

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS  
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA E RELAÇÕES INTERNACIONAIS**

**JOÃO PEDRO RABAIOLI RAMA**

**PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES EUROPEIAS UTILIZANDO A DISTRIBUIÇÃO  
NÃO-GAUSSIANA DE TSALLIS**

**Porto Alegre  
2023**

**JOÃO PEDRO RABAIOLI RAMA**

**PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES EUROPEIAS UTILIZANDO A DISTRIBUIÇÃO  
NÃO-GAUSSIANA DE TSALLIS**

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Ciências Econômicas da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título Bacharel em Economia.

Orientador: Prof. Dr. João Plínio Juchem Neto

**Porto Alegre  
2023**

### CIP - Catalogação na Publicação

Rabaioli Rama, João Pedro  
Precificação de opções europeias utilizando a  
distribuição não-Gaussiana de Tsallis / João Pedro  
Rabaioli Rama. -- 2023.  
75 f.  
Orientador: João Plínio Juchem Neto.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade  
de Ciências Econômicas, Curso de Ciências Econômicas,  
Porto Alegre, BR-RS, 2023.

1. Precificação de Opções. 2. Distribuição de  
Tsallis. 3. Sorriso de Volatilidade. I. Juchem Neto,  
João Plínio, orient. II. Título.

**JOÃO PEDRO RABAIOLI RAMA**

**PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES EUROPEIAS UTILIZANDO A DISTRIBUIÇÃO  
NÃO-GAUSSIANA DE TSALLIS**

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Ciências Econômicas da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título Bacharel em Economia.

Aprovado em: Porto Alegre, 6 de setembro de 2023.

BANCA EXAMIDORA:

---

Prof. Dr. João Plínio Juchem Neto – Orientador  
UFRGS

---

Prof. Dr. Fabricio Tourrucôo UFRGS

---

Prof. Dr. Jorge Paulo de Araujo  
UFRGS

*For no tool developed in the theory of statistics has any meaning - except, perhaps, for descriptive purposes - without being referred to some stochastic scheme. (HAAVELMO, 1944)*

## **AGRADECIMENTOS**

Destaco meus agradecimentos para o meu orientador, João Plínio Juchem Neto, que me acompanhou na jornada acadêmica da Iniciação Científica e na elaboração desse trabalho. Os conselhos, orientações e cobranças por ele dados foram de especial importância no desenvolvimento desse trabalho e mais amplamente no meu progresso acadêmico e pessoal.

Estendo meus agradecimentos também ao restante do corpo docente da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, sem o qual sequer uma ínfima fração da monografia seria possível.

## RESUMO

Apesar do incontestado sucesso teórico e prático do modelo de precificação de opções proposto em Black e Scholes (1973), diversas incompatibilidades empíricas foram verificadas ao longo do tempo. Dentre essas, se destaca a suposição de variância constante para todos os preços de exercício e vencimentos, que contrasta com a existência do chamado “sorriso de volatilidade”. O modelo descrito e implementado nessa monografia, originalmente desenvolvido por Borland (2002a), concilia a obtenção de uma forma analítica para os preços de opções de compra com a suposição de uma distribuição com “fat-tails” para o ativo subjacente, em consonância com a existência do “sorriso de volatilidade”. Utilizando da distribuição não-Gaussiana de Tsallis, amplamente utilizada no campo da termoestatística não extensiva, obtém-se, para parâmetros de difusão  $\sigma$  constantes, preços maiores para opções de compra “fora-do-dinheiro” com o modelo proposto.

**Palavras-chaves:** Tsallis. Derivativos. Opções. Precificação.

## ABSTRACT

Despite the undeniable theoretical and practical success of the option pricing model proposed by Black e Scholes (1973), various empirical inconsistencies have been observed over time. Among these, the assumption of constant variance for all strike prices and maturities stands out, contrasting with the existence of the so-called "volatility smile." The model described and implemented in this thesis, originally developed by Borland (2002a), reconciles the attainment of an analytical form for call option prices with the assumption of a "fat-tails" distribution for the underlying asset, in line with the existence of the "volatility smile." Utilizing the non-Gaussian Tsallis distribution, widely used in the field of non-extensive thermodynamics, the proposed model yields higher prices for "out-of-the-money" call options for constant diffusion parameters  $\sigma$ .

**Keywords:** Tsallis. Derivatives. Options. Pricing.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Payoff de $C_t$ : $\max(S_t - K)$ .....	16
Figura 2 – Payoff de $P_t$ : $\max(K - S_t)$ .....	17
Figura 3 – EDE Linear de Coeficientes Constantes .....	24
Figura 4 – EDE Geométrica .....	25
Figura 5 – Distribuição de Tsallis para diferentes coeficientes de entropia, $q$ .....	51
Figura 6 – Caudas da Distribuição de Tsallis para diferentes coeficientes de entropia, $q$ .....	52
Figura 7 – Preços $C_0$ para $q = 1.5$ e $q = 1$ .....	64
Figura 8 – Diferença dos preços $C_0$ para $T = 0.6$ e $T = 0.05$ .....	65
Figura 9 – Diferença dos preços $C_0$ para $T = 0.6$ e $T = 0.05$ , em maior intervalo.	66
Figura 10 – Logaritmo da razão dos preços $C_0$ para $T = 0.6$ e $T = 0.05$ , em maior intervalo .....	67
Figura 11 – Preços para diferentes tempos para o vencimento, $T$ , com $S_t = 50$ ....	68
Figura 12 – Volatilidades implícitas pelos preços aferidos por (BORLAND, 2002a)	69
Figura 13 – Comparação dos preços para opções de compra com $T = 0.05$ .....	70
Figura 14 – Comparação dos preços para opções de compra “dentro-do-dinheiro” com $T = 0.05$ .....	71
Figura 15 – Comparação dos preços para opções de compra “fora-do-dinheiro” com $T = 0.05$ .....	72

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>CONCEITOS BÁSICOS</b> .....	<b>12</b>
2.1	OPÇÕES.....	12
2.1.1	<b>Tipos de Opções</b> .....	<b>12</b>
2.1.2	<b>Estratégias básicas de opções</b> .....	<b>14</b>
2.1.3	<b>Payoffs de uma Opção</b> .....	<b>15</b>
2.1.4	<b>Resultados de uma Opção</b> .....	<b>15</b>
2.2	TERMINOLOGIAS RELEVANTES.....	15
2.2.1	<b>Valor intrínseco e Valor Tempo</b> .....	<b>16</b>
2.2.2	<b>Relação com o preço de exercício</b> .....	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>MÉTODOS MATEMÁTICOS EM DERIVATIVOS</b> .....	<b>18</b>
3.1	O AMBIENTE ESTOCÁSTICO.....	18
3.1.1	<b>Convergência média-quadrática</b> .....	<b>20</b>
3.2	MARTINGALES CONTÍNUOS .....	20
3.3	PROCESSOS ESTOCÁSTICOS RELEVANTES .....	21
3.3.1	<b>O Processo de Wiener</b> .....	<b>21</b>
3.3.2	<b>Movimento Browniano</b> .....	<b>22</b>
3.4	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS RELEVANTES.....	22
3.4.1	<b>EDE Linear de Coeficientes Constantes</b> .....	<b>23</b>
3.4.2	<b>EDE Geométrica</b> .....	<b>23</b>
3.4.3	<b>Square-Root EDE</b> .....	<b>25</b>
3.5	LEMA DE ITÔ .....	26
3.6	MÉTODOS GERAIS DE PRECIFICAÇÃO DE DERIVATIVOS .....	29
3.6.1	<b>Portfólios livres de risco</b> .....	<b>29</b>
3.6.2	<b>Medidas equivalentes de Martingale</b> .....	<b>31</b>
3.7	MEDIDAS EQUIVALENTES DE MARTINGALE .....	33
3.7.1	<b>Função geradora de momentos</b> .....	<b>34</b>
3.7.2	<b>Expectativa condicional de um processo geométrico</b> .....	<b>35</b>

3.7.3	<b>Conversão de preços em martingales</b>	36
3.7.4	<b>Medidas de probabilidade e suas EDES</b>	38
<b>4</b>	<b>O MODELO DE BLACK, SCHOLES E MERTON</b>	<b>40</b>
4.1	A SOLUÇÃO DE BLACK E SCHOLES VIA PORTFÓLIOS LIVRES DE RISCO	40
4.1.1	<b>Hipóteses - Condições ideais para o mercado do ativo subjacente e da opção</b>	<b>40</b>
4.1.2	<b>Portfólios livres de risco</b>	<b>41</b>
4.2	DERIVAÇÃO POR MEDIDAS EQUIVALENTES DE MARTINGALE	44
<b>5</b>	<b>O MODELO DE BORLAND</b>	<b>49</b>
5.1	INTRODUÇÃO, MOTIVAÇÃO E FATOS ESTILIZADOS	49
5.2	A DISTRIBUIÇÃO DOS RETORNOS	49
5.3	PORTFOLIOS LIVRE DE RISCO	53
5.4	MEDIDAS EQUIVALENTES DE MARTINGALE	54
5.5	A FORMA GERAL DAS SOLUÇÕES	56
5.6	OPÇÕES DE COMPRA	57
5.6.1	<b>Soluções como processos aleatórios <math>(0, 1)</math></b>	<b>59</b>
<b>6</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS</b>	<b>60</b>
6.1	IMPLEMENTAÇÃO DA FERRAMENTA DE CÁLCULO	60
6.1.1	<b>As equações auxiliares</b>	<b>60</b>
6.1.2	<b>Equação fundamental</b>	<b>63</b>
6.2	REPLICAÇÃO DOS RESULTADOS	63
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>73</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>74</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Apesar do seu incontestado sucesso, medido tanto pela sua aprovação entre acadêmicos de finanças quanto pelo seu papel de ponto-focal de qualquer proposição alternativa para a precificação de um derivativo, diversas suposições do modelo proposto por Black e Scholes (1973) são contestadas empiricamente. Se, por um lado, algumas delas são de fáceis conciliação — as suposições de “hedges” contínuos e de ausência de custos de transação, por exemplo — e implicam em pequenas e pontuais alterações no modelo original, outras apontam para dinâmicas mais fundamentais. Em específico, a suposição de dinâmica para o ativo subjacente (Movimento Browniano Geométrico) e a consequente “log-normalidade” dos retornos sob essa dinâmica, são de mais difícil compatibilização com retornos que apresentam saltos e, especialmente, “fat-tails” (ERAKER; JOHANNES; POLSON, 2003). Como consequência, temos uma inescapável subestimação dos preços de opções fora-do-dinheiro, ou, o que é a mesma coisa, observamos a existência de um “sorriso de volatilidade”.

Não é surpreendente, portanto, que abordagens alternativas de diversas naturezas tenham sido propostas para a precificação de opções. Comumente, essas abordagens envolveram uma combinação de diferentes processos estocásticos para o ativo subjacente, sua volatilidade e até para o ativo livre de risco (COX; ROSS, 1976; HULL; WHITE, 1987; JARROW, 1998; DERMAN; MILLER, 2016). Em geral, as diferentes soluções se assemelhavam por destacar uma dinâmica em específico a conciliar com o modelo anterior (BLACK; SCHOLES, 1973), frequentemente abrindo mão de uma forma analítica — isto é, de uma solução que não dependa de implementação numérica.

O modelo apresentado neste trabalho, proposto originalmente por Borland (2002a), se destaca pela suposição de uma nova dinâmica para o ativo subjacente que, por sua vez, obtém naturalmente as características “fat-tails” observadas na distribuição dos retornos de diversas classes de ativos (TALEB, 2020) enquanto resulta em formas analíticas para o preço de opções de compra europeias. Essa dinâmica é descrita por meio de uma equação diferencial estocástica em que o termo de difusão segue a distribuição de Tsallis, ou distribuição q-Gaussiana (TSALLIS, 1988), originalmente utilizada no campo da termoestatística não extensiva.

Os resultados obtidos por esse modelo são coerentes com seu propósito. Opções “fora-do-dinheiro” possuem maior valor em comparação com o modelo original de Black e Scholes (1973), e essa diferença é maior quanto menor for o tempo para o vencimento, em coerência com a existência de um “sorriso de volatilidade”. O parâmetro  $\sigma$ , porém, assume significado obscuro, perdendo seu significado de “escala de difusão”, uma vez que precisa ser normalizado para obtenção de preços comparáveis.

O objetivo deste trabalho é descrever de forma analítica o modelo proposto por

Borland (2002a) e implementá-lo computacionalmente para a análise dos resultados obtidos. Para tanto, o trabalho é organizado da seguinte forma: no primeiro capítulo, conceitos básicos de derivativos são explicados, assim como é descrita a terminologia comumente utilizada no mercado de opções; no capítulo que segue, uma introdução ampla e no rigor que se julgou adequado é feita dos métodos matemáticos que permitem o desenvolvimento do modelo; no terceiro capítulo, é dada atenção especial ao modelo proposto por Black e Scholes (1973) — por vezes chamado de “modelo tradicional” — com foco nos pontos a serem comparados posteriormente no trabalho; por fim, é apresentado o modelo proposto por Borland (2002a) e os resultados obtidos em sua implementação computacional, feita em Python.

## 2 CONCEITOS BÁSICOS

Derivativos são ativos cujo valor deriva de sua relação contratual com outra variável subjacente. Frequentemente, essa variável toma a forma de um preço de um ativo já existente. Como instrumentos financeiros, derivativos possibilitam a transferência de risco por meio da troca de fluxos de pagamento entre agentes, que podem tanto ser risco-avessos, desejando transferir o risco para outra contraparte, especulativos, que buscam obter um retorno ajustado ao risco favorável, ou arbitadores, que buscam obter retornos livres de risco por meio da exploração de anomalias de preços. A determinação da troca de fluxos de caixa é fundamentada pela relação contratual predeterminada e pela performance da variável subjacente no período de interesse.

### 2.1 OPÇÕES

Opções são derivativos financeiros que estabelecem uma relação contratual com um ativo subjacente ao qual dá o direito de comprar ou vender a um determinado preço de exercício e em uma determinada data futura. Dentre os possíveis ativos subjacentes estão ações, índices, títulos de dívida e commodities tanto no mercado a vista como no mercado futuro. Para seu comprador, opções representam o pagamento de um prêmio em troca de um direito de comprar ou vender o ativo subjacente com conhecidas condições; para seu vendedor - chamado lançador, - representam o recebimento desse prêmio em troca da obrigação de vender ou comprar o ativo subjacente caso o comprador opte pelo exercício.

#### 2.1.1 Tipos de Opções

Opções são diferenciadas por sua relação com o ativo subjacente de três formas concomitantes. A primeira delas diz respeito a natureza do exercício da opção, se caracterizando como uma opção de compra ou de venda. A segunda delas determina a relação contratual entre a data de exercício e a opção de compra ou venda, que assumem principalmente duas formas. São elas:

- a) Opções Europeias: opções cujo exercício do direito de compra ou de venda se dá somente no vencimento predeterminado do contrato;
- b) Opções Americanas: opções cujo exercício pode se dar em qualquer momento entre a compra da opção e seu vencimento.

Por fim, a diferenciação pode ser realizada pela forma como é determinada a

relação contratual entre a variável subjacente e a opção, que pode assumir inúmeras (e criativas) formas, dentre as quais:

- a) Opções com Barreira: opções cuja validade passa a existir (chamadas de opções *knock-in*) ou deixa de existir (opções *knock-out*) uma vez atingida uma certa barreira para o preço da variável subjacente, podendo ter diferentes períodos de validade ou até múltiplas barreiras (envolvendo o ativo subjacente ou outros);
- b) Opções Binárias: opções com liquidação financeira de um valor financeiro pre-determinado (opções binárias do tipo *cash-or-nothing*) ou do valor financeiro do ativo no vencimento (do tipo *asset-or-nothing*) de acordo com a ocorrência ou não de um evento binário, geralmente relacionando o preço do ativo no vencimento ao preço de exercício;
- c) Opções Asiáticas: opções cuja liquidação financeira ao vencimento depende da média aritmética dos valores de fechamento da variável subjacente ao longo da vida da opção;
- d) Opções *Lookback*: opções cuja liquidação financeira ao vencimento dependem da diferença entre os preços máximos e mínimos da variável subjacente ao longo da vida da opção (opções *lookback* do tipo *floating*) ou da diferença desses para o preço de exercício (opções *lookback* do tipo *fixed*);
- e) Opções *Chooser*: proporcionam ao seu comprador o direito de escolher se a opção será de compra ou de venda ao final de um período após o pagamento do prêmio.

São chamadas de opções exóticas aquelas estruturas de opções, algumas das quais já citadas, cuja relação contratual é não convencional. Essa distinção entre opções *vanilla* (simples) e exóticas é muito comum, mas abre espaço para uma interpretação equivocada quanto a natureza única da opcionalidade (*contingent claim*). Em Taleb (1997), uma forma geral é apresentada para a opção como um instrumento único, distinguindo opções por diversas seções de sua estrutura contratual. Nessa estruturação generalizada, uma opção pode assumir distintas funcionalidades a respeito de sua:

- a) homogeneidade temporal: isto é, de sua estrutura de *payoff* permanecer a mesma durante o tempo de vida de opção ou se alterar conforme a opção se aproxima do vencimento;
- b) continuidade de *payoff*: ou seja, da continuidade ou não do *payoff* como função do preço do ativo subjacente. São exemplos de diferentes continuidades de
  - *payoff* em rampa: quando o *payoff* decresce linearmente conforme o ativo subjacente, como nas opções *vanilla* de compra ou venda;

- *payoff* em digital: quando o *payoff* tem uma descontinuidade do tipo “tudo-ou-nada”, como nas opções binárias (também conhecidas como digitais).
- c) estrutura de barreiras: isto é, de sua estrutura de *payoff* se alterar conforme o ativo subjacente ou um outro ativo ou preço atinge determinado valor (chamado de barreira) em também determinado intervalo de tempo.
- d) dependência de caminho: de sua estrutura de *payoff* depender somente de eventos que ocorrem no momento do vencimento da opção (no caso mais comum, depender somente de seu preço no vencimento) ou de eventos que ocorrem em toda a existência da opção, sendo subdivida em graus de dependência de caminho.

Embora não exaustivamente descrita, a forma geral de concepção de uma opção como um ativo com relação contingente e não linear com outro ativo nos ajuda a entender, principalmente, de que forma as opções se destacam como amplamente flexíveis em transformar as expectativas de diversos agentes econômicos em preços e possibilidades de negociação. Particularmente, as diferentes estruturas presentes sob essa forma geral de concepção de uma opção vão impactar, além de seu preço justo e sua metodologia de precificação, sua forma específica de replicação em teoria e na prática (DERMAN; ERGENER; KANI, 1995)<sup>1</sup>.

### 2.1.2 Estratégias básicas de opções

- a) *long call*: comprador de uma opção de compra - realiza o pagamento do prêmio em troca do direito de exercer a compra do ativo subjacente pelo preço de exercício acordado;
- b) *long put*: comprador de uma opção de venda - realiza o pagamento do prêmio em troca do direito de exercer a venda do ativo subjacente pelo preço de exercício acordado;
- c) *short call*: lançador de uma opção de compra - recebe o pagamento do prêmio em troca da potencial obrigação de ser exercido, caso em que deve vender o ativo subjacente pelo preço acordado;
- d) *short put*: lançador de uma opção de compra - recebe o pagamento do prêmio em troca da potencial obrigação de ser exercido, caso em que deve comprar o ativo subjacente pelo preço acordado;

<sup>1</sup> O que é a mesma coisa. Veremos nos capítulos que seguem como a precificação de uma opção pode se dar justamente utilizando um portfólio que a replique em todo seu *payoff* e que tenha preço conhecido.



