UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Érick Scopel

CONTRIBUIÇÕES PARA A TEORIA DE DIMENSÃO MÉDIA MÉTRICA E PARA A TEORIA DE DIMENSÃO DE HAUSDORFF MÉDIA

Porto Alegre, RS
2021

Érick Scopel

CONTRIBUIÇÕES PARA A TEORIA DE DIMENSÃO MÉDIA MÉTRICA E PARA A TEORIA DE DIMENSÃO DE HAUSDORFF MÉDIA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Sistemas Dinâmicos, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera

Porto Alegre, RS

2021

Érick Scopel

CONTRIBUIÇÕES PARA A TEORIA DE DIMENSÃO MÉDIA MÉTRICA E PARA A TEORIA DE DIMENSÃO DE HAUSDORFF MÉDIA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Sistemas Dinâmicos, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

Aprovado em 29/07/2021:

Alexandre Tavares Baraviera, Dr. (UFRGS)

Diego Marcon Farias, Dr. (UFRGS)

Leonardo Fernandes Guidi, Dr. (UFRGS)

Lucas da Silva Oliveira, Dr. (UFRGS)

Isabel Lugão Rios, Drª. (UFF)

Porto Alegre, RS

2021

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, minha amada companheira Karina Costantin que vivenciou todos os momentos desta caminhada, sempre me incentivando e me apoiando durante o percurso. Fostes meu porto seguro!

Agradeço aos professores do PPGMat da UFRGS que me acolheram e abriram horizontes pelos quais pretendo percorrer o resto da vida. Em especial, quero agradecer meu orientador, professor Alexandre Baraviera, pela amizade, confiança e, acima de tudo, pelos ensinamentos.

Agradeço aos pesquisadores Fagner Rodrigues e Jeovanny Acevedo pelos momentos de troca de experiências e pelas ideias que possibilitaram o desenvolvimento dos tópicos apresentados nesse trabalho.

Agradeço aos colegas e amigos que fizeram dessa caminhada uma jornada mais leve e divertida. Em especial, aos colegas de viagem, Alex Becker e Henrique Cereser, que compartilharam momentos (e muitos km's) especiais e que marcaram positivamente esta caminhada. Saibam que estarão para sempre em minhas memórias!

Ao colega de vida, um irmão de caminhada, Lucas, agradeço por estar desde o início da graduação até está etapa trilhando este caminho comigo. Te vejo no IF ...

O presente trabalho foi realizado com apoio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), o qual agradeço pela oportunidade de afastamento.

"A uns trezentos ou quatrocentos metros da Pirâmide me inclinei, peguei um punhado de areia, deixei-o cair silenciosamente um pouco mais longe e disse em voz baixa: Estou modificando o Saara. O fato era mínimo, mas essas palavras pouco engenhosas eram exatas e pensei que havia sido necessária toda minha vida para que eu pudesse dizê-las."

Jorge Luis Borges

RESUMO

CONTRIBUIÇÕES PARA A TEORIA DE DIMENSÃO MÉDIA MÉTRICA E PARA A TEORIA DE DIMENSÃO DE HAUSDORFF MÉDIA

AUTOR: Érick Scopel
ORIENTADOR: Alexandre Tavares Baraviera

Este trabalho tem por objetivo contribuir com a teoria de dimensão média métrica (LINDENSTRAUSS; WEISS, 2000) e a teoria de dimensão de Hausdorff média (LINDENSTRAUSS; TSUKAMOTO, 2019). Nesse sentido, esta investigação aborda cinco pontos, são eles: 1) a definição da aplicação *shift* t-modificado e sua exploração quanto a sua dimensão média métrica em diferentes contextos; 2) a definição do conceito de existência de ponto de dimensão média métrica e a constatação que dinâmicas não-autônomas localmente homeomorfas possuem tal ponto; 3) a demonstração que aplicações contínuas definidas em espaços de Banach, que gozam da propriedade de especificação geral, têm dimensão média métrica positiva; 4) a investigação do conceito de dimensão de Hausdorff média quanto a suas propriedades; 5) a exploração do comportamento da dimensão média métrica e da dimensão de Hausdorff média quanto a variação da métrica do espaço.

Palavras Chave: Dimensão média métrica; Dimensão de Hausdorff média; Métrica.

