. Estas diferenças podem ser causadas pela persistência das taxas ou pelos efeitos da falta de liquidez de algum *bond*.

Através da plotagem dos valores obtidos para os fatores é possível comprovar que β_1 é o fator correspondente ao nível, β_2 a inclinação e β_3 a curvatura. A partir da autocorrelação dos três fatores constata-se que β_1 é o fator mais persistente e que β_2 é mais persistente que β_3. O teste de Dickey – Fuller sugere que β_1, β_2 talvez possuam raízes unitárias, enquanto β_3 não. As correlações entre pares de fatores estimados não é significativa.

Para modelar a curva de juros e realizar a previsão *out of sample* é necessário extrair o β_1, β_2 e β_3 dos vetores destes betas. Para tanto, Diebold e Li utilizaram o processo Auto - regressivo de primeira ordem ou AR(1). A opção por modelos univariados decorre do fato de que os fatores β_1, β_2 e β_3 não apresentam significativa correlação cruzada. Dessa forma, as previsões da trajetória futura dos fatores são obtidas através da seguinte equação:

$$\beta_{i,t+h} = c_i + v_i\beta_{i,t} + \varepsilon_{i,t}$$

Onde $\beta_{i,t+h}$ e $\beta_{i,t}$ são os valores assumidos pelo i–ésimo fator nos instantes t+h e t, respectivamente, e os parâmetros c_i e α_i são estimados através da regressão de $\beta_{i,t}$ em uma constante e em $\beta_{i,t+h}$.

As previsões para cada taxa de juros que fará parte da curva de juros, serão obtidas através da equação:

$$y_{t+h}(\tau) = b_{1,t+h} + b_{2,t+h}\left(\frac{1-e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau}\right) + b_{3,t+h}\left(\frac{1-e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} - e^{-\lambda_t\tau}\right)$$

Onde:

$b_{i,t+h} = d_i + w_i\beta_{i,t}$. Os valores de d_i e w_i são estimativas de c_i e v_i, enquanto que $b_{i,t+h}$ é a previsão, h passos a frente, do valor que o i-ésimo fator assume no instante t + h, desde que o último valor observado seja igual a $\beta_{i,t}$.

Os autores realizaram a previsão das maturidades de 3, 12, 36, 60 e 120 meses, h meses à frente, de maneira recursiva[4] entre 1995 a 2000. Os horizontes de previsão determinados foram 3, 6 e 12 meses. O principal critério utilizado para

[4] O procedimento recursivo ocorre da seguinte forma: primeiro o modelo é estimado utilizando-se os dados de janeiro de 1985 a dezembro de 1994 para prever janeiro de 1995. No segundo passo, o modelo é estimado utilizando-se os dados de janeiro de 1985 a janeiro de 1995 para prever fevereiro de 1995, e assim por diante. É sempre acrescido um mês a base de dados.

avaliar a qualidade da previsão é o erro quadrático médio (EQM)[5]. Os resultados de previsão obtidos através do modelo de Diebold e Li foram comparados com modelos com igual objetivo.

Os autores concluirão que, de maneira geral, o modelo de três fatores gera resultados satisfatórios. Para maturidades curtas, mais especificamente 1 mês, o modelo mostra-se bastante ineficiente, já que seus resultados são comparáveis a um simples passeio aleatório. Para as maturidades intermediárias (6 e 12 meses) o modelo demonstrou possuir um desempenho significativamente superior aos seus concorrentes para todos os prazos de vencimento. Segundo Diebold e Li o modelo gerou resultados bastante aceitáveis, melhorando sua capacidade preditiva a medida que o horizonte de previsão aumenta.

[5] O erro quadrático médio (EQM) é o quadrado da diferença entre o valor previsto para a taxa e o valor observado. A média desses erros serve de medida para o desempenho de previsão do modelo.

4. DADOS

Para replicar o modelo de Diebold e Li para o caso brasileiro, não foi possível utilizar as cotações de títulos zero *coupon,* as Letras do Tesouro Nacional, devido a pequena quantidade de maturidades com liquidez para esse tipo de título. Para contornar essa limitação, recorremos, em parte, ao que fizeram Varga e Valli (2001), Silveira e Bessada (2003) e Luna (2006) e utilizamos as cotações de DI negociados na BM&F para *proxy* das maturidades até 36 meses e as cotações de swap DI-pré como *proxy* para as maturidades superiores a 36 meses. Utilizamos as cotações dos contratos de DI como *proxy* para as maturidades mais curtas, pois possuem bons níveis de negociação e liquidez. Acima de 36 meses, principalmente para a parte inicial da amostra, utilizamos as cotações de swap DI-pré, pois eram as únicas cotações disponíveis. As cotações são expressas em taxas ano. Para determinar as taxas de juros para maturidades sem negociação foi utilizada a metodologia de Fama e Bliss (1987).

Diferentemente do que fizeram Diebold e Li, a amostra é composta por curvas de juros diárias compreendendo o período de 02.06.2004 a 30.09.2008 e contendo 1.083 observações. Os dados diários foram preferidos aos dados mensais, pois aumentam o tamanho da amostra e melhoram a qualidade da estimação. A curva de juros diária é composta por 17 maturidades: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 30, 36, 42, 48 e 60 meses.

