

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

EMERSON CHRIST BOEIRA

**CONTRIBUIÇÕES PARA O USO DE
REGULARIZAÇÃO EM TÉCNICAS DE
IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS**

Porto Alegre
2023

EMERSON CHRIST BOEIRA

**CONTRIBUIÇÕES PARA O USO DE
REGULARIZAÇÃO EM TÉCNICAS DE
IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Automação e Controle

ORIENTADOR: Prof. Dr. Diego Eckhard

Porto Alegre
2023

EMERSON CHRIST BOEIRA

**CONTRIBUIÇÕES PARA O USO DE
REGULARIZAÇÃO EM TÉCNICAS DE
IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS**

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____
Prof. Dr. Diego Eckhard, UFRGS
Doutor pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul –
Porto Alegre, Brasil

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luis Antônio Aguirre, UFMG
Doutor pela Universidade de Sheffield – Sheffield, Inglaterra

Prof. Dr. Erivelton Geraldo Nepomuceno, UFSJ
Doutor pela Universidade Federal de Minas Gerais – Belo Horizonte, Brasil

Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella, UFRGS
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina – Florianópolis, Brasil

Coordenador do PPGEE: _____
Prof. Dr. Sérgio Luís Haffner

Porto Alegre, março de 2023.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, à minha família. A meus pais Paulo e Maria Elisabeth, a meu irmão Rafael e a meu primo Fellipe por todo suporte e incentivo durante este período. À minha avó, Vó Nida, que foi a base e o incentivo para o estudo em toda a nossa família.

Ao professor Diego pela orientação, pela paciência e pela amizade. À professora Lucíola por ter me dado a primeira oportunidade como bolsista de iniciação científica, pela amizade e pela companhia nos jogos do nosso glorioso Sport Club Internacional.

Aos colegas de PPGEE por toda colaboração e amizade, especialmente aos que frequentavam as baias 1 e 8: Binotto, Chrystian, Daniel, Dudu, Éverton, Félix, Gustavo, Marcos, Tuti e Virgínia.

Aos demais colegas e amigos: Ricardo, Pablo, Gê, Yasmin, Thiago, Bruno, Matheus, Cantelli, Giuliano, Jonnas e Yachel, que tornaram esse período mais fácil e alegre.

Ao PPGEE, ao CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro no período em que fui bolsista.

RESUMO

A partir de trabalhos recentes e inovadores da área de aprendizado de máquina, uma ferramenta matemática conhecida como regularização ganhou notoriedade para o contexto de identificação de sistemas, principalmente devido a novas metodologias para a estimação da matriz de regularização, relacionadas a informações *a priori* sobre o sistema, e a resultados promissores exibidos em trabalhos que empregam tal ferramenta, os quais atingem modelos mais precisos comparados às técnicas clássicas de identificação. Neste sentido, este trabalho apresenta contribuições que exploram o uso dessa ferramenta de regularização para estender técnicas de *identificação de sistemas com ruído colorido na saída*, *identificação de sistemas com erros nas variáveis* e *controle baseado em dados*. No âmbito de identificação de sistemas com ruído colorido na saída, este trabalho apresenta o método dos mínimos quadrados ponderados regularizados, assim como a dedução de matrizes ótimas de regularização e ponderação para este cenário. No contexto de identificação com erros nas variáveis, o trabalho apresenta uma análise de propriedades estatísticas da técnica de estimação por variáveis instrumentais e usa a ferramenta de regularização para minimizar um critério relacionado ao *erro médio quadrático* das estimativas. No contexto de controle baseado em dados, o desenvolvimento para sistemas com erros nas variáveis é estendido para o método da referência virtual, com as particularidades e interpretações voltadas para controle.

Palavras-chave: Identificação de Sistemas, Regularização, Sistemas com Erros nas Variáveis, Controle Baseado em Dados, Virtual Reference Feedback Tuning.

ABSTRACT

Due to recent and innovative papers from the machine learning area, a mathematical tool known as regularization earned notoriety also for the system identification context, especially due to new methodologies to estimate the regularization matrix, which are related to a priori information, and promising results demonstrated on works that use this tool. In this scenario, this work presents contributions that explore the use of the regularization tool to extend methods for *identification of systems with colored output noise*, for *errors-in-variables system identification* and for one *data-driven control method*. Regarding the identification of systems with colored output noise, this work introduces the regularized weighted least-squares method, as well as the computation of the optimal weighting and regularization matrices. In the errors-in-variables system identification scenario, this work presents the statistical properties analysis of the regularized version of the instrumental variable method and it also presents the optimization of the mean square error by using regularization. Finally, regarding the data-driven control contribution, this work extends the errors-in-variables results to the Virtual Reference Feedback Tuning method, according to its characteristics and interpretations that are considered for control.

Keywords: System Identification, Regularization, Errors-In-Variables Systems, Data-Driven Control, Virtual Reference Feedback Tuning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Fluxograma de um procedimento clássico de identificação de sistemas.	17
2	Diagrama de blocos do sistema com erros nas variáveis idealizado. . .	20
3	Diagrama de blocos do sistema ideal com ruído somente na saída. . .	27
4	Respostas ao impulso real (em preto) e estimadas nas 1000 execuções de Monte Carlo para o método de mínimos quadrados sem regularização.	49
5	Respostas ao impulso real (em preto) e estimadas nas 1000 execuções de Monte Carlo para o método de mínimos quadrados com a regularização do tipo SS.	50
6	Resposta ao impulso real do sistema com as respostas ao impulsos identificadas com os métodos MQR (a) e MQPR (b) com a parametrização do tipo DC - Exemplo 1.	72
7	Diagramas de caixa obtidos para a medida <i>fit</i> para cada método de identificação - Exemplo 1.	73
8	Resposta ao impulso real do sistema e respostas ao impulsos identificadas com os métodos MQR (a) e MQPR (b) com a parametrização do tipo DC - Exemplo 2.	74
9	Diagramas de caixa obtidos para a medida <i>fit</i> para cada método de identificação - Exemplo 2.	74
10	Respostas ao impulso estimadas com os métodos de identificação elementares: mínimos quadrados e variável instrumental. Linhas azuis contínuas representam as respostas ao impulso identificadas e a linha vermelha pontilhada representa a resposta ao impulso real do sistema.	90
11	Respostas ao impulso estimadas com a variável instrumental regularizada com a ótima irrestrita e com a ótima simétrica. Linhas azuis contínuas representam as respostas ao impulso identificadas e a linha vermelha pontilhada representa a resposta ao impulso real do sistema.	90
12	Diagramas de caixa para as medidas <i>fit</i> obtidas para as 1000 rodadas de Monte Carlo para cada método analisado.	91
13	Diagrama do sistema em malha fechada.	96
14	Diagrama da malha virtual do VRFT.	100
15	Resposta desejada e respostas obtidas em malha fechada para os controladores estimados com o método dos mínimos quadrados (a) e com o método das variáveis instrumentais (b) para o VRFT.	110

16	Resposta desejada e respostas obtidas em malha fechada para os controladores estimados com o método da variável instrumental regularizada no contexto do VRFT. Uso da matriz ótima irrestrita de regularização exposto em (a) e uso da matriz ótima simétrica de regularização exposto em (b).	111
17	Resposta desejada e respostas obtidas em malha fechada para os controladores estimados com o método da variável instrumental regularizada no contexto do VRFT. Uso da matriz estimada com a parametrização DC (a) e uso da matriz estimada com a parametrização do tipo SS (b).	112
18	Diagrama de caixas das funções custo obtidas para cada método empregado na identificação dos controladores no VRFT nas rodadas de Monte Carlo.	113

LISTA DE TABELAS

1	Polinômios de (36) utilizados em estruturas padrão de modelos.	28
2	Valores da distribuição qui-quadrado χ^2_α em função dos percentis α e dos graus de liberdade da variável aleatória.	34
3	Valores obtidos para $\ \hat{\mathcal{B}}_\theta\ _2^2$ nas simulações de Monte Carlo.	48
4	Valores obtidos para as grandezas de $\hat{\mathcal{V}}_\theta$ nas simulações de Monte Carlo.	48
5	Norma do vetor de polarização, traço da matriz de covariância e traço da matriz de erro médio quadrático para cada método de identificação nas rodadas de Monte Carlo - Exemplo 1.	71
6	Norma do vetor de polarização, traço da matriz de covariância e traço da matriz de erro médio quadrático para cada método de identificação nas rodadas de Monte Carlo - Exemplo 2.	73
7	Vetor de polarização, traço da matriz de covariância e traço da matriz de erro médio quadrático produzido por cada método nas rodadas de Monte Carlo.	89
8	Norma do vetor de polarização, traço da matriz de covariância e traço da matriz de erro médio quadrático obtidos a partir das amostras de Monte Carlo na identificação de controladores pelo método da referência virtual.	109

LISTA DE ABREVIATURAS

AIC	<i>Akaike's Information Criterion</i>
AR	<i>AutoRegressive</i>
ARMA	<i>Autoregressive Moving Average</i>
ARMAX	<i>AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs</i>
ARX	<i>AutoRegressive with eXogenous inputs</i>
BIC	<i>Bayesian Information Criterion</i>
BJ	<i>Box-Jenkins</i>
CV	<i>Cross Validation</i>
DC	<i>Diagonal Correlated</i>
DI	<i>Diagonal</i>
FIR	<i>Finite Impulse Response</i>
GL	Graus de Liberdade
GPR	<i>Gaussian Process Regression</i>
HF	<i>High Frequency</i>
IDENT	<i>System Identification Toolbox</i>
IIR	<i>Infinite impulse response</i>
MA	<i>Moving Average</i>
MPC	<i>Model Predictive Control</i>
MQ	Mínimos quadrados
MQPR	Mínimos quadrados ponderados regularizado
MQR	Mínimos quadrados regularizado
MSE	<i>Mean Squared Error</i>
OCI	<i>Optimal Controller Identification</i>
OE	<i>Output Error</i>
SIB	<i>Slow is Better</i>
SISO	<i>Single-Input Single-Output</i>

SNR	<i>Signal-to-noise ratio</i>
SURE	<i>Stein's Unbiased Risk Estimator</i>
SS	<i>Stable Spline</i>
TC	<i>Tuned Correlated</i>
VI	Variável instrumental
VIR	Variável instrumental regularizada
VRFT	<i>Virtual Reference Feedback Tuning</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS	16
2.1	O sistema ideal e os sinais considerados	19
2.2	A condição experimental	22
2.3	A estrutura do modelo	24
2.4	Identificação de sistemas com ruído na saída	27
2.4.1	O método de minimização do erro de predição	28
2.4.2	Propriedades da estimativa por minimização do erro de predição	30
2.4.3	Escolha da ordem do modelo	35
2.5	Identificação com regularização bayesiana	36
2.5.1	Identificação com o método dos mínimos quadrados	36
2.5.2	Identificação com o método dos mínimos quadrados regularizado	38
2.5.3	Propriedades da estimativa por mínimos quadrados com regularização	39
2.5.4	Matriz ótima de regularização	41
2.5.5	A interpretação bayesiana	41
2.5.6	A estimativa dos hiperparâmetros	43
2.5.7	Estruturas de parametrização para Π	45
2.5.8	Exemplo numérico	47
2.6	Identificação de sistemas com erros nas variáveis	49
2.6.1	Considerações em relação ao modelo	51
2.6.2	Identificação com o método dos mínimos quadrados	52
2.6.3	Identificação com o método das variáveis instrumentais	53
2.7	Considerações finais	55
3	IDENTIFICAÇÃO COM REGULARIZAÇÃO BAYESIANA PARA SISTEMAS COM RUÍDO COLORIDO NA SAÍDA	57
3.1	Identificação de modelos FIR com MQPR	58
3.1.1	Propriedades da estimativa por mínimos quadrados ponderados regularizado	59
3.1.2	Matriz ótima de regularização	61
3.2	A interpretação bayesiana	65
3.2.1	A estimativa dos hiperparâmetros	66
3.2.2	Estruturas de parametrização para Π e Σ	69
3.3	Exemplos numéricos	70
3.3.1	Exemplo com sistema e ruído de primeira ordem	70
3.3.2	Exemplo com sistema de quarta ordem e ruído de segunda ordem	72
3.4	Considerações finais	74

4	REGULARIZAÇÃO ÓTIMA NA IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS COM ERROS NAS VARIÁVEIS	76
4.1	Adicionando regularização na variável instrumental	77
4.2	Propriedades da estimativa por variável instrumental regularizada . . .	78
4.2.1	Polarização da estimativa por variável instrumental regularizada	79
4.2.2	Covariância e erro médio quadrático da estimativa	80
4.3	Otimização do traço da matriz de erro médio quadrático	83
4.3.1	Matriz ótima de regularização sem restrições	84
4.3.2	Matriz ótima de regularização com restrição de simetria	86
4.4	Exemplo Numérico	88
4.5	Considerações finais	91
5	REGULARIZAÇÃO NO MÉTODO DA REFERÊNCIA VIRTUAL	93
5.1	Controle baseado em dados e o método da referência virtual	93
5.1.1	O sistema de controle	96
5.1.2	Estruturas de controladores	97
5.1.3	Controle por modelo de referência	98
5.2	O método da referência virtual	100
5.2.1	Projeto do filtro	101
5.2.2	Solução por mínimos quadrados	102
5.2.3	Solução por variável instrumental	103
5.3	Regularização ótima na estimativa de variáveis instrumentais	104
5.4	Exemplo numérico	108
5.5	Considerações finais	111
6	CONCLUSÃO	114
	REFERÊNCIAS	117
	APÊNDICE A RESULTADOS DE CÁLCULO MATRICIAL	124

1 INTRODUÇÃO

A área de identificação de sistemas tem suas origens no campo matemático da estatística e tem como principal objetivo a modelagem de sistemas dinâmicos a partir de dados experimentais (LJUNG, 1999; SCHOUKENS; LJUNG, 2019). Este tema emergiu na literatura e na prática de sistemas de controle a partir dos anos 1960, visando expandir o universo de aplicabilidade das técnicas de controle moderno que surgiam na época (GEVERS, 2006). Antes disso, tais técnicas eram limitadas a aplicações onde a modelagem matemática era simples e baseada estritamente em fenômenos físicos.

Ao longo dos anos, as técnicas de identificação amadureceram e passaram a ser empregadas em diferentes áreas do conhecimento, como sistemas de controle, sistemas de comunicação, engenharia mecânica, engenharia biomédica, economia, biologia, ciências ambientais e etc, onde são utilizadas para análise espectral, detecção de falhas, reconhecimento de padrões, predição linear e outras finalidades (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

Em particular, dentro do campo de sistemas de controle, a necessidade do uso de modelos cada vez mais precisos e com menos erros ou incertezas é crescente, uma vez que boa parte das técnicas clássicas de projeto de controladores é baseada em modelos dos processos. Ademais, os sistemas de controle automático são componentes intrínsecos e essenciais em diversas esferas da engenharia e da ciência, como em veículos espaciais, sistemas robóticos, sistemas de manufatura e quaisquer operações industriais que envolvam o controle de temperatura, pressão, umidade, vazão e etc (OGATA, 2010). Ainda, dentro deste contexto, com o avanço das tecnologias da microeletrônica, de computadores digitais, de sistemas de medição e de uma busca incessante pela melhoria de qualidade dos produtos, os requisitos nestes sistemas são cada vez mais rígidos e otimizados.

Isto posto, dada a relevância do tema e da busca por metodologias mais precisas e confiáveis no campo da identificação, um novo paradigma vem sendo empregado na última década, em alternativa às metodologias clássicas de identificação por minimização do erro de predição (LJUNG; CHEN; MU, 2020). Tal alternativa é baseada em uma ferramenta matemática denominada regularização, a qual já era conhecida, mas pouco utilizada nesta área. A aplicação emergente desta ferramenta se deu a partir de novas ideias, provenientes do campo de aprendizado de máquinas, e que usam uma *interpretação bayesiana* dos

procedimentos de identificação, sendo, por isso, conhecida como regularização bayesiana.

O paradigma de identificação com regularização bayesiana tem sido amplamente pesquisado e desenvolvido nos últimos anos, apresentando resultados relevantes e notáveis, principalmente quando não se conhece a classe de sistemas que será identificada ou não se conhece a ordem exata do modelo, sendo necessária uma etapa de estimação dessas quantidades. Do ponto de vista tradicional, esta etapa era resolvida por meio do uso de critérios como o critério de informação de Akaike (ou em inglês, *Akaike's information criterion*, AIC), ou com o procedimento de validação cruzada (*cross validation*, CV) (PILLONETTO *et al.*, 2014). No entanto, os trabalhos (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO *et al.*, 2014) demonstram, por meio de uma série de exemplos, que a nova abordagem produz melhores resultados quando comparada à abordagem tradicional de identificação. Assim sendo, motivado por estes novos resultados, este trabalho propõe o uso desta ferramenta em técnicas de *identificação para sistemas com ruído colorido na saída, identificação de sistemas com erros nas variáveis* e sua aplicação em métodos de *controle baseado em dados*.

Para os sistemas com ruído colorido na saída, foi identificado que ainda havia uma lacuna no cenário de identificação com regularização. Os métodos até o momento, explorados em (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO *et al.*, 2014), foram formulados pensando em sistemas que possuem ruído branco contaminando sua saída. Assim no caso de haver ruído colorido, a alternativa atual é aproximar o mesmo por ruído branco ou fazer a identificação do preditor do sistema, ao invés do modelo do sistema.

Já os sistemas com erros nas variáveis são uma categoria de sistemas distinta daquela que é usualmente encontrada e modelada nos problemas clássicos do campo de identificação. A principal característica deste tipo de sistema, que o diferencia dos demais e que dificulta a solução dos problemas de identificação, é a presença de ruído em sua entrada, contaminando o sinal que é conhecido ou obtido pelo usuário. Existe toda uma literatura particular para este tipo de sistema (SÖDERSTRÖM, 2007, 2018), dadas as suas diferentes características e particularidades, assim como existem diferentes técnicas que podem ser empregadas para a correta identificação dos modelos neste cenário. Cabe salientar, também, que esta categoria de sistemas aparece em diversos tipos de aplicação, como é o caso de redes dinâmicas, sistemas mecânicos, controle baseado em dados, entre outros (SÖDERSTRÖM, 2018).

Para sistemas com erros nas variáveis, este trabalho faz o estudo de técnicas *elementares*, como é o caso das técnicas de mínimos quadrados (MQ) e variáveis instrumentais básicas, e propõe a adição de regularização na última, com o propósito de minimizar algum critério de qualidade dos parâmetros estimados. Para tanto, as propriedades da técnica são demonstradas, analisadas e, por fim, calcula-se uma matriz ótima de regularização, que visa minimizar o traço da matriz de erro médio quadrático (*mean squared error - MSE*) das estimativas, que é um critério de qualidade das mesmas.

Além disso, o trabalho amplia o que foi feito no cenário de sistemas com erros nas variáveis para o método de controle baseado em dados conhecido como Virtual Reference Feedback Tuning (VRFT) (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002), ou também, método da referência virtual. Este é um dos métodos diretos de controle baseado em dados, onde a sintonia do controlador é realizada sem um modelo matemático do processo, mas sim, a partir de dados de saída e entrada coletados em experimentos. O estudo deste método é motivado por sua alta popularidade no meio e sua relevância frente a aplicações reais, além do fato de apresentar as soluções por mínimos quadrados e variáveis instrumentais, as quais ainda possuem certas deficiências em algumas propriedades estatísticas e, por isso, ainda apresentam possibilidade de melhoria com o uso da regularização.

Assim sendo, este trabalho está organizado como segue. O capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica com o estado da arte clássico de identificação por minimização do erro de predição, onde tal metodologia é apresentada, assim como as características relevantes dos sistemas e sinais que são considerados neste cenário. Também são discutidas as principais propriedades estatísticas desta metodologia clássica. Além disso, o capítulo 2 também apresenta o novo estado da arte de identificação com regularização, com a formulação do método dos mínimos quadrados regularizados (MQR) e o paralelo da perspectiva bayesiana. O capítulo 2 também apresenta os sistemas com erros nas variáveis e as metodologias elementares utilizadas para identificar os sistemas nesse cenário, assim como suas propriedades estatísticas.

O capítulo 3 apresenta a nova metodologia proposta por esse trabalho de identificação de respostas ao impulso com o uso dos mínimos quadrados ponderados regularizado (MQPR). Neste capítulo é apresentada a formulação do método, suas propriedades estatísticas, a dedução das matrizes ótimas de regularização e ponderação assim como a equivalência desta metodologia com a interpretação bayesiana do procedimento de identificação. Também é desenvolvido um algoritmo para a estimação das matrizes de ponderação e regularização a partir de dados do processo e são apresentados dois exemplos numéricos para demonstrar a eficiência da nova metodologia.

O capítulo 4 apresenta a contribuição do trabalho que busca aprimorar a identificação de sistemas com erros nas variáveis com o uso de regularização na técnica de variáveis instrumentais. São calculadas as propriedades estatísticas do método e a regularização é usada como grau de liberdade em problemas de otimização do erro médio quadrático das estimativas. O capítulo 5 apresenta um procedimento semelhante para o método da referência virtual. Neste capítulo, primeiramente apresenta-se uma introdução sobre os métodos de controle baseado em dados e sobre o método da referência virtual. Em seguida, apresenta-se a formulação do método, suas propriedades estatísticas e o cálculo das matrizes ótimas de regularização. Por fim, o capítulo 6 encerra o trabalho com as conclusões.

2 IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Como descrito no capítulo 1, os modelos matemáticos de sistemas dinâmicos são importantes e amplamente utilizados em diversas áreas do conhecimento. Os modelos buscam representar o comportamento dinâmico e estático de sistemas reais por meio de um conjunto de equações, as quais descrevem relações de causa e efeito entre suas variáveis de entrada e saída. Para obter modelos matemáticos existem diferentes metodologias e, dentro da literatura deste tema, tais metodologias podem ser classificadas de várias formas. Uma delas, por exemplo, agrupa os métodos em três categorias (AGUIRRE, 2015):

- i) Modelagem caixa branca;
- ii) Modelagem caixa preta;
- iii) Modelagem caixa cinza.

Na modelagem caixa branca, leis básicas da física são utilizadas para descrever a dinâmica do processo ou fenômeno em estudo (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989). As técnicas presentes nessa categoria também são consideradas técnicas analíticas. No entanto, em muitos casos, os processos modelados apresentam comportamento complexo ou sofrem a influência de inúmeras variáveis e distúrbios desconhecidos, o que acaba tornando esta categoria de técnicas inviável devido ao tempo e ao conhecimento necessários para a obtenção de um bom modelo (AGUIRRE, 2015). Também este tipo de modelagem tende a resultar em modelos de ordem elevada, visto que usualmente todas as variáveis e dinâmicas presentes são levadas em consideração.

Por outro lado, na modelagem caixa preta, também conhecida como *Identificação de Sistemas*, pouca ou nenhuma informação prévia sobre o processo é utilizada (AGUIRRE, 2015). Técnicas que empregam esta metodologia são caracterizadas como baseadas em experimentos, onde os modelos são obtidos de forma a melhor se ajustarem a um conjunto de dados coletados do processo (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989). Muitas vezes, inclusive, os parâmetros resultantes não têm nenhum sentido físico.

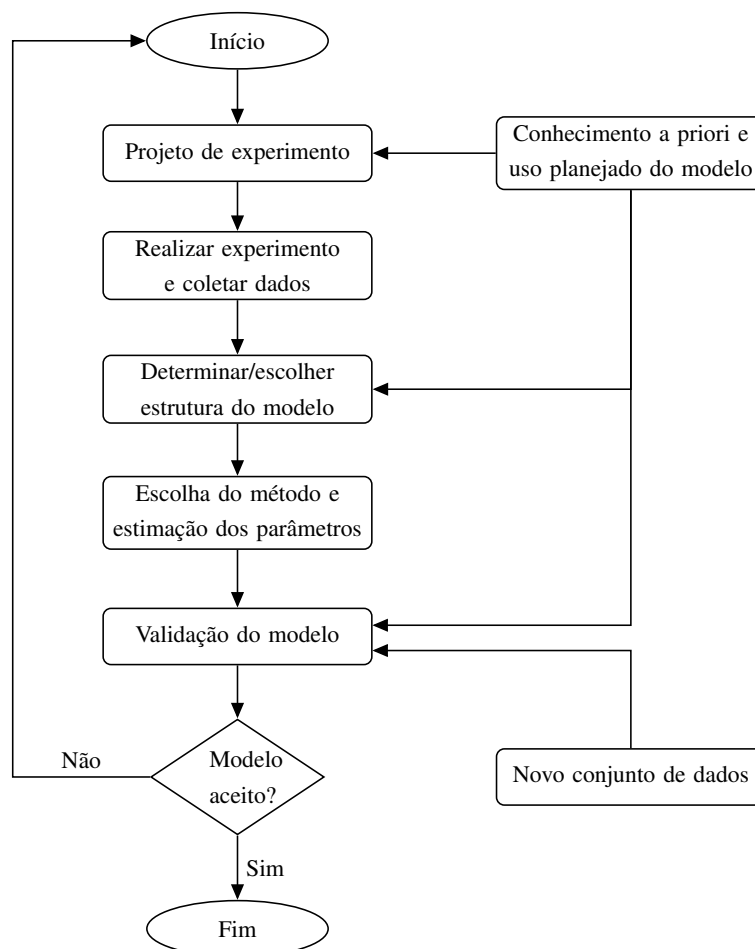
Por fim, técnicas de modelagem caixa cinza são classificadas como intermediárias entre a modelagem analítica e a experimental, onde podem combinar aspectos de ambas.

Geralmente nesta abordagem, informações adicionais, que são ausentes dos dados coletados, são inseridas no processo de identificação, com a definição prévia de uma relação fixa entre variáveis ou característica do modelo, por exemplo (AGUIRRE, 2015).

Este trabalho é voltado à segunda categoria de técnicas discutidas acima: a modelagem caixa preta, ou identificação de sistemas, e busca aprimorar algumas técnicas deste cenário. Porém, antes de demonstrar as principais contribuições deste trabalho, este capítulo é responsável por introduzir conceitos e premissas básicas que foram consideradas e que são fundamentais dentro da área de identificação, além de apresentar uma breve revisão bibliográfica sobre as técnicas clássicas neste contexto.

Antes de introduzir os procedimentos clássicos da literatura de identificação, é preciso salientar que o resultado e a qualidade dos mesmos são influenciados, majoritariamente, por quatro fatores essenciais: o sistema que se deseja identificar, aqui denotado por \mathcal{S} ; a condição experimental de coleta dos dados, simbolizada por \mathcal{X} ; a estrutura de modelo utilizada, denotada por \mathcal{M} ; e a técnica de identificação, denotada por \mathcal{F} (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989). Para uma melhor contextualização, um fluxograma que demonstra cada etapa dos métodos clássicos de identificação é exibido na Figura 1.

Figura 1 – Fluxograma de um procedimento clássico de identificação de sistemas.



Fonte: do autor, adaptado de (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

Além dos quatro fatores supracitados, no fluxograma da Figura 1 também é exibida a etapa de validação do modelo. Nesta etapa, um novo conjunto de dados é coletado e comparado ao modelo obtido usando alguma métrica. Se o modelo satisfizer a métrica, então ele pode ser usado para sua devida finalidade. Caso contrário, como observa-se no fluxograma, deve-se retornar a uma das etapas anteriores.

Isto posto, este capítulo inicia, na seção 2.1, com uma discussão sobre o sistema a ser identificado, assim como a definição de algumas características e propriedades do mesmo e de sinais que são usados nos procedimentos de identificação. O sistema descrito em tal seção é generalizado para a estrutura de sistemas com erros nas variáveis, um dos objetos de estudo deste trabalho. Mas, para a apresentação dos métodos de identificação de sistemas com ruído na saída, como o método de identificação por erro de predição e o método de identificação com regularização bayesiana, o mesmo é particularizado nestas seções. A seção 2.2 apresenta a importância da condição experimental para a coleta de dados e a seção 2.3 introduz as estruturas paramétricas de modelo.

A seção 2.4 apresenta as particularidades do sistema ideal considerado para sistemas com ruído na saída, assim como a metodologia clássica de identificação por erro de predição e suas propriedades. Nesta seção, também é discutida a etapa de escolha da ordem do modelo para a identificação com erro de predição. Ao final da seção, é apresentada a nova metodologia de identificação com regularização bayesiana, que aprimora a escolha de ordem do modelo, se comparada com os métodos de erro de predição, produz estimativas com melhor qualidade e é a base para o desenvolvimento deste trabalho.

Na seção 2.5 apresenta-se a nova metodologia de identificação com regularização bayesiana, começando com a identificação de respostas ao impulso pelo método dos mínimos quadrados e pelo mínimos quadrados regularizados. Também são apresentadas a interpretação bayesiana, a metodologia bayesiana empírica e as estruturas de parametrização da matriz de regularização, que são usadas para estimar a mesma.

Já a seção 2.6 apresenta considerações e simplificações que foram feitas para a categoria de sistemas com erros nas variáveis que são abordados neste trabalho. Além disso, são apresentadas as duas principais metodologias conhecidas como elementares na literatura do tema: o método dos mínimos quadrados e o método da variável instrumental (VI), assim como as principais propriedades estatísticas dos mesmos, que também servem de base para o desenvolvimentos deste trabalho.

Finalmente, cabe salientar, que este capítulo apresenta toda a base da referência bibliográfica do trabalho, com o objetivo de contextualizar a pesquisa e apresentar a relevância da mesma, dentro do universo e da literatura de identificação de sistemas.

2.1 O sistema ideal e os sinais considerados

O sistema real \mathcal{S} a ser identificado e que gera os dados experimentais é desconhecido em situações práticas e é um objeto de natureza distinta dos modelos matemáticos que buscam representá-lo (LJUNG, 1999). No entanto, para que seja possível compreender as técnicas de identificação e analisar suas propriedades, é conveniente considerar que o sistema real seja idealizado ou aproximado, sendo definido a partir de uma relação matemática (LJUNG, 1999). Dessa forma, neste trabalho, o mesmo é representado por um modelo gerador de dados, chamado de sistema ideal.

Nas principais referências clássicas e na maioria dos casos explorados na literatura sobre este assunto, a classe escolhida para a idealização do sistema real é a classe de sistemas lineares e invariantes no tempo, visto que esta categoria é, sem dúvida, a mais relevante nas situações práticas de modelagem e identificação (LJUNG, 1999). Também, como os dados coletados são armazenados e os algoritmos de identificação são executados em computadores digitais, é conveniente considerar que os sistemas sejam de tempo discreto. Além disso, neste trabalho o foco é em sistemas monovariáveis, ou SISO (do inglês: *single-input single-output*), isto é, que possuem somente uma entrada e uma saída.

Pode-se dizer, então, que a saída do sistema idealizado, o qual possui as características relacionadas acima, é descrita por

$$\mathcal{S} : \begin{cases} y(t) = G_0(q)u_0(t) + v(t), \\ u(t) = u_0(t) + s(t), \end{cases} \quad (1)$$

onde $t \in \mathbb{Z}$ representa a variável de tempo discreto, q é o operador de avanço no tempo, ou seja:

$$qx(t) = x(t + 1), \quad (2)$$

$$q^{-1}x(t) = x(t - 1), \quad (3)$$

$y(t) \in \mathbb{R}$ é o sinal de saída medido do sistema, $u(t) \in \mathbb{R}$ é o sinal de entrada medido, $u_0(t) \in \mathbb{R}$ é o sinal de entrada que realmente excita o sistema, $G_0(q)$ é a função de transferência do processo, $v(t) \in \mathbb{R}$ é o sinal de ruído presente na saída do sistema e $s(t)$ é o sinal de ruído presente na entrada. Os sinais de ruído são responsáveis por modelar comportamentos aleatórios e não previstos que ocorrem no sistema. Estes sinais são *processos estocásticos estacionários*, os quais são representado por

$$v(t) = H_0(q)w(t), \quad (4)$$

$$s(t) = L_0(q)\tilde{u}(t), \quad (5)$$

onde $H_0(q)$ é a função de transferência do ruído de saída, $L_0(q)$ é a função de transferência do ruído de entrada e $w(t) \in \mathbb{R}$ e $\tilde{u}(t) \in \mathbb{R}$ são sinais de *ruído branco* de média zero e

função de autocorrelação:

$$E[w(t + \tau)w(t)] = \sigma_w^2 \delta(\tau), \quad (6)$$

$$E[\tilde{u}(t + \tau)\tilde{u}(t)] = \sigma_{\tilde{u}}^2 \delta(\tau), \quad (7)$$

com $E[\cdot]$ denotando o operador de esperança matemática e $\delta(\cdot)$ sendo o *delta de Kronecker*. É importante ressaltar que $v(t)$ e $s(t)$ não abrangem todos os possíveis distúrbios que podem acontecer no sistema, mas se mostram razoáveis para descrever uma ampla gama de distúrbios que ocorrem situações práticas (LJUNG, 1999).

Logo, pode-se afirmar que o sistema real idealizado \mathcal{S} que se deseja identificar é definido por

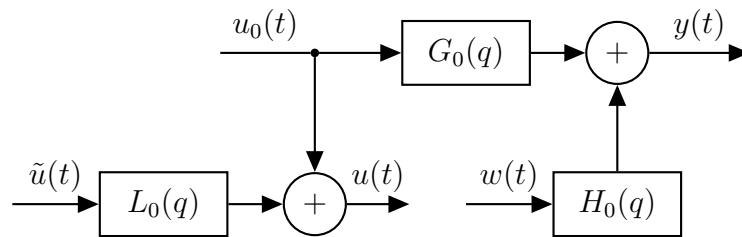
$$\mathcal{S} \triangleq \begin{bmatrix} G_0(q) & H_0(q) & L_0(q) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

onde também é possível expandir as funções de transferência $G_0(q)$, $H_0(q)$ e $L_0(q)$ na variável de atraso no tempo q^{-k} para chegar em

$$G_0(q) = \sum_{k=1}^{\infty} g_0(k)q^{-k}, \quad H_0(q) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} h_0(k)q^{-k}, \quad L_0(q) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \ell_0(k)q^{-k}, \quad (9)$$

com $g_0(k)$, $h_0(k)$ e $\ell_0(k)$ sendo, respectivamente, os k -ésimos coeficientes da resposta ao impulso do sistema, do ruído de saída e do ruído de entrada. Por fim, uma representação gráfica do sistema é ilustrada na Figura 2 por meio de diagrama de blocos.

Figura 2 – Diagrama de blocos do sistema com erros nas variáveis idealizado.



Fonte: do autor, adaptada de (SÖDERSTRÖM, 2018).

Ainda é importante enfatizar algumas características fundamentais das funções de transferência do processo e do ruído. Neste sentido, considera-se, na literatura, que $G_0(q)$, $H_0(q)$ e $L_0(q)$ são funções racionais e próprias, ou seja, representam sistemas causais. Também, outra relação considerada para as funções de transferência dos ruídos são que: $H_0(\infty) = 1$ e $L_0(\infty) = 1$, e assim, os polinômios dos numeradores e denominadores de $H_0(q)$ e $L_0(q)$ são mônicos. Tal consideração não acarreta em perda de generalidade, uma vez que também pode-se ajustar as covariâncias (σ_w^2 e $\sigma_{\tilde{u}}^2$) para caracterizar os ruídos presentes no processo (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

Outro aspecto importante a ser destacado dentro do estudo das técnicas de identificação está relacionado à natureza dos sinais presentes no sistema e que são medidos e utilizados nos procedimentos. O sinal de entrada $u_0(t)$ é um sinal onde não aparecem ruídos ou distúrbios. Portanto, o mesmo é considerado um sinal estritamente *determinístico*. Por outro lado, os sinais $v(t)$ e $s(t)$ são *processos estocásticos estacionários*, modelados a partir de ruído branco filtrado, sendo assim, são caracterizados como sinais com valor aleatório para cada instante de tempo t . Então, para lidar com ambos os tipos de sinais (determinísticos e estocásticos) em uma mesma análise, pode-se introduzir uma definição mais ampla, de sinal *quasi-estacionário*.

Definição 2.1. (LJUNG, 1999) *Considere um sinal $x(t) \in \mathbb{R}^n$. O mesmo é dito quasi-estacionário se:*

$$i) E[x(t)] = m_x(t), \quad |m_x(t)| \leq C_m, \quad \forall t$$

$$ii) E[x(t)x(s)] = r_{xx}(t, s), \quad |r_{xx}(t, s)| \leq C_r, \quad \forall t$$

$$iii) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N r_{xx}(t + \tau, t) = r_{xx}(\tau), \quad \forall \tau,$$

com $r_{xx}(\tau) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sendo conhecida como a função de autocorrelação do sinal quasi-estacionário $x(t)$ e C_m e C_r sendo constantes finitas.

Agora, para melhor contextualizar este conceito, é possível fazer algumas afirmações acerca da definição de processo quasi-estacionário, comparando-o com sinais determinísticos e estocásticos. Primeiramente, é possível notar que se o sinal $x(t)$ for composto exclusivamente por processos estocásticos estacionários, então as condições acima são satisfeitas de maneira trivial. Contudo, se o sinal $x(t)$ for composto por sequências exclusivamente determinísticas, então o operador $E[\cdot]$ perde o efeito e $x(t)$ será quasi-estacionário se for limitado e o limite da condição (iii) existir. Sinais determinísticos periódicos, por exemplo, satisfazem as condições exibidas na Definição 2.1 e, portanto, são sinais quasi-estacionários.

Ainda dentro deste contexto de sinal quasi-estacionário, é interessante definir o operador $\bar{E}[\cdot]$:

$$\bar{E}[x(t)] \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N E[x(t)]. \quad (10)$$

Com isto, pode-se escrever a função de autocorrelação do sinal quasi-estacionário como:

$$r_{xx}(\tau) = \bar{E}[x(t + \tau)x(t)], \quad \forall \tau. \quad (11)$$

Também, diz-se que dois sinais $x(t)$ e $z(t)$ são *conjuntamente quasi-estacionários* se ambos satisfazem as condições i), ii) e iii) da definição 2.1 e se a seguinte função de correlação existir:

$$r_{xz}(\tau) = \bar{E}[x(t + \tau)z(t)], \quad \forall \tau. \quad (12)$$

Se a função de correlação cruzada for nula, então diz-se que os sinais são *descorrelacionados*. Neste contexto, o exemplo da sequência ilustra o que ocorre quando o sinal possui uma parcela determinística e uma parcela estocástica.

Exemplo 2.1. (LJUNG, 1999) *Seja o sinal $x(t)$:*

$$x(t) = u(t) + v(t), \quad (13)$$

com $u(t)$ sendo um sinal determinístico (quasi-estacionário) e $v(t)$ sendo composto exclusivamente por um processo estocástico estacionário com média nula. Nesse caso, tem-se que:

$$\begin{aligned} \bar{E}[x(t + \tau)x(t)] &= \bar{E}[u(t + \tau)u(t)] + \bar{E}[u(t + \tau)v(t)] \\ &\quad + \bar{E}[v(t + \tau)u(t)] + \bar{E}[v(t + \tau)v(t)] \end{aligned} \quad (14)$$

$$= \bar{E}[u(t + \tau)u(t)] + \bar{E}[v(t + \tau)v(t)] \quad (15)$$

$$r_{xx}(\tau) = r_{uu}(\tau) + r_{vv}(\tau), \quad (16)$$

uma vez que $\bar{E}[u(t + \tau)v(t)] = 0, \forall \tau$.

Outra definição importante no contexto do trabalho é a de sinais *ergódicos*.

Definição 2.2. (LJUNG, 1999) *Seja um sinal quasi-estacionário $s(t)$, composto por uma parte determinística $u(t)$ e uma parte estocástica $v(t)$. O sinal $s(t)$ é dito ergódico se:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N s(t + \tau)s(t) \rightarrow \bar{E}[s(t + \tau)s(t)]. \quad (17)$$

Algumas deduções de propriedades assintóticas dos métodos explorados neste trabalho utilizam de forma recorrente a definição 2.2.

Cabe destacar que o sistema definido aqui possui ruído tanto em sua entrada quanto em sua saída, apresentando uma representação mais genérica se comparada aos sistemas que são considerados usualmente nas técnicas de identificação por erro de predição, que possuem ruído somente em sua saída, como pode ser visto em (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989; LJUNG, 1999; AGUIRRE, 2015). Isto se deve ao fato de que, neste trabalho, são apresentadas contribuições tanto para os sistemas da literatura clássica (com ruído somente na saída), quanto para sistemas com ruído na entrada, também conhecidos como *Sistemas com Erros nas Variáveis* (SÖDERSTRÖM, 2018).

2.2 A condição experimental

Além do sistema a ser identificado, outro aspecto fundamental para o resultado e para a qualidade dos modelos estimados é a condição experimental \mathcal{X} . Enquanto algumas

variáveis associadas à estrutura dos modelos e aos métodos de identificação podem ser testadas inúmeras vezes em um computador, os dados experimentais só podem ser alterados por meio de um novo experimento, o que pode ser custoso e demandar elevados períodos de tempo (LJUNG, 1999).

Dentro do projeto e da realização do experimento para identificação, existem algumas escolhas que podem ser feitas pelo usuário, assim como existem algumas restrições que podem estar presentes no problema. O usuário geralmente tem a liberdade para escolher o tipo ou espectro do sinal de excitação, o período de amostragem, o uso de filtros, etc. Além disso, as restrições do problema podem envolver limitações na amplitude, energia ou taxa de variação do sinal de entrada, assim como restrições na topologia e no uso de realimentações no processo, uma vez que em muitos casos é preferível que os dados sejam coletados em malha fechada para manter a estabilidade ou a condição de operação.

Nos casos em que as restrições nos experimentos devem ser rigorosamente respeitadas, é necessário fazer um projeto bem elaborado do experimento de identificação para que não haja desperdício de recursos e de tempo. Por este motivo, existem diversos trabalhos na literatura que abordam o tema de projeto de experimento, onde busca-se uma entrada ótima para o procedimento de identificação, visando respeitar as restrições e diminuir as incertezas nos parâmetros estimados.

Trabalhos que tratam deste assunto surgiram desde os anos 1970 (MEHRA, 1974; GOODWIN, 1982), onde o foco era minimizar incertezas na técnica de identificação por erro de predição. Por outro lado, em trabalhos mais recentes procura-se a obtenção de um sinal de entrada ótimo visando minimizar critérios de aplicações dos modelos. Exemplos dentro desta conjuntura são os trabalhos (JANSSON; HJALMARSSON, 2004; ROJAS *et al.*, 2007; LARSSON *et al.*, 2013) que são voltados para aplicações de modelos em sistemas de controle robusto e controle MPC (*model predictive control*).