### 2.1.3 *Payoffs* de uma Opção

Os *payoffs*, valores devidos no vencimento de uma opção, são, por definição, de soma-zero. Isto é, a soma dos *payoffs* das pontas compradora e lançadora é nula. Podemos descrevê-los da seguinte forma:

- a) Opção de compra:  $\max(S_t - K, 0)$
- b) Opção de venda:  $\max(K - S_t, 0)$

sendo  $S_t$  o preço do ativo subjacente no momento  $t$  e  $K$  o preço de exercício da opção.

### 2.1.4 Resultados de uma Opção

Uma vez conhecidos os *payoffs* possíveis para opções de compra e de venda, os resultados são a simples somatória dos mesmos com os respectivos prêmios a pagar ou a receber no momento da efetivação do negócio, assim sendo, os possíveis resultados para as quatro estratégias básicas de opções são:

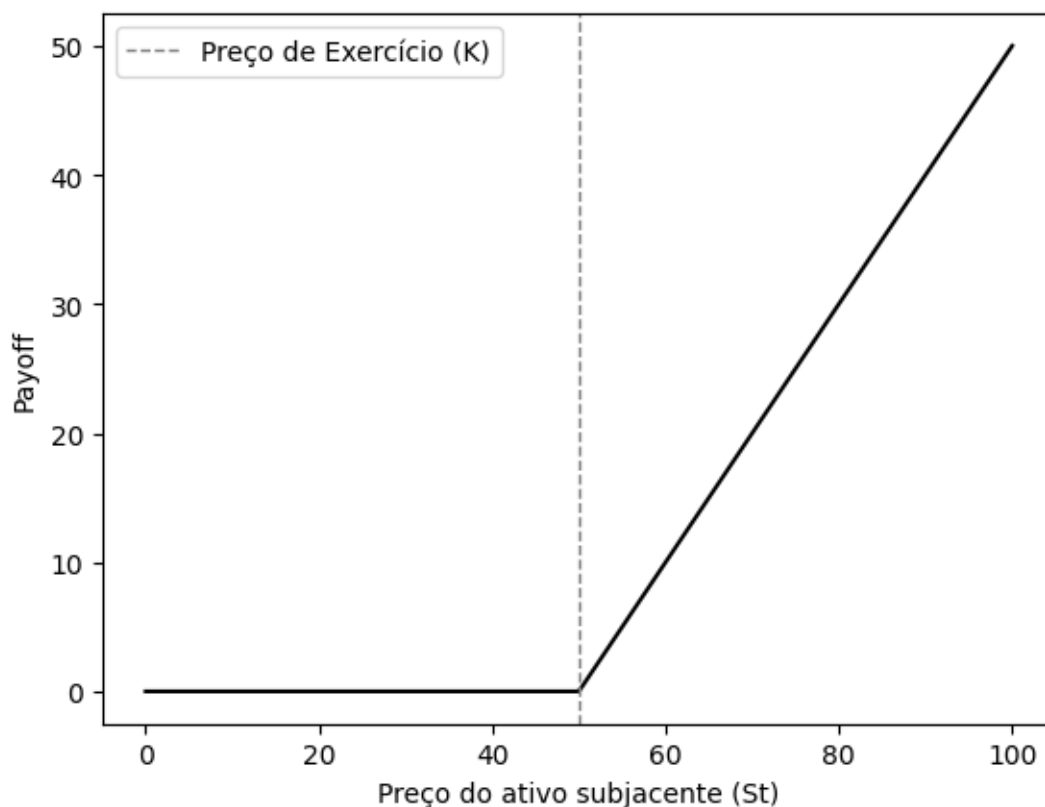
- a) *long call*:  $\max(S_t - K, 0) - C_t$ ;
- b) *long put*:  $\max(K - S_t, 0) - P_t$ ;
- c) *short call*:  $C_t - \max(S_t - K, 0)$ ;
- d) *short put*:  $P_t - \max(K - S_t, 0)$ ;

para os quais  $C_t$  e  $P_t$  são, respectivamente, os preço (ou prêmios) das opções de compra e de venda no momento  $t$ .

## 2.2 TERMINOLOGIAS RELEVANTES

Algumas terminologias são relevantes na descrição de uma opção e suas características. A primeira delas, já descrita anteriormente, diz respeito aos agentes que compõe as duas contrapartes em uma negociação de uma opção, sendo eles: o comprador, agente que realiza o pagamento do prêmio em troca do direito de exercício; o lançador, agente a quem é pago o prêmio da opção em troca do passivo da potencial obrigação de comprar ou vender. Assim sendo, uma opção possui naturalmente quatro estratégias primitivas, sobre as quais as mais diversas estruturas de opções podem ser elaboradas:

**Figura 1 – Payoff de  $C_t$ :  $\max(S_t - K)$**



Fonte: elaboração do autor

### 2.2.1 Valor intrínseco e Valor Tempo

O valor intrínseco de uma opção é definido como o *payoff* da opção considerando que o preço atual do ativo subjacente vai ser o preço no exercício. Logo, o valor intrínseco é definido de forma análoga ao *payoff*, mas considerando o preço do ativo subjacente no vencimento,  $S_T$ .

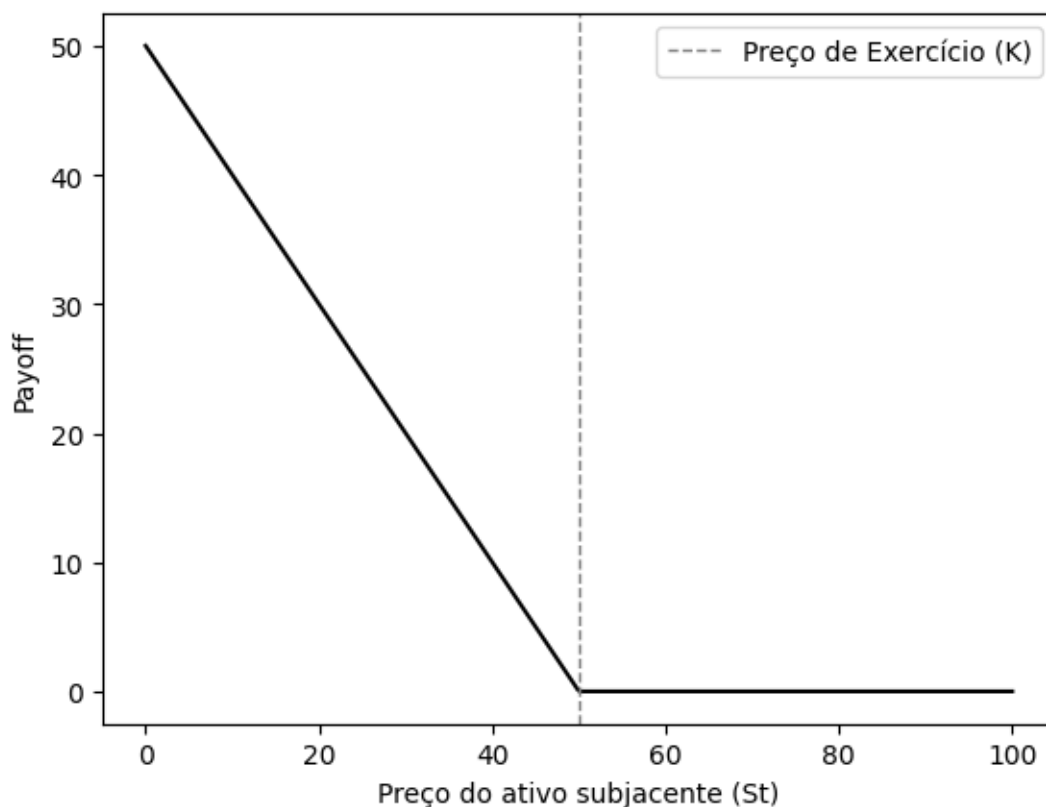
Por sua vez, o valor tempo de uma opção pode ser definido como a diferença entre o valor a ser pago pela opção - o prêmio - e seu valor intrínseco, de tal forma que se estabelece a identidade:

$$\text{Valor da Opção} = \text{Valor intrínseco} + \text{Valor tempo} \quad (1)$$

### 2.2.2 Relação com o preço de exercício

Diretamente relacionada com o valor intrínseco de uma opção está uma terminologia extremamente relevante e de uso corriqueiro que também diz respeito a relação

Figura 2 – Payoff de  $P_t: \max(K - S_t)$



Fonte: elaboração do autor

entre o atual preço do ativo subjacente e o preço de exercício da opção em questão. A respeito da distância entre o preço atual e o de exercício, em inglês conhecida como sua *moneyness*, uma opção pode ser caracterizada de três formas:

- “dentro-do-dinheiro” (*in-the-money*): opção com valor intrínseco maior que zero — isto é, que se exercida hoje teria *payoff* positivo;
  - Para uma opção de compra, essa relação é caracterizada por  $S_t > K$ ;
  - Para uma opção de venda, essa relação é caracterizada por  $S_t < K$ .
- “no-dinheiro” (*at-the-money*): opção com valor intrínseco nulo — isto é, que se exercida hoje teria *payoff* nulo;
  - Tanto para uma opção de compra quanto para uma opção de venda, essa relação é caracterizada por  $K = S_t$ .
- “fora-do-dinheiro” (*out-of-the-money*): opção com valor intrínseco negativo — se exercida hoje também teria *payoff* nulo;
  - Se diferencia de uma opção “no-dinheiro” por ter, para uma opção de compra  $S_t < K$  e para uma opção de venda  $S_t > K$ .

### 3 MÉTODOS MATEMÁTICOS EM DERIVATIVOS

Neste capítulo, abordaremos brevemente e com o grau de rigor julgado adequado algumas das ferramentas centrais para a derivação matemática proposta em Borland (2002a), que por sua vez nos permite similar capacidade de apresentar o modelo introduzido por Black e Scholes (1973), tanto como originalmente propostos quanto em adaptações posteriores.

O capítulo será organizado da seguinte forma. Inicialmente, descrevemos a existência de um ambiente estocástico — isto é, com perturbações aleatórias — e seu contraste com o ambiente determinístico mais familiar. Isso será feito com especial foco em apresentar o Lema de Ito, e sua justificação como serie de Taylor em ambiente estocástico. A apresentação formal do Lema de Ito, porém, só será feita após a descrição de alguns dos processos estocásticos mais relevantes — isto é, mais comumente utilizados na precificação de derivativos — assim como algumas das equações diferenciais estocásticas utilizadas que deles derivam. Por fim, serão apresentadas os dois métodos mais comuns de modelagem de derivativos — o método dos portfólios livres de risco e o método das medidas equivalentes de martingale.

A referência principal deste capítulo é a de Hirta e Neftci (2013), e para evitar repetições desnecessárias, referências serão feitas somente quando estritamente necessário.

#### 3.1 O AMBIENTE ESTOCÁSTICO

Em geral, os elementos que compõe o mercado financeiro não são determinísticos. As variáveis de interesse possuem variações caracteristicamente aleatórias, com exceção do tempo. No contexto da precificação de um derivativo, isso significa que seu ativo subjacente é, do ponto de vista matemático, uma variável aleatória, e portanto o derivativo assume mesma característica. Uma vez que o tempo é uma variável contínua, temos a necessidade de realizar operações matemáticas em tempo contínuo atuando sob variáveis com perturbações aleatórias. O conjunto de regras matemáticas sob esse ambiente, o conceito de risco assume papel central, é conhecido como cálculo estocástico.

Heuristicamente, podemos descrever a diferença entre os dois ambientes — determinístico e estocástico — ao tentar estimar o impacto de uma pequena variação do preço de um derivativo,  $F(S_t, t)$  ocasionada por uma pequena variação de seu ativo subjacente,  $S_t$ . A variação de preço do ativo subjacente,  $S_t$ , é, por sua vez, ocasionada por uma variação de tempo,  $t$ , essa sim determinística. Em ambiente determinístico, essa estimativa é conhecida como a derivada do derivativo em relação ao tempo, obtida por meio da “regra da cadeira”:

$$\frac{dF(S_t, t)}{dt} = \left( \frac{dF(S_t, t)}{dS_t} \right) \left( \frac{dS_t}{dt} \right) \quad (1)$$

Essa estimativa de cálculo determinístico é consequência da convenção de considerar todos os termos de uma série de Taylor

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx}(x - x_0) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d^2f(x_0)}{dx^2}(x - x_0)^2 \\ &+ \frac{1}{3!} \frac{d^3f(x_0)}{dx^3}(x - x_0)^3 \\ &+ R \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{d^i f(x_0)}{dx^i} (x - x_0)^i \end{aligned} \quad (2)$$

com ordem de magnitude  $((\Delta x)^2)$  ou maiores — ou seja, com expoentes maiores — como desprezíveis para a estimativa<sup>1</sup>.

Em um ambiente estocástico,  $x$  passa a ser uma variável aleatória, o que por sua vez significa que possui variância positiva

$$\mathbb{E}[(\Delta x)^2] > 0 \quad (3)$$

e, portanto, o mesmo uso da derivada de primeira ordem se torna, neste ambiente, inadequado ao propósito. Com isso, um natural candidato para a série de Taylor em ambiente estocástico é, simplesmente,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx}(\Delta x) + \frac{1}{2} \frac{d^2f(x_0)}{dx^2} \mathbb{E}[(\Delta x)^2] \quad (4)$$

no qual podemos substituir  $\mathbb{E}[(\Delta x)^2]$  por uma variável aleatória convergente a  $(\Delta x)^2$ . A forma definitiva será obtida quando da apresentação do Lema de Ito, tópico da seção 3.5.

A subseção abaixo possui como objetivo descrever a convergência média-

<sup>1</sup> A troca de variáveis  $(x - x_0) = \Delta x$  foi realizada para simplificar a notação, por se tratar de uma pequena variação em  $x$ .

quadrática. Comumente, se opta por obter uma variável aleatória  $x^*$  que tenha convergência média-quadrática em relação a  $x$  pois com isso, e com  $x^*$  *martingale*, os termos de ordem maior que  $(\Delta x)^2$  são desprezíveis sem suposições adicionais.

### 3.1.1 Convergência média-quadrática

Alguns resultados importantes a serem apresentados no âmbito do cálculo estocástico dependem de um entendimento da forma pela qual variáveis aleatórias convergem, isto é, de que e para que forma suas distribuições mudam conforme o intervalo é particionado em um numero maior de subintervalos.

Supondo uma sequência de variáveis aleatórias de  $n$  elementos,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , definimos que  $X_n$  converge de forma média-quadrática para  $X$  se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] = 0 \quad (5)$$

Isto é, na convergência média-quadrática a variância da diferença entre as variáveis  $X_n$  e  $X$  tende a zero. Temos, então, que conforme o parâmetro  $n$  tende a infinito, os valores assumidos por uma variável aleatória  $X_n$  podem ser aproximados pelos valores assumidos pela variável aleatória limite  $X$ .

## 3.2 MARTINGALES CONTÍNUOS

A forma específica que caracteriza a relação de um determinado processo estocástico,  $S_t$ , e diferentes expectativas que podem dele ser obtidas utilizando diferentes conjuntos de informações,  $I_t$ , possui papel central na precificação de derivativos e na modelagem dos retornos de seus ativos subjacentes. Nesse contexto, processos *martingales* contínuos<sup>2</sup> são amplamente utilizados por proporcionarem características desejáveis tanto do ponto de vista empírico quanto do ponto de vista matemático.

De forma geral, dizemos que um processo estocástico contínuo,  $S_t$ , é *martingale* em relação ao conjunto de informação,  $I_t$ , caso satisfaça:

- $S_t$  seja exatamente conhecido dado  $I_t$ ;
- Expectativas incondicionais são finitas —  $\mathbb{E}[S_t] < \infty$ ;
- A expectativa para o valor assumido pelo processo estocástico em um momento futuro,  $T$ , é o valor assumido no momento  $t$  — em notação matemática,  $P(\mathbb{E}[S_T] =$

<sup>2</sup> O conceito análogo existe em ambiente discreto.

$$S_t) = 1.$$

Então,  $S_t$  é dito *martingale* em relação ao conjunto de informações  $I_t$  caso para todo  $t < T$ , a melhor expectativa de  $S_T$  seja seu último valor observado  $S_t$ .

### 3.3 PROCESSOS ESTOCÁSTICOS RELEVANTES

Nesta seção, discorreremos sobre processos estocásticos relevantes para o ferramental de cálculo estocástico, especialmente no que diz respeito aos métodos matemáticos para precificação de derivativos.

#### 3.3.1 O Processo de Wiener

Processos de Wiener são processos estocásticos comumente utilizados para modelar incrementos aleatórios contínuos para preços de ativos.

##### 3.3.1.1 Processo de Wiener como somas de variáveis aleatórias i.i.d.

Podemos apresentar um Processo de Wiener como a soma de subsequentes variáveis aleatórias i.i.d.<sup>3</sup> Considerando uma variável aleatória,  $W_t$ , cujos incrementos (descorrelacionados),  $\Delta W_t$ , podem assumir os valores  $+\sqrt{h}$  ou  $-\sqrt{h}$  no intervalo

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T \quad (6)$$

no qual os subintervalos,  $t_i - t_{i-1}$ , possuem tamanho  $h$ ). Com isso, temos que conforme  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{h \rightarrow 0})$  a soma:

$$W_t = \sum_{i=1}^n \Delta W_{t_i} \quad (7)$$

converge fracamente para um processo de Wiener.

<sup>3</sup> Do inglês, *independent, identically distributed*. Isto é, soma de observações subsequentes de variáveis aleatórias com mesma distribuição de probabilidades.

### 3.3.1.2 Processos de Wiener como Martingales

Em relação a um conjunto de informação,  $I_t$ , um processo de Wiener,  $W_t$ , é um processo estocástico contínuo partindo de  $W_0 = 0$  tal que para os instantes  $t$  e  $s$  (com  $s \leq t$ ) vale que

$$\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] = t - s \quad (8)$$

### 3.3.1.3 Propriedades do processo de Wiener

O Teorema de Levy define que, sendo um processo contínuo, com variância finita e martingale em relação ao conjunto de informações  $I_t$ , processos de Wiener são normalmente distribuídos com média zero e variância  $\sigma^2 dt$

## 3.3.2 Movimento Browniano

O chamado Movimento Browniano,  $B_t$ , é uma forma explicitamente assumida para o processo de Wiener da seção anterior. Expressamente, é da seguinte forma:

- a) O processo é contínuo e começa em  $B_0 = 0$
- b) Incrementos aleatórios independentes e estacionários com média zero e variância  $|t - s|$

$$B_s - B_t \approx \mathcal{N}(0, |t - s|) \quad (9)$$

## 3.4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS RELEVANTES

Em relação a um determinado conjunto de informações ( $I_t$ ) disponíveis em um momento  $t$ , podemos construir uma equação diferencial estocástica (EDE) genérica

$$dS_t = a(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t \quad (10)$$

entendida como uma simplificação de notação em relação à integral de Ito, discutida mais amplamente na seção (3.5)



$$\int_t^{t+h} dS_u = \int_t^{t+h} a(S_u, u) du + \int_t^{t+h} \sigma(S_u, u) dW_u \quad (11)$$

É importante observar que para a construção dessa forma geral de equação diferencial estocástica nenhuma suposição de teoria de finanças foi utilizada. O desenvolvimento foi realizado unicamente segmentando o incremento de um preço (variável aleatória) em componentes determinísticos e estocásticos.

Com essa forma geral, diferentes definições para o conjunto de informações,  $I_t$ , e para o processo de Wiener,  $dW_t$ , podem ser utilizadas de modo a explorar inúmeros fatos estilizados atribuídos a ativos financeiros. As seguintes subseções serão dedicadas a apresentar algumas classes de EDEs para a modelagem e precificação de derivativos, observando que todas elas respeitam a condição de variação limitada dos parâmetros  $a(S_t, t)$  e  $\sigma(S_t, t)$ .