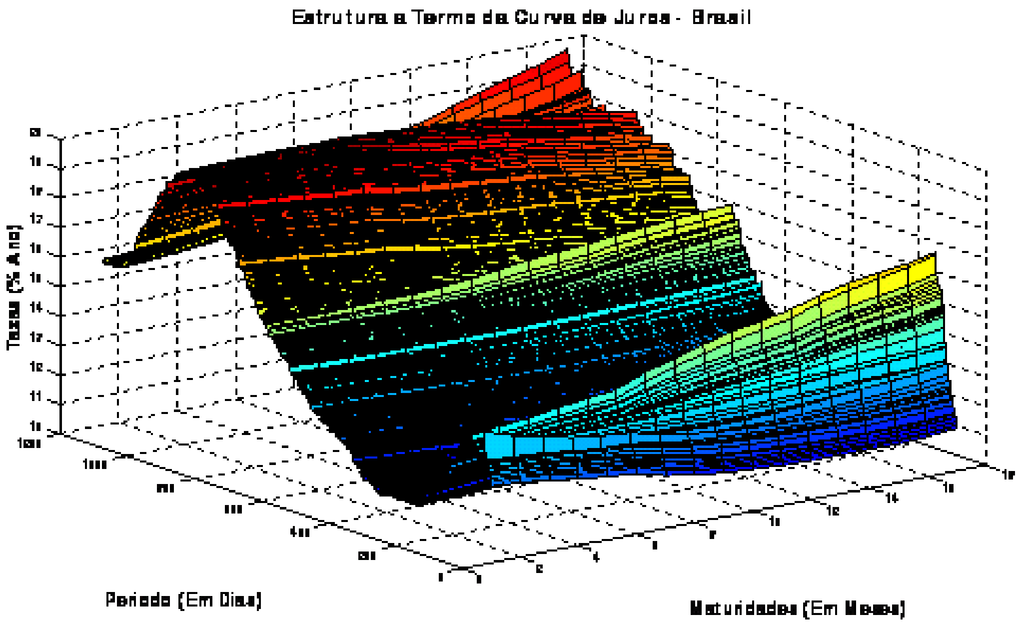

Gráfico 6 - Curvas de juros de 02.06.2004 a 30.09.2008.

A amostra é composta por taxas de juros diárias para as maturidades 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 30, 36, 42, 48 e 60 meses.

Maturidade (Meses)	Média	Mediana	Máximo	Mínimo	Desvio Padrão	Assimetria	Curtose	Jarque-Bera	Soma	Soma dos Desvios
1	14.812	14.020	19.810	11.050	2.882	0.337	1.767	95.690	17226.180	9652.105
2	14.807	13.980	19.830	11.050	2.879	0.342	1.767	96.305	17220.730	9631.921
3	14.805	13.930	19.850	11.040	2.873	0.343	1.765	96.705	17218.140	9592.962
4	14.803	13.950	19.850	11.040	2.861	0.339	1.757	97.183	17215.380	9509.090
5	14.801	14.000	19.830	11.040	2.846	0.331	1.746	97.482	17213.610	9412.712
6	14.800	14.050	19.810	11.040	2.834	0.323	1.736	97.581	17212.340	9335.760
9	14.797	14.200	19.720	11.050	2.797	0.294	1.707	97.711	17208.360	9090.575
12	14.794	14.290	19.570	10.990	2.755	0.258	1.679	97.500	17205.150	8819.197
15	14.794	14.350	19.500	10.920	2.714	0.221	1.657	96.901	17205.830	8557.443
18	14.796	14.400	19.450	10.870	2.675	0.184	1.639	96.311	17207.400	8315.401
21	14.796	14.460	19.380	10.830	2.640	0.151	1.626	95.859	17207.990	8096.965
24	14.795	14.520	19.310	10.800	2.608	0.122	1.618	95.399	17207.000	7904.382
30	14.791	14.620	19.170	10.750	2.557	0.073	1.614	94.145	17201.650	7595.086
36	14.782	14.670	19.030	10.680	2.517	0.039	1.623	92.241	17191.660	7360.911
42	14.770	14.690	19.310	10.620	2.485	0.019	1.643	89.280	17177.690	7176.927
48	14.757	14.680	19.550	10.560	2.460	0.009	1.673	85.327	17162.000	7033.394
60	14.729	14.620	19.890	10.420	2.423	0.009	1.755	75.088	17129.320	6820.892

Tabela 1 - Estatísticas descritivas da curva de juros.

Aqui são apresentadas as estatísticas descritivas das taxas de juros diárias para diferentes maturidades. O período da amostra inicia em 02.06.2004 e termina em 30.09.2008.

Podemos observar que a média das taxas de juros brasileiras para qualquer maturidade são bem superiores as observadas nos Estados Unidos. Isso ocorre devido a uma série de fatores estruturais e conjunturais que não fazem parte do escopo deste trabalho. É interessante notar que os desvios-padrão diminuem na medida em que as maturidades aumentam. Isso denota a maior sensibilidade das taxas de juros para maturidades menores, que respondem mais rapidamente a mudanças conjunturais. Isso também ocorre pelo fato de que a negociação de ativos com maturidades mais curtas é bem mais intensa. Portanto, é natural que as negociações em mercado confiram as taxas de juros de maturidades menores, maior variabilidade.