Isto posto, supõe-se, na literatura de identificação, que o experimento é realizado no processo e o seguinte conjunto de dados Z^N é obtido:

$$Z^N = \{u(1), y(1), u(2), y(2), \dots, u(N), y(N)\}. \quad (18)$$

Também, é muito comum considerar que o sinal de entrada que excita o sistema e os sinais de ruído são todos decorrelacionados entre si, ou seja:

$$r_{u_0v}(\tau) = \bar{E}[u_0(t + \tau)v(t)] = 0, \quad \forall \tau, \quad (19)$$

$$r_{u_0s}(\tau) = \bar{E}[u_0(t + \tau)s(t)] = 0, \quad \forall \tau, \quad (20)$$

$$r_{vs}(\tau) = \bar{E}[v(t + \tau)s(t)] = 0, \quad \forall \tau. \quad (21)$$

Outra importante característica dos dados, que é consequência direta da condição experimental na qual eles são coletados, é que os mesmos devem ser *informativos o suficiente* com respeito à estrutura do modelo \mathcal{M} escolhida. Isso significa que os dados permitem uma discriminação entre dois diferentes modelos em tal conjunto (LJUNG, 1999),

ou, em outras palavras, que há uma única solução para o problema de identificação. De fato, este aspecto também é consequência da estrutura do modelo a ser utilizado, onde a mesma deve ser *identificável* para que o problema de identificação seja bem condicionado. Contudo, a questão da *identificabilidade* será abordada na próxima seção. No que diz respeito aos dados e à condição experimental, então, é interessante definir o conceito de *persistência de excitação*.

Definição 2.3. (LJUNG, 1999) *Seja o sinal quasi-estacionário $u(t)$. Tal sinal é dito persistentemente excitante de ordem n se a matriz R_n :*

$$R_n = \begin{bmatrix} r_{uu}(0) & r_{uu}(1) & \dots & r_{uu}(n-1) \\ r_{uu}(-1) & r_{uu}(0) & \dots & r_{uu}(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{uu}(1-n) & \dots & \dots & r_{uu}(0) \end{bmatrix}, \quad r_{uu}(\tau) = \bar{E}[u(t+\tau)u(t)], \quad (22)$$

é positiva definida, ou seja, tem posto completo.

Para experimentos realizados com um sinal que excita o sistema $u_0(t)$, que é persistentemente excitante de ordem n , pode-se afirmar que o conjunto de dados Z^N é suficientemente informativo com respeito ao conjunto de modelos \mathcal{M} que contém n parâmetros (LJUNG, 1999).

Por fim, outro resultado que também é função da condição experimental é a incerteza nos parâmetros identificados, a qual pode ser quantificada por estatísticas como a variância e polarização dos parâmetros, assuntos que também serão abordados na sequência do texto. Tais incertezas dependem, dentre outros aspectos, da relação sinal-ruído, ou SNR (do inglês *signal-to-noise ratio*) do experimento. Quanto maior for o SNR, ou seja, quanto maior for a relação entre o sinal que realmente contém a informação e os ruídos que contaminam a saída, mais preciso será o procedimento de identificação.

2.3 A estrutura do modelo

A estrutura do modelo \mathcal{M} a ser usada no procedimento de identificação pode ser *paramétrica* ou *não paramétrica*. Modelos *não paramétricos* podem ser representados por curvas, funções ou tabelas que carregam alguma informação sobre as características do sistema (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989). Dois exemplos deste tipo de modelo são as respostas ao impulso e os diagramas de Bode. Contudo, técnicas de identificação com este tipo de estrutura resultam, tipicamente, em modelos com precisão muito limitada (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989). Quando é necessário um modelo mais confiável para representar o sistema, então, são utilizados os modelos paramétricos.

Modelos paramétricos, por sua vez, são caracterizados por um vetor finito de parâmetros, denotado por θ . Para sistemas lineares e invariantes no tempo, um exemplo de

modelo paramétrico é o *modelo probabilístico completo* (LJUNG, 1999), que para o caso de sistemas com ruído na entrada e saída, pode ser representado por

$$\mathcal{M}(\theta) : \begin{cases} y(t, \theta) = G(q, \theta)u_0(t) + H(q, \theta)w(t), \\ u(t, \theta) = u_0(t) + L(q, \theta)\tilde{u}(t), \\ f_w(x, \theta), \text{ é a função densidade de probabilidade de } w(t), \\ f_{\tilde{u}}(x, \theta), \text{ é a função densidade de probabilidade de } \tilde{u}(t), \\ w(t) \text{ e } \tilde{u}(t) \text{ são ruído branco.} \end{cases} \quad (23)$$

onde $\theta \in \mathbb{R}^n$ e x é a variável independente das *funções densidade de probabilidade* (p.d.f.). Usualmente, $f_w(x, \theta)$ e $f_{\tilde{u}}(x, \theta)$ não são especificadas em termos de uma função, mas sim de algumas de suas características como os momentos de primeira e segunda ordem. Também, é comum assumir que os ruídos $w(t)$ e $\tilde{u}(t)$ são gaussianos, e assim, as p.d.f de $w(t)$ e $\tilde{u}(t)$ podem ser completamente descritas pelos dois primeiros momentos (LJUNG, 1999).

É comum, nas aplicações de identificação de sistemas, que o objetivo do procedimento seja caracterizar somente $G(q, \theta)$, $H(q, \theta)$ e $L(q, \theta)$, sem a necessidade de identificar $f_w(x, \theta)$ e $f_{\tilde{u}}(x, \theta)$ completamente. Na identificação por minimização do erro de predição, por exemplo, adota-se este tipo de abordagem, onde o foco é identificar as funções de transferência, sem a caracterização completa do *modelo probabilístico*.

Em relação às funções de transferência $G(q, \theta)$, $H(q, \theta)$ e $L(q, \theta)$, existem diferentes estruturas que podem ser utilizadas para representá-las. Entre estas, estruturas que são usadas tradicionalmente na literatura descrevem as mesmas como funções racionais na variável de atraso (q^{-1}), onde os parâmetros são os coeficientes de seus polinômios do numerador e denominador. Uma maneira genérica de expressar tais estruturas é dada por (SÖDERSTRÖM, 2007, 2018)

$$\mathcal{M}(\theta) : \begin{cases} y(t) = \frac{B(q, \theta)}{A(q, \theta)}u_0(t) + \frac{C(q, \theta)}{D(q, \theta)}w(t) \\ u(t) = u_0(t) + \frac{X(q, \theta)}{Z(q, \theta)}\tilde{u}(t), \end{cases} \quad (24)$$

onde

$$A(q, \theta) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_{n_a}q^{-n_a}, \quad (25)$$

$$B(q, \theta) = b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b}, \quad (26)$$

$$C(q, \theta) = 1 + c_1q^{-1} + c_2q^{-2} + \dots + c_{n_c}q^{-n_c}, \quad (27)$$

$$D(q, \theta) = 1 + d_1q^{-1} + d_2q^{-2} + \dots + d_{n_d}q^{-n_d}, \quad (28)$$

$$X(q, \theta) = 1 + x_1q^{-1} + x_2q^{-2} + \dots + x_{n_x}q^{-n_x}, \quad (29)$$

$$Z(q, \theta) = 1 + z_1q^{-1} + z_2q^{-2} + \dots + z_{n_z}q^{-n_z}, \quad (30)$$

e

$$\theta = \left[a_1 \dots a_{n_a} \quad b_1 \dots b_{n_b} \quad c_1 \dots c_{n_c} \quad d_1 \dots d_{n_d} \quad x_1 \dots x_{n_x} \quad z_1 \dots z_{n_z} \right]^T. \quad (31)$$

Além disso, é comum assumir que o sinal de entrada $u_0(t)$ também seja modelado como um processo ARMA (*Autoregressive moving average*), visto que esta categoria de modelos é útil para descrever, de forma genérica, processos estacionários ou *quasi-estacionários* (SÖDERSTRÖM, 2018).

Para grande parte das aplicações práticas, a estrutura (24) é muito genérica e alguns dos polinômios apresentados devem ser fixados em 1 ou 0. A escolha da estrutura mais adequada depende de cada caso, onde a natureza do processo e dos ruídos são os principais aspectos que influenciam nesta decisão.

Neste trabalho, postula-se que a estrutura de modelo escolhida será simbolizada por \mathcal{M} e um modelo específico dentro desta estrutura será simbolizado por $\mathcal{M}(\theta)$:

$$\mathcal{M}(\theta) \triangleq \left[G(q, \theta) \quad H(q, \theta) \quad L(q, \theta) \right]. \quad (32)$$

A tarefa da técnica de identificação, então, é encontrar o vetor de parâmetros θ , dentro da estrutura escolhida \mathcal{M} , que melhor se ajuste aos dados Z^N coletados.

Porém, existe outra característica fundamental da estrutura do modelo que deve ser satisfeita para que seja desenvolvida uma identificação adequada do sistema ideal, que é a *identificabilidade* da mesma. De fato, há na literatura definições formais e amplas em relação a identificabilidade de estruturas de modelo. Além de ser um assunto que requer o estudo aprofundado e específico para diferentes classes de modelos, como nos trabalhos (BAZANELLA *et al.*, 2014) e (CAMPESTRINI *et al.*, 2014), onde são feitos respectivamente, a análise de identificabilidade para uma classe de modelos não lineares em uma forma de Brunovsky estendida e para um modelo não linear de um biorreator. No entanto, como tal assunto não é o foco deste trabalho o mesmo não será detalhado neste capítulo. Mais informações sobre tal assunto podem ser encontradas nas referências (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989; LJUNG, 1999; SÖDERSTRÖM, 2018).

Também, é importante introduzir uma premissa com relação ao sistema ideal e sua relação com a estrutura de modelo escolhida e a definição de vetor de parâmetros ideais (ou reais), as quais são usadas de forma recorrente no trabalho e na literatura de identificação para simplificar as análises das metodologias.

Premissa 2.1. *O sistema ideal \mathcal{S} , representado por um modelo gerador de dados, que se quer identificar pertence à classe de modelos escolhida, i.e. $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$. Em outras palavras, $\exists \theta_0 : \mathcal{M}(\theta_0) = \mathcal{S}$.*

É importante salientar que esta premissa é considerada apenas em alguns casos, para simplificar e possibilitar a análise de propriedades para os métodos de identificação. Contudo, em situações práticas não é possível verificá-la.

Definição 2.4. O valor de $\theta_0 : \mathcal{M}(\theta_0) = \mathcal{S}$ é conhecido como vetor de parâmetros ideais (ou reais).

2.4 Identificação de sistemas com ruído na saída

No contexto deste trabalho, uma das técnicas de identificação que são exploradas e aprimoradas com o uso da ferramenta de regularização é voltada para a identificação de uma subcategoria do sistema que é descrito em (1)-(8), que são os sistemas com ruído somente em sua saída, ou seja, onde $\tilde{u}(t) = 0$. De fato, este é o tipo de sistema mais estudado e abordado na literatura de identificação clássica do tema, como pode ser visto em (LJUNG, 1999; SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

Ao considerar este tipo de sistema, a saída pode ser escrita como

$$y(t) = G_0(q)u(t) + H_0(q)w(t), \quad (33)$$

onde a principal particularidade deste sistema é que o sinal $u(t)$ é totalmente conhecido e manipulado pelo usuário, e não contém nenhum tipo de ruído ou incerteza em sua composição. As demais características dos sinais $u(t)$ e $w(t)$ se mantêm em relação ao que fora descrito anteriormente na Seção 2.1: ambos são considerados sinais *quasi-estacionários* e, para dados de experimentos coletados em malha aberta, considera-se que $u(t)$ e $v(t)$ são descorrelacionados, i.e.:

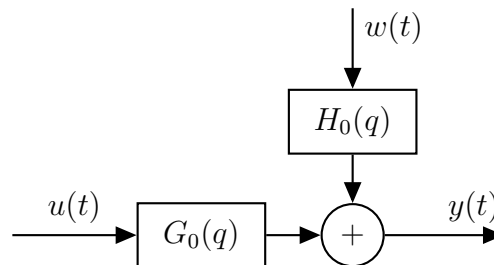
$$r_{uv}(\tau) = \bar{E}[u(t + \tau)v(t)] = 0, \quad \forall \tau. \quad (34)$$

Neste caso, o sistema ideal é definido por

$$\mathcal{S} \triangleq \begin{bmatrix} G_0(q) & H_0(q) \end{bmatrix}, \quad (35)$$

e a Figura 3 mostra um diagrama de blocos deste sistema ideal.

Figura 3 – Diagrama de blocos do sistema ideal com ruído somente na saída.



Fonte: do autor.

Para esta categoria de sistemas com ruído somente na saída é comum representar os modelos $G(q, \theta)$ e $H(q, \theta)$ com a seguinte forma, particularizando a relação (24) (LJUNG, 1999):

$$A(q, \theta)y(t) = \frac{B(q, \theta)}{F(q, \theta)}u(t) + \frac{C(q, \theta)}{D(q, \theta)}w(t), \quad (36)$$

onde

$$A(q, \theta) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_{n_a}q^{-n_a}, \quad (37)$$

$$B(q, \theta) = b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b}, \quad (38)$$

$$C(q, \theta) = 1 + c_1q^{-1} + c_2q^{-2} + \dots + c_{n_c}q^{-n_c}, \quad (39)$$

$$D(q, \theta) = 1 + d_1q^{-1} + d_2q^{-2} + \dots + d_{n_d}q^{-n_d}, \quad (40)$$

$$F(q, \theta) = 1 + f_1q^{-1} + f_2q^{-2} + \dots + f_{n_f}q^{-n_f}, \quad (41)$$

e

$$\theta = \left[a_1 \dots a_{n_a} \quad b_1 \dots b_{n_b} \quad c_1 \dots c_{n_c} \quad d_1 \dots d_{n_d} \quad f_1 \dots f_{n_f} \right]^T. \quad (42)$$

Neste sentido, a Tabela 1 demonstra cada polinômio presente nas estruturas que são mais usadas na prática de identificação de sistemas com ruído somente na saída. Na Tabela 1, a coluna da esquerda mostra os polinômios presentes em cada estrutura e a coluna da direita apresenta o nome da estrutura respectiva.

Tabela 1 – Polinômios de (36) utilizados em estruturas padrão de modelos.

Polinômios (36)	Nome da estrutura
A	AR (<i>AutoRegressive</i>)
B	FIR (<i>Finite Impulse Response</i>)
C	MA (<i>Moving Average</i>)
A, B	ARX (<i>AutoRegressive with eXogenous inputs</i>)
A, B, C	ARMAX (<i>AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs</i>)
A, C	ARMA (<i>AutoRegressive Moving Average</i>)
B, F	OE (<i>Output Error</i>)
B, F, C, D	BJ (<i>Box-Jenkins</i>)

Fonte: (LJUNG, 1999).

2.4.1 O método de minimização do erro de predição

Nesta seção do texto será apresentada a técnica de identificação \mathcal{F} e o critério que é minimizado para ajustar o modelo $\mathcal{M}(\theta)$ aos dados Z^N no caso de sistemas com ruído na saída. Como pode-se perceber, a técnica é um mapa, responsável por levar o usuário de um conjunto de dados Z^N até o vetor de parâmetros estimado $\hat{\theta}$:

$$\mathcal{F} : Z^N \rightarrow \hat{\theta} \in \mathcal{D}_\theta. \quad (43)$$

Para realizar a identificação do modelo, existem diferentes abordagens que podem ser utilizadas, como técnicas baseadas em correlação, técnicas de máxima verossimilhança, técnicas de variáveis instrumentais, etc. Entre estas, aquela que é considerada o estado da

arte clássico, consolidada na literatura e disponível em softwares dedicados e eficientes para este fim, é a técnica de minimização do erro de predição (LJUNG; CHEN; MU, 2020).

Como o próprio nome indica, a técnica é baseada em minimizar o erro de predição entre o modelo do sistema e a saída real que é coletada do experimento. O erro de predição é definido por

$$\varepsilon(t, \theta) \triangleq y(t) - \hat{y}(t, \theta), \quad (44)$$

com $y(t)$ sendo a saída coletada e $\hat{y}(t, \theta)$ a saída predita um passo a frente pelo modelo, ou seja, que prediz $y(t)$ usando o conjunto de dados Z^{t-1} . Na teoria de identificação de sistemas lineares, o preditor ótimo um passo a frente, que produz a menor variância do erro de predição é dado por (LJUNG, 1999)

$$\hat{y}(t, \theta) = H(q, \theta)^{-1}G(q, \theta)u(t) + (1 - H(q, \theta)^{-1})y(t). \quad (45)$$

É importante destacar que o preditor da equação (45) depende somente de valores passados de $y(t)$ e $u(t)$. Também, é importante que a classe de modelos seja *uniformemente estável* para todo $\theta \in \mathcal{D}_\theta$ para que o preditor convirja e suas derivadas também, possibilitando a solução do problema de otimização e evitando erros numéricos. Para isso, introduz-se o conceito de estrutura uniformemente estável:

Definição 2.5. (LJUNG, 1999) *Uma estrutura de modelos \mathcal{M} é uniformemente estável se os filtros $X(q, \theta)$, $\frac{\partial X(q, \theta)}{\partial \theta}$ e $\frac{\partial^2 X(q, \theta)}{\partial \theta^2}$ são estáveis, onde*

$$X(q, \theta) = \begin{bmatrix} H(q, \theta)^{-1}G(q, \theta) & (1 - H(q, \theta)^{-1}) \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Dessa forma, para desenvolver a identificação do modelo a partir do conjunto de dados Z^N coletados do processo, minimiza-se um critério que mede o erro de predição neste conjunto. Neste cenário, podem ser usados alguns critérios, onde o mais comum é a seguinte norma quadrática:

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t, \theta)^2. \quad (47)$$

E, enfim, a estimativa dos parâmetros é dada ao minimizar o critério do erro de predição, dado em (47), ou seja, deve-se resolver o seguinte problema de otimização:

$$\hat{\theta}_{pe} = \arg \min_{\theta \in \mathcal{D}_\theta} V_N(\theta, Z^N). \quad (48)$$

Cabe destacar, porém, que realizar o procedimento de identificação descrito em (48) pode não ser uma tarefa simples. Claramente, o problema depende do conjunto de dados Z^N e do vetor de parâmetros θ . Em algumas estruturas de modelo, como estruturas do tipo

ARX, FIR e AR, a solução do problema descrito em (48) é dada por algoritmos mais simples. Nestes casos, em particular, o algoritmo de mínimos quadrados pode ser utilizado para resolver o problema. Para outras estruturas, no entanto, é necessário utilizar algoritmos mais complexos de otimização, visto que o problema se torna não convexo, onde a função $V_N(\theta, Z^N)$ pode conter mínimos locais e, possivelmente, resultar em problemas mal condicionados (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989; ECKHARD, 2012).

Agora, uma vez que a metodologia de identificação por minimização do erro de predição foi apresentada, serão discutidas as propriedades estatísticas das estimativas resultantes de tal metodologia, que medem a qualidade das mesmas.

2.4.2 Propriedades da estimativa por minimização do erro de predição

A estimação dos parâmetros e do modelo do sistema sempre vai conter erros, devido a quantidade finita de dados usados na identificação e ao ruído que contamina a saída do sistema (LJUNG, 1999). Assim sendo, uma forma de avaliar a qualidade das estimativas obtidas pela identificação por minimização do erro de predição é medindo algumas de suas propriedades estatísticas. Para tanto, na literatura de identificação e neste trabalho, as propriedades avaliadas são a *consistência*, a *polarização*, a *covariância* e o *erro médio quadrático* da estimativa.

Primeiramente, antes de introduzir as propriedades, é importante lembrar as considerações e premissas feitas a respeito do sistema, da condição experimental e da estrutura de modelos. A condição experimental fornece os dados Z^N , descritos em (18). Por simplicidade, aqui os dados são considerados informativos o suficiente com respeito a estrutura do modelo. Além disso, o sistema ideal \mathcal{S} e o modelo identificado $\mathcal{M}(\hat{\theta})$ são caracterizados aqui, em um primeiro momento, por suas respostas em frequência, para que seja possível introduzir um conceito mais amplo das propriedades estatísticas mencionadas acima. Dessa forma, introduz-se:

$$\mathcal{S}(e^{j\omega}) = \begin{bmatrix} G_0(e^{j\omega}) & H_0(e^{j\omega}) \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\mathcal{M}(e^{j\omega}, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} G(e^{j\omega}, \hat{\theta}) & H(e^{j\omega}, \hat{\theta}) \end{bmatrix}, \quad (50)$$

onde $e^{j\omega}$ é a variável de frequência complexa, com ω denotando a frequência, com unidade de *rad/amostra*, e $j = \sqrt{-1}$. A princípio, não é feita nenhuma consideração a respeito da estrutura de modelo escolhida. Com isto, são definidas as propriedades da estimativa do modelo em função das respostas em frequência.

Definição 2.6. (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012) O erro de polarização da estimativa do modelo é definido como

$$\mathcal{B}_{\hat{\theta}}(e^{j\omega}) \triangleq E \left[\mathcal{M}(e^{j\omega}, \hat{\theta}) \right] - \mathcal{S}(e^{j\omega}). \quad (51)$$

O erro de polarização mede a diferença entre a média dos modelos estimados com uma determinada metodologia e o modelo real.

Definição 2.7. (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012) O erro de covariância do modelo é definido como

$$\mathcal{V}_{\hat{\theta}}(e^{j\omega}) \triangleq E \left[\left(\mathcal{M}(e^{j\omega}, \hat{\theta}) - E \left[\mathcal{M}(e^{j\omega}, \hat{\theta}) \right] \right) \left(\mathcal{M}(e^{j\omega}, \hat{\theta}) - E \left[\mathcal{M}(e^{j\omega}, \hat{\theta}) \right] \right)^T \right]. \quad (52)$$

O erro de covariância mede a diferença média entre uma estimativa específica e a média dos modelos estimados. Por fim, uma medida mais ampla, que contempla as duas anteriores é o erro médio quadrático do modelo:

Definição 2.8. (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012) O erro médio quadrático do modelo é definido por

$$\mathcal{Q}_{\hat{\theta}}(e^{j\omega}) \triangleq E \left[\left(\mathcal{M}(e^{j\omega}, \hat{\theta}) - \mathcal{S}(e^{j\omega}) \right) \left(\mathcal{M}(e^{j\omega}, \hat{\theta}) - \mathcal{S}(e^{j\omega}) \right)^T \right] \quad (53)$$

$$\mathcal{Q}_{\hat{\theta}}(e^{j\omega}) = \mathcal{B}_{\hat{\theta}}(e^{j\omega}) \mathcal{B}_{\hat{\theta}}(e^{j\omega})^T + \mathcal{V}_{\hat{\theta}}(e^{j\omega}). \quad (54)$$

Fica evidente que, quanto menor estes erros, melhor será a estimativa do modelo. Porém, nem sempre minimizar uma das propriedades acarreta na minimização das outras, sendo necessário, geralmente, avaliar caso a caso o que é mais relevante.

A análise de algumas destas propriedades é desenvolvida na literatura de identificação para o caso assintótico, onde o número de dados é muito elevado, isto é, $N \rightarrow \infty$. Tais análises são realizadas desta forma pois desenvolver as mesmas para um número de dados finito e genérico é uma tarefa muito complicada (LJUNG, 1999). Assim sendo, quanto menos dados forem utilizados nas aplicações de identificação, menos verossímeis são tais propriedades. Neste sentido, é apresentada, também, a definição de consistência da estimativa do modelo:

Definição 2.9. (LJUNG, 1999) A estimativa do modelo é dita consistente se converge para o sistema ideal quando $N \rightarrow \infty$, ou seja

$$G(e^{j\omega}, \hat{\theta}) \rightarrow G_0(e^{j\omega}), \quad H(e^{j\omega}, \hat{\theta}) \rightarrow H_0(e^{j\omega}), \quad N \rightarrow \infty. \quad (55)$$

As propriedades definidas acima medem a diferença entre os modelos estimados e o sistema ideal de uma forma ampla, relacionando a diferença das respostas em frequência dos mesmos. Isto engloba, inclusive, o caso no qual a estrutura do modelo não é suficiente para reproduzir o sistema ideal, ou seja, quando a Premissa 2.1 não é satisfeita. Neste caso, tais propriedades serão dependentes de características do conjunto de dados e da diferença entre a estrutura do modelo real e da estrutura escolhida para realizar a identificação. Isto impossibilita uma análise genérica das propriedades estatísticas, sendo necessário um estudo específico para cada caso (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989).

Logo, para possibilitar a análise das propriedades estatísticas do método de identificação por minimização do erro de predição com relação aos parâmetros estimados, assume-se que a Premissa 2.1 é satisfeita, ou seja, que o sistema ideal pertença a classe de modelos

escolhidos para o procedimento de identificação, isto é, $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$. Com isto, agora é possível definir as propriedades estatísticas em função de relações entre os parâmetros, como segue.

Definição 2.10. *A polarização dos parâmetros do modelo é definida como*

$$\mathcal{B}_{\hat{\theta}} \triangleq E[\hat{\theta}] - \theta_0. \quad (56)$$

Definição 2.11. *A covariância dos parâmetros é definida como*

$$\mathcal{V}_{\hat{\theta}} \triangleq E \left[\left(E[\hat{\theta}] - \hat{\theta} \right) \left(E[\hat{\theta}] - \hat{\theta} \right)^T \right]. \quad (57)$$

Definição 2.12. *O erro médio quadrático dos parâmetros é definido como*

$$\mathcal{Q}_{\hat{\theta}} \triangleq E \left[\left(\hat{\theta} - \theta_0 \right) \left(\hat{\theta} - \theta_0 \right)^T \right] \quad (58)$$

$$\mathcal{Q}_{\hat{\theta}} = \mathcal{B}_{\hat{\theta}} \mathcal{B}_{\hat{\theta}}^T + \mathcal{V}_{\hat{\theta}}. \quad (59)$$

Definição 2.13. *A estimativa dos parâmetros é dita consistente, se o vetor dos parâmetros converge para o vetor real de parâmetros quando $N \rightarrow \infty$, isto é*

$$\hat{\theta} \rightarrow \theta_0, \quad N \rightarrow \infty. \quad (60)$$

A partir destas definições, um dos principais resultados da identificação por minimização do erro de predição por ser enunciado no teorema que segue.

Teorema 2.1. *(Adaptado de (LJUNG, 1999)) Seja a estimativa de minimização por erro de predição $\hat{\theta}_{pe}$, definida anteriormente por (48), \mathcal{M} uma estrutura de modelo uniformemente estável e o conjunto de dados Z^∞ suficientemente informativo com respeito a estrutura do modelo, então*

$$\hat{\theta}_{pe} \rightarrow \theta_0, \quad N \rightarrow \infty, \quad (61)$$

isto é, a estimativa é consistente, ou seja, não polarizada para o limite $N \rightarrow \infty$.

O resultado expresso no Teorema 2.1 é fundamental na teoria de identificação e diz que, satisfeita a Premissa 2.1, assim como as condições sobre o conjunto de dados e sobre a estrutura do modelo, a estimativa dos parâmetros por minimização do erro de predição é consistente, ou não polarizada no cenário assintótico, ou seja, para $N \rightarrow \infty$.

Além disso, outro fator fundamental para medir a qualidade da estimativa por minimização do erro de predição é a variância da mesma. Para isso, na literatura é desenvolvida a análise da seguinte variável:

$$\mathbf{X}_{pe} \triangleq \sqrt{N} \left(\hat{\theta}_{pe} - \theta_0 \right), \quad (62)$$

onde se mostra, usando o *Teorema do Limite Central*, que a mesma converge em distribuição, quando $N \rightarrow \infty$ para (LJUNG, 1999)

$$\mathbf{X}_{pe} \xrightarrow{dist} \mathcal{N}(0, \mathbf{U}_{pe}), \quad N \rightarrow \infty \quad (63)$$

onde $\mathcal{N}(0, \mathbf{U}_{pe})$ denota uma variável aleatória de distribuição gaussiana com média zero e matriz de covariância \mathbf{U}_{pe} . A matriz \mathbf{U}_{pe} , por sua vez, é calculada a partir da seguinte relação (LJUNG, 1999):

$$\mathbf{U}_{pe} = \lim_{N \rightarrow \infty} E[\mathbf{X}_{pe} \mathbf{X}_{pe}^T] \quad (64)$$

$$\mathbf{U}_{pe} = \sigma_w^2 \bar{E}[\psi(t, \theta_0) \psi(t, \theta_0)^T]^{-1}, \quad (65)$$

com o vetor $\psi(t, \theta_0)$ sendo definido por

$$\psi(t, \theta_0) \triangleq \left. \frac{\partial \hat{y}(t, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0}. \quad (66)$$

Com isto, outro resultado fundamental da literatura do tema é a conclusão de que a estimativa dos parâmetros na técnica de identificação por erro de predição tem, aproximadamente, a seguinte matriz de covariância quando o número de dados N é elevado (LJUNG, 1999):

$$\mathcal{V}_{\hat{\theta}_{pe}} \approx \frac{\mathbf{U}_{pe}}{N}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (67)$$

É importante enfatizar que, quando o ruído $w(t)$ tem distribuição gaussiana, a matriz de covariância (67) atinge o *limite de Cramér-Rao*, que é o limite mínimo de covariância para estimadores não polarizados do sistema ideal \mathcal{S} (LJUNG, 1999). Isto significa que não existe estimador *não polarizado* que alcance menor covariância. Ainda, como a estimativa por minimização do erro de predição é não polarizada, pode-se concluir que a matriz de erro médio quadrático dos parâmetros, neste cenário, é calculada por

$$\mathcal{Q}_{\hat{\theta}_{pe}} = \mathcal{V}_{\hat{\theta}_{pe}} \approx \frac{\mathbf{U}_{pe}}{N}. \quad (68)$$

Outro resultado interessante no que diz respeito à estimativa $\hat{\theta}_{pe}$ é que pode-se formar os intervalos de confiança para a mesma a partir dos resultados mostrados acima. Como a variável aleatória \mathbf{X}_{pe} converge para uma distribuição gaussiana quando $N \rightarrow \infty$, é possível concluir que a seguinte variável:

$$\left(\hat{\theta}_{pe} - \theta_0 \right)^T \left(\frac{\mathbf{U}_{pe}}{N} \right)^{-1} \left(\hat{\theta}_{pe} - \theta_0 \right), \quad (69)$$

por sua vez, converge para uma distribuição *qui-quadrado*. Dessa forma, pode-se dizer que o vetor de parâmetros $\hat{\theta}_{pe}$ pertence ao seguinte conjunto elipsoidal (LJUNG, 1999):

$$\mathcal{Q}_\theta = \left\{ \hat{\theta}_{pe} : \left(\hat{\theta}_{pe} - \theta_0 \right)^T \left(\frac{\mathbf{U}_{pe}}{N} \right)^{-1} \left(\hat{\theta}_{pe} - \theta_0 \right) \leq \chi_\alpha^2 \right\}, \quad (70)$$

com probabilidade α , com χ_α^2 sendo o valor da distribuição de probabilidade para o nível α de confiança (LJUNG, 1999). Neste sentido, a Tabela 2 demonstra os valores da distribuição qui-quadrado em função dos percentis e dos graus de liberdade (GL) da variável aleatória.

Tabela 2 – Valores da distribuição qui-quadrado χ_α^2 em função dos percentis α e dos graus de liberdade da variável aleatória.

GL	α				
	90 %	95%	97.5%	99%	99.5%
1	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	4.6052	5.9915	7.3778	9.2104	10.5965
3	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8381
4	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8602
5	9.2363	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5475
7	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777

Fonte: (PAPOULIS; PILLAI, 2002).

Como visto nesta seção, o método de identificação por minimização do erro da predição possui propriedades estatísticas muito interessantes. No caso assintótico, suas estimativas são não polarizadas e sua matriz de covariância atinge o limite mínimo de *Cramér-Rao*, propriedades que mostram que as estimativas obtidas com tal metodologia de identificação são de ótima qualidade. Porém, tais propriedades são válidas somente se for possível encontrar o valor correto de $\hat{\theta}_{pe}$, o que pode ser uma tarefa complicada dada a complexidade do problema de otimização (48) para algumas estruturas de modelo (ECKHARD, 2012). Assim, é importante usar ferramentas computacionais apropriadas para a solução do problema em questão, como é o caso dos pacotes IDENT (*System Identification Toolbox*) e SIB (*Slow is Better*), ambos para o ambiente MATLAB, onde o último é baseado nos algoritmos expostos em (ECKHARD *et al.*, 2013).

Também é importante observar que as propriedades são extremamente vantajosas no caso em que a Premissa 2.1 é satisfeita e quando o número de dados é muito elevado, tendendo ao infinito. Caso contrário, quando o número de dados é pequeno, não se pode afirmar nada em relação as propriedades e, como é difícil satisfazer a Premissa 2.1 em situações práticas, é comum escolher modelos de ordem elevada nos procedimentos de identificação, o que pode resultar em erros de variância elevada e, ainda, em problemas numéricos na solução da otimização.

2.4.3 Escolha da ordem do modelo

Por fim, um aspecto essencial no procedimento de identificação, que ainda não foi comentado é a escolha da ordem do modelo. Na seção 2.3 e no início da seção 2.4 foram apresentadas diferentes estruturas do modelo que podem ser utilizadas. Contudo, nada foi dito a respeito da escolha da ordem do modelo, isto é, quantos parâmetros devem ser identificados, ou de forma equivalente, qual a ordem dos polinômios (37), (38), (39), (40), e (41). Este aspecto é muito importante em aplicações práticas, visto que não é possível verificar a Premissa 2.1 e, por conseguinte, modelos de alta ordem são usualmente escolhidos de forma a capturar todas as possíveis dinâmicas lineares do sistema. Ultimamente, ainda, tal assunto tem sido aprimorado na área de identificação com a introdução de novas estimativas que usam a regularização bayesiana.

Uma escolha de estrutura de modelo linear flexível, com muitos parâmetros a serem estimados, geralmente produz estimativas com menor polarização, pois é mais fácil se aproximar do sistema ideal neste cenário. Por outro lado, muitos parâmetros livres resultam em maior erro de variância, visto que uma maior flexibilidade é mais suscetível às incertezas do ruído. Assim sendo, é necessário estabelecer um compromisso entre os erros de polarização e variância, visando a minimização do erro médio total. Tal compromisso é consequência de uma escolha adequada para a ordem da estrutura do modelo (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012).

Logo, existem alguns critérios para identificação por minimização do erro de predição que também levam em consideração a ordem do modelo escolhido, ou o número de parâmetros n , visando reduzir o erro de variância. Um destes critérios é conhecido como o critério de informação de Akaike (AIC), que penaliza um número elevado de parâmetros, buscando um equilíbrio entre flexibilidade e variância:

$$\hat{\theta}_{aic} = \arg \min_{\theta} \left[\ln(V_N(\theta, Z^N)) + 2 \frac{n}{N} \right], \quad (71)$$

onde a minimização também é feita sobre uma família de estruturas de modelo com números de parâmetros diferentes (PILLONETTO *et al.*, 2014). Outro critério utilizado neste contexto, que é uma variação do anterior, é conhecido como critério de informação bayesiana (BIC):

$$\hat{\theta}_{bic} = \arg \min_{\theta} \left[\ln(V_N(\theta, Z^N)) + \ln(N) \frac{n}{N} \right]. \quad (72)$$

Por fim, outra técnica muito utilizada neste sentido, de escolha da ordem ótima do modelo, é a *validação cruzada* (CV). Tal técnica consiste em três passos (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012):

- i) Separar os dados coletados do experimento em duas partes: uma para a etapa de estimação e outra para a validação;

- ii) Estimar os modelos com a minimização do erro de predição;
- iii) Calcular o erro entre a saída medida e a saída predita pelo modelo usando os dados de validação:

$$\epsilon(t, n) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(y(t) - G(q, \hat{\theta}_{pe})u(t) \right)^2. \quad (73)$$

- iv) Escolher o valor de n que minimiza $\epsilon(t, n)$.

Na nova abordagem que surgiu no campo de identificação, esta etapa de escolha de ordem do modelo é simplificada e realizada ao mesmo tempo que a identificação de parâmetros. Este tem sido o papel da regularização bayesiana nos últimos anos, onde é possível aprimorar as estimativas no caso de desconhecer a ordem do modelo real.

2.5 Identificação com regularização bayesiana

Na última década, uma abordagem alternativa para resolver os problemas típicos de identificação de sistemas tem surgido com muito destaque na literatura do tema. Tal abordagem tem origem no campo de *aprendizado de máquinas* a partir dos trabalhos (PILLONETTO; DE NICOLAO, 2010; PILLONETTO; CHIUSO; DE NICOLAO, 2011) e foi levada à comunidade de controle com conteúdo, linguagem e notação mais acessível em (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO *et al.*, 2014), relacionando a nova abordagem com as técnicas clássicas de identificação e o uso da ferramenta de regularização para sistemas que possuem ruído branco em sua saída. Assim sendo, o objetivo desta subseção é fazer uma revisão bibliográfica, expondo esta nova abordagem de identificação de sistemas com regularização. Neste contexto, as ideias que foram aproveitadas do campo de aprendizado de máquina permitiram que se estabelecesse uma relação entre o uso de regularização e a estimação bayesiana.

2.5.1 Identificação com o método dos mínimos quadrados

Aqui será descrita a identificação de modelos FIR com a técnica de mínimos quadrados, que é o ponto de partida para introduzir a ferramenta de regularização. Vale ressaltar, ainda, que esta metodologia se enquadra naquelas descritas na subseção 2.4.1, sendo um caso particular de minimização do erro de predição.

Cabe ressaltar aqui que o método dos mínimos quadrados para a identificação de sistemas FIR fornece uma estimativa não polarizada tanto no caso de sistemas que possuem ruído branco quanto no caso de sistemas com ruído colorido. No entanto, considera-se aqui que o sistema ideal possui ruído branco em sua saída, isto é, $H_0(q) = 1$, pois este é o caso estudados nos trabalhos de identificação com regularização tradicionais da literatura até este momento. O caso de ruído colorido será abordado no capítulo 3. Dessa forma,

estipula-se que a saída do sistema ideal estudado neste cenário é descrita por

$$y(t) = G_0(q)u(t) + w(t). \quad (74)$$

Em modelos com estrutura FIR, considera-se a expansão da função $G(q, \theta)$ no operador de atraso (q^{-1}). Assim a saída predita pelo modelo pode ser escrita como

$$\hat{y}(t, \theta) = \sum_{k=1}^{n_b} g_k(\theta)u(t - k), \quad (75)$$

com $g_k(\theta)$ sendo o k -ésimo coeficiente da resposta ao impulso. Aqui, vale lembrar que $u(t)$ é a entrada do processo. Também, destaca-se que a resposta ao impulso de um modelo FIR tem suporte finito, ou seja, a mesma é truncada até o coeficiente n_b . Para sistemas estáveis, que apresentam resposta ao impulso que decaem exponencialmente e convergem, este truncamento é razoável e ainda permite que o sistema seja caracterizado ou aproximado por tais modelos.

Assim, ao reescrever o preditor ótimo um passo a frente para esta classe de modelos, chega-se em uma equação de regressão linear:

$$\hat{y}(t, \theta) = \varphi(t)^T \theta, \quad (76)$$

onde $\varphi(t) \in \mathbb{R}^{n_b}$ é o vetor regressor e $\theta \in \mathbb{R}^{n_b}$ o vetor de parâmetros, que contém os coeficientes da resposta ao impulso:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} u(t-1) & u(t-2) & \dots & u(t-n_b) \end{bmatrix}^T, \quad (77)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{n_b} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_{n_b} \end{bmatrix}^T. \quad (78)$$

O critério de identificação por minimização de erro de predição para este tipo de estrutura de modelos se torna:

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y(t) - \varphi(t)^T \theta)^2, \quad (79)$$

que também é conhecido como *critério de mínimos quadrados ordinários*. Tal função é quadrática no vetor de parâmetros θ e, sendo assim, o problema de identificação por minimização do erro de predição, possui solução analítica, dada pela *estimativa de mínimos quadrados ordinários* (LJUNG, 1999; PILLONETTO *et al.*, 2014):

$$\hat{\theta}_{mq} = \arg \min_{\theta} V_N(\theta, Z^N), \quad (80)$$

$$\hat{\theta}_{mq} = \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi(t)^T \right)^{-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) \right). \quad (81)$$

É importante destacar que, para haver solução única para o problema de identificação acima, a matriz $\sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi(t)^T$ deve ser inversível. Tal condição é uma consequência da persistência de excitação do sinal $u(t)$.

Uma forma alternativa de escrever o problema é a forma vetorial, onde todas as observações são acumulados no mesmo vetor. Em tal descrição do sistema, o preditor ótimo assume a seguinte forma:

$$\hat{Y} = \Phi\theta, \quad (82)$$

onde

$$\hat{Y} = [\hat{y}(1, \theta) \quad \hat{y}(2, \theta) \quad \dots \quad \hat{y}(N, \theta)]^T, \quad (83)$$

$$\Phi = [\varphi(1) \quad \varphi(2) \quad \dots \quad \varphi(N)]^T. \quad (84)$$

Nesta nova forma vetorial, a estimativa de mínimos quadrados é encontrada através da seguinte relação:

$$\hat{\theta}_{mq} = (\Phi^T \Phi)^{-1} (\Phi^T Y). \quad (85)$$

A princípio, uma grande vantagem de realizar a identificação de um sistema com um modelo FIR é a simplicidade da solução, que é dada pelo algoritmo dos mínimos quadrados. Contudo, quando este procedimento é utilizado, o número de parâmetros identificados geralmente é elevado, visto que deve-se escolher $n = n_b$ de forma a capturar todos os coeficientes da resposta ao impulso do sistema. Dessa forma, enquanto é comum utilizar entre 2, 4, 6 ou até 10 parâmetros para estruturas de modelo do tipo ARX, ARMAX e OE, para estruturas do tipo FIR são utilizados entre 50, 100 ou 200 parâmetros.

Enquanto por um lado é vantajoso escolher um modelo do tipo FIR de alta ordem pela sua flexibilidade, pois ele é capaz de capturar toda a resposta ao impulso do sistema fornecendo uma estimativa não polarizada, uma consequência negativa dessa escolha é que a covariância da estimativa se torna muito elevada (LJUNG, 1999; CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO *et al.*, 2014), tornando o procedimento de identificação impreciso.

Portanto, para aprimorar a qualidade da estimativa neste procedimento em relação à sua elevada covariância, ressurgiu na literatura de identificação o uso da ferramenta de *regularização*. Com o uso desta ferramenta é possível reduzir a alta covariância das estimativas adicionando uma *pequena* polarização nas mesmas. Isto resulta, na média, em modelos mais precisos.

