

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Conjuntos Autossimilares, Conjuntos  
Autoafins e suas Teorias de Dimensão**

por

Iuri Mielniczuk Cavallet

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Lucas da Silva Oliveira  
Orientador

Porto Alegre, julho de 2023

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Mielniczuk Cavallet, Iuri

Conjuntos Autossimilares, Conjuntos Autoafins e suas Teorias de Dimensão / Iuri Mielniczuk Cavallet.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2023.

86 p.: il.

Dissertação (mestrado)— Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2023.

Orientador: da Silva Oliveira, Lucas

Dissertação: Matemática Aplicada, Análise Aplicada Geometria Fractal, Dimensão de Hausdorff,

,

# Conjuntos Autossimilares, Conjuntos Autoafins e suas Teorias de Dimensão

por

Iuri Mielniczuk Cavallet

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

## Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Análise Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Lucas da Silva Oliveira

Banca examinadora:

Prof. Dr. Alexander Arbieto  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Alexandre Baraviera  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Elismar Oliveira  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Ignacio García  
Universidad Nacional de Mar del Plata

Dissertação apresentada em  
Abril de 2023.

Prof. Dr. Lucas da Silva Oliveira  
Coordenador



## RESUMO

No presente trabalho faremos um estudo dos conjuntos autossimilares, dos conjuntos autoafins e suas teorias de dimensão, dando ênfase nas dimensões de Hausdorff e de Minkowski desses conjuntos. Apresentamos o conceito de *Iterated Function System*, e junto a ele o teorema de Hutchinson, que garante a existência e unicidade do atrator de um IFS. Discutiremos também a *Open Set Condition* e o Teorema de Moran, que garante o cálculo da dimensão de Hausdorff através de uma fórmula simples, para conjuntos satisfazendo essa condição. Também faremos um estudo do teorema de Falconer, que permite calcular a dimensão de Hausdorff de conjuntos autoafins. Por fim, faremos uma breve análise da Fórmula de Bowen, que calcula a dimensão de Hausdorff de sistemas mais gerais, com mapas não necessariamente lineares, por meio de noções de formalismo termodinâmico.

**Palavras-chave:** Geometria Fractal, Dimensão de Hausdorff, Conjuntos Autossimilares, Conjuntos Autoafins



# ABSTRACT

In this work we will study the self-similar sets, the self-affine sets and their theories of dimension, with emphasis on the Hausdorff and Minkowski dimension of these sets. We'll present the notion of Iterated Function System along with Hutchinson's Theorem, which guarantees the existence and uniqueness of the attractor of an IFS. We'll discuss the Open Set Condition and Moran's Theorem, which guarantees the calculation of Hausdorff Dimension of sets satisfying this condition in a simple way. We also present a study on Falconer's Theorem, which present a formula for Hausdorff dimension of self-affine sets. Nevertheless, we make a brief analysis on the Bowen Formula, which permits calculating the Hausdorff dimension of more general systems, with not necessarily linear maps, using notions of thermodynamic formalism.

**Keywords: Fractal Geometry, Hausdorff Dimension, Self-similar Sets, Self-affine Sets**

# SUMÁRIO

<b>RESUMO</b>	<b>5</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>7</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2 TÓPICOS DE GEOMETRIA FRACTAL</b>	<b>14</b>
2.1 Introdução	14
2.2 Dimensão de Minkowski	14
2.2.1 Equivalentes Maneiras de Definir $N_\delta(F)$	17
2.2.2 Propriedades Operacionais da Dimensão de Minkowski	20
2.3 Dimensão de Hausdorff	23
2.3.1 Propriedades Operacionais da Dimensão de Hausdorff	26
2.3.2 Construção Pelo Conteúdo de Hausdorff	29
2.4 Cotas Inferiores para a dimensão de Hausdorff	30
2.4.1 O Princípio de Distribuição de Massa	30
2.4.2 O Teorema de Frostman	32
2.4.3 Técnicas Envolvendo Teoria do Potencial	34
2.4.4 Lema de Billingsley	37
2.5 Fractais com Estrutura Especial	39
2.5.1 Fractais Formados por Projeção	39



2.5.2	Fractais formados por Produto Cartesiano . . . . .	42
2.5.3	Fractais Formados por Interseções . . . . .	44
<b>3</b>	<b>AUTOSSIMILARIDADE E AUTOAFINIDADE . . . . .</b>	<b>45</b>
3.1	Introdução . . . . .	45
3.2	Iterated Function Systems (IFS) e seus Atratores . . . . .	45
3.3	Dimensão de Semelhança e o Teorema de Moran . . . . .	48
3.4	O Teorema da Colagem . . . . .	51
3.5	Os Conjuntos de Bedford-McMullen . . . . .	53
3.6	Conjuntos Autoafins e o Teorema de Falconer . . . . .	57
3.7	A fórmula de Bowen . . . . .	61
3.7.1	Cookie-Cutters e Repulsores . . . . .	61
3.7.2	Medidas Invariantes, Medidas de Gibbs e Resultados Básicos de Formalismo Termodinâmico . . . . .	63
3.7.3	A Fórmula de Bowen . . . . .	66
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>71</b>
4.1	Strong Open Set Condition . . . . .	71
4.2	Dimensão de Assouad . . . . .	73
4.3	Conjuntos similares em espaços projetivos . . . . .	74
<b>5</b>	<b>ANEXO . . . . .</b>	<b>75</b>
5.1	Teoremas Essenciais de Topologia e Análise Funcional . . . . .	75

5.2	Completude de $(K(\mathbb{R}^n), d_H)$ e compacidade de $(P(K), L)$ . . . . .	79
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .	<b>86</b>

# 1 INTRODUÇÃO

O que é um fractal? A resposta dessa pergunta está intimamente ligada com a talvez mais interessante pergunta "O que é dimensão fractal"? E ambas devem ser respondidas com cautela. Um fractal pode ser definido como aquilo que possui dimensão de Hausdorff não-inteira. O problema aqui é que assim perdemos conjuntos importantes dentro da matemática, como certos conjuntos de Cantor generalizados (O conjunto Cantor de Smith-Volterra é um exemplo). Para Benoît Mandelbrot, o matemático que cunhou o termo fractal, se fosse definir fractal usaria a definição de que um fractal é aquilo que possui dimensão topológica estritamente menor que a de Hausdorff. Embora neste trabalho não faremos um estudo sobre dimensão topológica, podemos afirmar que mesmo essa tão usada definição exclui conjuntos interessantes, como a Curva de Takagi.

A noção de dimensão fractal é a ferramenta que serve para que possamos caracterizar as diferenças que a topologia e a geometria clássica não captam, o que pode ser expressado ao estudarmos o conjunto de Cantor. A definição de fractal aqui adotada segue nas linhas de [7], pois julgamos que é melhor ser abrangente com conjuntos interessantes e patológicos do que se arriscar a excluí-los por tecnicidades. A definição de Falconer diz que devemos chamar de fractais conjuntos que tendam a apresentar características tais como riqueza de detalhes em escalas arbitrárias, dificuldade em expressar na linguagem geométrica clássica e alguma forma de autossimilaridade, que é um dos focos da dissertação (capítulo 3). Por vezes no presente

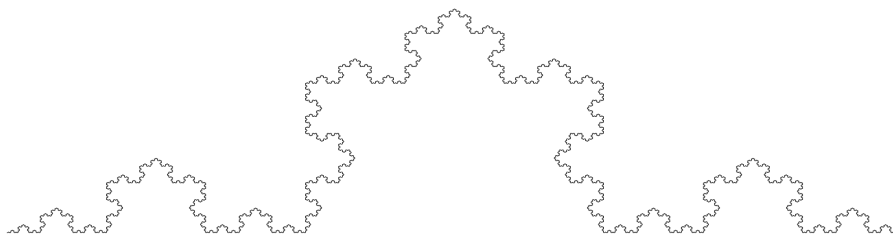


Figura 1.1: Curva de Koch. Fonte: Wikimedia Commons

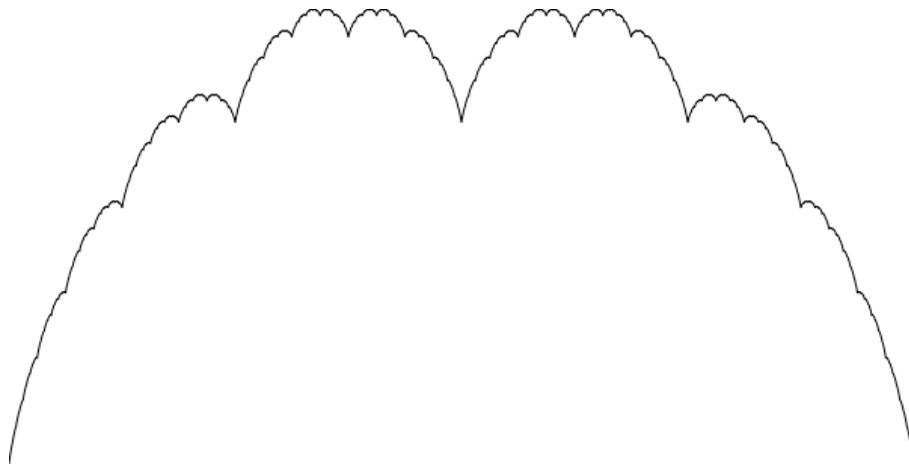


Figura 1.2: Curva de Takagi (Blancmange curve). Fonte: Wikimedia Commons

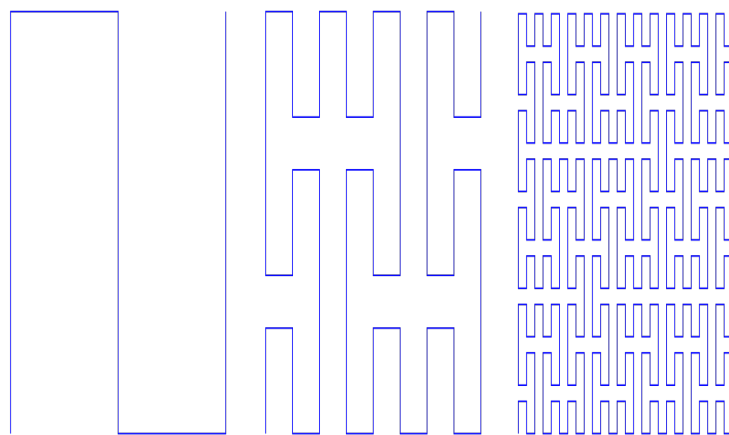


Figura 1.3: Curva de Peano. Fonte: Wikimedia Commons

trabalho falaremos em fractal pensando em conjuntos que satisfazem a proposta de Falconer, mas em princípio para nós aquilo que futuramente transformar-se-á no objeto de estudo fractal serão os conjuntos compactos do espaço euclidiano, pois assim podemos fortalecer a teoria aqui apresentada.

Também no presente trabalho é fundamental o conceito de autossimilaridade e o de autoafinidade, que são propriedades de invariância pela ação de certos mapas que estudaremos mais adiante; também estudaremos medidas invariantes para conjuntos autoafins/autosimilares, que são de grande valia para o cálculo

da dimensão de Hausdorff (pois precisamos cotar esta quantidade tanto por cima, o que pode ser feito calculando outra dimensão, como a de Minkowski, por exemplo, quanto por baixo, o que nos é possibilitado pelo uso de teoremas que envolvem a existência de medidas, como o Princípio de Distribuição de Massa e o Teorema de Frostman. Estudaremos os conceito de autossimilaridade por meio de IFS, donde provaremos a existência e unicidade do atrator pelo Teorema de Hutchinson e provaremos uma fórmula que permite calcular de forma relativamente fácil a dimensão de Hausdorff do atrator de um IFS de semelhanças; nossa abordagem de conjuntos autoafins começará específica, com o estudo dos conjuntos de Bedford-McMullen, e depois estudaremos o caso geral, pelo Teorema de Falconer. Também veremos a Fórmula de Bowen, que nos permite encontrar a dimensão de Hausdorff em casos ainda mais gerais que os autoafins, pois nesses casos não há necessariamente linearidade ou afinidade de transformações envolvidas.

Estruturalmente, temos que o capítulo 2 versa sobre alguns tópicos de geometria fractal necessários para entendermos o restante da dissertação baseando-se essencialmente nos livros [7], [9], [11], [4] e [20]; o capítulo três se concentra em tópicos sobre autossimilaridade e autoafinidade (com um enfoque central no teorema de Hutchinson), principalmente através dos artigos [15] e [10], mas fortemente fundamentado no livro [4] e a seção final tem embasamento no livro [11] e nos artigos [10] e [16]. O capítulo 4 contém alguns tópicos laterais relacionados com o problema de dimensão de conjuntos autosimilares e autoafins quando não temos as condições de Moran satisfeitas, e também serve como um motivador para projetos futuros.

## 2 TÓPICOS DE GEOMETRIA FRACTAL

### 2.1 Introdução

No presente capítulo discutiremos alguns tópicos básicos de Geometria Fractal essenciais para o resto do texto, donde destacamos a dimensão de Minkowski (seção 1), a dimensão de Haudorff (seção 2) e técnicas específicas para o cálculo de dimensão de Hausdorff, donde destacamos o Princípio de Distribuição de Massa, o Lema de Billingsley, o Teorema de Frostman e métodos envolvendo a Teoria do Potencial (seção 3).

### 2.2 Dimensão de Minkowski

Embora nosso objetivo principal seja entender aspectos do cálculo da dimensão de Hausdorff, é extremamente importante entendermos como é definida e calculada a dimensão de Minkowski, uma vez que ela é uma cota superior para a dimensão de Hausdorff, a qual é de difícil cálculo via definição, deixando-nos sob a esperança de cotar por cima e por baixo.

**Definição 2.2.1.** *Dado um subconjunto compacto  $F$  do espaço euclidiano  $n$ -dimensional, iremos denotar por  $N_\delta(F)$  o menor número de subconjuntos e diâmetro no máximo  $\delta$  necessários para cobrir  $F$ .*

O próximo exemplo, nos mostra como associar o cálculo de  $N_\delta(F)$  de forma heurística com nossa intuição do que deveria ser a dimensão de  $F$ .

**Exemplo 2.2.1.** *Tome  $F = [a, b]$  um intervalo fechado da reta; observe que na reta real, se quisermos cobrir usando subconjuntos  $U_j$  arbitrários de diâmetro no máximo  $\delta$ , iremos precisar de no mínimo tantos conjuntos quanto precisaríamos de intervalos fechados de comprimento  $\delta$  (já que intervalos fechados de comprimento  $\delta$  são válidos*

para uma  $\delta$ -cobertura). Dessa forma, se  $\{I_j\}$  é um intervalo fechado com  $|I_j| = \delta$ , precisaremos de no mínimo  $(b - a)/\delta$  tais intervalos para cobrir  $F$ . Dessa forma,

$$N_\delta(F) \geq (b - a)\delta^{-1}. \quad (2.1)$$

Por outro lado, fixado  $\delta$ , se particionarmos o intervalo  $F$  de acordo com o conjunto  $A = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b\}$ , onde cada  $x_j$  é dado por

$$x_j = a + \frac{(b - a)j}{N} \text{ para } j = 0, \dots, N \quad (2.2)$$

com  $(b - a)/N = \delta/2$ , então a coleção de intervalos  $\{I_j\}$  com  $I_j = [x_j, x_{j-1}]$  para cada  $1 \leq j \leq N$  forma uma  $\delta$ -cobertura de  $F$ :

- $F \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j$  e
- $|I_j| = (b - a)/N = \delta/2 < \delta$ .

Isso nos diz que  $N_\delta(F) \leq N$  e, como,  $N = 2(b - a)/\delta$ , vemos que

$$N_\delta(F) \leq 2(b - a)\delta^{-1}. \quad (2.3)$$

Combinando (2.2) e (2.3), obtemos

$$N_\delta(F) \simeq \delta^{-1}. \quad (2.4)$$

**Definição 2.2.2.** *Seja  $F$  um subconjunto compacto não-vazio do espaço euclidiano  $n$ -dimensional. As dimensões de Minkowski inferior ou superior de  $F$  são definidas por:*

$$\underline{\dim}_M(F) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}, \quad (2.5)$$

$$\overline{\dim}_M(F) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}. \quad (2.6)$$

Por definição,  $\underline{\dim}_M(F) \leq \overline{\dim}_M(F)$  e, quando a igualdade é atingida, denotaremos esse valor comum por  $\dim_M(F)$ , e o chamaremos de dimensão de Minkowski de  $F$ , ou seja,

$$\dim_M(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}. \quad (2.7)$$

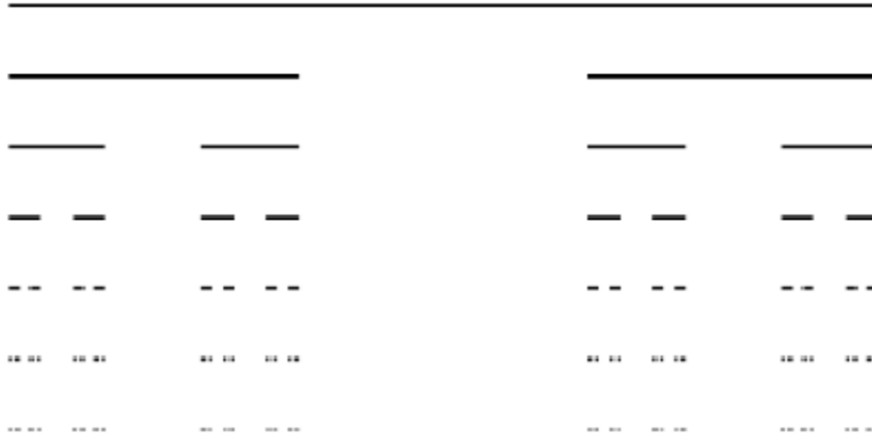


Figura 2.1: Construção do conjunto de Cantor. Fonte: Wikimedia Commons

**Observação 2.2.1.** *O estudo do exemplo anterior nos mostra heurísticamente que a dimensão de Minkowski de  $F$  detecta uma mudança no regime da quantidade  $\lim_{\delta \rightarrow 0} N_\delta(F)\delta^s$ : essencialmente, tal limite sofre um salto de  $\infty$  para zero ao cruzar o valor  $s = \dim_M(F)$ , visto que a dimensão de Minkowski é o expoente  $s$  tal que o menor número necessário de conjuntos de diâmetro no máximo  $\delta$  necessários para cobrir  $F$ ,  $N_\delta(F)$ , obedece a uma lei  $N_\delta(F) = c\delta^{-s}$  para alguma constante positiva  $c$ . Usando tal relação, chegamos nas fórmulas de dimensão de Minkowski que definimos anteriormente.*

**Exemplo 2.2.2** (Dimensão de Minkowski do Conjunto de Cantor Ternário  $C$ ). *Se  $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k+1}$ , então os  $2^k$  intervalos de da etapa  $k$ , cujos comprimentos são  $3^{-k}$  provêm uma  $\delta$ -cobertura para  $C$ , de modo que  $N_\delta(C) \leq 2^k$ . Portanto  $\overline{\dim}_M(C) \leq \limsup \frac{\log 2^k}{-\log 3^{-k+1}} = \log_3 2$ . Por outro lado, qualquer intervalo de comprimento  $\delta$  com  $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$  intersesta no máximo um dos intervalos de comprimento  $3^{-k}$  da etapa  $k$  (o buraco entre os intervalos da etapa  $k$  é mede pelo menos  $3^{-k}$ ). Há  $2^k$  tais intervalos, todos contendo pontos de  $C$ , logo são necessários pelo menos  $2^k$  intervalos para cobrir  $C$ . Portanto,  $N_\delta(C) \geq 2^k$ , logo  $\underline{\dim}_M(C) \geq \liminf \frac{\log 2^k}{-\log 3^{-k-1}} = \log_3 2$ .*





Figura 2.2: Iterações do Sierpinski. Fonte: Wikimedia Commons

**Exemplo 2.2.3** (Dimensão de Minkowski do Triângulo de Sierpinski  $S$ ). *Vamos explicar como se dá a construção do mesmo. A  $k$ -ésima etapa da construção do Triângulo de Sierpinski  $S$  consiste em  $3^k$  triângulos equiláteros de lado e diâmetro  $2^{-k}$ . Logo, se  $2^{-k} < \delta < 2^{-k+1}$ , os  $3^k$  triângulos da etapa dão uma  $\delta$ -cobertura para  $S$ , logo  $N_\delta(S) \leq 3^k$ . Então  $\overline{\dim}_M(S) \leq \limsup \frac{\log 3^k}{-\log 2^{-k+1}} = \log_2 3$ . Por outro lado, qualquer conjunto de diâmetro  $\delta$ , com  $2^{-k-1} \leq \delta < 2^{-k}$  intersesta no máximo três triângulos da etapa  $k$  (tal conjunto não pode intersestar dois triângulos distantes  $2^k$  ou mais). Existem  $3^k$  triângulos na  $k$ -ésima etapa, todos contendo pontos de  $S$ , logo pelo menos  $3^{k-1}$  conjuntos de diâmetro  $\delta$  ou menos são requeridos para cobrir  $S$ . Logo  $N_\delta(S) \geq 3^{k-1}$ , portanto  $\underline{\dim}_M(S) \geq \frac{\log 3^{k-1}}{-\log 2^{-k-1}} = \log_2 3$ .*

### 2.2.1 Equivalentes Maneiras de Definir $N_\delta(F)$

**Definição 2.2.3.** *Um  $\delta$ -mesh do espaço euclidiano  $n$ -dimensional é uma família de  $n$ -cubos da forma  $[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \dots \times [m_n\delta, (m_n + 1)\delta]$ , onde  $m_1, \dots, m_n$  são inteiros.*

A definição acima é a única que necessita uma explicação mais detalhada, já que a mesma fará parte do teorema seguinte:

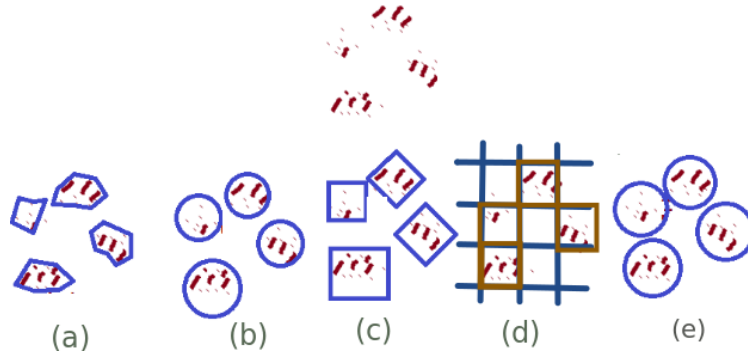


Figura 2.3: Diferentes maneiras de escolher o  $N_\delta$ . Fonte: Autor.

**Teorema 2.2.1.** *Dado  $\delta > 0$ , a quantidade  $N_\delta(F)$  de um compacto não-vazio  $F$  de  $\mathbb{R}^d$  pode ser tomada como qualquer uma das seguintes quantidades:*

- (a)  $N_\delta^a(F)$ : *O menor número de conjuntos de diâmetro no máximo  $\delta$  que cobrem  $F$  (essa é a nossa definição atual de  $N_\delta(F)$ );*
- (b)  $N_\delta^b(F)$ : *O menor número de bolas fechadas de raio  $\delta$  que cobrem  $F$ ;*
- (c)  $N_\delta^c(F)$ : *O menor número de cubos de lado  $\delta$  que cobrem  $F$ ;*
- (d)  $N_\delta^d(F)$ : *O número de cubos em um  $\delta$ -mesh que tocam  $F$ ;*
- (e)  $N_\delta^e(F)$ : *O maior número de bolas disjuntas de raio  $\delta$  centradas em  $F$ .*

*Demonstração.* (Prova parcial) Provaremos duas das igualdades, nos aproveitando da transitividade. Por razões históricas e até mesmo computacionais, obter a equivalência  $N_\delta^a(F) = N_\delta^c(F)$  é interessante, pois justifica o nome box-counting que também é atribuído à dimensão de Minkowski.