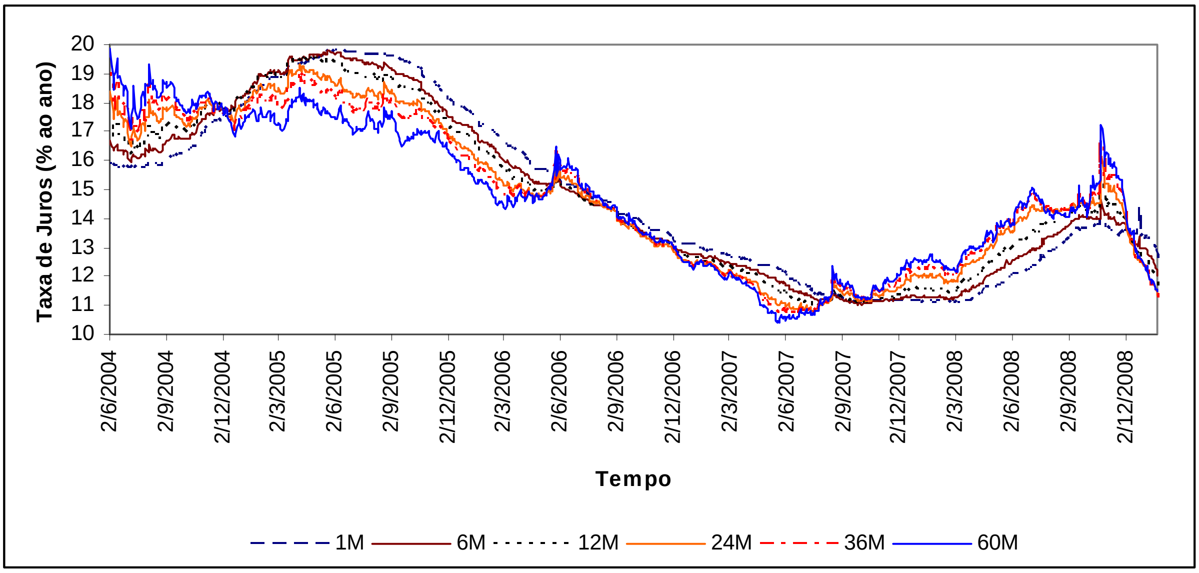

Gráfico 7 - Comportamento das taxas de juros para as maturidades de 1, 6, 12, 24, 36 e 60 meses.

5. APLICAÇÃO DO MODELO DE FATORES PARA O CASO BRASILEIRO

Neste capítulo apresentaremos a aplicação do modelo de fatores de Nelson e Siegal, sob a proposta de Diebold e Li, para o caso brasileiro.

5.1. Definição do λ_t

Para estimar a partir da amostra coletada, os fatores β_1, β_2 e β_3 para cada curva de juros diária, é necessário definir o parâmetro λ_t. Para definir este parâmetro, é necessário estabelecer qual é a maturidade média da curva de juros brasileira. Para o caso americano Diebold e Li definiram λ_t como sendo o valor que maximiza β_3 na maturidade 30 meses. No caso brasileiro, estabelecemos a maturidade média como sendo 12 meses, pois considerando que os ativos possuem boa liquidez para todas as maturidades até a maturidade de 24 meses, estabelecemos o prazo médio de 0 a 24 meses. Portanto, o valor de λ_t que maximiza β_3 na maturidade de 12 meses é 0,1493.

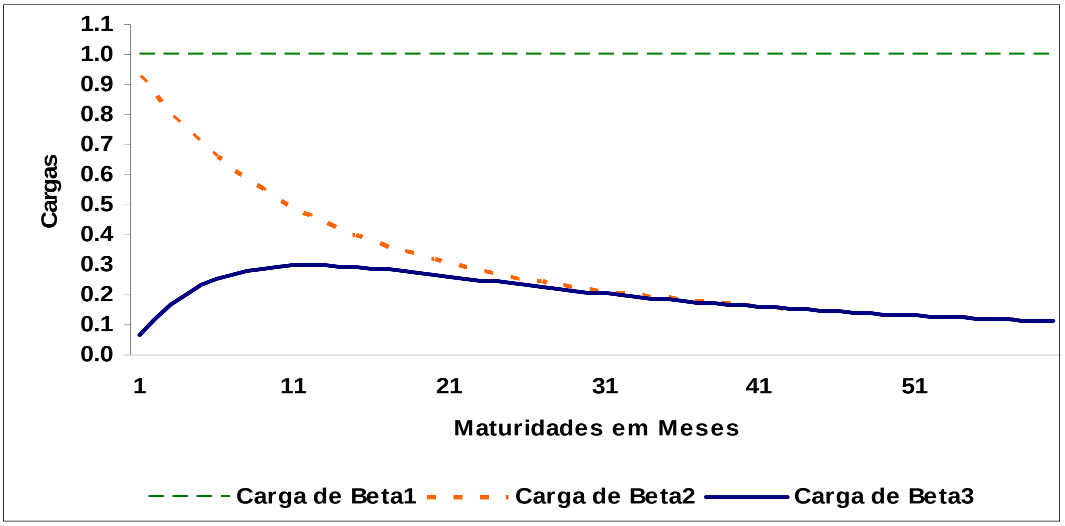

Gráfico 8 - Plotagem das cargas dos fatores β_1 (nível), β_2 (inclinação) e β_3 (curvatura) do modelo de três fatores para o caso brasileiro.

λ_t foi fixado em 0,1493, maximizando β_3 na maturidade de 12 meses.

5.2. Decomposição da Curva de Juros em Séries de β_1, β_2 e β_3

Com a definição do valor de λ_t, o conhecimento das maturidades e dos componentes da matriz de covariâncias, é possível estimar os betas ao longo do tempo. Para isso realizamos a regressão pelo método de mínimos quadrados ordinários (MQO). Como resultado da regressão, obtemos β_1, β_2 e β_3 para cada curva diária observada. São, portanto, 1083 β_1, β_2 e β_3, formando três vetores de betas.

Betas	Média	Mediana	Máximo	Mínimo	Desvio Padrão	Assimetria	Curtose	Jarque-Bera	Soma	Soma dos Desvios
Beta1	14.771	14.782	20.606	10.101	2.487	-0.035	1.907	50.801	15021.600	6286.611
Beta2	0.251	0.535	3.470	-4.888	1.838	-0.372	2.180	51.962	254.837	3433.543
Beta3	0.210	-0.361	5.332	-3.714	1.936	0.792	2.737	109.258	213.473	3807.346

Tabela 2 - Estatísticas descritivas da curva de juros.

Após a estimação, é possível ajustar a curva de juros, ou reproduzi-la *in sample,* utilizando os β_1, β_2 e β_3 encontrados. Abaixo, seguem os gráficos de ajuste para a curva de juros observada em alguns dias. A idéia é ilustrar a capacidade do modelo em ajustar-se para diversos formatos da curva de juros.