2.5.2 Identificação com o método dos mínimos quadrados regularizado

Agora, com o objetivo de regularizar a estimativa e aprimorar a qualidade da mesma, é necessário adicionar um termo de regularização no critério de identificação. Na literatura,

particularmente em (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO *et al.*, 2014), é proposta uma regularização do tipo \mathcal{L}_2 . Assim sendo, a estimativa dos parâmetros para um sistema FIR por meio dos *mínimos quadrados regularizados* é dada por

$$\hat{\theta}_r = \arg \min_{\theta} \left[V_N(\theta, Z^N) + \theta^T P^{-1} \theta \right], \quad (86)$$

onde $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de regularização. O problema acima, assim como o problema tradicional de mínimos quadrados, é convexo e possui solução analítica, dada por (PILLONETTO *et al.*, 2014):

$$\hat{\theta}_r = (P\Phi^T\Phi + I)^{-1}(P\Phi^TY). \quad (87)$$

Ressalta-se que se a matriz P é singular, o que ocorre em alguns casos, então o problema descrito em (86) não é bem definido. Neste caso, a matriz deve ser decomposta em seus valores singulares para reescrever outro problema de otimização (PILLONETTO *et al.*, 2014):

$$P = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}, \quad (88)$$

onde Λ_P é uma matriz diagonal e seus elementos são os valores singulares de P . A matriz $V = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}$ é ortogonal e V_1 possui o mesmo número de colunas de Λ_P . Agora, o problema de otimização pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \hat{\theta}_r = \arg \min_{\theta} \left(V_N(\theta, Z^N) + \theta^T V_1 \Lambda_P^{-1} V_1^T \theta \right) \\ \text{sujeito a } V_2^T \theta = 0, \end{cases} \quad (89)$$

o qual possui a mesma solução do problema anterior, dada por (87).

2.5.3 Propriedades da estimativa por mínimos quadrados com regularização

Para mensurar, então, a qualidade das estimativas pelo método de identificação com mínimos quadrados regularizados para modelos com estrutura FIR, aqui são apresentadas as propriedades estatísticas do método. Primeiramente, assume-se que o sistema a ser identificado satisfaz a Premissa 2.1, ou seja, que $\mathcal{S} \in \mathcal{M}(\theta)$, que neste caso é um sistema FIR. Além disso, como mencionado anteriormente, aqui considera-se o caso em que o ruído presente na saída do sistema é branco e, com isso, pode-se escrever:

$$y(t) = \varphi(t)^T \theta_0 + w(t), \quad (90)$$

que é a forma de regressão linear para a saída do sistema ideal. Também, apresenta-se a saída na formulação onde todas as amostras estão acumuladas em vetores/matriz:

$$Y = \Phi \theta_0 + W, \quad (91)$$

onde

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \dots & y(N) \end{bmatrix}^T, \quad (92)$$

$$W = \begin{bmatrix} w(1) & w(2) & \dots & w(N) \end{bmatrix}^T, \quad (93)$$

$$E[WW^T] = \sigma_w^2 I, \quad (94)$$

o que auxilia na dedução das propriedades.

Assim, analisa-se o valor esperado de $\hat{\theta}_r$ com o objetivo de obter a polarização em seguida:

$$E[\hat{\theta}_r] = E \left[(P\Phi^T\Phi + I)^{-1} P\Phi^T Y \right] \quad (95)$$

$$= E \left[(P\Phi^T\Phi + I)^{-1} P\Phi^T (\Phi\theta_0 + W) \right] \quad (96)$$

$$= (P\Phi^T\Phi + I)^{-1} P\Phi^T \Phi\theta_0. \quad (97)$$

Assim, nota-se que $E[\hat{\theta}_r] \neq \theta_0$, ou seja, a estimativa de mínimos quadrados regularizados é polarizada. A polarização, por sua vez, é calculada por (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO *et al.*, 2014)

$$\mathcal{B}_r(P) = E[\hat{\theta}_r] - \theta_0 \quad (98)$$

$$= (P\Phi^T\Phi + I)^{-1} P\Phi^T \Phi\theta_0 - (P\Phi^T\Phi + I)^{-1} (P\Phi^T\Phi + I) \theta_0 \quad (99)$$

$$= - (P\Phi^T\Phi + I)^{-1} \theta_0. \quad (100)$$

Vale destacar que caso não haja regularização, o método se torna o mínimos quadrados ordinários e, nesse caso, a polarização é nula, como demonstrado em (LJUNG, 1999).

A covariância das estimativas para esta técnica de identificação pode ser calculada por (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO *et al.*, 2014)

$$\mathcal{V}_r(P) = E \left[\left(E[\hat{\theta}_r] - \hat{\theta}_r \right) \left(E[\hat{\theta}_r] - \hat{\theta}_r \right)^T \right]. \quad (101)$$

$$= E \left\{ \left[(P\Phi^T\Phi + I)^{-1} P\Phi^T Y - (P\Phi^T\Phi + I)^{-1} P\Phi^T \Phi\theta_0 \right] \right. \\ \left. \times \left[(P\Phi^T\Phi + I)^{-1} P\Phi^T Y - (P\Phi^T\Phi + I)^{-1} P\Phi^T \Phi\theta_0 \right]^T \right\}. \quad (102)$$

Ao realizar a substituição da relação $W = Y - \Phi^T\theta_0$ na equação da covariância, chega-se em:

$$\mathcal{V}_r(P) = E \left[(P\Phi^T\Phi + I)^{-1} P\Phi^T W W^T \Phi P^T (\Phi^T \Phi P^T + I)^{-1} \right] \quad (103)$$

$$= \sigma_w^2 (P\Phi^T\Phi + I)^{-1} P\Phi^T \Phi P^T (\Phi^T \Phi P^T + I)^{-1}. \quad (104)$$

Por fim, analisando a MSE, propriedade que abrange as duas anteriores, pela relação descrita em (59) e combinando (100) e (104), conclui-se que (CHEN; OHLSSON;

LJUNG, 2012; PILLONETTO *et al.*, 2014):

$$\mathcal{Q}_r(P) = \sigma_w^2 (P\Phi^T\Phi + I)^{-1} (\sigma_w^{-2}\theta_0\theta_0^T + P\Phi^T\Phi P^T) (\Phi^T\Phi P^T + I)^{-1}. \quad (105)$$

A partir das propriedades de polarização (100), variância (104) e erro médio quadrático (105) dos parâmetros descritas acima, é possível ver a relação entre tais propriedades e a matriz de regularização P . Nota-se que a estimativa será polarizada, o que é uma desvantagem em relação à estimativa tradicional de mínimos quadrados para sistemas do tipo FIR. Contudo, conforme demonstra-se na sequência, existe uma matriz ótima P que minimiza o erro médio quadrático dos parâmetros em um certo sentido matricial.

2.5.4 Matriz ótima de regularização

No contexto de identificação com mínimos quadrados regularizados existe uma escolha de matriz P que minimiza o erro médio quadrático das estimativas, conforme enunciado no Teorema 2.2 (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO *et al.*, 2014).

Teorema 2.2 (Matriz ótima de regularização). (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012) *A matriz de erro médio quadrático, descrita em (105), respeita a seguinte desigualdade matricial:*

$$\text{tr} \mathcal{Q}_r(P) \geq \text{tr} \mathcal{Q}_r(P_0), \quad \forall P \geq 0, \quad (106)$$

com $P_0 = \sigma_w^{-2}\theta_0\theta_0^T$.

Prova. A prova do teorema é demonstrada em (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012). \square

Cabe dizer que a matriz ótima descrita no Teorema 2.2 depende de quantidades que não estão disponíveis para o uso em aplicações reais do método, visto que dependem do valor dos parâmetros ideais, θ_0 e da variância σ_w^2 do ruído de saída, que são desconhecidas. No entanto, essa matriz pode ser estimada, a partir da metodologia que é descrita na sequência.

2.5.5 A interpretação bayesiana

A interpretação bayesiana do procedimento de identificação é uma alternativa amplamente conhecida na literatura e que foi revisitada nos trabalhos de PILLONETTO; DE NICOLAO (2010); PILLONETTO; CHIUSO; DE NICOLAO (2011); CHEN; OHLSSON; LJUNG (2012) para o contexto de identificação com regularização. Esta interpretação foi usada como base para uma metodologia de estimação da matriz de regularização P a partir dos dados coletados do processo, a qual tem se mostrado eficaz em exemplos práticos de identificação.

Na interpretação bayesiana do procedimento de identificação considera-se que o vetor de parâmetros θ a ser identificado é uma variável aleatória com distribuição gaussiana

por si só e sua estimativa é calculada a partir da aplicação do *Teorema de Bayes*, que tem origem na teoria de probabilidade. O teorema descreve a probabilidade de ocorrer um evento A , baseado na ocorrência de outro evento B relacionado a A , o qual se tem informações prévias (ou *a priori*). O teorema é formulado da seguinte maneira:

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(B|A)\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(B)}, \quad (107)$$

com $\mathcal{P}(A)$ simbolizando a probabilidade de ocorrer o evento A e $\mathcal{P}(A|B)$ simbolizando a probabilidade *a posteriori* de ocorrer o evento A , dado que o evento B já ocorreu. Ainda, é importante ressaltar que esta perspectiva do procedimento de identificação é distinta daquela descrita na seção 2.4, onde o vetor de parâmetros é uma variável determinística, mas desconhecida.

Ao considerar que θ é uma variável aleatória gaussiana, como não se tem informação a priori do valor da mesma, uma hipótese razoável é assumir que a mesma possui média zero e uma determinada matriz de covariância, simbolizada por Π (PILLONETTO *et al.*, 2014), ou seja:

$$\theta \sim \mathcal{N}(0, \Pi). \quad (108)$$

Agora, a partir da relação entre a variável de saída do processo (Y), o vetor de ruído (W) e o vetor de parâmetros (θ) de um sistema FIR com ruído branco na saída:

$$Y = \Phi\theta + W, \quad (109)$$

pode-se dizer que na interpretação bayesiana, Y e θ são variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas com a seguinte distribuição (PILLONETTO *et al.*, 2014):

$$\begin{bmatrix} \theta \\ Y \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Pi & \Pi\Phi^T \\ \Phi\Pi & \Phi\Pi\Phi^T + \sigma_w^2 I \end{bmatrix} \right). \quad (110)$$

Também, nesta interpretação do procedimento de identificação supõe-se que o ruído $w(t)$ é gaussiano e independente de θ .

Agora, para realizar a identificação pela interpretação bayesiana usa-se o Teorema de Bayes para calcular o valor para qual a probabilidade condicional de ocorrer θ , dado que se mede a saída Y do processo, é maximizada:

$$\hat{\theta}_B = \arg \max_{\theta} f(\theta|Y) \quad (111)$$

$$f(\theta|Y) = \frac{f(Y|\theta)f(\theta)}{f(Y)}, \quad (112)$$

com $f(Y|\theta)$ sendo a função densidade de probabilidade condicional de Y dado θ e $f(\theta)$ e $f(Y)$ são as funções de densidade *a priori* de Y e θ . Calcular tal estimativa para o caso

de variáveis aleatórias conjuntamente gaussianas, como Y e θ descritas em (110), é um resultado bastante conhecido na literatura de probabilidade (PILLONETTO *et al.*, 2014):

$$\theta|Y \sim \mathcal{N}(\hat{\theta}_B, \Pi_{po}) \quad (113)$$

$$\hat{\theta}_B = \Pi\Phi^T(\Phi\Pi\Phi^T + \sigma_w^2 I)^{-1}Y \quad (114)$$

$$\Pi_{po} = \Pi - \Pi\Phi^T(\Phi\Pi\Phi^T + \sigma_w^2 I)^{-1}\Phi\Pi, \quad (115)$$

onde Π_{po} é a covariância *a posteriori* dos parâmetros, que permite calcular intervalos de incerteza ao redor de $\hat{\theta}_B$ (PILLONETTO *et al.*, 2014).

À vista disso, ao analisar a estimativa bayesiana expressa em (114) ainda não é possível traçar um paralelo entre a mesma e a estimativa de mínimos quadrados regularizados. No entanto, fazendo algumas manipulações algébricas e usando a relação $A(I+BA)^{-1} = (AB+I)^{-1}A$ chega-se na seguinte estimativa bayesiana (PILLONETTO *et al.*, 2014):

$$\hat{\theta}_B = (\Pi\Phi^T\Phi + I)^{-1}\Pi\Phi Y. \quad (116)$$

Enfim, por (116) observa-se que há uma semelhança entre a estimativa bayesiana e a estimativa por mínimos quadrados regularizados, dada por (87). Nota-se que ambas são equivalentes se a matriz de regularização for escolhida como $P = \Pi$, que é a covariância *a priori* de θ . Dessa forma, ao realizar tal escolha, diz-se que a regularização é uma *regularização bayesiana*.

Porém, ainda é preciso escolher uma forma de definir ou estimar os valores numéricos desta matriz de covariância *a priori*, o que pode ser feito a partir de dados coletados do processo, assunto abordado na próxima subseção. Ademais, a partir desse paralelo entre as estimativas citadas, percebe-se que existe uma estreita ligação entre o uso de regularização e estimativas *a priori* (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012). Uma forma de interpretar esta relação é verificando que escolher $P = \Pi$ penaliza valores improváveis de θ na função custo de mínimos quadrados regularizados.

2.5.6 A estimativa dos hiperparâmetros

A interpretação bayesiana do procedimento de identificação também fornece uma metodologia para a estimação da matriz Π a partir dos dados coletados. Dessa forma, com o objetivo de realizar tal estimativa, também é necessário parametrizar tal matriz por um vetor de *hiperparâmetros* η , os quais possuem este nome por se tratarem de parâmetros de uma distribuição *a priori*. Cabe ressaltar, ainda, que a estimativa dos hiperparâmetros é feita a partir da *distribuição marginal* do vetor de saída Y , que segundo a relação (110) é gaussiano com a seguinte distribuição:

$$Y \sim \mathcal{N}(0, \Phi\Pi(\eta)\Phi^T + \sigma_w^2 I). \quad (117)$$

A partir da distribuição marginal da saída (117), é possível formular um problema de estimação de η por *máxima verossimilhança*, usando os dados da saída coletada no experimento de identificação (PILLONETTO *et al.*, 2014). Neste tipo de problema de máxima

verossimilhança, os hiperparâmetros são obtidos de forma a maximizar a probabilidade de terem produzido os dados observados. Isto pode ser traduzido matematicamente como

$$\hat{\eta} = \arg \max_{\eta} f(Y|\eta), \quad (118)$$

onde $f(Y|\eta)$ denota a *função de verossimilhança*, que representa a probabilidade de ocorrer a saída Y medida, dada a parametrização por η . Vale lembrar, também, que a função $f(Y|\eta)$ possui distribuição gaussiana, e por isso é possível escrever a mesma a partir da p.d.f. da distribuição normal multivariável:

$$f(Y|\eta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |\Psi(\eta)|}} \exp\left(-\frac{Y^T \Psi(\eta)^{-1} Y}{2}\right), \quad (119)$$

com $|\cdot|$ denotando o determinante da matriz e $\Psi(\eta)$ sendo definida como

$$\Psi(\eta) \triangleq \Phi \Pi(\eta) \Phi^T + \sigma_w^2 I. \quad (120)$$

Resolver o problema de otimização apresentado em (118) não é uma tarefa simples, dada dependência de $f(Y|\eta)$ nos hiperparâmetros, exibida em (119) e (120). No entanto, ao calcular o logaritmo natural de $f(Y|\eta)$ é possível simplificar o problema, já que esta operação não altera o argumento que maximiza a função objetivo. Logo, ao realizar tal operação e algumas manipulações algébricas, pode-se concluir que resolver o problema descrito em (118) é equivalente a otimizar (PILLONETTO *et al.*, 2014):

$$\hat{\eta} = \arg \min_{\eta} \left(Y^T \Psi(\eta) Y + \ln |\Psi(\eta)| \right). \quad (121)$$

Deve-se enfatizar, também, que o problema de otimização (121) considera somente informações sobre a variável aleatória Y , sem usar nenhuma informação medida sobre θ . Por esse motivo tal problema se caracteriza por ser um problema de *máxima verossimilhança marginal*, também conhecido como *método bayesiano empírico* (PILLONETTO *et al.*, 2014). Isso, de fato, não quer dizer e nem implica que $f(Y|\eta)$ não dependa de θ (pois claramente depende de Π), mas que nenhuma informação desta variável é utilizada nesta estimativa.

Além disso, por outro lado, também existem diferentes metodologias para efetuar a estimativa dos hiperparâmetros, como aquelas descritas em (PILLONETTO; CHIUSO, 2015; MU; CHEN; LJUNG, 2018), que descrevem, além do método bayesiano empírico, um estimador de stein não polarizado, ou (SURE, do inglês *Stein's unbiased risk estimator*). Contudo, vale ressaltar que o algoritmo mais utilizado para este fim, e que produz resultados mais robustos numericamente é o algoritmo descrito acima, do método bayesiano empírico (PILLONETTO; CHIUSO, 2015).

2.5.7 Estruturas de parametrização para Π

Por fim, além da metodologia para estimar os hiperparâmetros, é necessário definir uma maneira de parametrizar a matriz $\Pi(\eta)$ de forma que a mesma represente a covariância *a priori* dos parâmetros θ na interpretação bayesiana. Para isso, a forma mais intuitiva de parametrizar a matriz Π é lembrar que, para modelos do tipo FIR, cada parâmetro representa um coeficiente da resposta ao impulso do sistema. Assim, a matriz de covariância $\Pi(\eta)$ deve refletir o *tamanho* e a *correlação* entre os coeficientes.

Logo, se o sistema identificado é estável e, portanto, sua resposta ao impulso decai com taxa exponencial, então a variância do primeiro parâmetro deve ter um determinado valor, enquanto a variância dos parâmetros subsequentes também devem decair exponencialmente. Assim sendo, a parametrização mais simples indicada na literatura para utilização nos algoritmos de estimação é a seguinte (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012):

$$\text{DI: } \Pi(\eta, i, j) = \begin{cases} \lambda \rho^i, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (122)$$

$$\eta = \begin{bmatrix} \lambda & \rho \end{bmatrix}^T, \quad \lambda \geq 0, \quad 0 \leq \rho < 1, \quad (123)$$

onde i e j foram usados para representar o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz $\Pi(\eta)$. Neste tipo de parametrização, denominado parametrização *diagonal* (DI), fica evidente que λ quantifica a magnitude da resposta ao impulso e ρ corresponde ao decaimento exponencial.

A parametrização diagonal (122) ainda é limitada e só considera o decaimento exponencial dos coeficientes. Assim, de forma a introduzir mais detalhe na parametrização, é preciso de outras suposições (ou informações) na matriz de covariância *a priori*. Neste contexto, uma suposição razoável a respeito da resposta ao impulso do sistema a ser identificado é que a mesma seja suave, isto é, existe uma correlação positiva entre termos vizinhos. Deste modo, é possível adicionar mais um hiperparâmetro na parametrização, que é responsável por medir tal correlação (PILLONETTO *et al.*, 2014):

$$\text{DC: } \Pi(\eta, i, j) = \lambda \rho^{(i+j)/2} \gamma^{|i-j|}, \quad (124)$$

$$\eta = \begin{bmatrix} \lambda & \rho & \gamma \end{bmatrix}^T, \quad \lambda \geq 0, \quad 0 \leq \rho < 1, \quad |\gamma| \leq 1, \quad (125)$$

onde, agora, γ é o parâmetro de correlação entre os coeficientes, que é maior para coeficientes vizinhos. Isto implica, portanto, que elementos mais próximos da diagonal principal de $\Pi(\eta)$ tem maior correlação. Esta parametrização é denominada *diagonal correlated* (DC).

Outra proposta de parametrização elaborada na literatura é uma simplificação da parametrização DC, que tem por objetivo reduzir o número de hiperparâmetros e simplificar o problema de otimização, fixando $\gamma = \rho^{1/2}$. Com isto, tem-se que (PILLONETTO *et al.*,

2014):

$$\text{TC: } \Pi(\eta, i, j) = \lambda \rho^{\max(i, j)}, \quad (126)$$

$$\eta = \begin{bmatrix} \lambda & \rho \end{bmatrix}^T, \quad \lambda \geq 0, \quad 0 \leq \rho < 1, \quad (127)$$

a qual é denominada parametrização *tuned correlated* (TC).

Por fim, um último exemplo de possibilidade para parametrizar a matriz de covariância *a priori*, que teve origem nos primeiros trabalhos que abordaram a identificação com regularização (PILLONETTO; DE NICOLAO, 2010; PILLONETTO; CHIUSO; DE NICOLAO, 2011), ainda no contexto de *gaussian process regression* (GPR), da área de aprendizado de máquinas, é dada por

$$\text{SS: } \Pi(\eta, i, j) = \lambda \left(\frac{\rho^{i+j+\max(i, j)}}{2} - \frac{\rho^{3\max(i, j)}}{6} \right) \quad (128)$$

$$\eta = \begin{bmatrix} \lambda & \rho \end{bmatrix}^T, \quad \lambda \geq 0, \quad 0 \leq \rho < 1. \quad (129)$$

Esta parametrização é conhecida como *stable spline* (SS) e apresentou bons resultados nos testes desenvolvidos em (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO *et al.*, 2014).

Ainda, é importante salientar que as parametrizações supracitadas são propostas e melhor se encaixam para sistemas que apresentam resposta ao impulso estável e suave. Além disso, na literatura há outras propostas de parametrização para $\Pi(\eta)$, que variam conforme as características mais comuns de respostas ao impulso. Um exemplo disto é a parametrização *high-frequency* (HF), explorada em (PILLONETTO; NICOLAO, 2011), a qual captura oscilações rápidas na resposta ao impulso e, assim, permite até a correlação negativa entre os seus coeficientes, diferente daquelas apresentadas em (122), (124), (126) e (128).

Outro aspecto fundamental a ser destacado em relação aos hiperparâmetros é que suas estimativas são resultado do processo de otimização descrito por (121), que é um problema complexo. O problema é não convexo e necessita de um *solver* adequado para que seja resolvido de forma eficaz. À vista disso, o trabalho (CHEN; LJUNG, 2013) propõe diferentes algoritmos, mais robustos e dedicados para o problema de otimização em questão, visando obter valores mais fidedignos para as estimativas de hiperparâmetros pelo método bayesiano empírico. Tais algoritmos foram inseridos no pacote IDENT do MATLAB e podem ser usados a partir de funções específicas deste pacote.

Na sequência, é exibido um exemplo numérico, que demonstra que a utilização da regularização bayesiana de fato aprimora a estimativa dos modelos de estrutura FIR, adicionando uma pequena regularização nas estimativas, mas diminuindo significativamente sua covariância, resultando em modelos com maior qualidade, mais próximos da resposta real dos sistemas.

2.5.8 Exemplo numérico

Este exemplo numérico mostra uma comparação entre os métodos de mínimos quadrados e mínimos quadrados regularizados para a identificação de sistemas do tipo FIR, com o objetivo de mostrar as vantagens e propriedades da regularização bayesiana, explicada neste capítulo. Para tanto, considera-se a identificação do sistema descrito pela relação (1), sendo que se escolheu:

$$G_0(q) = \frac{0,02008q^{-1} + 0,04017q^{-2} + 0,02008q^{-3}}{1 - 1,561q^{-1} + 0,6414q^{-2}}, \quad \sigma_w^2 = 0,5, \quad (130)$$

que é o mesmo sistema usado como exemplo em (LJUNG; CHEN; MU, 2020).

Para identificar o mesmo, um sinal de ruído branco com variância $\sigma_u^2 = 5$ foi aplicado em sua entrada e a saída foi coletada em malha aberta. O número de dados usados nos procedimentos foi de $N = 750$. Ainda, como se busca identificar o processo por um modelo do tipo FIR, escolheu-se o número de parâmetros $n = n_b = 35$, para fins de simplificação do exemplo e demonstração das principais propriedades. Com isto, tem-se que a saída do modelo é dada por:

$$y(t, \theta) = \varphi(t)^T \theta, \quad (131)$$

sendo que:

$$\varphi(t)^T = \begin{bmatrix} u(t-1) & u(t-2) & \dots & u(t-35) \end{bmatrix}, \quad (132)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_{35} \end{bmatrix}. \quad (133)$$

Cabe ressaltar que neste exemplo já se sabe que a resposta ao impulso do sistema decai antes de 35 amostras e por isto a escolha por esta quantidade de parâmetros do modelo FIR. No entanto, caso o objetivo fosse a identificação de um sistema real, por exemplo, um dos critérios de escolha de ordem do modelo deveria ser utilizado, conforme foi discutido em 2.4.3.

Para comparar as estatísticas, o procedimento de identificação foi simulado em 10^3 execuções de Monte Carlo e foram avaliadas as técnicas de mínimos quadrados e mínimos quadrados com regularização bayesiana. O número de dados N utilizados e o número de rodadas de Monte Carlos foi escolhido com base em experiências anteriores. Nestes procedimentos a matriz de regularização foi estimada com algumas parametrizações diferentes através da função `arxregul()` do pacote IDENT no MATLAB. As parametrizações usadas para a matriz de regularização foram a DC, a TC e a SS. Os resultados obtidos são exibidos na sequência.

Primeiramente, é comparada a polarização das estimativas, que foi baseada nas amostras das execuções de Monte Carlo. Neste caso, o vetor θ_0 foi obtido a partir da resposta ao impulso de $G_0(q)$. Ademais, como o número de parâmetros é elevado, escolhe-se por

medir esta diferença através da seguinte norma:

$$\|\hat{\mathcal{B}}_{\hat{\theta}}\|_2^2 = \left\| \frac{1}{10^3} \sum_{i=1}^{10^3} (\hat{\theta}_i - \theta_0) \right\|_2^2, \quad (134)$$

sendo que $\hat{\theta}_i$ é o valor estimado na i -ésima rodada de Monte Carlo e $\|x\|_2^2$ é a norma euclidiana quadrática (norma 2) do vetor x . Os resultados obtidos para a norma dos vetores de polarização nas simulações são exibidos na Tabela 3.

Tabela 3 – Valores obtidos para $\|\hat{\mathcal{B}}_{\hat{\theta}}\|_2^2$ nas simulações de Monte Carlo.

	MQ	MQ+REG DC	MQ+REG TC	MQ+REG SS
$\ \hat{\mathcal{B}}_{\hat{\theta}}\ _2^2$	0,0023	0,2849	0,2850	0,2850

Fonte: do autor.

Agora, ao analisar os resultados expostos na Tabela 3 observa-se que a norma do vetor de polarização, estimada nas execuções de Monte Carlo, foi maior nos casos onde se usou a regularização. Por outro lado, o método de mínimos quadrados sem a regularização praticamente não apresentou polarização.

Para prosseguir a análise, é importante comparar grandezas relacionadas à matriz de covariância, já que esta também é uma medida importante de qualidade das estimativas. Por este motivo, tal matriz foi calculada a partir das amostras geradas nas execuções de Monte Carlo por

$$\hat{\mathcal{V}}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{10^3 - 1} \sum_{i=1}^{10^3} \left[\left(\hat{\theta}_i - \frac{1}{10^3} \sum_{j=1}^{10^3} \hat{\theta}_j \right) \left(\hat{\theta}_i - \frac{1}{10^3} \sum_{j=1}^{10^3} \hat{\theta}_j \right)^T \right]. \quad (135)$$

Assim, a partir das matrizes obtidas, a Tabela 4 mostra o máximo autovalor e o traço das mesmas, visando mensurar, de alguma forma, o tamanho da matriz de covariância das estimativas atingidas para cada metodologia e cada parametrização de P .

Tabela 4 – Valores obtidos para as grandezas de $\hat{\mathcal{V}}_{\hat{\theta}}$ nas simulações de Monte Carlo.

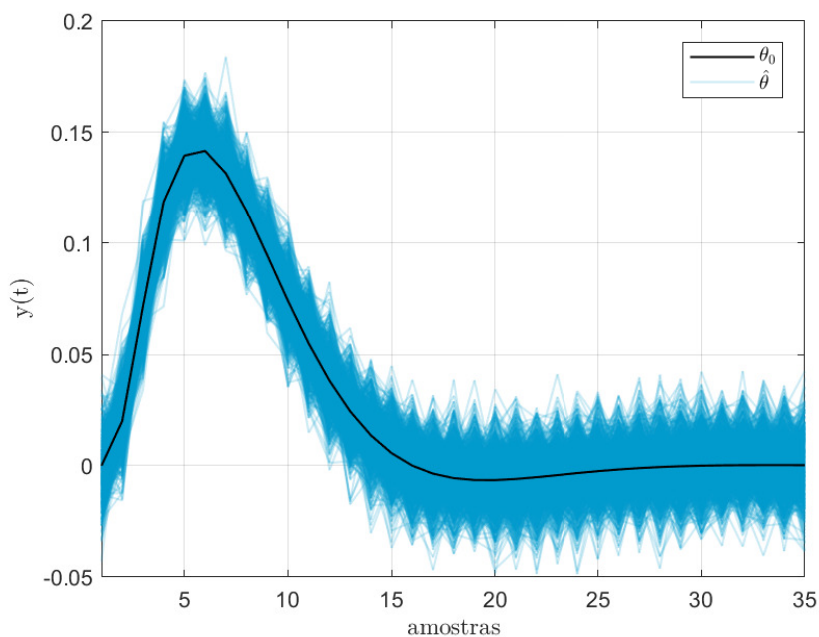
	MQ	MQ+REG DC	MQ+REG TC	MQ+REG SS
$\text{tr}(\hat{\mathcal{V}}_{\hat{\theta}})$	5.237×10^{-3}	1.283×10^{-3}	1.402×10^{-3}	7.381×10^{-4}
Máx. eig($\hat{\mathcal{V}}_{\hat{\theta}}$)	2.045×10^{-4}	1.512×10^{-4}	1.633×10^{-4}	1.610×10^{-4}

Fonte: do autor.

Analisando a Tabela 4, nota-se que as grandezas associadas à matriz de covariância dos parâmetros estimados pelo método dos mínimos quadrados é maior sem a regularização. Ainda, os menores valores são encontrados para o caso da parametrização do tipo SS.

Por fim, são exibidas todas as respostas ao impulso dos sistemas identificados para cada rodada nos casos sem regularização e com a parametrização SS, nas figuras 4, e 5 respectivamente. Tais resultados mostram, de forma concreta, as diferenças obtidas para cada técnica de identificação.

Figura 4 – Respostas ao impulso real (em preto) e estimadas nas 1000 execuções de Monte Carlo para o método de mínimos quadrados sem regularização.



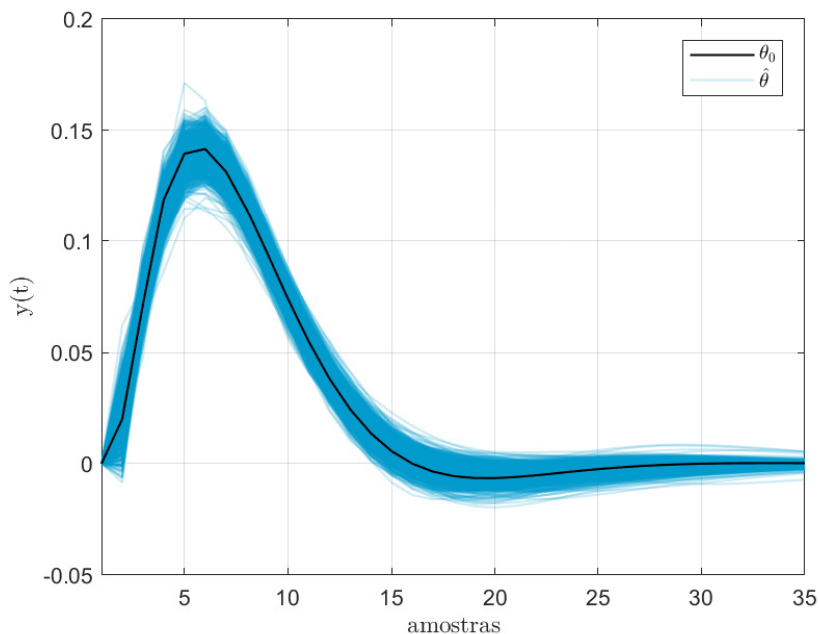
Fonte: do autor.

Ao observar as figuras 4 e 5, nota-se que, de fato, existe uma elevada covariância na resposta ao impulso dos modelos FIR estimados com o método dos mínimos quadrados sem regularização. Ainda, nota-se que os resultados são melhores para os casos com regularização, sendo a menor variância atingida com a regularização do tipo SS.

2.6 Identificação de sistemas com erros nas variáveis

Geralmente, quando se pensa na modelagem ou na identificação de processos é mais comum recorrer à topologia e à modelagem do sistema ideal \mathcal{S} como apresentado na seção 2.4. Este é o caso da dedução e análise dos métodos clássicos de identificação por minimização do erro de predição. No entanto, esta seção do texto tem como objetivo apresentar as técnicas de identificação para *sistemas com erros nas variáveis*, que possuem as características descritas nas seção 2.1 do texto. Cabe ressaltar que a principal diferença deste tipo de sistema em relação ao que foi descrito anteriormente, na seção 2.4, é a presença e a modelagem de ruído (ou distúrbios) na entrada do processo, fato que acaba dificultando os problemas de identificação (SÖDERSTRÖM, 2018). Com isto, as

Figura 5 – Respostas ao impulso real (em preto) e estimadas nas 1000 execuções de Monte Carlo para o método de mínimos quadrados com a regularização do tipo SS.



Fonte: do autor.

técnicas clássicas, de minimização do erro de predição, e a nova abordagem, de identificação com regularização bayesiana, já não são suficientes para resolver o problema de identificação.

Inúmeros trabalhos na literatura versam sobre este tipo de sistema, onde são propostos diferentes métodos de identificação, assim como análises acerca das propriedades e da complexidade e custo computacional de cada um. Neste cenário, as técnicas mais conhecidas são: uma adaptação da minimização do erro de predição, exposta em (SÖDERSTRÖM, 1981); a técnica de mínimos quadrados totais, que tem origem no século XIX para soluções de problemas de regressão ortogonal (SÖDERSTRÖM, 2007, 2018); o algoritmo de Frisch (BEGHELLI; GUIDORZI; SOVERINI, 1990; SÖDERSTRÖM; SOVERINI; MAHATA, 2002); além das tradicionais e *elementares* técnicas de mínimos quadrados e variáveis instrumentais (SÖDERSTRÖM, 2018)

Neste sentido, então, esta seção do texto apresenta uma revisão bibliográfica sobre este tipo de sistema e sobre as técnicas elementares de identificação dos mesmos. Assim, no contexto deste trabalho, a subseção seguinte expõe algumas simplificações e particularidades que são consideradas aqui. Tais considerações são realizadas com o objetivo de simplificar as análises.

2.6.1 Considerações em relação ao modelo

Na literatura de identificação é comum considerar casos de sistemas com erros nas variáveis genéricas, onde o objetivo muitas vezes é identificar as funções de transferência $G_0(q)$, $H_0(q)$, $L_0(q)$ e até o espectro do sinal $u_0(t)$. Exemplos de técnicas que identificam todos esses elementos são: uma adaptação de técnicas de minimização do erro de predição; e técnicas de máxima verossimilhança para o contexto de sistemas com erros nas variáveis, como mostra-se em (SÖDERSTRÖM, 2018). No entanto, neste trabalho, o intuito é o estudo e a extensão de técnicas *elementares* de identificação, as quais visam a identificação estrita do modelo do processo $G_0(q)$, e não das características e espectros dos sinais de ruído, distúrbios ou da entrada que excita o sistema.

Também, no âmbito deste trabalho, assume-se que o sinal $u_0(t)$ tem característica determinística mas que o mesmo é desconhecido individualmente, isto é, só se conhece $u(t)$, que é contaminado por ruído. Além disso, assume-se que o sinal de ruído de saída $w(t)$ não está presente no processo e que $\tilde{u}(t)$ é ruído branco com função de autocorrelação:

$$\bar{E}[\tilde{u}(t + \tau)\tilde{u}(t)] = \sigma_u^2\delta(\tau), \quad (136)$$

e distribuição gaussiana, visto que este é o tipo mais usual de distúrbios que ocorrem nos processos e que possuem propriedades matemáticas analisáveis. Ainda, dentro do contexto do trabalho, assume-se que $u_0(t)$ e $\tilde{u}(t)$ são descorrelacionados, ou seja:

$$\bar{E}[u_0(t + \tau)\tilde{u}(t)] = 0, \quad \forall \tau. \quad (137)$$

Novamente, é importante afirmar que estas considerações são restritivas, mas são realizadas com o intuito de simplificar as análises estatísticas, além do desenvolvimento de novas metodologias com regularização. Ademais, cabe salientar que as características e simplificações aqui consideradas acabam tornando o problema semelhante aos problemas de identificação do controlador ideal pelo método do VRFT, o qual, em parte, motivou o desenvolvimento deste trabalho.

À vista disso, após expor as simplificações e restrições importantes consideradas em relação ao sistema com erros nas variáveis no âmbito deste trabalho, conclui-se que o sistema ideal \mathcal{S} , que se deseja identificar, pode ser descrito matematicamente por

$$\mathcal{S} : \begin{cases} y(t) = G_0(q)u_0(t) \\ u(t) = u_0(t) + \tilde{u}(t), \end{cases} \quad (138)$$

sendo que $G_0(q)$ é um sistema do tipo FIR, ou seja, que possui resposta ao impulso finita, hipótese que é razoável quando o sistema é estável e possui resposta ao impulso que decai exponencialmente com o tempo. Também, é importante lembrar que o usuário só tem disponível, para utilizar nas metodologias de identificação, os sinais $y(t)$ e $u(t)$. Apesar das particularizações e simplificações, o sistema descrito em (138) ainda apresenta características semelhantes aos processos tradicionais com erros nas variáveis, onde a identificação

não é tarefa trivial. Em outras palavras, não é possível identificar o mesmo de forma adequada com as metodologias clássicas por minimização do erro de predição e nem com a nova abordagem de identificação com regularização bayesiana. Para tanto, existem diversas metodologias e aquelas que são exploradas neste trabalho são conhecidas como elementares, pois apresentam algoritmos não tão sofisticados e solução computacional simples.

2.6.2 Identificação com o método dos mínimos quadrados

O método dos mínimos quadrados também pode ser aplicado para a identificação de modelos FIR no cenário de sistemas com erros nas variáveis. Neste caso, a saída do sistema é modelada por

$$\mathcal{M}(\theta) : y(t, \theta) = \sum_{k=1}^{n_b} g_k(\theta)u(t - k), \quad (139)$$

lembrando que, neste trabalho, o ruído da saída $w(t)$ foi desconsiderado para este tipo de sistema e que $u(t)$ é o sinal coletado do processo e disponível ao usuário, o qual possui uma contribuição de ruído e uma contribuição que realmente excita o processo $G_0(q)$. Para este tipo de modelo, observa-se que a saída pode ser predita por uma regressão linear, ou seja:

$$\hat{y}(t, \theta) = \varphi(t)^T \theta, \quad (140)$$

onde o vetor regressor $\varphi(t) \in \mathbb{R}^n$ é construído com o sinal $u(t)$, $\theta \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de parâmetros a ser estimado, que representa os coeficientes da resposta ao impulso da função de transferência do processo:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} u(t-1) & u(t-2) & \dots & u(t-n_b) \end{bmatrix}^T, \quad (141)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{n_b} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_{n_b} \end{bmatrix}^T. \quad (142)$$

e $\hat{y}(t)$ é a saída predita por esse modelo FIR.

Com isto, como mostrado na seção 2.5, mais especificamente em 2.5.1, a estimação dos parâmetros pelo método dos mínimos quadrados para modelos FIR é dada ao se resolver o problema de otimização:

$$\hat{\theta}_{mq} = \arg \min_{\theta} V_{mq}(\theta) \quad (143)$$

$$V_{mq}(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y(t) - \varphi(t)^T \theta)^2, \quad (144)$$

o qual possui a seguinte solução analítica:

$$\hat{\theta}_{mq} = \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi(t)^T \right)^{-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) \right), \quad (145)$$

que existe quando a matriz $\left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi(t)^T\right)$ tem posto completo.

Porém, como é demonstrado na literatura de identificação de sistemas com erros nas variáveis (SÖDERSTRÖM, 2007, 2018), o grande problema da estimativa de mínimos quadrados para este tipo de sistema é que ela é não consistente, i.e., é polarizada para $N \rightarrow \infty$. Com isto, mesmo que se aumente arbitrariamente o número de dados ou amostras utilizadas no procedimento de identificação, não é possível aprimorar esta desvantagem de tal metodologia.

2.6.3 Identificação com o método das variáveis instrumentais

Visando contornar o problema de polarização na estimativa, uma alternativa para realizar a identificação dos parâmetros é a metodologia de *variáveis instrumentais básicas*. Esta técnica consiste em escolher um vetor $\zeta(t) \in \mathbb{R}^n$, conhecido como vetor de *instrumentos* ou *variáveis instrumentais*, que satisfaça (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989):

$$\bar{E} \left[\zeta(t)\varphi(t)^T \right] > 0 \quad (146)$$

$$\bar{E} \left[\zeta(t)\mu(t)^T \right] = 0, \quad (147)$$

ou seja, as variáveis instrumentais devem ser correlacionadas com o vetor $\varphi(t)$, mas descorrelacionadas com o vetor regressor de ruído da equação, isto é, $\mu(t) = -\tilde{\varphi}(t)^T \theta_0$. Com esta escolha é possível garantir que a estimativa é *consistente*, propriedade interessante e que não se consegue atingir com a técnica dos mínimos quadrados, como mencionado anteriormente. Após a escolha da variável instrumental, então, a estimativa dos parâmetros do modelo FIR é dada a partir da solução da seguinte equação de correlação (LJUNG, 1999; SÖDERSTRÖM, 2018):

$$\hat{\theta}_{vi} = \text{sol} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta(t)\mu(t) = 0 \right\} \quad (148)$$

$$\hat{\theta}_{vi} = \text{sol} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta(t) [y(t) - \varphi(t)^T \theta] = 0 \right\}, \quad (149)$$

onde $\text{sol}[f(x) = 0]$ denota solução da equação $f(x) = 0$. Enfim, a estimativa dos parâmetros por variável instrumental é dada por (SÖDERSTRÖM; STOICA, 1989; LJUNG, 1999; SÖDERSTRÖM, 2018)

$$\hat{\theta}_{vi} = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta(t)\varphi(t)^T \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta(t)y(t) \right], \quad (150)$$

a qual é relativamente simples de computar.