Como os cubos provêm uma coleção de conjuntos de diâmetro  $\delta\sqrt{d}$  que cobrem  $F$ , é claro que  $N_{\delta\sqrt{d}} \leq N_\delta^c(F)$ . Por outro lado, qualquer conjunto de diâmetro no máximo  $\delta$  está contido em  $3^d$  cubos em um  $\delta$ -mesh, pois podemos escolher um cubo contendo algum ponto de  $F$  junto de seus cubos vizinhos. Então

$N_\delta^c(F) \leq 3^d N_\delta(F)$ . Dividindo por  $-\log \delta$  as inequações combinadas e tomando o limite quando  $\delta \rightarrow 0$  o resultado segue.

As outras demonstrações são similares, diferindo essencialmente nos tamanhos análogos a  $\delta\sqrt{d}$  e em como é feita a cobertura, trocando o  $3^d$  por alguma constante análoga conforme o caso. Algumas delas estão feitas em [7].

□

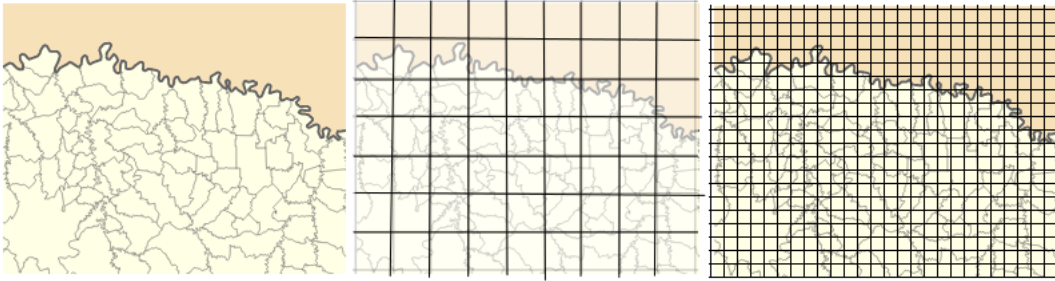


Figura 2.4: Parte da Fronteira Norte do Estado do RS. Fonte: Autor

**Exemplo 2.2.4** (Estimando o número  $N_\delta(F)$ , onde  $F$  é parte da Fronteira Norte do Rio Grande do Sul). *Espalhe um 1–mesh sobre o mapa do RS conforme o mapa do meio na figura acima e depois um 1/9–mesh sobre o mapa do RS conforme o mapa da direita na mesma figura.*

*Na figura do meio, temos que  $N_1(F) = 12$ , pois são 12 caixas nessa 1–mesh que tocam a fronteira norte do RS; na figura da direita, temos que  $N_{1/9}(F) = 45$ , pois são 45 caixas nessa 1/9–mesh que tocam a fronteira norte do RS.*

*Supondo heurísticamente que 45 seja tão bom quanto pudermos aproximar, então esse seria nosso valor no limite, ou seja,  $\dim_M(F) \approx \frac{\log(45)}{-\log(1/9)} = \log_9(45) = 1 + \log_9(5) \approx 1.7325$ .*

## 2.2.2 Propriedades Operacionais da Dimensão de Minkowski

É notável o apelo computacional que temos para calcular a dimensão de Minkowski, devido à sua definição. Porém o fato de não provir de uma medida dá características intrínsecas indesejáveis na dimensão de Minkowski, como veremos a seguir.

**Teorema 2.2.2** (Propriedades Operacionais da Dimensão de Minkowski). *Valem as seguintes propriedades:*

- a. Se  $E \subseteq F$ , então  $\dim_M(E) \leq \dim_M(F)$ ;
- b. Se  $F$  for um conjunto finito,  $\dim_M F = 0$ ;
- c.  $\overline{\dim}_M(E \cup F) = \max\{\overline{\dim}_M E, \overline{\dim}_M F\}$ ;
- d. Se  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^d$  for bi-Lipschitz, então  $\dim_M F = \dim_M f(F)$ ;
- e.  $0 \leq \underline{\dim}_M(F) \leq \overline{\dim}_M(F) \leq n$ ;
- f.  $\overline{\dim}_M(F) = \overline{\dim}_M(\overline{F})$  e  $\underline{\dim}_M(F) = \underline{\dim}_M(\overline{F})$ ;
- g. Existe coleção  $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$  tal que  $\overline{\dim}_M(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \neq \max_{1 \leq i < \infty} \{\overline{\dim}_M(F_i)\}$ ;
- h. Existem  $F$  enumeráveis tais que  $\dim_M(F) \neq 0$ .

*Demonstração.* Vamos provar cada um dos itens separadamente:

- a. Segue diretamente do fato de  $N_\delta(E) \leq N_\delta(F)$ , visto que um conjunto que está na cobertura de  $F$  pode ser considerado como na cobertura de  $E$ .
- b. Basta cobrir  $F$  com seus próprios pontos como abertos isolados e concluir que para  $\delta$  suficientemente pequeno temos que a dimensão de Minkowski vai a zero, pois  $N_\delta(F)$  é uma constante.

c. De fato, note que  $N_\delta(E) \subseteq N_\delta(F)$ , o que nos dá duas possibilidades: A primeira, na qual  $\overline{\dim}(E \cup F) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(E \cup F)}{-\log \delta} \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{N_\delta(F)}{-\log \delta} + \log 2 \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{-\log \delta} = \overline{\dim}_M(F)$ . E a segunda, na qual  $N_\delta(F) \leq N_\delta(E)$  implica  $\overline{\dim}_M(E \cup F) \leq \overline{\dim}_M(E)$ . Por fim, basta tomar o máximo nos dois casos e obter o resultado. Note que indutivamente este argumento se generaliza. Não vale uma propriedade análoga para a  $\underline{\dim}_M$ , e a construção de um conjunto que mostre isso pode ser vista em [8].

d. Suponha primeiro que  $f$  seja apenas Lipschitz. Se  $\{U_i\}$  for  $\delta$ -cobertura de  $F$ ,  $\{U_i \cap F\}$  também o é. Então  $\{f(U_i \cap F)\}$  é uma  $c\delta$  cobertura de  $F$ , pois  $|f(U_i \cap F)| \leq c|U_i \cap F| \leq c|U_i| \leq c\delta$ . Então temos  $N_{c\delta}(f(F)) \leq N_\delta F$ , para todo  $\delta > 0$ , o que implica  $\frac{\log N_{c\delta}(f(F))}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$ .

Como  $-\log \delta = \log\left(\frac{1}{\delta}\right) = \log\left(\frac{c}{c\delta}\right) = \log c - \log c\delta$ , temos que  $\frac{N_{c\delta}(f(F))}{\log c - \log c\delta} \leq \frac{N_\delta(F)}{-\log \delta}$  basta aplicar os limites superior e inferior.

e. Considere um cubo  $C$  contendo  $F$  e conte os conjuntos do  $\delta$ -mesh conveniente; para alguma constante  $c$ , temos então  $N_\delta(F) \leq N_\delta(C) \leq c\delta^n$  e basta aplicar logaritmo e tirar o limite superior.

f. Usando a caracterização de  $N_\delta(F)$  como o menor número de bolas fechadas de raio  $\delta$  que cobrem  $F$ , basta então tomar uma coleção finita  $\{B_1, \dots, B_k\}_{k=1}^N$  de bolas fechadas de raio  $\delta$ , cuja reunião  $\bigcup_{k=1}^N B_k$  contém  $F$  se, e somente se, contém  $\overline{F}$ . Logo temos que  $N_\delta(F) = N_\delta(\overline{F})$ , e o resultado segue.

g. Vide Exemplo 2.2.5.

h. Vide Exemplo 2.2.6.

□

**Exemplo 2.2.5.**  $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = F$  é um exemplo de quando a dimensão de Minkowski de um conjunto enumerável pode dar diferente de zero, o que pode ser observado facilmente através da propriedade de invariância dessa dimensão pelo fecho, ou seja,  $\dim_M(F) = \dim_M(\overline{F}) = 1$ .

Podemos também usar esse conjunto para mostrar que a dimensão de Minkowski não possui estabilidade enumerável, pois se valesse tal propriedade, poderíamos escrever  $F = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ , então  $\overline{\dim}_M(F) = \overline{\dim}_M(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{x_i\}) = \max_{1 \leq i < \infty} \{\overline{\dim}_M(\{x_i\})\} = 0$ , o que seria absurdo.

**Exemplo 2.2.6.**  $F = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$  é um exemplo de quando a dimensão de Minkowski é  $1/2$ .  $\dim_M(F) = \dim_M(\overline{F})$ , e a de seu fecho  $\overline{F} = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ , é  $\frac{1}{2}$ , e esse conjunto nada mais é do que a sequência  $x_n = 1/n$  acrescida do seu limite (zero), algo muito distinto do que gostaríamos de classificar como um **conjunto fractal**: um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  com algum tipo de estrutura curiosa, que (muito possivelmente) tenha medida zero e dimensão diferente de zero. Esse fato pode ser demonstrado da seguinte forma: tome  $\delta$  em  $(0, 1/2)$  e  $k \in \mathbb{N}$  satisfazendo a relação  $\frac{1}{k^2 + k} \leq \delta < \frac{1}{k^2 - k}$ .

Se  $|U| \leq \delta$ , então  $U$  pode cobrir no máximo um ponto de

$F_k = \{1, 1/2, \dots, 1/k\}$  desde que qualquer distância entre qualquer par de pontos de  $F_k$  é no mínimo  $\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} = \frac{1}{k(k-1)} > \delta$ . Logo, são necessários  $k$  subconjuntos de diâmetro  $\delta$  para cobrir  $F_k$  e, portanto,  $N_{\delta}(F) \geq k$  de onde segue que

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_M(F) &= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(F)}{-\log \delta} \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log k}{\log k(k+1)} \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log k}{2 \log k + \log(1 + 1/k)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Usando a mesma escolha de  $\delta$ , com  $k+1$  intervalos de comprimento  $\delta$  cobrimos o intervalo  $[0, 1/k]$  e deixamos apenas  $k-1$  pontos de  $F$  de fora: cada um desses pontos pode ser coberto com mais  $k-1$  intervalos de diâmetro  $\delta$ . Assim,  $N_{\delta} \leq 2k$  e, desse forma,

$$\begin{aligned}\overline{\dim}_M(F) &= \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2k}{\log k(k-1)} \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2 + \log k}{2 \log k + \log(1 - 1/k)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Logo, acabamos de concluir que  $\frac{1}{2} \leq \underline{\dim}_M(F) \leq \overline{\dim}_M(F) \leq \frac{1}{2}$  e, portanto,  $\dim_M(F) = \frac{1}{2}$ .

## 2.3 Dimensão de Hausdorff

A dimensão de Hausdorff, por provir de uma medida exterior, a qual definiremos a seguir, possui propriedades interessantes que a dimensão de Minkowski não possui.

**Definição 2.3.1** (Medida de Hausdorff). *Seja  $\delta > 0$ , considere a  $\delta$ -cobertura de um conjunto do espaço euclidiano  $n$ -dimensional. Defina a seguinte quantidade:*

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as  $\delta$ -coberturas de  $F$ . Definimos a medida de Hausdorff  $s$ -dimensional de  $F$  por

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

**Observação 2.3.1.** *Observe que o limite definindo a medida de Hausdorff  $s$ -dimensional sempre existe, pois  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  é monótona em  $\delta$ . Mais informações sobre podem ser encontradas abaixo bem como no livro de Falconer [7].*

No que segue, fixemos  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $0 < \delta < 1$ . Como  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  é não-crescente com  $\delta$ , vemos que  $\mathcal{H}^s(F)$  também é não-crescente. Além disso, fixado  $\delta$ , se  $s > t$ , temos que para uma  $\delta$ -cobertura  $\{U_j\}$  vale

$$\sum_{j=1}^{\infty} |U_j|^s \leq \sum_{j=1}^{\infty} |U_j|^{s-t} |U_j|^t \leq \delta^{s-t} \sum_{j=1}^{\infty} |U_j|^t;$$

tomando os ínfimos em  $\delta$ , obtemos as informações sobre como comparar as quantidades  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  e  $\mathcal{H}_\delta^t(F)$  :

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \delta^{s-t} \mathcal{H}_\delta^t(F). \quad (2.8)$$

Da relação em (2.8), descobrimos algo curioso:

- Se  $\mathcal{H}^t(F) < \infty$  e se fizermos  $\delta \rightarrow 0$ , então  $\mathcal{H}^s(F) = 0$  para todo  $s > t$ ;
- Se  $\mathcal{H}^s(F) > 0$  e se fizermos  $\delta \rightarrow 0$ , descobriremos que  $\mathcal{H}^t(F) = \infty$  para todo  $t < s$ .

Isso nos mostra que se fizermos um gráfico de  $\mathcal{H}^s(F)$  contra  $s$ , teremos um valor crítico  $s_c$  no qual  $\mathcal{H}^s(F)$  pula de  $\infty$  para 0(zero):



Figura 2.5: Gráfico de Medida de Hausdorff por  $s$ . Fonte: Autor.

**Definição 2.3.2.** Definimos a dimensão de Hausdorff de um conjunto  $F$  por ,.

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0; \mathcal{H}^s(F) = 0\}$$

**Observação 2.3.2.** Note que também temos  $\dim_H F = \sup\{s \geq 0; \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$  e que, como veremos abaixo, o que acontece com a medida do conjunto em questão nesse ponto pode variar de conjunto para conjunto: podemos ter medida finita ou mesmo infinita no ponto de transição. Por exemplo, considere uma curva suave  $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ; não é difícil de verificarmos que  $\dim_H(C) = 1$ , mas como  $\mathcal{H}^1(C)$  pode ser finita ou infinita (dependendo do comprimento da curva), vemos que as duas possibilidades são válidas.



Diferentemente da noção de dimensão de Minkowski, a dimensão de Hausdorff vem associada a um processo de identificar para qual valor de  $s$  existe um conceito de *medida natural* sobre o conjunto  $F$ . Vamos ser um pouco mais precisos sobre isso, explicando o que a palavra medida significa nesse contexto.

Dado  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ , diremos que  $\mu$  é uma **medida exterior** se valem as seguintes propriedades

$$(E1) \quad \mu(\emptyset) = 0;$$

$$(E2) \quad \text{Se } F, E \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \text{ com } F \subseteq E, \text{ então } \mu(F) \leq \mu(E);$$

$$(E3) \quad \mu(\cup_{k \geq 1} E_k) \leq \sum_{k \geq 1} \mu(E_k) \text{ para cada sequência } \{E_k\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

O teorema de Caratheodory [7] nos diz que a partir de uma medida exterior podemos obter uma  $\sigma$ -álgebra (os conjuntos mensuráveis no sentido de Caratheodory) e obter uma medida ao restringirmos a medida exterior a essa classe de conjuntos. O resultado seguinte nos mostra que a medida de Hausdorff introduzida acima está nessa classe de medidas; um resultado que não vamos demonstrar é que ela se torna uma medida quando restrita, por exemplo, aos borelianos de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 2.3.1.** *A medida de Hausdorff é uma medida exterior.*

*Demonstração.* É claro que  $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = 0$ , donde segue que  $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ .

Seja  $E \subseteq F$ . Como uma cobertura de  $F$  cobre  $E$ , também segue facilmente a monotonicidade. Para a subaditividade, fixe  $\delta$  e tome  $\epsilon > 0$ . Podemos cobrir cada conjunto  $F_n$  com a cobertura  $\{E_{n,k}\}_{k=1}^\infty$  tal que  $|E_{n,k}| < \delta$  para cada  $k$  e  $\sum_{k=1}^\infty |E_{n,k}|^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(F_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$ . Note que  $\{E_{n,k}\}_{n,k \in \mathbb{N}}$  é uma cobertura para  $\bigcup_n F_n$ . Daí,  $\mathcal{H}_\delta^s(\bigcup_n F_n) \leq \sum_{n,k} |E_{n,k}|^s \leq \sum_n \mathcal{H}_\delta^s(F_n) + \epsilon \leq \sum_n \mathcal{H}^s(F_n) + \epsilon$ , donde basta fazer  $\epsilon, \delta \rightarrow 0$ .  $\square$

**Observação 2.3.3.** *Cabe ressaltar que no estudo que segue, vamos lidar o conceito de distribuições de massa sobre conjuntos: nada mais são do que medidas exteriores*

com propriedades especiais de suporte. Portanto, o conceito de medida exterior vai estar presente em todo esse trabalho.

Finalizamos essa seção com um exemplo elucidativo de como pode ser difícil calcular a dimensão de Hausdorff de um conjunto

**Exemplo 2.3.1** (Conjunto de Cantor). *Considere o conjunto de Cantor  $C$ . Temos uma  $3^{-k}$ -cobertura dada naturalmente pela construção, de modo que  $\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(C) \leq 2^k 3^{-ks} = 1$  se  $s = \log_3 2$ . Fazendo  $k \rightarrow \infty$  nos dá que  $\mathcal{H}^s(C) \leq 1$ . Por outro lado, seja  $\{U_i\}$  uma cobertura qualquer de  $C$ . Pela compacidade de  $C$ , podemos apenas verificar o caso no qual  $\{U_i\}$  é coleção finita de subintervalos fechados de  $[0, 1]$  com interior não vazio. Para cada  $U_i$ , seja  $k$  o inteiro tal que  $3^{-k-1} \leq |U_i| < 3^{-k}$ . Então  $U_i$  pode interseccionar no máximo um intervalo na  $k$ -ésima etapa de construção, pois a separação entre esses intervalos é de pelo menos  $3^{-k}$ . Se  $j \geq k$ , então, por construção,  $U_i$  intersecciona no máximo  $2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s |U_i|^s$  intervalos da  $j$ -ésima etapa. Tomando  $j$  grande o suficiente e contando os intervalos, chegamos a  $2^j \leq \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s$ , o que prova  $\sum_i |U_i|^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s}$ , garantindo que a  $\dim_H(C) = \log_2 3$*

Como vimos, calcular a dimensão de Hausdorff pela definição pode ser um pouco enfadonho. Ainda assim, é natural que nos aproveitemos de suas propriedades e técnicas clássicas para este cálculo.

### 2.3.1 Propriedades Operacionais da Dimensão de Hausdorff

A dimensão de Hausdorff satisfaz não só as propriedades úteis da dimensão de Minkowski, como também não sofre de algumas das propriedades indesejáveis da mesma.

**Teorema 2.3.2** (Propriedades Operacionais da Dimensão de Hausdorff). *Seja  $F$  um compacto não-vazio do espaço euclidiano  $d$ -dimensional. Então é válido que:*

(a) Se  $E \subseteq F$ , então  $\dim_H E \leq \dim_H F$ .

(b) Se  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  for bi-Lipschitz, então  $\dim_H F = \dim_H f(F)$ .

(c) Se  $\{F_i\}_{i=1}^\infty$  for uma coleção de compactos não vazios, vale a estabilidade enumerável:

$$\dim_H \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sup_{1 \leq i < \infty} \{ \dim_H F_i \}.$$

(d) Se  $F$  for enumerável,  $\dim_H F = 0$ .

(e)  $0 \leq \dim_H(F) \leq d$

*Demonstração.* Provaremos o teorema item por item:

- a. Segue diretamente de que  $\mathcal{H}^s$  é uma medida exterior.
- b. Usaremos que se  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$  for Lipschitz, então  $\dim_H(f(F)) \leq \dim_H(F)$  para mostrar que se  $g : F \rightarrow \mathbb{R}^n$  for bi-Lipschitz, então  $\dim_H(g(F)) = \dim_H(F)$ . De fato, se  $s > \dim_H(F)$ , podemos obter

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F) = 0,$$

o que implica que  $\dim_H(f(F)) \leq s$  para todo  $s > \dim_H(F)$ . Agora basta então aplicar a propriedade de ser Lipschitz à  $g^{-1}$ : como para qualquer  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  vale  $\dim_H(g^{-1}(G)) \leq \dim_H(G)$ , tomando  $G = g(F)$ , segue que  $\dim_H(F) \leq \dim_H(g(F)) \leq \dim_H(F)$  para  $g$  bi-Lipschitz.

- c. Sejam  $F_1, F_2, \dots$  conjuntos. Então  $\dim_H \bigcup F_i \geq \dim_H F_j$ , por monotonicidade. Por outro lado, se  $s > \dim_H(F_i)$  para todo  $i$ , todos os  $F_i$  têm medida zero, logo  $\mathcal{H}^s(\bigcup F_i) \leq \sum_i \mathcal{H}^s(F_i) = 0$ , o que prova a propriedade.
- d. Basta usar a estabilidade enumerável e cobrir cada ponto por seu respectivo conjunto unitário.

e. Basta cobrir por uma  $\delta$ -mesh e perceber que todo subconjunto do espaço euclidiano  $d$ -dimensional é uma união enumerável de limitados, o que nos leva ao resultado usando a subaditividade enumerável de  $\mathcal{H}^s(F)$ , uma vez que é uma medida exterior, se provarmos que a dimensão de Hausdorff de um cubo em  $\mathbb{R}^d$  é no máximo  $d$  (isso segue das propriedades de comparação entre as dimensões de Minkowski que provaremos abaixo).

□

O próximo resultado que iremos apresentar, é a base para o cálculo da dimensão de Hausdorff de todos os exemplos que trabalhamos nesse texto (de uma forma ou de outra); ele nos mostra ainda um dos motivos principais para termos introduzido as dimensões de Minkowski:

**Teorema 2.3.3** (Relação entre as Dimensões de Hausdorff e de Minkowski). *Para todo  $F \subseteq \mathbb{R}^d$  limitado e não-vazio,  $\dim_H(F) \leq \underline{\dim}_M(F) \leq \overline{\dim}_M(F)$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $1 < \mathcal{H}^s(F)$  para algum  $s \geq 0$ . Então, para todo  $\delta$  suficientemente pequeno,  $1 < \mathcal{H}_\delta^s(F) \leq N_\delta(F)\delta^s$ , logo  $0 < \log N_\delta(F) + s \log \delta$ , e então  $s \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} = \underline{\dim}_M(F)$ . Se  $s = \dim_H(F)$ , então está provado. Caso contrário,  $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ , e daí  $\dim_H(F) \leq s$ .

□

**Observação 2.3.4.** *Tendo em mãos uma noção de dimensão razoável considerando nossa aplicabilidade futura e estudos em Geometria Fractal, podemos então, a partir daqui, definir o que esperamos ter em mente ao usar a palavra **fractal** nesse texto. Quando dissermos fractal, teremos em mente um subconjunto compacto de  $F \subseteq \mathbb{R}^d$  tal que pelo menos um dos seguintes itens é satisfeito:*

- *A dimensão de Hausdorff é não inteira;*

- A dimensão de Hausdorff é inteira, mas há algum tipo de estrutura especial, como não poder ser descrito pela geometria clássica.

Note que isso não é rigorosamente uma definição matemática, apenas uma observação, pois definir fractal é contextualmente dependente do uso dessa palavra.

### 2.3.2 Construção Pelo Conteúdo de Hausdorff

Podemos também construir a dimensão de Hausdorff de um compacto  $F$  sem o uso de uma medida exterior prévia como a  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ , o que vemos através da definição e da proposição a seguir:

**Definição 2.3.3** (Conteúdo de Hausdorff). À quantidade

$$\mathcal{H}_\infty^s(F) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^s \right\},$$

onde o ínfimo é tomado entre todas as coberturas enumeráveis  $(U_i)$  de  $F$ , chamaremos de conteúdo de Hausdorff de  $F$ . Analogamente ao que foi feito antes, definimos

$$\dim_H^\infty(F) = \sup \{s \geq 0; \mathcal{H}_\infty^s(F) = \infty\} = \inf \{s \geq 0; \mathcal{H}_\infty^s(F) = 0\}.$$

**Teorema 2.3.4** (Equivalência das dimensões de Hausdorff).  $\dim_H^\infty(F) = \dim_H(F)$ .

*Demonstração.* Note que se  $s > \dim_H(F)$ , então para todo  $\delta > 0$  teremos  $0 = \mathcal{H}_\delta^s(F) \geq \mathcal{H}_\infty^s(F)$ . Por outro lado, se o conteúdo de Hausdorff de  $F$  for nulo, então para todo  $\delta$  positivo podemos achar cobertura  $\{U_i\}$  de  $F$  tal que  $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \leq \delta^s$ , logo esta cobertura é uma  $\delta$ -cobertura. Fazendo  $\delta$  tender a 0, obtemos  $\mathcal{H}^s(F) = 0$  e  $s \geq \dim_H(F)$ .  $\square$

**Observação 2.3.5.** Note que  $\mathcal{H}^s(F) > 0$  se, e somente se,  $\mathcal{H}_\infty^s$  e isso vai ser central nos resultados que seguem.