ABSTRACT

CONTRIBUTIONS TO THE THEORY OF METRIC MEAN DIMENSION AND TO THE THEORY OF MEAN HAUSDORFF DIMENSION

AUTHOR: Érick Scopel
ADVISOR: Alexandre Tavares Baraviera

This work aims to contribute to the theory of metric mean dimension (LINDENSTRAUSS; WEISS, 2000) and the theory of mean Hausdorff dimension (LINDENSTRAUSS; TSUKAMOTO, 2019). In this sense, this investigation approches five points: 1) the definition of the t-modified shift map and its exploration about its metric mean dimension in different contexts; 2) the definition of the concept of point of the metric mean dimention and the finding that non-autonomous dynamics locally homeomorphic have this point; 3) the demonstration that continuous maps defined in Banach spaces, that enjoy general specification property, have positive metric mean dimension; 4) the investigation of the concept of mean Hausdorff dimension about its properties; 5) the exploration of the behavior of metric mean dimension and of mean Hausdorff dimension about the variation of metric in the space.

Keywords: Metric mean dimension; Mean Hausdorff dimension; Metric.

Sumário

INTRODUÇÃO

A entropia topológica é um invariante topológico útil para descrever e classificar o quão caótico é um sistema dinâmico $(\mathbb{M}, f)$, onde $\mathbb{M}$ é um espaço compacto metrizável e $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ é uma aplicação contínua. A saber, a entropia topológica quantifica, de forma exponencial, o número de órbitas distinguíveis por erros arbitrariamente pequenos. Um exemplo clássico é a aplicação *shift* no espaço simbólico $\{1, 2, \ldots, l\}^{\mathbb{Z}}$, cuja entropia topológica é $\log l$. Podemos notar que a entropia topológica do *shift* está diretamente ligada a quantidade de símbolos do espaço base. Agora, se considerarmos a aplicação *shift* em um espaço $K^{\mathbb{Z}}$, onde K é um espaço métrico compacto com infinitos símbolos, teremos sempre entropia topológica infinita e, portanto, este invariante não nos dá informação sobre K além do fato desse ser infinito.

Diferentemente do que acontece com aplicações Lipschitz, que têm entropia topológica finita, aplicações que são apenas contínuas, como é o caso do *shift*, podem ter entropia infinita. Como mostra Yano (1980), o conjunto de sistemas definidos em uma variedade de dimensão maior que um, cuja entropia topológica é infinita, formam um conjunto residual no conjunto consistindo das aplicações contínuas definidas na variedade. Nesse contexto, assim como no *shift* definido em alfabetos infinitos, a entropia topológica não é uma ferramenta útil para classificar as dinâmicas.

Em 1999, Gromov define um novo invariante topológico chamado de dimensão média. Este é uma versão dinâmica da dimensão topológica que quantifica quantos parâmetros por iterada é necessário para descrever uma órbita de um sistema dinâmico. Lindenstrauss e Weiss (2000) mostram que existem coleções de sistemas dinâmicos com dimensão média nula, são elas: sistemas onde o espaço tem dimensão topológica finita; sistemas com entropia finita e sistemas unicamente ergódicos. Por outro lado, mostram que a aplicação *shift* definida no espaço compacto $([0, 1]^c)^{\mathbb{Z}}$, onde c é um inteiro positivo, tem dimensão média igual a c. Além disso, os autores mostram que qualquer sistemas dinâmico $(\mathbb{N}, g)$ que é um fator não-trivial de $([0, 1]^{\mathbb{Z}}, \sigma)$, tem dimensão média positiva.

Outros resultados envolvendo o conceito de dimensão média são no contexto de mergulho de um sistema dinâmico em outro. Dizemos que um sistema dinâmico $(\mathbb{M}, f)$ pode ser mergulhado em um sistema dinâmico $(\mathbb{N}, g)$ se existe uma inclusão $i\colon \mathbb{M} \to \mathbb{N}$

satisfazendo $g \circ i = i \circ f$. Lindenstrauss e Weiss (2000) mostram que uma condição necessária para que um sistema dinâmico invertível $(\mathbb{M}, f)$ seja mergulhado em $\big(([0,1]^c)^{\mathbb{Z}}, \sigma\big)$ é que sua dimensão média seja menor ou igual a c. Mais recentemente, os trabalhos de Lindenstrauss e Tsukamoto (2013; 2018) e Gutman e Tsukamoto (2020) mostram que um sistema minimal $(\mathbb{M}, f)$ pode ser mergulhado em $\big(([0,1]^c)^{\mathbb{Z}}, \sigma\big)$ se a dimensão média de $(\mathbb{M}, f)$ é menor que $\frac{c}{2}$, sendo $\frac{c}{2}$ a constante ótima.