A estimativa exposta em (150) é conhecida como estimador de *variável instrumental básica* e é o tipo mais simples de formulação para variáveis instrumentais. Na literatura, existem outras formas de formular a identificação por variável instrumental, como é o

caso da *variável instrumental estendida* (SÖDERSTRÖM, 2018), que usa um filtro, uma matriz de ponderação nos dados e mais elementos no vetor de variável instrumental. No entanto, neste trabalho, somente a versão básica desta metodologia é abordada. Também, uma característica notável desta técnica é que, caso o vetor de variável instrumental seja escolhido na forma: $\zeta(t) = \varphi(t)$, então a estimativa por variável instrumental passa a ser idêntica à estimativa de mínimos quadrados. Por este motivo, pode-se afirmar que a estimativa de mínimos quadrados é um caso particular da estimativa por variável instrumental.

Em relação à escolha da variável instrumental a ser utilizada no procedimento de identificação, uma abordagem se destaca, a qual é baseada na realização de um experimento adicional no processo, onde são mantidas as mesmas condições do primeiro e são coletados os sinais $y_2(t)$ e $u_2(t)$:

$$\begin{cases} y_2(t) = G_0(q)u_0(t), \\ u_2(t) = u_0(t) + \tilde{u}_2(t). \end{cases} \quad (151)$$

Para o caso tratado neste trabalho, onde não há ruído na saída e espera-se obter o mesmo sinal $u_0(t)$ para ambos os experimentos, conclui-se que: $y(t) = y_2(t)$. O sinal $\tilde{u}(t)$ deve ter uma realização diferente de $\tilde{u}_2(t)$, e por isso, é natural assumir que os mesmos sejam descorrelacionados, ou seja:

$$\bar{E}[\tilde{u}(t + \tau)\tilde{u}_2(t)] = 0, \quad \forall \tau, \quad (152)$$

onde também se ressalta que ambos têm distribuição gaussiana, como exposto na subseção 2.6.1, de simplificações e considerações particulares realizadas no âmbito deste trabalho.

Enfim, após a apresentação da estimativa por variável instrumental, que é importante e será estendida no trabalho para uma versão regularizada, na sequência são apresentadas as propriedades desta estimativa, as quais também são conhecidas na literatura do tema, como mostrado em (SÖDERSTRÖM, 2007, 2018).

Primeiramente, vale dizer que a estimativa de variável instrumental é consistente, ou seja, não polarizada para $N \rightarrow \infty$ (SÖDERSTRÖM, 2007, 2018):

$$\theta_{vi}^* = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{vi} = \theta_0, \quad (153)$$

resultando em

$$\mathcal{B}_{vi} = 0. \quad (154)$$

Porém, a grande desvantagem de utilizar a variável instrumental é que surge uma elevada covariância nas estimativas, fato que é amplamente conhecido na literatura do tema. A expressão para a covariância da estimativa da variável instrumental é dada por

$$\mathcal{V}_{vi} \approx \frac{R_{\varphi_0}^{-1} \mathbf{C}_{vi} R_{\varphi_0}^{-1}}{N}, \quad (155)$$

onde

$$R_{\varphi_0} = \begin{bmatrix} r_{u_0 u_0}(0) & r_{u_0 u_0}(1) & \dots & r_{u_0 u_0}(n_b - 1) \\ r_{u_0 u_0}(-1) & r_{u_0 u_0}(0) & \dots & r_{u_0 u_0}(n_b - 2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{u_0 u_0}(-n_b + 1) & r_{u_0 u_0}(-n_b + 2) & \dots & r_{u_0 u_0}(0) \end{bmatrix}, \quad (156)$$

e sendo que \mathbf{C}_{vi} é dada por (SÖDERSTRÖM, 2018)

$$\mathbf{C}_{vi} = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N \zeta(t) \mu(t) \mu(s) \zeta(s)^T \right], \quad (157)$$

$$\mathbf{C}_{vi} = \sigma_w^2 \left\{ \bar{E} \left[\left(G_0(q) \varphi_0(t) \right) \left(G_0(q) \varphi_0(t) \right)^T \right] + \bar{E} \left[\left(G_0(q) \tilde{\varphi}_2(t) \right) \left(G_0(q) \tilde{\varphi}_2(t) \right)^T \right] \right\}. \quad (158)$$

com $\tilde{\varphi}_2(t)$ calculada por

$$\tilde{\varphi}_2(t) = \begin{bmatrix} \tilde{u}_2(t-1) & \tilde{u}_2(t-2) & \dots & \tilde{u}_2(t-n_b) \end{bmatrix}^T, \quad (159)$$

e onde o sinal $\tilde{u}_2(t)$ é ruído branco com uma realização diferente de $\tilde{u}(t)$, como expresso na relação (152).

2.7 Considerações finais

Este capítulo apresentou definições importantes e o estado da arte de alguns aspectos sobre identificação de sistemas. Foram discutidos aspectos fundamentais gerais de identificação, como o sistema ideal e os sinais que são considerados, a importância da condição experimental e da escolha da estrutura do modelo, e as diferentes técnicas que podem ser utilizadas para identificar sistemas com ruído na saída e sistema que possuem ruído em sua entrada.

A seção 2.4 revisou procedimentos clássicos de identificação para sistemas com ruído na saída, onde os detalhes da identificação por minimização de erro de predição foram apresentados, como a formulação do método, suas propriedades estatísticas e como é feita a escolha da ordem do modelo para este cenário.

A seção 2.5 mostrou o estado da arte dos métodos de identificação com regularização, que estão surgindo na literatura nos últimos anos e vêm superando os métodos clássicos de identificação com minimização do erro de predição. Nesta seção, é demonstrada a técnica de mínimos quadrados regularizados, que é usada para a identificação de respostas ao impulso. Também, neste contexto, foi mostrada a equivalência entre o mínimos quadrados regularizados e a interpretação bayesiana do procedimento de identificação para o caso de sistemas com ruído branco em sua saída. Este aspecto é fundamental no trabalho, pois será estendido no próximo capítulo para o cenário de identificação de sistemas com

ruído colorido na saída. Além disso, foi apresentada a técnica de estimação da matriz de regularização, a partir do método bayesiano empírico, assim como formas de parametrizar tal matriz para sua estimação.

Enfim, a seção 2.6 apresentou os sistemas com erros nas variáveis, que são uma categoria distinta de sistemas se comparados aos sistemas típicos considerados nos problemas de identificação. Também, foram apresentadas algumas considerações e simplificações em relação a este sistema que foram consideradas no trabalho, assim como os sinais e funções de transferência presentes. Além disso, foram apresentados dois dos principais métodos de identificação para este tipo de sistema e que são denominados de métodos elementares na literatura: o método dos mínimos quadrados ordinário e o método das variáveis instrumentais, assim como foram discutidas suas principais propriedades.

3 IDENTIFICAÇÃO COM REGULARIZAÇÃO BAYESIANA PARA SISTEMAS COM RUÍDO COLORIDO NA SAÍDA

Este capítulo apresenta uma das principais contribuições deste trabalho: o desenvolvimento de uma metodologia de identificação por regularização bayesiana para sistemas que possuem ruído colorido em sua saída. Esta contribuição foi o assunto dos artigos (BOEIRA; ECKHARD, 2021a, 2023), onde o primeiro demonstra a equivalência entre o método dos mínimos quadrados ponderados regularizados e a interpretação bayesiana do procedimento de identificação e o segundo apresenta a dedução das matrizes ótimas de ponderação e regularização para minimizar o traço da matriz de MSE das estimativas, assim como o desenvolvimento de um algoritmo para estimação dos hiperparâmetros utilizados nesta metodologia. Vale ressaltar que a metodologia resultante pode ser considerada como uma generalização do estado da arte atual de identificação com regularização, apresentado na seção 2.5.

Atualmente, no cenário da literatura de identificação com regularização, a grande maioria dos trabalhos considera a identificação de sistemas que possuem ruído branco em sua saída. Essa condição, contudo, é bastante restritiva e não engloba o caso genérico, onde o ruído de saída é colorido, ou seja, sua função de transferência possui uma estrutura de função racional em q .

No caso de abordar ruído colorido, a atual metodologia é identificar o preditor ótimo do sistema, como exposto em (45), usando um modelo FIR MISO (multiple-input single-output), ao invés de identificar o modelo do processo. No entanto, apesar da identificação e o uso de um preditor ser interessante em algumas aplicações de predição de valores futuros e de controle preditivo, por exemplo, em outros casos o modelo do processo é estritamente necessário. Por isso, este trabalho expande essa metodologia visando aprimorar as técnicas de identificação do modelo do processo para os sistemas com ruído colorido na saída.

Isto posto, este capítulo está organizado da seguinte forma. A seção 3.1 demonstra o método de identificação MQPR, desenvolvido neste trabalho e voltado à identificação de resposta ao impulso de sistemas com ruído colorido. A seção também mostra as propriedades estatísticas do método, assim como a dedução de uma matriz ótima de regulari-

zação. Já a seção 3.2 demonstra a equivalência entre o método MQPR e a interpretação bayesiana do procedimento de identificação. Esta seção ainda mostra o algoritmo de estimação dos hiperparâmetros, assim como as estruturas de parametrização das matrizes a serem identificadas para este caso. Em 3.3 são exibidos dois exemplos numéricos que demonstram a eficiência do método dos MQPR frente ao método dos MQ e dos MQR. Por fim a seção 3.4 encerra o capítulo com as considerações finais.

3.1 Identificação de modelos FIR com MQPR

Uma das novidades deste trabalho é a introdução da metodologia de identificação de respostas ao impulso com o método dos mínimos quadrados ponderados regularizados, ou MQPR. Tal metodologia pode ser interpretada como a combinação dos mínimos quadrados ponderados, como exibida em (LJUNG, 1999), com a abordagem de mínimos quadrados regularizados, que ganhou notoriedade nos últimos anos com os trabalhos (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO *et al.*, 2014), como já foi comentado.

O objetivo do método MQPR é identificar um modelo FIR para o sistema descrito na seção 2.4, representado por (33), onde a principal característica do MQPR é que o mesmo é mais adequado para identificar sistemas onde $H_0(q)$ pode assumir uma forma genérica, caracterizando o ruído de saída do sistema como ruído colorido.

O modelo FIR a ser identificado foi descrito em 2.5.1, lembrando que seus parâmetros representam os coeficientes da resposta ao impulso do modelo. Para identificá-lo o estimador de mínimos quadrados ponderados regularizados é obtido a partir do seguinte problema de otimização (BOEIRA; ECKHARD, 2023):

$$\hat{\theta}_{rw} = \arg \min_{\theta} J_{rw}(\theta, M, P), \quad (160)$$

$$J_{rw}(\theta, M, P) = \|(Y - \Phi\theta)\|_M^2 + \theta^T P^{-1}\theta, \quad (161)$$

onde $\|x\|_M^2$ denota a norma quadrática $x^T M x$, com $M \in \mathbb{R}^{N \times N}$ sendo a matriz de ponderação e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sendo a matriz de regularização. A partir do problema expresso em (160), é possível concluir que o estimador é dado pela seguinte expressão:

$$\hat{\theta}_{rw} = (P\Phi^T M \Phi + I)^{-1} P\Phi^T M Y. \quad (162)$$

Não é possível fazer nenhuma afirmação acerca das propriedades do estimador apresentado em (162) de forma genérica, sem uma escolha das matrizes de regularização e ponderação. Ainda, escolhas inadequadas ou sem critério algum podem resultar em propriedades estatísticas desfavoráveis, aumentando os erros de polarização excessivamente. Dessa forma, para produzir uma relação favorável entre polarização e covariância, este trabalho propõe a escolha das matrizes de ponderação e regularização com base na otimização do traço da matriz de erro médio quadrático e, para tanto, o primeiro passo é a dedução das propriedades da estimativa, demonstradas na sequência.

3.1.1 Propriedades da estimativa por mínimos quadrados ponderados regularizado

Antes de estudar as propriedades estatísticas da estimativa, é necessário destacar que para este capítulo, também considera-se que a Premissa 2.1 é respeitada, ou seja, que o processo que se deseja identificar pertence à classe de modelos escolhida: modelos FIR. A princípio, esta consideração pode parecer um pouco restritiva, mas é possível observar que mesmo para processos com resposta ao impulso infinita, mas estáveis, essa pode ser uma aproximação válida, visto que ela decai exponencialmente e seus coeficientes podem ser aproximados para zero depois de um certo tempo ou amostra.

Assim, com a Premissa 2.1 sendo satisfeita, o sistema ideal descrito em (33) pode ser reescrito como:

$$y(t) = \varphi(t)^T \theta_0 + v(t), \quad (163)$$

com $y(t) \in \mathbb{R}$ representando a saída medida, $\varphi(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor regressor, como descrito em (77), e $\theta_0 \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de parâmetros nominais:

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} g_0(1) & g_0(2) & \dots & g_0(n) \end{bmatrix}^T, \quad (164)$$

que representa os coeficientes reais da resposta ao impulso do sistema. A forma onde todas as observações são acumuladas no mesmo vetor é representada como:

$$Y = \Phi \theta_0 + V, \quad (165)$$

onde $Y \in \mathbb{R}^N$ é o vetor de dados coletados, como descrito em (83), $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times n}$ é a matriz de vetores regressores, como descrito em (84), e $V \in \mathbb{R}^N$ representa o vetor de ruído de saída:

$$V = \begin{bmatrix} v(1) & v(2) & \dots & v(N) \end{bmatrix}^T. \quad (166)$$

Então, a partir dessas considerações sobre sistema ideal, a primeira propriedade estatística do método MQPR estudada neste trabalho é a polarização, definida anteriormente em relação aos parâmetros em (56) e que é função das escolhas das matrizes de ponderação e regularização:

$$\mathcal{B}_{rw}(P, M) = E \left[\hat{\theta}_{rw} \right] - \theta_0. \quad (167)$$

Assim, o primeiro passo para obter a expressão analítica para a polarização é calcular o valor esperado para $\hat{\theta}_{rw}$. A partir da expressão da estimativa $\hat{\theta}_{rw}$ exposta em (162) e de (165), pode-se perceber que:

$$E \left[\hat{\theta}_{rw} \right] = E \left[(P\Phi^T M\Phi + I)^{-1} P\Phi^T M\Phi \theta_0 \right] + E \left[(P\Phi^T M\Phi + I)^{-1} P\Phi^T M V \right]. \quad (168)$$

Agora, observando que $E[V] = 0$ e que os outros termos são independentes de V , a expressão (168) resulta em

$$E[\hat{\theta}_{rw}] = (P\Phi^T M\Phi + I)^{-1} P\Phi^T M\Phi\theta_0. \quad (169)$$

A partir de (169) e subtraindo θ_0 de (169), a polarização para o estimador de MQPR pode ser diretamente obtida:

$$\mathcal{B}_{rw}(P, M) = (P\Phi^T M\Phi + I)^{-1} P\Phi^T M\Phi\theta_0 - (P\Phi^T M\Phi + I)^{-1} (P\Phi^T M\Phi + I)\theta_0. \quad (170)$$

$$\mathcal{B}_{rw}(P, M) = (P\Phi^T M\Phi + I)^{-1} (P\Phi^T M\Phi - P\Phi^T M\Phi - I)\theta_0, \quad (171)$$

$$\mathcal{B}_{rw}(P, M) = - (P\Phi^T M\Phi + I)^{-1} \theta_0. \quad (172)$$

Cabe observar que se a matriz de regularização é nula, ou inexistente ($P^{-1} = 0$) o estimador em questão se torna o estimador de mínimos quadrados ponderados, que é não polarizado para a identificação do sistema aqui estudado.

De posse da polarização da estimativa, o próximo passo é calcular a matriz de covariância da mesma. Vale lembrar que a covariância foi definida em (57) e é calculada como

$$\mathcal{V}_{rw}(P, M) \triangleq E \left[\left(E\hat{\theta}_{rw} - \hat{\theta}_{rw} \right) \left(E\hat{\theta}_{rw} - \hat{\theta}_{rw} \right)^T \right]. \quad (173)$$

Para calcular a covariância, utiliza-se a seguinte variável auxiliar $\mathcal{S}_{rw}(P, M)$, definida como a diferença entre uma estimativa e o valor esperado da mesma:

$$\mathcal{S}_{rw}(P, M) \triangleq E[\hat{\theta}_{rw}] - \hat{\theta}_{rw}. \quad (174)$$

Para o caso do método dos MQPR, a variável $\mathcal{S}_{rw}(P, M)$ é calculada por

$$\mathcal{S}_{rw}(P, M) = (P\Phi^T M\Phi + I)^{-1} P\Phi^T MY - (P\Phi^T M\Phi + I)^{-1} P\Phi^T M\Phi\theta_0. \quad (175)$$

Observando a equação do sistema ideal com as observações acumuladas (165), é possível notar que $V = Y - \Phi\theta_0$, resultando em

$$\mathcal{S}_{rw}(P, M) = (P\Phi^T M\Phi + I)^{-1} P\Phi^T M\Phi V. \quad (176)$$

Enfim, a covariância da estimativa por MQPR aqui estudada é obtida a partir da seguinte relação com a variável auxiliar $\mathcal{S}_{rw}(P, M)$:

$$\mathcal{V}_{rw}(P, M) = E[\mathcal{S}_{rw}(P, M)\mathcal{S}_{rw}(P, M)^T] \quad (177)$$

resultando em

$$\mathcal{V}_{rw}(P, M) = (P\Phi^T M\Phi + I)^{-1} \Lambda (\Phi^T M\Phi P + I)^{-T} \quad (178)$$

onde $\Lambda = P\Phi^T M \Sigma M^T \Phi P^T$, com $\Sigma \in \mathbb{R}^{N \times N}$ sendo a matriz de covariância do ruído colorido de saída V :

$$\Sigma \triangleq E [VV^T] = \begin{bmatrix} r_{vv}(0) & r_{vv}(1) & \dots & r_{vv}(N-1) \\ r_{vv}(-1) & r_{vv}(0) & \dots & r_{vv}(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{vv}(-N+1) & r_{vv}(-N+2) & \dots & r_{vv}(0) \end{bmatrix}, \quad (179)$$

e com $r_{vv}(\tau)$ denotando a função de autocorrelação do sinal $v(t)$:

$$r_{vv}(\tau) \triangleq E [v(t+\tau)v(t)]. \quad (180)$$

Finalmente, a matriz de erro médio quadrático da estimativa, definida em (58), que é a medida mais ampla de qualidade da estimativa, por compreender uma combinação entre polarização e covariância, é calculada a partir de

$$\mathcal{Q}_{rw}(P, M) \triangleq E [(\hat{\theta}_{rw} - \theta_0)(\hat{\theta}_{rw} - \theta_0)^T] = \mathcal{B}_{rw}(P, M)\mathcal{B}_{rw}(P, M)^T + \mathcal{V}_{rw}(P, M). \quad (181)$$

Então, a partir da relação exposta em (181), e com as expressões de polarização e covariância obtidas em (172) e (178) respectivamente, é possível calcular a matriz de MSE para o estimador de MQPR:

$$\mathcal{Q}_{rw}(P, M) = (P\Phi^T M \Phi + I)^{-1} (\theta_0 \theta_0^T + \Lambda) (\Phi^T M \Phi P + I)^{-T}. \quad (182)$$

Ao analisar a expressão da MSE (182) para o estimador de MQPR, fica claro que a mesma depende substancialmente das matrizes de regularização P e de ponderação M . Com isso, este trabalho apresenta, na sequência, a otimização do traço da MSE com relação às matrizes P e M , provendo as ideias de como escolher tais matrizes e mais do que isso, como estimá-las em situações práticas de identificação, com o objetivo de produzir boas propriedades estatísticas.

3.1.2 Matriz ótima de regularização

Conforme demonstrado no trabalho (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012), e apresentado no Teorema 2.2, existe uma matriz ótima de regularização que minimiza o traço da matriz de MSE para o cenário discutido na seção 2.5, onde o mínimos quadrados regularizado é utilizado para identificar a resposta ao impulso de sistemas com ruído branco na saída. Com este mesmo objetivo, uma das principais contribuições deste trabalho é apresentada na sequência, que é o cálculo das escolhas ótimas para as matrizes de regularização e ponderação para o método dos mínimos quadrados ponderados regularizados, visando minimizar o traço da matriz de erro médio quadrático da estimativa. Para tanto, o seguinte problema de otimização foi formulado:

$$[P_0, M_0] = \arg \min_{P, M} \text{tr} [\mathcal{Q}_{rw}(P, M)], \quad (183)$$

com P_0 e M_0 denotando as matrizes ótimas de regularização e de ponderação respectivamente. O resultado encontrado é enunciado no Teorema 3.1

Teorema 3.1 (Matrizes Ótimas de Regularização e Ponderação). *Existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tal que a escolha ótima para minimizar o traço da matriz de erro médio quadrático do estimador de MQPR é dada por $P_0 = \kappa \theta_0 \theta_0^T$ e $M_0 = \kappa^{-1} \Sigma^{-1}$.*

Prova. A solução do problema de otimização (183) é obtida por meio de resultados do campo de cálculo matricial, onde as derivadas da função custo são calculadas com relação à P e M , e as seguintes equações matriciais são resolvidas para encontrar o mínimo:

$$\frac{\partial \text{tr} [\mathcal{Q}_{rw}(P, M)]}{\partial P} = 0, \quad \frac{\partial \text{tr} [\mathcal{Q}_{rw}(P, M)]}{\partial M} = 0. \quad (184)$$

Cabe ressaltar, ainda, que existem diferentes tipos de notação empregadas no cálculo matricial com relação à derivadas de matrizes e vetores. Neste trabalho, a notação escolhida foi a notação mista, que é a mesma que foi abordada em (PETERSEN; PEDERSEN, 2012), explicada com maiores detalhes no Apêndice A, que reúne resultados importantes de cálculo matricial.

Primeiramente, usando relações da área de cálculo matricial, sabe-se que a derivada de $\text{tr} [\mathcal{Q}_{rw}(P, M)]$ em relação a P é uma matriz de dimensão $n \times n$, onde o elemento da sua i -ésima linha e j -ésima coluna pode ser obtido por

$$\left[\frac{\partial \text{tr} \mathcal{Q}_{rw}(P, M)}{\partial P} \right]_{ij} = \frac{\partial \text{tr} \mathcal{Q}_{rw}(P, M)}{\partial P_{ij}} = \text{tr} \left[\frac{\partial \mathcal{Q}_{rw}(P, M)}{\partial P_{ij}} \right], \quad (185)$$

usando a notação de layout mista.

Ainda, para simplificar a notação, é possível fatorar a matriz de erro médio quadrático da estimativa por MQPR (182) como o produto de três matrizes auxiliares: $\mathcal{Q}_{rw}(P, M) = Q_1 Q_2 Q_3$. Com, isso, pode-se utilizar a regra do produto para escrever o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna da derivada do traço de $\mathcal{Q}_{rw}(P, M)$:

$$\left[\frac{\partial \text{tr} \mathcal{Q}_{rw}(P, M)}{\partial P} \right]_{ij} = \text{tr} \left[\frac{\partial Q_1}{\partial P_{ij}} Q_2 Q_3 \right] + \text{tr} \left[Q_1 \frac{\partial Q_2}{\partial P_{ij}} Q_3 \right] + \text{tr} \left[Q_1 Q_2 \frac{\partial Q_3}{\partial P_{ij}} \right], \quad (186)$$

onde $Q_1 = (P \Phi^T M \Phi + I)^{-1}$, $Q_2 = (\theta_0 \theta_0^T + \Lambda)$ e $Q_3 = (\Phi^T M^T \Phi P^T + I)^{-1}$. Agora, cada termo de (186) pode ser derivado com relação a P individualmente a partir dos resultados de cálculo matricial exibidos no Apêndice A.

O primeiro termo de (186), por exemplo, pode ser obtido usando o Teorema A.1, substituindo $A = I$, $B = \Phi^T M \Phi$, $C = Q_2 Q_3$ e $X = P$, resultando em:

$$\text{tr} \left[\frac{\partial Q_1}{\partial P_{ij}} Q_2 Q_3 \right] = -Q_3 Q_1 Q_2 Q_3 \Phi^T M^T \Phi. \quad (187)$$

O segundo termo da derivada é calculado por meio das relações exibidas no Teorema A.3, substituindo $A = Q_1$, $B = \Phi^T M \Sigma M^T \Phi$, $C = Q_3$ e $X = P$:

$$\text{tr} \left[Q_1 \frac{\partial Q_2}{\partial P_{ij}} Q_3 \right] = 2Q_3 Q_1 P \Phi^T M \Sigma, \quad (188)$$

onde aqui usou-se o fato de que

$$\frac{\partial Q_2}{\partial P_{ij}} = \frac{\partial (P \Phi^T M \Sigma M^T \Phi P^T)}{\partial P_{ij}}, \quad (189)$$

visto que $\partial(\theta_0 \theta_0^T) / \partial P_{ij} = 0$. Já o terceiro e último termo é obtido usando as relações do Teorema A.2, substituindo $A = Q_1 Q_2$, $B = \Phi^T M^T \Phi$, $C = I$ e $X = P$ produzindo:

$$\text{tr} \left[Q_1 Q_2 \frac{\partial Q_3}{\partial P_{ij}} \right] = -Q_3 Q_1 Q_2 Q_3 \Phi^T M^T \Phi, \quad (190)$$

que é idêntico ao primeiro termo, expresso em (187). Enfim, somando os termos (187), (188) e (190), obtém-se:

$$\frac{\partial \text{tr} \mathcal{Q}_{rw}(P, M)}{\partial P} = 2Q_3 Q_1 (P \Phi^T M \Sigma - Q_2 Q_3 \Phi^T) M^T \Phi. \quad (191)$$

Para calcular a derivada de $\text{tr} [\mathcal{Q}_{rw}(P, M)]$ com relação à M , um procedimento similar foi adotado. O resultado, neste caso, é uma matriz com dimensão $N \times N$, onde o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna é dado por

$$\left[\frac{\partial \text{tr} \mathcal{Q}_{rw}(P, M)}{\partial M} \right]_{ij} = \frac{\partial \text{tr} \mathcal{Q}_{rw}(P, M)}{\partial M_{ij}} = \text{tr} \left[\frac{\partial \mathcal{Q}_{rw}(P, M)}{\partial M_{ij}} \right]. \quad (192)$$

Aplicando a regra do produto das derivadas, pode-se perceber que

$$\left[\frac{\partial \text{tr} \mathcal{Q}_{rw}(P, M)}{\partial M} \right]_{ij} = \text{tr} \left[\frac{\partial Q_1}{\partial M_{ij}} Q_2 Q_3 \right] + \text{tr} \left[Q_1 \frac{\partial Q_2}{\partial M_{ij}} Q_3 \right] + \text{tr} \left[Q_1 Q_2 \frac{\partial Q_3}{\partial M_{ij}} \right], \quad (193)$$

de forma idêntica ao que foi obtido em (186).

Novamente, cada termo de (193) pode ser calculado com os resultados de cálculo matricial apresentados no Apêndice A para as derivadas com relação a M . O primeiro termo de (193) pode ser calculado a partir dos resultados expressos no Teorema A.1, substituindo $A = P \Phi^T$, $B = \Phi$, $C = Q_2 Q_3$ e $X = M$, resultando em

$$\text{tr} \left[\frac{\partial Q_1}{\partial M_{ij}} Q_2 Q_3 \right] = -\Phi P^T Q_3 Q_1 Q_2 Q_3 \Phi^T. \quad (194)$$

O segundo termo de (193) pode ser derivado do Teorema A.3, usando $A = Q_1 P \Phi^T$, $B = \Sigma$, $C = \Phi P^T Q_3$ e $X = M$, resultando em

$$\text{tr} \left[Q_1 \frac{\partial Q_2}{\partial M_{ij}} Q_3 \right] = 2\Phi P^T Q_3 Q_1 P \Phi^T M \Sigma. \quad (195)$$

Já o último termo de (193) é calculado por meio das relações do Teorema A.2, onde $A = Q_1 Q_2$, $B = \Phi^T$, $C = \Phi P^T$ e $X = M$:

$$\text{tr} \left[Q_1 Q_2 \frac{\partial Q_3}{\partial M_{ij}} \right] = -\Phi P^T Q_3 Q_1 Q_2 Q_3 \Phi^T, \quad (196)$$

que é igual ao primeiro termo (194). Enfim, somando os termos (194), (195) e (196), chega-se na expressão final para a derivada com relação à M :

$$\frac{\partial \text{tr} \mathcal{Q}_{rw}(P, M)}{\partial M} = 2\Phi P^T Q_3 Q_1 (P\Phi^T M\Sigma - Q_2 Q_3 \Phi^T). \quad (197)$$

Analisando as equações obtidas em (191) e (197) para as derivadas do traço do erro médio quadrático, é possível perceber que ambas serão zero simultaneamente, com P e M diferente da solução trivial se e somente se a seguinte equação é satisfeita:

$$P\Phi^T M\Sigma - Q_2 Q_3 \Phi^T = 0. \quad (198)$$

Lembrando que $Q_2 = (\theta_0 \theta_0^T + \Lambda)$ e que $Q_3 = (\Phi^T M^T \Phi P^T + I)^{-1}$, então a equação (198) pode ser expandida para

$$P\Phi^T M\Sigma = (X + P\Phi^T M\Sigma M^T \Phi P^T) (\Phi^T M^T \Phi P^T + I)^{-1} \Phi^T. \quad (199)$$

Após realizar algumas operações algébricas, (199) pode ser simplificada para

$$P\Phi^T M = X\Phi^T \Sigma^{-1}. \quad (200)$$

Finalmente, para concluir a prova, basta notar que $P_0 = \kappa \theta_0 \theta_0^T$ e $M_0 = \kappa^{-1} \Sigma^{-1}$ é a solução da equação (200). \square

Corolário 3.1 (Estimador ótimo de mínimos quadrados ponderados regularizado). *Com a escolha ótima $P = \kappa \theta_0 \theta_0^T$ e $M = \kappa^{-1} \Sigma^{-1}$, o estimador ótimo de mínimos quadrados ponderados regularizado é dado por*

$$\hat{\theta}_{rw} = (\theta_0 \theta_0^T \Phi^T \Sigma^{-1} \Phi + I)^{-1} \theta_0 \theta_0^T \Phi^T \Sigma^{-1} Y. \quad (201)$$

As escolhas ótimas para as matrizes de regularização e ponderação do Teorema 3.1 são baseadas em quantidades e grandezas teóricas que de fato são desconhecidas e indisponíveis em situações práticas, como a matriz de covariância do ruído Σ (que depende de $H_0(q)$) e o vetor de parâmetros ideais θ_0 (que depende de $G_0(q)$). Assim, para utilizar o estimador ótimo apresentado no Corolário 3.1 é necessário desenvolver um procedimento de estimação dessas grandezas. Também, para estimar estas grandezas, é necessário definir uma estrutura de parametrização para as quantidades.

Visando estimar as matrizes de regularização e ponderação, a abordagem deste trabalho é semelhante àquela apresentada nos trabalhos clássicos de identificação com regularização (PILLONETTO; DE NICOLAO, 2010; PILLONETTO; CHIUSO; DE NICOLAO, 2011; CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO *et al.*, 2014) que é baseada em uma interpretação bayesiana do procedimento de identificação e busca uma equivalência entre tal interpretação com o estimador de MQPR.

Além disso, um importante aspecto a ser observado em relação às matrizes de regularização e ponderação apresentadas no Teorema 3.1 é que ambas também satisfazem os resultados clássicos de identificação com regularização de CHEN; OHLSSON; LJUNG (2012). Como mostrado no Teorema 2.2 (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012) a matriz ótima de regularização é calculada como $P_0 = \sigma_w^{-2} \theta_0 \theta_0^T$, para o método dos mínimos quadrados regularizados no cenário de ruído branco. Esta condição é equivalente a considerar $H_0(q) = 1$ em (35), $P_0 = \theta_0 \theta_0^T$, e $M_0 = \sigma_w^{-2} I$ no método MQPR, o que implica que ele pode ser considerado como uma abordagem mais genérica.

3.2 A interpretação bayesiana

A interpretação bayesiana do procedimento de identificação para sistemas que apresentam ruído colorido em sua saída é semelhante ao caso de sistemas com ruído branco, que já é conhecido na literatura e foi apresentado na subseção 2.5.5.

Assim como no caso de ruído branco, a perspectiva bayesiana para o caso de ruído colorido também é baseada em considerar o próprio vetor de parâmetros θ como uma variável aleatória de distribuição gaussiana de média zero e covariância denotada também por Π (PILLONETTO; DE NICOLAO, 2010; PILLONETTO; CHIUSO; DE NICOLAO, 2011; CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO *et al.*, 2014; LJUNG; CHEN; MU, 2020; PILLONETTO *et al.*, 2022):

$$\theta \sim \mathcal{N}(0, \Pi). \quad (202)$$

No caso de ruído colorido presente na saída do sistema ideal, onde o mesmo é representado por (165), pode-se concluir que o vetor de saída Y e o vetor de parâmetros θ são duas variáveis conjuntamente gaussianas tal que sua média e covariância assumem os seguintes valores nesta abordagem estocástica:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ Y \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Pi & \Pi \Phi^T \\ \Phi \Pi & \Phi \Pi \Phi^T + \Sigma \end{bmatrix} \right), \quad (203)$$

onde também se assume que o sinal de ruído $v(t)$ e o vetor de parâmetros θ são independentes (PILLONETTO *et al.*, 2014).

Agora, baseado na distribuição conjunta de Y e θ mostradas em (203), é possível estimar θ a partir de sua distribuição *a posteriori*, dado que Y foi medido do processo

(CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012). Para duas variáveis conjuntamente gaussianas essa distribuição é amplamente usada e conhecida na literatura de estimação (ANDERSON; MOORE, 1979):

$$\theta|Y \sim \mathcal{N}(\hat{\theta}_B, \Pi_B), \quad (204)$$

$$\hat{\theta}_B = (\Pi\Phi^T\Sigma^{-1}\Phi + I)^{-1} \Pi\Phi^T\Sigma^{-1}Y, \quad (205)$$

$$\Pi_B = \Pi - \Pi\Phi^T (\Phi\Pi\Phi^T + \Sigma)^{-1} \Phi\Pi, \quad (206)$$

com $\hat{\theta}_B$ sendo a estimativa bayesiana. Agora, analisando a expressão da estimativa bayesiana exposta em (205), pode-se notar que ela é muito semelhante ao estimador de MQPR (162). Além disso, nota-se que a escolha ótima do Teorema 3.1 é equivalente ao estimador bayesiano, como anunciado no próximo teorema.

Teorema 3.2 (Equivalência entre estimativa bayesiana e estimador ótimo de mínimos quadrados ponderados regularizado). *A perspectiva bayesiana do procedimento de identificação do modelo FIR para sistemas com ruído colorido aditivo em sua saída é equivalente ao método dos mínimos quadrados ponderados regularizado com as escolhas ótimas $P = \Pi = \kappa\theta_0\theta_0^T$ e $M = \kappa^{-1}\Sigma^{-1}$ exibidas em (201).*

Prova. Por inspeção, nota-se que o estimador ótimo de mínimos quadrados ponderados regularizado em (201) é idêntico ao estimador bayesiano, mostrado em (205), o que é suficiente para provar o teorema. \square

O resultado exposto no Teorema 3.2 também tem uma relação com os resultados da literatura recente de identificação com regularização. Em (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012) e (PILLONETTO *et al.*, 2014), os autores estabelecem a equivalência entre a matriz ótima de regularização para o método dos mínimos quadrados regularizados e a perspectiva bayesiana no caso de ruído branco. O Teorema 3.2 estende esses resultados mostrando que a mesma equivalência com a interpretação bayesiana é satisfeita no caso de ruído colorido para o método dos mínimos quadrados ponderados regularizados com as escolhas ótimas de P e M apresentadas no Teorema 3.1. Ademais, a equivalência da perspectiva bayesiana com o método MQPR também provê a principal ideia de como estimar essas matrizes, por meio do método de *bayesiano empírico* (CARLIN; LOUIS, 2000).

3.2.1 A estimativa dos hiperparâmetros

Com o objetivo de estimar Π e Σ a partir dos dados coletados do sistema, é necessário parametrizar ambas as matrizes com um vetor de hiperparâmetros: $\beta = [\eta \ \zeta]^T$, da mesma forma que foi descrito na subseção 2.5.6, com a diferença de que, agora, é necessário estimar Σ conjuntamente com Π . Como na subseção 2.5.6, para isso, o primeiro passo é observar, a partir de (203), que a distribuição marginal de Y é calculada por

$$Y \sim \mathcal{N}(0, \Phi\Pi(\eta)\Phi^T + \Sigma(\zeta)), \quad (207)$$

fato que é usado para formular um problema de estimação de máxima verossimilhança marginal, ou método bayesiano empírico, como feito anteriormente:

$$\hat{\beta} = \arg \max_{\beta} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{N_t} |\Psi(\beta)|}} \exp \left(-\frac{Y^T \Psi(\beta) Y}{2} \right), \quad (208)$$

com $|\cdot|$ denotando o determinante da matriz e $\Psi(\beta)$ sendo definido como

$$\Psi(\beta) \triangleq \Phi \Pi(\eta) \Phi^T + \Sigma(\zeta). \quad (209)$$

Ainda, como comentado em 2.5.6 é possível demonstrar que o problema descrito em (208) é equivalente a (PILLONETTO *et al.*, 2014):

$$\hat{\beta} = \arg \max_{\beta} (Y^T \Psi(\beta)^{-1} Y + \log |\Psi(\beta)|). \quad (210)$$

Ainda, o problema de otimização (210) é evidentemente não convexo e de difícil solução. Então, independente do *solver* que é utilizado para computar a solução, a função custo deve ser avaliada repetidamente para diversos valores distintos de β (CHEN; LJUNG, 2013). Isto posto, como mencionado em (CHEN; LJUNG, 2013), existem dois grandes problemas em calcular a função custo a partir da equação (210): o elevado custo computacional e a precisão numérica. Estes problemas são originados pelo fato de que $\Psi(\beta)$ possui uma dimensão elevada ($N \times N$), onde N usualmente é da ordem de 10^3 , tal que é custoso calcular sua inversa e seu determinante (CHEN; LJUNG, 2013). Então, para evitar problemas de precisão com a inversão de $\Psi(\beta)$ ou com o cálculo direto de seu determinante, este trabalho propõe uma fatoração de Cholesky das matrizes Π e Σ^{-1} e algumas manipulações algébricas usando as relações de matriz inversa para atingir uma função custo equivalente, que é mais fácil de calcular computacionalmente.

3.2.1.1 Cálculo do determinante de $\Psi(\beta)$

Para calcular o determinante de $\Psi(\beta)$ de uma forma mais eficiente, este trabalho propõe o uso das seguintes fatorações de Cholesky:

$$\Pi(\eta) = L(\eta) L(\eta)^T, \quad (211)$$

$$\Sigma^{-1}(\zeta) = S(\zeta) S(\zeta)^T, \quad (212)$$

de forma similar ao que é realizado em (CHEN; LJUNG, 2013) para o caso de ruído branco. A partir das fatorações anteriores, é possível reescrever o determinante de $\Psi(\beta)$

$$|\Psi(\beta)| = |\Phi \Pi(\eta) \Phi^T + \Sigma(\zeta)| = \frac{1}{|S(\zeta) S(\zeta)^T|} |I + L(\eta)^T \Phi^T S(\zeta) S(\zeta)^T \Phi L(\eta)|. \quad (213)$$

Para obter a função custo, é necessário calcular o logaritmo natural do determinante, ou seja:

$$\log(|\Psi(\beta)|) = \log(|I + L(\eta)^T \Phi^T S(\zeta) S(\zeta)^T \Phi L(\eta)|) - \log(|S(\zeta) S(\zeta)^T|), \quad (214)$$

$$= \log(|I + L(\eta)^T \Phi^T S(\zeta) S(\zeta)^T \Phi L(\eta)|) - 2 \log(|S(\zeta)|). \quad (215)$$

Ainda, é importante ressaltar que, se $S(\zeta)$ é uma matriz triangular, o logaritmo natural do determinante pode ser simplificado:

$$\log(|S(\zeta)|) = \sum_{i=1}^N \log(S_{ii}(\zeta)), \quad (216)$$

com $S_{ii}(\zeta)$ representando o elemento na diagonal (linha i , coluna i). Enfim, com este procedimento, é possível evitar o cálculo direto do determinante de uma matriz de dimensão elevada, reduzindo a possibilidade de erros numéricos e o custo computacional.

3.2.1.2 Cálculo da inversa de $\Psi(\beta)$

Usando a mesma fatoração de Cholesky proposta em 3.2.1.1, assim como algumas relações matriciais, a inversa de $\Psi(\beta)$ pode ser calculada como

$$\begin{aligned} \Psi(\beta)^{-1} &= (\Phi L(\eta) L(\eta)^T \Phi^T + \Sigma(\zeta))^{-1} = \\ &S(\zeta) S(\zeta)^T - S(\zeta) S(\zeta)^T \Phi L(\eta) (I + L(\eta)^T \Phi^T S(\zeta) S(\zeta)^T \Phi L(\eta))^{-1} L(\eta)^T \Phi^T S(\zeta) S(\zeta)^T. \end{aligned} \quad (217)$$

Agora, denotando $K(\zeta) = S(\zeta)^T Y$ e $M(\beta) = S(\zeta)^T \Phi L(\eta)$, é possível concluir que

$$\begin{aligned} Y^T (\Sigma(\zeta) + \Phi L(\eta) L(\eta)^T \Phi^T)^{-1} Y = \\ K(\zeta)^T K(\zeta) - K(\zeta)^T M(\beta) (I + M(\beta)^T M(\beta))^{-1} M(\beta)^T K(\zeta), \end{aligned} \quad (218)$$

o que fornece as condições para formular o Teorema 3.3.

Teorema 3.3 (Equivalência das funções custo). *A otimização da função custo de máxima verossimilhança (210) é equivalente à otimização da seguinte função custo:*

$$J_{eb}(\beta) = \|K(\zeta)\|^2 - \|R(\beta)^{-1} M(\beta)^T K(\zeta)\|^2 + 2 \log(|R(\beta)|) - 2 \log(|S(\zeta)|), \quad (219)$$

com $R(\beta) R(\beta)^T = I + M(\beta)^T M(\beta)$.

Prova. O Teorema 3.3 pode ser provado a partir das relações demonstradas em 3.2.1.1 e 3.2.1.2 conjuntamente. \square

A grande vantagem de utilizar a função custo (219) (Teorema 3.3) no problema de otimização de máxima verossimilhança (208) é que o problema original requer o cálculo da inversa e do determinante de $\Psi(\beta)$, que é uma matriz de dimensão $N \times N$. Dependendo do algoritmo utilizado, isso leva a uma complexidade computacional de ordem $O(N^3)$. Por outro lado, utilizando o Teorema 3.3, a inversa e o determinante são calculados para a matriz $R(\beta)$, que por sua vez possui dimensão $n \times n$ levando a um problema de complexidade computacional da ordem de $O(n^3)$. Então, uma vez que no cenário de identificação de sistemas a seguinte relação é verdadeira: $N \gg n$, existe uma grande melhora em relação ao custo computacional e à precisão numérica do problema (CHEN; LJUNG, 2013).