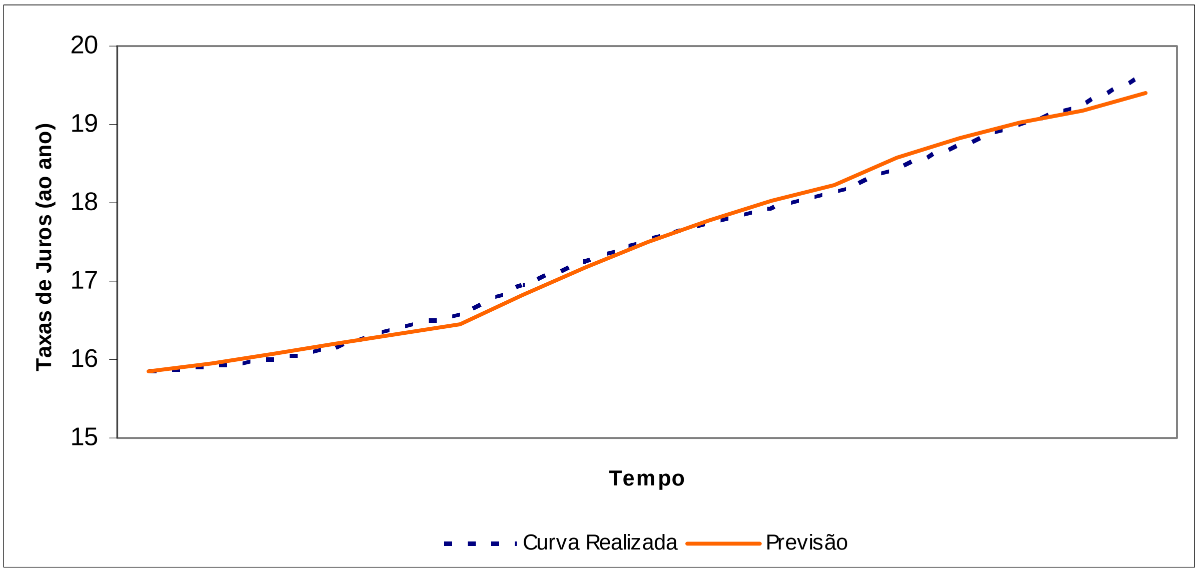

Gráfico 9 - Ajuste da curva de juros no dia 02.06.2004 - positivamente inclinada.

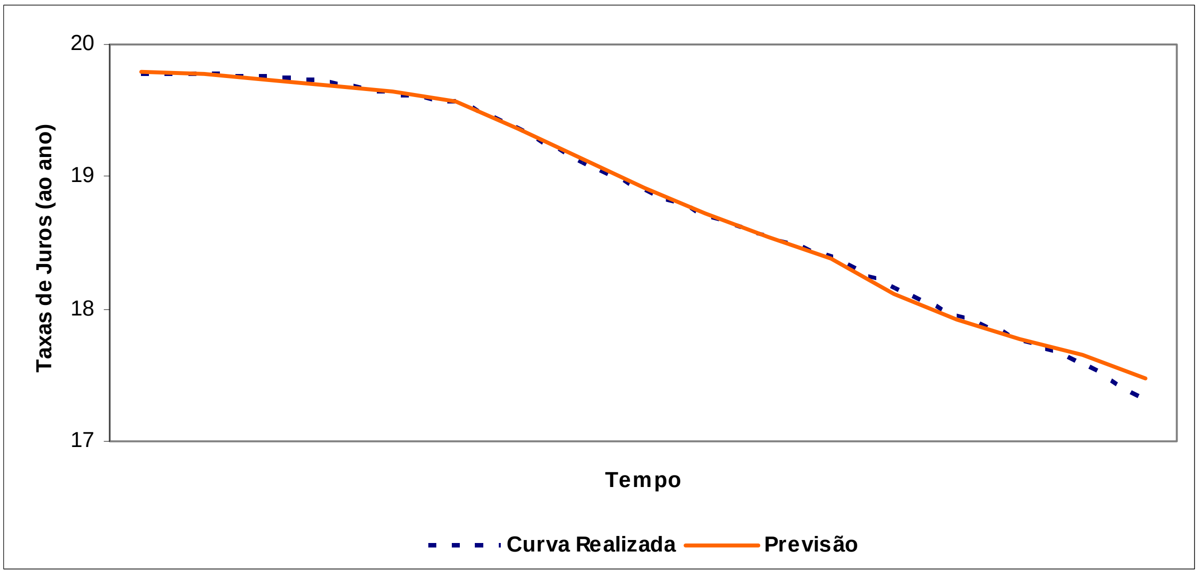

Gráfico 10 - Ajuste da curva de juros no dia 14.06.2005 – negativamente inclinada.