Como visto, obter cotas superiores para a dimensão média de um sistema dinâmico é importante para a classificação de dinâmicas com entropia infinita. Nesse sentido, Lindenstrauss e Weiss (2000) propõe uma versão dinâmica da dimensão de Minkowski, chamada de dimensão média métrica, que é um majorante para a dimensão média, mas não é um invariante topológico visto sua dependência com a métrica do espaço. Os autores também demonstram que se $(\mathbb{M}, f)$ é uma extensão de um sistema dinâmico minimal, então existe uma métrica d' em $\mathbb{M}$, compatível com a topologia de $\mathbb{M}$, tal que a dimensão média e a dimensão média métrica com respeito a d' coincidem.

Como primeiro objetivo de nosso trabalho, definimos a aplicação *shift* t-modificado, que consiste na generalização do *shift* modificado proposto por Muir e Urbanski (2014), e o exploramos quanto a sua entropia topológica, dimensão média e dimensão média métrica. Entre outros resultados, mostramos que o *shift* t-modificado tem a mesma dimensão média métrica que o *shift* quando a aplicação que modifica o *shift* conserva ou expande distâncias.

Em um segundo momento, buscamos expandir a gama de propriedades da dimensão média métrica à luz dos trabalhos recentes de Acevedo e Guevara (2019), Acevedo (2020) e Rodrigues e Acevedo (2021), que exploram propriedades da dimensão média métrica tanto no contexto de sistemas dinâmicos autônomos quanto no contexto de sistemas dinâmicos não-autônomos. Para tal, realizamos um levantamento bibliográfico acerca de trabalhos que explorassem as propriedades para a entropia topológica, em busca de inspiração para os resultados no nosso contexto.

Iniciamos com o trabalho de Biś (2013) que define o conceito de ponto de entropia para sistemas dinâmicos e, entre outros resultados, mostra a existência de tal ponto para o caso que f é um homeomorfismo. Exploramos a definição proposta pelo autor em um espaço métrico não compacto, mas que goza de aproximação por compactos invariantes (ver essa definição no Capítulo 3). Nesse contexto, exibimos um ponto e uma vizinhança aberta arbitrariamente pequena deste ponto que aproxima, de forma arbitrária, a entropia no espaço todo.

Em 2019, Sarkooh e Ghane generalizam o resultado obtido por Biś (2013) e obtêm ponto de entropia para sistemas dinâmicos não-autônomos localmente homeomorfos definidos em um espaço métrico compacto. Inspirados no trabalho dos autores, definimos o conceito de ponto de dimensão média métrica para sistemas não-autônomos em um espaço métrico compacto e mostramos que quando esses sistemas são localmente homeomorfos, então existe ponto de dimensão média métrica.

Como é conhecido na literatura (ver Sigmund, 1974) o fato de um sistema dinâmico ter a propriedade de especificação implica que este tem entropia topológica positiva. Guiados por esse resultado, buscamos os trabalhos de Bartoll et al (2012; 2016; 2019) que tratam de sistemas dinâmicos definidos em espaços de Banach que gozam da propriedade de especificação geral (ver essa definição no Capítulo 4) e mostramos que esses sistemas têm dimensão média métrica positiva. Um interessante exemplo de dinâmica (ver Bartoll et al, 2012) que goza da propriedade mencionada anteriormente é o *shift* definido no espaço de Banach $l^p(v)$ $(1 \leq p < \infty)$, onde $v = (v_i)_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência limitada, definido por

$$l^p(v) = \left\{ (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \colon ||x|| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p v_k \right)^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

Posteriormente, passamos a investigar a dimensão de Hausdorff média, conceito definido por Lindenstrauss e Tsukamoto (2019) para o desenvolvimento de um princípio variacional entre a dimensão média e a taxa de distorção. Os autores definiram tal conceito e mostraram que este é um majorante para a dimensão média e um minorante para dimensão média métrica. Por outro lado, os autores não exploram as propriedades do novo conceito. Assim, dedicamos parte desde trabalho para entender a dimensão de Hausdorff média e mostrar algumas propriedades que esta goza à luz das propriedades que a dimensão média métrica e a dimensão de Hausdorff satisfazem.