3.2.2 Estruturas de parametrização para Π e Σ

O último aspecto a ser considerado em relação à estimação de Π e Σ a partir de dados do sistema é a estrutura de parametrização destas matrizes. Como cada uma destas matrizes possui uma interpretação e um significado distinta, é natural que ambas possuam estruturas diferentes de parametrização.

Como discutido anteriormente, dentro da interpretação bayesiana do procedimento de identificação a matriz Π representa a covariância dos coeficientes da resposta ao impulso do sistema. Dessa forma, ela deve refletir uma característica de decaimento exponencial e uma correlação positiva entre coeficientes próximos, se for considerada a identificação de um sistema estável. Para este caso, já existem estruturas de parametrização na literatura de identificação com regularização (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO *et al.*, 2014) que são as estruturas DI (122), DC (124), TC (126) e SS (128), por exemplo.

Por outro lado, a matriz Σ tem uma interpretação diferente dentro da interpretação bayesiana: ela representa a matriz de covariância do ruído colorido de saída (V), como demonstrado em (179). Também, como a função de transferência do ruído $H_0(q)$ é desconhecida *a priori* em situações reais de identificação, uma abordagem razoável é considerá-la (ou aproximá-la) por um filtro IIR (*infinite impulse response*) de primeira ordem. Nesse caso Σ^{-1} é uma matriz que pode ser parametrizada como (SÖDERSTRÖM; JEZEK; KUCERA, 1998; SÖDERSTRÖM, 2002):

$$\Sigma^{-1}(\zeta) = S(\zeta)S(\zeta)^T, \quad (220)$$

sendo $S(\zeta)$ com o seguinte formato:

$$S(\zeta) = \begin{bmatrix} \zeta_0 & \zeta_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \zeta_0 & \zeta_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \zeta_0 & \zeta_1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \zeta_0 & \zeta_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 0 & \zeta_0 & \zeta_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \zeta_0 \end{bmatrix}. \quad (221)$$

Finalmente, com as estruturas demonstradas, é possível resolver o problema de otimização descrito no Teorema 3.3, estimar os hiperparâmetros, e usar as matrizes de regularização e ponderação estimadas no método dos mínimos quadrados ponderados regularizados para identificar o modelo FIR para o sistema.

Vale mencionar que a estimação de Σ também é um problema tradicional na comunidade e literatura de identificação de sistemas, uma vez que essa matriz pode ser utilizada com o método dos mínimos quadrados ponderados, resultando em estimadores com covariância ótima (LJUNG, 1999). Na literatura de identificação, existem várias metodologias

para estimá-la (MATISKO; HAVLENA, 2013; FENG *et al.*, 2014). No entanto, a maioria das metodologias é baseada no modelo do sistema. Em contrapartida, a metodologia apresentada neste trabalho insere o problema de estimação da matriz Σ na perspectiva bayesiana, como uma informação *a priori* a ser estimada sobre o sistema e assim, sendo caracterizada como uma abordagem baseada em dados. Esta também pode ser considerada uma das contribuições deste trabalho.

3.3 Exemplos numéricos

Para demonstrar a eficiência do método dos mínimos quadrados ponderados regularizados em comparação com o mínimos quadrados ordinário e com o mínimos quadrados regularizados (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO *et al.*, 2014), essa seção exibe dois exemplos numéricos. Nesses dois exemplos, o MQR e o MQPR são comparados usando as estruturas de parametrização do tipo DC e TC.

O primeiro exemplo também foi apresentado em (BOEIRA; ECKHARD, 2021a, 2023), e consiste na aproximação e identificação de um sistema IIR de primeira ordem por um modelo FIR, onde a função de transferência do ruído também foi definida como um filtro IIR de primeira ordem, caracterizando o ruído como colorido. O segundo exemplo foi apresentado em (BOEIRA; ECKHARD, 2023) e apresenta a identificação e aproximação de um sistema com função de transferência de quarta ordem por um modelo do tipo FIR, onde a função de transferência do ruído foi definida como um filtro IIR de segunda ordem. Este segundo exemplo foi adicionado para ilustrar o potencial da metodologia MQPR em aplicações reais de identificação.

3.3.1 Exemplo com sistema e ruído de primeira ordem

O sistema considerado neste primeiro exemplo foi escolhido como

$$y(t) = \frac{0,1}{q - 0,9}u(t) + \frac{q}{q - 0,95}w(t). \quad (222)$$

onde $u(t)$ e $w(t)$ foram escolhidos como ruído branco. Como discutido no trabalho, o objetivo do método MQPR é identificar os coeficientes da resposta ao impulso do sistema e, neste caso, a ordem escolhida foi de $n = 60$. As condições experimentais foram escolhidas para serem próximas àquelas propostas em (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012), onde o número de dados coletados sobre o processo é de $N = 500$ e a relação sinal-ruído foi escolhida como $SNR = 10$, resultando em $\sigma_u^2 = 190$ e $\sigma_w^2 = 0,0975$. Para avaliar e comparar as metodologias de identificação, 1000 rodadas de Monte Carlo foram executadas e as propriedades estatísticas de cada método foram calculadas com base nas amostras das simulações. Além disso, são comparadas as respostas ao impulso identificadas e uma medida conhecida como *fit*, amplamente usada na literatura de identificação para avaliar a qualidade dos modelos identificados. Por fim, vale destacar que o número de dados N

coletados do processo e o número de rodadas de Monte Carlos foram escolhidos com base em estudos e experiências anteriores.

Primeiramente, a Tabela 5 mostra as propriedades estatísticas, como a norma do vetor de polarização, o traço da matriz de covariância e da matriz de erro médio quadrático, baseadas nas amostras de Monte Carlo.

Tabela 5 – Norma do vetor de polarização, traço da matriz de covariância e traço da matriz de erro médio quadrático para cada método de identificação nas rodadas de Monte Carlo - Exemplo 1.

Método		$\ \mathcal{B}\ _2$	$\text{tr}(\mathcal{V})$	$\text{tr}(\mathcal{Q})$
MQ		$0,74 \times 10^{-3}$	$0,84 \times 10^{-3}$	$8,4 \times 10^{-4}$
MQR	DC	$1,25 \times 10^{-3}$	$0,56 \times 10^{-3}$	$5,6 \times 10^{-4}$
	TC	$1,45 \times 10^{-3}$	$0,64 \times 10^{-3}$	$6,4 \times 10^{-4}$
MQPR	DC	$0,61 \times 10^{-3}$	$0,21 \times 10^{-3}$	$2,1 \times 10^{-4}$
	TC	$9,68 \times 10^{-3}$	$0,40 \times 10^{-3}$	$4,9 \times 10^{-4}$

Fonte: do autor, adaptado de SÖDERSTRÖM; STOICA (1989).

Analisando a Tabela 5, é evidente que os métodos MQR e MQPR apresentam uma polarização mais elevada, mas apresentam menor traço da matriz de covariância e erro médio quadrático, comparados com o mínimos quadrados ordinário. Ainda, nota-se que o MQPR apresenta o menor valor de traço da covariância e traço da matriz de erro médio quadrático.

Nas figuras 6a e 6b são exibidas as respostas ao impulso identificadas com a resposta ao impulso do sistema ideal para os métodos do MQR e MQPR, onde foram usadas as parametrizações do tipo DC para a matriz de regularização. As figuras demonstram que existe uma melhora significativa ao realizar a identificação com o método MQPR, visto que as respostas estão mais próximas à resposta real na Figura 6b.

Finalmente, o último critério de comparação é a clássica medida de *fit* dos modelos, amplamente utilizada na literatura de identificação (LJUNG, 1999; CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO *et al.*, 2014):

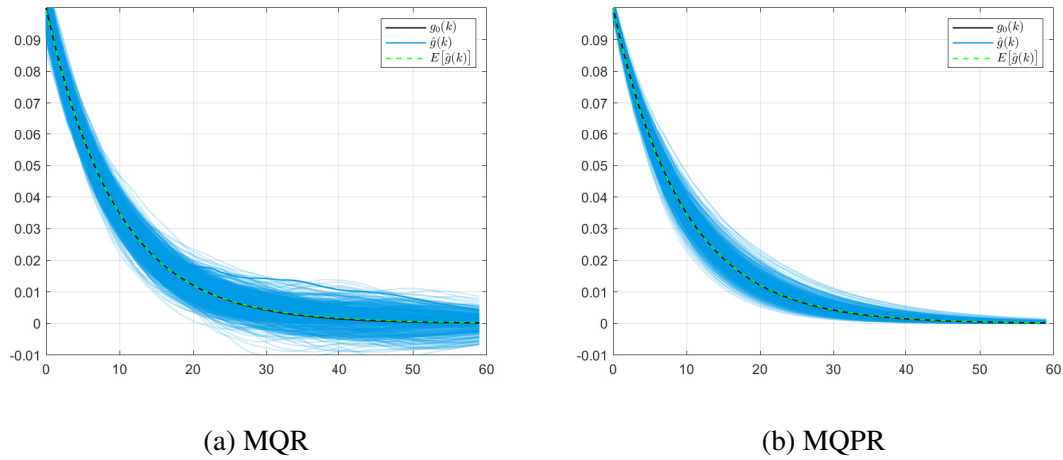
$$\mathcal{F} = 100 \left[1 - \left(\frac{\sum_{k=0}^n |\theta_0(k) - \hat{\theta}(k)|^2}{\sum_{k=0}^n |\theta_0(k) - \bar{\theta}_0(k)|^2} \right)^{1/2} \right], \quad (223)$$

com

$$\bar{\theta}_0 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \theta_0(k). \quad (224)$$

Este critério de qualidade é responsável por medir a distância entre o modelo identificado e o sistema ideal. Sendo assim, o *fit* para um modelo próximo do sistema ideal resulta em um valor próximo de $\mathcal{F} \approx 100$. Neste exemplo, o *fit* foi calculado para cada uma

Figura 6 – Resposta ao impulso real do sistema com as respostas ao impulsos identificadas com os métodos MQR (a) e MQPR (b) com a parametrização do tipo DC - Exemplo 1.



Fonte: do autor.

das respostas ao impulso identificadas e as distribuições resultantes são demonstrados nos diagramas de caixa da Figura 7.

Observando a Figura 7, é possível concluir que o método MQPR atingiu os maiores valores para a medida *fit*, para ambas as parametrizações escolhidas, o que indica uma maior qualidade dos modelos desta metodologia, se comparada com o MQR e o MQ.

3.3.2 Exemplo com sistema de quarta ordem e ruído de segunda ordem

Neste exemplo, o sistema considerado para identificação é dado por

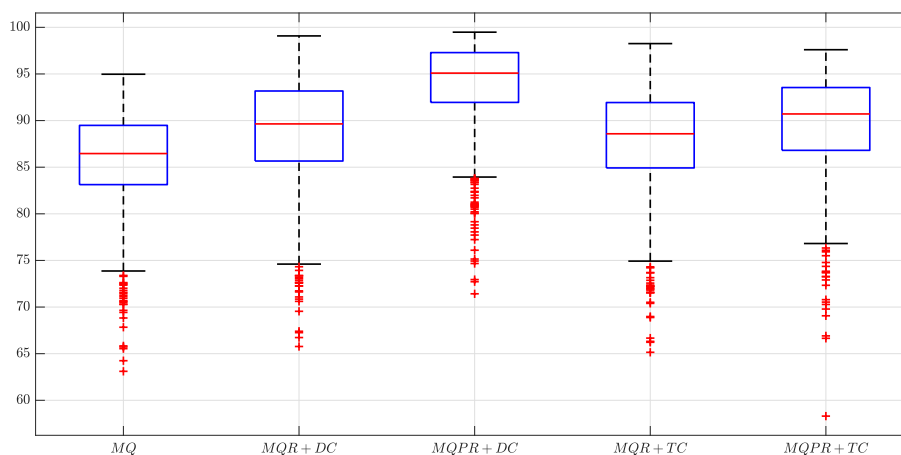
$$y(t) = \frac{b_4q^4 + b_3q^3 + b_2q^2 + b_1q + b_0}{q^4 + f_3q^3 + f_2q^2 + f_1q + f_0}u(t) + \frac{q^2}{q^2 + d_1q + d_0}w(t), \quad (225)$$

com $b_4 = b_0 = 0,0004$, $b_3 = b_1 = 0,0017$, $b_2 = 0,0025$, $f_3 = -3,1806$, $f_2 = 3,8612$, $f_1 = -2,1122$, $f_0 = 0,4383$, $d_1 = -1,9250$, $d_0 = 0,9259$. Neste caso, tanto $u(t)$ quanto $w(t)$ são ruído branco de média zero e variância $\sigma_u^2 = 97,64$ e $\sigma_w^2 = 1,3335 \times 10^{-4}$, que resulta em $SNR = 10$ na saída do sistema.

O modelo FIR escolhido para identificar os sistemas com os métodos MQ, MQR e MQPR neste exemplo foi escolhido com ordem $n = 80$. Em cada rodada de Monte Carlo, $N = 255$ amostras de dados foram coletadas nas simulações e utilizadas nos procedimentos de identificação. Neste caso, 1000 rodadas de Monte Carlo foram executadas para comparar as propriedades estatísticas dos métodos, as respostas ao impulso atingidas e as distribuições da medida *fit*. Novamente, neste caso, o número de rodadas de Monte Carlo e o número de dados N utilizados foi escolhido com base em experiências anteriores.

Neste sentido, a Tabela 6 demonstra a norma do vetor de polarização e o traço das matrizes de covariância e erro médio quadrático para os métodos MQ, MQR e MQPR.

Figura 7 – Diagramas de caixa obtidos para a medida fit para cada método de identificação - Exemplo 1.



Fonte: do autor.

Tabela 6 – Norma do vetor de polarização, traço da matriz de covariância e traço da matriz de erro médio quadrático para cada método de identificação nas rodadas de Monte Carlo - Exemplo 2.

Método		$\ \mathcal{B}\ _2$	$\text{tr}(\mathcal{V})$	$\text{tr}(\mathcal{Q})$
MQ		$2,8 \times 10^{-3}$	$7,6 \times 10^{-3}$	$7,6 \times 10^{-3}$
MQR	DC	$8,6 \times 10^{-3}$	$5,9 \times 10^{-3}$	$5,9 \times 10^{-3}$
	TC	$8,6 \times 10^{-3}$	$6,0 \times 10^{-3}$	$6,0 \times 10^{-3}$
MQPR	DC	$2,6 \times 10^{-3}$	$3,3 \times 10^{-3}$	$3,3 \times 10^{-3}$
	TC	$2,1 \times 10^{-3}$	$2,8 \times 10^{-3}$	$2,8 \times 10^{-3}$

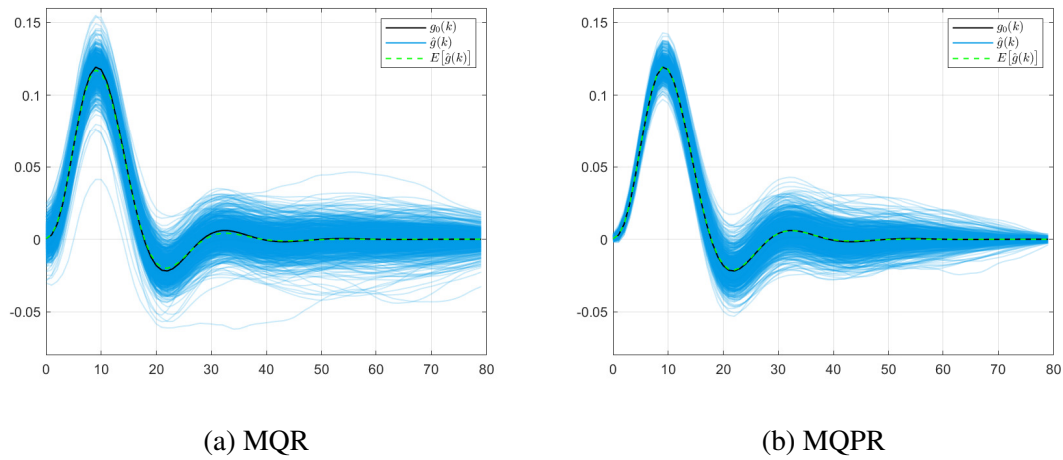
Fonte: do autor.

A Tabela 6 mostra que a polarização é maior para o método do MQR em relação ao MQ e ao MQPR. A tabela ainda mostra que o traço da covariância e da matriz de erro médio quadrático é menor para o método dos MQPR em relação aos outros métodos.

Ainda, as Figuras 8a e 8b mostram todas as respostas ao impulso identificadas para os métodos MQR e MQPR, comparadas à resposta ao impulso real do sistema. Observando as figuras, é possível perceber que o método dos MQPR atingiu um melhor resultado, visto que suas estimativas ficaram mais próximas à resposta real.

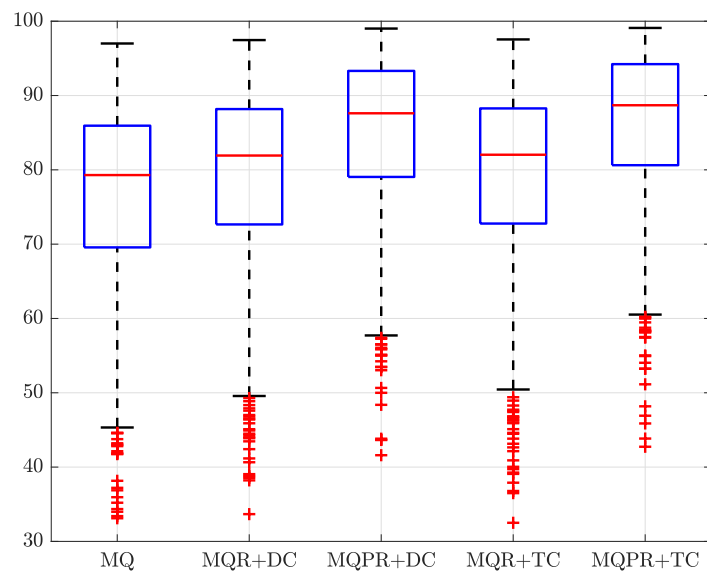
Por fim, a Figura 9 exibe os diagramas de caixa para a medida fit definida em (223), e que foi calculada para cada rodada de Monte Carlo e para cada método e parametrização de P respectiva. Observando tal figura, nota-se que a distribuição atingida para o método aqui proposto, do MQPR, alcançou valores mais próximos a $\mathcal{F} = 100$ para ambas as parametrizações de P exploradas no exemplo.

Figura 8 – Resposta ao impulso real do sistema e respostas ao impulsos identificadas com os métodos MQR (a) e MQPR (b) com a parametrização do tipo DC - Exemplo 2.



Fonte: do autor.

Figura 9 – Diagramas de caixa obtidos para a medida *fit* para cada método de identificação - Exemplo 2.



Fonte: do autor.

3.4 Considerações finais

Este capítulo apresentou uma das principais contribuições da tese: o método dos mínimos quadrados ponderados regularizados para a identificação de respostas ao impulso de sistemas com ruído colorido em sua saída. Primeiramente, o novo método dos mínimos quadrados ponderados regularizado foi introduzido, assim como suas propriedades

estatísticas. Com isso, foi possível perceber a dependência da matriz de regularização e ponderação nas propriedades estatísticas do estimador. Também, foi desenvolvido o cálculo das matrizes ótimas de regularização e ponderação, onde concluiu-se que ambas são função de quantidades desconhecidas como θ_0 e Σ^{-1} .

Avançando com o estudo, a seção 3.2 demonstrou a interpretação bayesiana do procedimento de identificação para o cenário de ruído colorido na saída, além de sua equivalência com a nova metodologia de identificação do mínimos quadrados ponderados regularizado, fator fundamental para a estimação e parametrização das matrizes de ponderação e regularização. Também, nesta seção foi apresentado o algoritmo de estimação destas matrizes, baseado no método bayesiano empírico. Neste sentido, foi possível reescrever o problema de otimização para diminuir sua complexidade computacional e melhorar sua precisão, usando a fatoração de Cholesky e algumas relações de matrizes inversas.

Por fim, foi demonstrado, através de dois exemplos numéricos, que o método aqui proposto resulta em estimativas mais precisas para os coeficientes da resposta ao impulso dos modelos FIR, se comparado ao método tradicional da literatura de identificação com regularização quando há ruído colorido na saída do processo. O primeiro exemplo apresentou um sistema de ordem menor: primeira ordem para as funções de transferência do processo e do ruído. Já o segundo apresentou um sistema com função de transferência de quarta ordem para o processo e de segunda ordem para o ruído, visando demonstrar o potencial do método em aplicações mais próximas da realidade. Analisando os resultados atingidos no exemplo, é possível perceber que tanto as propriedades estatísticas resultantes, quanto a medida *fit* foram melhores para o MQPR e as respostas ao impulso identificadas foram mais próximas às respostas reais.

4 REGULARIZAÇÃO ÓTIMA NA IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS COM ERROS NAS VARIÁVEIS

De acordo com o que foi apresentado no capítulo 2, na seção que discute os sistemas com erros nas variáveis (2.6), as metodologias elementares de identificação para este tipo de sistema são: o método dos mínimos quadrados ordinário e o método das variáveis instrumentais básicas. Contudo, ambos possuem desvantagens com relação a suas propriedades estatísticas: o mínimos quadrados resulta em um estimador não consistente e a variável instrumental possui uma larga covariância nas estimativas. Por isso, este trabalho procura aprimorar esta lacuna da técnica das variáveis instrumentais, adicionando regularização na técnica para diminuir sua covariância, ao custo de adicionar uma pequena polarização, visto que este é o principal efeito introduzido pela regularização nas estimativas (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO *et al.*, 2014).

Isto posto, a técnica de variáveis instrumentais regularizada é estudada neste capítulo e suas propriedades estatísticas são obtidas, o que também é uma contribuição do trabalho, dado que este não é um procedimento trivial e requer um estudo aprofundado. Após o cálculo das propriedades, dois problemas de otimização são formulados e resolvidos com o objetivo de minimizar o traço da matriz de erro médio quadrático das estimativas. No primeiro problema, nenhuma restrição é considerada sobre a matriz de regularização. No segundo, a restrição de simetria da matriz é imposta no problema, com o objetivo de aproximar os resultados daqueles encontrados para o caso tradicional de identificação com regularização e para o caso estudado no capítulo 3.

Ainda, cabe ressaltar que as grandezas e quantidades que compõem as matrizes ótimas de regularização são desconhecidas em situações práticas e devem ser estimadas. Para tanto, será necessário o futuro desenvolvimento de técnicas de estimação. Até o momento, não existem técnicas específicas para a estimação de tais matrizes no cenário de sistemas com erros nas variáveis. No entanto, cabe ressaltar que podem ser usadas, de forma aproximada, as técnicas desenvolvidas no cenário de identificação com ruído na saída, como o caso dos algoritmos implementados na ferramenta IDENT do MATLAB.

Por fim, ressalta-se que um dos principais objetivos do desenvolvimento apresentado neste capítulo é estender o mesmo para o método de controle baseado em dados conhecido

como VRFT, o qual também pode ser interpretado como um método de identificação de sistemas com erros nas variáveis, mas que possui suas próprias particularidades.

Assim sendo, na seção 4.1 é apresentada a técnica de variável instrumental regularizada (VIR). Na sequência, suas propriedades de polarização, covariância e erro médio quadrático são deduzidas na seção 4.2. Em 4.3 a otimização do traço da matriz de erro médio quadrático é apresentada tanto para o caso irrestrito, como para o caso com restrição de simetria. A seção 4.4 demonstra os exemplos numéricos para o uso das matrizes ótimas de regularização e a seção 4.5 apresenta as considerações finais do capítulo. A contribuição detalhada neste capítulo também foi apresentada em (BOEIRA; ECKHARD, 2021b).

4.1 Adicionando regularização na variável instrumental

Vale destacar que o método de variável instrumental regularizada foi proposto na literatura da área de controle baseado em dados, onde ela foi usada com o propósito de atingir uma identificação mais precisa e confiável de controladores pelo método do VRFT. Neste sentido, as principais contribuições são expostas em: (FORMENTIN; KARIMI, 2014), que emprega a regularização para aproximar duas funções custo no contexto do VRFT; (RALLO *et al.*, 2016), onde uma regularização bayesiana é utilizada para a obtenção de controladores monovariáveis; e (BOEIRA; ECKHARD, 2018), que usa a mesma ideia de regularização bayesiana para a identificação de controladores multivariáveis. Os resultados alcançados nestes trabalhos foram promissores, demonstrando uma melhor qualidade nas estimativas se comparados aos resultados atingidos pelos métodos elementares.

Para regularizar a técnica da variável instrumental, os trabalhos (FORMENTIN; KARIMI, 2014; RALLO *et al.*, 2016; BOEIRA; ECKHARD, 2018) propõem uma estimativa baseada na solução da seguinte equação de correlação:

$$\hat{\theta}_{vir} = \text{sol} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta(t) [y(t) - \varphi(t)^T \theta] = P^{-1} \theta \right\}, \quad (226)$$

onde é possível notar que, em relação à formulação tradicional da variável instrumental básica (149), foi adicionado o termo $P^{-1}\theta$ do lado direito da equação, com $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sendo a matriz de regularização. Enfim, para obter a estimativa da variável instrumental regularizada, basta resolver a equação (226), isolando a variável θ , o que resulta em (FORMENTIN; KARIMI, 2014; RALLO *et al.*, 2016; BOEIRA; ECKHARD, 2018):

$$\hat{\theta}_{vir} = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N P \zeta(t) \varphi(t)^T + I \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N P \zeta(t) y(t) \right]. \quad (227)$$

A estimativa exposta em (227) é usada na conjuntura deste trabalho para a identificação de sistemas com erros nas variáveis do tipo FIR, com as restrições e particularidades discutidas na subseção 2.6.1, visto que isto simplifica a análise das propriedades estatísticas. Além disso, vale lembrar que o vetor $\zeta(t)$ em (227) é a variável instrumental

construída com dados de um segundo experimento no processo, $\varphi(t)$ é o vetor regressor, construído com os dados $u(t)$ do primeiro experimento, como mostrado em (141), e $y(t)$ é o sinal de saída coletado no primeiro experimento. Ainda em relação a (227), é interessante observar que, caso a variável instrumental $\zeta(t)$ seja escolhida como $\zeta(t) = \varphi(t)$, então a estimativa da variável instrumental regularizada é idêntica à estimativa de mínimos quadrados regularizados, exibida em (87), e que é usada no contexto de identificação de sistemas com ruído na saída, assunto discutido anteriormente no trabalho. Por este motivo, pode-se dizer que a estimativa da variável instrumental regularizada é uma extensão natural dos mínimos quadrados regularizados ou da variável instrumental básica.

4.2 Propriedades da estimativa por variável instrumental regularizada

Visando obter condições para calcular uma matriz de regularização que otimize algum critério, aqui é apresentada a dedução para as propriedades teóricas das estimativas da variável instrumental regularizada (227). Primeiramente, a polarização é obtida e, em seguida, analisa-se o erro médio quadrático dos parâmetros.

O procedimento de análise das propriedades da estimativa com variável instrumental regularizada segue a premissa que o sistema ideal a ser identificado \mathcal{S} deve respeitar as considerações da subseção 2.6.1, isto é, que o mesmo satisfaz (138), que está dentro da classe de modelos usados na identificação ($\mathcal{S} \in \mathcal{M}(\theta)$), ou seja, que é da classe FIR e que os sinais $u_0(t)$, $\tilde{u}(t)$ e $\tilde{u}_2(t)$ são descorrelacionados entre si.

Com isto, considerando que a Premissa 2.1 é satisfeita para este cenário, pode-se notar que a saída do sistema ideal pode ser descrita por

$$y(t) = \varphi_0(t)^T \theta_0, \quad (228)$$

onde $\varphi_0(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor regressor ideal, composto pelo sinal $u_0(t)$ que realmente excita o processo $G_0(q)$:

$$\varphi_0(t) = \left[u_0(t-1) \quad u_0(t-2) \quad \dots \quad u_0(t-n) \right]^T. \quad (229)$$

Contudo, como $u_0(t)$ é um sinal desconhecido, é comum escrever a saída do processo de uma forma alternativa, em função dos sinais $u(t)$ e $\tilde{u}(t)$:

$$y(t) = \varphi(t)^T \theta_0 - \tilde{\varphi}(t)^T \theta_0, \quad (230)$$

$$y(t) = \varphi(t)^T \theta_0 + \mu(t), \quad (231)$$

com

$$\mu(t) = -\tilde{\varphi}(t)^T \theta_0, \quad (232)$$

$$\mu(t) = -G_0(q)\tilde{u}(t), \quad (233)$$

e onde escreve-se $\varphi(t)$ a partir das contribuições de $\varphi_0(t)$ e $\tilde{\varphi}(t)$:

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \tilde{\varphi}(t), \quad (234)$$

com

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{u}(t-1) & \tilde{u}(t-2) & \dots & \tilde{u}(t-n) \end{bmatrix}^T. \quad (235)$$

Também é importante destacar a composição do vetor de variável instrumental, formada pelo sinal obtido no segundo experimento $\tilde{u}_2(t)$:

$$\zeta(t) = \varphi_0(t) + \tilde{\varphi}_2(t), \quad (236)$$

sendo que

$$\tilde{\varphi}_2(t) = \begin{bmatrix} \tilde{u}_2(t-1) & \tilde{u}_2(t-2) & \dots & \tilde{u}_2(t-n) \end{bmatrix}^T. \quad (237)$$

Ademais, vale ressaltar que a dedução das propriedades estatísticas do estimador é realizada no cenário assintótico, onde o número de dados é elevado ($N \rightarrow \infty$), assim como é desenvolvido na literatura do tema (SÖDERSTRÖM, 2018). Neste sentido, os Teoremas 4.1 e 4.2 apresentam as principais propriedades estatísticas do estimador aqui explorado.

4.2.1 Polarização da estimativa por variável instrumental regularizada

Teorema 4.1 (Polarização assintótica da estimativa de variável instrumental regularizada). *A polarização assintótica da estimativa de variável instrumental regularizada é dada pela seguinte expressão:*

$$\mathcal{B}_{vir}(P) = -(PR_0 + I)^{-1}\theta_0, \quad N \rightarrow \infty. \quad (238)$$

Prova. Para começar a prova observa-se, em primeiro lugar, o valor para qual a estimativa converge quando o número de dados tende ao infinito:

$$\theta_{vir}^* = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{vir} \quad (239)$$

$$\theta_{vir}^* = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N P\zeta(t)\varphi(t)^T + I \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N P\zeta(t)y(t) \right]. \quad (240)$$

Os sinais aqui presentes são quasi-estacionários e ergódicos, o que significa que os somatórios em (240) podem ser substituídos pelo operador $\bar{E}[\cdot]$. Dessa forma, é possível concluir que o valor de $\hat{\theta}_{vir}$ converge para:

$$\theta_{vir}^* = \left(P\bar{E} \left[\zeta(t)\varphi(t)^T \right] + I \right)^{-1} \left(P\bar{E} \left[\zeta(t)y(t) \right] \right). \quad (241)$$

Agora, é importante observar que a variável instrumental e o vetor regressor do primeiro experimento são dados por (234) e (236) e que, portanto:

$$\bar{E} \left[\zeta(t) \varphi(t)^T \right] = \bar{E} \left[(\varphi_0(t) + \tilde{\varphi}_2(t)) (\varphi_0(t) + \tilde{\varphi}(t))^T \right] = \bar{E} \left[\varphi_0(t) \varphi_0(t)^T \right] = R_{\varphi_0}, \quad (242)$$

Também, neste trabalho, é possível reescrever a saída $y(t)$ como em (228) onde pode-se concluir que o termo $\bar{E} \left[\zeta(t) y(t) \right]$ pode ser avaliado como:

$$\bar{E} \left[\zeta(t) y(t) \right] = \bar{E} \left[(\varphi_0(t) + \tilde{\varphi}_2(t)) \varphi_0(t)^T \theta_0 \right] = \bar{E} \left[\varphi_0(t) \varphi_0(t)^T \right] \theta_0 = R_{\varphi_0} \theta_0, \quad (243)$$

Finalmente, usando essas relações em (241), é possível chegar na expressão para o valor assintótico dos parâmetros estimados com a variável instrumental regularizada:

$$\theta_{vir}^* = (PR_0 + I)^{-1} PR_0 \theta_0, \quad (244)$$

onde usou-se $R_{\varphi_0} = R_0$ para simplificar a notação. De posse do valor assintótico para a estimativa, então, é possível calcular a polarização assintótica, dada por

$$\mathcal{B}_{vir}(P) = E \left[\hat{\theta}_{vir} \right] - \theta_0, \quad (245)$$

$$\mathcal{B}_{vir}(P) = \theta_{vir}^* - \theta_0, \quad N \rightarrow \infty \quad (246)$$

$$\mathcal{B}_{vir}(P) = -(PR_0 + I)^{-1} \theta_0, \quad N \rightarrow \infty, \quad (247)$$

encerrando a prova do teorema. \square

Deste modo, a partir do resultado exposto no Teorema 4.1, pode-se perceber que a estimativa por variável instrumental regularizada é polarizada quando $N \rightarrow \infty$, o que acaba se tornando uma desvantagem de usar a ferramenta de regularização também neste cenário. Contudo, caso a polarização seja pequena, muitas vezes é aceitável atingir uma estimativa polarizada que seja capaz de produzir menor covariância e/ou erro médio quadrático. Além disso, nota-se que, caso $P^{-1} = 0$, ou seja, caso decida-se por não se usar a regularização, a polarização se torna nula, o que pode ser observado por (247).

4.2.2 Covariância e erro médio quadrático da estimativa

Agora, apresenta-se o Teorema 4.2 com o resultado aproximado da matriz de erro médio quadrático da estimativa de variável instrumental regularizada.

Teorema 4.2 (Erro médio quadrático da estimativa de variável instrumental regularizada).

A matriz de erro médio quadrático da estimativa $\hat{\theta}_{vir}$ pode ser aproximada por:

$$Q_{vir}(P) \approx (PR_0 + I)^{-1} (P \mathbf{W}_{vi} P^T + \theta_0 \theta_0^T) (R_0 P^T + I)^{-1}, \quad N \rightarrow \infty, \quad (248)$$

com $\mathbf{W}_{vi} = \mathbf{C}_{vi}/N$

$$\mathbf{C}_{vi} = \sigma_w^2 \left\{ \bar{E} \left[\left(G_0(q) \varphi_0(t) \right) \left(G_0(q) \varphi_0(t) \right)^T \right] + \bar{E} \left[\left(G_0(q) \tilde{\varphi}_2(t) \right) \left(G_0(q) \tilde{\varphi}_2(t) \right)^T \right] \right\}. \quad (249)$$

Prova. Análise para obter o erro médio quadrático das estimativas se dá a partir da seguinte variável aleatória:

$$\mathbf{X}_0 \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \left(\hat{\theta}_{vir} - \theta_0 \right), \quad (250)$$

onde usa-se o Teorema do Limite Central, assim como proposto no trabalho de RALLO *et al.* (2016). A análise apresentada no trabalho citado é mais sucinta e direta, mas para este trabalho, a mesma foi interpretada e estudada em mais detalhes. Nesta análise, usa-se o Teorema do Limite Central com o propósito de verificar que \mathbf{X}_0 converge em distribuição, quando $N \rightarrow \infty$, para:

$$\mathbf{X}_0 \xrightarrow{dist} \mathcal{N} \left(\sqrt{N} \theta_{vir}^*, \mathbf{U}_0 \right) \quad (251)$$

onde

$$\mathbf{U}_0 = E \left[\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_0^T \right]. \quad (252)$$

Com isto, a matriz de erro médio quadrático da estimativa de variável instrumental regularizada é calculada por

$$\mathcal{Q}_{vir}(P) = E \left[\left(\hat{\theta}_{vir} - \theta_0 \right) \left(\hat{\theta}_{vir} - \theta_0 \right)^T \right] \approx \frac{\mathbf{U}_0}{N}, \quad (253)$$

Ainda, dentro deste contexto, é importante avaliar \mathbf{U}_0 , para compreender a dependência do erro médio quadrático em função da matriz de regularização, e, na sequência, encontrar uma matriz ótima de regularização.

Para obter a expressão analítica da matriz \mathbf{U}_0 , o primeiro passo é expandir a variável \mathbf{X}_0 e estudar os elementos que a compõem:

$$\mathbf{X}_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \left(\hat{\theta}_{vir} - \theta_0 \right), \quad (254)$$

$$\mathbf{X}_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N P\zeta(t) \varphi(t)^T + I \right]^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N P\zeta(t) y(t) \right] - \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N P\zeta(t) \varphi(t)^T + I \right]^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N P\zeta(t) \varphi(t)^T + \sqrt{N} I \right] \theta_0 \right\}. \quad (255)$$

Agora, percebe-se que, realizando algumas operações algébricas em (255), chega-se em:

$$\mathbf{X}_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N P\zeta(t) \varphi(t)^T + I \right]^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N P\zeta(t) \mu(t) - \sqrt{N} \theta_0 \right], \quad (256)$$

lembrando que, por (231), $\mu(t) = y(t) - \varphi(t)^T \theta_0$. Aqui é possível utilizar, o fato de que o termo à esquerda de \mathbf{X}_0 converge para

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N P\zeta(t) \varphi(t)^T + I \right]^{-1} \rightarrow (PR_0 + I)^{-1}, \quad (257)$$

o que resulta na seguinte expressão para a variável aleatória analisada \mathbf{X}_0 :

$$\mathbf{X}_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} (PR_0 + I)^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N P\zeta(t)\mu(t) - \sqrt{N}\theta_0 \right]. \quad (258)$$

Finalmente, para obter a expressão teórica de \mathbf{U}_0 , resta calcular a correlação $E[\mathbf{X}_0\mathbf{X}_0^T]$:

$$\mathbf{U}_0 = E[\mathbf{X}_0\mathbf{X}_0^T], \quad (259)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} (PR_0 + I)^{-1} E[\mathbf{X}_{0in}\mathbf{X}_{0in}^T] (R_0P^T + I)^{-1}, \quad (260)$$

onde, também para simplificar a notação, escolheu-se \mathbf{X}_{0in} como o termo “interno”, sendo o mesmo é dado por

$$\mathbf{X}_{0in} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N P\zeta(t)\mu(t) - \sqrt{N}\theta_0 \right]. \quad (261)$$

Enfim, para calcular a expressão teórica de \mathbf{U}_0 , então, é preciso obter a correlação $E[\mathbf{X}_{0in}\mathbf{X}_{0in}^T]$. Isto posto, realizando a multiplicação das variáveis em questão e a operação de valor esperado, conclui-se que:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{X}_{0in}\mathbf{X}_{0in}^T] &= \lim_{N \rightarrow \infty} PE \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N \zeta(t)\mu(t)\mu(s)\zeta(s)^T \right] P^T - \\ &PE \left[\sum_{t=1}^N \zeta(t)\mu(t) \right] \theta_0^T - \theta_0 E \left[\sum_{t=1}^N \mu(t)\zeta(t)^T \right] P^T + N\theta_0\theta_0^T. \end{aligned} \quad (262)$$

Em (262), os termos de correlação entre $\zeta(t)$ e $\mu(t)$ são cancelados (RALLO *et al.*, 2016), uma vez que tais variáveis são descorrelacionadas. Neste caso, para a correlação $E[\mathbf{X}_{0in}\mathbf{X}_{0in}^T]$ sobram somente os termos:

$$E[\mathbf{X}_{0in}\mathbf{X}_{0in}^T] = \lim_{N \rightarrow \infty} PE \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N \zeta(t)\mu(t)\mu(s)\zeta(s)^T \right] P^T + N\theta_0\theta_0^T. \quad (263)$$

Ainda, um aspecto interessante que se observa na expressão (263) é que o primeiro termo, é muito semelhante àquele calculado para a estimativa de variável instrumental básica, exposto em (158), com a diferença da pré e pós multiplicação dos termos P . Por este motivo, pode-se usar a expressão obtida naquela análise para chegar em

$$E[\mathbf{X}_{0in}\mathbf{X}_{0in}^T] = \lim_{N \rightarrow \infty} PC_{vi}P^T + N\theta_0\theta_0^T, \quad (264)$$

lembrando que, para a covariância da variável instrumental básica, verificou-se:

$$\mathbf{C}_{vi} = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N \zeta(t)\mu(t)\mu(s)\zeta(s)^T \right], \quad (265)$$

$$\mathbf{C}_{vi} = \sigma_w^2 \left\{ \bar{E} \left[\left(G_0(q)\varphi_0(t) \right) \left(G_0(q)\varphi_0(t) \right)^T \right] + \bar{E} \left[\left(G_0(q)\tilde{\varphi}_2(t) \right) \left(G_0(q)\tilde{\varphi}_2(t) \right)^T \right] \right\}, \quad (266)$$

onde é importante ressaltar que o filtro $G_0(q)$ que aparece em \mathbf{C}_{vi} é proveniente de $\mu(t)$, sendo o pré filtro do sinal, exibido em (233) (SÖDERSTRÖM, 2018).

Para concluir esta análise, então, basta substituir a expressão (264) em (260), produzindo:

$$\mathbf{U}_0 = (PR_0 + I)^{-1} (PC_{vi}P^T + N\theta_0\theta_0^T) (R_0P^T + I)^{-1}, \quad N \rightarrow \infty, \quad (267)$$

que é a correlação de $E[\mathbf{X}_0\mathbf{X}_0^T]$. Assim, para obter a matriz de erro médio quadrático final, da estimativa em questão, deve-se usar a expressão:

$$\mathcal{Q}_{vir}(P) \approx (PR_0 + I)^{-1} (P\mathbf{W}_{vi}P^T + \theta_0\theta_0^T) (R_0P^T + I)^{-1}, \quad N \rightarrow \infty, \quad (268)$$

com $\mathbf{W}_{vi} = \mathbf{C}_{vi}/N$, finalizando a prova. \square

Enfim, com, base na matriz de erro médio quadrático exposta no Teorema 4.2, e da polarização da estimativa apresentada no Teorema 4.1, fica evidente que o termo que provém da contribuição da polarização é dado por:

$$\mathcal{B}_{vir}(P)\mathcal{B}_{vir}^T(P) = (PR_0 + I)^{-1} (\theta_0\theta_0^T) (R_0P^T + I)^{-1}, \quad N \rightarrow \infty, \quad (269)$$

sendo a contribuição da covariância a seguinte:

$$\mathcal{V}_{vir}(P) = (PR_0 + I)^{-1} (P\mathbf{W}_{vi}P^T) (R_0P^T + I)^{-1}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (270)$$

4.3 Otimização do traço da matriz de erro médio quadrático

Como um dos objetivos da pesquisa é a otimização de algum critério de qualidade da estimativa, foi desenvolvida uma minimização de um critério relacionado a matriz de erro médio quadrático das estimativas, visto que a mesma é uma medida ampla de qualidade, que contém parcelas relacionadas tanto à polarização quanto à covariância, assim como fora feito anteriormente no caso de identificação com o método dos MQPR para sistemas com ruído na saída. Além disso, aqui foram realizados dois procedimentos de otimização: um para encontrar uma matriz ótima sem restrições e outro para encontrar uma matriz ótima com uma restrição de simetria, uma vez que as matrizes ótimas de regularização encontradas na literatura, assim como a que foi calculada para o método dos MQPR, possuem essa estrutura típica.