## 2.4 Cotas Inferiores para a dimensão de Hausdorff

### 2.4.1 O Princípio de Distribuição de Massa

Conforme visto até aqui, podemos ver que cotas superiores para a dimensão de Hausdorff podem ser calculadas pela dimensão de Minkowski. Porém há muitos fractais para os quais a dimensão de Hausdorff não é facilmente obtível pelo que foi calculado para a dimensão de Minkowski, sendo então necessária alguma técnica para cotar por baixo. O Princípio de Distribuição de Massa nos permite garantir que, sob certas condições, uma certa medida, chamada distribuição de massa, fornecer-nos-á uma cota inferior para a dimensão de Hausdorff.

**Definição 2.4.1** (Distribuição de Massa). *Chamaremos de distribuição de massa uma medida  $\mu$  suportada num subconjunto compacto  $F$  de  $\mathbb{R}^d$  tal que  $0 < \mu(F) < \infty$ , e ao valor de  $\mu(F)$  chamaremos de massa do fractal  $F$ .*

A figura que segue nos dá uma ideia de como se dá o processo de distribuição de massa usando como referência o conjunto de Cantor usual:

- No estágio 0, damos medida total igual a 1 para o único intervalo que forma  $C_0$ ;
- No estágio 1, damos medida  $1/2$  para cada um dos dois intervalos que formam  $C_1$ ;
- No estágio 2, damos medida  $1/4$  para cada um dos quatro intervalos que formam  $C_2$ ;
- Seguindo assim, no estágio  $k$  damos medida  $1/2^k$  para cada um dos  $2^k$  intervalos que formam  $C_k$  e assim sucessivamente.

- Isso nos permite construir uma distribuição de medida ao passarmos ao limite (um processo delicado que não iremos explicar aqui mas que pode ser encontrado no livro de Falconer [7])

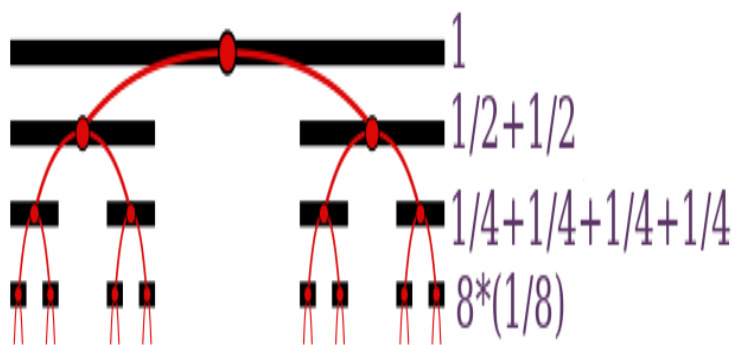


Figura 2.6: Massa sendo distribuída nas subdivisões. Fonte: Autor.

**Teorema 2.4.1** (Princípio de Distribuição de Massa). *Seja  $\mu$  uma distribuição de massa em um compacto  $F \subseteq \mathbb{R}^d$  e suponha que para algum  $s > 0$  existam  $c > 0$  e  $\epsilon > 0$  tais que  $\mu(U) \leq c|U|^s$  para todos os conjuntos  $U$  com  $|U| \leq \epsilon$ . Então  $\mu(F) \leq C\mathcal{H}^s(F)$  e  $s \leq \dim_H F$ .*

*Demonstração.* Considere  $\{U_i\}$  uma cobertura qualquer de  $F$ . Então  $F \subseteq \bigcup_i U_i$ , e daí  $0 < \mu(F) \leq \mu(\bigcup_i U_i) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq c \sum_i |U_i|^s$ , pelas propriedades da medida e usando a hipótese. Agora basta aplicar ínfimo, limite e concluir pela definição de dimensão de Hausdorff.  $\square$

**Exemplo 2.4.1** (Produto Cartesiano do Conjunto de Cantor com Intervalo). *Seja  $s = 1 + \log_3 2$ . Para cada  $k$ -ésimo intervalo de  $C$  de medida  $3^{-k}$  atribui-se a massa  $2^{-k}$  e espalha-se uniformemente ao longo dos intervalos acima de  $C$ . Assim, se  $U$  for um retângulo, com lados paralelos aos eixos coordenados, de altura  $h \leq 1$ , sobre um  $k$ -ésimo intervalo de  $C$ , temos  $\mu(U) = h2^{-k}$ , e assim qualquer conjunto  $U$  está contido num quadrado de lado  $|U|$  com lados paralelos aos eixos coordenados. Se  $3^{-k-1} \leq |U| < 3^{-k}$ , então  $U$  se encontra acima de no máximo um  $k$ -ésimo intervalo de  $C$  de lado  $3^{-k}$ , logo  $\mu(U) \leq |U|2^{-k} \leq |U|3^{-k \log_3 2} \leq |U|(3|U|)^{\log_3 2} = 3^{\log_3 2} |U|^s = 2|U|^s$ . Usando o Princípio de Distribuição de Massa, segue que  $\mathcal{H}^s(C \times [0, 1]) > \frac{1}{2}$ .*

## 2.4.2 O Teorema de Frostman

O Teorema de Frostman garante sob certas condições de controle análogas à tese do Princípio de Distribuição de Massa a existência de uma distribuição de massa tal que vale o Princípio de Distribuição de Massa para todos os borelianos dentro do conjunto, portanto pode ser pensado como uma recíproca ao Princípio de Distribuição de Massa. Iremos apresentar duas provas ao teorema, a primeira, com teor de Análise Funcional, encontrada em [26] e a segunda com ideias de Teoria Geométrica da Medida, encontrada em [24], onde podem ser encontradas as demonstrações dos lemas auxiliares nos quais nos fundamentamos aqui para preencher os detalhes.

**Teorema 2.4.2** (Teorema de Frostman). *Seja  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  um compacto com  $\mathcal{H}_s^s(E) > 0$ . Então existem uma distribuição de massa  $\mu$  suportada em  $E$  e uma constante  $C > 0$  tais que  $\mu(D) \leq C|D|^s$  para quaisquer  $D$  borelianos.*

*Demonstração.* (Teorema de Frostman - Primeira Prova) Seja  $\delta > 0$  tal que  $\mathcal{H}_s^\delta(E) > 0$ . No conjunto das funções contínuas de  $E$  em  $E$ , defina  $p(f) = \inf \{ \sum_i C_i |D_i|^s \}$ , onde o ínfimo é condicionado por  $\sum_i c_i \mathbb{I}_{D_i} \geq f$ ,  $|D_i| < \delta$ ,  $C_i \geq 0$ . Observe que como  $f$  é contínua e  $E$  é compacto, podemos garantir que  $\|f\|_\infty < \infty$ , e portanto existe uma cobertura finita por abertos  $\{U_i\}_{i=1}^N$  de diâmetro no máximo  $\delta$ , e assim obtemos  $\sum_{i=1}^N \|f\|_\infty |U_i|^s \leq N \|f\|_\infty \delta^s$ , e assim  $p(f) < \infty$ . Observe também que se  $f \leq 0$ , então  $p(f) = 0$ ;  $p(tf) = tp(f)$ , se  $t \geq 0$ ; Observe ainda que  $p(f+g) \leq p(f) + p(g)$ ; Por fim, note que  $p(f) > 0$ .

Usando os teoremas de Hahn-Banach e da Representação de Riesz (cf. Anexo), existe uma medida  $\mu$  tal que  $|\int f d\mu| \leq p(f)$  para toda  $f$  e  $\mu(E) \leq \mathbb{I}_E$ . Note que  $\mu \geq 0$ . Então temos que  $\mu(B_r(x)) = \sup \{ \int f d\mu \}$  dentre todas as  $f$  contínuas, não negativas e limitadas por  $\mathbb{I}_E$ ; para toda tal  $f$ ,  $p(f) \leq (2r)^s$  a menos de uma constante normalizadora, daí segue o resultado.  $\square$



*Demonstração.* (Teorema de Frostman - Segunda Prova) A prova terá duas partes, a primeira sendo um argumento combinatório, na qual encontraremos uma sequência de medidas suportadas em vizinhanças de  $E$  cada vez menores e na segunda parte nos convenceremos que a sequência de fato converge para a distribuição de massa  $\mu$  do enunciado.

Parte 1: Como  $\mathcal{H}_\infty^s(E) = \epsilon > 0$ , para algum  $0 \leq s \leq n$ , encontraremos  $\mu$  tal que  $\mu(\mathbb{R}^n) \geq C\epsilon$  para alguma constante  $C$  e que satisfaça  $\mu(B(x, r)) \leq Cr^s, x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ . Assumindo que  $E \subseteq [0, 1]^n$  (os detalhes podem ser encontrados em [24]), faça  $\delta = 2^{-n}$  para algum  $n$  natural e  $D_\delta$  a coleção de cubos diádicos de lado  $\delta$ , que estão contidos em  $[0, 1]^n$ . Defina  $D_\delta(E) = \{Q \in D_\delta; Q \cap E \neq \emptyset\}$  e  $E_\delta = \bigcup_{Q \in D_\delta(E)} Q$ , que está por sua vez contido em  $[0, 1]^n$ . Construa a medida  $\mu_\delta$  começando por  $\mu_\delta^0 = l(Q)^s$ , se  $Q$  estiver em  $D_\delta(E)$  e 0, se  $Q$  estiver em  $D_\delta \setminus D_\delta(E)$ . Note que ainda não temos muito controle em  $\mu_\delta^0(B(x, r))$  para  $r \gg \delta$ . Indutivamente construímos a sequência, modificando em escalas mais largas que  $\delta$ , de modo a obter as medidas  $\mu_\delta^k|_Q = \frac{l(Q)^s}{\mu_\delta^{k-1}(Q)} \cdot \mu_\delta^{k-1}|_Q$ .

Parte 2: A sequência criada converge para  $\mu_\delta$ . Notando que  $\mu_\delta$  satisfaz a cota superior do enunciado, que  $\mu_\delta(E) \geq n\mathcal{H}_\infty^s(E) = \epsilon$ . Como a sequência criada satisfaz a hipótese  $\sup_j \mu_j(K) < \infty$  para todo compacto  $K$ , existe uma Borel localmente finita e uma subsequência tal que  $\mu_{j_i} \rightarrow \mu$ ; passando a uma subsequência, se necessário, temos que existe  $\mu$  de Borel tal que  $\mu_{2^{-n}} \rightarrow \mu$ , onde  $\mu_{2^{-n}}$  é suportada em  $\overline{E_{2^{-n}}}$  segue que a medida do complementar de  $E$  é nula, que nos dá que  $\mu$  é suportada em  $E$ . Podemos também notar que  $E \subseteq B(0, M)$ , logo  $\mu(\mathbb{R}^n) \geq \mu(B(0, 2M)) \geq \limsup \mu_{2^{-n}}(B(0, 2M)) \geq \limsup \mu_{2^{-n}}(E_{2^{-n}}) \geq C\mathcal{H}_\infty^s(E)$   $\square$

### 2.4.3 Técnicas Envolvendo Teoria do Potencial

Nesta seção analisaremos os métodos que envolvem a transformada de Fourier, que é uma ferramenta muito útil não só para o cálculo da dimensão de Hausdorff, como também para a construção de exemplos interessantes de fractais.

**Definição 2.4.2.** Para  $s \geq 0$ , definimos o  $s$ -potencial em um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  resultante da distribuição de massa  $\mu$  em  $\mathbb{R}^n$  por

$$\phi_s(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s}.$$

Definimos então a  $s$ -energia de  $\mu$  como

$$I_s(\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_s(x) d\mu(x).$$

**Teorema 2.4.3.** Seja  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  compacto. Então:

- (a) Se existe uma distribuição de massa  $\mu$  sobre  $F$  com  $I_s(\mu) < \infty$ , então  $\mathcal{H}^s(F) = \infty$  e  $\dim_H(F) \geq s$ .
- (b) Se  $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ , então para todo  $0 < t < s$  existe uma distribuição de massa  $d\mu$  sobre  $F$  com  $I_t(\mu) < \infty$

**Observação 2.4.1.** A condição  $F$  compacto no teorema acima é completamente desnecessária: pelo Teorema de Frostman, sempre podemos achar um subconjunto compacto  $K \subseteq F$  com medida de Hausdorff  $s$ -dimensional finita. Para os detalhes, consulte [7] (página 78).

**Observação 2.4.2.** Usando a convenção  $1/\infty = 0$ , definimos a  $s$ -capacidade do subconjunto  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  por

$$Cap_s(F) = \left[ \inf_{\mu} I_s(\mu) \right]^{-1}, \quad (2.9)$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as medidas  $\mu$  de probabilidade definidas sobre  $F$ ; se  $I_s(\mu) = \infty$  para todas as medidas de probabilidade suportadas sobre  $F$ , então definiremos  $Cap_s(F) = 0$ .

Com essa nova definição, podemos reenunciar o teorema anterior em termos da  $s$ -capacidade:

**Teorema 2.4.4.** *Sob as hipóteses acima, temos que:*

a) *Se  $Cap_s(F) > 0$ , então  $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ .*

b) *Se  $0 < \mathcal{H}^s(F) \leq \infty$ , então para todo  $0 < t < s$  temos  $Cap_t(F) > 0$*

*Em particular, podemos definir a dimensão de Hausdorff do conjunto  $F$  em termos de sua capacidade:*

$$\dim_H(F) = \inf\{\alpha \geq 0 : Cap_\alpha(F) = 0\} = \sup\{\alpha \geq 0 : Cap_\alpha(F) > 0\}.$$

**Observação 2.4.1.** *Isso é uma ideia muito útil (como veremos em breve) e, por conta disso, apresentaremos a prova em termos da noção de capacidade, já que é com ela que iremos trabalhar daqui em diante. O caso para  $I_s(\mu)$  é completamente similar e pode ser encontrado no livro [7].*

*Demonstração.* Suponha que  $\mathcal{H}^s(F) > 0$ ; então, pelo Teorema de Frostman existe uma medida de probabilidade  $\mu$  suportada em  $F$  que satisfaz

$$\mu(B(x, r)) \leq Cr^s$$

para todas bolas  $B(x, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Tome um  $t < s$  e fixo um ponto qualquer  $x \in F$ . Sendo  $F$  compacto, existe um  $r > 0$  tal que  $|F| \leq 2^r$ ; em particular, isso nos mostra que

$$\begin{aligned} \phi_t[\mu](x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^t} d\mu(y) = \int_F \frac{1}{|x-y|^t} d\mu(y) \\ &= \sum_{k=-r}^{\infty} \int_{2^{-k-1} \leq |x-y| \leq 2^{-k}} \frac{1}{|x-y|^t} d\mu(y) \\ &\leq \sum_{k=-r}^{\infty} \mu(B(x, 2^{-k})) 2^{t(k+1)} \end{aligned}$$

$$\leq C \sum_{k=-r}^{\infty} 2^{-ks} 2^{kt} = C \sum_{k=-r}^{\infty} 2^{-k(s-t)} \leq M < \infty,$$

onde  $C, M > 0$  são independentes de  $x$ . Logo,  $I_s(\mu) \leq M \|\mu\| < \infty$  e, portanto,  $Cap_t(F) > 0$ . Isso prova o item *b*) do teorema <sup>1</sup>.

Sendo  $Cap_s(F) > 0$ , existe uma medida de probabilidade sobre  $F$  com  $I_s(\mu) < \infty$ ; logo, para  $M > 0$  suficientemente grande, o subconjunto  $F_1 \subseteq F$  definido por

$$F_1 = \left\{ x \in F : \int_F \frac{1}{|x-y|^s} d\mu(y) \leq M \right\}$$

possui medida  $d\mu$  positiva. Usando a mesma decomposição do passo anterior, temos que

$$\begin{aligned} \phi_s[\mu](x) &= \int_F \frac{1}{|x-y|^s} d\mu(y) \\ &\geq \sum_{k=-r}^{\infty} \mu(\{2^{-k-1} \leq |x-y| \leq 2^{-k}\}) 2^{ks} \\ &= \sum_{k=-r}^{\infty} (\mu(B(x, 2^{-k})) - \mu(B(x, 2^{-k-1}))) 2^{ks} \\ &= C_1 + \sum_{k=-r}^{\infty} (2^{ks} - 2^{(k-1)s}) \mu(B(x, 2^{-k})) \\ &= C_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=-r}^{\infty} 2^{ks} \mu(B(x, 2^{-k})), \end{aligned}$$

onde  $C_1 = 2^{-(r+1)s} \mu(B(x, 2^r))$ . Se tomarmos  $x \in F_1$ , a integral acima (e, por consequência, a soma) é finita. Em particular, isso implica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu(B(x, 2^{-k}))}{2^{ks}} = 0,$$

e, portanto, pelo Princípio de Distribuição de Massa isso implica que  $\mathcal{H}^s(F_1) = \infty$ : para todo  $c > 0$  vale  $c\mathcal{H}^s(F_1) \geq \mu(F_1)$  e, portanto, o resultado segue. Em particular, isso implica que  $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ , exatamente como queríamos.  $\square$

---

<sup>1</sup>Aqui estamos utilizando a notação  $\|\mu\| = \int_{\mathbb{R}^n} d|\mu|(x)$ , mas no caso de medidas de probabilidade tal quantidade vale 1.

## 2.4.4 Lema de Billingsley

Estudaremos agora um refinamento do Teorema de Frostman, cujo uso é justificado no cálculo da dimensão de Hausdorff de diversos exemplos interessantes. No que segue, fixe um número inteiro  $b \geq 2$  e para cada  $x \in [0, 1]$  denote por  $I_n(x)$  o **subintervalo semi-aberto  $b$ -ádico da  $n$ -ésima geração que contém  $x$** , isto é,  $I_n(x)$  é o único intervalo que contém  $x$  da forma

$$I_n(x) = \left[ \frac{j-1}{b^n}, \frac{j}{b^n} \right).$$

**Teorema 2.4.5** (Lema de Billingsley). *Sejam  $A \subseteq [0, 1]$  um subconjunto de Borel e  $d\mu$  uma medida de Borel finita sobre  $[0, 1]$ , e suponha que  $\mu(A) > 0$ . Se existirem números reais  $\alpha, \beta > 0$  satisfazendo*

$$\alpha \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(I_n(x))}{\log |I_n(x)|} \leq \beta \quad (2.10)$$

para todo  $x \in A$ , então  $\alpha \leq \dim_H \leq \beta$ .

**Observação 2.4.3.** *O resultado acima (e a demonstração abaixo) valem para  $\alpha$  e  $\beta$  arbitrários, mas se  $\beta \leq 0$  o resultado não está nos dizendo absolutamente nada (se  $\alpha \leq 0 < \beta$ , o resultado nos diz ainda alguma coisa). Outra observação importante é que podemos trocar o limite em (2.10) por  $\liminf$  sem alterar a conclusão (ou a prova) desse resultado; as vezes faremos uso dessa versão mais forte do teorema acima.*

*Demonstração. 1.* Antes de mais nada, dados  $\alpha_1 < \alpha < \beta < \beta_1$ , a desigualdade (2.10) nos mostra que para todo  $x \in A$  as seguintes desigualdades são satisfeitas:

$$\begin{cases} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(I_n(x))}{|I_n(x)|^{\beta_1}} \geq 1 \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(I_n(x))}{|I_n(x)|^{\alpha_1}} \leq 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

(basta usar a definição de limite inferior, se lembrar que apesar do quociente de (2.10) ser positivo, o numerador e o denominador podem assumir valores negativos,

e fazer um pouco de manipulação algébrica). O resultado segue das estimativas em (2.11).

**2.** Suponha que vale a primeira relação em (2.11); para cada  $0 < c < 1$ , fixe um  $\epsilon > 0$ . Para cada  $x \in A$  podemos encontrar um  $n$  tão grande quanto quisermos de forma que

$$\frac{\mu(I_n(x))}{|I_n(x)|^{\beta_1}} > c;$$

seja  $n(x)$  o menor inteiro satisfazendo a relação acima e tal que  $b^{-n(x)} < \epsilon$ . Como  $\{I_{n(x)}(x) : x \in A\}$  forma uma cobertura de  $A$ , podemos encontrar uma subcobertura disjunta e enumerável  $\{J_k\}$ ; essa cobertura satisfaz  $|J_k| < \epsilon$  para todo  $k$  (pela escolha de  $n(x)$ ) e satisfaz

$$\sum_k |J_k|^{\beta_1} \leq \sum_k \frac{\mu(J_k)}{c} \leq \frac{\mu([0, 1])}{c}. \quad (2.12)$$

A estimativa acima implica  $\mathcal{H}_\epsilon^{\beta_1}(A) \leq c^{-1}\mu([0, 1])$ , de onde segue (fazendo  $c \rightarrow 1$  e  $\epsilon \rightarrow 0$ ) que  $\mathcal{H}^{\beta_1}(A) \leq \mu([0, 1])$ .

**3.** Assuma agora que vale a segunda relação em (2.11). Para  $C > 1$  e  $m \in \mathbb{N}$  fixos, denote por  $A_m \subseteq A$  o subconjunto dado por  $A_m = \{x \in A : \mu(I_n(x)) < C|I_n(x)|^{\alpha_1} \text{ para todo } n > m\}$ . Como  $A = \cup A_m$  e como  $A_{m+1} \supseteq A_m$ , temos que  $\mu(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m)$ . Fixado um  $\epsilon > 0$  que satisfaz  $\epsilon < b^{-m}$ , considere uma cobertura arbitrária de  $A$  por intervalos  $b$ -ádicos  $\{J_k\}$  que satisfazem  $|J_k| < \epsilon$ ; então

$$\sum_k |J_k|^{\alpha_1} \geq \sum_{k: J_k \cap A_m \neq \emptyset} |J_k|^{\alpha_1} \geq C^{-1} \sum_{k: J_k \cap A_m \neq \emptyset} \mu(J_k) \geq C^{-1} \mu(A_m). \quad (2.13)$$

Isto mostra que  $\mathcal{H}_\epsilon^{\alpha_1}(A) \geq C^{-1}\mu(A_m)$ . Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow \infty$  e  $C \rightarrow 1$  (nessa ordem), nos dá a estimativa  $\mathcal{H}^{\alpha_1}(A) \geq \mu([A])$ . Combinando as cotas acima com o princípio de distribuição de massa, encerra-se a demonstração do teorema.  $\square$

## 2.5 Fractais com Estrutura Especial

Na presente seção veremos teoremas interessantes sobre fractais formados por processos de projeções, produtos cartesianos e interseções. Além de exemplos interessantes, aqui são estudadas técnicas importantes para o capítulo seguinte.

### 2.5.1 Fractais Formados por Projeção

**Definição 2.5.1.** *Se  $L_\theta$  é a reta pela origem em  $\mathbb{R}^2$  que faz ângulo  $\theta$  com o eixo horizontal,  $\text{proj}_\theta F$  é a projeção ortogonal do subconjunto  $F$  do plano na reta  $L_\theta$ .*

Como as projeções são Lipschitz, vemos que  $\dim_H(\text{proj}_\theta(F))$  sempre é menor ou igual que o mínimo entre 1 e  $\dim_H(F)$ . O resultado que segue, nos diz que podemos ser um pouco mais precisos tanto quanto as conclusões, quanto ao contexto em que estamos projetando os conjuntos.