### 3.4.1 EDE Linear de Coeficientes Constantes

Com parâmetros de tendência e difusão constantes e independentes do conjunto de informações disponíveis  $I_t$ , assume a forma:

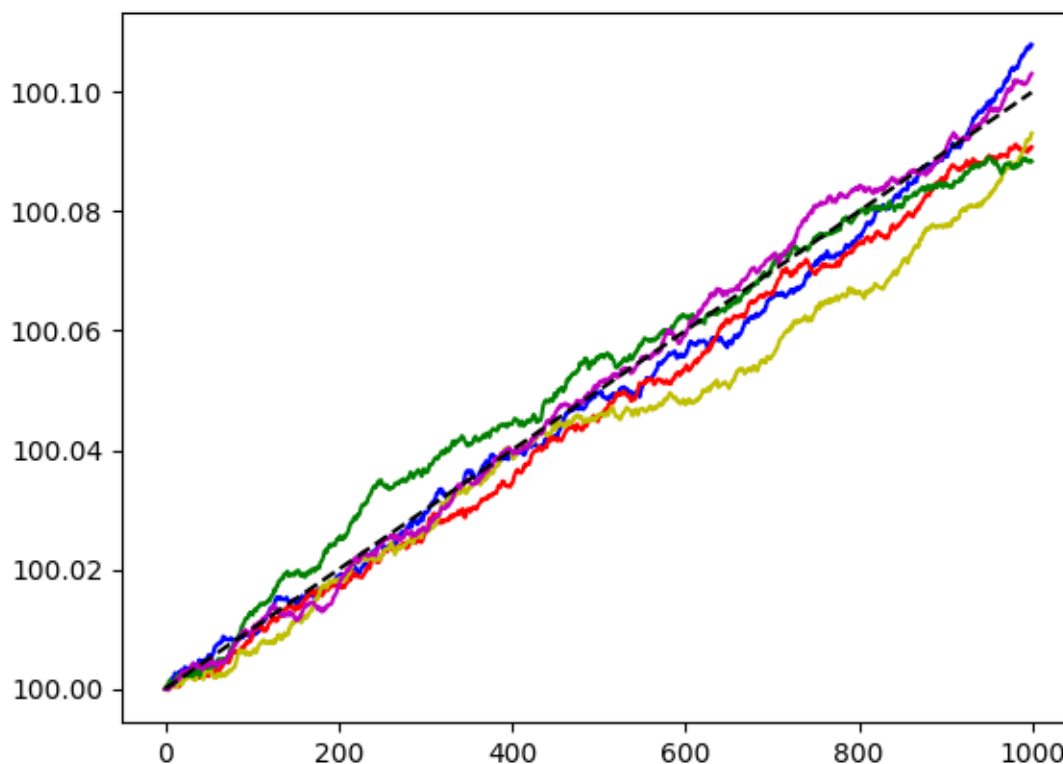
$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t \quad (12)$$

onde por definição os termos  $\mu$  e  $\sigma$  não são acompanhados pelo subscripto denotando tempo, uma vez que dele independem. Assim, seu comportamento se resume a flutuações de magnitude inalterada ao longo do tempo em torno de uma reta com inclinação dada pelo parâmetro  $\mu$ , conforme apresentado na Figura 3.

### 3.4.2 EDE Geométrica

Com termos de tendência e difusão dependentes da informação disponível em  $I_t$  - mais precisamente, dependentes do nível do preço  $S_t$  no momento  $t$  -, esses processos geométricos são os explorados por (BLACK; SCHOLES, 1973) para a dinâmica da ação subjacente. É da forma

Figura 3 – EDE Linear de Coeficientes Constantes



Fonte: elaboração do autor

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (13)$$

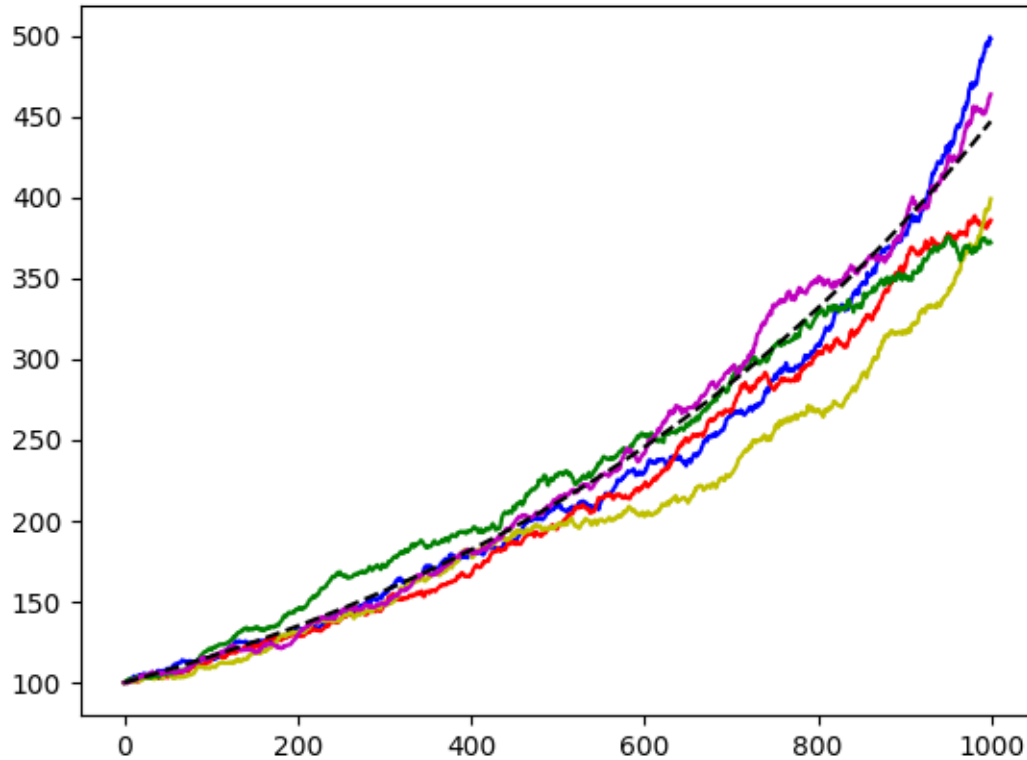
ou, alternativamente,

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (14)$$

onde o lado direito da equação preserva a forma descrita na subseção anterior, referente às EDEs Lineares de Coeficientes Constantes. Sua notação alternativa também esclarece que, uma vez entendida como uma equação para os retornos ( $\frac{dS_t}{S_t}$ ), os parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$  retomam a independência em relação a  $t$ .

Esse modelo descreve preços que oscilam em torno de uma tendência exponencial, o que pode ser uma caracterização mais realista para determinados ativos, vide Figura 4. Cabe notar, porém, que sua variância se amplia de acordo com o quadrado

Figura 4 – EDE Geométrica



Fonte: elaboração do autor

dos preços  $S_t$ ,

$$V[S_k - S_{k-1}] = \sigma(S_{k-1}, k-1)^2 S_{k-1}^2 \quad (15)$$

podendo criar incompatibilidades.

### 3.4.3 *Square-Root* EDE

Para contornar a incompatibilidade de variações que escalam em proporção ao quadrado dos níveis de preços, o modelo proposto pela *Square-Root* EDE propõe a seguinte (e simples) dinâmica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma \sqrt{S_t} dW_t \quad (16)$$

Assim, se mantém a tendência exponencial para os preços enquanto as variações escalam de forma proporcional ao preço (e não ao seu quadrado). Se perde, contudo, a interpretação comum de desvio-padrão percentual do parâmetro  $\sigma$ .

### 3.5 LEMA DE ITÔ

As últimas seções trataram da inadequação dos resultados do cálculo determinístico em universos estocásticos por meio das dificuldades da integração nesse ambiente e por meio das convenções para a determinação do caráter desprezível de uma variável na interpretação de sua convergência em média quadrática. Devido à inadequação do método de integração e diferenciação do cálculo determinístico no contexto dos processos estocásticos de interesse, o Lema de Itô, análogo estocástico da regra da cadeia, adquire papel central na matemática dos instrumentos financeiros.

Para um dado processo estocástico contínuo,  $S_t$ , definido no conjunto discreto  $k = 1, 2, \dots, n$  e dependente do processo de Wiener,  $W_t$ , da forma:

$$S_k = a_k h + \sigma_k dW_k \quad (17)$$

no qual os termos  $a_t$  e  $\sigma_t$  são abreviações dos parâmetros temporais  $a(S_{k-1}, k)$  e  $\sigma(S_{k-1}, k)$ , determinados dado o conjunto de informações  $I_{k-1}$ , e  $h$  é um pequeno intervalo de tempo. Com isso, temos interesse em aproximar o valor de uma função,  $F(S_t, t)$ , em torno de um pequeno intervalo  $h$  do momento  $k$ . Para isso, utilizamos a série de Taylor da função  $F(S_t, t)$  truncada nos termos de segunda ordem, observando novamente que essa aproximação é válida no sentido médio-quadrático.

$$\begin{aligned} \Delta F(S_k, k) &= \left( \frac{\partial F(S_t, t)}{\partial S_t} \right) [\alpha_k h + \sigma_k \Delta W_k] + \left( \frac{\partial F(S_t, t)}{\partial t} \right) [h] \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F(S_t, t)}{\partial S_t^2} \right) [\alpha_k h + \sigma_k \Delta W_k]^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F(S_t, t)}{\partial t^2} \right) [h]^2 \\ &+ \frac{\partial^2 F(S_t, t)}{\partial S_t \partial t} [(\alpha_k h + \sigma_k \Delta W_k)(h)] + R \end{aligned} \quad (18)$$

onde  $R$  é um termo de resto que agrupa as derivadas de ordem maior que dois.

A insignificância dos termos da série de Taylor acima é definida para uma função  $g(S_t, t)$  de uma variável aleatória dependente de um processo de Wiener,  $W_t$ , quando o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(S_t, t)}{h} = 0 \quad (19)$$

se anula.

Os termos de primeira ordem da série de Taylor são não-desprezíveis no limite médio-quadrático do processo estocástico. Os termos envolvendo a derivada parcial de  $F$  em relação a  $S_t$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial F(S_t, t)}{\partial S_t} \alpha_k h}{h} &= \frac{\partial F(S_t, t)}{\partial S_t} \alpha_k \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial F(S_t, t)}{\partial S_t} \sigma_k \Delta W_k}{h} &= \frac{\frac{\partial F(S_t, t)}{\partial S_t} \sigma_k}{\sqrt{h}} \end{aligned} \quad (20)$$

são não-nulos. O segundo resultado é possível seguindo as seções anteriores onde vimos que os incrementos de um processo de Wiener são de ordem de magnitude  $\sqrt{h}$ . Os termos envolvendo a derivada parcial  $\frac{\partial F(S_t, t)}{\partial t}$ , de forma consistente com o caráter determinístico da variável tempo, também não se anulam no limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial F(S_t, t)}{\partial t} h}{h} = \frac{\partial F(S_t, t)}{\partial t} \quad (21)$$

Para os termos de segunda ordem, observamos que a segunda derivada de  $F(S_t, t)$  em relação ao tempo é desprezível por conta do caráter determinístico da variável tempo. Formalmente, podemos observar que o limite

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(S_t, t)}{\partial t^2} h^2}{h} = 0 \quad (22)$$

se anula uma vez que é proporcional a  $h$ . O termo envolvendo a segunda derivada de  $F(S_t, t)$  em relação a  $S_t$ , por sua vez, envolve termos desprezíveis e não-desprezíveis. Expandindo o quadrado, temos ele reescrito como:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(S_t, t)}{\partial S_t^2} \left[ \frac{\alpha_k^2 h^2}{h} + \frac{(\sigma_k \Delta W_k)^2}{h} + \frac{2\alpha_k \sigma_k h \Delta W_k}{h} \right] \quad (23)$$

Partindo dos termos da direita, observamos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(S_t, t)}{\partial S_t^2} \right) \frac{\alpha_k^2 h^2}{h} = 0 \quad (24)$$

por ser proporcional a  $h$ . Já o limite do termo intermediário

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(S_t, t)}{\partial S_t^2} \right) \frac{(\sigma_k \Delta W_k)^2}{h} \quad (25)$$

envolve o termo  $(\sigma_k \Delta W_k)^2$ . Demonstramos na seção 3.3.1 que  $\mathbb{V}[\sigma_k \Delta W_k] = \sigma_k^2 h$ .

O termo restante, tal qual a derivada cruzada da regra de Taylor, é um produto cruzado, e é portanto considerado desprezível<sup>4</sup>. Os termos no termo de resto  $R$ , são igualmente desprezíveis, uma vez que um processo de Wiener e *martingales* contínuos possuem momentos de ordem maior que dois nulos. Assim sendo, restam como não-desprezíveis (no sentido de convergirem de forma média-quadrática a zero) envolvendo a segunda derivada de  $F(S_t, t)$  em relação a  $S_t$ :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(S_t, t)}{\partial S_t^2} \left[ \frac{\alpha_k^2 h^2}{h} + \frac{(\sigma_k \Delta W_k)^2}{h} + \frac{2\alpha_k \sigma_k h \Delta W_k}{h} \right] \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(S_t, t)}{\partial S_t^2} \sigma_k^2 \quad (26)$$

O Lema de Itô, então, nos diz que, em um momento  $t$ :

$$dF_t = \frac{\partial F}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} dt \quad (27)$$

O diferencial ainda pode ser reescrito em termos de seu processo estocástico característico, de tal modo que,

$$dF_t = \left[ \frac{\partial F}{\partial S_t} \mu_t + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} \right] dt + \frac{\partial F}{\partial S_t} \sigma_t dW_t \quad (28)$$

<sup>4</sup> O fato dos termos cruzados serem desprezíveis é consequência do caráter contínuo dos processos de Wiener. Pode-se observar que todos eles serão o processo estocástico característico (ou alguma potência dele) multiplicados por  $h$ .

### 3.6 MÉTODOS GERAIS DE PRECIFICAÇÃO DE DERIVATIVOS

Em geral, pode-se precificar derivativos de duas formas específicas:

1. Construindo portfólios livre de risco - isto é, cuja parcela aleatória dos retornos é eliminada por meio de uma escolha específica de pesos para um portfólio contendo diferentes ativos - e deles obter equações diferenciais parciais determinísticas;
2. Construindo diretamente as chamadas medidas equivalentes de martingale, sob diferentes distribuições de probabilidades.

As próximas subseções serão destinadas a desenvolver essas duas possibilidades primeiro heurísticamente e, quando plausível, formalmente.

#### 3.6.1 Portfólios livres de risco

Uma vez desenvolvida a equação diferencial estocástica

$$dS_t = a(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t \quad (29)$$

que rege as flutuações de um determinado ativo ao longo do tempo, e considerando que temos como instrumental o cálculo de Itô para a derivação de equações diferenciais estocásticas, podemos usar o Lema de Itô<sup>5</sup>

$$dF_t = \frac{\partial F_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial F_t}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t^2} dt \quad (30)$$

para achar a equação diferencial estocástica para a dinâmica de um portfólio

$$P_t = \theta_1 F_t + \theta_2 S_t \quad (31)$$

composto por um derivativo,  $F_t$  e seu ativo subjacente,  $S_t$ , onde o par  $(\theta_1, \theta_2)$  representa as respectivas proporções da alocação dos recursos do portfólio entre os ativos  $F_t$  e  $S_t$ .

<sup>5</sup> Para simplificação de notação, trataremos a partir daqui  $F(S_t, t)$ ,  $a(S_t, t)$  e  $\sigma(S_t, t)$  simplesmente como  $F_t$ ,  $a_t$  e  $\sigma_t$ .

Sendo o derivativo,  $F_t$ , um instrumento cujo retorno no vencimento,  $T$ , é determinado unicamente pelo nível do ativo subjacente,  $S_T$  no vencimento

$$F_T = G(S_T, T) \quad (32)$$

podemos observar que na EDE que descreve os incrementos do portfólio  $P_t$

$$dP_t = \theta_1 \left[ \frac{\partial F_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial F_t}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 F_t}{\partial t^2} dt \right] + \theta_2 dS_t \quad (33)$$

é possível escolher um par  $(\theta_1, \theta_2) = (1, -\frac{\partial F_t}{\partial S_t})$  tal que os termos contendo  $dS_t$  se anulam,

$$dP_t = F_t dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_t}{\partial t^2} \sigma_t^2 dt \quad (34)$$

anulando por consequência os termos envolvendo o processo de Wiener,  $dW_t$ , e toda fonte de incerteza. É preciso notar que isso só foi possível por conta de duas simplificações fundamentais: assumimos que  $\frac{\partial F_t}{\partial S_t}$  não é função de  $S_t$ ; ignoramos, como formalmente necessário, a condição de auto-financiamento do portfólio, considerando  $\theta_1 > 0$ , caracterizando dispêndio no momento da aquisição.

Mesmo assim, com essa construção podemos observar que, em não possuir termo estocástico, a condição de não-arbitragem nos dá para um portfólio  $P_t$  que seu retorno é da forma:

$$dP_t = rP_t dt \quad (35)$$

onde  $r$  é a taxa de retorno livre de risco. Em outras palavras, não existindo risco, o retorno do portfólio há de ser o retorno livre de risco. Assim, podemos concluir que a dinâmica para o portfólio nos induz à

$$rP_t dt = F_t dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t^2} \sigma_t^2 dt \quad (36)$$

onde podemos observar que o portfólio  $P_t$  também pode ser caracterizado em termos



da equação original e seus pesos dados  $(\theta_1, \theta_2) = (1, -\frac{\partial F_t}{\partial S_t})$

$$r \left[ F(S_t, t) - \frac{\partial F_t}{\partial S_t} S_t \right] = \frac{\partial F_t}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 dt \quad (37)$$

sendo essa sua equação diferencial parcial característica e

$$F(S_T, T) = G(S_T, T) \quad (38)$$

sua condição final, dada pela sua forma fundamental no vencimento,  $T$ .

### 3.6.2 Medidas equivalentes de Martingale

Ao desenvolver ou aplicar um modelo de precificação de derivativos, eventualmente pode-se optar por um caminho distinto do tradicional método de criação de portfólios não-arbitráveis. Nomeadamente, pode-se trabalhar diretamente com as distribuições dos retornos dos ativos subjacentes. Um problema imediato ao adotar essa abordagem é o da existência de prêmios de risco - isto é, da existência de um retorno esperado,  $\mu$ , tal que

$$\frac{1}{1 + r_t} \mathbb{E}[S_{t+1}] = S_t(1 + \mu) \quad (39)$$

#### 3.6.2.1 Teorema de Girsanov

Nesse contexto, o Teorema de Girsanov nos fornece o instrumental para a transformação de uma medida de probabilidade em outra equivalente, chamada nesse objetivo específico de risco-neutra. Sob essa nova medida de probabilidade podemos tratar um ativo cuja expectativa de retorno contém um prêmio de risco não-nulo como um ativo livre de risco.

Em outras palavras, o teorema propõe sob quais condições para um determinado processo estocástico contínuo  $z_t$  podemos encontrar uma função  $\xi(z_t)$  que permita a transformação de uma medida de probabilidade  $P$  para a nova medida risco-neutra  $Q$

$$dQ(z_t) = \xi(z_t)dP(z_t) \quad (40)$$

transformação essa que assume forma notavelmente útil quando reescrita como:

$$\frac{dQ(z_t)}{dP(z_t)} = \xi(z_t) \quad (41)$$

conhecida como derivada de Radon-Nikodym. Intuitivamente, essa derivada caracteriza a função  $\xi$  em um valor possível  $z_t$  como a razão entre as distribuições transformada e original.