Tanto o conceito de dimensão média métrica quanto o conceito de dimensão de Hausdorff média dependem da métrica e, portanto, não são invariantes topológicos. Uma forma natural de encarar-los é como uma aplicação de três variáveis, a saber: a dinâmica f; o conjunto f-invariante onde a dinâmica atua; a métrica d do espaço. Sendo assim, podemos nos perguntar como a dimensão média métrica e a dimensão de Hausdorff média variam quanto a cada uma dessas variáveis. Para a dimensão média métrica, trabalhos como o de Carvalho, Rodrigues e Varandas (2019) e Acevedo (2020) exploram o comportamento sob a ótica da dependência quanto as duas primeiras variáveis. De acordo com o levantamento bibliográfico realizado, não identificamos trabalhos que exploram a dimensão média métrica quanto a terceira variável e a dimensão de Hausdorff média quanto as três variáveis.

Considerando a lacuna na área, neste trabalho, exploramos o comportamento da dimensão média métrica e da dimensão de Hausdorff média quanto a métrica do espaço. Para tal, consideramos classes de métricas que geram a mesma topologia e observamos com as dimensões se comportam quando variamos a métrica nesses classes. Entre outros resultados, mostramos que se a dimensão média métrica de $(\mathbb{M}, f, d)$ é positiva, então é possível considerar uma métrica d', compatível com a topologia do espaço $\mathbb{M}$, tal que a dimensão média métrica de $(\mathbb{M}, f, d')$ é tão grande quanto se queira.

Dividimos este trabalho em seis capítulos: no Capítulo 1, definimos os conceitos de entropia topológica, dimensão média, dimensão média métrica e da dimensão de Hausdorff média e pontuamos as principais propriedades que cada um goza. No Capítulo 2, investigamos a aplicação *shift* t-modificado buscando compreender como a dimensão média e a dimensão média métrica se comportam a medida que modificamos o *shift* por certas classes de aplicações.

No Capítulo 3, exploramos o conceito de ponto de entropia para sistemas dinâmicos definidos em espaços não compactos que possuem uma aproximação por compactos invariantes. Ainda, definimos o conceito de ponto de dimensão média métrica e mostramos que sistemas dinâmicos não-autonômos que são localmente homeomorfismo possuem tal ponto. No Capítulo 4, mostramos que sistemas dinâmicos definidos em um espaço de Banach e que gozam da propriedade de especificação geral tem dimensão média métrica positiva. Além do orientador e do autor dessa pesquisa, o pesquisador Fagner B. Rodrigues contribuiu com o desenvolvimento dos Capítulos 3 e 4.

O Capitulo 5 é dedicado a explorar o conceito dimensão de Hausdorff média quanto as suas propriedades, fazendo paralelos com as propriedades que a dimensão de Hausdorff e a dimensão média métrica gozam. No Capítulo 6 procuramos entender como variam a dimensão de Hausdorff média e a dimensão média métrica quanto a métrica tomada no espaço. Dividimos o Capítulo 6 em seções com o objetivo de subdividir o problema proposto em classes de métricas equivalentes. Ressaltamos que, além do orientador e do autor dessa pesquisa, os pesquisadores Jeovanny M. Acevedo e Alex J. Becker contribuiram com o desenvolvimento dos Capítulos 5 e 6.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos a teoria preliminar necessária para a compreensão dos próximos capítulos. Iniciamos, no contexto dos sistemas dinâmicos autônomos, abordando os conceitos de Entropia Topológica (Seção 1.1), Dimensão Média (Seção 1.2), Dimensão Média Métrica (Seção 1.3) e Dimensão de Hausdorff Média (Seção 1.4).

1.1 Entropia Topológica

A entropia topológica, como apresentamos aqui, foi introduzida por Bowen (1971) e é uma ferramenta útil para medir o quão caótico é um sistema dinâmico. De certa forma, a entropia quantifica, numa escala exponencial, o número de órbitas distinguíveis por erros arbitrariamente pequenos. Tal conceito é amplamente estudado pois trata-se de um invariante topológico, isto é, dinâmicas topologicamente conjugadas têm mesma entropia topológica.