**Teorema 2.5.1** (Projeção de Fractais). *Seja  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  um boreliano. Então:*

- (a) *Se  $\dim_H \leq k$ , então  $\dim_H(\text{proj}_\theta(F)) = \dim_H(F)$  para quase todo  $\theta \in [0, \pi)$ ;*
- (b) *Se  $\dim_H(F) > k$ , então  $\text{proj}_\theta(F)$  tem medida de Hausdorff  $k$ -dimensional positiva, logo tem dimensão  $k$  para quase todo  $\theta$  em  $[0, \pi)$ .*

**Observação 2.5.1.** *Note que, apesar de enunciarmos o resultado geral, vamos apresentar uma prova apenas no caso bidimensional*

*Demonstração.* Utilizando as técnicas de teoria do potencial que vimos, podemos garantir uma distribuição de massa  $\mu$  suportada em  $F$  tal que  $\int_F \int_F \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^s} < \infty$ ; para cada  $\theta$ , projete a distribuição de massa na reta  $L_\theta$  de modo a obter a distribuição  $\mu_\theta$  em  $\text{proj}_\theta(F)$ , isto é,  $\mu_\theta$  é definida por  $\mu_\theta(A) = \mu\{x \in \mathbb{R}^2; \text{proj}_\theta x \in A\}$

para cada intervalo  $A$  em  $L_\theta$ , ou, equivalentemente,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)d\mu_\theta(t) = \int_F f(x\vec{\theta})d\mu(x)$ , onde  $\vec{\theta}$  é um vetor unitário na direção  $\theta$  e  $x$  é identificado com seu vetor posição.

Assim, podemos obter

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\theta(u)d\mu_\theta(v)}{|u-v|^s} d\theta &= \int_0^\pi \int_F \int_F \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x\vec{\theta} - y\vec{\theta}|^s} d\theta = \int_0^\pi \int_F \int_F \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|(x-y)\vec{\theta}|^s} d\theta \\ &= \int_F \int_F \int_0^\pi \frac{d\theta}{|\tau_{x-y}\vec{\theta}|^s} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^s} \\ &= \int_F \int_F c_s \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^s} < \infty, \end{aligned}$$

onde  $\tau_{x-y}$  é o vetor unitário na direção de  $x-y$  e  $c_s$  é a constante finita dependente unicamente de  $s < 1$  dada por  $c_s = \int_0^\pi \frac{d\theta}{|\tau_{x-y}\vec{\theta}|^s} = \int_0^\pi \frac{d\theta}{|\cos(\tau-\theta)|} < \infty$ .

Então  $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\theta(u)d\mu_\theta(v)}{|u-v|^s} < \infty$  para quase todo ponto  $\theta$  em  $[0, \pi)$ , e pelo visto em Teoria do Potencial temos finalmente que a existência de tal distribuição de massa  $\mu_\theta$  em  $proj_\theta F$  garante  $\dim_H(proj_\theta(F)) \geq s$ , o que é verdade para todo  $s < \dim_H F$ .

Para a segunda parte, basta adaptar o argumento e se obtém  $\dim_H proj_\theta F = 1$  para quase todo  $\theta$ . A prova de que projeções têm medida positiva no entanto exigiria a introdução de transformadas de Fourier, algo que aqui não será abordado.

□

**Observação 2.5.2.** *Conforme observa [7], a prova se generaliza naturalmente para  $\mathbb{R}^d$ :  $G_{d,k}$  é definido como o conjunto dos subespaços  $k$ -dimensionais de  $\mathbb{R}^d$ , cujos elementos são naturalmente parametrizados por  $k(d-k)$  direções, de modo que podemos nos referir a quase todos os subespaços de forma consistente em termos da medida de Lebesgue  $k(d-k)$ -dimensional. Escrevemos então  $proj_\Pi F$  para a projeção ortogonal de  $F$  no  $k$ -plano  $\Pi$ .*



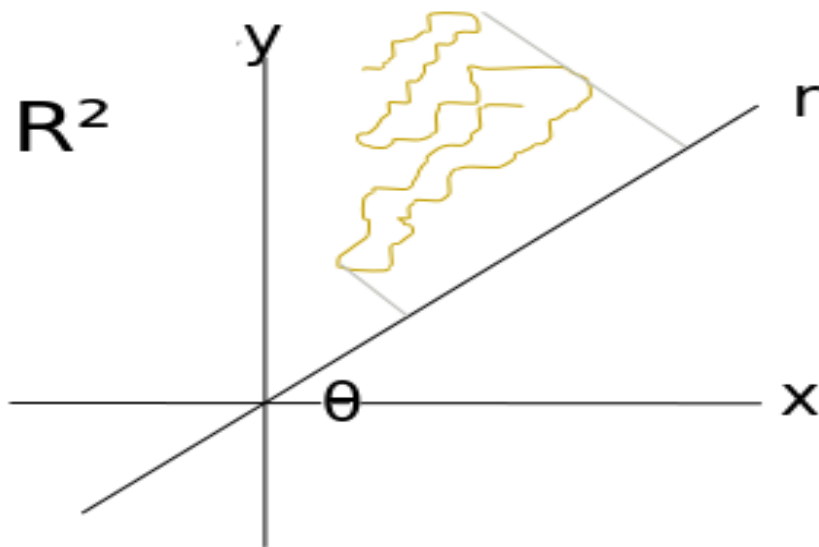


Figura 2.7: Projeção de fractal na reta de ângulo  $\theta$ . Fonte: Autor.

**Exemplo 2.5.1** (Projeção de um Fractal em uma Reta). *Cálculo: Seja  $F$  um boreliano, como o conjunto amarelo da figura. Temos que  $0 \leq \dim_H(F) \leq 2$ . Se  $\dim_H(F) \leq 1$ , então a dimensão de Hausdorff da projeção do fractal na reta de inclinação  $\theta$  é igual à dimensão de Hausdorff de  $F$  para quase todo ponto, exceto se projetarmos, por exemplo, de modo a obtermos apenas pontos em sobre a reta, o que daria dimensão de Hausdorff 0. Se, porém, a dimensão de Hausdorff de  $F$  for maior que 1, então a dimensão da projeção de  $F$  sobre a reta de inclinação  $\theta$  será igual a 1 para quase toda direção, a menos que, por exemplo, projetemos de modo a obter um fractal sobre a reta mas de dimensão de Hausdorff menor que 1.*

**Observação 2.5.3.** *A heurística do cálculo acima nos mostra que, independente de qual seja o fractal  $F$  considerado, a dimensão de Hausdorff da projeção de  $F$  na reta de inclinação  $\theta$  precisa ser menor que o mínimo entre 1 e a dimensão de Hausdorff de  $F$ .*

## 2.5.2 Fractais formados por Produto Cartesiano

Estudaremos aqui um teorema, cuja prova pode ser encontrada em [7] que permite estimar para quase todo ponto a dimensão de Hausdorff de um fractal cuja estrutura é de produto cartesiano de dois fractais.

A estimativa superior vale se  $E$  e  $F$  forem regulares o suficiente, no sentido de serem borelianos. Na verdade, podemos relaxar um pouco hipóteses tão fortes, mas, por simplicidade, não o faremos.

**Teorema 2.5.2** (Cota Inferior para a Dimensão de Hausdorff do Produto Cartesiano). *Seja  $E$  boreliano de  $\mathbb{R}^n$  e seja  $F$  boreliano de  $\mathbb{R}^m$ . Então vale que  $\dim_H(E \times F) \geq \dim_H(E) + \dim_H(F)$*

*Demonstração.* Se  $s, t$  forem reais quaisquer que cotem por baixo, respectivamente, as dimensões de Hausdorff de  $E$  e de  $F$ , então  $\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^t(F) = \infty$ . Observe que existem sempre  $E_0 \subseteq E$  e  $F_0 \subseteq F$  borelianos tais que  $0 < \mathcal{H}^s(E_0), \mathcal{H}^t(F_0) < \infty$ . Também pode ser notado que  $\mathcal{H}^{s+t}(E \times F) \geq \mathcal{H}^{s+t}(E_0 \times F_0) \geq c\mathcal{H}^s(E_0)\mathcal{H}^t(F_0) > 0$  para alguma constante  $c > 0$  que dependa apenas de  $s, t$ . Logo  $\dim_H(E \times F) \geq s + t$ . Basta agora escolher  $s, t$  arbitrariamente próximos das dimensões de Hausdorff que o resultado segue.  $\square$

A cota superior é mais intrincada, tanto no enunciado quanto na demonstração, e alguns detalhes são omitidos, embora tentaremos dar uma ideia da prova no que segue abaixo. Os detalhes podem ser melhor elucidados em [7].

**Teorema 2.5.3** (Cota Superior para a Dimensão de Hausdorff do Produto Cartesiano). *Para quaisquer  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $F \subseteq \mathbb{R}^m$  vale que  $\dim_H(E \times F) \leq \dim_H(F) + \overline{\dim}_B(F)$*

*Demonstração.* Por simplicidade, considere  $E, F$  na reta. Escolha  $s > \dim_H(E)$  e  $t > \overline{\dim}_B(F)$ . Existe  $\delta_0 > 0$  tal que  $F$  pode ser coberto por  $N_\delta(F) \leq \delta^{-t}$  intervalos

de medida  $\delta$  para todo  $\delta \leq \delta_0$ . Para esse  $\delta$ , seja  $\{U_i\}$  uma  $\delta$ -cobertura qualquer de  $E$  por intervalos tais que  $\sum_i |U_i|^s < 1$ . Para cada  $i$ , seja a subcobertura  $\{U_{i,j}\}$  de  $F$  por  $N_{|U_i|}(F)$  intervalos de comprimento  $|U_i|$ . Então  $U_i \times F$  é coberto por  $N_{|U_i|}(F)$  quadrados  $\{U_i \times U_{i,j}\}$  de lado  $|U_i|$ . Assim,  $E \times F \subseteq \bigcup_I \bigcup_j (U_i \times U_j)$ , de modo que  $\mathcal{H}_{\delta/\sqrt{2}}^{s+t}(E \times F) \leq \dots < 2^{(s+t)/2}$ . Agora basta fazer  $\delta$  tender a 0 para obter  $\mathcal{H}^{s+t}(E \times F) < \infty$  sempre que  $s > \dim_H(E)$  e  $t > \overline{\dim}_M(F)$ , o que nos leva a  $\dim_H(E \times F) \leq s + t$ .  $\square$

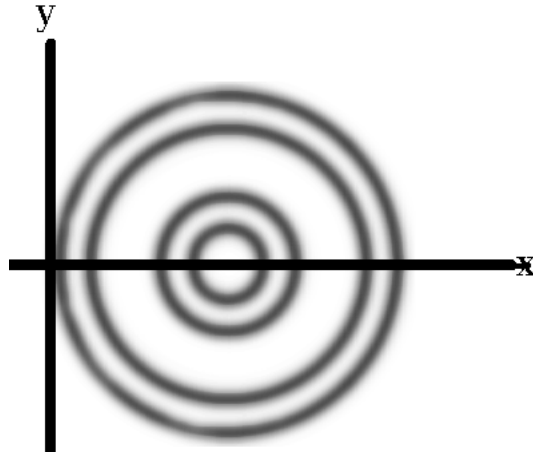


Figura 2.8: Cantor Target. Fonte: Autor.

**Exemplo 2.5.2** (Alvo de Cantor/Cantor Target). *O Alvo de Cantor é o conjunto plano nas coordenadas polares  $F' = \{(r, \theta); r \in F, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ , onde  $F$  é o Cantor Ternário usual. Mostraremos que  $\dim_H(F') = 1 + \log_3(2)$ . Definindo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  por  $f(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$ , como esse mapa é Lipschitz e  $F' = f(F \times [0, 2\pi])$ , obtemos a estimativa  $\dim_H(F') \leq \dim_H(F) + \dim_H[0, 2\pi] = \log_3(2) + 1$ . Restrinja agora  $f$  ao produto  $[2/3, 1] \times [0, \pi]$ , de modo a essa restrição se tornar  $f$  bi-Lipschitz. Como  $F' \supseteq f((F \cap [2/3, 1]) \times [0, \pi])$ , segue que  $\dim_H(F') \geq \dim_H((F \cap [2/3, 1]) \times [0, \pi]) = \dim_H(F \cap [2/3, 1]) + \dim_H[0, \pi] = \log_3(2) + 1$ . O mesmo argumento, com algumas modificações, nos dá que  $F'$  é um boreliano de medida de Hausdorff  $(1 + \log_3(2))$ -dimensional finita.*

### 2.5.3 Fractais Formados por Interseções

Nesta subseção o foco serão fractais formados por interseção. Analogamente à anterior, estudaremos um teorema, cujo outline da demonstração (que aqui não apresentaremos) está em [7] e um exemplo de aplicação deste tão geral teorema. Para entender o teorema devemos ter em mente que ao estudar interseções de fractais é importante o estudo de grupos de transformações no espaço euclidiano  $n$ -dimensional, mais especificamente semelhanças e congruências, uma vez que faz muita diferença a maneira que estamos intersetando os dois fractais.

**Teorema 2.5.4** (Interseção de Fractais). *Sejam  $E, F$  borelianos de  $\mathbb{R}^d$  e  $G$  um grupo de transformações do  $\mathbb{R}^d$ . Então  $\dim_H(E \cap \sigma(F)) \geq \dim_H(E) + \dim_H(F) - n$  para um conjunto de transformações  $\sigma \in G$  de medida positiva nos seguintes casos:*

- (a)  $G$  é o grupo de semelhanças e  $E, F$  são quaisquer;
- (b)  $G$  é o grupo de congruências,  $E$  é qualquer e  $F$  é curva retificável, superfície ou variedade.
- (c)  $G$  é o grupo de congruências,  $E$  e  $F$  são arbitrários, mas satisfazendo  $\dim_H(E) > (n + 1)/2$  ou com  $\dim_H(F) > (n + 1)/2$ .

**Exemplo 2.5.3** (Interseção do Conjunto de Cantor com sua Translação). *Seja  $C$  o conjunto de Cantor ternário. Defina  $\lambda F + x = \{\lambda y + x, y \in F\}$ , onde  $x, \lambda$  são fixados. Então  $\dim_H(F \cap (F + x)) \leq 2 \log_3(2) - 1$  para quase todo ponto  $x$  da reta e  $\dim_H(F \cap (\lambda F + x)) = 2 \log_3(2) - 1$  para um conjunto de  $(x, \lambda)$  no plano de medida de Lebesgue positiva, o que segue se considerarmos o caso (a) do teorema anterior.*

# 3 AUTOSSIMILARIDADE E AUTOAFINIDADE

## 3.1 Introdução

Nesse capítulo discutiremos as noções de iterated function systems (IFS), conjuntos autossimilares e conjuntos autoafins e falaremos um pouco do Teorema da Colagem, seguindo essencialmente [15] e a parte II de [10]. Dentre os resultados estudados no capítulo, destacamos o Teorema de Hutchinson (que garante existência e unicidade de um atrator), o Teorema de Moran (que garante, sob a Open Set Condition, que a dimensão de Hausdorff é igual à dimensão de similaridade), o Teorema de Falconer (que fornece uma fórmula para o cálculo da dimensão de Hausdorff de conjuntos autoafins) e o Teorema da Colagem e seu Corolário (que garantem que qualquer compacto não-vazio do  $\mathbb{R}^d$  pode ser muito bem aproximado, segundo a métrica de Hausdorff, por um atrator de algum IFS).

## 3.2 Iterated Function Systems (IFS) e seus Atratores

Nesta seção definiremos o conceito de IFS e usaremos a completude do espaço dos compactos de  $\mathbb{R}^d$  com a métrica de Hausdorff para garantir existência e unicidade de um conjunto invariante com respeito a um operador definido pelo IFS. Provaremos também a existência e unicidade de uma medida invariante no atrator com respeito à métrica dual de Lipschitz; a esse teorema chamaremos de Teorema de Hutchinson, e nossa demonstração segue nas linhas de [4]. Ressaltamos que no capítulo anexo está o maquinário necessário para sustentar as demonstrações dessa seção.

**Definição 3.2.1** (IFS). *Seja  $D$  um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}^d$ . A uma família finita de contrações  $\{f_1, \dots, f_m\}$ ,  $m \geq 2$ ,  $f_i : D \rightarrow D$ , chamaremos IFS (iterated function*

system). A um conjunto compacto  $F$  não vazio,  $F \subseteq D$ , tal que  $F = \bigcup_{i=1}^m f_i(F)$  chamaremos conjunto invariante do IFS, ou atrator.

**Teorema 3.2.1** (Teorema de Hutchinson). *Dado um IFS  $(f_1, \dots, f_m)$  de contrações em  $\mathbb{R}^d$ . Então:*

- (a) *Existe um único compacto não vazio  $K$  contido no  $\mathbb{R}^d$  (chamado atrator) tal que  $K = \bigcup_{i=1}^m f_i(K)$ ;*
- (b) *Para qualquer vetor de probabilidade  $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ , existe uma única medida de probabilidade  $\mu_p$  (chamada medida estacionária) no atrator  $K$  tal que  $\mu_p = \sum_{i=1}^m p_i \mu_p f_i^{-1}$ ; se  $p_i > 0$  para todo  $i \leq m$ , então  $\text{supp}(\mu_p) = K$ , onde  $\text{supp}(\nu)$  denota o suporte da medida  $\nu$ .*

*Demonstração.* A demonstração dos dois itens é similar e se baseia em aplicações de teoremas de ponto fixo:

(a) Equipe o conjunto dos compactos não-vazios de  $\mathbb{R}^d$  com a métrica de Hausdorff, o qual sabemos ser um espaço métrico completo (cf. Anexo). Defina o mapa  $F$  nesse espaço métrico por  $F(C) = \bigcup_{i=1}^m f_i(C)$ . Dados  $C, K$  compactos do espaço euclidiano  $d$ -dimensional, é possível chegar às seguintes inequações

$$d_H(F(C), F(K)) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d_H(f_i(C), f_i(K)) \leq r_{\max} d_H(C, K),$$

onde  $r_{\max} = \max\{r_i\}_{i \in \{1, \dots, m\}}$ . Então o mapa  $F$  é contração, e daí basta usarmos o teorema do ponto fixo de Banach (cf. Anexo).

(b) O espaço das probabilidades sobre o atrator compacto não-vazio  $K$  com a métrica definida por  $L(\nu, \nu') = \sup_{Lip(g) \leq 1} \left| \int g d\nu - \int g d\nu' \right|$ , denotado por  $P(K)$  é compacto (cf. Anexo). Portanto, definindo o mapa  $F_p(\nu) = \sum_{i=1}^m p_i \nu f_i^{-1}$ , temos que, para cada função  $g : K \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $Lip(g) \leq 1$ , vale para todos os  $x, y$  diferentes o seguinte:

$$\sum_{i=1}^m p_i |g(f_i(x)) - g(f_i(y))| \leq \sum_{i=1}^m p_i d(f_i(x), f_i(y)) \leq \sum_{i=1}^m p_i r_i d(x, y),$$

o que nos permite concluir que  $Lip(\sum_{i=1}^m p_i g \circ f_i) \leq \sum_{i=1}^m p_i r_i \leq r_{\max}$ . Portanto, para quaisquer duas probabilidades  $\nu, \nu'$ , vale

$$\begin{aligned} \left| \int_K g dF_p(\nu) - \int_K g dF_p(\nu') \right| &= \left| \int \sum_{i=1}^m p_i g \circ f_i d\nu - \int \sum_{i=1}^m p_i g \circ f_i d\nu' \right| \\ &\leq Lip \left( \sum_{i=1}^m p_i g \circ f_i \right) L(\nu, \nu') \leq r_{\max} L(\nu, \nu'), \end{aligned}$$

o que garante a contratibilidade do mapa, logo basta aplicar o teorema do ponto fixo para compactos (cf. Anexo).

Para a segunda parte desse item, se  $p_i > 0$  para todo  $i$ , então qualquer probabilidade  $\nu$  de suporte limitado tal que  $\nu = \sum_{i=1}^m p_i \nu f_i^{-1}$  satisfaz que  $supp(\nu) = \cup_{i=1}^m f_i(supp(\nu))$ , uma vez que o suporte de  $\nu$  é fechado e deve coincidir com o atrator  $K$ .  $\square$

**Definição 3.2.2** (Conjunto Autossimilar). *Dizemos que  $s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  tal que  $|s(x) - s(y)| = r|x - y|$ , com  $r \geq 0$ , é uma semelhança de razão  $r$ . Se  $r \in (0, 1)$ , a semelhança é chamada de semelhança contrativa. Dado um IFS  $\{s_1, \dots, s_m\}$  tal que cada  $s_i$  é uma semelhança contrativa, dizemos que o atrator do IFS é um conjunto autossimilar.*

**Definição 3.2.3** (Dimensão de Semelhança). *Seja um IFS como na definição anterior. Ao único número real  $s$  tal que  $\sum_{i=1}^m r_i^s = 1$  chamamos de dimensão de semelhança.*

**Observação 3.2.1.** *Devido à sua definição, basta que o IFS esteja bem definido que a dimensão de semelhança vai existir. A questão é: Será que ela será igual à dimensão de Hausdorff? A grosso modo, quando há muita sobreposição no processo limite da construção do atrator, isso não acontece. O trabalho de Hutchinson e de Moran sobre quando a sobreposição é demais nos mostrou que uma condição de separabilidade é suficiente para que as dimensões coincidam, e é essa condição que estudaremos na seção a seguir, chamada de Open Set Condition.*

### 3.3 Dimensão de Semelhança e o Teorema de Moran

Nesta seção apresentamos o Teorema de Moran, o qual garante, sob a Open Set Condition, a igualdade entre as dimensões de Hausdorff e de semelhança de um conjunto autossimilar.

**Definição 3.3.1** (Open Set Condition). *Dizemos que o IFS  $\{s_1, \dots, s_m\}$  satisfaz a open set condition se existir um conjunto aberto não vazio  $V$  tal que  $\bigcup_{i=1}^m s_i(V) \subseteq V$ , sendo essa união disjunta.*

Observe que o aberto  $V$  não precisa ter nenhuma relação com o atrator do IFS em princípio (apesar de no exemplo abaixo ele conter o atrator em seu interior), e que obter um conjunto com as propriedades acima não é, em princípio, uma tarefa trivial e obtê-lo pode ser tão difícil quanto obter outras informações do próprio IFD.

**Exemplo 3.3.1** (Triângulo de Sierpiński). *Seja o seguinte IFS  $\{F_1, F_2, F_3\}$  no plano, definido por*

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} (x, y) \\ F_2(x, y) &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} (x, y) + (1/2, 0) \\ F_3(x, y) &= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} (x, y) + (1/4, \sqrt{3}/4) \end{aligned}$$

*O atrator do IFS é o Triângulo de Sierpiński, e a Open Set Condition é satisfeita tomando por exemplo o conjunto aberto como sendo o hexágono regular da figura.*



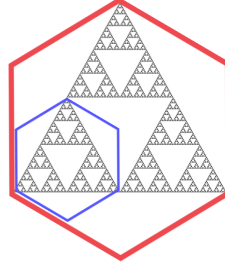


Figura 3.1: A OSC sendo satisfeita, sendo o conjunto aberto o hexágono (engrossado para aparecer, mas sem bordo, para ser aberto) regular que engloba o Triângulo de Sierpiński. Fonte: Wikimedia Commons.