### 3.6.2.1.1 Proposição do Teorema de Girsanov

Dado um intervalo finito  $[0, t]$ , podemos definir o conjunto de informações  $I_t$  e o processo estocástico

$$\xi_t = e^{\int_0^t X_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t X_u^2 du} \quad (42)$$

onde  $X_t$  é conhecido exatamente uma vez conhecido  $I_t$  e, por sua vez,  $W_t$  é um processo de Wiener com distribuição de probabilidade P.

Adicionalmente,  $X_t$  tem a magnitude de sua variação limitada em

$$\mathbb{E}[e^{\int_0^t X_u^2 du}] < \infty \quad (43)$$

em condição conhecida como condição de Novikov. Satisfeita essa condição,  $\xi_t$  é martingale quadrado integrável (*square integrable*, em inglês).

Com isso, sendo  $\xi_t$

$$\xi_t = e^{\int_0^t X_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t X_u^2 du} \quad (44)$$

um processo martingale em relação a  $I_t$  e em relação a distribuição de probabilidade P, pode-se definir um novo processo de Wiener

$$W_t^* = W_t - \int_0^t X_u dW_u \quad (45)$$

em relação a  $I_t$  e sua (nova) respectiva distribuição de probabilidade  $Q$

$$Q(A) = \mathbb{E}^P(1_A \xi_t) \quad (46)$$

onde  $1_A$  representa uma função que assume valor 1 caso o evento  $A$  ocorra.

Os dois processos são vinculados por

$$dW_t^* = dW_t - X_t dt \quad (47)$$

### 3.7 MEDIDAS EQUIVALENTES DE MARTINGALE

Vimos que para calcular o preço não arbitrável de uma opção de compra europeia,  $C_t$ , podemos adotar dois caminhos. Podemos formar um portfólio livre de risco com pesos<sup>6</sup> dinâmicos na ação subjacente  $S_t$  e em  $C_t$ , com as quais obtemos uma equação diferencial parcial para os retornos - que, com a condição final dada pelo valor de  $C_T$ , é suficiente para obtermos os preços corretos. Alternativamente, podemos usar os métodos equivalentes de Martingale para construir uma medida de probabilidade sintética  $Q$  tal que,

$$C_t = \mathbb{E}^Q \left[ e^{r(T-t)} [\max(S_T - K, 0)] \right] \quad (48)$$

isto é, definir uma medida  $Q$  com a qual o preço da opção de compra  $C_t$  se torne a expectativa do seu *payoff* descontado pela taxa livre de risco. As próximas subseções são destinadas a formalizar ferramentas intermediários e, por fim, demonstrar a forma de obtenção dessas novas medidas de probabilidade.

<sup>6</sup> Subdivisões da exposição do portfólio em cada ativo

### 3.7.1 Função geradora de momentos

Sendo  $Y_t$ , com  $Y_0$  dado, um processo contínuo da forma

$$Y_t \approx N(\mu t, \sigma t) \quad (49)$$

com o qual podemos definir o processo contínuo  $S_t$  que, com  $S_0$  dado, é tal que

$$S_t = S_0 e^{Y_t} \quad (50)$$

Com isso, a função geradora de momento para o processo  $Y_t$ ,  $M(\lambda)$ , é uma função envolvendo  $Y_t$  e um parâmetro arbitrário  $\lambda$  tal que

$$M(\lambda) = \mathbb{E} \left[ e^{\lambda Y_t} \right] \quad (51)$$

Para sua obtenção, observamos que, pela definição dada em (49), a distribuição de  $Y_t$  é conhecida e podemos calcular explicitamente sua esperança integrando

$$\mathbb{E} \left[ e^{\lambda Y_t} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda Y_t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(Y_t - \mu t)^2}{\sigma^2 t}} dY \quad (52)$$

A expressão à direita da igualdade pode ser simplificada agrupando os expoentes

$$\mathbb{E} \left[ e^{\lambda Y_t} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(Y_t - \mu t)^2}{\sigma^2 t} + \lambda Y_t} dY \quad (53)$$

Podemos, ainda, multiplicar o lado direito da equação por

$$e^{-(\lambda\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t \lambda^2)} e^{(\lambda\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t \lambda^2)} \quad (54)$$

propositalmente escolhidos para que a expressão resultante

$$\mathbb{E} \left[ e^{\lambda Y_t} \right] = e^{(\lambda \mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t \lambda^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(Y_t - \mu t)^2}{\sigma^2 t} + \lambda Y_t - (\lambda \mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t \lambda^2)} dY \quad (55)$$

possa ter como expoente da função exponencial integrada um quadrado perfeito, podendo, portanto, ser reescrita como

$$\mathbb{E} \left[ e^{\lambda Y_t} \right] = e^{(\lambda \mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t \lambda^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(Y_t - (\mu t + \sigma^2 t \lambda))^2}{\sigma^2 t}} dY \quad (56)$$

Por fim, podemos observar que estamos integrando a densidade de uma variável aleatória normalmente distribuída. Ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(Y_t - (\mu t + \sigma^2 t \lambda))^2}{\sigma^2 t}} dY = 1 \quad (57)$$

Assim, obtemos o importante resultado que a expectativa para a exponencial de um processo generalizado de Wiener,  $Y_t$ , é dada por:

$$M(\lambda) = \mathbb{E} \left[ e^{\lambda Y_t} \right] = e^{(\lambda \mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t \lambda^2)} \quad (58)$$

A função  $M(\lambda)$  nos permite, quando obtida sua  $k$ -ésima derivada, e essa por sua vez é avaliada em  $\lambda = 0$ , obter o  $k$ -ésimo momento da função  $Y_t$ .

### 3.7.2 Expectativa condicional de um processo geométrico

Nos métodos equivalentes de Martingale, é comum precisarmos avaliar a expectativa condicional

$$\mathbb{E}[S_t | S_u, u < t] \quad (59)$$

do processo geométrico  $S_t$  descrito em (50). Como  $S_u$  é conhecido no momento  $u$ , podemos, considerando o processo estocástico em questão, observar que

$$\mathbb{E} \left[ \frac{S_t}{S_u} | S_u \right] = \mathbb{E} \left[ e^{\Delta Y_t} | S_u \right] \quad (60)$$

onde  $\Delta Y_t^7$  é dado por

$$\Delta Y_t \sim \mathcal{N} \left( \mu(t-s), \sigma^2(t-s) \right) \quad (61)$$

Nesse ponto, podemos utilizar a função geradora de momentos  $M(\lambda)$ , avaliada em  $\lambda = 1$ , para obtermos

$$\mathbb{E} \left[ \frac{S_t}{S_u} | S_u \right] = e^{\mu(t-s) + \frac{1}{2}\sigma^2(t-s)} \quad (62)$$

Por fim, podemos multiplicar os dois lados por  $S_u$  para obtermos

$$\mathbb{E}[S_t | S_u] = S_u e^{\mu(t-s) + \frac{1}{2}\sigma^2(t-s)} \quad (63)$$

### 3.7.3 Conversão de preços em martingales

Dizemos que  $\mathbb{P}$  é a medida de probabilidade real de um processo estocástico como o definido em 50. É verdade, em geral, que se  $S_t$  não é livre de risco, temos que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ e^{-rt} S_t | S_u, u < t \right] \neq e^{-ru} S_u \quad (64)$$

Mais comum é observarmos um prêmio de risco positivo tal que, especificamente

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ e^{-rt} S_t | S_u, u < t \right] < e^{-ru} S_u \quad (65)$$

A ideia fundamental do método de medidas (de probabilidade) equivalentes de Martingale é alterar o termo de tendência do processo descontado  $Z_t$

<sup>7</sup> Para isso, precisamos observar que é sempre verdadeiro que  $Y_t = Y_s + \int_s^t dY_u$ , e portanto os incrementos são independentes de um dado  $Y_s$

$$Z_t = e^{-rt} S_t \quad (66)$$

de tal forma que, sob certas condições, a variável resultante possa ter uma nova medida de probabilidade  $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-rt} S_t | S_u, u < t] = Z_u \quad (67)$$

Pela definição de um processo martingale, o termo de tendência de  $Z_t$  dado  $Z_u$  se anula quando da troca do processo de ruído original  $W_t$  para o novo  $W_t^*$ .

Para determinar  $\mathbb{Q}$ , tal que o processo (50) se torne Martingale sob essa nova medida, definimos

$$Y_t \sim \mathcal{N}(\rho t, \sigma^2 t) \quad (68)$$

observando que  $\mathbb{Q}$ , em relação a medida de probabilidade real  $\mathbb{P}$ , mantém forma e parâmetros iguais com exceção do termo de difusão que passa a ser  $\rho t$ . Com isso, podemos avaliar a expectativa condicional do processo (50) sob a nova medida  $\mathbb{Q}$  utilizando novamente  $M(\lambda)$  da equação (58)

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r(t-u)} S_t | S_u, u < t \right] = S_u e^{-r(t-u)} e^{-r\rho(t-u) + \frac{1}{2}\sigma^2(t-u)} \quad (69)$$

Com a qual podemos observar que escolhendo

$$\rho = r - \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (70)$$

os expoentes do lado direito da equação (69) se anulam de tal forma que  $Z_t$  anteriormente definido se torna Martingale sob a nova medida de probabilidade  $\mathbb{Q}$

$$Y_t \sim \mathcal{N}\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right) \quad (71)$$

Isto é, se diferenciando da medida de probabilidade sob  $\mathbb{P}$  unicamente pelo

primeiro momento de cada uma das distribuições.

### 3.7.4 Medidas de probabilidade e suas EDES

A definição da medida de probabilidade  $\mathbb{Q}$ , vimos, foi feita com o propósito de obter um processo estocástico martingale com um novo processo de Wiener  $dW_t^*$ . É interessante, por isso, contrastarmos os dois processos estocásticos de modo a elucidar as diferenças obtidas.

Lembramos que, sob  $\mathbb{P}$ ,  $S_t$  era dado por

$$S_t = S_0 e^{Y_t} \quad (72)$$

no qual o processo  $Y_t$  era definido sob a medida de probabilidade  $\mathbb{P}$ , cuja EDE era representada por

$$dY_t = \mu dt + \sigma dW_t \quad (73)$$

Na seção (3.5), obtivemos a expressão (28) para a derivação no sentido estocástico (de Ito) de uma função  $F(S_t, t)$  de um processo estocástico  $S_t$ . Da mesma forma,  $S_t$  definido nas expressões (72) e (73) também é uma função de um processo estocástico conhecido,  $Y_t$ . Assim, podemos descrever a EDE de  $S_t$  por meio do Lema de Ito (28)

$$dS_t = S_t \left[ \mu dt + \frac{1}{2} \sigma^2 \right] dt + S_t \sigma dW_t \quad (74)$$

Para obter a EDE do mesmo processo sob a medida  $\mathbb{Q}$ , retomamos que a distribuição de probabilidades se diferencia unicamente pelo seu primeiro momento —  $\mu$ , para  $\mathbb{P}$ ;  $\rho = r - \frac{1}{2} \sigma^2$ , sob  $\mathbb{Q}$ . Dessa forma, com os mesmos passos podemos simplesmente substituir  $\mu$  por  $\rho$  para obtermos a EDE

$$dS_t = rS_t dt + S_t \sigma dW_t^* \quad (75)$$

Ao obter a nova EDE para  $dS_t$  por meio de uma medida equivalente martingale



para o processo descontado  $Z_t = e^{-rt} S_t$ , temos que o processo  $dS_t$  tem como termo de tendência a taxa livre de risco,  $r$ , conhecida ex-ante.

## 4 O MODELO DE BLACK, SCHOLES E MERTON

Neste capítulo, abordaremos a celebrada solução atribuída a Fischer Black, Myron Scholes e Robert Merton, cuja publicação original foi dada em Black e Scholes (1973) para a precificação de opções. A precificação resultante é celebrada até hoje como um dos avanços seminais de finanças, principalmente por conta da robustez de suas hipóteses, por meio das quais foi possível suprimir de parâmetros arbitrários existente nas propostas de então.<sup>1</sup>

O capítulo será dividido em apresentar a solução proposta pelos autores em sua forma original, por meio da criação de portfólios livres de risco, e em sua forma alternativa, via medidas equivalentes de martingale<sup>2</sup>.

### 4.1 A SOLUÇÃO DE BLACK E SCHOLES VIA PORTFÓLIOS LIVRES DE RISCO

Nesta seção, desenvolveremos a solução original para a precificação de opções de ações realizada por Black e Scholes (1973) que utiliza o método dos portfólios livres de risco.

#### 4.1.1 Hipóteses - Condições ideais para o mercado do ativo subjacente e da opção

A construção original da precificação de opções europeias feita em Black e Scholes (1973) tem como suposição principal a de não arbitragem. Por essa razão, a precificação se dá supondo a existência de um portfólio composto por uma opção de compra europeia, um ativo livre de risco e a ação subjacente que, em equilíbrio, deve proporcionar ao seu detentor o retorno livre de risco. Especificamente, a forma fechada para uma opção de compra europeia de um ativo,  $S_t$ , que não paga dividendos é válida em condições hipotéticas<sup>3</sup> para o mercado (e especificamente para o conjunto de informações disponíveis no momento  $t$ ,  $I_t$ ). Precisamente, supomos que:

- a) Conhecemos a taxa livre de risco,  $r$ , que é constante (é não estocástica) para o intervalo ( $t \rightarrow T$ );

<sup>1</sup> Em Black e Scholes (1973), os autores destacam esse feito específico como o principal avanço de suas formas fechadas para os preços, contrastando com autores como Samuelson (1965), que obtiveram resultados no espírito do modelo de precificação de ativos CAPM. É de se destacar que a principal dificuldade de modelos dessa classe é a existência de um termo  $\alpha$  que representa o retorno esperado para o ativo subjacente. Isso, claro, remove essa classe de soluções daquelas que buscam soluções via a presunção de não arbitragem, como a que veremos nesse capítulo.

<sup>2</sup> Essa solução é chamada de alternativa pois não estava no conteúdo original dos autores. Os resultados, porém, são idênticos, mudando somente a metodologia de obtenção.

<sup>3</sup> No artigo, os autores tratam essas condições como “ideais”.

- b) A EDE para os retornos é da forma  $dS_t = S_t [\mu dt + \sigma dW_t]$  (3.4.2), com  $\sigma$  conhecido e constante para o intervalo. Ou seja, a trajetória para o preço do ativo possui variância proporcional a  $S_t^2$  e a distribuição para os preços no vencimento,  $S_T$ , é lognormal;
- c) Não existem custos de transação, significando que é possível comprar e vender qualquer fração de quantidade de ações e que não existem penalidades para posições vendidas.

Essas premissas são suficientes para garantir que o preço a ser calculado da opção dependa somente do preço,  $S_t$ , do tamanho do intervalo de tempo,  $t \rightarrow T$ , e de parâmetros (como  $\sigma$ , por exemplo). Mais especificamente, somente o preço da ação,  $S_t$ , é variável estocástica nesse cenário, por meio do termo aleatório  $dW_t$  de sua EDE característica.

Algumas dessas hipóteses foram posteriormente relaxadas sem deterioração significativa dos resultados propostos pelo modelo. Perceberemos, posteriormente, a condição de não distribuição de dividendos pode ser relaxada com pouco prejuízo das formas analíticas funcionais resultantes. Por sua vez, a hipótese (1.) pode ser relaxada usando entendimentos mais sofisticados da estrutura a termo da taxa de juros e formas estocásticas específicas para seu comportamento.<sup>4</sup>

#### 4.1.2 Portfólios livres de risco

Na seção (3.6.1), demonstramos como portfólios compostos por um derivativo,  $F(S_t, t)$ , e seu ativo subjacente,  $S_t$ , pode, em condições específicas, ter seus pesos definidos de modo a eliminar a aleatoriedade de seus retornos. No contexto da seção, é por meio do Lema de Itô, definido na seção (3.5), que podemos observar precisamente qual par de pesos  $(\theta_1, \theta_2)$  é capaz de anular o termo aleatório  $dW_t$  da EDE característica do ativo subjacente.

Em Black e Scholes (1973) tal portfólio é proposto a partir da observação que, dadas as hipóteses da seção (4.1.1), um portfólio composto por uma ação,  $S_t$ , e  $-\frac{1}{\partial C_t / \partial S_t}$ <sup>5</sup> opções possui a propriedade de não ter seu valor alterado para um movimento pequeno  $dS_t$  no preço do ativo subjacente. Se esse portfólio for reajustado continuamente conforme  $t$  e  $S_t$  oscilam, seu retorno se torna livre de risco.<sup>6</sup>

Em geral, temos que o portfólio

<sup>4</sup> A construção alternativa do modelo para os retornos das ações subjacentes de (BORLAND, 2002a), é, claro, o contraponto ao item (ii) em questão.

<sup>5</sup> Em outras palavras, vendido a descoberto em  $\frac{1}{\partial C_t / \partial S_t}$  opções

<sup>6</sup> Mais ainda, intervalos de ajuste discretos, se pequenos, possuem risco de igual magnitude e que podem ser mitigados entre si por meio da construção de diversos desses portfólios de ajuste discreto.

$$P_t = S_t - \left( \frac{1}{\partial C_t / \partial S_t} \right) C_t \quad (1)$$

tem sua oscilação em um intervalo pequeno de tempo  $dt$  dada por:

$$dP_t = dS_t - \left( \frac{1}{\partial C_t / \partial S_t} \right) dC_t \quad (2)$$

Em (28), vimos que  $dC_t$  é dado por:

$$dC_t = \frac{\partial C_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} v^2 S_t^2 dt + \frac{\partial C_t}{\partial t} dt \quad (3)$$

onde o termo  $v^2 S_t^2$  retoma o papel de  $\sigma^2$  explicitamente demonstrando que a variância é proporcional ao quadrado de  $S_t$ , como vimos na seção (3.4.2). Assim, o retorno do portfólio (1) é dado por:

$$\frac{- \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} v^2 S_t^2 + \frac{\partial C_t}{\partial t} \right) dt}{\partial C_t / \partial S_t} \quad (4)$$

Um portfólio cujo retorno é certo é, por definição, livre de risco. Desse modo, para que não existam oportunidades de arbitragem, é necessariamente válido que:

$$\frac{- \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} v^2 S_t^2 + C_t \right) dt}{\partial C_t / \partial S_t} = r \left( S_t - \frac{C_t}{\partial C_t / \partial S_t} \right) dt \quad (5)$$

condição essa difundida em diversos autores de finanças, mas comumente atribuída a Sharpe (1964) e Markowitz (1952). Com essa forma, eliminando os termos  $dt$  e reagrupando, podemos obter a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial C_t}{\partial t} = rC_t - rS_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} - \frac{1}{2} v^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} \quad (6)$$

para a qual retomamos que, no vencimento,  $T$ , uma opção de compra com preço de exercício  $K$  deve valer

$$C_T = \max [S_T - K, 0] \quad (7)$$

sendo essa a condição terminal da EDP.