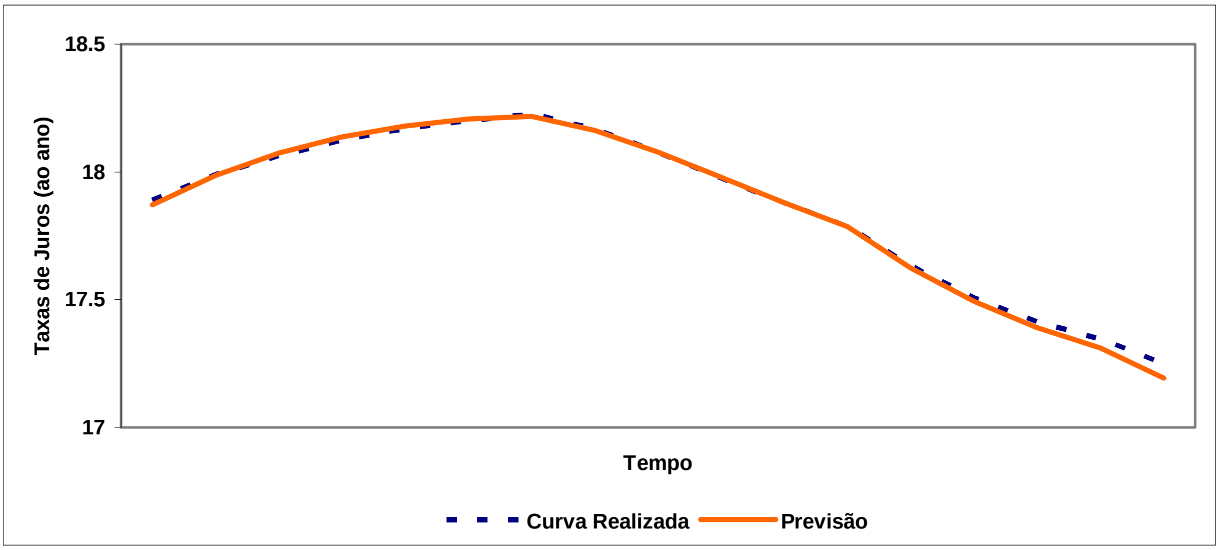

Gráfico 11 - Ajuste da curva de juros no dia 03.01.2005 – côncava.

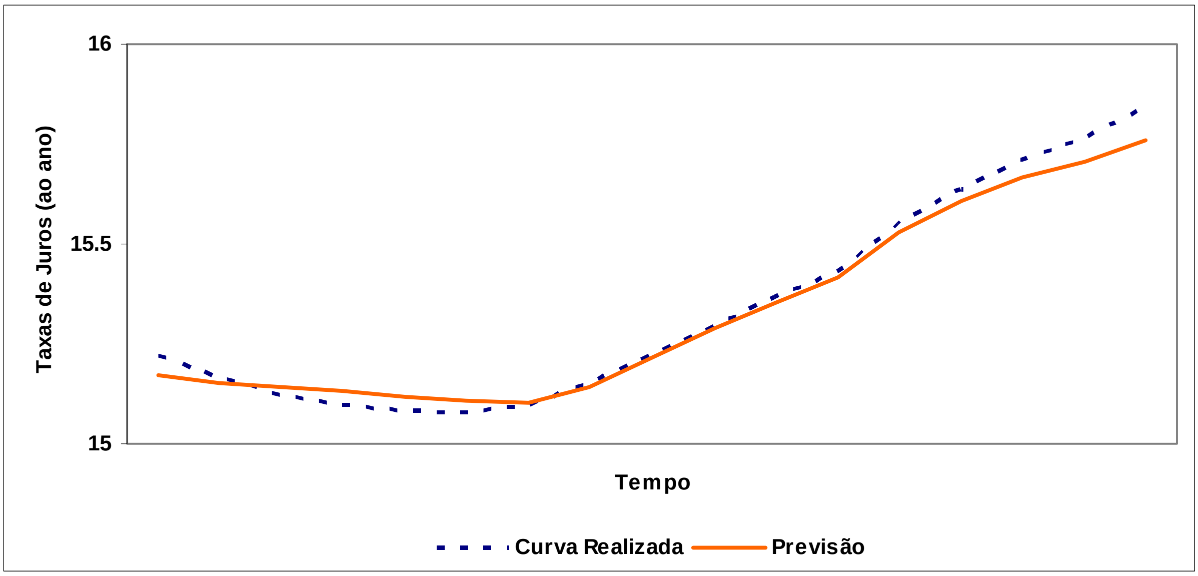

Gráfico 12. Ajuste da curva de juros no dia 06.01.2005 – levemente convexa.

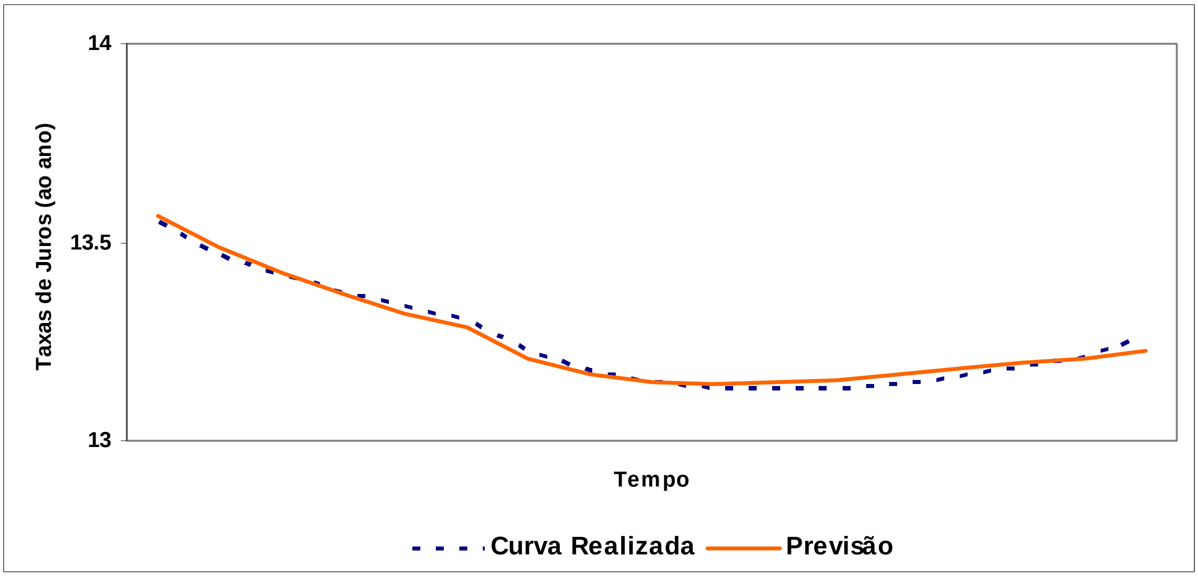

Gráfico 13 - Ajuste da curva de juros no dia 13.11.2006 – levemente convesa.

O erro quadrático médio (EQM) calculado para o ajuste foi de 0,00223 *basis points*.