**Lema 3.3.1.** *Seja a coleção  $\{V_i\}_{i \in I}$  de subconjuntos abertos disjuntos de  $\mathbb{R}^d$  tais que cada  $V_i$  contém uma bola de raio  $a_1 r$  e está contida em uma bola de raio  $a_2 r$ . Então qualquer bola  $B$  de raio  $r$  intersesta no máximo  $\frac{(1 + 2a_2)^n}{a_1^n}$  dos  $\bar{V}_i$ .*

*Demonstração.* Se  $\bar{V}_i$  intersesta  $B$ , então  $\bar{V}_i$  está contida numa bola concêntrica com  $B$  de raio  $(1 + 2a_2)r$ . Suponha que  $q$  dos conjuntos  $\bar{V}_i$  intersestem  $B$ . Somando os volumes das bolas interiores correspondentes de raio  $a_1 r$ , segue que  $q(a_1 r)^n \leq (1 + 2a_2)^n r^n$ , o que nos dá a cota estipulada para  $q$  e encerra a demonstração.  $\square$

**Teorema 3.3.1** (Teorema de Moran). *Suponha que valha a condição do conjunto aberto para o IFS de semelhanças  $\{s_1, \dots, s_m\}$  em  $\mathbb{R}^d$  com razões  $0 < r_i < 1$  para  $1 \leq i \leq m$ . Se  $F$  for o atrator do IFS  $\{s_1, \dots, s_m\}$ , então  $\dim_H F = s$ , onde  $s$  é a dimensão de similaridade do IFS.*

*Demonstração.* **1.** Seja  $I_k$  o conjunto das sequências de  $k$ -termos, denotadas por  $(i_1, \dots, i_k), 1 \leq i_j \leq m$ . Para cada  $A$  e sequência de  $I_k$ , escreveremos  $A_{i_1 \dots i_k} = s_{i_1} \circ \dots \circ s_{i_k}(A)$ , e daí segue que  $F = \bigcup_{I_k} F_{i_1 \dots i_k}$ .

2. Checamos que essas coberturas de  $F$  provêm uma cota superior adequada para a medida de Hausdorff. De fato,

$$\sum_{I_k} |F_{i_1 \dots i_k}|^s = \sum_{I_k} (r_{i_1} \dots r_{i_k})^s |F|^s = \left( \sum_{i_1} r_{i_1}^s \right) \dots \left( \sum_{i_k} r_{i_k}^s \right) |F|^s = |F|^s.$$

Para cada  $\delta$  positivo podemos escolher  $k$  tal que  $|F_{i_1 \dots i_k}| \leq (\max_i r_i)^k |F| \leq \delta$ , logo  $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq |F|^s$ , e então  $\mathcal{H}^s(F) \leq |F|^s$  e  $\dim_H(F) \leq s$ .

3. A cota inferior é mais complicada. Seja  $I$  o conjunto de todas as seqüências  $(i_1, i_2, \dots)$ ,  $1 \leq i_j \leq m$ , e seja  $I_{i_1 \dots i_k} = \{(i_1 \dots i_k, q_{k+1}, \dots); 1 \leq q_j \leq m\}$  o cilindro consistindo daquelas seqüências em  $I$  com termos iniciais  $(i_1, \dots, i_k)$ . Podemos distribuir uma massa  $\mu$  em  $I$  de sorte a  $\mu(I_{i_1 \dots i_k}) = (r_{i_1} \dots r_{i_k})^s$ . Como  $(r_{i_1} \dots r_{i_k})^s = \sum_{i=1}^m (r_{i_1} \dots r_{i_k} r_i)^s$ , isto é,  $\mu(I_{i_1 \dots i_k}) = \sum_{i=1}^m \mu(I_{i_1 \dots i_k, i})$ , fica provado que  $\mu$  é de fato distribuição de massa, com  $\mu(I) = 1$ .

3. Podemos agora transferir  $\mu$  a uma  $\tilde{\mu}$  em  $F$  de maneira natural ao definir  $\tilde{\mu}(A) = \mu\{(i_1, i_2, \dots); x_{i_1, i_2, \dots} \in A\}$  para os subconjuntos  $A$  de  $F$ , lembrando que  $x_{i_1, i_2, \dots} = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{i_1 \dots i_k}$ . Assim a massa  $\tilde{\mu}$  de um conjunto é a massa  $\mu$  da seqüência correspondente e é fácil ver que  $\tilde{\mu}(F) = 1$ . A ideia agora é checarmos que essa medida satisfaz as hipóteses para que possamos aplicar o Princípio de Distribuição de Massa para concluir a prova; aqui a demonstração fica um pouco técnica e precisaremos de alguns passos adicionais antes de usarmos tal ferramenta.

4. Seja  $V$  um conjunto satisfazendo a condição do conjunto aberto. Note que a seqüência decrescente de iterações  $s^k(\bar{V})$  converge para  $F$  e que, em particular,  $\bar{V} \supseteq F$  e  $\bar{V}_{i_1 \dots i_k} \subseteq F_{i_1 \dots i_k}$  para cada seqüência finita  $(i_1, \dots, i_k)$ . Seja  $B$  uma bola de raio  $r < 1$ . Estimaremos  $\tilde{\mu}(B)$  ao considerar os conjuntos  $V_{i_1 \dots i_k}$  com diâmetros comparáveis ao de  $B$  e com fechos intersecando  $F \cap B$ .

5. Cortaremos a cauda de cada seqüência  $(i_1, i_2, \dots)$  em  $I$  após o primeiro termo  $i_k$  tal que  $(\min_{1 \leq i \leq m} r_i) r \leq r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k} \leq r$ ; seja  $Q$  o conjunto finito de todas tais seqüências finitas (ou tuplas) obtidas de tal modo. Então para cada seqüência em

$I$ , existe exatamente um valor de  $k$  tal que  $(i_1 \dots i_k \in Q$ ; como os  $V_1, \dots, V_k$  são disjuntos, o mesmo vale para os  $V_{i_1 \dots i_k, 1}, \dots, V_{i_1, \dots, i_k, m}$  para cada  $(i_1, \dots, i_k)$ . Fazendo isto de maneira aninhada, segue que a coleção de abertos  $\{V_{i_1 \dots i_k}; (i_1, \dots, i_k)\}$  é formada por elementos dois a dois disjuntos. Mais ainda, temos que  $F \subseteq \bigcup_Q F_{i_1 \dots i_k} \subseteq \bigcup_Q \bar{V}_{i_1 \dots i_k}$ .

**6.** Chegou a hora de usarmos o lema. Escolhemos  $a_1, a_2$  de modo  $V$  contenha uma bola de raio  $a_1$  e esteja contido numa bola de raio  $a_2$ . Então para cada  $(i_1, \dots, i_k) \in Q$  o conjunto  $V_{i_1, \dots, i_k}$  contém uma bola de raio  $r_{i_1} \dots r_{i_k} a_1$ , logo uma de raio  $(\min_i r_i) a_i r$  e está contido em uma bola de raio  $r_{i_1} \dots r_{i_k} a_2$ , logo em uma de raio  $a_2 r$ . Seja  $Q_1$  o conjunto de todas as sequências  $(i_1, \dots, i_k)$  em  $Q$  tais que  $B$  intersesta  $\bar{V}_{i_1 \dots i_k}$ . Pelo lema, existem no máximo  $q = (1 + 2a_2)^n a_1^{-n} (\min_i r_i)^{-n}$  sequências em  $Q_1$ . Logo,

$$\tilde{\mu}(B) = \tilde{\mu}(F \cap B) = \mu(\{(i_1, i_2, \dots); x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B\}) \leq \mu\left(\left\{\bigcup_{Q_1} I_{j_1, \dots, j_k}\right\}\right),$$

uma vez que se  $x_{i_1, i_2, \dots}$  está em  $F \cap B$ , que por sua vez está contido em  $\bigcup_{Q_1} \bar{V}_{j_1, \dots, j_k}$ , então existe inteiro  $k$  tal que  $(i_1, \dots, i_k) \in Q_1$ . Assim,  $\mu(\tilde{B}) \leq \sum_{Q_1} \mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{Q_1} (r_{i_1} \dots r_{i_k})^s \leq \sum_{Q_1} r^s \leq r^s q$ . Como qualquer  $U$  está contido em uma bola de raio  $|U|$ , segue que  $\tilde{\mu}(U) \leq |U|^s q$ , logo podemos, finalmente, aplicar o Princípio de Distribuição de Massa e obter que  $\mathcal{H}^s(F) \geq q^{-1} > 0$  e garantir que  $\dim_H(F) \geq s$ .

□

### 3.4 O Teorema da Colagem

Nesta seção veremos o teorema da colagem, que implica que, com respeito à métrica de Hausdorff, um conjunto compacto não-vazio qualquer pode ser tão bem aproximado quanto se queira pelo atrator de algum IFS.

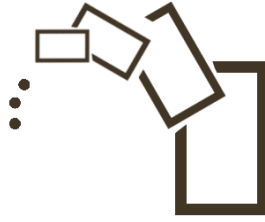


Figura 3.2: Um exemplo simples de figura que pode ser bem aproximada com respeito à métrica de Hausdorff pelo atrator do IFS que contrai em um fator  $\lambda < 1$  e rotaciona  $30^\circ$  no sentido anti-horário. Fonte: Autor.

**Teorema 3.4.1** (Teorema da Colagem). *Seja o IFS de contrações  $\{f_1, \dots, f_m\}$  em  $D \subseteq \mathbb{R}^d$ , e seja  $E$  qualquer subconjunto compacto não vazio de  $D$ . Então  $d_H(E, F) \leq \frac{1}{1-c} d_H(E, \bigcup_{i=1}^m f_i(E))$ , onde  $F$  é o atrator do IFS.*

*Demonstração.* Basta usar a definição de atrator de um IFS e a desigualdade triangular da métrica de Hausdorff para obter a seguinte sequência de desigualdades:

$$\begin{aligned} d_H(E, F) &\leq d_H\left(E, \bigcup_i f_i(E)\right) + d_H\left(\bigcup_i f_i(E), F\right) \\ &= d_H\left(E, \bigcup_i f_i(E)\right) + d_H\left(\bigcup_i f_i(E), \bigcup_i f_i(F)\right) \\ &\leq d_H\left(E, \bigcup_i f_i(E)\right) + cd_H(E, F) \end{aligned}$$

onde no final foi usada a propriedade da métrica de Hausdorff  $d_H(f(A), f(B)) \leq \max_{1 \leq i \leq m} r_i d_H(A, B)$  iteradamente até obtermos uma constante  $c$ .  $\square$

**Teorema 3.4.2** (Corolário do Teorema da Colagem). *Dado um subconjunto compacto não-vazio de  $\mathbb{R}^d$ , denotado por  $E$ , e um  $\delta$  positivo, existe um IFS cujo atrator  $F$  é tal que  $d_H(E, F) < \delta$ .*

### 3.5 Os Conjuntos de Bedford-McMullen

Nesta seção falaremos uma família de exemplos de conjuntos autoafins, conhecidos como **conjuntos de Bedford-McMullen**. Eles apareceram em dois trabalhos independentes nos anos 80 (um devido a C. McMullen [21] e outro devido a T. Bedford [3]) e tais conjuntos têm sua importância evidenciada no fato de que, em geral, sua dimensão de Hausdorff é diferente de sua dimensão de Minkowski, e também que sua dimensão de Hausdorff pode ser calculada por uma fórmula relativamente simples se comparada ao caso geral de conjuntos autoafins, que veremos mais adiante. Ambos fatos nos mostram como passar de conjuntos autossimilares para conjuntos autoafins pode ser complicado, ainda que mesmo no caso de autossimilares já tínhamos que satisfazer a *open set condition*.

**Definição 3.5.1** (Conjuntos de Bedford-McMullen). *Sejam  $n \geq m$  inteiros e divida o quadrado  $[0, 1]^2$  em  $n \times m$  retângulos iguais e fechados de largura  $n^{-1}$  e altura  $m^{-1}$ . Divida os restantes da mesma forma, mas com largura  $n^{-2}$  e altura  $m^{-2}$  e prossiga iteradamente. Dessa forma, obteremos um conjunto compacto  $K$ . Podemos descrever esse conjunto compacto  $K$  da seguinte forma: fixando um subconjunto  $D \subseteq \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \times \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ , definimos*

$$K(D) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k n^{-k}, b_k m^{-k}) ; (a_k, b_k) \in D, \forall k \right\},$$

a quem chamaremos de conjunto de Bedford-McMullen de  $D$ .

**Observação 3.5.1.** *É imediato notar que o conjunto autoafim  $K$  associado ao padrão  $D$  é o atrator dos mapas  $g_i(x, y) = (x/n, y/m) + (a_i/n, b_i/m)$ , onde  $(a_i, b_i)$  é uma enumeração dos pontos em  $D$ . Se cada mapa fosse uma semelhança, o que ocorre se, e somente se,  $n = m$ , então  $K$  seria autossimilar, com dimensões de Hausdorff e de Minkowski iguais a  $\log_n \#D$*

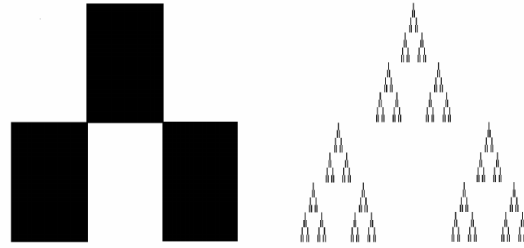


Figura 3.3: Um exemplo de conjunto de Bedford-McMullen, o qual contrai com razões diferentes em cada uma das duas direções. Fonte: Wikimedia Commons.

**Lema 3.5.1** (Dimensão de Minkowski do Conjunto de McMullen). *Suponha que cada linha contenha um retângulo escolhido e assuma  $n > m$ . Então  $\dim_H K(D) = 1 + \log_n \left( \frac{\#D}{m} \right)$ .*

*Demonstração.* Seja  $r$  o número de retângulos no padrão. No estágio  $j$ , temos  $r^j$  retângulos com largura  $n^{-j}$  e altura  $m^{-j}$  (lembre que  $n^{-j} \ll m^{-j}$  para inteiros  $n > m$ ). Seja  $k = \left\lceil \frac{\log n}{\log m} j \right\rceil$  o arredondamento ao próximo inteiro. Então podemos cobrir cada retângulo por  $m^{k-j}$  quadrados de lado  $m^{-k}$  (aproximadamente  $n^{-j}$ ), e  $m^{k-1-j}$  tais quadrados são necessários. Aqui é onde usamos a hipótese de que cada linha tenha um retângulo escolhido. Assim, para cada retângulo gerado  $R$ , a projeção horizontal de  $K(D) \cap R$  no lado vertical de  $R$  é o lado inteiro. Agora podemos fazer as contas, pois o número total de quadrados de lado  $m^{-k}$  (aproximadamente  $n^{-j}$ ) necessário para cobrir  $K(D)$  é  $r^j m^{k-j}$  e daí

$$\begin{aligned} \dim_M(K(D)) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log r^j m^{k-j}}{\log n^j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{j \log r + (k-j) \log m}{j \log n} \\ &= \frac{\log r}{\log n} + \frac{\log n}{\log n} - \frac{\log m}{\log n} = 1 + \log_n(r/m) \end{aligned}$$

□

**Definição 3.5.2** (Quadrados Aproximados). *Suponha  $(x, y) \in [0, 1]^2$  tenha expansões em bases  $n$  e  $m$  dadas por  $\{x_k\}$  e por  $\{y_k\}$ , respectivamente. Definimos o quadrado aproximado de geração  $k$  em  $(x, y)$ , denotado  $Q_k(x, y)$ , pelo fecho do conjunto*

de pontos  $(x', y') \in [0, 1]^2$  tal que os primeiros  $\lfloor \alpha k \rfloor$  dígitos nas expansões em base  $n$  de  $x$  e  $x'$  coincidem, e os primeiros  $k$  dígitos nas expansões em base  $m$  de  $y$  e  $y'$  coincidem. Referiremo-nos ao retângulo  $Q_k(x, y)$  como o quadrado aproximado de geração  $k$  uma vez que sua largura  $n^{-\lfloor \alpha k \rfloor}$  e altura  $m^{-k}$  satisfazem as inequações  $m^{-k} \leq n^{-\lfloor \alpha k \rfloor} \leq nm^{-k}$ , e daí,  $m^{-k} \leq |Q_k(x, y)| \leq (n+1)m^{-k}$ .

**Teorema 3.5.1** (Dimensão de Hausdorff de Conjuntos de McMullen). *Suponha que cada linha possui um retângulo escolhido e que  $n > m$ . Então  $\dim_H K(D) = \log_m \left( \sum_{j=1}^m r(j)^{\log_n(m)} \right)$ , onde  $r(j)$  é o número de retângulos do padrão na  $j$ -ésima linha.*

*Demonstração.* **1.** Para demonstrar esse teorema, usaremos o lema sobre a dimensão de Minkowski desses conjuntos, a Lei Forte dos Grandes Números (cf. Anexo) e também o lema de Billingsley em uma medida criada convenientemente, a qual se alicerça nas ideias desenvolvidas sobre quadrados aproximados.

**2.** Qualquer vetor de probabilidade  $\{p(d); d \in D\} = p$  define uma probabilidade  $\mu_p$  em  $K(D)$  que é a imagem da medida produto  $p^{\mathbb{N}}$  sob o mapa representação  $R : D^{\mathbb{N}} \rightarrow K(D)$  dado por  $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_k n^{-k}, b_k m^{-k})$ . Qualquer medida desse tipo é suportada em  $K(D)$ , logo as quantidades  $\dim(\mu_p) \equiv \inf\{\dim_H(E); \mu_p(E) > 0\}$  todas dão cotas inferiores para a dimensão de  $K(D)$ . Devemos mostrar que o supremo dessas dimensões de medidas é exatamente  $\dim_H(K(D))$ . De fato, iremos nos restringir às medidas provenientes de vetores de probabilidades  $p$  tais que  $p(d)$  é dependente apenas da segunda coordenada de  $d$ , isto é, todos os retângulos na mesma linha recebem mesma massa.

**3.** Seja  $(x, y)$  em  $K(D)$ . Suponha  $\{x_\nu\}, \{y_\nu\}$  as  $n$ -ária e  $m$ -árias expansões de  $x$  e de  $y$ . Afirmamos que  $\mu_p(Q_k(x, y)) = \prod_{\nu=1}^k p(x_\nu, y_\nu) \prod_{\nu=\alpha k+1}^k r(y_\nu)$ , onde para  $d = (i, j) \in D$  nós denotamos  $r(d) = r(j)$  o número de elementos na linha  $j$ . Para ver isso, note que o  $n^{-k} \times m^{-k}$  retângulo definido especificando os primeiros  $k$  dígitos na expansão de base  $n$  de  $x$  e os primeiros  $k$  dígitos na expansão de base

$m$  de  $y$  têm  $\mu_p$  medida  $\prod_{\nu=1}^k p(x_\nu, y_\nu)$ . O quadrado aproximado  $Q_k(x, y)$  contém  $r(y_{\alpha k+1})r(y_{\alpha k+2}) \dots r(y_k)$  tais retângulos, todos com mesma  $\mu_p$  medida (pela nossa hipótese em  $p(d)$ ) e logo segue a afirmação, onde para simplificar a notação estamos ignorando as funções de aproximação que deveriam entrar nos  $\alpha k$ .

4. Agora, tome logaritmos e chegará em  $\log(\mu_p(Q_k(x, y))) = \sum_{\nu=1}^k \log p(x_\nu, y_\nu) + \sum_{\nu=\alpha k+1}^k \log r(y_\nu)$ . Como  $\{x_\nu, y_\nu\}_{\nu \geq 1}$  são variáveis aleatórias iid com respeito a  $\mu_p$ , podemos aplicar a Lei Forte dos Grandes Números (cf. [19]) para  $\mu_p$ -qtp  $(x, y)$  e obter:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log(\mu_p(Q_k(x, y))) = \sum_{d \in D} p(d) \log p(d) + (1 - \alpha) \sum_{d \in D} p(d) \log r(d).$$

A prova do Lema de Billingsley se estende a essa configuração que estamos chegando, donde daí teremos

$$\dim_H(\mu_p) = \frac{1}{\log m} \sum_{d \in D} p(d) \left( \log \frac{1}{p(d) + \log(r(d)^{\alpha-1})} \right).$$

5. Como os números  $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$  são reais, então podemos maximizar a função  $F(p) = \sum_{k=1}^n p_k \log(1/p_k) + \sum_{k=1}^n p_k a_k$  sobre todas as medidas de probabilidades  $p$  e tal máximo é atingido em  $p_k = e^{a_k} / \sigma_l e^{a_l}, k = 1, \dots, n$ , que é conhecido como Princípio de Boltzmann. No caso, ele nos diz que  $\dim_H(\mu_p)$  será maximizada se  $p(d) = \frac{1}{Z} r(d)^{\alpha-1}$ , onde  $Z = \sum_{d \in D} r(d)^{\alpha-1} = \sum_{j=0}^{m-1} r(j)^\alpha$ . Agora fixaremos essa escolha de  $p$  e escreveremos  $\mu$  para  $\mu_p$ . Note que  $\dim_H(\mu) = \log_m(Z)$ , logo já temos uma cota inferior para  $\dim_H(K(D))$ .

6. Para obter cota superior, denote por  $S_k(x, y) = \sum_{\nu=1}^k \log r(y_\nu)$  e observe que  $S_k(x, y)/k$  é uniformemente limitada. Usando a última equação para  $p(d)$ , temos que

$$\begin{aligned} \log_\mu(Q_k(x, y)) &= \sum_{\nu=1}^k \log \frac{1}{Z} r(y_\nu)^{\alpha-1} + \left( \sum_{\nu=1}^k \log r(y_\nu) - \sum_{\nu=1}^{\alpha k} \log r(y_\nu) \right) \\ &= - \sum_{\nu=1}^k \log Z + (\alpha - 1) S_k(x, y) + S_k(x, y) - S_{\alpha k}(x, y). \end{aligned}$$



Assim, obtemos por fim que

$$\log \mu(Q_k(x, y)) + k \log Z = \alpha S_k(x, y) - S_{\alpha k}(x, y),$$

e, reagrupando os termos de forma apropriada, obtemos

$$\frac{1}{\alpha k} \log \mu(Q_k(x, y)) + \frac{1}{\alpha} \log Z = \frac{S_k(x, y)}{k} - \frac{S_{\alpha k}(x, y)}{\alpha k}$$

7. Somando o lado direito em  $k = \alpha^{-1}, \alpha^{-2}, \dots$  e considerando as partes inteiras, temos uma séries telescópica que nos permite afirmar que, como  $S_k(x, y)/k$  permanece limitada para todo  $k$ , vale a relação

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{S_k(x, y)}{k} - \frac{S_{\alpha k}(x, y)}{\alpha k} \right) \geq 0,$$

uma vez que caso contrário a soma tenderia a  $-\infty$ ; portanto, temos para cada  $(x, y)$  em  $K(D)$  que  $\limsup_{k \rightarrow \infty} (\log \mu(Q_k(x, y)) + k \log Z) \geq 0$ , o que implica

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(Q_k(x, y))}{-k} \leq \log Z.$$

Uma vez que  $m^{-k} \leq |Q_k(x, y)| \leq (n+1)m^{-k}$ , a última inequação e o Lema de Billingsley implicam que  $\dim(K(D)) \leq \log_m(Z)$ .  $\square$

### 3.6 Conjuntos Autoafins e o Teorema de Falconer

A ideia é generalizarmos os resultados da seção anterior. De fato, existe um teorema (*Teorema de Falconer*) que nos garante que para uma classe mais geral de exemplos vale algo similar ao resultado obtido por Bedford e McMullen.