Por fim, em Black e Scholes (1973) é proposta a substituição de variáveis

$$C_t = e^{r(t-T)} y \left[ \left( \frac{2}{v^2} \right) \left( r - \frac{1}{2} v^2 \right) \left[ \log \left( \frac{S_t}{K} \right) - \left( r - \frac{1}{2} v^2 \right) (t - T) \right] - \left( \frac{2}{v^2} \right) \left( r - \frac{1}{2} v^2 \right)^2 (t - T) \right] \quad (8)$$

de modo que se obtenha a EDP fundamental do modelo:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial S_t^2} \quad (9)$$

A condição terminal, por sua vez, é reescrita como:

$$\begin{aligned} y(\mu, 0) &= 0, & \mu < 0 \\ y(\mu, 0) &= K \left[ e^{(\mu+q\sqrt{2}s)(\frac{1}{2}v^2)(r-\frac{1}{2}v^2)} - 1 \right] e^{-q^2/2} & \mu \geq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

A equação (9), ou equação da difusão, como é conhecida, tem sua solução da forma:

$$y(\mu, s) = \int_{-\mu/\sqrt{2}s}^{\infty} K \left[ e^{(\mu+q\sqrt{2}s)\frac{(\frac{1}{2}v^2)}{(r-\frac{1}{2}v^2)} - 1} \right] e^{-\frac{q^2}{2}} \quad (11)$$

Substituindo a sua solução em (8), obtemos a forma fechada conhecida para o preço de uma opção

$$C_t(S_t, T) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (12)$$

na qual os limites de integração  $d_1$  e  $d_2$  são

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{1}{2}v^2\right) (T - t)}{v\sqrt{T - t}} \\ d_2 &= \frac{\log \frac{S_t}{K} + \left(r - \frac{1}{2}v^2\right) (T - t)}{v\sqrt{T - t}} \end{aligned} \quad (13)$$

e a função  $N(x)$  é a distribuição de probabilidade acumulada de uma observação  $x$  para uma observação de uma variável  $X$

$$N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad (14)$$

#### 4.2 DERIVAÇÃO POR MEDIDAS EQUIVALENTES DE MARTINGALE

As formulas fechadas para opções europeias também podem ser obtidas por meio do método apresentado na seção (3.7). Ou seja, a expressão para o preço de uma opção de compra  $C_t$  obtida em (12) pode ser construída obtendo uma medida de probabilidade  $\mathbb{Q}$  sob a qual o valor da opção de compra descontado pela taxa livre de risco em  $t < T$  satisfaz a propriedade martingale

$$C_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-r(T-t)} C_T \right] \quad (15)$$

substituindo a medida de probabilidade  $\mathbb{P}$  utilizada na construção da EDE original proposta por Black e Scholes (1973).

A expressão acima nos diz que em um momento arbitrário  $t$  anterior ao seu vencimento  $T$ ,  $C_T$  é o valor esperado de seu payoff no vencimento<sup>7</sup> obtido conforme a medida de probabilidade  $\mathbb{Q}$ . Sem perda de generalidade, podemos simplificar a notação usando  $t = 0$  para obter a expectativa  $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$  em sua forma integral,

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{-rT} \max[S_T - K, 0] \right] d\mathbb{Q} \quad (16)$$

Novamente, retomamos os resultados da seção (3.7) na qual obtemos que a

<sup>7</sup> Definido na seção 2.1.3

medida de probabilidade  $\mathbb{Q}$  segue

$$\mathcal{N}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 t, \sigma t\right) \quad (17)$$

e, por sua vez, sua distribuição de probabilidade  $d\mathbb{Q}$  segue

$$d\mathbb{Q} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T} - (Y_T - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2} dY_T \quad (18)$$

Substituindo por  $d\mathbb{Q}$ , então, a forma integral completa passa a ser

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{-rT} \max[S_T - K, 0] \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T} - (Y_T - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2} dY_T \quad (19)$$

A integração pode ser simplificada manipulando os limites de modo a evitar o operador max. Podemos realizar isso observando que a integral é nula para  $S_T < K$

$$\int_{-\infty}^K \left[ e^{-rT} \max[S_T - K, 0] \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T} - (Y_T - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2} dY_T = 0 \quad (20)$$

e  $S_T$  pode ser reescrita como sua EDE fundamental e como função de  $Y_T$ , portanto. Assim, podemos mudar o domínio dos limites reescrevendo

$$S_T = S_0 e^{Y_T} > K \quad (21)$$

e, notando que a desigualdade acima pode ser reescrita como

$$Y_T > \log\left(\frac{K}{S_0}\right) = -\log\left(\frac{S_0}{K}\right) \quad (22)$$

de tal forma que possamos reescrever a integral a ser avaliada considerando somente a parcela onde assume valores não nulos como

$$C_0 = \int_{\log\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} \left[ e^{-rT} (S_0 e^{Y_T} - K) \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T} - (Y_T - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2} dY_T \quad (23)$$

Por fim, podemos dividir essa integral em duas explicitando o termo entre parênteses ( $S_0 e^{Y_T} - K$ ), de modo a termos a somatória de

$$C_0 = S_0 \int_{\log\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} \left[ e^{-rT} e^{Y_T} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T} - (Y_T - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2} dY_T \\ - Ke^{-rT} \int_{\log\left(\frac{K}{S_0}\right)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 T} - (Y_T - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T)^2} dY_T$$

Para a forma conhecida da solução analítica para  $C_t$  é necessário mais uma troca de variável:

$$Z = \frac{Y_T - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (24)$$

e, conseqüentemente

$$Z^2 = \frac{\left(Y_T - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T\right)^2}{\sigma^2 T} \quad (25)$$

Uma vez que conforme  $Y_T$  está no intervalo de  $\log\left(\frac{K}{S_0}\right) \rightarrow \infty$ ,  $Z$  vai de  $\frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \rightarrow \infty$ , podemos reescrever a segunda integral (envolvendo o preço de exercício  $K$ ) como

$$Ke^{-rT} \int_{\frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ \quad (26)$$

Mais ainda, podemos utilizar da igualdade em (22) para definir o parâmetro  $d_2$  em termos de  $Z$

$$\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}} = d_2 \quad (27)$$



em conjunto com a propriedade de simetria da função densidade da distribuição normal padrão  $f(x)$

$$\int_L^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{-L} f(x) dx \quad (28)$$

com os quais obtemos que a integral avaliada passe a ser

$$Ke^{-rT} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ \quad (29)$$

Na expressão acima podemos observar que a troca de variável fez com que o expoente da segunda integral fosse convenientemente reescrito como a função distribuição acumulada de  $Z$  em  $d_2$ ,  $N(d_2)$ . Ou seja, na forma mais sintética possível,

$$Ke^{-rT} N(d_2) \quad (30)$$

Para a transformação da primeira integral na forma conhecida, observamos que conforme a troca de variáveis (25), ela passa a ter a forma

$$e^{-rT} S_0 \int_{\frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty} e^{Y_T} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ \quad (31)$$

com os limites de integração modificados, conforme explicado anteriormente. Além disso, podemos manipular a equação que definiu a troca de variável para que, em termos de  $Z$ ,  $Y_T$  passe a ser reescrito como

$$Y_T = Z\sigma\sqrt{T} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T \quad (32)$$

Reutilizando a propriedade de simetria da distribuição normal padrão (28) que delimitou a integral anteriormente manipulada em termos de  $d_2$ , e mantendo dentro da integral em questão somente os termos que envolvem  $Z$ , vemos que passamos a ter

$$e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} e^{-rT} S_0 \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(Z^2+2Z\sigma\sqrt{T})} dZ \quad (33)$$

Concluindo, podemos observar que multiplicando a expressão acima por  $e^{\frac{\sigma^2 T}{2}} e^{-\frac{\sigma^2 T}{2}}$ , convenientemente transformamos os termos do expoente dentro da integral na potência de uma soma ao mesmo tempo que anulamos a exponencial que multiplica a integral. Reescrevemos, portanto, como

$$S_0 \int_{-\infty}^{d_2} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(Z+\sigma\sqrt{T})^2} dZ \quad (34)$$

Assim, com uma última troca de variável

$$H = Z + \sigma\sqrt{T} \quad (35)$$

por conta da qual os limites de integração novamente são alterados<sup>8</sup>, obtemos a integral como

$$S_0 \int_{-\infty}^{d_1} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}H^2} dH \quad (36)$$

onde de imediato definimos

$$d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T} \quad (37)$$

para finalizar com a forma anteriormente definida

$$C_0 = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad (38)$$

<sup>8</sup> Novamente, conforme Z vai de  $-\infty \rightarrow d_2$ , H vai de  $-\infty \rightarrow d_2 + \sigma\sqrt{T}$ , que claro, definiremos como  $-\infty \rightarrow d_1$  de imediato.

## 5 O MODELO DE BORLAND

Este capítulo é dedicado a apresentação e derivação do modelo proposto por Borland (2002a), objeto principal deste trabalho de conclusão.

### 5.1 INTRODUÇÃO, MOTIVAÇÃO E FATOS ESTILIZADOS

Apesar do já citado sucesso teórico e prático do modelo proposto por Black, Scholes e Merton, diversas inconsistências empíricas foram verificadas ao longo do tempo. Derman e Miller (2016), por exemplo, explica como já nos anos 1980 a existência de um “sorriso de volatilidade” entrava em contraste com a suposição de volatilidade constante do modelo de Black e Scholes (1973). Em outras palavras, os preços verificados empiricamente para opções “fora-do-dinheiro” é consistentemente superior ao aferido usando o mesmo parâmetro ( $\sigma$ ) para todos os diferentes preços de exercício. O modelo que será apresentado nesta seção busca especificamente uma dinâmica alternativa para o ativo subjacente capaz de corrigir essa inconsistência.

Em Borland (2002a), Lisa Borland propõe um modelo<sup>1,2</sup> de precificação de opções com base em uma classe de processos estocásticos com *feedbacks* estatísticos característicos desenvolvidas no contexto da Termostatística não-extensiva de Tsallis. Esses processos apresentam “fat-tails” em relação a distribuição normal, e portanto impactam a precificação de opções “fora-do-dinheiro” em relação aos preços aferidos no capítulo anterior.

### 5.2 A DISTRIBUIÇÃO DOS RETORNOS

O modelo proposto por Borland (2002a) para a dinâmica dos retornos do ativo subjacente é da forma

$$dY = \mu dt + \sigma d\Omega \quad (1)$$

onde  $Y(t) = \frac{\ln S(T)}{\ln S(t)}$  - ou seja,  $Y(t)$  representa o logaritmo dos retornos em um intervalo  $[t, T]$ . O incremento aleatório  $d\Omega$  segue o processo de *feedback* estatístico

<sup>1</sup> Eventualmente trataremos desse modelo como “Modelo de Borland”.

<sup>2</sup> Adicionalmente ao modelo, uma correção foi proposta por Adams, Yuan e Kelly (2007) e reconhecida por Borland na errata Borland (2002b)

$$d\Omega = P(\Omega)^{\frac{1-q}{2}} dW \quad (2)$$

no qual  $dW$  é o incremento de um processo de Wiener, conforme explorado em seções anteriores. Dessa forma, podemos considerar  $d\Omega$  uma forma generalizada do processo de Wiener, assumindo distribuições de diferentes perfis conforme o valor assumido por  $q$ , seu coeficiente (ou índice) de entropia, e retomando o processo de Wiener quando  $q = 1$ . É de especial interesse a observação de que o incremento aleatório  $d\Omega$  assume valores de magnitude considerável com maior probabilidade quão maior for  $q$ , significando que a distribuição de uma variável cujo processo estocástico envolver o termo  $d\Omega$  tenha caudas largas quando comparada com uma distribuição Gaussiana.

Por sua vez, a função de densidade de probabilidade da variável  $\Omega$ ,  $P_q(\Omega)$ <sup>3</sup>, é dada por

$$P_q(\Omega, T) = \frac{1}{Z(T)} \left[ 1 - \Omega^2 \beta(T)(1 - q) \right]^{\frac{1}{1-q}} \quad (3)$$

na qual, sem perda de generalidade,  $\Omega(0)$  e  $t$  foram anulados.<sup>4</sup> A função (4) é conhecida como Distribuição de Tsallis, ou distribuição  $q$ -Gaussiana. Sua forma assume um grau de “fat-tails” maior quão maior for o parâmetro  $q$ , como mostram as Figuras 6 e ???. A função  $\beta(T)$  é dada por

$$\beta(T) = c^{\frac{1-q}{3-q}} (T(2 - q)(3 - q))^{\frac{-2}{3-q}} \quad (4)$$

sendo

$$c = k \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - k(1 - q)\Omega^2)^{\frac{1}{1-q}} d\Omega \right)^2 \quad (5)$$

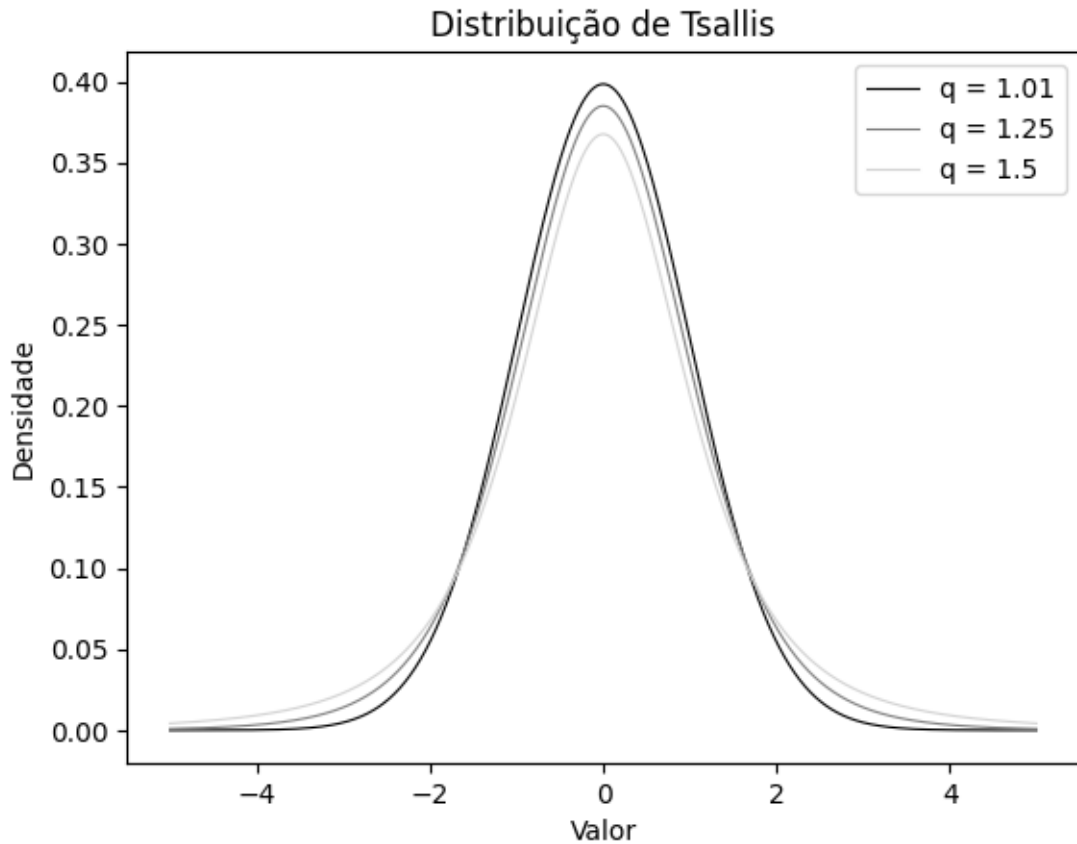
e  $k$  uma constante não-nula.<sup>5</sup> Intuitivamente, a equação (4) representa a distribuição de probabilidade da parcela imprevisível ( $\Omega$ ) em relação ao conjunto  $I_t$  dos log-retornos

<sup>3</sup> O subscrito  $q$  é apresentado pois a distribuição é dependente de forma direta do coeficiente  $q$  assumido

<sup>4</sup> Antes da simplificação, a equação assume a forma  $P_q(\Omega) = \frac{1}{Z(T)} (1 - \beta(T)(1 - q)(\Omega_T - \Omega_t))$ , na qual os subscritos de  $\Omega$  se referem aos valores assumidos pela soma acumulada dos incrementos  $d\Omega$  nos momentos  $t$  e  $T$ .

<sup>5</sup>  $k$  é uma constante neutra, uma vez que  $\beta(t)$  assume o mesmo valor independente do  $k$  escolhido.

Figura 5 – Distribuição de Tsallis para diferentes coeficientes de entropia,  $q$



Fonte: elaboração do autor

da ação subjacente. Por fim, a função  $Z(T)$  é dada por:

$$Z(T) = ((2 - q)(3 - q)cT)^{\frac{1}{3-q}} \quad (6)$$

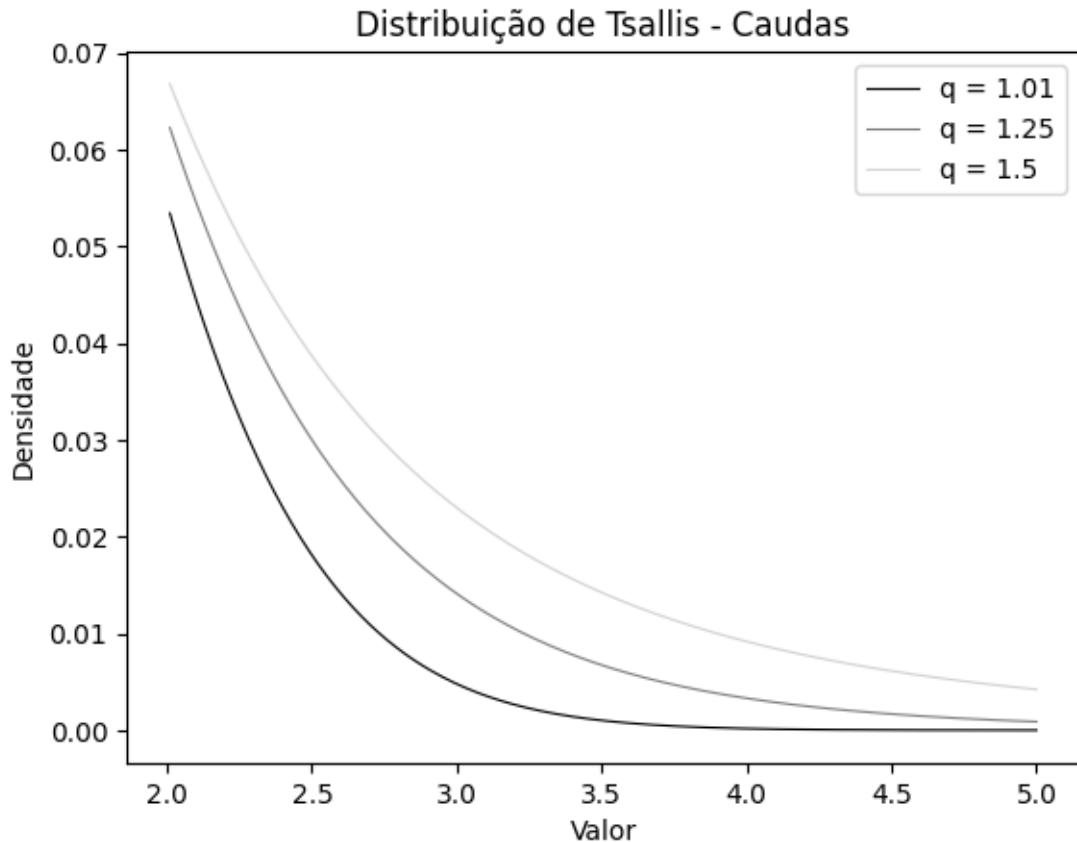
Com isso, chegamos em uma EDE geométrica para os preços que é da forma:

$$dS = \left( \mu + \frac{\sigma^2}{2} P_q^{1-q} \right) S dt + \sigma S d\Omega \quad (7)$$

onde o termo  $\frac{\sigma^2}{2} P_q^{1-q}$  é um termo de tendência induzido pelo processo estocástico do incremento  $d\Omega$ . É relevante observar que  $P_q(\Omega)$  é função de  $\Omega$ , e, sendo assim, o termo de tendência

$$\bar{\mu} = \left( \mu + \frac{\sigma^2}{2} P_q^{1-q}(\Omega) \right) \quad (8)$$

Figura 6 – Caudas da Distribuição de Tsallis para diferentes coeficientes de entropia,  $q$



Fonte: elaboração do autor

é dependente do momento  $t$ .