Neste sentido, o critério de qualidade da estimativa aqui otimizado também é o traço da matriz de covariância:

$$J_{tr}(P) = \text{tr}[\mathcal{Q}_{vir}(P)]. \quad (271)$$

Primeiramente, busca-se uma matriz de regularização ótima sem nenhuma restrição de simetria. Assim, para obter a matriz ótima de regularização deste critério, deve-se resolver o seguinte problema de otimização:

$$P_{0vir} = \arg \min_P J_{tr}(P), \quad (272)$$

que pode ser alcançado, de forma analítica por meio da relação:

$$P_{0_{vir}} = sol \left\{ \frac{\partial J_{tr}(P)}{\partial P} = 0 \right\}, \quad (273)$$

lembrando que $sol[f(x) = 0]$ simboliza a solução da equação $f(x) = 0$. Deste modo, para obter a matriz ótima de regularização, são utilizados conceitos de cálculo matricial exibidos no Apêndice A.

Primeiramente, para encontrar a matriz $\partial tr Q_{vir}(P)/\partial P$, deve-se procurar pelo elemento de sua i -ésima linha e j -ésima coluna, dado por

$$\left[\frac{\partial tr Q_{vir}(P)}{\partial P} \right]_{ij} = \frac{\partial tr Q_{vir}(P)}{\partial P_{ij}}, \quad (274)$$

usando a notação de *layout* mista de derivadas matriciais. Ainda, outra propriedade usada para obter a derivada de $tr Q_{vir}(P)$ é a seguinte:

$$\frac{\partial tr Q_{vir}(P)}{\partial P_{ij}} = tr \left[\frac{\partial Q_{vir}(P)}{\partial P_{ij}} \right]. \quad (275)$$

4.3.1 Matriz ótima de regularização sem restrições

No caso de estimativas resultantes do método dos mínimos quadrados regularizado, conforme apresentado na subseção 2.5.1 e resultantes dos mínimos quadrados ponderados regularizados, apresentado na seção 3.1, as matrizes ótimas de regularização obtidas possuem a característica de serem simétricas, o que é consequência da formulação quadrática dos métodos. Por outro lado, a estimativa de variável instrumental regularizada, formulada a partir da equação de correlação (226), não possui essa característica de simetria e, assim, um problema de otimização irrestrito é formulado no primeiro momento, resultando em uma matriz ótima não simétrica, como enunciado no Teorema 4.3.

Teorema 4.3 (Matriz ótima de regularização irrestrita). *A matriz ótima de regularização irrestrita que minimiza o traço da matriz de erro médio quadrático é dada por*

$$P_{0_{vir}} = \theta_0 \theta_0^T R_0 \mathbf{W}_{vi}^{-1}. \quad (276)$$

Prova. Para encontrar a matriz ótima de regularização, usa-se a seguinte expressão para a derivada do traço da MSE:

$$\frac{\partial tr(Q_{vir}(P))}{\partial P_{ij}} = tr \left\{ \frac{\partial \left[(PR_0 + I)^{-1} (\theta_0 \theta_0^T + P \mathbf{W}_{vi} P^T) (R_0 P^T + I)^{-1} \right]}{\partial P_{ij}} \right\}, \quad (277)$$

que, usando a regra do produto, se torna:

$$\frac{\partial tr(Q_{vir}(P))}{\partial P_{ij}} = tr \left[\frac{\partial Q_1}{\partial P_{ij}} Q_2 Q_3 \right] + tr \left[Q_1 \frac{\partial Q_2}{\partial P_{ij}} Q_3 \right] + tr \left[Q_1 Q_2 \frac{\partial Q_3}{\partial P_{ij}} \right], \quad (278)$$

onde $Q_1 = (PR_0 + I)^{-1}$, $Q_2 = (\theta_0\theta_0^T + P\mathbf{W}_{vi}P^T)$ e $Q_3 = (R_0P^T + I)^{-1}$ foram usados para simplificar a notação, assim como foi feito na subseção 3.1.2.

Agora, a partir de (278) e usando, novamente, os teoremas e as relações do Apêndice A, pode-se encontrar as expressões para cada um dos termos desta equação. O primeiro termo, por exemplo, pode ser calculado usando as relações do Teorema A.1, onde $A = I$, $B = R_0$, $C = Q_2Q_3$ e $X = P$, resultando em:

$$\text{tr} \left[\frac{\partial Q_1}{\partial P_{ij}} Q_2 Q_3 \right] = -Q_3 Q_1 Q_2 Q_3 R_0. \quad (279)$$

O segundo termo é calculado pelas relações expostas no Teorema A.3, com $A = Q_1$, $B = \mathbf{W}_{vi}$, $C = Q_3$ e $X = P$, produzindo:

$$\text{tr} \left[Q_1 \frac{\partial Q_2}{\partial P_{ij}} Q_3 \right] = 2Q_3 Q_1 P \mathbf{W}_{vi}. \quad (280)$$

Já o terceiro e último termo é calculado a partir do Teorema A.2, sendo que $A = Q_1Q_2$, $B = R_0$, $C = I$ e $X = P$, resultando em

$$\text{tr} \left[Q_1 Q_3 \frac{\partial Q_3}{\partial P_{ij}} \right] = -Q_3 Q_1 Q_2 Q_3 R_0, \quad (281)$$

que é idêntico ao primeiro termo. Somando as equações (279), (280) e (281) para encontrar o mínimo, chega-se em:

$$\frac{\partial \text{tr} \left(Q_{vir}(P) \right)}{\partial P_{ij}} = 2Q_3 Q_1 (P \mathbf{W}_{vi} - Q_2 Q_3 R_0) = 0. \quad (282)$$

Nota-se, então, que a esta equação só pode ser nula se:

$$P \mathbf{W}_{vi} - Q_2 Q_3 R_0 = 0, \quad (283)$$

$$P \mathbf{W}_{vi} - (\theta_0\theta_0^T + P \mathbf{W}_{vi} P) (R_0 P + I)^{-1} R_0 = 0. \quad (284)$$

Finalmente, ao isolar P em (284) conclui-se que a matriz ótima de regularização é dada por:

$$P_{0_{vir}} = \theta_0\theta_0^T R_0 \mathbf{W}_{vi}^{-1}, \quad (285)$$

encerrando a prova. \square

A matriz ótima de regularização exposta no Teorema 4.3 também é função dos parâmetros ideais θ_0 e das matrizes \mathbf{W}_{vi} e R_0 , que são grandezas desconhecidas pelo usuário no procedimento de identificação. No entanto, a ideia deste trabalho não é estimar estas grandezas, mas sim, estender esse procedimento para o método do VRFT, com suas próprias particularidades, grandezas e variáveis. Tal extensão é assunto do próximo capítulo. Por fim, cabe ressaltar que ideias para a estimação de tais grandezas já existem na

literatura de identificação, como nos trabalhos de que apresentam técnicas de *regressão gaussiana*, como exposto em (RISULEO; BOTTEGAL; HJALMARSSON, 2019).

Analisando a expressão (285), é possível chegar em algumas conclusões. Primeiramente, nota-se que a mesma depende da inversa de \mathbf{W}_{vi} , a qual é proporcional a σ_w^2 e inversamente proporcional ao número de dados. Isso significa que, quanto maior a variância do ruído no sistema ou quanto menor o número de dados, maior será a norma da matriz \mathbf{W}_{vi} e maior será o efeito da regularização, causando uma maior polarização na estimativa para balancear a alta covariância. Por outro lado, caso o número de dados seja elevado e/ou a variância do ruído de saída do sistema seja baixa, menor será o efeito da regularização ótima no método VIR.

Vale notar que a matriz $P_{0_{vir}}$ exposta em (285) não é simétrica, como aquela encontrada no cenário de identificação para sistemas com ruído só na saída, exposta na subseção 3.1.2. Mas, caso seja necessário, é possível introduzir restrições na matriz P para este contexto de sistemas com erros nas variáveis, como impor que a mesma seja simétrica ou positiva semi-definida, por exemplo. Assim, a próxima subseção mostra a adição de uma restrição de simetria na matriz de regularização e a obtenção de uma ótima simétrica.

4.3.2 Matriz ótima de regularização com restrição de simetria

No caso de impor uma restrição de simetria da matriz de regularização, considera-se o seguinte problema de otimização:

$$\begin{cases} P_{0_{s_{vir}}} = \arg \min_P J_{tr}(P), \\ s.a. P = P^T, \end{cases} \quad (286)$$

que será calculada, por meio da relação:

$$P_{0_{s_{vir}}} = sol \left\{ \frac{\partial J_{tr}(P)}{\partial P} = 0 \right\} \mid P = P^T, \quad (287)$$

e assim, a expressão para a derivada do traço da MSE será calculada a partir de

$$\frac{\partial tr(Q_{vir}(P))}{\partial P_{ij}} = tr \left\{ \frac{\partial \left[(PR_0 + I)^{-1} (\theta_0 \theta_0^T + P \mathbf{W}_{vi} P) (R_0 P + I)^{-1} \right]}{\partial P_{ij}} \right\}. \quad (288)$$

Com isto, o Teorema 4.4 demonstra como obter a matriz ótima de regularização com a restrição de simetria.

Teorema 4.4 (Matriz ótima de regularização com restrição de simetria). *Para obter a matriz ótima de regularização para o estimador $\hat{\theta}_{vir}$, deve-se resolver a seguinte equação de Riccati:*

$$\begin{aligned} (\theta_0 \theta_0^T R_0 R_0 - \mathbf{W}_{vi}) P + P (\theta_0 \theta_0^T R_0 R_0 - \mathbf{W}_{vi}) - \\ P (\mathbf{W}_{vi} R_0 + R_0 \mathbf{W}_{vi}) P + (R_0 \theta_0 \theta_0^T + \theta_0 \theta_0^T R_0) = 0. \end{aligned} \quad (289)$$

Prova. Novamente para encontrar a matriz ótima, aplica-se a regra do produto das derivadas em (288), produzindo a seguinte expressão:

$$\frac{\partial tr(Q_{vir}(P))}{\partial P_{ij}} = tr \left[\frac{\partial Q_1}{\partial P_{ij}} Q_2 Q_3 \right] + tr \left[Q_1 \frac{\partial Q_2}{\partial P_{ij}} Q_3 \right] + tr \left[Q_1 Q_2 \frac{\partial Q_3}{\partial P_{ij}} \right], \quad (290)$$

onde agora $Q_1 = (PR_0 + I)^{-1}$, $Q_2 = (\theta_0 \theta_0^T + P \mathbf{W}_{vi} P)$ e $Q_3 = (R_0 P + I)^{-1}$. Com isto, os termos de (290) são obtidos com os teoremas apresentados no Apêndice A. Neste caso, o primeiro termo é calculado de forma idêntica ao caso do capítulo anterior, a partir do Teorema A.1, onde $A = I$, $B = R_0$, $C = Q_2 Q_3$ e $X = P$:

$$tr \left[\frac{\partial Q_1}{\partial P_{ij}} Q_2 Q_3 \right] = -Q_3 Q_1 Q_2 Q_3 R_0. \quad (291)$$

Já para o segundo termo, usa-se a relação do Teorema A.5, com $A = Q_1$, $B = \mathbf{W}_{vi}$, $C = Q_3$ e $X = P$ resultando em

$$tr \left[Q_1 \frac{\partial Q_2}{\partial P_{ij}} Q_3 \right] = Q_3 Q_1 P \mathbf{W}_{vi} + \mathbf{W}_{vi} P Q_3 Q_1, \quad (292)$$

uma vez que $Q_1^T = Q_3$ e $Q_3^T = Q_1$. Por fim, o último termo é calculado com os resultados do Teorema A.4, onde $A = Q_1 Q_2$, $B = R_0$, $C = I$ e $X = P$, produzindo a expressão:

$$tr \left[Q_1 Q_2 \frac{\partial Q_3}{\partial P_{ij}} \right] = -R_0 Q_1 Q_2 Q_3 Q_1. \quad (293)$$

Enfim, somando os três, termos, obtém-se:

$$\frac{\partial tr(Q_{vir}(P))}{\partial P_{ij}} = Q_3 Q_1 (P \mathbf{W}_{vi} - Q_2 Q_3 R_0) + (\mathbf{W}_{vi} P - R_0 Q_1 Q_2) Q_3 Q_1. \quad (294)$$

Finalmente, após utilizar algumas relações de matriz inversa e realizar uma série de manipulações algébricas, (294) se transforma em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial tr(Q_{vir}(P))}{\partial P_{ij}} &= (\theta_0 \theta_0^T R_0 R_0 - \mathbf{W}_{vi}) P + P (\theta_0 \theta_0^T R_0 R_0 - \mathbf{W}_{vi}) - \\ &P (\mathbf{W}_{vi} R_0 + R_0 \mathbf{W}_{vi}) P + (R_0 \theta_0 \theta_0^T + \theta_0 \theta_0^T R_0) = 0, \end{aligned} \quad (295)$$

concluindo a prova do teorema. \square

Ao analisar (295) é possível notar que esta é uma equação de Riccati, que é uma equação popular na literatura de sistemas de controle e possui uma ampla gama de *solvers* disponíveis comercialmente para computar sua solução.

Ainda, é necessário observar que a equação (295) ainda depende de quantidades que são desconhecidas em aplicações práticas, como θ_0 , R_0 e \mathbf{W}_{vi} . Assim, para o uso desta metodologia em aplicações reais, ainda é necessário desenvolver um procedimento de estimação para tais quantidades.

4.4 Exemplo Numérico

Esta seção exibe um exemplo numérico para demonstrar a eficiência do método da variável instrumental regularizada, utilizando as matrizes ótimas calculadas neste trabalho, em comparação com os métodos elementares de identificação no contexto de sistemas com erros nas variáveis: mínimos quadrados e variável instrumental. É importante destacar que os resultados atingidos neste exemplo devem ser interpretada como limites superiores ou inferiores que são possíveis de alcançar com a metodologia de variável instrumental regularizada, visto que as matrizes ótimas são baseadas em quantidades desconhecidas e teóricas para $P_{0_{vir}}$ e $P_{0_{s_{vir}}}$.

O processo considerado para identificação possui a mesma estrutura que foi apresentada em (8), onde $G_0(q)$ é um filtro FIR com $n = 35$ coeficientes, que representam a resposta ao impulso truncada do seguinte filtro de Butterworth:

$$G_{iir}(q) = \frac{0,02008q^2 + 0,04017q + 0,02008}{q^2 - 1,561q + 0,6414}. \quad (296)$$

O mesmo sistema foi utilizado em exemplos anteriormente, assim como em (LJUNG; CHEN; MU, 2020). O sinal de entrada escolhido para excitar o sistema $u_0(t)$ que foi aplicado neste exemplo foi uma onda quadrada que oscila de $[0, 1]$, com período de $T_{sq} = 100$ amostras. O sinal de ruído $\tilde{u}(t)$ gerado para contaminar as medidas foi escolhido como ruído branco de média zero e variância $\sigma_u^2 = 0,025$. Essas escolhas resultam em uma relação sinal-ruído de 10. O sistema foi simulado em 1000 execuções de Monte Carlo e $N = 2500$ amostras foram coletadas em cada execução para realizar a identificação de cada método elementar e do método das variáveis instrumentais regularizadas com $P_{0_{vir}}$ e $P_{0_{s_{vir}}}$. Cabe dizer que o número de rodadas de Monte Carlo escolhidas neste exemplo foi determinado com base em exemplos e experiências anteriores.

Com o objetivo de comparar as metodologias de identificação, algumas métricas de qualidade das estimativas foram avaliadas, assim como nos exemplos anteriores. As primeiras métricas avaliadas são relacionadas às propriedades estatísticas dos métodos e são exibidas na Tabela 7, que mostra a norma do vetor de polarização, o traço da matriz de covariância e o traço da matriz de MSE que foram obtidos com base nas amostras das simulações de Monte Carlo.

A Tabela 7 mostra que o uso da matriz ótima de regularização produz os melhores resultados para o traço da matriz de covariância e de MSE, sendo que a diferença entre usar a matriz ótima irrestrita e a matriz ótima com restrição de simetria foi relativamente pequena. A mesma tabela também mostra que a norma do vetor de polarização foi maior para o método dos mínimos quadrados, como era de se esperar. Ainda, observa-se que a polarização atingida pelo método das variáveis instrumentais foi relativamente alta, o que se deve, na verdade, pelo limitado número de amostras usadas nos procedimentos de identificação, assim como o limitado número de rodadas de Monte Carlo e pela elevada covariância do estimador. Também, a tabela mostra o valor elevado do traço da matriz de

Tabela 7 – Vetor de polarização, traço da matriz de covariância e traço da matriz de erro médio quadrático produzido por cada método nas rodadas de Monte Carlo.

	$\ \mathcal{B}\ _2$	$\text{tr}(\mathcal{V})$	$\text{tr}(\mathcal{Q})$
MQ	$4,1994 \times 10^{-2}$	$1,2347 \times 10^{-4}$	$1,8893 \times 10^{-3}$
VI	$2,6787 \times 10^{-3}$	$3,1117 \times 10^{-3}$	$3,1149 \times 10^{-3}$
VIR+ P_0	$6,3279 \times 10^{-5}$	$2,7717 \times 10^{-6}$	$2,7758 \times 10^{-6}$
VIR+ P_{0s}	$6,5161 \times 10^{-5}$	$2,7954 \times 10^{-6}$	$2,7996 \times 10^{-6}$

Fonte: do autor.

covariância do estimador de variável instrumental, que foi aprimorado significativamente com o uso da regularização ótima neste método.

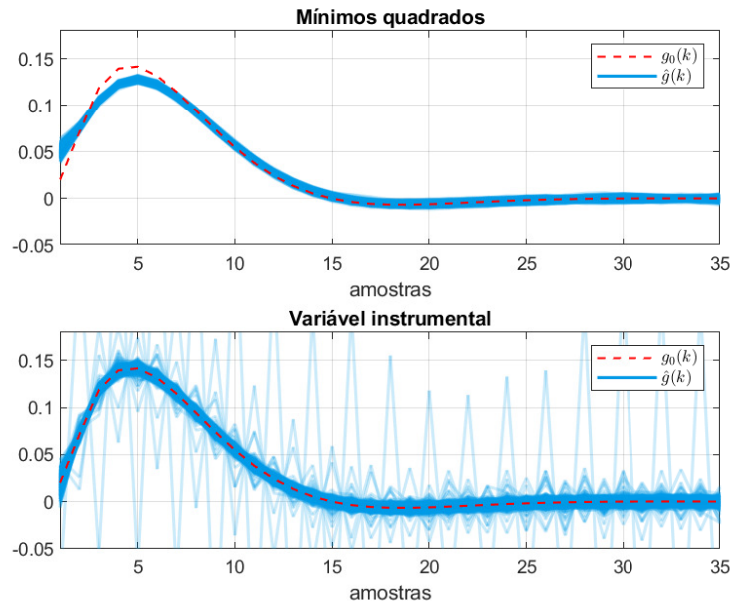
Outro resultado observado neste exemplo diz respeito a uma comparação entre as respostas ao impulso que foram estimadas por cada método nas rodadas de Monte Carlo, que provê uma boa ideia visual do que foi alcançado com cada método. Neste sentido, a Figura 10 exibe todas as 1000 respostas estimadas para o método dos mínimos quadrados e o método das variáveis instrumentais. Por outro lado, a Figura 11 exibe o mesmo gráfico para a variável instrumental regularizada com $P_{0_{vir}}$ e $P_{0s_{vir}}$ respectivamente. Os gráficos mostram o efeito da polarização no método dos mínimos quadrados, a elevada covariância do método das variáveis instrumentais nas respostas ao impulso e a grande melhora nas estimativas com as variáveis instrumentais regularizadas ótimas.

Finalmente, o último critério analisado para comparar os resultados alcançados é a distribuição da medida *fit* que foi obtida com cada método de identificação aqui abordado. Essa mesma medida de comparação foi realizada no capítulo anterior e foi apresentada em (223). Para este exemplo, a Figura 12 mostra os diagramas de caixa obtidos para cada metodologia nas rodadas de Monte Carlo.

A Figura 12 mostra que o método dos mínimos quadrados apresenta uma distribuição da medida *fit* com menor mediana em comparação com os outros métodos, o que é uma consequência direta do erro de polarização desta estimativa. Ainda, a Figura 12 também mostra que o método das variáveis instrumentais produz uma distribuição da medida *fit* com uma mediana maior, próxima de 100, mas com uma variância elevada e com vários pontos atípicos (*outliers*). Por outro lado, o diagrama mostra que a esta medida apresentou distribuições mais próximas de 100 para os métodos com as variáveis instrumentais regularizadas e as matrizes ótima irrestrita e simétrica.

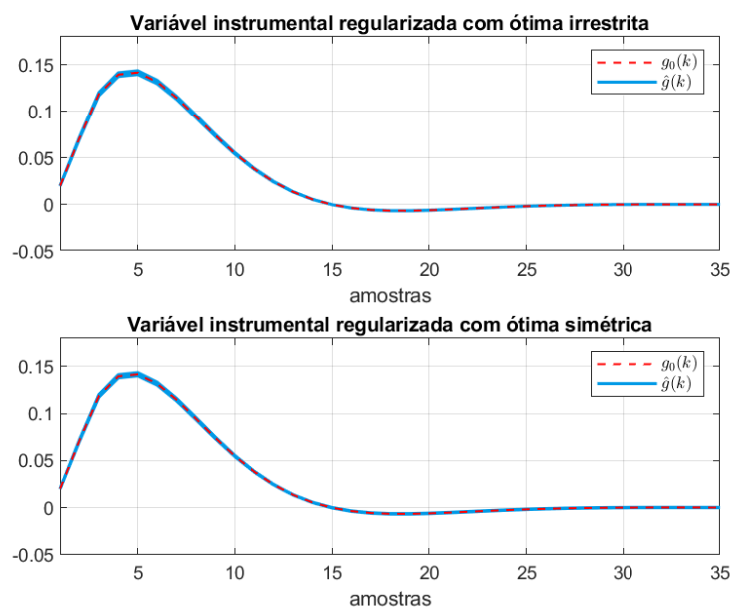
Para concluir a análise, basta notar que o exemplo numérico aqui apresentado confirma, a partir de uma série de medidas e comparações, que a metodologia da variável instrumental ótima regularizada produz melhores respostas ao impulso, se comparada às metodologias elementares. Além disso, o uso de $P_{0_{vir}}$ e $P_{0s_{vir}}$ demonstra o limite que pode ser atingido com o uso de regularização para aprimorar as estimativas no contexto

Figura 10 – Respostas ao impulso estimadas com os métodos de identificação elementares: mínimos quadrados e variável instrumental. Linhas azuis contínuas representam as respostas ao impulso identificadas e a linha vermelha pontilhada representa a resposta ao impulso real do sistema.



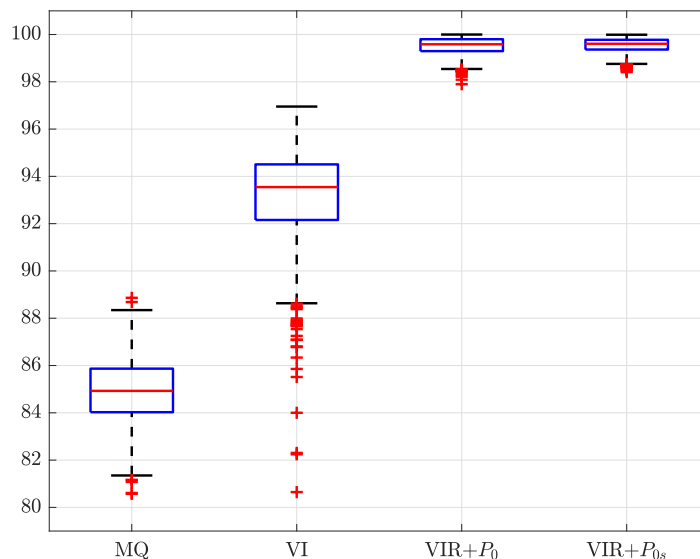
Fonte: do autor.

Figura 11 – Respostas ao impulso estimadas com a variável instrumental regularizada com a ótima irrestrita e com a ótima simétrica. Linhas azuis contínuas representam as respostas ao impulso identificadas e a linha vermelha pontilhada representa a resposta ao impulso real do sistema.



Fonte: do autor.

Figura 12 – Diagramas de caixa para as medidas fit obtidas para as 1000 rodadas de Monte Carlo para cada método analisado.



Fonte: do autor.

de variável instrumental, uma vez que as mesmas não podem ser utilizadas em aplicações reais.

4.5 Considerações finais

Este capítulo apresentou a dedução da matriz ótima de regularização para o método das variáveis instrumentais regularizadas no cenário de identificação de sistemas com erros nas variáveis. Para tanto, a seção 4.1 demonstrou a formulação do método e seu estimador, que já foram estudados em alguns trabalhos na literatura. Em seguida a seção 4.2 demonstrou como calcular as propriedades estatísticas do método, como sua polarização e seu erro médio quadrático, o que também pode ser considerada uma das contribuições do trabalho, visto o grande desafio em calcular tais propriedades.

Na seção 4.3 é demonstrado o cálculo da matriz ótima, a partir dos resultados de cálculo matricial. Mostra-se que a matriz ótima de regularização é função de quantidades que são desconhecidas em aplicações práticas e reais. Ainda, mostra-se a dependência da matriz ótima nos sinais e nas funções de transferência presentes no problema. Este resultado abre espaço para novas ideias a serem implementadas para a parametrização da matriz ótima e de novos algoritmos de estimação para a mesma. Também, mostrou-se que, caso seja necessário impor uma restrição de simetria no problema, a matriz ótima de regularização deve ser obtida por meio de uma equação de Riccati.

Por fim, a seção 4.4 mostra um exemplo numérico com o resultado limite que se pode atingir com a metodologia da variável instrumental regularizada, visto que as matrizes

ótimas são utilizadas no exemplo. Nota-se que há bastante espaço para melhoria entre os métodos elementares e o método da variável instrumental regularizada.

5 REGULARIZAÇÃO NO MÉTODO DA REFERÊNCIA VIRTUAL

Este capítulo tem como objetivo apresentar a extensão do trabalho desenvolvido no capítulo 4 para um dos mais populares métodos de controle baseado em dados: o método da referência virtual, conhecido como VRFT (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002). Para tanto, primeiramente são apresentados os conceitos de controle baseado em dados e, em seguida, o problema é apresentado no cenário do método VRFT.

Assim, este capítulo está organizado como segue. A seção 5.1 descreve o contexto dos métodos de controle baseados em dados na literatura e nas aplicações reais destas técnicas, assim como o papel do método da referência virtual neste cenário. Também são apresentados os principais conceitos básicos deste tema, como a topologia do sistema de controle, as estruturas de controladores que são tipicamente usadas assim como os critérios otimizados.

A seção 5.2 descreve o método da referência virtual em si, caracterizando os sinais presentes e como a função custo do método é sintetizada. Também, é demonstrado o projeto de um filtro para o método, que é um importante aspecto para atingir controladores mais próximos ao controlador ideal. Além disso, as estimativas com os métodos dos mínimos quadrados e das variáveis instrumentais são apresentadas em função dos sinais e das funções de transferências presentes no problema. Finalmente, a seção 5.3 mostra a dedução da matriz ótima, com resultados baseados na seção 4.3, a seção 5.4 demonstra um exemplo numérico, comparando os resultados obtidos com as matrizes ótimas aos resultados atingidos com uma metodologia de estimação para as matrizes de regularização e a seção 5.5 encerra o capítulo com as considerações finais.

5.1 Controle baseado em dados e o método da referência virtual

Os métodos de controle baseado em dados surgiram na literatura no início dos anos 40, a partir do trabalho de ZIEGLER; NICHOLS (1942), o qual forneceu metodologias empíricas e baseadas em experimentos simples, para sintonizar controladores PID. No entanto, a maioria dos métodos de controle baseados em dados se desenvolveu e recebeu

maior visibilidade a partir dos anos 90. Estes métodos ainda são amplamente pesquisados na literatura de sistemas de controle até o dia de hoje (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012).

O maior objetivo dos métodos de controle clássico é sintonizar um controlador de ordem fixa e predefinida para controlar sistemas dinâmicos, usando bateladas de dados de entrada e saída dos processos, sem a necessidade de utilizar um modelo matemático do sistema. Assim, uma vez que obter modelos matemáticos abrangentes e confiáveis pode ser uma tarefa custosa, as metodologias de controle baseado em dados se tornaram atraentes para uma ampla gama de aplicações práticas e industriais (HOU; WANG, 2013).

Na literatura de controle baseado em dados, é comum classificar os métodos em duas categorias distintas: os métodos iterativos e os métodos diretos. Os métodos iterativos usam vários experimentos para atualizar os parâmetros dos controladores iterativamente, enquanto os métodos diretos usam somente uma ou duas bateladas de dados para identificar o controlador. As metodologias mais populares entre o grupo de métodos iterativos são: o *Iterative Feedback Tuning* (IFT) (HJALMARSSON *et al.*, 1998) e o *Frequency Domain Tuning* (FDT) (KAMMER; BITMEAD; BARTLETT, 2000). Os métodos mais populares dentro do grupo de métodos diretos são o *Virtual Reference Feedback Tuning* (VRFT) (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002), o *Correlation-based Tuning* (CbT) (KARIMI; VAN HEUSDEN; BONVIN, 2007) e o *Optimal Controller Identification* (OCI) (CAMPESTRINI *et al.*, 2017).

Dentro dos métodos diretos, o método da referência virtual, ou VRFT, é o mais disseminado e pesquisado e possui diversas extensões, aplicações e análises acerca de si na literatura. Exemplos de contribuições recentes são citadas na sequência, reforçando a relevância do método no contexto atual.

O artigo (LECCHINI; CAMPI; SAVARESI, 2002), por exemplo, apresenta uma das primeiras extensões do VRFT, o qual introduz a possibilidade de sintonia de controladores com dois graus de liberdade. Outra contribuição relevante é apresentada em (CAMPESTRINI *et al.*, 2011), a qual demonstra a sintonia de controladores pelo método do VRFT para sistemas com zero de fase não mínima. Os trabalhos (NAKAMOTO, 2004; FORMENTIN; SAVARESI, 2011; CAMPESTRINI *et al.*, 2016) desenvolveram extensões do método da referência virtual para o cenário multivariável, onde o último apresentou uma formulação não polarizada do mesmo. Uma abordagem não linear para o método foi apresentada em (CAMPI; SAVARESI, 2006) e em (KANSHA; HASHIMOTO; CHIU, 2008), o método foi aplicado para sintonizar controladores PID adaptativos. Em (ECKHARD; CAMPESTRINI; BOEIRA, 2018) o mesmo foi estendido para lidar com a rejeição de perturbações na entrada do sistema, dando origem ao método *Virtual Disturbance Feedback Tuning* (VDFT). Enfim, em (BOEIRA; ECKHARD, 2020) um pacote de código aberto, escrito em *Python*, foi disponibilizado para a comunidade de controle baseado em dados, visando facilitar e difundir seu uso.

Em relação a aplicações do método da referência virtual, também existe uma larga escala de trabalhos. Por exemplo, em (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002), o método foi aplicado a um clássico problema de sintonia de controladores, onde o mesmo foi usado para sintonizar controladores de alta ordem para um sistema de suspensão ativa. Em (PREVIDI *et al.*, 2004), o VRFT foi usado para o projeto de controladores para movimentos de próteses de joelho, usando estímulos elétricos. Tal método, também foi aplicado para sintonizar controladores multivariáveis em uma simulação de uma planta de tratamento de água em (ROJAS *et al.*, 2012), para sintonizar o controlador ativo de freio de veículos em (FORMENTIN *et al.*, 2013), para controlar uma planta de fase não mínima em (SCHEID FILHO *et al.*, 2016), para a sintoniza de controladores de atitude de um quadróptero em (INVERNIZZI *et al.*, 2016) e para o controle multivariável plantas de nível com múltiplos tanques em (BOEIRA *et al.*, 2018) e (RADAC; PRECUP; ROMAN, 2018).

Por este motivo, dada a relevância do método na literatura e no contexto atual da área de controle baseado em dados, que este trabalho decidiu estudar tal metodologia e aprimorar suas propriedades estatísticas, procurando uma matriz ótima de regularização para o estimador de variável instrumental regularizado.

Quando o sistema a ser controlado possui uma parcela significativa de ruído que contamina sua saída, o método da referência virtual acaba se tornando muito semelhante a um sistema com erros nas variáveis, visto que a parcela de ruído é transferida para a entrada do controlador que se deseja identificar.

Usualmente, as metodologias de identificação do controlador com o método da referência virtual são: o método dos mínimos quadrados, como exposto na subseção 2.6.2, quando o sistema possui pouco ou nenhum ruído contaminando sua saída; e o método das variáveis instrumentais, como discutido na subseção 2.6.3. Contudo, como discutido anteriormente, apesar da vantagem das variáveis instrumentais de produzirem estimativas consistentes, as mesmas apresentam alta covariância, o que pode prejudicar a identificação dos controladores e, inclusive, levar a sistemas instáveis em malha fechada com os controladores resultantes.

Por isso, os trabalhos (FORMENTIN; KARIMI, 2014; RALLO *et al.*, 2016; BOEIRA; ECKHARD, 2018) introduzem uma variável instrumental regularizada, onde o principal objetivo é diminuir a larga covariância que resulta da variável instrumental básica e o trabalho (GARCIA; BAZANELLA, 2020) apresenta a solução do problema do VRFT com o mínimos quadrados totais. No entanto, a grande lacuna que se identificou em relação às propostas que usam regularização é que a estimação da matriz de regularização, apesar de produzir bons resultados, é baseada nos algoritmos propostos em (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO *et al.*, 2014), que na verdade, foram desenvolvidas para outro contexto.

Assim sendo, este capítulo apresenta o cálculo de uma matriz ótima de regularização

para o método da referência virtual, expondo as principais dependências da matriz ótima de regularização, assim como a sua estrutura, o que possibilita o desenvolvimento futuro de metodologias de estimação e estruturas para sua parametrização.

5.1.1 O sistema de controle

Neste trabalho, considera-se que o sistema que deseja-se controlar é aquele que possui ruído contaminando somente sua saída, conforme descrito em (35), onde as mesmas características dos sinais que o compõem, descritas na seção 2.4, são mantidas.

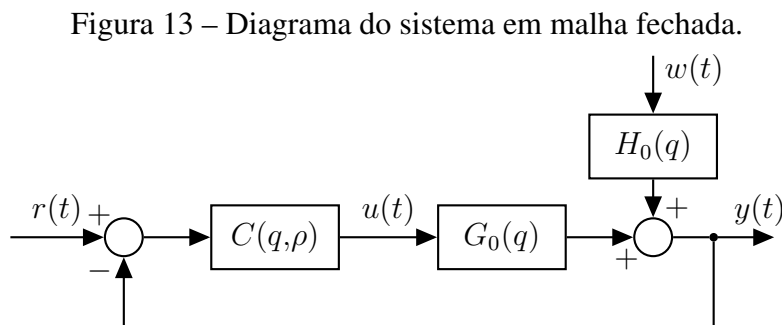
Agora, para que este sistema atinja um determinado desempenho, como seguimento de referência ou rejeição de perturbação, por exemplo, o mesmo deve ser colocado em malha fechada, com a adição de um controlador que usa a informação da saída realimentada e manipula sua entrada. Na área de sistemas de controle, este controlador pode possuir diferentes estruturas, como uma estrutura não linear, um algoritmo de otimização, um algoritmo preditivo, entre outros. Neste trabalho, os controladores abordados são os controladores lineares e invariantes no tempo, onde o sinal de entrada $u(t)$ é calculado a partir de

$$u(t, \rho) = C(q, \rho)[r(t) - y(t)], \quad (297)$$

onde $r(t) \in \mathbb{R}$ é o sinal de referência, o qual se assume ser decorrelacionado com o ruído do processo, i.e.

$$R_{rv}(\tau) = \bar{E}[r(t)v(t - \tau)] = 0, \quad \forall \tau, \quad (298)$$

e $C(q, \rho)$ é a função de transferência do controlador, parametrizada pelo vetor $\rho \in \mathbb{R}^p$. Para possibilitar a implementação do controlador e seu uso em aplicações reais, define-se que o mesmo é causal, ou seja, que a função de transferência $C(q, \rho)$ seja uma função racional própria na variável q . Uma ilustração do sistema em malha fechada é exibida na Figura 13.



Fonte: do autor.

A partir das equações do sistema ideal a ser controlado (35) e do controlador utilizado

(297) é possível estabelecer seguinte relação para a saída do sistema em malha fechada:

$$y(t,\rho) = T(q,\rho)r(t) + S(q,\rho)H_0(q)w(t) \quad (299)$$

$$T(q,\rho) = \frac{C(q,\rho)G_0(q)}{1 + C(q,\rho)G_0(q)} \quad (300)$$

$$S(q,\rho) = \frac{1}{1 + C(q,\rho)G_0(q)}, \quad (301)$$

onde funções de malha fechada $S(q,\rho)$ e $T(q,\rho)$ são conhecidas como *função de sensibilidade* e *função de sensibilidade complementar*, respectivamente, e mostram o efeito do controlador e do vetor de parâmetros ρ na saída do processo.

5.1.2 Estruturas de controladores

O método do VRFT e os métodos de controle baseado em dados em geral tem como objetivo sintonizar um controlador com estrutura fixa, escolhida *a priori* pelo usuário. Isso implica que ele possui um número predeterminado de polos e zeros. Esta estrutura é conhecida como *classe \mathcal{C}* na literatura de controle baseado em dados:

$$\mathcal{C} = \{C(q,\rho) : \rho \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^p\}, \quad (302)$$

onde Ω é o conjunto admissível de parâmetros. Se Ω não é especificado em um problema, por exemplo, pode-se considerar que $\Omega = \mathbb{R}^p$ (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012).

Também, é comum considerar que o controlador é parametrizado linearmente, o que facilita o projeto. Dessa forma, ele pode ser escrito da seguinte forma:

$$C(q,\rho) = \rho^T \bar{C}(q), \quad (303)$$

onde $\bar{C}(q)$ é um vetor de função de transferências com a base que forma o controlador. Os controladores PI e PID, por exemplo, que são amplamente usados na indústria de processos estão dentro desta categoria de controladores. O controlador PID digital, por exemplo, pode ser escrito como:

$$C(q,\rho) = \rho_1 + \rho_2 \frac{q}{q-1} + \rho_3 \frac{q-1}{q}, \quad (304)$$

e escrevendo como em (303), tem-se

$$C(q,\rho) = \rho^T \bar{C}(q) \quad (305)$$

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \end{bmatrix}^T \quad (306)$$

$$\bar{C}(q) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{q}{q-1} & \frac{q-1}{q} \end{bmatrix}^T. \quad (307)$$

Escolher um controlador parametrizado linearmente pode parecer, a princípio, restringir as possibilidades. Porém, segundo BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD

(2012), é possível aproximar qualquer função de transferência dependente de ρ por uma estrutura como exposta em (303), não acarretando em grande perda de generalidade.

Por fim, em relação a estruturas de controladores, cabe ressaltar que, caso seja escolhido um controlador parametrizado linearmente, isto implica que os polos do controlador devem ser fixados, deixando somente os zeros como graus de liberdade do problema. Usualmente, os polos do controlador são escolhidos de acordo com a referência ou com a perturbação que se deseja seguir ou rejeitar. Por exemplo, no caso de seguir ou rejeitar um sinal constante, deve-se ter o termo $(q - 1)$ (termo integral) no denominador do controlador.

5.1.3 Controle por modelo de referência

Ainda, dentro da área de controle baseado em dados, é comum escolher um critério de desempenho para ser otimizado. Os critérios mais objetivos são geralmente calculados por meio da norma de um sinal do sistema de controle, como por exemplo: a norma do sinal de erro entre a referência e a saída, a norma da própria saída, a norma do sinal de controle, entre outros. Neste sentido, a norma mais utilizada é a norma \mathcal{L}_2 , calculada para o sinal $s(t)$ como

$$\|s(t)\|_2^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [s(t)]^2. \quad (308)$$

Para o problema de seguimento de referência onde não se leva em conta o efeito de perturbações ou ruído, que é o objetivo do método da referência virtual aqui estudado, é possível formular um critério para medir a diferença entre o sinal de referência e a saída. Porém, demandar que a saída do processo possua uma resposta dinâmica idêntica à referência é um requisito muito exigente e irrealista (BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012). Dessa forma, com o objetivo de formular um problema mais realista e de solução factível, este critério geralmente é relaxado utilizando uma função de transferência que traduz um comportamento dinâmico desejado em malha fechada, com um certo tempo de acomodação e com um máximo sobressalto estipulado, por exemplo. Tal função de transferência é conhecida como *modelo de referência* e simbolizada por $T_d(q)$. Isto posto, o critério de seguimento do modelo de referência, simbolizado por $J_y(\rho)$, é dado por

$$J_y(\rho) = \bar{E}[\|y_r(t, \rho) - y_d(t)\|_2^2], \quad (309)$$

$$y_d(t) = T_d(q)r(t), \quad (310)$$

$$y_r(t) = T(q, \rho)r(t), \quad (311)$$

sendo que, quanto menor for o valor de $J_y(\rho)$, mais próxima a saída do sistema estará do comportamento desejado escolhido

Agora, como o objetivo é o seguimento do critério (309), ou seja, busca-se minimizar a diferença entre o comportamento desejado e o comportamento alcançado com o controlador $C(q, \rho)$ projetado, os parâmetros ρ são calculados a partir do seguinte problema de otimização:

$$\hat{\rho} = \arg \min_{\rho} J_y(\rho). \quad (312)$$

Vale ressaltar que o controlador que leva o critério (312) ao valor nulo, ou seja, faz com que o sistema atinja exatamente o comportamento desejado e expresso em $T_d(q)$, é conhecido como *controlador ideal* e é denotado por $C_d(q)$. Este controlador pode ser calculado usando a relação (300), com $T(q, \rho) = T_d(q)$ e isolando $C(q, \rho) = C_d(q)$:

$$C_d(q) = \frac{T_d(q)}{G_0(q) (1 - T_d(q))}. \quad (313)$$

Caso a função de transferência do processo seja conhecido, o que é impraticável em situações reais, o controlador ideal pode ser obtido por meio de (313) diretamente.