**Definição 3.6.1.** *Uma transformação afim é uma  $S : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  dada por  $S(x) = f(x) + y$ , onde  $f$  é uma transformação linear de  $\mathbb{R}^d$  em si mesmo e  $y$  é um vetor de  $\mathbb{R}^d$ ; um conjunto é autoafim quando for o conjunto invariante (atrator) de um IFS formado por contrações afins.*

**Definição 3.6.2.** *Seja  $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  uma transformação linear que é contração e não-singular. Os valores singulares  $1 > \alpha_1 > \dots > \alpha_n > 0$  de  $T$  são os autovalores de  $T^*T$  em ordem decrescente, onde  $T^*$  é a adjunta de  $T$ . Para  $0 \leq s \leq n$ , definimos  $\phi^s(T) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{r-1} \alpha_r^{s-r+1}$  a função valor singular, onde  $r$  é o inteiro tal que  $r - 1 < s \leq r$ .*

**Observação 3.6.1.** *Note que  $\phi^s(T)$  é contínua e estritamente decrescente em  $s$ , bem como para um  $s$  fixado  $\phi^s$  pode ser mostrada submultiplicativa, isto é,  $\phi^s(TU) \leq \phi^s(T)\phi^s(U)$  para transformações lineares  $T, U$*

**Definição 3.6.3.** *Definimos as somas de nível  $k$  por  $\sum_k^s = \sum_{I_k} \phi^s(T_{i_1} \circ \dots \circ T_{i_k})$ , onde  $I_k$  é o conjunto das sequências  $(i_1, \dots, i_k)$  com  $k$  termos,  $1 \leq i_j \leq m$ . Além disso, usando a submultiplicatividade, podemos mostrar que  $\sum_{k+q}^s \leq \sum_k^s \sum_q^s$ . Note que podemos garantir a existência de um único  $s$ , denotado  $d(T_1, \dots, T_m)$  e chamado aqui de dimensão de Falconer, tal que  $1 = \lim_{k \rightarrow \infty} (\sum_k^s)^{1/k}$ .*

**Observação 3.6.2** (Dimensão de semelhança como caso particular da dimensão de Falconer). *Se as transformações afins  $T_1, \dots, T_m$  forem semelhanças, então a quantidade  $d(T_1, \dots, T_m)$  se transforma no mesmo  $s$  que satisfaz  $\sum_{i=1}^m r_i^s = 1$ , sendo  $r_i$  a razão de semelhança da semelhança  $i$ . De fato, se todas as transformações forem assim, os valores singulares recaem nos autovalores, o que nos dá  $\sum r_1^s + \dots + r_n^s + \dots + r_n^s = 1$ .*

**Observação 3.6.3.** *Na verdade, o Teorema acima apresentado para conjuntos autoafins é um caso particular do teorema mais geral, chamado Teorema de Falconer, enunciado a seguir, e cuja demonstração utiliza técnicas de Teoria do Potencial e pode ser encontrada com detalhes em [10]. Convém também dizermos que o enunciado aqui apresentado, que é para  $c \in (0, 1/2)$  pode ser melhorado, conforme feito por Solomiak.*

**Teorema 3.6.1** (Teorema de Falconer). *Sejam  $f_1 \dots f_m$  contrações lineares e sejam  $y = (y_1, \dots, y_m)$  vetores de  $\mathbb{R}^d$ . Se  $F$  for o conjunto autoafim desse IFS satisfazendo*

$F = \bigcup_{i=1}^m (f_i(F) + y_i)$ , então  $\dim_H(F) \leq d(f_1, \dots, f_m)$ . Se, além disso, tivermos também a existência de  $c \in (0, 1/3)$  tal que para cada  $i \in \mathbb{N}$ ,  $|f_i(x) - f_i(y)| \leq c|x - y|$ , então podemos garantir que  $\dim_H(F) = d(f_1, \dots, f_m)$  para quase todo ponto no sentido da medida de Lebesgue  $dm$ -dimensional.

*Demonstração.* (Prova Parcial) **1. Cota superior:** A cota superior independe do vetor  $y$ , como aqui será mostrado. Denote as transformações afins por  $S_i(x) = f_i(x) + y_i$ . Seja  $B$  uma bola grande o suficiente para garantir que  $S_i(B) \subseteq B$  para todo  $i$ . Dado  $\delta > 0$ , escolha  $k$  grande o suficiente para que  $|S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(B)| < \delta$  para toda  $k$ -tupla  $(i_1, \dots, i_k) \in I_k$ . Note que  $F \subseteq \bigcup_{I_k} S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(B)$  e que a transformação  $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}$  leva a bola  $B$  em uma translação do elipsoide  $f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}(B)$ , cujos eixos principais têm comprimentos  $\alpha_1|B|, \alpha_2|B|, \dots, \alpha_n|B|$ , o que define os valores singulares  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  das transformações  $f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k}$ . Assim, temos que  $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(B)$  está contido em um paralelepípedo  $P$  de lados  $\alpha_1|B|, \dots, \alpha_n|B|$ . Se  $0 \leq s \leq n$  e  $r$  é o menor inteiro maior do que ou igual a  $s$ , e daí podemos cobrir  $P$  por no máximo  $\left(\frac{2\alpha_1}{\alpha_r}\right) \left(\frac{2\alpha_2}{\alpha_r}\right) \dots \left(\frac{2\alpha_{r-1}}{\alpha_r}\right) \leq 2^n \alpha_1 \dots \alpha_{r-1} \alpha_r^{1-r}$  cubos de lados  $\alpha_r|B| < \delta$ . Então essa translação do elipsoide  $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(B)$  pode ser coberta por uma coleção de cubos  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , com  $|U_i| < \delta\sqrt{n}$  tal que  $\sum_i |U_i|^s \leq 2^n \alpha_1 \dots \alpha_{r-1} \alpha_r^s |B|^s \leq 2^n |B|^s \phi^s(f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k})$ . Escolhendo tal cobertura para  $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(B)$  para cada  $(i_1, \dots, i_k) \in I_k$ , segue que  $H_{\delta\sqrt{n}}^s(F) \leq 2^n |B|^s \sum_{I_k} \phi^s(f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_k})$ . Mas, como  $k \rightarrow \infty$  quando  $\delta \rightarrow 0$ , podemos ver que  $H^s(F) = 0$  se  $s > d(f_1, \dots, f_m)$ , o que prova que  $\dim_H(F) \leq d(f_1, \dots, f_m)$ .

**2. Cota inferior:** Nesse caso, daremos apenas uma ideia da prova, pois os detalhes envolvem Teoria de Potencial de maneira intrincada e podem ser encontrados em [10]. Para esta prova, deve-se notado como há a dependência do vetor  $y$ , fazendo com que seja um resultado quase todo ponto. Também devemos notar que aqui é importante a condição de existir o  $c \in (0, 1/3)$  satisfazendo a segunda parte do enunciado.

**3.** Defina uma medida de Borel  $\mu$  no espaço de sequências infinitas  $J_\infty$  com símbolos tomados em  $\{1, \dots, m\}$  e com métrica dada por  $d(i, j) = 2^{-|i \vee j|}$ , onde  $\vee$  é a sequencial maximal com respeito à justaposição. Para tal medida, prova-se que  $\int_{J_\infty} \int_{J_\infty} \int_{a \in B_\rho} \frac{d\mu(i)d\mu(j)}{|x_i(a) - x_j(a)|^t} < \infty$ , onde é usado que  $a < 1$  e é suposto  $s > t$ . Assim, pode-se mostrar que é garantido  $\dim_H(F(y)) \geq t$  para quase todo  $a$  na bola  $B_{rho}$ . Mas como  $\rho$  é arbitrário, pode-se garantir  $\dim F(y) \geq t$  para quase todo ponto  $a$  em  $\mathbb{R}^{dm}$ . Por fim, conclui-se que isso vale não só para  $t$  não-inteiro tal que  $t < \min\{d, d(f_1, \dots, f_m)\}$  e daí o teorema segue.  $\square$

**Observação 3.6.4.** *Convém notarmos que na referência [7] também é dada uma prova parcial para o Teorema de Falconer, mas é enunciada a condição  $c \in (0, 1/2)$ , o que requer uma prova ainda mais intrincada que a presente no artigo [10], cuja prova é para  $c \in (0, 1/3)$  e é a referência que seguimos para dar a ideia da cota inferior. [30] mostrou que a cota  $1/2$  para  $c$  é a maior possível, isto é, para se ter a igualdade quase todo ponto no sentido da medida de Lebesgue  $dm$ —dimensional não se pode ter  $c \geq 1/2$ .*

**Exemplo 3.6.1** (A Fórmula de Falconer para os Conjuntos de Bedford-McMullen). *Mostraremos aqui que, se  $F = K(D)$  for um conjunto de Bedford-McMullen, então pelo Teorema de Falconer  $\dim_H(F)$  pode ser cotada superiormente por  $d(f_1, \dots, f_l)$ , onde  $f_i$  são descritas a seguir: Considere o IFS formado pelos mapas  $g_i(x, y) = (x/n, y/m) + (a_i/n, b_i/m)$ , onde  $D$  é o conjunto contido em  $\{0, 1, 2, \dots, n-1\} \times \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$  (ou seja, o padrão escolhido) e  $(a_i, b_i)_{i \in \mathbb{N}}$  é uma sequência que enumera os pontos do conjunto  $D$ . Suponhamos que temos  $l$  mapas no IFS, ou seja,  $0 \leq i \leq l$ . Note que as transformações lineares para cada  $i$  natural que compõem as  $g_i$  dadas por  $(x, y) \mapsto (x/n, y/m)$  são todas iguais, e a elas chamaremos de  $f$ .*

Então temos que  $\phi^s(f) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{n}\right)^{s-1}$ , e daí o cálculo simplifica-se para  $(\sum_{I_k} \phi^s(\circ_{j=1}^k f))^{1/k} = \frac{l}{mn^{s-1}}$ , donde temos  $d(f_1, \dots, f_l)$  igual ao único  $s$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{l}{mn^{s-1}} = \frac{l}{mn^{s-1}} = 1$ . Um rápido cálculo nos leva a  $s = \log_n \left(\frac{l}{m}\right) + 1$ , o

que faz sentido com o que foi calculado previamente, pois sabemos que a dimensão de Minkowski desse conjunto deve ser dada por  $\dim_M K(D) = \log_n \frac{\#D}{m} + 1$ , sendo que podemos relacionar biunivocamente a cardinalidade de  $D$  com a quantidade de  $l$  de transformadas no IFS, e daí segue que  $d(f_1, \dots, f_l)$  é uma cota superior.

### 3.7 A fórmula de Bowen

A motivação principal dessa seção é apresentar uma extensão muito interessante da fórmula de Falconer que vale em contextos bem mais gerais. Para tornar a explicação desse resultado (conhecido como *Fórmula de Bowen*) iremos apresentar nas subseções abaixo uma série de notações e resultados (a maioria sem prova) necessários para a formulação do mesmo; demonstrações para todos os resultados apresentados podem ser encontrados no texto [16] e no livro [23].

#### 3.7.1 Cookie-Cutters e Repulsores

**Definição 3.7.1** (Cookie-cutters e seus repulsores). *Sejam  $I_1, I_2$  contidos em  $[0, 1]$  intervalos fechados e disjuntos. Seja  $T : I_1 \cup I_2 \rightarrow [0, 1]$  um mapa  $C^2$  tal que  $|T'| > 1$  e  $T(I_1) = [0, 1]$ . Note que esse mapa tem uma quantidade infinita de pontos periódicos e cada um desses pontos admite uma medida  $T$ -invariante. Essa mesma construção pode ser feita com  $N \in \mathbb{N}$  intervalos. Aos mapas pertencentes a essa classe chamaremos de *cookie-cutters*. Dado um *cookie-cutter*  $T : I_1 \cup I_2 \rightarrow [0, 1]$ , o *repulsor* correspondente a  $T$  é o conjunto  $\Lambda = \bigcap_{i=0}^{\infty} T^{-i}([0, 1])$ . Note que podemos escrever o repulsor como  $\Lambda = \{x \in I_1 \cup I_2; T^n x \text{ está bem definido para todo } n \in \mathbb{N}\}$ .*

**Observação 3.7.1.** *Como  $(T^{-i}([0, 1]))_{i \in \mathbb{N}}$  é uma sequência decrescente de compactos,  $\Lambda$  é compacto não-vazio. Mais ainda, é  $T$ -invariante. É chamado um repulsor porque pontos fora de  $\Lambda$  são eventualmente mapeados fora de  $I_1 \cup I_2$  por meio de iterações de  $T$ .*

**Exemplo 3.7.1** (Cookie-Cutter cujo Repulsor é o Cantor Ternário). *Daremos agora um exemplo de cookie-cutter cujo repulsor é o Conjunto de Cantor Ternário. Na verdade, sempre que para um dado cookie-cutter  $T : I_1 \cup I_2 \rightarrow [0, 1]$  aconteça  $\overline{I_1} \cup \overline{I_2} \neq [0, 1]$ , então o repulsor  $\Lambda$  é um conjunto de Cantor (Ou seja, algum conjunto criado com processo iterativo de remoção de intervalos análogo ao do Cantor Ternário), conforme afirmado por [16]. De fato, considere  $T : I_1 \cup I_2 \rightarrow [0, 1]$ , com  $T(x) = 3x \pmod 1$ , onde  $I_1 = [0, 1/3]$ ,  $I_2 = [2/3, 1]$ . Note que  $T$  é um cookie-cutter e que*

$$\begin{aligned} \Lambda &= \bigcap_{i=0}^{\infty} T^{-i}([0, 1]) \\ &= [0, 1] \cap ([0, 1/3] \cup [2/3, 1]) \cap ([0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]) \cap \dots, \end{aligned}$$

que é o Cantor Ternário.

**Exemplo 3.7.2** (Cookie-Cutter cujo Repulsor é Um Conjunto de Cantor Generalizado). *Considere agora o mapa linear por partes dado por  $T : I_1 \cup I_2 \rightarrow [0, 1]$ ,  $I_1 = [1/8, 1/2]$ ,  $I_2 = [5/8, 3/4]$ ,  $T(x) = 8x/3 - 1/3$ , se  $x \in I_1$  e  $T(x) = 8x - 5$ , se  $x \in I_2$ . Note que esse mapa é um cookie-cutter, e como  $\Lambda = \bigcap_{i=0}^{\infty} T^{-i}([0, 1]) = [0, 1] \cap ([1/8, 1/2] \cup [5/8, 3/4]) \cap (T^{-1}([1/8, 1/2]) \cup T^{-1}([5/8, 3/4])) \cap \dots$ , temos que o repulsor é um conjunto de Cantor (mas diferente do Cantor Ternário). Na próxima seção aprenderemos uma maneira prática de calcular sua dimensão de Hausdorff.*

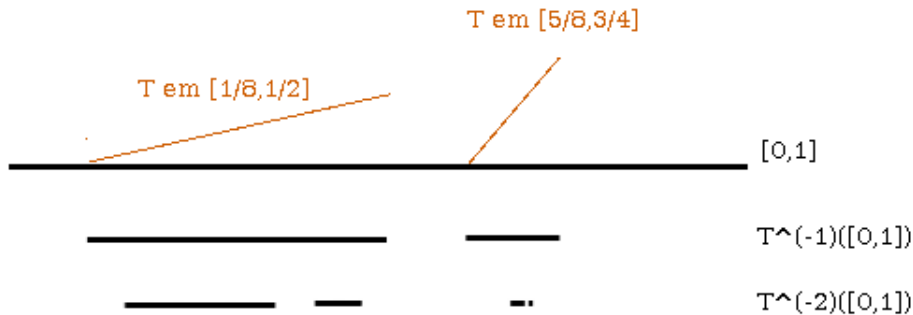


Figura 3.4: Cookie-cutter do Exemplo 4.3.2. Fonte: Autor

### 3.7.2 Medidas Invariantes, Medidas de Gibbs e Resultados Básicos de Formalismo Termodinâmico

Os resultados dessa seção não são o foco da presente dissertação, tendo um caráter expositivo, com o único objetivo de introduzir a notação e os conceitos necessários para formular o teorema de Bowen.

**Definição 3.7.2** (Medida Invariante com respeito a um Mapa). *Seja  $T : X \rightarrow X$  um mapa contínuo no espaço métrico compacto  $(X, d)$ . Dizemos que a medida de probabilidade  $\mu$  é  $T$ -invariante se  $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$  para todo  $A$  boreliano do espaço  $(X, d)$ .*

**Lema 3.7.1** (Caracterização das Medidas T-Invariantes). *Uma medida de probabilidade  $\mu$  é  $T$ -invariante se, e somente se,  $\int f d\mu = \int f \circ T d\mu$  para toda  $f \in L^1$ .*

*Demonstração.* Claramente a relação vale para funções características. Pela linearidade da integral, temos que vale para as funções simples. Dada  $f \in L^1$ , considere  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sequência de funções simples convergindo para  $f$  e tal que  $|s_n| \leq |f|$  para todo  $n$ . A existência de tal sequência é garantida por um argumento de aproximação e pode ser visto em detalhes em [6]. Usando o Teorema da Convergência Dominada duas vezes,  $\int f d\mu = \lim \int s_n d\mu = \lim \int s_n \circ T d\mu = \int f \circ T d\mu$ . Note que a volta é análoga, pois as ideias apresentadas vão em duas direções.  $\square$

**Exemplo 3.7.3** (Medida Suportada em Órbita Periódica). *Dado  $T : X \rightarrow X$  como na definição acima, se  $x$  for um ponto periódico de período  $n$ , então  $\mu = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{T^j x}$  é  $T$ -invariante. De fato, o lema acima nos diz que ser  $T$ -invariante é equivalente a para cada  $f \in L^1(X, \mu)$  valer  $\int f d\mu = \int f \circ T d\mu$ , então basta ver que dada  $f \in L^1(X, \mu)$ ,  $\int f \circ T d\mu = \frac{1}{n} (f(T(x)) + \dots + f(T^{n-1}(x)) + f(T^n(x))) = \frac{1}{n} (f(x) + f(T(x)) + \dots + f(T^{n-1}(x))) = \int f d\mu$ , usando o fato de que  $x$  é ponto periódico.*

**Exemplo 3.7.4** (Isometrias e Medida de Lebesgue). *Dada uma isometria  $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , temos que  $\mathcal{L}^d$  é  $T$ -invariante. De fato, se  $T$  for uma isometria, então  $|\det T| = 1$ , e daí, lembrando que vale a propriedade da dilatação da medida de Lebesgue,  $\mu(T(A)) = |\det T|\mu(A)$  então temos que para toda  $f \in L^1$ ,  $\int f \circ T d\mathcal{L}^d = \int |\det T| f d\mathcal{L}^d = \int f d\mathcal{L}^d$ , o que prova a  $T$ -invariância da medida de Lebesgue  $\mathcal{L}^d$ , usando novamente o lema anterior.*

**Teorema 3.7.1** (Teorema da Recorrência de Poincaré). *Seja  $f : M \rightarrow M$  uma transformação mensurável e  $\mu$  uma medida finita e invariante por  $f$ . Seja  $E \subseteq M$  qualquer mensurável com  $\mu(E) > 0$ . Então para  $\mu$ -qtp  $x \in E$  existem infinitos valores de  $n$  tais que  $f^n(x) \in E$ .*

*Demonstração.* Seja  $E_0$  o conjunto dos  $x \in E$  que nunca regressam a  $E$ . Afirmamos que  $\mu(E_0) = 0$ . Observe que as  $f^{-n}(E_0)$  são duas-a-duas disjuntas. De fato, suponha que existam  $m > n \geq 1$  tais que  $f^{-m}(E_0) \cap f^{-n}(E_0) \neq \emptyset$ . Seja  $x$  nessa interseção e  $y = f^n(x)$ ; então  $y \in E_0$  e  $f^{m-n}(y) = f^m(x) \in E_0$ , que está contido em  $E$ . Ou seja,  $y$  volta ao menos uma vez a  $E$ , o que contradiz a definição de  $E_0$ , e isso prova que as pré-imagens são duas-a-duas disjuntas. Observe agora que  $\mu(f^{-n}(E_0)) = \mu(E_0)$  para todo  $n \geq 1$ , pois  $\mu$  é invariante; concluimos então que  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(E_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f^{-n}(E_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_0)$ . Como a medida  $\mu$  é finita,  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(E_0)) < \infty$ . Por outro lado,  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_0)$  é uma soma de infinitos termos, todos iguais. Logo todas as parcelas são nulas, e segue que  $\mu(E_0) = 0$ .

Seja agora  $F$  o conjunto dos  $x \in E$  que regressam a  $E$  apenas um número finito de vezes. Pela definição, todo  $x \in F$  tem algum iterado  $f^k(x) \in E_0$ , ou seja,  $F \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(E_0)$ . Como  $\mu(E_0) = 0$  e  $\mu$  é invariante, temos  $\mu(F) \leq \mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(E_0)) \leq \sum \mu(f^{-k}(E_0)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_0) = 0$ , o que prova  $\mu(F) = 0$ .

□

**Exemplo 3.7.5** (Full shift em 2 símbolos). *Seja  $\Sigma_2$  o conjunto das sequências de dígitos 1 ou 2, que é compacto com a topologia produto e tal que sua topologia pode*



ter como base os conjuntos cilindros  $C_{i_1 \dots i_n} = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}}; x_i = i_1, \dots, x_n = i_n\}$ . Considere o mapa shift  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  definido por  $\sigma(x_1 x_2 x_3 \dots) = (x_2 x_3 x_4 \dots)$ . Se  $x(n) = (x_1 x_2 \dots x_n \dots)$  for uma órbita periódica para  $\sigma$ , então a medida  $\delta_{x(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{\sigma^i(x(n))}$  é  $\sigma$  invariante.

**Definição 3.7.3** (Partição, Junção e Entropia de uma Partição). *Dada uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}$ , uma partição do conjunto  $X$  é uma coleção disjunta de elementos em  $\mathcal{B}$  cuja união é  $X$ . A junção (ou join) de duas partições  $P_1 = \{A_1, \dots, A_n\}$  e  $P_2 = \{C_1, \dots, C_m\}$  é definida como  $P_1 \vee P_2 = \{A_i \cap C_j; 1 \leq i \leq n \text{ e } 1 \leq j \leq m\}$ . A entropia da partição  $P_1 = \{A_1, \dots, A_n\}$  com respeito à medida  $\mu$  é dada por*

$$H(P_1) = - \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \log \mu(A_i).$$

**Observação 3.7.2.** *Dada uma partição  $P_1$  de  $X$ , podemos refiná-la usando dinâmica, pois  $\bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i}(P_1) = \{\bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i}(A_{i_j}); i_j \in \{1, \dots, n\}\}$ , e daí a entropia de  $(T, \mu)$  com respeito à partição  $P_1$  é dada por  $h(T, P_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i}(P_1))$ , e assim finalmente podemos definir:*

**Definição 3.7.4** (Entropia de um mapa  $T$  com respeito a uma Medida). *Dado  $T : X \rightarrow X$  mapa contínuo no espaço métrico compacto  $(X, d)$ , e sendo  $\mu$  uma medida  $T$ -invariante, definimos a entropia de  $T$  com respeito a  $\mu$  por  $h(\mu) = \sup\{h(T, P); P \text{ é partição finita de } X\}$ .*

**Definição 3.7.5** (Potencial e Pressão Topológica). *Seja  $T : X \rightarrow X$  um full shift em  $N$  símbolos ou um cookie-cutter. Seja  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função Hölder contínua, à qual chamaremos de potencial. A pressão topológica do mapa  $T$  no potencial  $\phi$  é definida por  $P_T(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{T^n x = x} e^{(\sum_{i=0}^{n-1} \phi(T^i x))}$ , limite o qual por um argumento de subaditividade pode ser provado existente.*

**Observação 3.7.3.** *Observe que quando o potencial é nulo, a expressão que define a pressão topológica é igual a  $P_T(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{T^n x = x} 1$ , ou seja,  $P_T(0)$  quantifica o crescimento exponencial das órbitas periódicas, e a esse valor também*

chamamos entropia topológica, a qual é denotada  $h_{top}(T)$ . Um dos resultados mais importantes do formalismo termodinâmico é o Princípio Variacional, que relaciona  $P_T(\phi)$ , a pressão topológica, com  $h$ , a entropia de  $T$  com respeito a  $\mu$ .