Nesta seção, desenvolveremos a noção de entropia topológica considerando coberturas, conjuntos separados e conjuntos geradores para uma dinâmica contínua num espaço métrico compacto. Para tanto, consideramos $(\mathbb{M}, d)$ um espaço métrico compacto, onde d é uma métrica em $\mathbb{M}$, e $f\colon (\mathbb{M}, d) \to (\mathbb{M}, d)$ é uma aplicação contínua. As afirmações e resultados desta seção não serão demonstrados por serem amplamente encontrados na literatura como, por exemplo, em Bowen (1971), Brin e Stuck (2002) e Katok e Hasselblatt (1995).

A seguir, definimos no espaço métrico $(\mathbb{M}, d)$ uma sequência de métricas que são utilizadas para definirmos a entropia topológica e, como veremos nas próximas seções, outros conceitos que iremos abordar: dimensão média e dimensão média métrica.

Definição 1.1.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos a **n-métrica dinâmica** em $\mathbb{M}$ como a* *função* $d_{n,f}\colon \mathbb{M}\times\mathbb{M}\to[0,\infty)$ *definida por*

$$d_{n,f}(x,y)=\max_{0\leq j<n}\{d(f^j(x),f^j(y))\},\forall x,y\in\mathbb{M}.$$

Denotamos por (n,ε)*-bola, a bola de raio* $\varepsilon>0$ *com respeito a métrica* $d_{n,f}$.

Note que as n-métricas dinâmicas dependem da métrica d e da aplicação f. Ainda, as n-métricas dinâmicas nos dão uma nova noção de distância uma vez que $d_{n,f}(x,y)$ mede a distância entre os segmentos de órbita $I^n(x)=\{x,f(x),\dots,f^{n-1}(x)\}$ e $I^n(y)=\{y,f(y),\dots,f^{n-1}(y)\}$.

Observação 1.1.2. *Quando for clara qual a aplicação que estamos utilizando ou quando não for necessário exibi-lá, escrevemos* d_n *ao invés de* $d_{n,f}$.

Note que, para todo $n\in\mathbb{N}$, a aplicação d_n, dada na Definição 1.1.1, é uma métrica em $\mathbb{M}$ visto que d é métrica em $\mathbb{M}$. Ainda, para todo $n\in\mathbb{N}$, vale

$$d_n(x,y)\geq d_{n-1}(x,y),$$

para todo $x,y\in\mathbb{M}$, donde segue que $(d_n)_{n\geq1}$ uma sequência não-decrescente de métricas em $\mathbb{M}$. Em particular, para todo $n\in\mathbb{N}$ vale

$$d_n(x,y)\geq d(x,y),$$

para todo x e y em $\mathbb{M}$.

Observação 1.1.3. *É possível mostrar que as métricas* d_n*, para todo* $n\in\mathbb{N}$*, geram a mesma topologia de* d *em* $\mathbb{M}$.

As próximas definições objetivam quantificar a órbitas distinguíveis com respeito a d_n. Começamos contando a quantidade de coberturas arbitrariamente pequenas, com respeito a d_n, que cobrem $(\mathbb{M},d)$. Para tal, dados $\varepsilon>0$ e $n\in\mathbb{N}$, denotamos por $\mathrm{cov_d}(n,f,\varepsilon)$ o número mínimo de elementos com diâmetro menor que ε, com respeito a d_n, de uma cobertura de $\mathbb{M}$. Podemos notar que para quaisquer $m,n\in\mathbb{N}$, vale

$$\mathrm{cov_d}(m+n,f,\varepsilon)\leq\mathrm{cov_d}(n,f,\varepsilon)\cdot\mathrm{cov_d}(m,f,\varepsilon).$$

Sendo assim, a sequência $a_n=\log(\mathrm{cov_d}(n,f,\varepsilon))$ é subadditiva. Portanto, para fixo arbitrário $\varepsilon>0$, faz sentido definirmos, utilizando o Lema de Fekete,

$$\mathrm{cov_d}(f,\varepsilon)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\mathrm{cov_d}(n,f,\varepsilon)\right).$$

Definição 1.1.4. *Definimos a* ***entropia topológica*** *do sistemas dinâmico* $(\mathbb{M},f)$ *por*

$$\mathrm{h_d}(\mathbb{M},f)=\lim_{\varepsilon\to0}\mathrm{cov_d}(f,\varepsilon).$$

Existem outras duas formas equivalentes de definirmos entropia topológica de um sistema dinâmico. Para tal, introduziremos os conceitos de conjuntos (n, f, ε)-gerador e (n, f, ε)-separado. Informalmente, um conjunto é dito (n, f, ε)-gerador quando todo elemento do espaço $\mathbb{M}$ é aproximado, em termos da métrica d_n, por um elemento do conjunto. Já um conjunto é dito (n, f, ε)-separado quando quaisquer dois elementos distintos do conjunto tem distância, em termos da métrica d_n, maior que ε.