5.3. Estimação dos Betas

Antes de estimar os betas é necessário testar os resíduos ε_t para verificar se a série é ou não estacionária. Um processo estocástico é dito estacionário (estacionariedade fraca) quando suas médias e variâncias forem constantes ao longo do tempo e o valor da covariância entre dois períodos de tempo depender apenas da distância ou defasagem entre os dois períodos, e não do período efetivo em que a covariância é calculada. Dito de outra forma temos:

$$E(Y_t) = \mu$$

$$Var(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2 = \sigma^2$$

$$Cov_k = E[(Y_t - \mu)\,(Y_{t+k} - \mu)]$$

Uma série estacionária, portanto, não possui tendência. Para identificação inicial da presença de tendência, pode-se traçar um gráfico de linha projetando os valores dos betas.

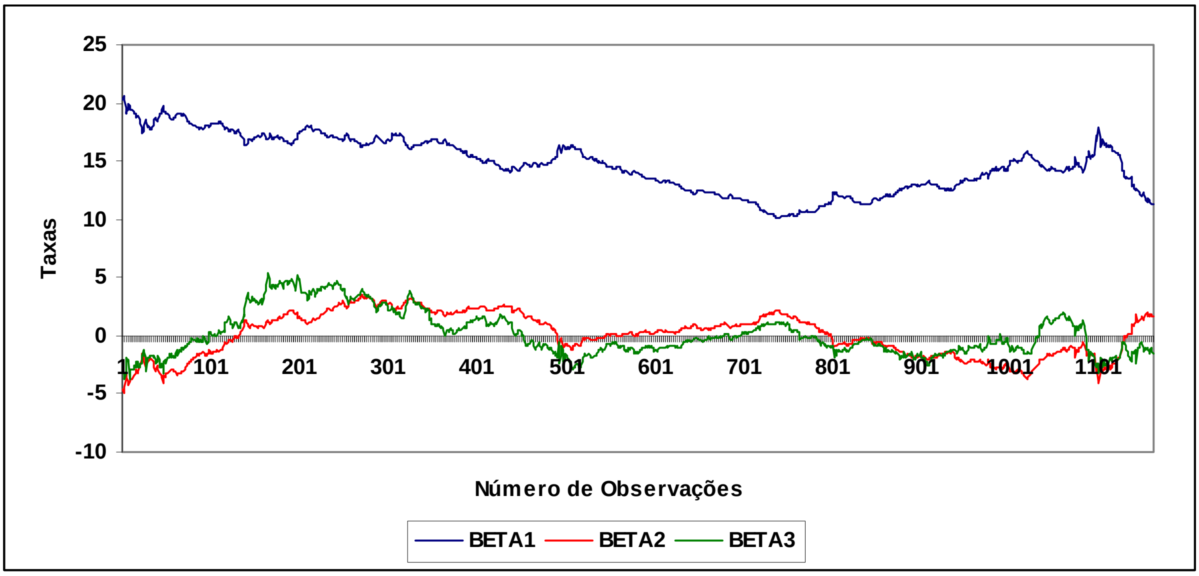

Gráfico 14 - Séries de betas. Identificação de tendência.

Analisando o gráfico acima podemos notar a presença de tendências positivas e negativas ao longo do tempo e, portanto, deduzir que a série é não estacionária. Para identificação mais precisa da série (se estacionária ou não estacionária) realizamos o teste de Dickey-Fuller aumentado (ADF).

Um processo linear auto-regressivo de ordem *p*, *AR(p)*, pode ser escrito como:

$$A(L)y_t = \mu + \varepsilon_t$$

Onde *A(L)* é um polinômio de grau *p* no operador *L*, de *lag*:

$$A(L) = 1 - \alpha_1 L + \alpha_1 L^2 - \ldots - \alpha_p L^p$$

O processo é estacionário se *A(L)* tiver todas suas raízes fora do círculo unitário. Se houver raiz dentro do círculo unitário, o processo é explosivo e evidentemente não estacionário. No entanto, se houver raiz sobre o círculo, ele é não estacionário, mas não é explosivo. No caso do *AR(1)* a raiz unitária corresponde ao processo:

$$Y_t = \mu + y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Esse processo é um "passeio aleatório" com tendência determinística m. O teste ADF tem como hipótese nula a presença de raiz unitária no processo *AR(p)*. Abaixo, segue a saída de dados obtidos a partir do EViews para o teste ADF:

	ADF	
	sem tendência	com tendência
Beta 1	-1.742	0.443
Beta 2	-1.618	-2.442
Beta 3	-2.172	-3.000

* Valor crítico a 5% = -2,864

** Valor crítico a 5% = -3,414

Tabela 3 - Resultado do teste ADF

Verificamos que ao nível de significância de 5% não é possível rejeitar a hipótese nula de existência de uma raiz unitária. Portanto, as séries de β_1, β_2 e β_3 possuem raiz fora do círculo unitário, ou seja, as séries são não estacionárias e possuem tendência estocástica. Apesar da não indicação de utilização de modelos auto-regressivos para estimação de séries temporais não estacionárias, para não obtenção de regressão espúria, podemos utilizar estes modelos quando as séries são explosivas[6].

[6] Uma série é não estacionária explosiva quando os coeficientes do polinômio são maiores que 1. Séries econômicas geralmente são explosivas, pois incorporam choques e tem elevado grau de persistência. Diante de variáveis com esse comportamento pode-se obter bons resultados de estimação mesmo utilizando-se de modelos auto regressivos, pois mantêm-se importantes propriedades utilizando-se de estimação utilizando as variáveis em nível.

O próximo passo rumo à previsão *out of sample* da curva de juros é estimar os betas. Assim como fizeram Diebold e Li vamos utilizar o modelo Auto-Regressivo (AR) e o modelo de Auto Regressão Vetorial (VAR) para estimar os betas.