Também, caso a estrutura de controladores escolhida pelo usuário (classe \mathcal{C}) seja a mesma do controlador ideal, afirma-se que a seguinte premissa é verdadeira:

Premissa 5.1. $C_d(q) \in \mathcal{C}, \exists \rho_0 : C_d(q) = C(q, \rho_0)$.

Com isto, existe um vetor de parâmetros ideal, tal que o controlador ideal pode ser escrito como $C_d(q) = C(q, \rho_0)$. Pode-se observar que esta premissa é análoga àquela apresentada no cenário de identificação de sistemas (Premissa 2.1).

Para problemas de controle por modelo de referência bem formulados, com resposta desejada ($T_d(q)$) criteriosamente escolhida e com a classe de controladores abrangente o suficiente para atingir o comportamento especificado no modelo de referência, é possível dizer que a Premissa 5.1 geralmente é satisfeita ou é próxima de ser satisfeita. Por outro lado, caso o modelo de referência seja muito exigente e/ou a classe de controladores muito restrita, diz-se que o controlador está fora da classe ideal, o que pode causar soluções para o problema muito distantes da resposta desejada expressa em $T_d(q)$.

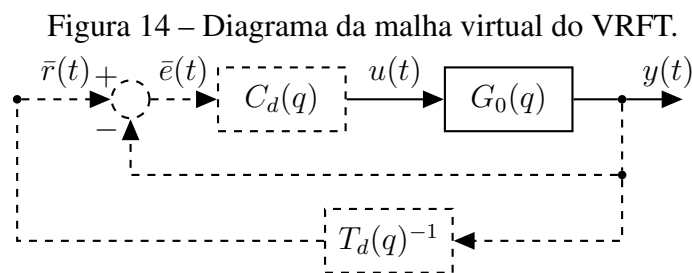
Dentro da literatura de controle baseado em dados existem diretrizes que são baseadas em certas observações feitas sobre o processo para a escolha adequada do modelo de referência. Trabalhos que discutem este assunto são (GONÇALVES DA SILVA; CAMPESTRINI; BAZANELLA, 2014), que trata da escolha automatizada de parâmetros do modelo de referência, como tempo de acomodação e sobrepasso, para a sintonia de controladores PID em sistemas monovariáveis e (GONÇALVES DA SILVA; BAZANELLA; CAMPESTRINI, 2019), que trata do problema para o controle de sistemas multivariáveis.

Enfim, pode-se observar que resolver o problema de otimização expresso em (309), para encontrar o controlador que melhor se encaixe no critério de seguimento de referência não é uma tarefa simples. Primeiramente, nota-se que o problema é não convexo, ou

seja, não há uma forma direta de obter ou identificar o vetor de parâmetros ideais. Ainda, a função custo $J_y(q)$ depende de $T(q, \rho)$, que é função de $G_0(q)$, a qual é desconhecida no problema. Assim sendo, a proposta do método da referência virtual é reformular o problema e simplificar a etapa de identificação do controlador.

5.2 O método da referência virtual

O método da referência virtual consiste em coletar dados de entrada e saída do processo, definidos anteriormente como Z^N em (18), e supor que o sistema é colocado virtualmente em malha fechada com o controlador ideal $C_d(q)$, como mostra a Figura 14, onde as linhas contínuas representam dados reais e as linhas tracejadas representam sinais virtuais. É importante dizer que a coleta de dados no método VRFT pode ser realizada tanto em malha aberta quanto em malha fechada (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002). No entanto, para este trabalho, considera-se o cenário de coleta de dados em malha aberta para simplificar as análises. Cabe ressaltar que no caso de dados obtidos em malha fechada, as mesmas propriedades são mantidas, contudo, o cálculo das propriedades estatísticas do método se torna mais complexo, visto que há correlação entre o sinal $u(t)$ e $w(t)$.



Fonte: do autor.

Com a medida da saída $y(t)$ no experimento virtual é possível calcular o sinal de referência virtual, denotado por $\bar{r}(t)$ que foi aplicado neste sistema para produzir $y(t)$ a partir de $T_d(q)$:

$$\bar{r}(t) = T_d(q)^{-1}y(t), \quad (314)$$

Neste sistema virtual, é possível dizer que o sinal de erro virtual ($\bar{e}(t)$) é dado por

$$\bar{e}(t) = \bar{r}(t) - y(t), \quad (315)$$

$$\bar{e}(t) = (T_d(q)^{-1} - 1)y(t). \quad (316)$$

A partir destes sinais virtuais, pode-se dizer que o usuário tem a informação de entrada do controlador ideal, que é o sinal de erro virtual, e sua saída, que é o sinal de controle coletado do sistema ideal. Assim, é possível formular um problema de identificação do

controlador virtual:

$$\hat{\rho}_{vr} = \arg \min_{\rho} J_{vr}(\rho) \quad (317)$$

$$J_{vr}(\rho) = \bar{E} \|L(q) (u(t) - C(q, \rho) \bar{e}(t))\|_2^2, \quad (318)$$

com $L(q)$ sendo um filtro usado com o propósito de aproximar as funções custo do método da referência virtual ($J_{vr}(\rho)$) com a função custo de seguimento de modelo de referência ($J_y(\rho)$), explicado na sequência do texto.

Enfim, caso seja escolhido um controlador linearmente parametrizado, como explicado anteriormente, a função custo (318) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$J_{vr}(\rho) = \bar{E} \|L(q) (u(t) - \varphi(t)^T \rho)\|_2^2, \quad (319)$$

com $\varphi(t) \in \mathbb{R}^p$ sendo o vetor regressor, que possui os valores de $\bar{e}(t)$ filtrados pelo vetor $\bar{C}(q)$:

$$\varphi(t) = \bar{C}(q) \bar{e}(t) \quad (320)$$

$$\varphi(t) = \bar{C}(q) (T_d(q)^{-1} - 1) y(t). \quad (321)$$

Logo, ao observar a formulação da função custo exposta em (319), é possível perceber que a mesma é quadrática no vetor de parâmetros ρ . Com essa proposta, fica evidente que a grande vantagem de utilizar o método da referência virtual é calcular o vetor de parâmetros a partir da solução de um problema de otimização mais simples se comparado ao caso de otimização direta da função (309).

5.2.1 Projeto do filtro

Um importante aspecto em relação ao método da referência virtual diz respeito à equivalência entre as funções custo de seguimento do modelo de referência (309) e do método em si (319). Sabe-se que o real objetivo do método é a minimização do critério de seguimento de modelo de referência (309), mas que a otimização é feita por meio de (319) para facilitar a solução do problema. Contudo, apesar da diferença que existe entre ambos os critérios, os autores do método demonstram em (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002) que, caso a Premissa 5.1 seja satisfeita, os mínimos de $J_y(\rho)$ e $J_{vr}(\rho)$ são os mesmos e equivalem a $\rho = \rho_0$.

Por outro lado, caso a Premissa 5.1 não seja satisfeita, o que é um cenário mais próximo da realidade em aplicações práticas, então, o grau de liberdade fornecido pelo filtro $L(q)$ é usado para aproximar ambos os critérios. A dedução detalhada do projeto do filtro é feita em (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002) para o método da referência virtual monovariável, onde mostra-se que o filtro ótimo para aproximar ambas as funções custo é dado por:

$$L(e^{j\omega}) = T_d(e^{j\omega}) (1 - T_d(e^{j\omega})) \frac{\Phi_r(e^{j\omega})}{\Phi_u(e^{j\omega})}, \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi], \quad (322)$$

sendo que $T_d(e^{j\omega})$ é uma função conhecida e escolhida previamente, assim como $\Phi_r(e^{j\omega})$ e $\Phi_u(e^{j\omega})$ que representam, respectivamente, os espectros do sinal de referência que será usada em malha fechada e do sinal de entrada aplicado no experimento de coleta de dados. É comum, inclusive, que o sinal de referência aplicado seja idêntico ao sinal de entrada usado no experimento de coleta de dados e com isso a relação $\Phi_r(e^{j\omega})/\Phi_u(e^{j\omega}) \approx 1$ seja satisfeita.

5.2.2 Solução por mínimos quadrados

A partir da comparação da função custo formulada para o método VRFT, exposta em (319), e da função custo utilizada para a identificação de modelos do tipo FIR para sistemas com erros nas variáveis, exposta em (144), é possível concluir que ambos os problemas são análogos e portanto, o problema de identificação do controlador pode ser resolvido pelo método dos mínimos quadrados, com solução dada por

$$\hat{\rho}_{vr} = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi_l(t) \varphi_l(t)^T \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi_l(t) u_l(t) \right], \quad (323)$$

onde o subscrito l indica que o sinal foi filtrado por $L(q)$:

$$u_l(t) = L(q)u(t), \quad (324)$$

$$\varphi_l(t) = L(q)\bar{C}(q) (T_d(q)^{-1} - 1) y(t). \quad (325)$$

Porém, uma característica fundamental do método VRFT que deve ser destacada é que, quando o processo a ser controlado possui uma parcela significativa de ruído em sua saída, ele é transferido para o sinal de erro virtual $\bar{e}(t)$:

$$\bar{e}_l(t) = L(q) (T_d(q)^{-1} - 1) G_0(q)u(t) + L(q) (T_d(q)^{-1} - 1) H_0(q)w(t), \quad (326)$$

$$\bar{e}_l(t) = \bar{e}_{0l}(t) + \tilde{e}_l(t), \quad (327)$$

sendo $\bar{e}_{0l}(t) = L(q) (T_d(q)^{-1} - 1) G_0(q)u(t)$ a parte que idealmente excita o controlador a ser identificado e que aparece na síntese da malha virtual, como pode ser visto na Figura 14, e $\tilde{e}_l(t) = L(q) (T_d(q)^{-1} - 1) H_0(q)w(t)$ sendo uma parcela que contamina o sinal de entrada do mesmo $\bar{e}_l(t)$. Com isto, é importante descrever o vetor regressor com a contribuição ideal com a contribuição que é contaminada pelo ruído, assim como foi feito em (234) para o caso de sistemas com erros nas variáveis:

$$\varphi_l(t) = \varphi_{l0}(t) + \tilde{\varphi}_l(t), \quad (328)$$

onde aqui tem-se que

$$\varphi_{l0}(t) = L(q)\bar{C}(q)(T_d(q)^{-1} - 1)G_0(q)u(t), \quad (329)$$

$$\tilde{\varphi}_l(t) = L(q)\bar{C}(q)(T_d(q)^{-1} - 1)H_0(q)w(t). \quad (330)$$

Dessa forma, é possível fazer uma analogia do método da referência virtual com os sistemas com erros nas variáveis, estudados no capítulo 4, que possuem sua entrada contaminada por ruído. Neste caso, sabe-se que o método dos mínimos quadrados possui uma estimativa não consistente, o que é uma propriedade amplamente desvantajosa (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002; SÖDERSTRÖM, 2007; BAZANELLA; CAMPESTRINI; ECKHARD, 2012; SÖDERSTRÖM, 2018). Nesse caso para contornar este problema de não consistência, os autores da metodologia propõem o uso da variável instrumental (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002).

5.2.3 Solução por variável instrumental

Para contornar o problema de não consistência da estimativa por mínimos quadrados, a alternativa proposta pelos autores do método da referência virtual, é a utilização da variável instrumental. Existem várias formas de escolher a variável instrumental, mas neste trabalho, o foco é a variável instrumental coletada com dados de um segundo experimento sobre o processo, como indicado em (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002). Neste caso, aplica-se o mesmo sinal de entrada $u(t)$ e o sinal $y_2(t)$ é coletado, formando o vetor Z_2^N de dados:

$$y_2(t) = G_0(q)u(t) + H_0(q)w_2(t), \quad (331)$$

$$Z_2^N = \{u(1), y_2(1), u(2), y_2(2), \dots, u(N), y_2(N)\}. \quad (332)$$

sendo que $w_2(t)$ é considerado como ruído branco de média zero, variância σ_w^2 , mas com realização diferente de $w(t)$, ou seja,

$$\bar{E} [w(t + \tau)w_2(t)] = 0, \quad \forall \tau. \quad (333)$$

Então, a partir deste novo experimento monta-se a seguinte variável instrumental $\zeta_l(t)$ para o método da referência virtual:

$$\zeta_l(t) = L(q)\bar{C}(q)\bar{e}_2(t), \quad (334)$$

$$\zeta_l(t) = L(q)\bar{C}(q)(T_d(q)^{-1} - 1)y_2(t), \quad (335)$$

$$\zeta_l(t) = L(q)\bar{C}(q)(T_d(q)^{-1} - 1)G_0(q)u(t) + L(q)\bar{C}(q)(T_d(q)^{-1} - 1)H_0(q)w_2(t), \quad (336)$$

onde também é possível decompor a mesma numa parcela ideal e outra que é proveniente do ruído do segundo experimento:

$$\zeta_l(t) = \varphi_{l0}(t) + \tilde{\varphi}_{l2}(t), \quad (337)$$

com $\varphi_{l0}(t)$ calculado por (331) e $\tilde{\varphi}_{l2}(t)$ calculado de forma análoga à (332), mas com os dados do segundo experimento:

$$\varphi_{l0}(t) = L(q)\bar{C}(q)(T_d(q)^{-1} - 1)G_0(q)u(t), \quad (338)$$

$$\tilde{\varphi}_{l2}(t) = L(q)\bar{C}(q)(T_d(q)^{-1} - 1)H_0(q)w_2(t). \quad (339)$$

Com isto, nota-se que as condições para o uso da variável instrumental, expostas na subseção 2.6.3 são respeitadas, ou seja:

$$E [\zeta_l(t)\varphi_l(t)^T] > 0, \quad (340)$$

$$E [\zeta_l(t)\mu_l(t)] = 0, \quad (341)$$

com

$$\mu_l(t) = u_l(t) - \varphi_l(t)^T \rho_0, \quad (342)$$

$$\mu_l(t) = -L(q)C_d(q)(T_d(q)^{-1} - 1)H_0(q)w(t), \quad (343)$$

e assim, formula-se o estimador de variáveis instrumentais para o método da referência virtual:

$$\hat{\rho}_{vi} = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta_l(t)\varphi_l(t)^T \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \zeta_l(t)u_l(t) \right], \quad (344)$$

onde também observa-se que, caso $\zeta_l(t) = \varphi_l(t)$, a estimativa resultante é idêntica a de mínimos quadrados.

Por manter as mesmas características do problema no caso de sistemas com erros nas variáveis, é possível dizer que o estimador de variáveis instrumentais para o método da referência virtual é consistente, ou seja, é não polarizado quando $N \rightarrow \infty$ (CAMPI; LECCHINI; SAVARESI, 2002):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\rho}_{vi} = \rho_0, \quad (345)$$

o que, como comentado anteriormente, é a grande vantagem desta metodologia. Por outro lado, sabe-se que o estimador de variáveis instrumentais possui uma elevada covariância, o que é uma propriedade desvantajosa (SÖDERSTRÖM, 2018).

5.3 Regularização ótima na estimativa de variáveis instrumentais

Para aprimorar as estimativas com variáveis instrumentais no método da referência virtual, nos trabalhos (FORMENTIN; KARIMI, 2014; RALLO *et al.*, 2016; BOEIRA; ECKHARD, 2018), o uso da ferramenta de regularização é proposto. Nesses trabalhos, os parâmetros identificados pelo controlador são calculados pela variável instrumental regularizada, exposta anteriormente neste trabalho em (227):

$$\hat{\rho}_{vir} = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N P\zeta_l(t)\varphi_l(t)^T + I \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N P\zeta_l(t)u_l(t) \right], \quad (346)$$

onde $P \in \mathbb{R}^p$ é a matriz de regularização. Aqui, o vetor de variáveis instrumentais $\zeta_l(t)$, o vetor regressor $\varphi_l(t)$ e o sinal $u_l(t)$ estão relacionados com os sinais provenientes do método da referência virtual, como apresentados acima.

É consenso que para o estimador (346), a matriz de regularização P tem grande efeito no resultado da estimativa. Nos trabalhos (FORMENTIN; KARIMI, 2014; RALLO *et al.*, 2016; BOEIRA; ECKHARD, 2018), tal matriz é estimada com base na metodologia exposta em (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO *et al.*, 2014) que, na verdade, foi formulada para a identificação de modelos FIR com ruído na saída. Dessa forma, as metodologias expostas nestes artigos se tratam de uma aproximação para a solução do problema de estimar a matriz de regularização.

Neste sentido, o objetivo deste trabalho é calcular uma matriz ótima de regularização para o estimador (346), minimizando o critério de traço do erro médio quadrático, assim como fora feito no capítulo 4. A partir dessa matriz, então, é possível identificar as dependências da matriz ótima de regularização e sua estrutura, permitindo o desenvolvimentos de algoritmos de estimação em trabalhos futuros.

Para tanto, o primeiro passo é a obtenção de uma expressão analítica da matriz de erro médio quadrático para este caso, enunciada no teorema que segue.

Teorema 5.1 (Matriz de erro médio quadrático para estimativa de variável instrumental regularizada no método da referência virtual). *A matriz de erro médio quadrático para a estimativa de variável instrumental regularizada no método da referência virtual é dada pela seguinte expressão:*

$$\mathcal{Q}_{vir}(P) = (PR_0 + I)^{-1} (\rho_0 \rho_0^T + P\mathbf{W}_{vr}P^T) (R_0^T P + I)^{-1}, \quad (347)$$

sendo que $R_0 = [\varphi_{l0}(t)\varphi_{l0}(t)^T]$ e \mathbf{W}_{vr} é calculado por

$$\mathbf{W}_{vr} = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N \zeta_l(t) \mu_l(t) \mu_l(s) \zeta_l(s)^T \right], \quad (348)$$

$$\mathbf{W}_{vr} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma_w^2}{N} \left\{ E \left[(F(q)\varphi_{l0}(t)) (F(q)\varphi_{l0}(t))^T \right] + E \left[(F(q)\tilde{\varphi}_{l2}(t)) (F(q)\tilde{\varphi}_{l2}(t))^T \right] \right\}, \quad (349)$$

com $F(q)$ dada por

$$F(q) = -L(q)C_d(q)(T_d(q)^{-1} - 1)H_0(q). \quad (350)$$

Prova. Para provar o teorema basta observar que este método é análogo ao do capítulo 4, com a dedução da matriz de erro médio quadrático exposta no Teorema 4.2, e onde, no método da referência virtual, o vetor $\varphi_{l0}(t)$ é dado por (329), $\tilde{\varphi}_{l2}(t)$ é dado por (339), $\zeta_l(t)$ é dado por (336) e $F(q)$ é o pré filtro de $\mu_l(t)$, exposto em (343). \square

Enfim, a partir da matriz de erro médio quadrático exibida no Teorema 5.1 pode-se notar a dependência da mesma na matriz de regularização, e nas quantidades particulares do método da referência virtual como os filtros $L(q)$, o controlador ideal $C_d(q)$, o modelo de referência $T_d(q)$ e as funções de transferência do processo $G_0(q)$ e do ruído $H_0(q)$.

Além disso, como o objetivo é aprimorar a qualidade das estimativas, otimizando o traço da matriz de erro médio quadrático, o mesmo procedimento que foi realizado na seção 4.3 também é realizado para o método da referência virtual. Formula-se então o problema de otimização:

$$P_{0_{vr}} = \arg \min_P J_{tr}(P), \quad (351)$$

$$J_{tr}(P) = tr [\mathcal{Q}_{vir}(P)], \quad (352)$$

sendo que $\mathcal{Q}_{vir}(P)$ é dada aqui por (347). O resultado do problema acima é demonstrado no Teorema 5.2.

Teorema 5.2 (Matriz ótima de regularização para a variável instrumental regularizada no método da referência virtual). *A matriz ótima de regularização que minimiza a função custo (351) é calculada por*

$$P_{0_{vr}} = \rho_0 \rho_0^T R_0 \mathbf{W}_{vr}^{-1}. \quad (353)$$

Prova. Para provar o teorema basta observar que o problema descrito em (351) é análogo ao problema exposto em (272), com a solução exposta e detalhada no Teorema 4.3. \square

Assim como no cenário de sistemas com erros nas variáveis, a matriz ótima de regularização obtida para o método da referência virtual não é simétrica. Dessa forma, caso seja necessário ou desejado pelo usuário, também é possível impor restrições no problema, a fim de se obter uma matriz ótima simétrica, por exemplo:

$$\begin{cases} P_{0_{vrs}} = \arg \min_P J_{tr}(P), \\ s.a. P = P^T. \end{cases} \quad (354)$$

Neste caso, o resultado é expresso no Teorema 5.3.

Teorema 5.3 (Matriz ótima simétrica de regularização para a variável instrumental regularizada no método da referência virtual). *A matriz ótima simétrica de regularização que minimiza o critério (354) é calculada a partir da seguinte equação de Riccati:*

$$\begin{aligned} (\rho_0 \rho_0^T R_0 R_0 - \mathbf{W}_{vr}) P + P (\rho_0 \rho_0^T R_0 R_0 - \mathbf{W}_{vr}) - \\ P (\mathbf{W}_{vr} R_0 + R_0 \mathbf{W}_{vr}) P + (R_0 \rho_0 \rho_0^T + \rho_0 \rho_0^T R_0) = 0. \end{aligned} \quad (355)$$

Prova. Para prova este teorema, basta observar que o problema é análogo ao que foi apresentado no Teorema 4.4, no cenário de sistemas com erros nas variáveis. \square

Assim como no caso das matrizes ótimas obtidas para o cenário de sistemas com erros nas variáveis, as matrizes ótimas obtidas para o caso do método da referência virtual também dependem de quantidades que são desconhecidas em aplicações reais, como é o

caso do vetor de parâmetros ideais ρ_0 , a matriz \mathbf{W}_{vr} , que por sua vez também é função de $\varphi_{i0}(t)$, da função de transferência do ruído do processo $H_0(q)$ e da variância do ruído σ_w^2 .

Enfim, os resultados expostos nos Teoremas 5.2 e 5.3 são importantes para demonstrar que existe uma forma de otimizar o critério de qualidade das estimativas escolhido para a VIR no cenário do método da referência virtual, que é o traço da matriz de erro médio quadrático. Assim, se fosse possível utilizar tais matrizes em situações reais, elas atingiriam o melhor resultado para o método no cenário irrestrito e no cenário com a restrição de simetria. Porém, como estas matrizes não podem ser utilizadas, por dependerem de quantidades desconhecidas, as expressões que foram obtidas em (353) e (355) fornecem novas ideias para a parametrização e para a estimação de tais matrizes em aplicações práticas do método.

Isto posto, pode-se citar, por exemplo, que a estrutura da matriz (353) não se encaixa nas estruturas típicas de parametrização como aquelas abordadas no caso de identificação de sistemas FIR com ruído na saída, como a parametrização DC, TC, ou SS. Uma parametrização mais adequada para a mesma, por exemplo, buscando se aproximar da matriz ótima, teria a seguinte forma:

$$P(\beta) = \beta_1 \beta_2^T, \quad (356)$$

onde $\beta_1 \in \mathbb{R}^p$ e $\beta_2 \in \mathbb{R}^p$, sendo o número total de hiperparâmetros igual a $2p$. No entanto, esta ideia ainda não foi explorada neste trabalho e deverá ser estudo de trabalhos futuros.

Além disso, como mencionado anteriormente, já existem alternativas para estimar a matriz de regularização no contexto do método da referência virtual, conforme os desenvolvimentos apresentados em (RALLO *et al.*, 2016; BOEIRA; ECKHARD, 2018), por exemplo, com as metodologias baseadas na interpretação bayesiana do procedimento de identificação, que inclusive, já contam com funções específicas em softwares de estimação comerciais. Contudo, cabe ressaltar que tal interpretação foi desenvolvida para o caso onde o ruído contamina a saída do sistema, e não a entrada do controlador no procedimento de identificação, como acontece no cenário aqui explorado. Com isso, é possível dizer que tal metodologia de estimação para a matriz P pode não ser a mais adequada para o método da referência virtual. Assim sendo, a possibilidade de explorar novas metodologias de estimação está aberta para trabalhos futuros, onde os resultados aqui alcançados são fundamentais para demonstrar quais os sinais ou funções de transferência devem ser estimados.

Por fim, a próxima seção demonstra um exemplo numérico com a comparação entre os resultados que podem ser atingidos ao se utilizar as matrizes ótimas de regularização com as matrizes estimadas pela metodologia proposta em (RALLO *et al.*, 2016; BOEIRA; ECKHARD, 2018) para o método da referência virtual.

5.4 Exemplo numérico

Para realizar uma comparação do uso das matrizes ótimas de regularização aqui encontradas com as matrizes de regularização atingidas com o método proposto em (RALLO *et al.*, 2016; BOEIRA; ECKHARD, 2018), esta seção mostra um exemplo numérico. Cabe ressaltar que resultados mais eficazes para o VRFT são exibidos em (GARCIA; BAZANELLA, 2020), onde uma grande melhoria das propriedades estatísticas do método é demonstrada.

Neste exemplo, definiu-se que o processo a ser controlado é o seguinte:

$$y(t) = \frac{0,05}{q - 0,96}u(t) + w(t), \quad (357)$$

onde o sinal de entrada aplicado no processo foi ruído branco de média zero e variância $\sigma_u^2 = 1,5$ e o ruído do processo foi considerado ruído branco de média zero e variância $\sigma_w^2 = 0,1$. A função de transferência escolhida para representar o comportamento desejado para o sistema foi:

$$T_d(q) = \frac{0,8}{q - 0,92}, \quad (358)$$

que garante seguimento de referências constantes e do tipo degrau. Neste caso, o controlador ideal, calculado com o propósito de obter as matrizes ótimas teóricas e que, em aplicações reais é desconhecido, é dado por:

$$C_q(q) = \frac{1,6(q - 0,96)}{q - 1}, \quad (359)$$

que é um controlador do tipo PI. Neste exemplo, escolheu-se a classe de controladores \mathcal{C} como sendo a classe de controladores PI, e assim, satisfazendo a Premissa 5.1. Com isto, o sistema foi simulado em 500 rodadas de Monte Carlo com $N = 255$ dados de entrada e saída coletados em cada rodada. Ambos os números de rodadas de Monte Carlo e o número de dados N utilizados foram escolhidos com base em experiências anteriores. A identificação dos controladores foi realizada com o método dos mínimos quadrados ordinário, com a variável instrumental básica, com a variável instrumental regularizada usando as matrizes ótimas e usando as matrizes de regularização estimadas pelo procedimento proposto em (RALLO *et al.*, 2016; BOEIRA; ECKHARD, 2018), que usa o mesmo algoritmo explorado na seção 2.5.6.

As métricas utilizadas para a comparação de cada método foram: as propriedades estatísticas resultantes, os gráficos de respostas obtidas em malha fechada com cada controlador identificado e a comparação dos diagramas de caixa para o valor atingido para a função custo em cada método.

Primeiramente, apresenta-se a Tabela 8, com a comparação das normas dos vetores de polarização o traço da matriz de covariância e o traço da matriz de erro médio quadráticos

que foram calculados com base nos resultados obtidos das simulações de Monte Carlo. É importante ressaltar que, neste caso, os valores espúrios foram removidos no cálculo da covariância para uma melhor comparação. A Tabela mostra que as propriedades alcan-

Tabela 8 – Norma do vetor de polarização, traço da matriz de covariância e traço da matriz de erro médio quadrático obtidos a partir das amostras de Monte Carlo na identificação de controladores pelo método da referência virtual.

	$\ \mathcal{B}\ _2$	$\text{tr}(\mathcal{V})$	$\text{tr}(\mathcal{Q})$
MQ	4,0177	0,027	16,412
VI	0,6568	1,2877	1,719
VIR+ $P_{0_{vr}}$	0,0678	0,3349	0,3394
VIR+ $P_{0_{vrs}}$	0,0708	0,3383	0,3433
VIR+DC	0,7205	0,3574	0,8765
VIR+TC	1,2280	0,2335	1,7415
VIR+SS	0,8369	0,3578	1,0582

Fonte: do autor.

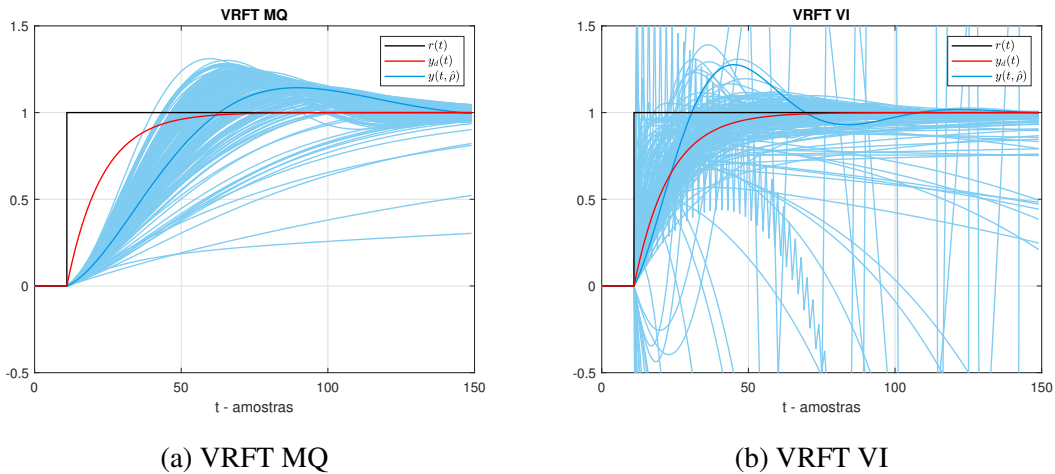
çadas tanto para a polarização obtida, quanto pra o traço das matrizes de covariância e erro médio quadrático são melhores para o cenário em que foram utilizadas as matrizes de regularização ótimas (irrestrita e simétrica), o que é natural. Ainda, vale ressaltar que os resultados baseados nas matrizes ótimas demonstram um limite inferior que se pode atingir, por exemplo, ao se usar a regularização no método da variável instrumental para o VRFT. Assim, neste exemplo, nota-se que os resultados atingidos pela metodologia de estimação proposta em (RALLO *et al.*, 2016; BOEIRA; ECKHARD, 2018) não foram tão distantes do que é possível alcançar usando os resultados ótimos.

Também, foram comparadas as respostas obtidas em malha fechada por cada controlador identificado para cada método, com a resposta desejada $y_d(t) = T_d(q)r(t)$. Neste sentido, as respostas em malha fechada atingidas com os métodos elementares de mínimos quadrados no VRFT são exibidos na Figura 15. As respostas obtidas com o uso da variável instrumental regularizada com as matrizes ótimas irrestrita e simétrica são exibidas na Figura 16. Já as respostas obtidas com o uso da variável instrumental regularizada com as matrizes de regularização estimadas pelo método proposto em (RALLO *et al.*, 2016; BOEIRA; ECKHARD, 2018) são exibidas na Figura 17.

Analisando as figuras 15a e 15b, é possível notar o efeito da polarização elevada ao se usar o método dos mínimos quadrados e o efeito da alta covariância ao se utilizar o método da variável instrumental nas respostas em malha fechada que foram obtidas.

Ademais, as figuras 16a, 16a, 17a e 17b mostram que há uma grande melhoria em se utilizar as variáveis instrumentais regularizadas. Primeiramente, nota-se que as matrizes

Figura 15 – Resposta desejada e respostas obtidas em malha fechada para os controladores estimados com o método dos mínimos quadrados (a) e com o método das variáveis instrumentais (b) para o VRFT.



Fonte: do autor.

ótimas de regularização produziram melhores resultados, o que é esperado visto que elas minimizam o critério de traço da matriz de erro quadrático e são calculadas com base em quantidades desconhecidas, como ρ_0 , \mathbf{W}_{vr} , $\varphi_{l0}(t)$, sem a necessidade de realizar nenhuma estimação. Além disso, nota-se que o resultado obtido com a estimação das matrizes de regularização foi melhor do que utilizar os tradicionais métodos elementares: mínimos quadrados e variável instrumental.

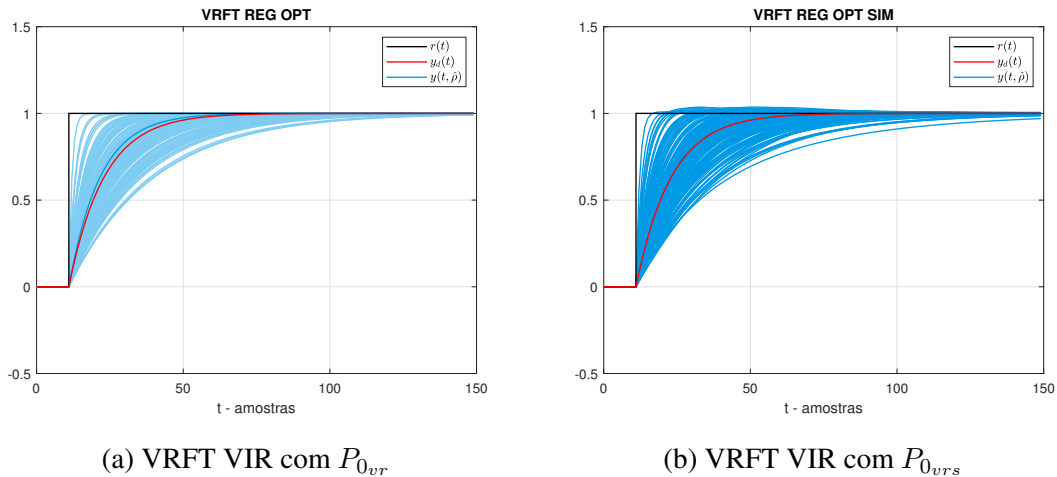
Por fim, mostra-se o diagrama de caixa com as distribuições obtidas para a função $\hat{J}_y(\rho)$, calculada para medir a diferença entre os resultados atingidos em malha fechada com a saída desejada:

$$\hat{J}_y(\hat{\rho}) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y_d(t) - y(t, \hat{\rho}))^2, \quad (360)$$

sendo $\hat{\rho}$ o vetor de parâmetros estimados em cada rodada de Monte Carlo. Neste sentido a Figura 18 demonstra os resultados atingidos, onde nota-se que os melhores resultados também foram atingidos pelo uso da regularização ótima no método das variáveis instrumentais, seguidos pelo uso da estimação da matriz P com a parametrização do tipo DC, SS e TC. Também, pode-se ver a desvantagem de se utilizar os métodos elementares nesse cenário, onde ambos apresentaram distribuições com maior mediana e variância neste exemplo.

Para concluir, o exemplo demonstrou a eficiência do uso das matrizes ótima irrestrita e simétrica na identificação de controladores pelo método do VRFT com variáveis instrumentais regularizadas. No entanto, como sabe-se, não é possível utilizar tais matrizes em aplicações reais. Neste caso, é possível utilizar o procedimento apresentado em (RALLO

Figura 16 – Resposta desejada e respostas obtidas em malha fechada para os controladores estimados com o método da variável instrumental regularizada no contexto do VRFT. Uso da matriz ótima irrestrita de regularização exposto em (a) e uso da matriz ótima simétrica de regularização exposto em (b).



Fonte: do autor.

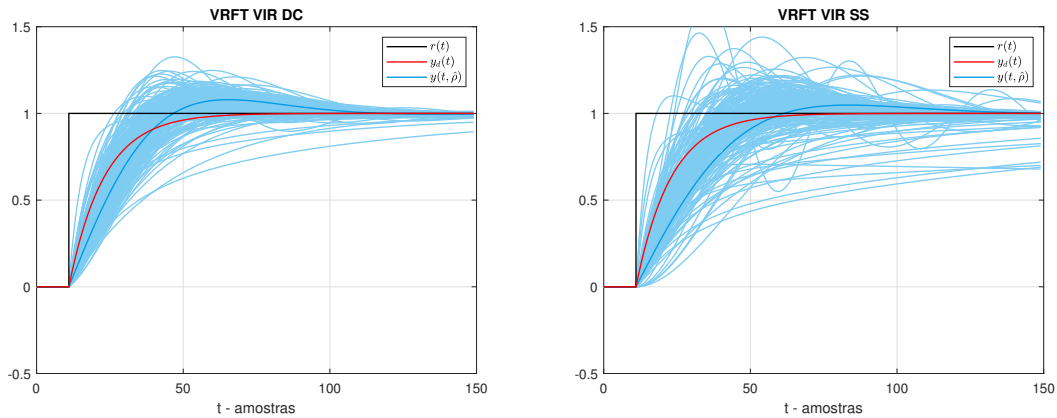
et al., 2016; BOEIRA; ECKHARD, 2018) para estimar a matriz de regularização e, neste caso, mostra-se que os resultados atingidos possuem melhores propriedades estatísticas. Também, neste exemplo pode-se verificar a distância entre os resultados obtidos com as matrizes de regularização estimadas e as matrizes de regularização ótimas e que a parametrização do tipo DC se saiu melhor para este caso.

5.5 Considerações finais

Esse capítulo mostrou a extensão dos resultados atingidos no capítulo 4 para o método de controle baseado em dados conhecido como método da referência virtual, ou VRFT. Primeiramente, na seção 5.1 foi feita uma discussão para contextualizar a área de controle baseado em dados e o método da referência virtual dentro da literatura de sistemas de controle. Também, são apresentados alguns conceitos importantes como a estrutura de controladores e os critérios utilizados no projeto para seguimento de modelo de referência.

Em seguida, a seção 5.2 apresentou o método da referência virtual para o projeto de controladores monovariáveis. Foi apresentada a função custo que é minimizada neste caso, o projeto de um filtro que visa aproximar esta função custo da função custo de seguimento de modelo de referência, assim como as estimativas de mínimos quadrados ordinário e de variáveis instrumentais para este método. Também, os sinais e as funções de transferência presentes no método foram organizados e fatorados de forma similar ao apresentado para sistemas com erros nas variáveis, onde concluiu-se que, caso o processo

Figura 17 – Resposta desejada e respostas obtidas em malha fechada para os controladores estimados com o método da variável instrumental regularizada no contexto do VRFT. Uso da matriz estimada com a parametrização DC (a) e uso da matriz estimada com a parametrização do tipo SS (b).



(a) VRFT VIR com P estimada - DC

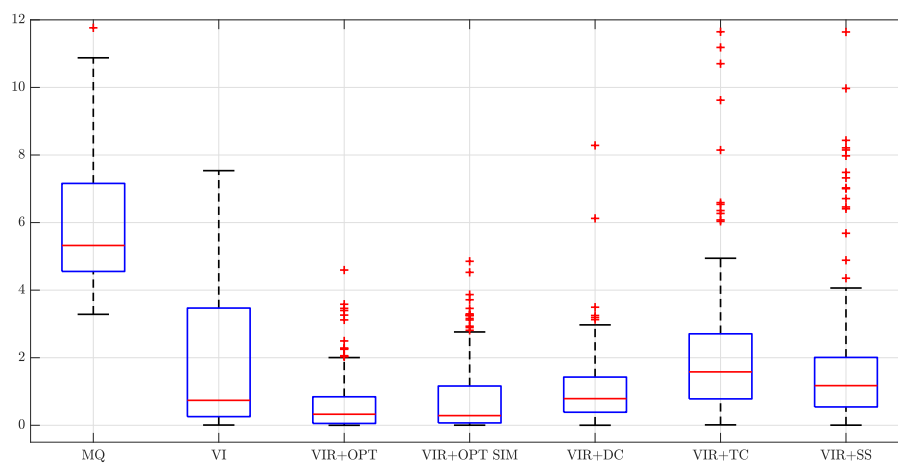
(b) VRFT VIR P estimada - SS

Fonte: do autor.

a ser controlado tenha ruído significativo em sua saída, o mesmo é transferido para a entrada (erro virtual) no problema de identificação do controlador.

A secção 5.3 demonstrou as propriedades estatísticas do método do VRFT e como obter matrizes ótimas de regularização irrestrita e com a restrição de simetria, fazendo uma analogia com os resultados expostos nas subsecções 4.3.1 e 4.3.2. Com isso, é possível prover novas ideias de parametrização e de estimação para a matriz de regularização neste cenário. Por fim, a secção 5.4 demonstrou um exemplo comparando a utilização das matrizes ótimas de regularização com a utilização de matrizes estimadas pelo método proposto em (RALLO *et al.*, 2016; BOEIRA; ECKHARD, 2018).

Figura 18 – Diagrama de caixas das funções custo obtidas para cada método empregado na identificação dos controladores no VRFT nas rodadas de Monte Carlo.



Fonte: do autor.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou contribuições para a identificação de sistemas com o uso da ferramenta de regularização. Inicialmente, foram descritos os principais aspectos que influenciam o resultados dos procedimentos de identificação: o processo real considerado, a condição experimental, a estrutura do modelo e o principal aspecto estudado neste trabalho, a técnica utilizada. Em seguida, o estado da arte clássico das metodologias de identificação foi demonstrado, com o método de minimização de erro de predição. Foram discutidas as propriedades deste método, assim como suas principais desvantagens, que basicamente estão relacionadas com a escolha da ordem do modelo a ser utilizado no procedimento.

Também no capítulo inicial, mostrou-se a alternativa que vem despertando amplo interesse da comunidade, que é a identificação de respostas ao impulso pelo método dos mínimos quadrados regularizados. Foi descrito que, nesta nova metodologia, a escolha da ordem de modelo se dá conjuntamente com a estimativa dos hiperparâmetros da matriz de regularização no problema e que este fato tem levado a melhores resultados para esta nova metodologia, se comparada à tradicional. Além disso, foi demonstrada a equivalência entre a estimativa de mínimos quadrados regularizados e a interpretação bayesiana do procedimento de identificação no caso em que o ruído que contamina a saída do sistema é ruído branco. Este aspecto é fundamental no contexto do trabalho e foi expandido para o caso de ruído colorido.

Ainda, dentro da revisão bibliográfica do trabalho, foram discutidos os sistemas com erros nas variáveis, categoria de sistema que é distinta daquela que é tradicionalmente estudada nos problemas de identificação e que possui como principal característica a presença de ruído na entrada do objeto que se deseja identificar. Também, foram apresentadas as metodologias elementares de identificação para este tipo de problema: os mínimos quadrados ordinários e a variável instrumental básica, assim como algumas de suas propriedades.