**Teorema 3.7.2** (Princípio Variacional). *Seja  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  um potencial. Então  $P_T(\phi) = \sup \{h(\mu) + \int \phi d\mu; \mu \text{ é } T\text{-invariante}\}$ .*

**Observação 3.7.4.** *Note que no teorema acima se o potencial for nulo, obtemos o princípio variacional para a entropia topológica:*

$$h_{top}(T) = \sup\{h(\mu); \mu \text{ é } T - \text{invariante}\}.$$

**Definição 3.7.6.** *(Medida de Equilíbrio para o Potencial  $\phi$ ) Uma medida de probabilidade  $T$ -invariante  $\mu$  tal que  $P_T(\phi) = h(\mu) + \int \phi d\mu$  é chamada de medida de equilíbrio para o potencial  $\phi$ .*

### 3.7.3 A Fórmula de Bowen

A Fórmula de Bowen pode ser pensada como o grande objetivo do capítulo, pois é a ligação entre Formalismo Termodinâmico e a dimensão de Hausdorff, nos dando mais uma maneira de calcular dimensões de Hausdorff de Fractais.

Uma vez que a nomenclatura necessária já foi enunciada na seção anterior, podemos preparar nosso terreno para a demonstração da Fórmula de Bowen. Para tal fim, primeiro enunciaremos um lema, cuja prova exige maquinário de Análise Funcional (resultados que garantem que a pressão é o autovalor maximal de um certo operador chamado operador de transferência), além de argumentos de Cálculo das Variações e Sistemas Dinâmicos. Para a demonstração do primeiro item, indicamos as referências [28] e [25], e para a demonstração do segundo item indicamos [16].

**Lema 3.7.2.** *Seja  $T : I_1 \cup I_2 \rightarrow [0, 1]$  um cookie-cutter. Então é verdade que:*

(1) a função  $t \mapsto P(-t \log |T'|)$  é analítica real, convexa e estritamente decrescente.

(2) Existe um único valor  $t^*$  tal que  $P(-t^* \log |T'|) = 0$

**Observação 3.7.5.** *Convém também para nosso propósito definirmos um homeomorfismo especial atuando no espaço  $\Sigma_2$  e tomando valores no repulsor de um cookie cutter dado que de certa forma enderece os pontos do repulsor, para podermos fazer uma tradução desses pontos e, de certa forma, lermos apenas os endereços no espaço  $\Sigma_2$ .*

**Definição 3.7.7.** *(Homeomorfismo  $h$  e os cilindros) Dado o mapa cooke-cutter (restrito ao repulsor)  $T : \Lambda \rightarrow \Lambda$ , defina o homeomorfismo  $h : \Sigma_2 \rightarrow \Lambda$  por  $h(\omega) = \bigcap_{i=1}^{\infty} T^{-i}(I_{\omega_i})$  para cada sequência  $\omega = (\omega_1 \omega_2 \dots)$  e  $\omega_i \in \{1, 2\}$ . O homeomorfismo  $h$  satisfaz que  $(T \circ h)(\omega) = (h \circ \sigma)(\omega)$ . O cilindro é o conjunto  $C_{i_1 \dots i_n} = \{\omega \in \Sigma_2; \omega_1 = i_1, \dots, \omega_n = i_n\}$ , donde abusaremos a notação e chamaremos de cilindro o conjunto  $h(C_{i_1 \dots i_n}) = I(i_1 \dots i_n)$*

**Observação 3.7.6.** *É também importante para a prova da Fórmula de Bowen o seguinte Teorema, ao qual daremos apenas uma ideia da prova, e enfatizamos que sua demonstração completa pode ser encontrada em [16].*

**Lema 3.7.3.** *Seja  $T : I_1 \cup I_2 \rightarrow [0, 1]$  um cookie-cutter. Então existe uma única medida de equilíbrio  $\mu_{t^*}$  correspondente a  $-t^* \log |T'|$ . Mais ainda, essa medida é uma medida de Gibbs, isto é, existe uma constante  $C > 0$  tal que  $\frac{1}{C} \leq \frac{\mu_{t^*}(I(i_0, \dots, i_n))}{|(T^n)'x|^{-t^*}} \leq C$  para todo  $x \in I(i_0, \dots, i_n)$*

*Demonstração.* (Ideia da Prova) A ideia é construir uma medida satisfazendo a propriedade desejada, e para isso comece com  $\mu_n$  uma sequência de medidas atômicas convergindo para  $\mu$ . Agora devem-se usar algumas estimativas para o comprimento de um cilindro e para a derivada de  $T$ , além de notar que medidas que satisfazem a Propriedade de Gibbs podem ser escolhidas para serem invariantes e ergódicas.  $\square$

**Observação 3.7.7.** *Por meio do Teorema do Valor Médio, podemos obter, para todos  $x, y$  no repulsor  $\Lambda$  do cookie-cutter  $T$ ,  $C_1|x-y| \leq |T^{-1}(x) - T_i^{-1}(y)| \leq C_2|x-y|$ , o que nos leva a concluir que  $C_1|I(i_1 \dots i_n)| \leq |I(i_1 \dots i_n i_{n+1})| \leq C_2|I(i_1 \dots i_n)|$ .*

**Teorema 3.7.3** (Fórmula de Bowen). *Seja  $T$  um cookie-cutter. Então  $t = \dim_H(\Lambda)$  é a única raiz da equação  $P(-t \log(|T'|)) = 0$*

*Demonstração.* O roteiro dessa demonstração é relacionar a única raiz, que será denotada  $t^*$  e a medida de Hausdorff  $t^*$ -dimensional definida no repulsor  $\Lambda$ , para assim usarmos o Princípio de Distribuição de Massa.

Seja  $t^*$  o único valor que zera  $P(-t^* \log(|T'|)) = 0$ . Além disso, existe uma única medida de equilíbrio  $\mu$  correspondente ao potencial  $-t^* \log(|T'|)$ . Essa medida possui a propriedade de Gibbs:  $\frac{1}{C} \leq \frac{\mu_{t^*}(I(i_1, \dots, i_n))}{|(T^n)'x|^{-t^*}} \leq C$  para cada  $x$  em  $I(i_1, \dots, i_n)$ . Note também que  $|(T^n)'x|^{-t^*} = |I(i_1, \dots, i_n)|^{-t^*}$

Seja  $x$  no repulsor  $\Lambda$  e  $r$  positivo e suficientemente pequeno. É possível achar  $(i_1, \dots, i_n)$  e ponto em  $I(i_1, \dots, i_n)$  tal que

$$|I(i_1, \dots, i_n)| \leq r < \frac{1}{C}|I(i_1, \dots, i_n)|.$$

Podemos obter do segundo lema que  $\mu(B(x, \lambda r)) \leq \mu(I(i_1, \dots, i_n)) \leq \mu(B(x, r))$ , onde  $\lambda > 0$  independe de  $x, r$ . Portanto,

$$\frac{1}{C}\mu(B(x, \lambda r)) \leq |I(i_1, \dots, i_n)|^{t^*} \leq C\mu(B(x, r)),$$

e temos que  $\frac{1}{C}r^{t^*} \leq \mu(B(x, r)) \leq Cr^{t^*}$  para cada  $x$  no repulsor  $\Lambda$  e  $r$  suficientemente pequeno. Daí podemos usar o Princípio de Distribuição de Massa e obter que  $\frac{1}{C} \leq \mathcal{H}^{t^*}(\Lambda) \leq C$ , ou seja,  $\dim_H(\Lambda) = t^*$ .

□

**Exemplo 3.7.6** (A Fórmula de Bowen Recai no Teorema de Falconer quando o Cookie-Cutter for Linear). *Considere o cookie-cutter dado por  $T : I_1 \cup I_2 \rightarrow [0, 1]$ ,*

com  $T|_{I_i} = a_i x + c_i$ , isto é,  $T$  é linear por partes, ou seja,  $T$  restrita a  $I_i$  é a transformação linear  $T_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Nesta situação, temos uma fórmula explícita para a pressão topológica, pois:

$$\begin{aligned} P(-t \log |T'|) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{T^n x = x} e^{(\sum -t \log |(T'(T^i x))|)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{T^n x = x} \prod_{i=0}^{n-1} |(T'(T^i x))| = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \sum_{j \in \{0,1\}^n} (a_{i_1} \dots a_{i_n})^{-t} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log (a_1^{-t} + a_2^{-t})^n = \log(a_1^{-t} + a_2^{-t}) \end{aligned}$$

ou seja,  $P(-t \log |T'|) = \log(a_1^{-t} + a_2^{-t})$ . Agora que temos uma expressão para  $P(-t \log |T'|)$ , podemos usar a teoria até aqui desenvolvida e garantir que  $\dim_H(\Lambda) = t^*$ , onde  $t^*$  é o único zero dessa expressão, ou seja,  $\log(a_1^{-t^*} + a_2^{-t^*}) = 0$ , o que nos dá

$$\left(\frac{1}{a_1}\right)^{t^*} + \left(\frac{1}{a_2}\right)^{t^*} = 1.$$

Por unicidade, temos que  $t^*$  é a dimensão de semelhança do IFS  $\{T_1, T_2\}$ , donde supondo que seja satisfeita a condição de Falconer sobre não ter muita sobreposição, isto é,  $\|T_i\| \leq 1/2$ , segue que há a igualdade entre a  $t^*$  e a dimensão de Falconer, pela unicidade já provada da dimensão de Falconer

**Exemplo 3.7.7** (Calculando a dimensão de Hausdorff de um Cantor Generalizado).

Considere novamente o cookie-cutter do exemplo 4.3.2, no qual vimos um repulsor que era um conjunto de Cantor diferente do ternário, ao qual chamaremos aqui de  $F$ . Note que a dimensão de Hausdorff de  $F$  é dada pelo único  $t^*$  que é solução da equação  $P(-t^* \log |T'|) = 0$ , pela Fórmula de Bowen. Então temos, pelos cálculos já feitos no exemplo 4.4.1, que vale

$$\left(\frac{8}{3}\right)^{-t^*} + 8^{-t^*} = 1;$$

logo  $t^* = \dim_H(F)$  é igual a aproximadamente 0.474995

**Observação 3.7.8.** A definição de cookie-cutter aqui apresentada pode ser estendida para um número finito qualquer de subintervalos disjuntos de  $[0, 1]$  (conforme

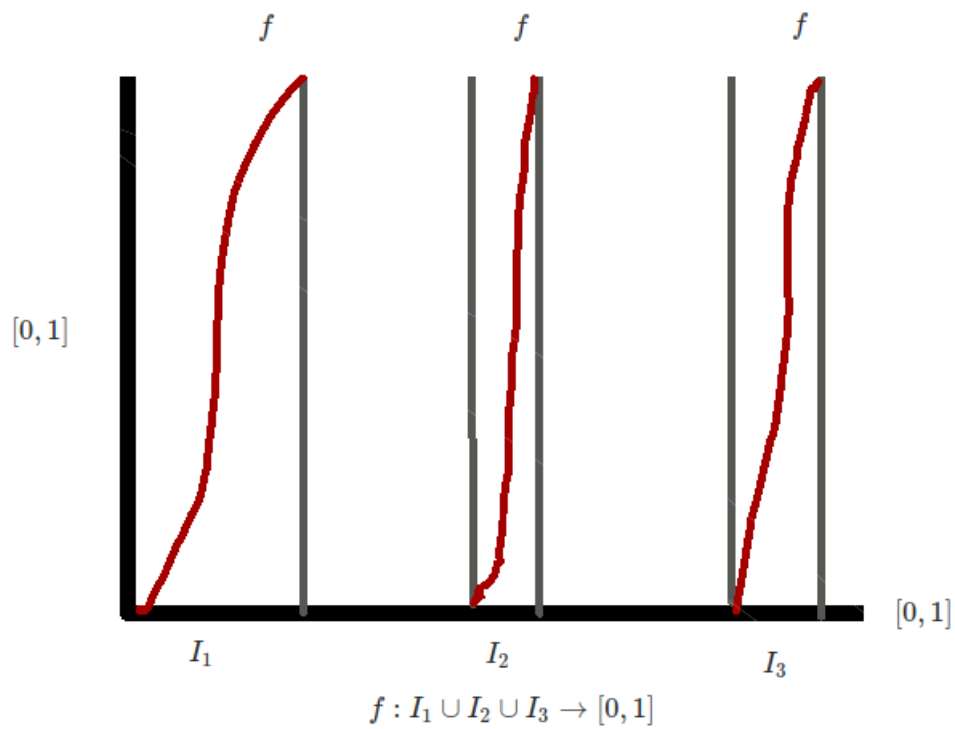


Figura 3.5: Um cookie-cutter com três intervalos. Fonte: Autor

ilustra a figura 3.5) ou até mesmo um intervalo  $[a, b]$ , de forma natural. Porém a generalização de sair da reta e ir para um  $\mathbb{R}^d$  qualquer é complicada, conforme ressalta [11].

## 4 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

A partir do estudo que foi realizado nesta dissertação, podemos constatar que os conjuntos autossimilares e autoafins têm suas dimensões de Hausdorff e de Minkowski condicionadas a teoremas cujas hipóteses versam essencialmente sobre a sobreposição dos conjuntos iterados pelos IFS. Entretanto, não só tais hipóteses podem ser enfraquecidas, como também podemos realizar mudanças nas definições da dimensão fractal utilizada e até mesmo alterar o espaço de fractais, em prol de obtermos novos resultados.

### 4.1 Strong Open Set Condition

Existe uma condição importante, intitulada Strong Open Set Condition, a qual se indagava como se relacionava com a Open Set Condition e com o fato de a medida de Hausdorff  $s$ -dimensional ser positiva, onde  $s$  é a dimensão de semelhança. Tal condição pode ser enunciada como:

**Definição 4.1.1.** *Dizemos que um IFS  $\{s_1, \dots, s_m\}$  com atrator  $F$  satisfaz a strong open set condition se existir aberto  $V$  tal que  $V \subseteq \bigcup_{i=1}^m s_i(V)$ , união disjunta, e além disso  $V \cap F \neq \emptyset$*

A sequência de implicações  $SOSC \implies OSC \implies H^s(F) > 0 \implies s = \dim_H(F)$  já era bem conhecida por [7], [9], [15] e [22]. Muitos esforços foram feitos no sentido das implicações contrárias, por exemplo o estudo feito em [14], e notavelmente o que foi feito no artigo [1], no qual é provada uma caracterização algébrica da medida de Hausdorff  $s$ -dimensional ser positiva:

**Teorema 4.1.1** (Bandt-Graf). *Sejam  $\{f_i\}_{i=1}^m$  o IFS de semelhanças contrativas,  $F$  o conjunto autossimilar e  $\mathcal{F}$  a família associada de semelhanças. Então  $F$  tem medida positiva se, e somente se,  $id \notin \overline{\mathcal{F}}$*

Esse teorema foi o ponto de partida para provar que na verdade as duas primeiras implicações da sequência são equivalências, através do trabalho feito por [29], no qual é provado o seguinte teorema:

**Teorema 4.1.2.** *São equivalentes as seguintes condições:*

- *SOSC vale para um aberto  $U$  com  $\mu(U) = 1$ , onde  $\mu$  é a medida imagem da medida produto  $\mathbb{P} = \bigotimes_{\mathbb{N}} \sum_{i=1}^m r_i^s \epsilon_i$ , onde  $\epsilon_i$  é a medida de Dirac no ponto  $i$ , sob o mapa de  $\Omega$  em  $F$  que leva  $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{(i_1, \dots, i_n)}(0)$ ;*
- *SOSC;*
- *OSC;*
- *$H^s(F) > 0$ ;*
- *Para cada  $\epsilon > 0$ , vale que  $\gamma < \infty$  existe, onde  $\gamma$  é a cardinalidade da família  $\mathcal{C}$  definida em [1];*
- *Existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\gamma < \infty$ .*

Portanto, temos  $SOSC \iff OSC \iff H^s(F) > 0 \implies \dim_H(F) = s$ . Resta perguntar se vale a volta da última implicação, e a resposta é negativa, conforme o exemplo devido a Mattila (mas cuja uma discussão completa das propriedades abaixo pode ser encontrada no artigo de Kenyon [17]):

**Exemplo 4.1.1** (Mattila). *Construa o Triângulo de Sierpiński desconexo no plano, isto é, para  $i = 1, 2, 3$ , faça  $f_i(x) = x_1 + (x - x_i)/3$ , com  $x_1 = (0, 0)$ ,  $x_2 = (1, 0)$ ,  $x_3 = (1/2, 1/(2\sqrt{3}))$ . É claro que satisfaz a SOSC com  $s = 1$ , então quase todas as Lebesgue-projeções em subespaços 1-dimensionais de  $\mathbb{R}^2$  (que são novamente autossimilares) têm dimensão de Hausdorff  $s$ -dimensional iguais a 1, porém medida  $H^1$  igual a zero.*



## 4.2 Dimensão de Assouad

Uma diferente noção de dimensão fractal das aqui estudadas é a dimensão de Assouad, a qual percebe as sobreposições de um conjunto autossimilar de modo diferente que a de Hausdorff, podendo ser estritamente maior que a dimensão de semelhança do conjunto autossimilar.

**Definição 4.2.1** (Dimensão de Assouad). *Dado  $E \subseteq \mathbb{R}^d$  um conjunto limitado, se  $N_E(\rho)$  é o menor número de bolas de raio  $\rho$  necessárias para cobrir  $E$ , dado  $X \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $N_X(r, \rho) = \max\{N_{X \cap B_r(x)}(\rho); x \in X\}$ , onde  $B_r(x)$  é a bola fechada de raio  $\rho$  centrada em  $x$ , a dimensão de Assouad de  $X$ , denotada  $\dim_A(X)$ , é o ínfimo sobre todos os  $s \geq 0$  tais que existe  $K_s$  com  $N_X(r, \rho) \leq K_s(r/\rho)^s$  para todo  $0 < \rho < r \leq 1$ .*

O artigo [12] prova um teorema sobre a dimensão de Assouad envolvendo a Weak Separation Property, e prova uma dicotomia sobre a dimensão de Assouad de um conjunto autossimilar na reta. Os enunciados da WSP e do teorema são dados a seguir.

**Definição 4.2.2** (Weak Separation Property). *Um IFS satisfaz a weak separation property se  $I \notin \overline{\epsilon \setminus \{I\}}$ , onde  $\epsilon = \{s_\alpha^{-1} \circ s_\beta; \alpha, \beta \in \mathcal{I}^*, \alpha \neq \beta\}$ ,  $\mathcal{I}^*$  é o conjunto de seqüências finitas com entradas no conjunto finito de índices  $\mathcal{I}$  e  $I$  é a identidade.*

**Teorema 4.2.1** (Fraser-Henderson-Olson-Robinson). *Ou a WSP é satisfeita, e daí as dimensões de Hausdorff e de Assouad coincidem, ou a WSP não é satisfeita, e daí a dimensão de Assouad é exatamente 1.*

O trabalho desenvolvido por [12] também traz alguns resultados em dimensões mais altas e traz exemplos ilustrativos que mostram que nem sempre a dicotomia se generaliza. Outros resultados podem ser encontrados no trabalho recente de García [13].

### 4.3 Conjuntos similares em espaços projetivos

Recentemente (por sugestão do professor Ignacio García) começamos a trabalhar em tópicos relacionados com análogos do teorema de Bowen no espaço projetivo e na esfera quando utilizamos algumas classes de mapas mais gerais, como nos artigos de Barnsley e Vince [2] e de Vince [31]. Por ser uma área com possíveis problemas em aberto, gostaríamos de retornar a esse tópico em algum momento futuro.

## 5 ANEXO

Neste anexo revisitamos alguns teoremas de topologia e análise funcional a fim de provarmos a completude do espaço dos compactos de  $\mathbb{R}^d$  e a compacidade do espaço das medidas de probabilidade sobre o atrator do IFS. São referências fundamentais para este anexo os livros [4], [18] e [5].

### 5.1 Teoremas Essenciais de Topologia e Análise Funcional

**Teorema 5.1.1** (Teorema da Representação de Riesz). *Seja  $T$  um funcional linear limitado em um espaço vetorial  $H$  sobre  $\mathbb{C}$  com produto interno  $\langle \cdot \rangle$ . Então existe um único  $x_0 \in H$  tal que  $T(x) = \langle x, x_0 \rangle$ , para todo  $x \in H$ , e além disso  $\|T\| = \|x_0\|$ .*

*Demonstração.* (Existência) Se  $T(x) = 0$  para todo  $x \in H$ , então  $x_0 = 0$ . Se  $T(x) \neq 0$  para algum  $x \in H$ , como  $T$  é linear e limitado,  $N(T)$ , o núcleo, é subespaço vetorial fechado de  $H$ . Então podemos garantir que existem  $y_1 \in N(T)$  e  $y_2 \in (N(T))^\perp$  tais que  $x = y_1 + y_2$ , com  $T(y_2) \neq 0$ . Como  $x - \frac{T(x)y_2}{T(y_2)} \in N(T)$ , vale que

$$0 = \langle x - \frac{T(x)y_2}{T(y_2)}, y_2 \rangle = \langle x, y_2 \rangle - \frac{T(x)\langle y_2, y_2 \rangle}{T(y_2)},$$

e, portanto, obtemos

$$T(x) = \frac{\langle x, y_2 \rangle T(y_2)}{\langle y_2, y_2 \rangle} = \langle x, \frac{y_2 \overline{T(y_2)}}{y_2, y_2} \rangle = \langle x, x_0 \rangle \text{ com } x_0 = \frac{y_2 \overline{T(y_2)}}{\langle y_2, y_2 \rangle}.$$

(Unicidade) Suponha existir outro  $x_1 \in H$  tal que  $T(x) = \langle x, x_1 \rangle$  para todo  $x \in H$ . Logo  $\langle x, x_0 - x_1 \rangle = 0$ , para todo  $x \in H$ . Segue que para  $x = x_0 - x_1$ ,  $0 = \langle x_0 - x_1, x_0 - x_1 \rangle = \|x_0 - x_1\|^2$ , e daí  $x_1 = x_0$ .

Resta ver que

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, x_0 \rangle| \leq \sup_{\|x\|=1} (\|x\| \|x_0\|) = \|x_0\| \sup_{\|x\|=1} \|x\| = \|x_0\|,$$

e que como  $\|x_0\|^2 = \langle x_0, x_0 \rangle = |T(x_0)| \leq \|T\| \|x_0\|$ , vale a relação  $\|x_0\| \leq \|T\|$ , ou seja, concluímos que  $\|T\| = \|x_0\|$ .

□

**Teorema 5.1.2** (Teorema de Hahn-Banach). *Sejam  $X$  um espaço vetorial normado,  $Y$  um subespaço de  $X$  e  $f$  um funcional linear limitado definido em  $Y$ . Então existe um funcional linear limitado  $\tilde{f}$  definido em  $X$  tal que  $\tilde{f}(x) = f(y)$  para todo  $y \in Y$ , e tal que  $\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Y$*

*Demonstração.* Se  $Y$  for o espaço  $\{0\}$ , então  $f = 0$  e a extensão é  $\tilde{f} = 0$ . Suponha  $Y$  diferente de  $\{0\}$ . Para cada  $y \in Y$  temos  $|f(y)| \leq \|f\|_Y \|y\|$ . Defina  $p(x) = \|f\|_Y \|x\|$  para todo  $x \in X$ ; Note que  $p$  satisfaz  $p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)$  e  $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ , logo pode ser garantida a existência de um funcional (veja o comentário abaixo)  $\tilde{f}$  em  $X$  que é extensão de  $f$  e satisfaz  $|\tilde{f}(x)| \leq p(x) = \|f\|_Y \|x\|$  para todo  $x \in X$ . Tomando o supremo sobre todos os  $x \in X$  com  $\|x\| = 1$ , obtemos  $\|\tilde{f}\|_X = \sup_{x \in X, \|x\|=1} |\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_Y$ . Como também vale  $\|\tilde{f}\|_X \geq \|f\|_Y$ , pois  $\tilde{f}$  é extensão de  $f$ , segue o resultado. □

**Observação 5.1.1.** *No teorema acima, o detalhe omitido é intrincado e pode ser feito pelo Princípio do Máximo de Hausdorff, o qual pode ser encontrado em [27].*

**Teorema 5.1.3** (Equivalência sobre Espaço Métrico Compacto). *Seja  $(M, d)$  um espaço métrico.  $(M, d)$  é compacto se, e somente se,  $(M, d)$  é completo e totalmente limitado.*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ )

Provaremos primeiro que se  $M$  for compacto, todo subconjunto infinito possui ponto de acumulação.