Com essa dinâmica para os preços obtemos que, para período  $[0, T]^6$ , o logaritmo dos retornos é distribuído conforme:

$$P_q \left( \ln \frac{S(T)}{S(0)} | 0 \right) = \frac{1}{Z(T)} \left[ 1 - \left( \frac{\beta(T)}{\sigma^2} \right) (1 - q) \left( \ln \frac{S(T)}{S(0)} - \mu T \right)^2 \right]^{\frac{1}{1-q}} \quad (9)$$

Em contraste com a equação (4), a equação (9) nos dá a distribuição de probabilidade das parcelas previsível e imprevisível dos log-retornos da ação  $S$  dado o conjunto de informação  $I_0$ .

Analicamente, esse processo é dado de tal modo que a distribuição dos logaritmos dos retornos em um dado intervalo é dada pela distribuição de Tsallis, evoluindo de forma anômala para os intervalos de tempo. Essa distribuição tem a propriedade de ter sua parcela central aproximada pela distribuição Gaussiana para intervalos de

<sup>6</sup> Essa troca de variáveis entre  $t$  e  $0$  é feita para simplificação de notação. Nesse caso, as funções que se referem ao momento  $T$ , na notação original, se refeririam ao período  $(T - t)$

tempo grandes, além de atribuir uma maior probabilidade para retornos extremos.

### 5.3 PORTFOLIOS LIVRE DE RISCO

Reaproveitando a abordagem utilizada na seção 3.6.1, sabemos que tanto a EDE (7) para a dinâmica dos preços quanto a dinâmica de um derivativo  $F(S_t, t)$ <sup>7</sup>, dada por meio do lema de Itô

$$dF_t = \frac{\partial F}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} (\sigma^2 P_q^{1-q}) dt \quad (10)$$

compartilham de uma única fonte de incerteza, oriunda do termo de ruído  $d\Omega$ . Assim sendo, novamente é possível construirmos um portfólio

$$P_t = \theta_1 F_t + \theta_2 S_t \quad (11)$$

cuja dinâmica é dada por

$$dP_t = \theta_1 \left[ \frac{\partial F}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} dt \right] + \theta_2 dS_t \quad (12)$$

permite a escolha de um par  $(\theta_1, \theta_2)$  que elimine esse ruído.

Desse modo, o mesmo par  $(\theta_1, \theta_2) = (1, -\frac{\partial F}{\partial S_t})$  é tal que o portfólio resultante

$$dP_t = \left[ F_t + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} S_t^2 P_q^{1-q} \right] dt \quad (13)$$

tem retorno exatamente conhecido dado o conjunto de informação  $I_t$ , sendo portanto livre de risco. Disso podemos concluir que seu retorno deve se igualar ao retorno livre de risco,  $r$ , tal que

$$rP_t dt = \left[ \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 F_{SS} S_t^2 P_q^{1-q} \right] dt \quad (14)$$

<sup>7</sup> Para simplificar a notação,  $F(S_t, t)$  passa a ser simplesmente  $F$ , e o subscrito  $t$  denota o momento.

que pode ser reescrita considerando a forma original de  $P_t$  e anulando os termos  $dt$  como

$$rF - r \frac{\partial F}{\partial S_t} S_t - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} S_t^2 P_q^{1-q} = 0 \quad (15)$$

sendo essa a EDP resultante do método dos portfólios livres de risco. Em contraste com a obtenção das soluções analíticas no caso do modelo proposto por Black e Scholes (1973), o método dos portfólios livre-de-risco não elimina por completo a influência do termo  $\mu$  uma vez obtida a EDP fundamental. No caso da equação (15), ainda temos o termo  $P_q^{1-q}$ , dependente de  $\Omega$  e  $\mu$ .

#### 5.4 MEDIDAS EQUIVALENTES DE MARTINGALE

Na seção (3.6.2), foi destacado que é comum abordar o problema de  $S_t$  ser submartingale por meio da criação, a partir da medida de probabilidade original  $\mathbb{P}$ , de uma medida de probabilidade sintética  $\mathbb{Q}$  na qual  $S_t$  se comporte como martingale. No contexto da precificação de opções de compra,  $C(S_t, t)$ , isso significa uma mudança da medida de probabilidade original para uma,  $\mathbb{Q}$ , em que

$$e^{-r(T-t)} C_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C_T | I_t] \quad (16)$$

Nesse contexto, uma vez obtida essa medida  $\mathbb{Q}$  é necessariamente verdade que:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} S_T | S_t] = S_t \quad (17)$$

Ou seja, em relação a medida de probabilidade  $\mathbb{Q}$ ,  $S_t$  é martingale quando descontado pela taxa livre de risco  $r$ <sup>8</sup>.

Uma vez satisfeita a condição de Novikov o teorema de Girsanov<sup>9</sup> garante que podemos reescrever a dinâmica do ativo subjacente por meio de um novo incremento aleatório

<sup>8</sup> Mais precisamente,  $S_t$  é submartingale, e pode ser Doob-Meyer decomposto em um termo martingale e um termo de tendência simples, nesse caso  $r$ .

<sup>9</sup> Tanto a condição de Novikov quanto o teorema de Girsanov foram expostos na subseção 3.6.2.1



$$dz = \left( \frac{\mu}{\sigma P_q^{(1-q)/2}} dt + dW \right) \quad (18)$$

com o qual o processo estocástico  $dY$  para os log-retornos passa a ser, simplesmente:

$$dY = \sigma P_q^{\frac{(1-q)}{2}} dz \quad (19)$$

O novo termo aleatório  $z$  retém a relação direta com o processo de Wiener, que agora assume a forma:

$$z = W + \int_t^T \left( \frac{\mu}{\sigma P_q^{(1-q)/2}} \right) ds \quad (20)$$

Sob a medida de probabilidade original,  $P$ , o novo termo de ruído é tal que sua média é não-nula <sup>10</sup>, mas tem sua variância idêntica à do processo original, sendo proporcional a  $t$ . Propositamente, esse termo, sob a nova medida de probabilidade,  $\mathbb{Q}$ , tem média nula e variância  $t$ .

As duas medidas de probabilidade,  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{P}$ , podem ser relacionadas por meio da derivada de Radon-Nikodym, que é da forma:

$$\xi(t) = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = e^{-\int_t^T \left( \frac{\mu}{\sigma P_q^{(1-q)/2}} dW \right) ds - \frac{1}{2} \int_t^T \left( \frac{\mu}{\sigma P_q^{(1-q)/2}} \right)^2 ds} \quad (21)$$

A equação (21) nos dá a razão das probabilidades de um determinado retorno sob as distribuições  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{P}$ , respectivamente numeradoras e denominadoras da derivada.

Com isso, temos que de acordo com o Teorema de Girsanov os log-retornos  $dY$  se relacionam com a nova medida martingale  $dz$  pela identidade tripla

$$dY = \sigma \left( \frac{\mu}{\sigma P_q^{\frac{1-q}{2}}} dt + dW \right) = \sigma dz \quad (22)$$

onde implicitamente retemos a relação entre o novo termo de ruído  $z$  e o Processo de

<sup>10</sup> Precisamente, é igual a  $\frac{\mu}{\sigma} P_q^{(1-q)/2} dt$  para um intervalo  $dt$ .

Wiener  $W$  como dada por

$$z = W_t + \int_0^t \frac{\mu}{\sigma P^{\frac{1-q}{2}}} ds \quad (23)$$

## 5.5 A FORMA GERAL DAS SOLUÇÕES

Com os resultados das seções anteriores, podemos obter a forma geral de precificação de opções da forma até aqui exposta. Lembramos que, sob a nova medida equivalente de martingale,  $\mathbb{Q}$ , é necessariamente verdade que o preço em um momento arbitrário ( $t = 0$ ) de uma opção com vencimento em um momento futuro  $T$  é dado simplesmente por

$$C_0 = \mathbb{E} \left[ e^{-rT} C_T \right] \quad (24)$$

Além disso, sabemos que o valor de uma opção no vencimento é função do preço da ação subjacente no vencimento

$$C_T = h(S_T) \quad (25)$$

de tal forma que, quando suposto o seu comportamento estocástico como em (1), possamos detalhar a equação (24) em

$$C_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ h \left( S_0 e^{\int_0^T \sigma P_q^{(1-q)/2} dz_s + \int_0^T \left( r - \frac{\sigma^2}{2} P_q^{1-q} \right) ds} \right) \right] \quad (26)$$

Podemos observar que com  $q = 1$  retomamos a solução de Black e Scholes (1973), uma vez que a dinâmica para a ação subjacente, expoente da equação que define  $S_T$ , é o mesmo que representa a dinâmica proposta no contexto do modelo.

Sob a medida equivalente de martingale  $\mathbb{Q}$ , a variável aleatória

$$X(T) = \sigma \int_0^T P_q^{(1-q)/2} dz_s = \Omega(T) \quad (27)$$

no expoente da equação anterior deixa de ser normalmente distribuída com média zero e variância  $\sigma^2$ , como no caso tradicional de Black e Scholes (1973), e passa a ser distribuída conforme a distribuição de Tsallis, exposta na equação (4). Podemos portanto obter uma forma geral para o apreçamento de opções sob essa medida de probabilidade,  $\mathbb{Q}$  e supondo a dinâmica (1) para o ativo subjacente que é da forma:

$$C_t = \frac{e^{-rT}}{Z(T)} \int_R h \left[ e^{\sigma\Omega(T) + rT - \frac{\sigma^2}{2}\alpha T^{2/(3-q)} (1-(1-q)\beta(T)\Omega^2(T))} \right] \left(1 - \beta(T)(1-q)\Omega^2(T)\right)^{\frac{1}{1-q}} d\Omega(T) \quad (28)$$

na qual  $\alpha$  assume:

$$\alpha = \frac{1}{2}(3-q)((2-q)(3-q)c)^{\frac{q-1}{3-q}} \quad (29)$$

## 5.6 OPÇÕES DE COMPRA

Com a medida equivalente de martingale  $\mathbb{Q}$ , podemos usar os *payoffs* de uma opção de compra da seção (2.1.3) para observarmos que, a partir da medida  $\mathbb{Q}$  e, conseqüentemente de (24),

$$C_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT} S_T]_D - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT} K]_D = \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2 \quad (30)$$

onde  $D$  é o subconjunto dos possíveis valores assumidos por  $S_T$  em que o *payoff* é não-nulo.

Sob  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathcal{J}_2$  pode ser reduzido a:

$$\mathcal{J}_2 = e^{-rT} KP_{\mathbb{Q}}\{D\} \quad (31)$$

onde  $P_{\mathbb{Q}}\{D\}$  é a integral sob a distribuição de Tsallis no conjunto  $D$  em que  $S_T > K$ . Usando a forma explícita que  $S_T$  assume partindo do processo estocástico aqui proposto, definida em (50), temos que a expressão anterior pode ser delimitada a:

$$\mathcal{J}_2 = e^{-rT} KP_{\mathbb{Q}}\left\{\frac{\sigma^2}{2}\alpha T^{\frac{2}{3-q}}(1 - (1-q)\beta(T)\Omega^2) + \sigma\Omega + rT > \log \frac{K}{S_0}\right\} \quad (32)$$

que, por sua vez, é satisfeita entre as raízes:

$$s_1 = \frac{1}{\alpha T^{\frac{2}{3-q}}(1-q)\sigma\beta(T)} - \left[ \frac{1}{\alpha T^{\frac{4}{3-q}}(1-q)^2\sigma^2\beta(T)^2} - \frac{2}{(1-q)\alpha T^{\frac{2}{3-q}}\sigma^2\beta(T)} \left( rT + \log \frac{S_0}{K} - \frac{\sigma^2}{2} \alpha T^{\frac{2}{3-q}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (33)$$

e,

$$s_2 = \frac{1}{\alpha T^{\frac{2}{3-q}}(1-q)\sigma\beta(T)} + \left[ \frac{1}{\alpha T^{\frac{4}{3-q}}(1-q)^2\sigma^2\beta(T)^2} - \frac{2}{(1-q)\alpha T^{\frac{2}{3-q}}\sigma^2\beta(T)} \left( rT + \log \frac{S_0}{K} - \frac{\sigma^2}{2} \alpha T^{\frac{2}{3-q}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (34)$$

Como  $K$  é constante e conhecido em  $t_0$ , essa integração se torna simplesmente

$$\mathcal{J}_2 = \frac{e^{-rTK}}{Z(T)} \int_{s_1}^{s_2} \left( 1 - (1-q)\beta(T)\Omega^2 \right)^{\frac{1}{1-q}} d\Omega = e^{-rTK} N_q(s_1, s_2) \quad (35)$$

De forma similar, podemos obter  $\mathcal{J}_1$  por meio da mesma integração da distribuição de Tsallis já definida sob a medida de probabilidade  $\mathbb{Q}$ :

$$\mathcal{J}_1 = e^{-rT} S_T P_{\mathbb{Q}}\{D\} \quad (36)$$

com o qual, com a forma definida anteriormente de  $S_T$ , temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \frac{S_0}{Z(T)} \int_{s_1}^{s_2} e^{\sigma\Omega - \frac{\sigma^2}{2} \alpha T^{\frac{2}{3-q}} + (1-q)\alpha T^{\frac{2}{3-q}}\beta(T)\frac{\sigma^2}{2}\Omega^2} \left( 1 - (1-q)\beta(T)\Omega^2 \right)^{\frac{1}{1-q}} \\ &= S_0 M_q(e^{b(\Omega)}, s_1, s_2) \end{aligned} \quad (37)$$

Essas formas obtidas já são soluções analíticas para os preços das opções sob o modelo aqui proposto, mas para fins de uniformização, podemos elaborar posteriormente essa soluções em termos de processos aleatórios  $(0, 1)$ .

### 5.6.1 Soluções como processos aleatórios (0, 1)

Para a obtenção de soluções como as que obtemos para o modelo de Black e Scholes (1973) em (13), podemos utilizar o termo aleatório normalizado  $\Omega_N$

$$\Omega_N = \Omega(T) \sqrt{\frac{\beta(T)}{\beta_N}} \quad (38)$$

com o qual os limites de integração  $s_1$  e  $s_2$  se transformam em

$$d_{1,2} = \frac{s_{1-2}}{\sqrt{\beta_N/\beta(T)}} \quad (39)$$

onde

$$\beta_N = \frac{1}{5 - 3q} \quad (40)$$

Com isso, podemos obter a forma analítica para o preço das opções sob a dinâmica proposta sendo, simplificadaamente:

$$C_0 = S_0 M_q(e^{b(\Omega_N)}, d_1, d_2) - e^{-rT} K N_q(d_1, d_2) \quad (41)$$

## 6 IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS

Este capítulo se dedica à implementação computacional do modelo proposto por Borland (2002a), cuja derivação foi realizada no capítulo anterior.

### 6.1 IMPLEMENTAÇÃO DA FERRAMENTA DE CÁLCULO

A utilização de um determinado modelo de precificação envolve, necessariamente, o desenvolvimento e implementação de uma ferramenta de cálculo que transforme os parâmetros determinados pelos modelos na forma de resultado desejada. Nas próximas seções, uma proposta de implementação do modelo proposto em Borland (2002a) e abordado nos capítulos anteriores será apresentada e utilizada para aplicação demonstrativas em diferentes casos de interesse. Principalmente, o objetivo será elucidar os diferentes resultados do modelo proposto quando contraposto com o mais familiar modelo proposto em Black e Scholes (1973).

No contexto da implementação, a ordem de desenvolvimento das equações não seguirá a ordem exposta anteriormente, nem qualquer ordem necessariamente lógica ou correta, mas sim seguirá a orientação procedural de desenvolvimento da ferramenta de cálculo. Além disso, a implementação será realizada com a notação mais simples possível, portanto obtendo  $C_0$  para uma opção com vencimento em  $T$  (portanto com duração de  $T$  anos).

#### 6.1.1 As equações auxiliares

Do ponto de vista da implementação, a ordem das equações segue sua relação de dependência, de modo que todas as equações sejam definidas usando somente resultados já obtidos. Esses resultados já obtidos, aqui tidos como resultados de equações auxiliares, servem de propósito a sustentar uma equação final, nesse caso (41). Assim sendo, começamos por definir:

$$c = k \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - k(1 - q)\Omega^2)^{\frac{1}{1-q}} d\Omega \right)^2 \quad (1)$$

onde  $k$  é uma constante qualquer. Com a equação para  $c$  podemos obter as equações

$$Z(T) = ((2 - q)(3 - q)cT)^{\frac{1}{3-q}} \quad (2)$$

e, também,

$$\beta(T) = c^{\frac{1-q}{3-q}} (T(2-q)(3-q))^{\frac{-2}{3-q}} \quad (3)$$

Uma vez implementadas as equações (2) e (3), podemos obter a equação para a distribuição de probabilidade da variável  $\Omega$

$$P_q(\Omega) = \frac{1}{Z(T)} \left[ 1 - \Omega^2 \beta(T) (1-q) \right]^{\frac{1}{1-q}} \quad (4)$$

conhecida como distribuição de Tsallis ou distribuição q-Gaussiana.

Paralelamente, precisamos realizar a implementação das equações para  $M_q$  e  $N_q$ , além de obter seus limites de integração  $d_1$  e  $d_2$ . Para isso, primeiro definimos:

$$\alpha = \frac{1}{2} (3-q) ((2-q)(3-q)c)^{\frac{q-1}{3-q}} \quad (5)$$

a partir do qual obtemos as raízes

$$s_1 = \frac{1}{\alpha T^{\frac{2}{3-q}} (1-q) \sigma \beta(T)} - \left[ \frac{1}{\alpha^2 T^{\frac{4}{3-q}} (1-q)^2 \sigma^2 \beta(T)^2} - \frac{2}{(1-q) \alpha T^{\frac{2}{3-q}} \sigma^2 \beta(T)} \left( rT + \log \frac{S_0}{K} - \frac{\sigma^2}{2} \alpha T^{\frac{2}{3-q}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

e,

$$s_2 = \frac{1}{\alpha T^{\frac{2}{3-q}} (1-q) \sigma \beta(T)} + \left[ \frac{1}{\alpha^2 T^{\frac{4}{3-q}} (1-q)^2 \sigma^2 \beta(T)^2} - \frac{2}{(1-q) \alpha T^{\frac{2}{3-q}} \sigma^2 \beta(T)} \left( rT + \log \frac{S_0}{K} - \frac{\sigma^2}{2} \alpha T^{\frac{2}{3-q}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

que por sua vez nos permite, com,

$$\beta_N = \frac{1}{5 - 3q} \quad (8)$$

retomar as formas normalizada para os resultados. Com isso, é possível definir a função  $Z(T)$  em sua forma normalizada  $Z_N$ , sendo ela:

$$Z_N = Z(T) \sqrt{\frac{\beta(T)}{\beta_N}} \quad (9)$$

e definir os limites de integração:

$$d_1 = \frac{s_1}{\sqrt{\beta_N/\beta(T)}} \quad (10)$$

e,

$$d_2 = \frac{s_2}{\sqrt{\beta_N/\beta(T)}} \quad (11)$$

Para a implementação  $N_q$  e  $M_q$ , nos resta somente definir o termo  $b(\Omega_N)$ , que é da forma:

$$b(\Omega_N) = \sigma\Omega - \frac{\sigma^2}{2}\alpha T^{\frac{2}{3-q}} + (1-q)\alpha T^{\frac{2}{3-q}}\beta(T)\frac{\sigma^2}{2}\Omega^2 \quad (12)$$

Com isso, podemos calcular  $N_q$  como:

$$N_q(d_1, d_2) = \frac{1}{Z_N} \int_{d_1}^{d_2} \left(1 - (1-q)\beta_N\Omega_N^2\right)^{\frac{1}{1-q}} d\Omega \quad (13)$$

e, de forma similar,  $M_q$ , sendo:

$$M_q(b(\Omega), d_1, d_2) = \frac{1}{Z_N} \int_{d_1}^{d_2} e^{b(\Omega)} \left(1 - (1-q)\beta(T)\Omega^2\right)^{\frac{1}{1-q}} d\Omega \quad (14)$$



### 6.1.2 Equação fundamental

A última etapa é, naturalmente, a de implementar a equação fundamental que mapeia os parâmetros do modelo com o resultado desejado da implementação. Naturalmente, o ponto de partida (parâmetros) e de chegada (resultados) são os de maior interação quando da utilização do modelo, então merecem atenção especial. Em específico, os parâmetros do modelo são:

- a)  $S_0$ : preço da ação  $S$  no momento  $t = 0$ ;
- b)  $K$ : preço de exercício (também conhecido como *strike*);
- c)  $T$ : tempo até o vencimento;
- d)  $r$ : taxa de juros livre de risco entre os períodos ( $0 \rightarrow T$ ), suposta constante;
- e)  $\sigma$ : desvio-padrão (como esse parâmetro é não observável, convencionou-se utilizar a estimativa amostral);
- f)  $q$ : coeficiente de entropia (esse parâmetro é o que diferencia os parâmetros para cálculo dos utilizados no modelo proposto em Black e Scholes (1973)).