Definição 1.1.5. *Dados $K \subset \mathbb{M}$ e $\varepsilon > 0$ dizemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, que um subconjunto E de K é (n, f, ε)-**gerador para** K com respeito a f se, para cada $x \in K$, existe $y \in E$ tal que*

$$d_n(x, y) \leq \varepsilon.$$

Denotamos por $\mathrm{span_d}(n, f, \varepsilon, K)$ a mínima cardinalidade de um conjunto (n, f, ε)-gerador para K.

Observação 1.1.6. *Denotamos por $\mathrm{span_d}(n, f, \varepsilon)$ a mínima cardinalidade de um conjunto (n, f, ε)-separado para $\mathbb{M}$.*

Definição 1.1.7. *Dados $K \subset \mathbb{M}$ e $\varepsilon > 0$ dizemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, que um subconjunto E em K é (n, f, ε)-**separado para** K com respeito a f se, para cada par $(x, y) \in E$, vale*

$$d_n(x, y) > \varepsilon.$$

Denotamos por $\mathrm{sep_d}(n, f, \varepsilon, K)$ a máxima cardinalidade de um conjunto (n, f, ε)-separado para K.

Observação 1.1.8. *Denotamos por $\mathrm{sep_d}(n, f, \varepsilon)$ a máxima cardinalidade de um conjunto (n, f, ε)-separado para $\mathbb{M}$.*

Dado $\varepsilon > 0$, para cada K subconjunto compacto em $\mathbb{M}$, denotamos a taxa de crescimento exponencial das quantidades dadas na Definição (1.1.5) e Definição (1.1.7) por

$$\mathrm{span_d}(f, \varepsilon, K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\mathrm{span_d}(n, f, \varepsilon, K)\right)$$

e

$$\mathrm{sep_d}(f, \varepsilon, K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\mathrm{sep_d}(n, f, \varepsilon, K)\right).$$

O próximo lema relaciona a subconjuntos separados, geradores e a cobertura de $\mathbb{M}$ por bolas n-dinâmicas.

Lema 1.1.9. *Seja $(\mathbb{M}, d)$ um espaço métrico compacto. São válidas os seguintes itens:*

i) para $\varepsilon > 0$ e $n > 0$, temos que

$$\mathrm{cov_d}(n, f, 2\varepsilon) \leq \mathrm{span_d}(n, f, \varepsilon) \leq \mathrm{sep_d}(n, f, \varepsilon) \leq \mathrm{cov_d}(n, f, \varepsilon) < \infty.$$

ii) Seja $K \subset \mathbb{M}$ compacto. Se $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, então

$$\mathrm{span_d}(n, f, \varepsilon_2, K) \leq \mathrm{span_d}(n, f, \varepsilon_1, K) \quad e \quad \mathrm{sep_d}(n, f, \varepsilon_2, K) \leq \mathrm{sep_d}(n, f, \varepsilon_1, K).$$

Demonstração. Bowen (1971), Lema 1, página 402 e Brin e Stuck (2002), página 37. $\square$

Segue do Lema (1.1.9) que a definição de entropia topológica dada na Definição 1.1.4 é equivalente a definição de entropia topológica dada pela seguinte definição:

Definição 1.1.10. *Seja $K \subset \mathbb{M}$ um subconjunto compacto. Definimos a* ***entropia topológica de f em*** *K por*

$$\mathrm{h_d}(K, f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{span_d}(f, \varepsilon, K) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathrm{sep_d}(f, \varepsilon, K).$$

Por fim, definimos a ***entropia topológica de*** *f por*

$$\mathrm{h_d}(\mathbb{M}, f) = \sup\{\mathrm{h_d}(K, f) \colon K \subset \mathbb{M} \textit{ compacto } \}.$$