Um modelo AR de uma variável representada por Y_t no momento t, pode ser modelada como:

$$(Y_t - \delta) = \alpha\ (Y_{t-1} - \delta) + \varepsilon_t$$

Onde δ é a média de Y e ε_t é um termo de erro aleatório não correlacionado com média zero e variância constante σ^2, ou seja, ruído branco. Dizemos então que Y_t segue um processo estocástico auto-regressivo de primeira ordem, ou AR(1). O valor de Y no período t depende de seu valor no período anterior mais um termo aleatório. Os valores de Y são expressos em relação ao seu valor médio. De outra maneira, o modelo indica que o valor previsto de Y no período t é simplesmente alguma proporção (α) de seu valor no tempo (t – 1) mais uma perturbação ou choque aleatório no período t. Se considerarmos o modelo:

$$(Y_t - \delta) = \alpha_1\ (Y_{t-1} - \delta) + \alpha_2\ (Y_{t-2} - \delta)\varepsilon_t$$

Podemos dizer que Y segue um processo auto-regressivo de segunda ordem, ou AR(2).

Como resultado da estimação dos betas em nível, obtivemos a seguinte saída de dados do EViews:

```
Estimation Equation:
=====================
BETA1=C(1) + C(2) * BETA1(-1)
BETA2=C(1) + C(2) * BETA2
BETA3=C(1) + C(2) * BETA2 (-1)
Substituted Coefficients:
=====================
BETA1 = 0.04685584416 + 0.9965054654 * BETA1(-1)
BETA2=0.002030256169+0.9963870768*BETA2(-1)
BETA3=0.004013406126+0.9905238522*BETA3(-1)
```

Tabela 4 - Coeficientes de β_1, β_2 e β_3 obtidos através da estimação pelo modelo AR(1)

Em um modelo VAR, todas as variáveis são endógenas e dependem das próprias defasagens e das defasagens de todas as demais variáveis do sistema, a escolha da ordem de defasagens do VAR é arbitrária. Por um lado, é desejável incluir o maior número possível de defasagens, de modo a evitar a imposição de restrições falsas sobre a dinâmica do modelo. Por outro lado, quanto maior a ordem de defasagens, maior o número de parâmetros a serem estimados conseqüentemente, menos graus de liberdade para a estimação. De acordo com Harris (1995):

> **"Definindo um vetor z_t com n variáveis endógenas potenciais, é possível especificar o seguinte processo gerador e modelar z_t como um vetor auto regressivo (VAR) sem restrição envolvendo k defasagens de z_t".**

Logo o modelo VAR pode ser representado como:

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \ldots + \alpha_k Y_{t-k} + \phi D_t + \varepsilon_t$$

Onde:

ε_t: é o erro de previsão

Z_t: é um vetor (n x 1)

α_i: corresponde a cada elemento de uma matriz de parâmetros de ordem (n x n)

D_t: representa termos determinísticos, tais como, constante, tendência linear, dummies sazonais, dummies de intervenção, ou qualquer outro tipo de regressor que sejam considerados fixos e não estocásticos.

A equação do modelo VAR pode ser modificada em termos de um modelo de vetor de correção de erro (VEC), segundo Harris (1995):

> **"A principal vantagem de se escrever o sistema em termos do modelo de correção de erro está relacionado ao fato de que, nesse formato, são incorporadas informações tanto de curto quanto de longo prazo via ajustes nas variações em Z_t".**

Como resultado da estimação dos betas em nível, utilizando o modelo VAR, obtivemos os seguintes resultados extraídos do EViews:

```
Estimation Proc:
===============================
LS 1 1 BETA1 BETA2 BETA3 @ C

VAR Model:
===============================
BETA1 = C(1,1)*BETA1(-1) + C(1,2)*BETA2(-1) + C(1,3)*BETA3(-1) + C(1,4)

BETA2 = C(2,1)*BETA1(-1) + C(2,2)*BETA2(-1) + C(2,3)*BETA3(-1) + C(2,4)

BETA3 = C(3,1)*BETA1(-1) + C(3,2)*BETA2(-1) + C(3,3)*BETA3(-1) + C(3,4)

VAR Model - Substituted Coefficients:
===============================
BETA1 = 0.9924544985*BETA1(-1) - 0.01275669939*BETA2(-1) + 0.01513392282*BETA3(-1) + 0.1067313227

BETA2 = 0.006789161132*BETA1(-1) + 0.9994441701*BETA2(-1) - 0.003044836144*BETA3(-1) -
0.09837796477
BETA3 = 0.008245230414*BETA1(-1) + 0.01465531854*BETA2(-1) + 0.9773248393*BETA3(-1) - 0.1187022035
```

Tabela 5 - Coeficientes de β_1, β_2 e β_3 obtidos através da estimação pelo modelo VAR.

5.4. Resultados

Após a estimação dos betas, foi realizada a previsão *out of sample* da curva de juros utilizando os modelo AR e VAR, para o período entre 02.01.2008 e 30.09.2008.

Os resultados obtidos, em termos de EQM, foram:

- AR: 0,00647 *basis points*.
- VAR: 0,00626 *basis points*.

Ao contrário do resultado obtido por Diebold e Li para o caso norte-americano, encontramos melhores resultados de previsão utilizando o modelo VAR (conforme os erros quadráticos médios). Esse fato denota uma possível simultaneidade entre as variáveis (betas).

6. CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi aplicar a metodologia de Diebold e Li para o caso brasileiro e modelar o comportamento da ETTJ para diversos prazos futuros. Notamos que é possível modelar a curva de juros de maneira satisfatória utilizando este modelo. Os resultados do ajuste do modelo satisfazem a importante condição de capacidade para representar as diversas formas possíveis que a curva de juros pode assumir.

É importante ressaltar que o período analisado não incorpora nenhum choque inflacionário ou de origem na política econômica. Desta forma, não há indícios do comportamento do modelo para previsão da curva de juros em períodos mais instáveis do ponto de vista econômico.

O fato de que as melhores previsões foram obtidas a partir de um modelo VAR, demonstra a necessidade de se considerar a possibilidade da existência de correlação entre os betas.