Com isso, finalizamos com a forma fechada para o preço de uma opção de compra do tipo europeia como função dos parâmetros (6.1.2):

$$C_0 = S_0 M_q(b(\Omega), d_1, d_2) - e^{-rT} K N_q(d_1, d_2) \quad (15)$$

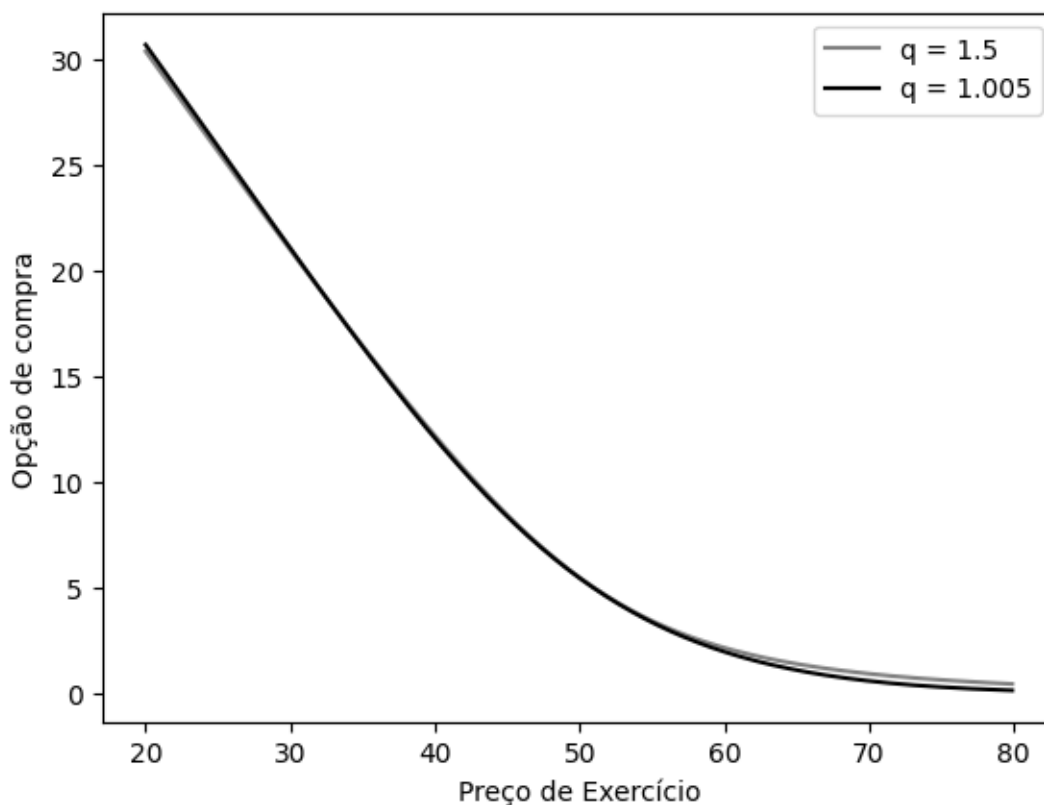
## 6.2 REPLICAÇÃO DOS RESULTADOS

Com as formas analíticas concluídas, podemos replicar os resultados de Borland (2002a). Na Figura 7, por exemplo, comparamos a implementação do modelo de precificação de opções de compra europeias abordado pela autora com o modelo proposto em Black e Scholes (1973) para preços de exercício,  $K$ , no intervalo  $20 \rightarrow 80$ . Para isso, normalizamos o parâmetro,  $\sigma$ , para que as opções “no dinheiro” possuam mesmo valor<sup>1</sup>.

Nela (Figura 7), podemos observar que para maior parte do intervalo observado de preços de exercício os valores assumidos para a opção de compra,  $C_0$ , são parecidos. Diferenças em termos absolutos começam a surgir para opções longe do ponto  $S_0 = K$ , ponto em que as opções estão “no-dinheiro”. Para opções dentro do dinheiro, essa diferença é pequena em termos absolutos e em relativos, e é uniformemente negativa

<sup>1</sup> Na Figura 7, temos  $\sigma = 0.299$  para  $q = 1.5$  e  $\sigma = 0.3$  para  $q = 1$

Figura 7 – Preços  $C_0$  para  $q = 1.5$  e  $q = 1$



Fonte: elaboração do autor

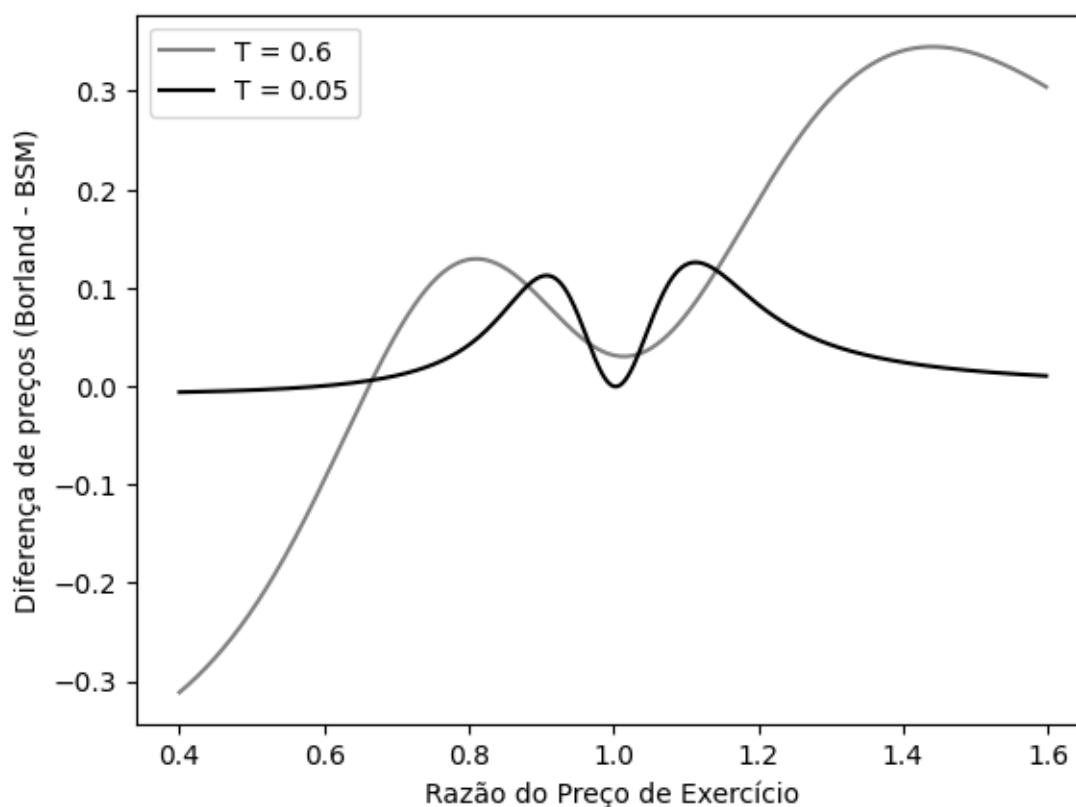
(isto é, o modelo como proposto em Borland (2002a) subestima os preços quando comparados com o proposto em Black e Scholes (1973)). Em contraste, o oposto ocorre com as opções “fora-do-dinheiro”, caso em que embora a diferença entre os preços aferidos siga pequena em termos absolutos, a diferença em termos relativos é maior, e com sinal positivo (preços como suposto em Borland (2002a) são maiores).

Com o objetivo de observar com mais detalhe a o comportamento relativo dos preços das opções de compra sob diferentes modelos, replicamos na Figura 8 explicitamente a diferença de preços entre os preços calculados para os dois modelos em dois cenários: para uma comparação o tempo para o vencimento,  $T$ , assume  $T = 0.6$  enquanto para a outra assume  $T = 0.05$ . Novamente normalizamos (isto é, escolhemos parâmetros  $\sigma$ ) para que as opções “no-dinheiro” tenham mesmo preço<sup>2</sup>.

Com a Figura 8, podemos observar mais claramente a descrição anterior da diferença entre os preços para  $T = 0.6$ . Utilizando esse tempo para o vencimento, os preços são menores para opções “dentro-do-dinheiro” e maiores para opções “fora-do-dinheiro”. Além disso, pode-se destacar o caráter localizado dessa discrepância de preços nominais - a diferença de preços atinge dois máximos locais em termos

<sup>2</sup> Note que o caso em que  $T = 0.6$  é o mesmo da Figura 7, enquanto para  $T = 0.05$  utilizamos  $\sigma = 0.41$  para tal propósito.

Figura 8 – Diferença dos preços  $C_0$  para  $T = 0.6$  e  $T = 0.05$



Fonte: elaboração do autor

absolutos quando  $K \approx 40$  e quando  $K \approx 70$ . Para  $T = 0.05$ , por sua vez, as diferenças em valores absolutos são menores, e exclusivamente positivas (mesmo para opções “dentro-do-dinheiro”), embora mantendo dois máximos locais e a tendência de aproximação entre os preços aferidos pelos diferentes modelos. Nesse sentido, a Figura 9, expande o intervalo apresentado em Borland (2002a), demonstrando o comportamento convergente dos preços em termos absolutos.

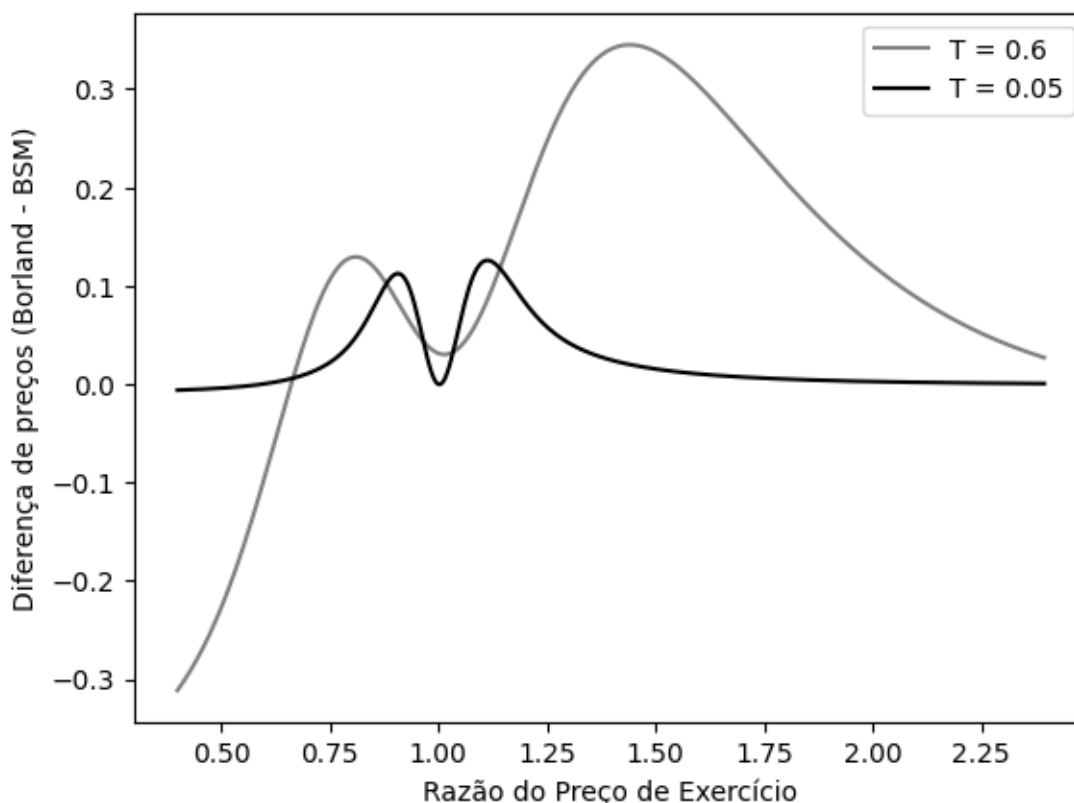
Essa convergência, todavia, não é observada para os preços relativos<sup>3</sup>. Na Figura 10 podemos observar, por meio do logaritmo das razões entre os preços, que essas razões são, para os preços de exercício observados ( $K$  no intervalo  $20 \rightarrow 120$ ) crescentes. Além disso, se a diferença em termos absolutos era maior para  $T = 0.6$ , o inverso ocorre para as razões, maiores quanto menor for  $T$ ,

Podemos também comparar especificamente a dinâmica dos preços ao longo de um intervalo de tempos para o vencimento, como na figura (11), replicada do artigo original. Nela, vemos a dinâmica para  $C_0$  conforme o tempo para vencimento,  $T$ , percorre o intervalo  $1 \rightarrow 0$ , para diferentes preços de exercício ( $K = 45$ ,  $K = 50$ , e  $K = 55$ ).

Podemos utilizar os preços obtidos por meio do modelo de Borland para obter

<sup>3</sup> Por preços relativos se entende, neste contexto, a razão dos preços aferidos por ambos os modelos

**Figura 9 – Diferença dos preços  $C_0$  para  $T = 0.6$  e  $T = 0.05$ , em maior intervalo**

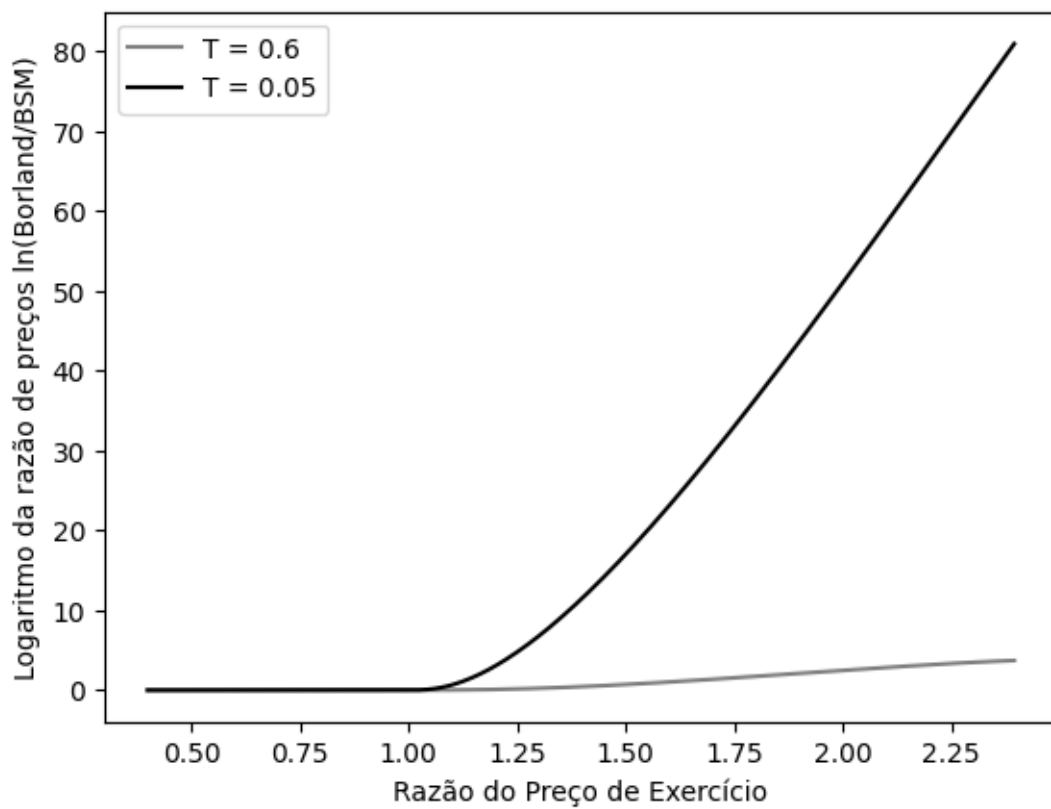


Fonte: elaboração do autor

a volatilidade implícita pelo modelo de Black e Scholes (1973). Essa é a proposta da Figura (12), na qual a volatilidade implícita para tempos para o vencimento  $T = 0.1$  e  $T = 0.4$  pode ser observada ao longo de preços de exercício que partem de  $K = 40$  a  $K = 60$ . Nela, novamente podemos observar a curva se tornando mais “aguda” conforme  $T \rightarrow 0$ , refletindo as já citadas “*fat-tails*” da distribuição de Tsallis.

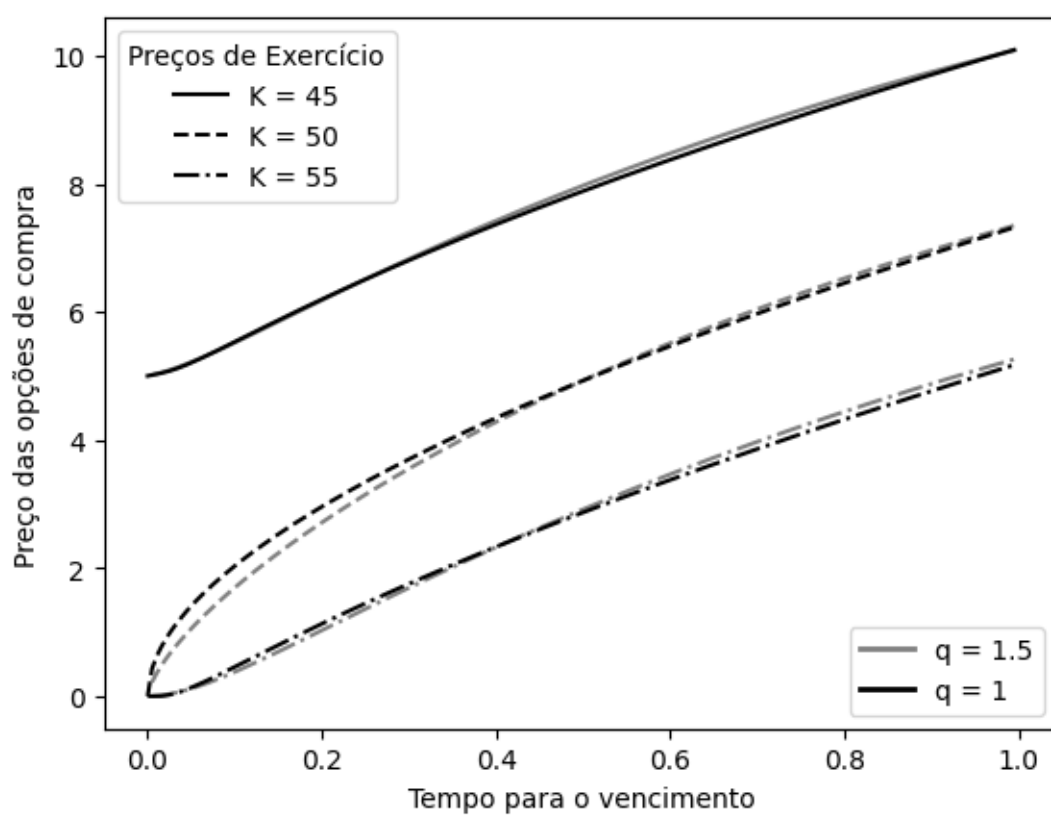
Essa dinâmica para tempos para o vencimento mais curtos é de particular interesse. Um modelo que propõe “*fat-tails*” é ainda mais importante quando tratamos de períodos curtos de tempo, uma vez que diferentes probabilidades de exercício impactam de maneira mais forte o preço aferido. A Figura 13 mostra os preços calculados utilizando o modelo de Borland (2002a) para  $T = 0.05$  ao longo de preços de exercício em  $K = [40 : 60]$ . Por fim, podemos observar nas Figuras 14 e 15 como preços para opções “dentro-do-dinheiro” são, no geral, similares, mas preços de opções “fora-do-dinheiro” são marcadamente superiores, tendo em consideração os pequenos valores de  $C_0$  observados.