Em seguida, após contextualizar o trabalho na revisão bibliográfica, foi apresentada a primeira contribuição do trabalho: o desenvolvimento da metodologia denominada como mínimos quadrados ponderados regularizado, com o propósito de aprimorar a identifi-

cação quando o ruído de saída que contamina o sistema é ruído colorido, ou seja, que é autocorrelacionado. Para este caso, foi demonstrada que existe uma matriz ótima de regularização, que minimiza o traço da matriz de erro médio quadrático das estimativas e que, além disso, esta nova metodologia é equivalente à interpretação bayesiana do procedimento de identificação do sistema. Com isto, é possível concluir que esta nova abordagem, aqui apresentada, é um caso generalizado da metodologia de regularização tradicional da literatura.

Também, dentro desta contribuição, foi desenvolvido um algoritmo e uma estrutura de parametrização para a estimação das matrizes de ponderação e regularização. O algoritmo fez o uso de relações de matriz inversa e de uma fatoração de Cholesky para aprimorar o custo computacional da estimação, assim como sua precisão, evitando a inversão e o cálculo do determinante de uma matriz de dimensões muito elevadas. Dois exemplos numéricos foram apresentados, comparando a nova metodologia com a tradicional, onde é possível concluir que o MQPR é mais adequado e produz melhores resultados.

Além disso, no capítulo 4 do trabalho, outra contribuição foi apresentada. Nesta contribuição, a regularização foi adicionada para melhorar as propriedades estatísticas do método das variáveis instrumentais, principalmente no que diz respeito a sua covariância. Dentro deste tema, foi calculada a matriz de erro médio quadrático da estimativa para o caso assintótico e foi deduzida uma matriz ótima teórica de regularização irrestrita e uma matriz ótima com uma restrição de simetria, a qual é obtida por meio da solução de uma equação de Riccati. A partir dessas deduções é possível observar as quantidades que compõem as matrizes ótimas e, com isso, é possível fornecer novas ideias de como estimá-las em situações reais. Também, foi apresentado um exemplo numérico, demonstrando a efetividade de se usar as matrizes ótimas, principalmente com o objetivo de mostrar os limites do que pode ser alcançado em termos de melhorias de propriedades com o estimador ótimo.

Por fim, a última contribuição consistiu estender o trabalho desenvolvido para os sistemas com erros nas variáveis para o método de controle baseado em dados conhecido como método da referência virtual. Neste caso, o tema de controle baseado em dados foi apresentado, assim como algumas das principais definições e considerações que são feitas na literatura para este tipo de problema. Ademais, o método do VRFT em si foi contextualizado, a partir da apresentação de várias contribuições recentes e relevantes sobre o método que surgiram na literatura nos últimos anos, reforçando a importância desta metodologia nesta área de conhecimento. Após esta contextualização, a formulação do mesmo foi demonstrada, assim como seus estimadores de mínimos quadrados ordinário e de variável instrumental básica. Ainda, para melhorar as estimativas de variáveis instrumentais, foi adicionada a regularização e as matrizes ótimas de regularização foram deduzidas, a partir dos resultados anteriores. Com isto, é possível observar as quantidades que compõem as matrizes ótimas e suas estruturas, servindo como um primeiro passo

para o desenvolvimento de novas ferramentas para sua parametrização e estimação em casos práticos.

Neste sentido, destaca-se a possibilidade de alguns trabalhos futuros. Primeiramente, em relação à metodologia dos mínimos quadrados ponderados regularizados, usados para identificar a resposta ao impulso de sistemas com ruído colorido na saída, é possível aprimorar o algoritmo de estimação das matrizes de ponderação e regularização com o uso de uma outra fatoração no problema para a matriz de regularização, conhecida como fatoração QR, como apresentado em (CHEN; LJUNG, 2013). Também, destaca-se que podem ser utilizados outros tipos de estimadores para os hiperparâmetros, como aqueles apresentados em (MU; CHEN; LJUNG, 2018; ANDERSSON; WAHLSTRÖM; SCHÖN, 2018).

Ainda, futuras contribuições em relação ao uso de regularização no método das variáveis instrumentais e no VRFT, podem ser pesquisadas no sentido de estimar a matriz de regularização com base nas estruturas e quantidades que foram calculadas para as matrizes ótimas nesse caso. Um ponto de partida para tanto pode ser o trabalho (RISULEO; BOTTEGAL; HJALMARSSON, 2019) que trabalha com a modelagem de sistemas com ruídos ou incertezas na entrada no contexto de identificação com modelos de regressão gaussianos, usando informações a priori do sistema conjuntamente no procedimento de identificação, assim como fora feito inicialmente em (PILLONETTO; DE NICOLAO, 2010) para sistemas com ruído na saída e que levou aos trabalhos (CHEN; OHLSSON; LJUNG, 2012; PILLONETTO *et al.*, 2014) que fizeram a relação dos MQR com a interpretação bayesiana do procedimento de identificação.

REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. A. **Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais**. 4. ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2015.
- ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. **Optimal filtering**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1979.
- ANDERSSON, C.; WAHLSTRÖM, N.; SCHÖN, T. B. Data-driven impulse response regularization via deep learning. **IFAC-PapersOnLine**, New York, v. 51, n. 15, p. 1–6, 2018.
- BAZANELLA, A. S.; CAMPESTRINI, L.; ECKHARD, D. **Data-driven controller design: the H_2 approach**. Amsterdam: Springer Science & Business Media, 2012.
- BAZANELLA, A. S. *et al.* Identifiability and excitation of a class of rational systems. *In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL*, 2014, Los Angeles. **Proceedings [...]** New York: IEEE, 2014. p. 6522–6527.
- BEGHELLI, S.; GUIDORZI, R. P.; SOVERINI, U. The Frisch scheme in dynamic system identification. **Automatica**, New York, v. 26, n. 1, p. 171–176, 1990.
- BOEIRA, E. C.; ECKHARD, D. Multivariable virtual reference feedback tuning with bayesian regularization. *In: XXII CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA*, 2018, João Pessoa. **Anais [...]** Campinas: Sociedade Brasileira de Automática, 2018. p. 1–8.
- BOEIRA, E. C.; ECKHARD, D. Regularized impulse response estimation for systems with colored output noise. *In: AUSTRALIAN & NEW ZEALAND CONTROL CONFERENCE (ANZCC)*, 2021, Gold Coast. **Proceedings [...]** New York: IEEE, 2021. p. 18–23.
- BOEIRA, E. C.; ECKHARD, D. An optimal regularized instrumental variable method for errors-in-variables identification. *In: IEEE 60TH CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC)*, 2021, Houston, Texas. **Proceedings [...]** New York: IEEE, 2021. p. 1592–1597.

BOEIRA, E.; ECKHARD, D. pyvrft: a python package for the virtual reference feedback tuning, a direct data-driven control method. **SoftwareX**, New York, v. 11, p. 100383, 2020.

BOEIRA, E.; ECKHARD, D. The optimal regularized weighted least-squares method for impulse response estimation. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, New York, v. 34, n. 2, p. 302–314, 2023.

BOEIRA, E. *et al.* Comparing MIMO process control methods on a pilot plant. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, New York, v. 29, n. 4, p. 411–425, 2018.

CAMPESTRINI, L. *et al.* Virtual reference feedback tuning for non-minimum phase plants. **Automatica**, New York, v. 47, n. 8, p. 1778 – 1784, 2011.

CAMPESTRINI, L. *et al.* Identifiability analysis and prediction error identification of anaerobic batch bioreactors. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, New York, v. 25, n. 4, p. 438–447, 2014.

CAMPESTRINI, L. *et al.* Unbiased MIMO VRFT with application to process control. **Journal of Process Control**, New York, v. 39, p. 35 – 49, 2016.

CAMPESTRINI, L. *et al.* Data-driven model reference control design by prediction error identification. **Journal of the Franklin Institute**, New York, v. 354, n. 6, p. 2628–2647, 2017.

CAMPI, M. C.; LECCHINI, A.; SAVARESI, S. M. Virtual reference feedback tuning: a direct method for the design of feedback controllers. **Automatica**, New York, v. 38, n. 8, p. 1337–1346, 2002.

CAMPI, M. C.; SAVARESI, S. M. Direct nonlinear control design: the virtual reference feedback tuning (VRFT) approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v. 51, n. 1, p. 14–27, Jan 2006.

CARLIN, B. P.; LOUIS, T. A. **Bayes and empirical Bayes methods for data analysis**. 2. ed. New York: Chapman & Hall, 2000.

CHEN, T.; LJUNG, L. Implementation of algorithms for tuning parameters in regularized least squares problems in system identification. **Automatica**, New York, v. 49, n. 7, p. 2213 – 2220, 2013.

CHEN, T.; OHLSSON, H.; LJUNG, L. On the estimation of transfer functions, regularizations and gaussian processes - revisited. **Automatica**, New York, v. 48, n. 8, p. 1525–1535, 2012.

ECKHARD, D. **Ferramentas para melhoria da convergência dos métodos de identificação por erro de predição**. 2012. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

ECKHARD, D.; CAMPESTRINI, L.; BOEIRA, E. C. Virtual disturbance feedback tuning. **IFAC Journal of Systems and Control**, New York, v. 3, p. 23–29, 2018.

ECKHARD, D. *et al.* Input design as a tool to improve the convergence of PEM. **Automatica**, New York, v. 49, n. 11, p. 3282–3291, 2013.

FENG, B. *et al.* Kalman filter with recursive covariance estimation-Sequentially estimating process noise covariance. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, New York, v. 61, n. 11, p. 6253–6263, 2014.

FORMENTIN, S.; KARIMI, A. Enhancing statistical performance of data-driven controller tuning via L2-regularization. **Automatica**, New York, v. 50, n. 5, p. 1514–1520, 2014.

FORMENTIN, S.; SAVARESI, S. M. Noniterative data-driven design of multivariable controllers. *In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL AND EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 2011., 2011, Orlando. Proceedings [...]* New York: IEEE, 2011. p. 5106–5111.

FORMENTIN, S. *et al.* Data-Driven Design of Braking Control Systems. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, New York, v. 21, n. 1, p. 186–193, Jan 2013.

GARCIA, C. S.; BAZANELLA, A. S. The constrained total least squares solution for virtual reference feedback tuning. **IFAC-PapersOnLine**, [S.l.], v. 53, n. 2, p. 3983–3988, 2020.

GEVERS, M. A personal view of the development of system identification: a 30-year journey through an exciting field. **IEEE Control Systems Magazine**, New York, v. 26, n. 6, p. 93–105, 2006.

GONÇALVES DA SILVA, G. R.; BAZANELLA, A.; CAMPESTRINI, L. On the choice of an appropriate reference model for control of multivariable plants. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, New York, v. 27, n. 5, p. 1937–1949, 2019.

GONÇALVES DA SILVA, G. R.; CAMPESTRINI, L.; BAZANELLA, A. Automating the choice of the reference model for data-based control methods applied to PID controllers. *In: XX CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 2014, Belo*

- Horizonte. **Anais [...]** Campinas: Sociedade Brasileira de Automática, 2014. p. 1088–1095.
- GOODWIN, G. C. Experiment design. *In: IFAC SYMPOSIUM ON SYSTEM IDENTIFICATION*, 1982, Washington D.C. **Proceedings [...]** New York: IEEE, 1982. p. 19–26.
- HJALMARSSON, H. *et al.* Iterative feedback tuning: theory and applications. **IEEE Control Systems**, New York, v. 18, n. 4, p. 26–41, 1998.
- HOU, Z.-S.; WANG, Z. From model-based control to data-driven control: survey, classification and perspective. **Information Sciences**, New York, v. 235, p. 3–35, 2013.
- INVERNIZZI, D. *et al.* Data-driven attitude control law of a variable-pitch quadrotor: a comparison study. **IFAC-PapersOnLine**, New York, v. 49, n. 17, p. 236–241, 2016. 20th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace - ACA 2016.
- JANSSON, H.; HJALMARSSON, H. A general framework for mixed H_∞ and H_2 input design. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, p. 3132, 2004.
- KAMMER, L. C.; BITMEAD, R. R.; BARTLETT, P. L. Direct iterative tuning via spectral analysis. **Automatica**, New York, v. 36, n. 9, p. 1301–1307, 2000.
- KANSHA, Y.; HASHIMOTO, Y.; CHIU, M.-S. New results on VRFT design of PID controller. **Chemical Engineering Research and Design**, New York, v. 86, n. 8, p. 925–931, 2008.
- KARIMI, A.; VAN HEUSDEN, K.; BONVIN, D. Non-iterative data-driven controller tuning using the correlation approach. *In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE*, 2007, Kos. **Proceedings [...]** New York: IEEE, 2007. p. 5189–5195.
- LARSSON, C. A. *et al.* Model predictive control with integrated experiment design for output error systems. *In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE*, 2013, Zurich. **Proceedings [...]** New York: IEEE, 2013. p. 3790–3795.
- LECCHINI, A.; CAMPI, M.; SAVARESI, S. Virtual reference feedback tuning for two degree of freedom controllers. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, New York, v. 16, n. 5, p. 355–371, 2002.
- LJUNG, L. **System identification: theory for the user**. 2. ed. Englewoods Cliff: Prentice Hall, 1999.
- LJUNG, L.; CHEN, T.; MU, B. A shift in paradigm for system identification. **International Journal of Control**, London, v. 93, n. 2, p. 173–180, 2020.

MAGNUS, J. R.; NEUDECKER, H. **Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics**. Chichester: John Wiley & Sons, 2007.

MATISKO, P.; HAVLENA, V. Noise covariance estimation for Kalman filter tuning using Bayesian approach and Monte Carlo. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, New York, v. 27, n. 11, p. 957–973, 2013.

MEHRA, R. Optimal input signals for parameter estimation in dynamic systems—Survey and new results. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v. 19, n. 6, p. 753–768, 1974.

MU, B.; CHEN, T.; LJUNG, L. On asymptotic properties of hyperparameter estimators for kernel-based regularization methods. **Automatica**, New York, v. 94, p. 381–395, 2018.

NAKAMOTO, M. An application of the virtual reference feedback tuning for an MIMO process. *In*: SICE 2004 ANNUAL CONFERENCE, 2004, Sapporo. **Proceedings [...]** Tokyo: SICE, 2004. v. 3, p. 2208–2213 vol. 3.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Education Brasil, 2010.

PAPOULIS, A.; PILLAI, S. U. **Probability, random variables, and stochastic processes**. New York: McGraw-Hill Higher Education, 2002.

PETERSEN, K. B.; PEDERSEN, M. S. The matrix cookbook. **Technical University of Denmark**, Lyngby, v. 7, n. 15, p. 510, 2012.

PILLONETTO, G.; CHIUSO, A. Tuning complexity in regularized kernel-based regression and linear system identification: the robustness of the marginal likelihood estimator. **Automatica**, New York, v. 58, p. 106–117, 2015.

PILLONETTO, G.; CHIUSO, A.; DE NICOLAO, G. Prediction error identification of linear systems: a nonparametric gaussian regression approach. **Automatica**, New York, v. 47, n. 2, p. 291–305, 2011.

PILLONETTO, G.; DE NICOLAO, G. A new kernel-based approach for linear system identification. **Automatica**, New York, v. 46, n. 1, p. 81–93, 2010.

PILLONETTO, G.; NICOLAO, G. D. Kernel selection in linear system identification part I: a gaussian process perspective. *In*: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL AND EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 2011, Orlando. **Proceedings [...]** IEEE: New York, 2011. p. 4318–4325.

PILLONETTO, G. *et al.* Kernel methods in system identification, machine learning and function estimation: a survey. **Automatica**, New York, v. 50, n. 3, p. 657–682, 2014.

PILLONETTO, G. *et al.* **Regularized System Identification**: learning dynamic models from data. Cham: Springer International Publishing, 2022.

PREVIDI, F. *et al.* Data-driven control design for neuroprostheses: a virtual reference feedback tuning (VRFT) approach. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, New York, v. 12, n. 1, p. 176–182, 2004.

RADAC, M.-B.; PRECUP, R.-E.; ROMAN, R.-C. Data-driven model reference control of MIMO vertical tank systems with model-free VRFT and Q-Learning. **ISA Transactions**, New York, v. 73, p. 227–238, 2018.

RALLO, G. *et al.* Virtual reference feedback tuning with bayesian regularization. *In*: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 2016, Aalborg. **Proceedings [...]** New York: IEEE, 2016. p. 507–512.

RISULEO, R. S.; BOTTEGAL, G.; HJALMARSSON, H. Modeling and identification of uncertain-input systems. **Automatica**, New York, v. 105, p. 130 – 141, 2019.

ROJAS, C. R. *et al.* Robust optimal experiment design for system identification. **Automatica**, New York, v. 43, n. 6, p. 993–1008, 2007.

ROJAS, J. D. *et al.* Application of multivariate virtual reference feedback tuning for wastewater treatment plant control. **Control Engineering Practice**, New York, v. 20, n. 5, p. 499–510, 2012.

SCHEID FILHO, R. *et al.* Application of virtual reference feedback tuning to a non-minimum phase pilot plant. *In*: IEEE CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS, 2016, Buenos Aires. **Proceedings [...]** New York: IEEE, 2016. p. 1318–1323.

SCHOUKENS, J.; LJUNG, L. Nonlinear system identification: a user-oriented road map. **IEEE Control Systems Magazine**, [S.l.], v. 39, n. 6, p. 28–99, 2019.

SÖDERSTRÖM, T. Identification of stochastic linear systems in presence of input noise. **Automatica**, New York, v. 17, n. 5, p. 713 – 725, 1981.

SÖDERSTRÖM, T. **Discrete-time stochastic systems**: estimation and control. London: Springer Science & Business Media, 2002.

SÖDERSTRÖM, T. Errors-in-variables methods in system identification. **Automatica**, New York, v. 43, n. 6, p. 939 – 958, 2007.

SÖDERSTRÖM, T. **Errors-in-variables methods in system identification**. Amsterdam: Springer, 2018.

SÖDERSTRÖM, T.; JEZEK, J.; KUCERA, V. An efficient and versatile algorithm for computing the covariance function of an ARMA process. **IEEE transactions on signal processing**, New York, v. 46, n. 6, p. 1591–1600, 1998.

SÖDERSTRÖM, T.; SOVERINI, U.; MAHATA, K. Perspectives on errors-in-variables estimation for dynamic systems. **Signal Processing**, New York, v. 82, n. 8, p. 1139–1154, 2002.

SÖDERSTRÖM, T.; STOICA, P. **System identification**. Englewoods Cliff: Prentice Hall, 1989.

ZIEGLER, J. G.; NICHOLS, N. B. Optimum settings for automatic controllers. **Transactions of the ASME**, New York, v. 64, n. 11, p. 759–768, 1942.

APÊNDICE A RESULTADOS DE CÁLCULO MATRICIAL

Neste apêndice são demonstradas algumas deduções importantes para o desenvolvimento desta pesquisa com relação a resultados de cálculo matricial. Um aspecto fundamental neste contexto diz respeito a notação utilizada para as derivadas em relação a escalares: se ela produz um vetor linha ou vetor coluna. Neste sentido, existem algumas notações conhecidas na literatura, como a notação (ou *laoyut*) de numerador, denominador ou mista. Muitas vezes, estas notações variam de acordo com a área do conhecimento (econometria, estimação, machine learning, etc) ou mesmo, de autor para autor. Porém, misturar diferentes notações pode causar erros nos desenvolvimentos e nas análises e, portanto, usar notações compatíveis é essencial. Por isto, este apêndice mostra de forma detalhada como foram obtidas algumas relações de derivadas matriciais que são utilizadas de forma recorrente no trabalho.

Cabe destacar que, neste trabalho, optou-se pela *notação mista*, que é a mesma utilizada em (PETERSEN; PEDERSEN, 2012). Neste cenário, as diferentes derivadas são definidas com as seguintes formas e dimensões. Para o caso de derivada de escalar com relação a escalar, têm-se que

$$\frac{\partial(\text{escalar})}{\partial(\text{escalar})} \in \mathbb{R} = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad (361)$$

onde $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$. Já para a derivada de escalar com relação a um vetor, nota-se que

$$\frac{\partial(\text{escalar})}{\partial(\text{vetor})} \in \mathbb{R}^{n \times 1} = \left[\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} \right]_{i1} = \frac{\partial y}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial y}{\partial x_1} \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial y}{\partial x_n} \right]^T, \quad (362)$$

onde $y \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. A derivada de um escalar, com relação a uma matriz é dada por

$$\frac{\partial(\text{escalar})}{\partial(\text{matriz})} \in \mathbb{R}^{p \times q} = \left[\frac{\partial y}{\partial X} \right]_{ij} = \frac{\partial y}{\partial x_{ij}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_{11}} & \frac{\partial y}{\partial x_{12}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{1q}} \\ \frac{\partial y}{\partial x_{21}} & \frac{\partial y}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{2q}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_{p1}} & \frac{\partial y}{\partial x_{p2}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{pq}} \end{bmatrix}, \quad (363)$$

com $y \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathbb{R}^{p \times q}$. Para derivadas de vetores com relação a escalares, a notação mista tem a forma:

$$\frac{\partial(\text{vetor})}{\partial(\text{escalar})} \in \mathbb{R}^{n \times 1} = \left[\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \right]_{i1} = \frac{\partial y_i}{\partial x} = \left[\frac{\partial y_1}{\partial x} \quad \frac{\partial y_2}{\partial x} \quad \cdots \quad \frac{\partial y_n}{\partial x} \right]^T, \quad (364)$$

onde $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $x \in \mathbb{R}$. Já a derivada de um vetor com relação a outro vetor é dada por

$$\frac{\partial(\text{vetor})}{\partial(\text{vetor})} \in \mathbb{R}^{m \times n} = \left[\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad (365)$$

sendo que $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Por fim, a derivada de uma matriz com relação a um escalar é calculada por

$$\frac{\partial(\text{matriz})}{\partial(\text{escalar})} \in \mathbb{R}^{p \times q} = \left[\frac{\partial Y}{\partial x} \right]_{ij} = \frac{\partial y_{ij}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_{11}}{\partial x} & \frac{\partial y_{12}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial y_{1q}}{\partial x} \\ \frac{\partial y_{21}}{\partial x} & \frac{\partial y_{22}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial y_{2q}}{\partial x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_{p1}}{\partial x} & \frac{\partial y_{p2}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial y_{pq}}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (366)$$

com $Y \in \mathbb{R}^{p \times q}$ e $x \in \mathbb{R}$ e sendo que $[X]_{ij} = x_{ij}$ denota o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna da respectiva matriz/ou vetor nos resultados expostos acima.

Ainda dentro do contexto de cálculo matricial, algumas outras relações também são muito importantes neste trabalho e nas deduções apresentadas neste apêndice. Primeiramente, é importante notar que o elemento $[\cdot]_{kl}$ de uma derivada de matriz com relação a um dado escalar ij , respeita a seguinte expressão:

$$\left[\frac{\partial X}{\partial x_{ij}} \right]_{kl} = \frac{\partial x_{kl}}{\partial x_{ij}} = \delta(k-i)\delta(l-j), \quad (367)$$

com $\delta(\cdot)$ sendo o delta de Kronecker. Também, uma atenção importante deve ser dada ao elemento ij de um produto matricial (MAGNUS; NEUDECKER, 2007):

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^m [A]_{ik} [B]_{kj}, \quad (368)$$

sendo que $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$.

Agora, uma derivada que também aparece de forma recorrente nas otimizações do traço das matrizes de erro médio quadrático é a derivada de uma matriz inversa. Para obter o elemento kl da derivada da matriz inversa de $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ em relação ao elemento x_{ij} , escreve-se:

$$\left[\frac{\partial [X^{-1}]_{kl}}{\partial x_{ij}} \right] = \left[\frac{\partial X^{-1}}{\partial x_{ij}} \right]_{kl}, \quad (369)$$

dada as relações apresentadas anteriormente dentro da notação mista das derivadas matriciais. Agora, pode-se usar uma relação trivial: $XX^{-1} = I$ e a regra do produto (MAGNUS; NEUDECKER, 2007) para concluir que:

$$\frac{\partial X}{\partial x_{ij}} X^{-1} + X \frac{\partial X^{-1}}{\partial x_{ij}} = 0, \quad (370)$$

e assim, isolando $\frac{\partial X^{-1}}{\partial x_{ij}}$, chega-se em (MAGNUS; NEUDECKER, 2007):

$$\frac{\partial X^{-1}}{\partial x_{ij}} = -X^{-1} \frac{\partial X}{\partial x_{ij}} X^{-1}. \quad (371)$$

Para obter o termo kl desta derivada matricial, usa-se a notação mista para verificar que:

$$\left[\frac{\partial X^{-1}}{\partial x_{ij}} \right]_{kl} = \left[-X^{-1} \frac{\partial X}{\partial x_{ij}} X^{-1} \right]_{kl}, \quad (372)$$

onde é possível usar a relação do produto matricial (368) e escrever:

$$\left[\frac{\partial X^{-1}}{\partial x_{ij}} \right]_{kl} = - \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n [X^{-1}]_{kp} \left[\frac{\partial X}{\partial x_{ij}} \right]_{pq} [X^{-1}]_{ql}. \quad (373)$$

Com isto e com (367) conclui-se, então, que:

$$\left[\frac{\partial X^{-1}}{\partial x_{ij}} \right]_{kl} = - \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n [X^{-1}]_{kp} [\delta(p-i)\delta(q-j)] [X^{-1}]_{ql}, \quad (374)$$

$$\left[\frac{\partial X^{-1}}{\partial x_{ij}} \right]_{kl} = - [X^{-1}]_{ki} [X^{-1}]_{jl}. \quad (375)$$

O que significa que a derivada do elemento $[X^{-1}]_{kl}$ com relação a $[X]_{ij} = x_{ij}$ é dada pelo produto entre os elementos $-[X^{-1}]_{ki}$ e $[X^{-1}]_{jl}$ da matriz inversa.

Com as relações mostradas acima é possível anunciar três resultados, nos teoremas A.1, A.2 e A.3, em relação à derivada do traço de algumas matrizes com estrutura mais específica e que são usadas para encontrar as derivadas do traço dos erros médios quadráticos estudados.

Teorema A.1. *Sejam as matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times N}$, $X \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $B \in \mathbb{R}^{N \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz identidade, então a seguinte relação de derivadas matriciais é válida:*

$$\text{tr} \left[\frac{\partial (AXB + I)^{-1} C}{\partial x_{ij}} \right] = - \left[A^T (B^T X^T A^T + I)^{-1} C^T (B^T X^T A^T + I)^{-1} B^T \right]_{ij}. \quad (376)$$

Prova. Segue a prova do teorema:

$$\text{tr} \left[\frac{\partial(\text{AXB} + I)^{-1} C}{\partial x_{ij}} \right] = \sum_{a=1}^n \left[\frac{\partial(\text{AXB} + I)^{-1} C}{\partial x_{ij}} \right]_{aa} \quad (377)$$

$$= \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n \left[\frac{\partial(\text{AXB} + I)^{-1}}{\partial x_{ij}} \right]_{ab} [C]_{ba}, \quad (378)$$

onde é necessário obter o elemento $\left[\frac{\partial(\text{AXB} + I)^{-1}}{\partial x_{ij}} \right]_{ab}$. Também, usando as relações de derivada da matriz inversa, chega-se em:

$$\left[\frac{\partial(\text{AXB} + I)^{-1}}{\partial x_{ij}} \right]_{ab} = - \left[(\text{AXB} + I)^{-1} \frac{\partial(\text{AXB} + I)}{\partial x_{ij}} (\text{AXB} + I)^{-1} \right]_{ab} \quad (379)$$

$$= - \sum_{c=1}^n \sum_{d=1}^n [(\text{AXB} + I)^{-1}]_{ac} \left[\frac{\partial(\text{AXB} + I)}{\partial x_{ij}} \right]_{cd} [(\text{AXB} + I)^{-1}]_{db}. \quad (380)$$

A derivada $\left[\frac{\partial(\text{AXB} + I)}{\partial x_{ij}} \right]_{cd}$, por sua vez, é calculada por:

$$\left[\frac{\partial(\text{AXB} + I)}{\partial x_{ij}} \right]_{cd} = \left[\frac{\partial(\text{AXB})}{\partial x_{ij}} \right]_{cd} = \frac{\partial \sum_{e=1}^N \sum_{f=1}^N [A]_{ce} [X]_{ef} [B]_{fd}}{\partial x_{ij}} \quad (381)$$

$$= \sum_{e=1}^N \sum_{f=1}^N [A]_{ce} \delta(e-i) \delta(f-j) [B]_{fd} = [A]_{ci} [B]_{jd}. \quad (382)$$

Com isto, substituindo (382) em (380), pode-se afirmar que:

$$\left[\frac{\partial(\text{AXB} + I)^{-1}}{\partial x_{ij}} \right]_{ab} = - \sum_{c=1}^n \sum_{d=1}^n [(\text{AXB} + I)^{-1}]_{ac} [A]_{ci} [B]_{jd} [(\text{AXB} + I)^{-1}]_{db} \quad (383)$$

$$= - \left[(\text{AXB} + I)^{-1} A \right]_{ai} \left[B(\text{AXB} + I)^{-1} \right]_{jb}. \quad (384)$$

Por fim, substituindo (384) em (378) tem-se que:

$$\text{tr} \left[\frac{\partial(\text{AXB} + I)^{-1} C}{\partial x_{ij}} \right] = - \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n [(\text{AXB} + I)^{-1} A]_{ai} [B(\text{AXB} + I)^{-1}]_{jb} [C]_{ba} \quad (385)$$

$$= - \sum_{a=1}^n [B(\text{AXB} + I)^{-1} C]_{ja} [(\text{AXB} + I)^{-1} A]_{ai} \quad (386)$$

$$= - [B(\text{AXB} + I)^{-1} C (\text{AXB} + I)^{-1} A]_{ji} \quad (387)$$

$$= - \left[A^T (B^T X^T A^T + I)^{-1} C^T (B^T X^T A^T + I)^{-1} B^T \right]_{ij}, \quad (388)$$

o que conclui a prova. \square

Teorema A.2. *Este é semelhante ao teorema anterior. Considere, então, as matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times N}$, $X \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $C \in \mathbb{R}^{N \times n}$ e $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Neste caso, a derivada matricial que segue é verdadeira:*

$$\text{tr} \left[A \frac{\partial (BX^T C + I)^{-1}}{\partial x_{ij}} \right] = - \left[C (BX^T C + I)^{-1} A (BX^T C + I)^{-1} B \right]_{ij}. \quad (389)$$

Prova. Primeiramente, usa-se a relação de traço da matriz e de multiplicação matricial para observar a seguinte expressão:

$$\text{tr} \left[A \frac{\partial (BX^T C + I)^{-1}}{\partial x_{ij}} \right] = \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n [A]_{ab} \left[\frac{\partial (BX^T C + I)^{-1}}{\partial x_{ij}} \right]_{ba}. \quad (390)$$

Onde agora, usa-se a propriedade da derivada da matriz inversa para se concluir:

$$\left[\frac{\partial (BX^T C + I)^{-1}}{\partial x_{ij}} \right]_{ba} = \left[- (BX^T C + I)^{-1} \frac{\partial (BX^T C + I)}{\partial x_{ij}} (BX^T C + I)^{-1} \right]_{ba} \quad (391)$$

$$= \sum_{c=1}^n \sum_{d=1}^n - \left[(BX^T C + I)^{-1} \right]_{bc} \left[\frac{\partial (BX^T C + I)}{\partial x_{ij}} \right]_{cd} \left[(BX^T C + I)^{-1} \right]_{da}. \quad (392)$$

Para prosseguir com a prova do teorema, observa-se que:

$$\left[\frac{\partial (BX^T C + I)}{\partial x_{ij}} \right]_{cd} = \left[\frac{\partial (BX^T C)}{\partial x_{ij}} \right]_{cd} = \sum_{e=1}^N \sum_{f=1}^N [B]_{ce} \frac{\partial [X^T]_{ef}}{\partial x_{ij}} [C]_{fd} \quad (393)$$

$$= \sum_{e=1}^N \sum_{f=1}^N [B]_{ce} \delta(f-i) \delta(e-j) [C]_{fd} = [B]_{cj} [C]_{id}. \quad (394)$$

Substituindo (394) em (392) verifica-se a relação:

$$\left[\frac{\partial (BX^T C + I)^{-1}}{\partial x_{ij}} \right]_{ba} = - \sum_{c=1}^n \sum_{d=1}^n \left[(BX^T C + I)^{-1} \right]_{bc} [B]_{cj} [C]_{id} \left[(BX^T C + I)^{-1} \right]_{da} \quad (395)$$

$$= - \left[(BX^T C + I)^{-1} B \right]_{bj} \left[C (BX^T C + I)^{-1} \right]_{ia}. \quad (396)$$

Com isto, pode-se usar esta relação em (390) para observar que:

$$\text{tr} \left[A \frac{\partial (BX^T C + I)^{-1}}{\partial x_{ij}} \right] = - \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n [A]_{ab} \left[(BX^T C + I)^{-1} B \right]_{bj} \left[C (BX^T C + I)^{-1} \right]_{ia} \quad (397)$$

$$= - \sum_{a=1}^n \left[A (BX^T C + I)^{-1} B \right]_{aj} \left[C (BX^T C + I)^{-1} \right]_{ia} \quad (398)$$

$$= - \left[C (BX^T C + I)^{-1} A (BX^T C + I)^{-1} B \right]_{ij}, \quad (399)$$

o que finaliza a prova do teorema. \square

Teorema A.3. *Sejam agora as matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times N}$, $X \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $B \in \mathbb{R}^{N \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Neste contexto, a seguinte relação é verdadeira:*

$$\text{tr} \left[A \frac{\partial (XBX^T)}{\partial x_{ij}} C \right] = [CAXB]_{ij} + [BX^TCA]_{ji}. \quad (400)$$

Prova. Considere o traço da matriz:

$$\text{tr} \left[A \frac{\partial (XBX^T)}{\partial x_{ji}} C \right] = \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n \sum_{c=1}^n [A]_{ab} \left[\frac{\partial (XBX^T)}{\partial x_{ij}} \right]_{bc} [C]_{ca}, \quad (401)$$

sendo que é necessário encontrar o termo intermediário. Para tanto, analisa-se:

$$\left[\frac{\partial (XBX^T)}{\partial x_{ij}} \right]_{bc} = \sum_{d=1}^n \sum_{e=1}^n \frac{\partial \left([X]_{bd} [B]_{de} [X^T]_{ec} \right)}{\partial x_{ij}} \quad (402)$$

$$= \sum_{d=1}^n \sum_{e=1}^n \left(\frac{\partial [X]_{bd}}{\partial x_{ij}} [B]_{de} [X^T]_{ec} + [X]_{bd} [B]_{de} \frac{\partial [X^T]_{ec}}{\partial x_{ij}} \right) \quad (403)$$

$$= \sum_{d=1}^n \sum_{e=1}^n \left(\delta(b-i)\delta(d-j) [B]_{de} [X^T]_{ec} + [X]_{bd} [B]_{de} \delta(e-j)\delta(c-i) \right) \quad (404)$$

$$= \delta(b-i) [BX^T]_{jc} + [XB]_{bj} \delta(c-i). \quad (405)$$

Agora, substituindo (405) em (401) tem-se que:

$$\left[A \frac{\partial (XBX^T)}{\partial x_{ij}} C \right]_{aa} = \sum_{b=1}^n \sum_{c=1}^n \left([A]_{ab} [BX^T]_{jc} [C]_{ca} \delta(b-i) + [A]_{ab} [XB]_{bj} [C]_{ca} \delta(c-i) \right) \quad (406)$$

$$= [A]_{ai} [BX^T C]_{ja} + [AXB]_{aj} [C]_{ia}. \quad (407)$$

Dessa forma, finalmente é possível obter:

$$\text{tr} \left[A \frac{\partial (XBX^T)}{\partial x_{ij}} C \right] = \sum_{a=1}^n \left([A]_{ai} [BX^T C]_{ja} + [AXB]_{aj} [C]_{ia} \right) \quad (408)$$

$$= [BX^TCA]_{ji} + [CAXB]_{ij}, \quad (409)$$

concluindo a prova do teorema. \square

Teorema A.4. *Este teorema é utilizado na dedução da matriz ótima de regularização com a restrição de simetria no caso das variáveis instrumentais regularizadas. Considere,*

então, as matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times N}$, $X \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $C \in \mathbb{R}^{N \times n}$ e $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Neste caso, a derivada matricial que segue é verdadeira:

$$\text{tr} \left[A \frac{\partial(BXC + I)^{-1}}{\partial x_{ij}} \right] = - \left[B^T (C^T X^T B^T + I)^{-1} A^T (C^T X^T B^T + I)^{-1} C^T \right]_{ij}. \quad (410)$$

Prova. Primeiramente, usa-se a relação de traço da matriz e de multiplicação matricial para observar a seguinte expressão:

$$\text{tr} \left[A \frac{\partial(BXC + I)^{-1}}{\partial x_{ij}} \right] = \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n [A]_{ab} \left[\frac{\partial(BXC + I)^{-1}}{\partial x_{ij}} \right]_{ba}. \quad (411)$$

Onde agora, usa-se a propriedade da derivada da matriz inversa para se concluir:

$$\left[\frac{\partial(BXC + I)^{-1}}{\partial x_{ij}} \right]_{ba} = \left[-(BXC + I)^{-1} \frac{\partial(BXC + I)}{\partial x_{ij}} (BXC + I)^{-1} \right]_{ba} \quad (412)$$

$$= \sum_{c=1}^n \sum_{d=1}^n - \left[(BXC + I)^{-1} \right]_{bc} \left[\frac{\partial(BXC + I)}{\partial x_{ij}} \right]_{cd} \left[(BXC + I)^{-1} \right]_{da}. \quad (413)$$

Para prosseguir com a prova do teorema, observa-se que:

$$\left[\frac{\partial(BXC + I)}{\partial x_{ij}} \right]_{cd} = \left[\frac{\partial(BXC)}{\partial x_{ij}} \right]_{cd} = \sum_{e=1}^N \sum_{f=1}^N [B]_{ce} \frac{\partial [X]_{ef}}{\partial x_{ij}} [C]_{fd} \quad (414)$$

$$= \sum_{e=1}^N \sum_{f=1}^N [B]_{ce} \delta(e-i) \delta(f-j) [C]_{fd} = [B]_{ci} [C]_{jd}. \quad (415)$$

Substituindo (415) em (413) verifica-se a relação:

$$\left[\frac{\partial(BXC + I)^{-1}}{\partial x_{ij}} \right]_{ba} = - \sum_{c=1}^n \sum_{d=1}^n \left[(BXC + I)^{-1} \right]_{bc} [B]_{ci} [C]_{jd} \left[(BXC + I)^{-1} \right]_{da} \quad (416)$$

$$= - \left[(BXC + I)^{-1} B \right]_{bi} \left[C (BXC + I)^{-1} \right]_{ja}. \quad (417)$$

Com isto, pode-se usar esta relação em (411) para observar que:

$$\text{tr} \left[A \frac{\partial(BXC + I)^{-1}}{\partial x_{ij}} \right] = - \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n [A]_{ab} \left[(BXC + I)^{-1} B \right]_{bi} \left[C (BXC + I)^{-1} \right]_{ja}, \quad (418)$$

$$= - \sum_{a=1}^n \left[A (BXC + I)^{-1} B \right]_{ai} \left[C (BXC + I)^{-1} \right]_{ja}, \quad (419)$$

$$= - \left[C (BXC + I)^{-1} A (BXC + I)^{-1} B \right]_{ji}, \quad (420)$$

$$= - \left[B^T (C^T X^T B^T + I)^{-1} A^T (C^T X^T B^T + I)^{-1} C^T \right]_{ij}. \quad (421)$$

o que finaliza a prova do teorema. \square

Teorema A.5. *Sejam agora as matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times N}$, $X \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $B \in \mathbb{R}^{N \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Neste contexto, a seguinte relação é verdadeira:*

$$\text{tr} \left[A \frac{\partial(XBX)}{\partial x_{ij}} C \right] = \left[A^T C^T X^T B^T \right]_{ij} + \left[B^T X^T A^T C^T \right]_{ij}. \quad (422)$$

Prova. Considere o traço da matriz:

$$\text{tr} \left[A \frac{\partial(XBX)}{\partial x_{ji}} C \right] = \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n \sum_{c=1}^n \left[A \right]_{ab} \left[\frac{\partial(XBX)}{\partial x_{ij}} \right]_{bc} \left[C \right]_{ca}, \quad (423)$$

sendo que é necessário encontrar o termo intermediário. Para tanto, analisa-se:

$$\left[\frac{\partial(XBX)}{\partial x_{ij}} \right]_{bc} = \sum_{d=1}^n \sum_{e=1}^n \frac{\partial \left(\left[X \right]_{bd} \left[B \right]_{de} \left[X \right]_{ec} \right)}{\partial x_{ij}} \quad (424)$$

$$= \sum_{d=1}^n \sum_{e=1}^n \left(\frac{\partial \left[X \right]_{bd}}{\partial x_{ij}} \left[B \right]_{de} \left[X \right]_{ec} + \left[X \right]_{bd} \left[B \right]_{de} \frac{\partial \left[X \right]_{ec}}{\partial x_{ij}} \right) \quad (425)$$

$$= \sum_{d=1}^n \sum_{e=1}^n \left(\delta(b-i)\delta(d-j) \left[B \right]_{de} \left[X^T \right]_{ec} + \left[X \right]_{bd} \left[B \right]_{de} \delta(e-i)\delta(c-j) \right) \quad (426)$$

$$= \delta(b-i) \left[BX \right]_{jc} + \left[XB \right]_{bi} \delta(c-j). \quad (427)$$

Agora, substituindo (427) em (423) tem-se que:

$$\left[A \frac{\partial(XBX)}{\partial x_{ij}} C \right]_{aa} = \sum_{b=1}^n \sum_{c=1}^n \left(\left[A \right]_{ab} \left[BX \right]_{jc} \left[C \right]_{ca} \delta(b-i) + \left[A \right]_{ab} \left[XB \right]_{bi} \left[C \right]_{ca} \delta(c-j) \right) \quad (428)$$

$$= \left[A \right]_{ai} \left[BXC \right]_{ja} + \left[AXB \right]_{ai} \left[C \right]_{ja}. \quad (429)$$

Dessa forma, finalmente é possível obter:

$$\text{tr} \left[A \frac{\partial(XBX)}{\partial x_{ij}} C \right] = \sum_{a=1}^n \left(\left[A \right]_{ai} \left[BXC \right]_{ja} + \left[AXB \right]_{ai} \left[C \right]_{ja} \right) \quad (430)$$

$$= \left[BXC A \right]_{ji} + \left[C A X B \right]_{ji}, \quad (431)$$

$$= \left[A^T C^T X^T B^T \right]_{ij} + \left[B^T X^T A^T C^T \right]_{ij}. \quad (432)$$

concluindo a prova do teorema. \square