Para o desenvolvimento dos estudos iniciados neste trabalho, apontamos alguns passos que devem ser dados no sentido de aperfeiçoá-lo:

a) Desenvolvimento do estudo para determinação do λ_t. Talvez a maximização do β_3 possa ocorrer e gerar melhores resultados se for encontrada uma maneira mais eficiente para determinar a maturidade que maximiza o β_3. Outra providência que pode ser tomada é a determinação de mais de um λ_t. Pode-se, por exemplo, estabelecer λ_t mensais através de janelas móveis;

b) Incorporar à modelagem as flutuações do comportamento da volatilidade das taxas de juros para melhor previsão, principalmente em períodos de instabilidade econômica;

c) Estudo para determinar se existe cointegração[7] entre os betas. Se essa hipótese for confirmada pode-se utilizar um modelo de correção dos erros para determinar seu comportamento conjunto;

---

[7] Conforme Gabe e Caldeira (2008) “dado o fato de que séries econômicas geralmente possuem tendência, a cointegração avalia a tendência comum de séries de tempo em sistemas multivariados, bem como providencia uma sólida metodologia para modelar tanto a dinâmica de curto como de longo prazo.” Utiliza as informações contida nas variáveis em nível para identificar a interação nos movimentos entre variáveis.

d) Inserir ao modelo a relação entre os fatores e as variáveis macroeconômicas para auxiliar na explicação do comportamento da curva de juros, já que essas novas variáveis poderiam refletir melhor o comportamento dos agentes que determinam os movimentos das taxas de juros. Isso implicaria a perda da parcimônia do modelo. Porém, o aumento da complexidade do modelo pode ser compensado com melhores resultados de previsão;

e) Comparar os resultados obtidos com os resultados gerados por outros modelos para previsão da curva de juros, desde um simples modelo de passeio aleatório como a introdução de filtro de Kalman para delinear o comportamento da curva de juros.

O assunto tratado neste trabalho é muito importante e possui diversas aplicações práticas. Além disso, é extremamente fértil do ponto de vista teórico, oferecendo diversas oportunidades para o seu desenvolvimento através da utilização de um rico arcabouço ferramental econométrico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

SHAW, Edward. *Financial Deepening in Economic Development*. Oxford, 1973.

MCKINNON, Ronald I. *Money and Capital in Economic Development*. *Brookings Inst*., 1973.

ROSSI, José W. A Estrutura a Termo da Taxa de Juros: Uma Síntese. IPEA, 1996.

VARGA, Gyorgy. Teste de Modelos Estatísticos para a Estrutura a Termo no Brasil. Revista Brasileira de Economia, 2008.

VASICEK, Oldrich. *An Equilibrium Characterization of the Term Struture*. Berkeley, 1977.

HULL, John e **WHITE**, Alan. *Pricing Interest Rate Derivative Securities*. Oxford, 1990.

RENDLEMAN, Richard J. e **BARTTER**, Brit J. *The Pricing of Options on Debt Securities*. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1980.

COX, John C., **INGERSOLL**, Jonathan E. e **ROSS**, Stephen A. *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*. Econometrica, (1985).

HO, T. e **LEE**, S. Term *Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims. Journal of Finance*, (1986).

FAMA, E. e **BLISS**, R. *The Information in long-maturity Forward Rates. American Economic Review,* 1987.

FISHER, Irving. *Appreciation and Interest*. *American Economics Association*, 1896.

FISHER, Irving. *The Theory of Interest. as Determined by Impatience to Spend Income and Opportunity to Invest It*. The MacMillan Company, 1896.

KEYNES, John M. *The General Theory*. *The Quarterly Journal of Economics*, 1937.

BIBOW, Joerg. *Europe's Quest for Monetary Stability: Central Banking Gone Astray*. *The Levy Economics Institute*, 2005.

BLANCHARD, Oliver. *Macroeconomia*. Pretence Hall, 2001

CARVALHO, F.C. *Economia Monetária e Financeira: Teoria e Prática*. Editora Campus, 2000.

LITTERMAN, Robert. e **SCHEINKMAN,** José. Commom *Factors Affecting Bond Returns*. *The Journal of Fixed Income*, 1991.

BLISS, Robert R. *Moviments in the Term Struture of Interest Rates*. *Federal Reserve Bank of Atlanta Economic Rewiew*,1997.

KNEZ, Peter, **LITTERMAN**, Robert. e **SCHEINKMAN,** José. *Exploration into Factors Explaning Money Market Returns*. The Journal of Fixed Income, 1994.

HICKS, John. *Value and Capital*. Oxford, 1946.

BODIE, Zvi. **KANE**, Alex. e **MARCUS**, Alan J. *Fundamentos de Investimentos*. Bookman, 2000.

NELSON, Charles R. **SIEGEL**, Andrew F. *Parsimonious Modeling of Yield Curves*. Journal of Business, 1987.

DIEBOLD, Francis e **LI**, Canlin. *Forecasting the Term Structure of Government Bond Yelds*. Journal of Econometrics, 2006.

MALKIEL, B. *Term Structure of Interest Rates. The New Palgrave: a Dictionary of Economics*. Nova York, Macmillan, 1989.

VARGA, Gyorgy e **VALLI**, M. Movimentos da Estrutura a Termo: aplicação da análise de componentes principais ao Brasil. Revista de Estudos Avançados da USP, 2001.

SILVEIRA, G.B. e **BESSADA**, O. Análise de Componentes Principais de Dados Funcionais: uma aplicação às estruturas a termo de taxas de juros. Trabalhos para discussão do Banco do Brasil, 2003.

LUNA, F.E. Aplicação da Metodologia de Componentes Principais na Análise da Estrutura a Termo de Taxa de Juros Brasileira e no Cálculo do Valor em Risco. IPEA, 2006.

GABE, João e **CALDEIRA**, João. *Tracking* Portfólio baseado em Cointegração. VIII Encontro da Sociedade Brasileira de Finanças, 2008.