Se o espaço for compacto, dado um subconjunto  $X$  tal que  $X' = \emptyset$ , temos  $\overline{X} = X \cup X' = X$ , logo  $X$  é fechado em  $M$ , ou seja, compacto. Além disso,

nenhum  $x \in X$  é de acumulação, logo  $X$  é discreto, portanto temos que  $X$  é finito. Isso prova que todo subconjunto infinito de  $M$  possui ponto de acumulação.

Agora, assumamos que todo subconjunto infinito de  $M$  possua ponto de acumulação. Provaremos que isso implica que toda sequência em  $M$  possui subsequência convergente.

Dada  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sequência em  $M$ , se o conjunto dos valores  $x_n$  for finito, existe  $a = x_{n_1} = x_{n_2} = \dots = x_{n_k} = \dots$  que se repete infinitas vezes, logo  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  é uma subsequência convergente para  $a$ . Se, no entanto,  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  for infinito, então existe ponto de acumulação  $a$ . Toda bola de centro  $a$  contém termos  $x_n$  com índices arbitrariamente grandes, logo  $a$  é limite de alguma subsequência de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Assumamos agora que toda sequência em  $M$  possua subsequência convergente. Provaremos finalmente que  $(M, d)$  é totalmente limitado.

Toda sequência de Cauchy em  $M$  possui subsequência convergente, logo é convergente. Assim,  $M$  é completo. Dado  $\epsilon > 0$ , exprima  $M$  como uma reunião de um número finito de bolas de raio  $\epsilon$ , escolhendo primeiro  $x_1 \in M$ ; se for  $M = B(x_1, \epsilon)$ , está provado. Caso contrário, existe  $x_2 \in M$  tal que  $d(x_2, x_1) \geq \epsilon$ , e daí se for  $M = B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon)$ , está provado. Procedendo indutivamente,  $M = B(x_1, \epsilon) \cup \dots \cup B(x_n, \epsilon)$  ou então encontramos  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sequência tal que  $d(x_n, x_m) \geq \epsilon$  para  $m \neq n$  quaisquer, ou seja, nenhuma subsequência seria convergente, e isso prova que o segundo caso não pode ocorrer, ou seja,  $(M, d)$  é totalmente limitado.

( $\Leftarrow$ )

Seja  $(M, d)$  completo e totalmente limitado. Suponha por absurdo que exista cobertura aberta  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  para  $M$  tal que não exista subcobertura finita. Podemos escrever  $M$  como reunião finita de subconjuntos fechados, cada com diâmetro menor que 1. Pelo menos um deles,  $X_1$ , é tal que  $X_1 \subseteq \bigcup A_\lambda$  não admite

subcobertura finita.  $X_1$  é totalmente limitado, logo podemos escrevê-lo como reunião finita de fechados de diâmetro menor que  $1/2$ . Procedendo indutivamente, obtemos sequência  $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots \supseteq \dots$  de fechados de  $M$  tais que para todo  $n$  natural,  $|X_n| < 1/n$  e  $X_n$  não está em uma reunião finita dos  $A_\lambda$ . Nenhum dos  $X_n$  é vazio, logo podemos garantir que existe  $a \in M$  tal que  $\{a\} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ , e daí para algum  $\lambda$ , temos  $a \in A_\lambda$ , e, sendo  $A_\lambda$  aberto, segue que  $B(a, 1/n) \subseteq A_\lambda$  para algum  $n$ , o que implica  $X_n \subseteq B(a, 1/n)$ , donde  $X_n \subseteq A_\lambda$ , absurdo.

□

**Teorema 5.1.4** (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Se  $(M, d)$  for um espaço métrico completo e  $T : M \rightarrow M$  for uma contração com  $d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y)$ ,  $\lambda \in (0, 1)$  para todos  $x, y \in M$ , então existe um único ponto fixo  $z$  par  $T$  em  $M$ . Mais ainda, para todo  $x \in M$ , vale que  $d(T^n(x), z) \leq \frac{d(x, T(x))\lambda^n}{1 - \lambda}$*

*Demonstração.* Se  $T(x) = x, T(y) = y$ , então  $d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x, y)$ , logo  $x = y$ , e daí o ponto fixo (cuja existência ainda será provada) é único.

Dado  $x \in M$ , defina  $x_n = T(x_{n-1}), n \geq 1$  e  $x_0 = x$ . Faça  $a = d(x_0, x_1)$  e note que  $d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n a$ . Se  $k > n$ , note que  $d(x_n, x_k) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{k-1}, x_k) \leq a d(\lambda^n + \dots + \lambda^{k-1}) = \frac{a\lambda^n}{1 - \lambda}$ . Isso implica que  $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$  é de Cauchy, logo  $x_n \rightarrow z$ . Como

$$d(z, T(z)) \leq d(z, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, T(z)) \leq (1 + \lambda)d(z, x_n) + \lambda^n a \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , segue que  $d(T(z), z) = 0$  e  $T(z) = z$ . Basta fazer então  $k \rightarrow \infty$  em  $d(x_n, x_k) \leq \frac{a\lambda^n}{1 - \lambda}$  e concluir que

$$d(T^n(x), z) = d(x_n, z) \leq \frac{d(x, T(x))\lambda^n}{1 - \lambda}.$$

□

**Teorema 5.1.5** (Teorema do Ponto Fixo para Compactos). *Se  $(K, d)$  for um espaço métrico compacto e  $T : K \rightarrow K$  for uma contração, então existe um único ponto fixo  $z$  para  $T$  em  $K$ . Mais ainda,  $T^n(x) \rightarrow z$  para qualquer  $x \in K$ .*

*Demonstração.* Seja  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = d(x, T(x))$ . Como  $f$  é contínua e  $K$  é compacto, existe  $z$  tal que  $\min_{x \in K} f(x) = z$ . Se  $T(z) \neq z$ , então  $f(T(z)) = d(T(z), T^2(z)) < d(z, T(z)) = f(z)$ , o que contradiz a minimalidade de  $z$ , logo  $T(z) = z$ .

Seja  $x_n = T^n(x)$  e suponha que  $x_n$  não converge para  $z$ . Então, para algum  $\epsilon > 0$ , o conjunto  $S = \{n; d(x_n, z) \geq \epsilon\}$  é infinito. Seja  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  uma sequência crescente em  $S$  tal que  $y_k = x_{n_k} \rightarrow y \neq z$ . Como  $d(T(y_k), z) \rightarrow d(T(y), z) < d(y, z)$ , mas  $T^{n_{k+1}-n_k+1}(T(y_k)) = y_{k+1}$ , donde segue que  $d(T(y_k), z) \geq d(y_{k+1}, z) \rightarrow d(y, z)$ , temos um absurdo.  $\square$

## 5.2 Completude de $(K(\mathbb{R}^n), d_H)$ e compacidade de $(P(K), L)$

**Definição 5.2.1** (Métrica de Hausdorff). *Denote  $K(\mathbb{R}^d)$  o conjunto de todos os compactos do espaço métrico euclidiano  $d$ -dimensional  $(\mathbb{R}^d, d)$ . Defina o mapa  $d_H : K(\mathbb{R}^d) \times K(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por  $d_h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$ . Tal mapa é chamado de métrica de Hausdorff (o qual ainda será provado ser de fato métrica), onde  $d(X, Y) = \sup\{d(x, Y); x \in X\}$  para  $X, Y$  não vazios, e  $d(x, Y) = \inf\{d(x, y); y \in Y\}$ . Usaremos a mesma letra  $d$  para essa distância não necessariamente simétrica entre conjuntos, para a métrica euclidiana  $d$ , para a distância entre ponto e conjunto e até mesmo para o expoente do espaço euclidiano sem perigo de confusão, pois a notação dos argumentos e o contexto deixam claro ao que estamos nos referindo.*

**Teorema 5.2.1.**  *$(K(\mathbb{R}^d), d_H)$  é um espaço métrico completo.*

*Demonstração.*  $d_H$  é uma métrica: Da definição de métrica de Hausdorff temos que é uma função não-negativa, simétrica e positiva definida; resta ver que satisfaz a desigualdade triangular.

De fato, dados  $A, B \in K(\mathbb{R}^d)$ , temos

$$\begin{aligned} d(a, B) &= \min\{d(a, b); b \in B\} \\ &\leq \min\{d(a, c) + d(c, b); b \in B\} \forall c \in C \\ &= d(a, c) + \min\{d(c, b); b \in B\} \forall c \in C; \end{aligned}$$

logo  $d(a, B) \leq d(a, C) + d(C, B)$  e obtemos  $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ . Um argumento análogo prova que  $d(B, A) \leq d(B, C) + d(C, A)$ , donde temos que

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \max\{d(A, B), d(B, A)\} \\ &\leq \max\{d(B, C), d(C, B)\} + \max\{d(C, B), d(C, A)\} \\ &= d_H(B, C) + d_H(A, C) \end{aligned}$$

como desejado.

Seja  $(K_n)_{n=1}^\infty$  uma sequência de Cauchy de conjuntos em  $K(\mathbb{R}^d)$ . Defina o conjunto  $K = \bigcap_n \overline{\bigcup_{j>n} K_j}$ , a quem afirmamos não só estar no espaço  $K(\mathbb{R}^d, d_H)$ , como também ser o limite dessa sequência. Ser completo e totalmente limitado equivale a ser compacto em um espaço métrico; como o espaço euclidiano  $(\mathbb{R}^d, d)$  é completo, segue que o  $K$  é compacto, por ser fechado. Seja agora  $\epsilon > 0$ , e seja  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $d_H(K_n, K_N) < \epsilon$  para todo  $n \geq N$ . Cubra o compacto  $K_N$  com  $L$  bolas de raio  $\epsilon$ , denotando os centros de tais bolas por  $\{x_i\}, i = 1, \dots, L$ . Como  $K_N$  está contido na  $\epsilon$ -vizinhança  $K_N^\epsilon = \{x; d(x, K_N) < \epsilon\}$  para todo  $n \geq N$  e  $K_N \subseteq \bigcup_{i=1}^L B(x_i, \epsilon)$ , podemos ver que  $K_n \subseteq \bigcup_{i=1}^L B(x_i, 3\epsilon)$ . Como para escrever  $K$  basta considerar  $K = \bigcap_{n \geq N} \overline{\bigcup_{j>n} K_j}$ , podemos garantir que  $K \subseteq \bigcup_{i=1}^L B(x_i, 4\epsilon)$ , ou seja,  $K$  é totalmente limitado. Portanto  $K$  é compacto.

Resta mostrar que  $K_n \rightarrow K$  na métrica  $d_H$ . Dado  $\epsilon > 0$ , escolha  $N$  natural tal que  $d(K_n, K_N) < \epsilon$  para todo  $n \geq N$ . Temos então a inclusão  $\overline{\bigcup_{n>N} K_n} \subseteq$



$K_N^{2\epsilon}$ , o que implica que  $K \subseteq K_N^{2\epsilon}$ . Para provar a inclusão oposta, para todo  $i \geq 0$ , seja  $N_i$  a sequência de inteiros tais que  $d(K_{N_i}, K_n) < \frac{\epsilon}{2^i}$  para todo  $n \geq N_i$ , donde fazemos  $N_0 = N$ . Fixando um  $y_0$  arbitrário em  $K_N$  e fazendo para todo  $i \geq 1$  a escolha de pontos  $y_i$  em  $K_{N_i}$  de modo que  $d(y_i, y_{i-1}) \leq \frac{\epsilon}{2^i}$ , temos que  $(y_i)_{i=1}^\infty$  é uma sequência de Cauchy e, usando a completude do espaço euclidiano, converge para  $y_\infty$  real. Por construção,  $y_m$  está em  $\bigcup_{j \geq N_i} K_j$  para todo  $m \geq i$ , o que implica que esse ponto  $y_\infty$  está no conjunto  $K$ . Claramente temos que  $d(y_0, y_\infty) < 2\epsilon$ , o que nos garante que  $K_N$  está contido na  $2\epsilon$ -vizinhança de  $K$ , ou seja,  $K_N \subseteq K^{2\epsilon}$ , logo podemos afirmar que  $d_H(K_N, K) \leq 2\epsilon$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(K_n, K) = 0$ , o que finalmente prova a completude do espaço  $(K(\mathbb{R}^d), d_H)$ .  $\square$

**Definição 5.2.2** ( $\epsilon$ -net). *Uma  $\epsilon$ -net em um conjunto  $X$  é o conjunto de pontos de  $X$  que estão a uma distância maior ou igual do que  $\epsilon$ .*

**Teorema 5.2.2.**  *$(K(\mathbb{R}^d), d_H)$  é totalmente limitado.*

*Demonstração.*  $(K(\mathbb{R}^d), d_H)$  é totalmente limitado, existe uma  $\epsilon$ -net  $\{x_j\}_{j=1}^L$  para  $\mathbb{R}^d$ , isto é,  $\mathbb{R}^d \subseteq \bigcup_{j=1}^L B(x_j, \epsilon)$ . Seja  $S$  a coleção de todos os subconjuntos não vazios dessa  $\epsilon$ -net, donde temos que  $S$  é um subconjunto finito de  $K(\mathbb{R}^d)$ . Dado qualquer  $K$  em  $K(\mathbb{R}^d)$ , considere o conjunto  $A = \{x_j; d(x_j, K) < \epsilon\}$ . Note que  $K \subseteq \bigcup \{B(x_j, \epsilon); x_j \in A\}$  o que implica  $K$  estar contido na  $\epsilon$ -vizinhança  $A^\epsilon$  de  $A$ . Como  $d(x, K) < \epsilon$ , para todo  $x \in A$ , temos que  $A$  está contido na  $\epsilon$ -vizinhança  $K^\epsilon$  de  $K$ , logo  $d_H(K, A) \leq \epsilon$ , o que garante que  $S$  é uma  $\epsilon$ -net finita para  $K(\mathbb{R}^d)$ , o que prova o resultado.  $\square$

**Teorema 5.2.3.**  *$(K(\mathbb{R}^d), d_H)$  é um espaço métrico compacto.*

*Demonstração.* Na verdade este teorema é um corolário direto do que foi provado acima e do teorema de topologia que garante a equivalência entre um espaço métrico ser compacto e ser completo e totalmente limitado, pois já garantimos a completude e a total limitância de  $(K(\mathbb{R}^d), d_H)$ .  $\square$

**Teorema 5.2.4** (Compacidade de  $(P(K), L)$ ). *O espaço das medidas de probabilidade sobre o atrator  $K$  com a métrica dual de Lipschitz  $L$  é compacto.*

*Demonstração.* Temos que  $(K, d)$  é compacto, onde  $d$  é a métrica euclidiana de  $\mathbb{R}^d$ .

Lembremos que a métrica dual de Lipschitz  $L$  é definida por

$$L(\mu, \nu) = \sup_{Lip(g) \leq 1} \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right|, \text{ onde } Lip(g) \text{ é a constante de Lipschitz das funções Lipschitz contínuas } g, \text{ dada por } Lip(g) = \sup_{x \neq y} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|}.$$

Mostraremos que  $(P(K), L)$  é completo e totalmente limitado. Seja  $(\mu_n)$  uma sequência de Cauchy de medidas em  $(P(K), L)$ . Pela definição de  $L$ , os números reais  $\mu_n(g)$  formam uma sequência de Cauchy para cada  $g$  Lipschitz de constante 1 e, por uma homotetia, para qualquer Lipschitz  $g$ . Usando o fato que as funções de Lipschitz são densas no espaço das funções contínuas em  $K$ , podemos estender isso para quaisquer  $f$  contínuas. Como  $\mathbb{R}$  é completo, para cada tal  $f$  a sequência das  $(\mu_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  converge a um limite  $\lambda(f)$ . Como  $f \mapsto \mu_n(f)$  são funcionais lineares positivos no espaço das contínuas de  $K$ , segue que  $f \mapsto \lambda(f)$  também o é. Note agora que  $|\lambda(f)| = \lim_n \left| \int f d\mu_n \right| \leq \lim_n \int \|f\|_\infty d\mu_n \leq \|f\|_\infty$ , ou seja,  $\lambda$  é um funcional linear limitado no espaço das contínuas, o que, pelo Teorema da Representação de Riesz, nos garante que possa ser escrito como  $\lambda(f) = \int f d\mu$ , para uma medida de Borel não-negativa para todas as  $f$  contínuas. Basta pegar  $f$  como 1 e ver que  $\mu$  é de probabilidade.

Afirmo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} L(\mu_n, \mu) = 0$ . De fato, lembre que  $\mu_n$  é de Cauchy, então pegue  $N$  tal que  $|\mu_n(g) - \mu_m(g)| < \epsilon$  para  $\epsilon > 0$  dado e todas  $g$  de Lipschitz com constante 1. Fazendo  $m \rightarrow \infty$  temos  $|\mu_n(g) - \mu(g)| < \epsilon$ , logo  $L(\mu_n, \mu) \leq \epsilon$  para todo  $n \geq N$  e daí pela arbitrariedade de  $\epsilon$  segue que  $L(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$ , e isso prova a completude. Agora, fixe  $\epsilon > 0$  e pegue uma  $\epsilon$ -net  $\{x_j\}_{j=1}^N$  para o espaço compacto  $(K, d)$ . Escreva  $K$  como a união disjunta  $\bigcup_{j=1}^N D_j$ , com  $D_j = B(x_j, \epsilon) \setminus \bigcup_{i < j} B(x_i, \epsilon)$ . Dada qualquer  $\mu \in P(K)$ , construa a aproximação discreta  $\tilde{\mu} = \sum_{j=1}^N \mu(D_j) \delta_{x_j}$ , onde

$\delta_{x_j}$  é a  $\delta$ -massa do ponto  $x_j$ . Para qualquer  $g$  Lipschitz de constante 1, temos que  $|\int g d\mu - \int g d\tilde{\mu}| \leq \sum_{j=1}^L \mu(D_j)\epsilon = \epsilon$ , e daí  $L(\mu, \tilde{\mu}) < \epsilon$ .

Fixe agora um inteiro  $R$  e para qualquer  $\mu \in P(K)$  dada, considere  $p_j = \frac{1}{R} \lfloor R\mu(D_j) \rfloor$  para todo  $1 \leq j \leq N-1$  e  $p_N = 1 - \sum_{j=1}^{N-1} p_j$ . Defina a medida  $\gamma(\mu) = \sum_{j=1}^N p_j \delta_{x_j}$ . Então, para qualquer  $g$  Lipschitz de constante 1 que se anula a partir de  $x_0 \in K$ , temos  $|\int g d\tilde{\mu} - \int g d\gamma(\mu)| \leq \sum_{j=1}^N \|g\|_\infty |\mu(D_j) - p_j| \leq |K| \left| \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{R} + \frac{N-1}{R} \right|$ . Obtemos então que  $L(\tilde{\mu}, \gamma(\mu)) \leq \frac{|K|2(N-1)}{R}$ . Escolhendo  $R = 2N|K|/\epsilon$ , temos que  $L(\tilde{\mu}, \gamma(\mu)) < \epsilon$ . Logo o conjunto  $\{\gamma(\mu); \mu \in P(K)\}$  é uma  $2\epsilon$ -net em  $(P(K), L)$ , e daí o conjunto  $\{(p_1, \dots, p_N); Rp_j \in \mathbb{Z}^+, \sum_{j=1}^N p_j = 1\}$  é finito, o que implica que  $\{\gamma(\mu); \mu \in P(K)\}$  também o é, ou seja,  $(P(K), L)$  é totalmente limitado. Como  $(P(K), L)$  é completo e totalmente limitado, segue que é compacto.  $\square$

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BANDT, C., AND GRAF, S. Self-similar sets 7. a characterization of self-similar fractals with positive hausdorff measure. *Proceedings of the American Mathematical Society* (1992), 995–1001.
- [2] BARNSLEY, M. F., AND VINCE, A. Real projective iterated function systems. *J. Geom. Anal.* 22, 4 (2012), 1137–1172.
- [3] BEDFORD, T. *Crinkly curves, Markov partitions and dimension*. University of Warwick, 1984.
- [4] BISHOP, C. J., AND PERES, Y. *Fractals in probability and analysis*, vol. 162. Cambridge University Press, 2017.
- [5] CAVALHEIRO, A. C. *Introdução à Análise Matemática*. Editora Ciência Moderna, 2014.
- [6] ELIAS, M., AND STEIN, S. *Real Analysis: Measure Theory, Integration and Hilbert Spaces: Bk 3*. Princeton University Press, 2005.
- [7] FALCONER, K. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons, 2004.
- [8] FALCONER, K. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications (Solutions to Exercises)*. John Wiley & Sons, 2004.
- [9] FALCONER, K. J. *The geometry of fractal sets*. Cambridge university press, 1986.
- [10] FALCONER, K. J. The hausdorff dimension of self-affine fractals. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (1988), vol. 103, Cambridge University Press, pp. 339–350.

- [11] FALCONER, K. J., AND FALCONER, K. *Techniques in fractal geometry*, vol. 3. Wiley Chichester, 1997.
- [12] FRASER, J. M., HENDERSON, A. M., OLSON, E. J., AND ROBINSON, J. C. On the assouad dimension of self-similar sets with overlaps. *Advances in Mathematics* 273 (2015), 188–214.
- [13] GARCÍA, I. Assouad dimension and local structure of self-similar sets with overlaps in  $\mathbb{R}^d$ . *Adv. Math.* 370 (2020), 107244, 33.
- [14] GRAF, S. The equidistribution on self similar sets. In *MIP-8929* (1989), vol. 42, Passau.
- [15] HUTCHINSON, J. E. Fractals and self similarity. *Indiana University Mathematics Journal* 30, 5 (1981), 713–747.
- [16] IOMMI, G. The bowen formula: Dimension theory and thermodynamic formalism. *PUC-Chile* (2008).
- [17] KENYON, R. Projecting the one-dimensional Sierpinski gasket. *Israel J. Math.* 97 (1997), 221–238.
- [18] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983.
- [19] MAGALHÃES, M. N. *Probabilidade e variáveis aleatórias*. Edusp, 2006.
- [20] MATTILA, P. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces: fractals and rectifiability*. Cambridge university press, 1999.
- [21] MCMULLEN, C. The Hausdorff dimension of general Sierpiński carpets. *Nagoya Math. J.* 96 (1984), 1–9.
- [22] MORAN, P. A. Additive functions of intervals and hausdorff measure. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (1946), vol. 42, Cambridge University Press, pp. 15–23.

- [23] OLIVEIRA, K., AND VIANA, M. Fundamentos da teoria ergódica. *IMPA, Brazil* (2014), 3–12.
- [24] ORPONEN, T. Orponen’s geometric measure theory lecture notes.
- [25] PARRY, W., AND POLLICOTT, M. Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics. *Astérisque 187*, 188 (1990), 1–268.
- [26] RABAN, D. Frostman lemma, product dimension, slices and projections.
- [27] RUDIN, W. Real and complex analysis. 1987. *Cited on 156* (1987), 16.
- [28] RUELLE, D. *Thermodynamic formalism: the mathematical structure of equilibrium statistical mechanics*. Cambridge University Press, 2004.
- [29] SCHIEF, A. Separation properties for self-similar sets. *Proceedings of the American Mathematical Society 122*, 1 (1994), 111–115.
- [30] SOLOMYAK, B. Measure and dimension for some fractal families. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (1998), vol. 124, Cambridge University Press, pp. 531–546.
- [31] VINCE, A. Möbius iterated function systems. *Trans. Amer. Math. Soc. 365*, 1 (2013), 491–509.