Figura 10 – Logaritmo da razão dos preços  $C_0$  para  $T = 0.6$  e  $T = 0.05$ , em maior intervalo



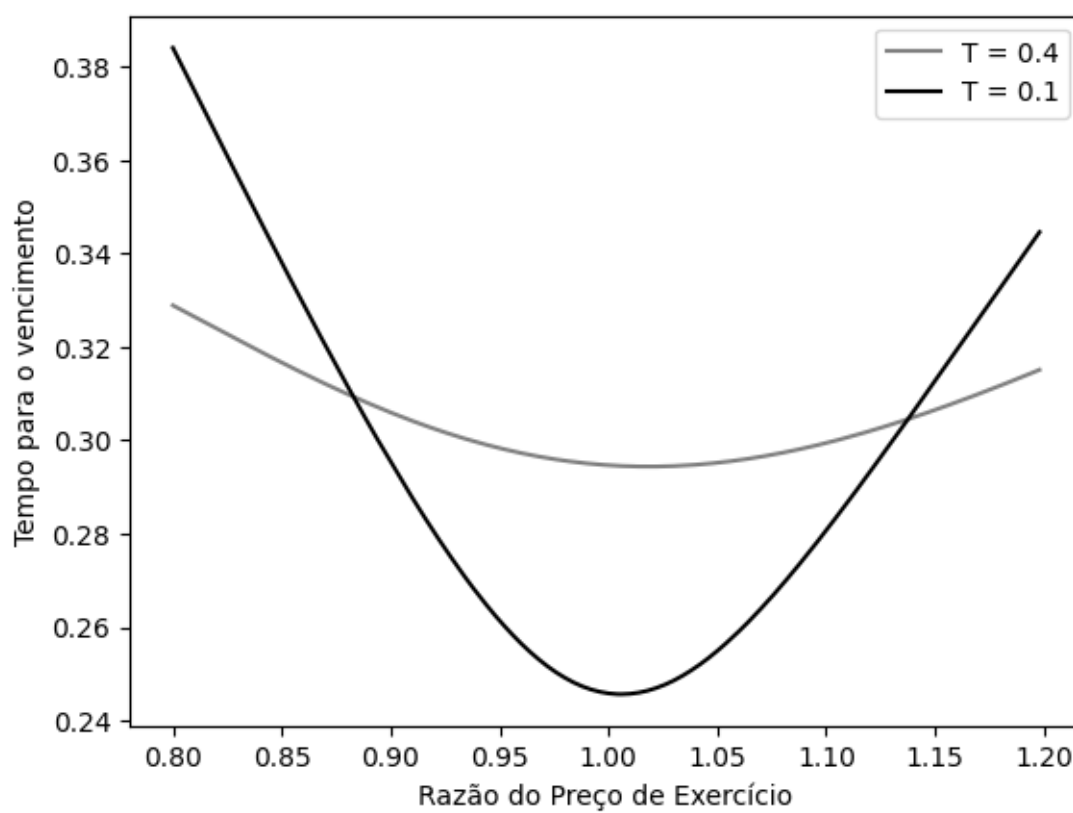
Fonte: elaboração do autor

Figura 11 – Preços para diferentes tempos para o vencimento,  $T$ , com  $S_t = 50$ .



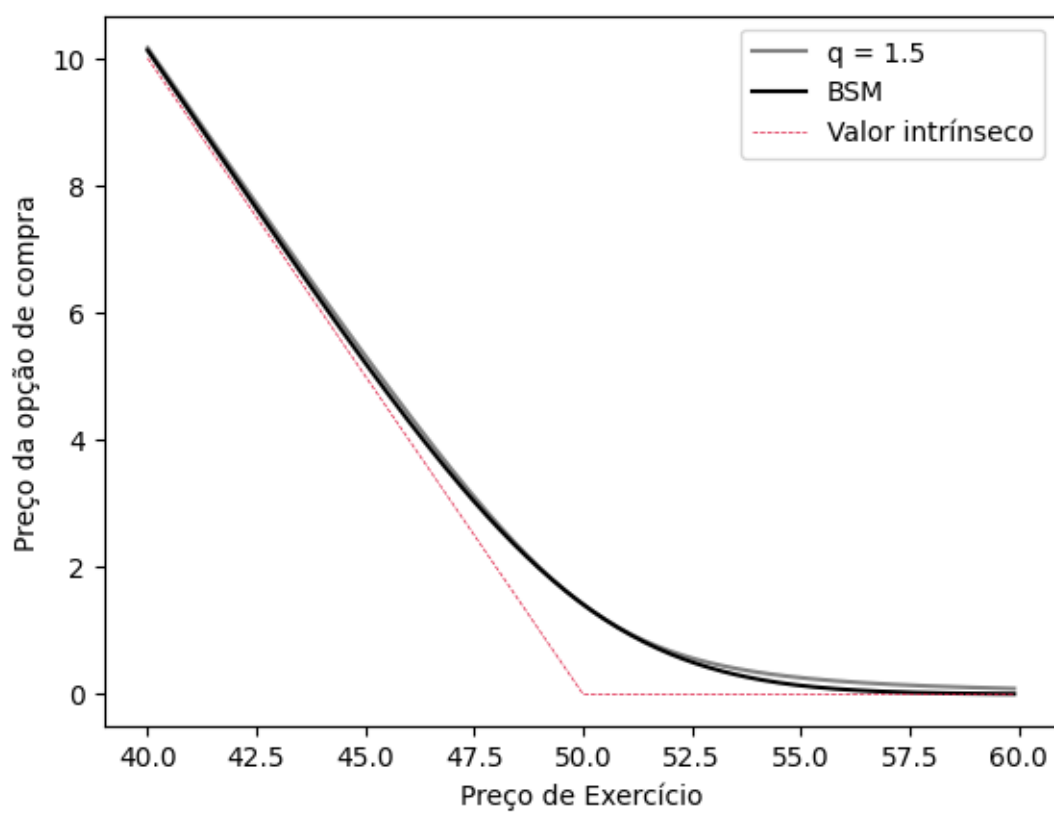
Fonte: elaboração do autor

Figura 12 – Volatilidades implícitas pelos preços aferidos por (BORLAND, 2002a)



Fonte: elaboração do autor

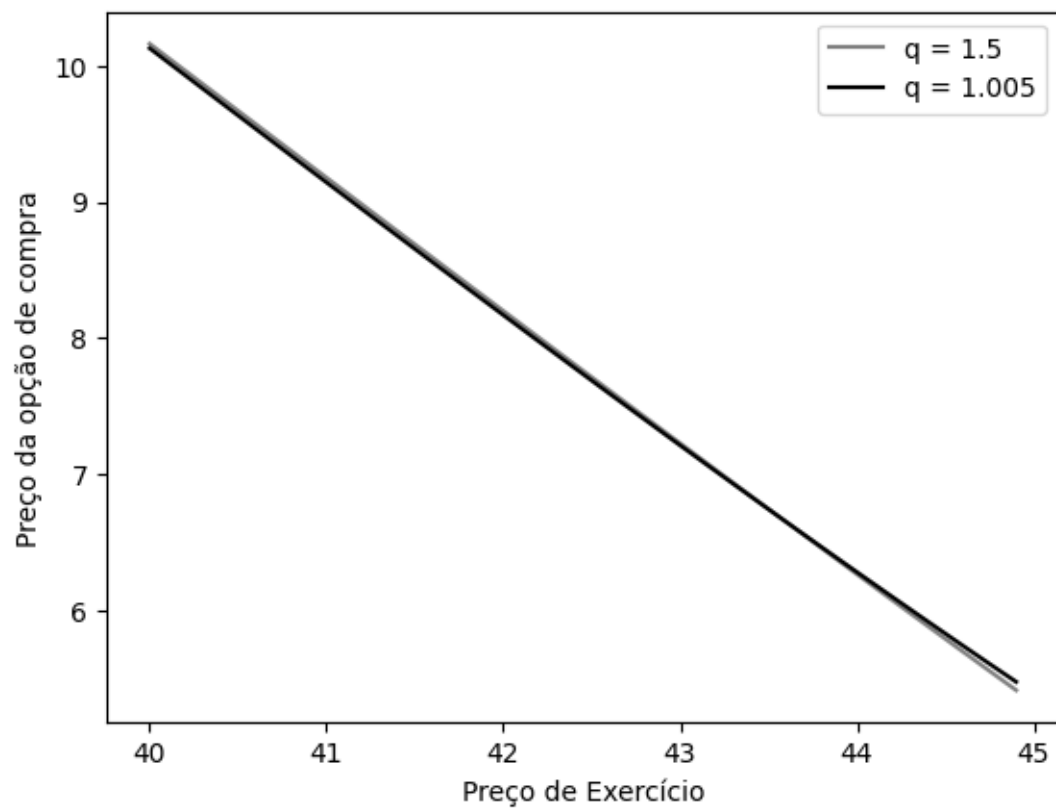
Figura 13 – Comparação dos preços para opções de compra com  $T = 0.05$



Fonte: elaboração do autor

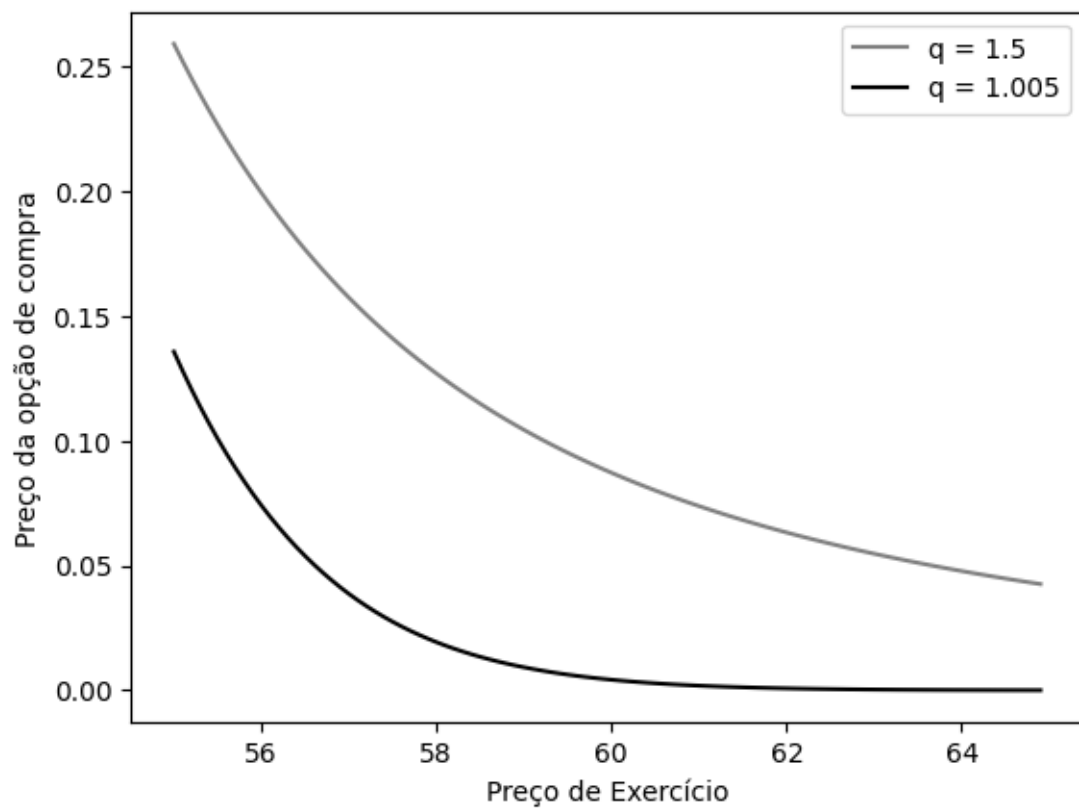


Figura 14 – Comparação dos preços para opções de compra “dentro-do-dinheiro” com  $T = 0.05$



Fonte: elaboração do autor

Figura 15 – Comparação dos preços para opções de compra “fora-do-dinheiro” com  $T = 0.05$



Fonte: elaboração do autor

## 7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, revisamos o ferramental matemático necessário para o tratamento de diversos modelos de precificação de derivativos, além de valiosos para diversas áreas de finanças. Com ele, pudemos comparar com maior detalhe a solução de dois modelos de precificação de opções, o proposto por Black e Scholes (1973) e o proposto por (BORLAND, 2002a). A implementação do último, objetivo principal deste trabalho de conclusão de curso, foi feita partindo desse ferramental e contrastando etapa a etapa com o primeiro.

O caráter alternativo de um modelo de precificação de derivativos nos permite ampla comparação com o modelo de Black e Scholes (1973). Dessa forma, foi inevitável ao longo deste trabalho demonstrar a derivação e implementação do modelo proposto por Borland (2002a) sempre contrastando suas peculiaridades com àquelas características presentes no modelo mais “familiar”. Da mesma forma, quaisquer conclusões a respeito desse modelo devem ser também de caráter comparativo.

No que diz respeito à dinâmica do ativo subjacente, o Modelo de Borland para os retornos é, como idealizado, mais propenso a movimentos de maior magnitude. O processo estocástico por ela proposto, como descrevemos, parte de incrementos oriundos da distribuição de Tsallis, ou  $q$ -Gaussiana, cujo coeficiente de entropia,  $q$ , possui relação direta com quão largas são as caudas da distribuição. É, portanto, passível de estimação e capaz de corresponder a diferentes processos estocásticos de mesma característica (“fat-tails”).

Os preços para opções de compra européias obtidos no contexto da implementação do modelo refletem diretamente essa peculiaridade da distribuição subjacente para os retornos. Quando estes preços são utilizados para a obtenção das volatilidades implícitas pelo modelo de Black e Scholes (1973), obtemos o “sorriso de volatilidade” — em outras palavras, o modelo, ao atribuir maior valor a opções “fora-do-dinheiro” reflete diretamente as “fat-tails” supostas no escopo da distribuição.

Por fim, se modelos em gerais são instrumentos que partem do que nos é conhecido em maior grau para aquilo que, por conhecermos em menor grau, buscamos investigar, um modelo de precificação de opções que efetivamente implementa uma forma generalizada de incorporar um fato estilizado (novamente, as “fat-tails”) a um ferramental já familiar é por si só valioso. A despeito de sua implementação não evitar maior custo computacional e de ferramental matemático, que em contraste se encontra plenamente estabelecido para a utilização do modelo tradicional, sua utilização é facilitada pela obtenção de formas fechadas para os preços das opções de compra europeias.

## REFERÊNCIAS

- ADAMS, Gil; YUAN, Yuhua; KELLY, Michael. Comments on 'A theory of non-Gaussian option pricing'. **Quantitative Finance**, Bristol, v. 7, n. 6, p. 697–699, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.cond-mat/0205078>. Acesso em: 2 ago. 2023.
- BLACK, Fischer; SCHOLES, Myron. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of political economy**, Chicago, v. 81, n. 3, p. 637–654, 1973. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/1831029>. Acesso em: 2 ago. 2023.
- BORLAND, Lisa. A theory of non-Gaussian option pricing. **Quantitative Finance**, Bristol, v. 2, n. 6, p. 415–431, 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.cond-mat/0205078>. Acesso em: 2 ago. 2023.
- BORLAND, Lisa. Erratum: A theory of non-Gaussian option pricing. **Quantitative Finance**, Bristol, v. 2, n. 6, p. 415–431, 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.cond-mat/0205078>. Acesso em: 2 ago. 2023.
- COX, John C; ROSS, Stephen A. The valuation of options for alternative stochastic processes. **Journal of financial economics**, Amsterdam, v. 3, n. 1-2, p. 145–166, 1976. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(76\)90023-4](https://doi.org/10.1016/0304-405X(76)90023-4). Acesso em: 2 ago. 2023.
- DERMAN, Emanuel; ERGENER, Deniz; KANI, Iraj. Static options replication. **Journal of Derivatives**, New York, v. 2, n. 4, 1995. Disponível em: <https://www.pm-research.com/content/ijderiv/2/4/78>. Acesso em: 2 ago. 2023.
- DERMAN, Emanuel; MILLER, Michael B. **The volatility smile**. Nova Jersey: John Wiley, 2016.
- ERAKER, Bjørn; JOHANNES, Michael; POLSON, Nicholas. The impact of jumps in volatility and returns. **The Journal of Finance**, Hoboken, v. 58, n. 3, p. 1269–1300, 2003. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.249764>. Acesso em: 2 ago. 2023.
- HAAVELMO, Trygve. The probability approach in econometrics. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, Nova York, p. iii–115, 1944. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/1906935>. Acesso em: 2 ago. 2023.
- HIRSA, Ali; NEFTCI, Salih N. **An introduction to the mathematics of financial derivatives**. San Diego: Academic press, 2013.
- HULL, John; WHITE, Alan. The pricing of options on assets with stochastic volatilities. **The journal of finance**, Hoboken, v. 42, n. 2, p. 281–300, 1987. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1987.tb02568.x>. Acesso em: 2 ago. 2023.
- JARROW, Robert A. **Volatility: new estimation techniques for pricing derivatives**. Nova York, 1998.

MARKOWITZ, Harry. Modern portfolio theory. **Journal of Finance**, Nashville, v. 7, n. 11, p. 77–91, 1952. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x>. Acesso em: 2 ago. 2023.

SAMUELSON, Paul A. Rational theory of warrant pricing. In: SELECTA, Henry P. McKean Jr. Contemporary Mathematicians book series. Berlin: Springer, 1965. P. 195–232.

SHARPE, William F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. **The journal of finance**, Hoboken, v. 19, n. 3, p. 425–442, 1964. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x>. Acesso em: 2 ago. 2023.

TALEB, Nassim Nicholas. **Dynamic hedging: managing vanilla and exotic options**. Hoboken: John Wiley, 1997. v. 64.

TALEB, Nassim Nicholas. **Statistical consequences of fat tails: Real world preasymptotics, epistemology, and applications**. Ithaca: STEM Academic Press, 2020.

TSALLIS, Constantino. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. **Journal of statistical physics**, New York, v. 52, n. 1, p. 479–487, 1988. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01016429>. Acesso em: 2 ago. 2023.