Observação 1.1.11. *Pelo Lema 1.1.9, podemos definir a entropia topológica de f em $K \subset \mathbb{M}$ como*

$$\mathrm{h_d}(K, f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log\left(\mathrm{span_d}(n, f, \varepsilon, K)\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log\left(\mathrm{sep}_d(n, f, \varepsilon, K)\right).$$

Observe que a entropia topológica, como definida anteriormente, tem uma dependência da métrica d. Por outro lado, Bowen (1971) mostra que se duas métricas d e d' são uniformemente equivalentes em $\mathbb{M}$, isto é, se as aplicações $\mathrm{id_d} \colon (\mathbb{M}, d) \to (\mathbb{M}, d')$ e $\mathrm{id_{d'}} \colon (\mathbb{M}, d') \to (\mathbb{M}, d)$ são uniformemente contínuas, então $\mathrm{h_d}(\mathbb{M}, f) = \mathrm{h_{d'}}(\mathbb{M}, f)$.

Ainda mais, é possível mostrar (ver Brin e Stuck (2002), Proposição 2.5.3) que a entropia topológica de uma aplicação contínua $f \colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ não depende da escolha particular da métrica que gera a topologia do espaço compacto $\mathbb{M}$. Portanto, a partir de agora, utilizaremos a notação $\mathrm{h_{top}}(\mathbb{M}, f)$ para nos referirmos a entropia do sistema dinâmico $(\mathbb{M}, f)$.

No que segue, mostramos alguns exemplos que elucidam a teoria que apresentamos até então e, por fim, elencamos algumas propriedades interessantes que a entropia topológica goza. Decidimos não demonstrar tais propriedades por se tratarem de resultados clássicos e que se encontram nas referências já citadas no início da seção.

Exemplo 1.1.12. *Considere $(\mathbb{M}, d)$ um espaço métrico compacto e $f \colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ uma isometria. Então $\mathrm{h_{top}}(\mathbb{M}, f) = 0$ (adaptado de Katok e Hasselblatt (1995) página 119).*

De fato, sendo f isometria, temos que para todo $x, y \in \mathbb{M}$ vale

$$d(x, y) = d(f^n(x), f^n(y)),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. *Assim, para fixado* $\varepsilon > 0$, *temos* $\operatorname{cov}_{\mathrm{d}}(n, f, \varepsilon) = \operatorname{cov}_{\mathrm{d}}(1, f, \varepsilon)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Portanto, segue que*

$$\begin{aligned} \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\mathbb{M}, f) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log\left(\operatorname{cov}_{\mathrm{d}}(n, f, \varepsilon)\right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log\left(\operatorname{cov}_{\mathrm{d}}(1, f, \varepsilon)\right) = 0. \end{aligned}$$

Exemplo 1.1.13. *Considere* $(\mathbb{M}, d)$ *um espaço métrico compacto e uma aplicação Lipschitz* $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$. *Então, a entropia topológica de* f *é finita (ver Katok e Hasselblatt (1995) página 123).*

Um exemplo clássico é a aplicação *shift*, denotado por σ, num espaço produto de k símbolos $\{0, \ldots, k-1\}^{\mathbb{N}}$ (ver Katok e Hasselblatt (1995) página 121). Sua entropia topológica é $\log(k)$, ou seja, a entropia topológica da aplicação σ é logarítmo do número de elementos do espaço base $\{0, \ldots, k-1\}$. Agora, o que acontece quando o número de símbolos é infinito?

Exemplo 1.1.14. *Considere o espaço métrico compacto* $([0,1]^{\mathbb{N}}, d)$, *onde* d *é definido por* $d(x,y) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x_i - y_i|$. *Mostraremos que a entropia topológica da aplicação* σ *em* $([0,1]^{\mathbb{N}}, d)$ *é infinita (adaptado de Acevedo e Rodrigues (2021) Lema 4.1).*

De fato, dado $0 < \varepsilon < 1$ *e fixado um arbitrário* $n \in \mathbb{N}$, *consideramos o conjunto*

$$A_{n,\varepsilon} = \left\{ x \in [0,1]^{\mathbb{N}} \colon x_m \in \left\{ 0, \varepsilon, 2\varepsilon, \ldots, \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor \varepsilon \right\}, 0 \leq m \leq n-1 \quad e \quad x_m = 0,\ c.c. \right\}.$$

Afirmação I: *Dois quaisquer pontos distintos de* $A_{n,\varepsilon}$ *têm distância maior que* ε *com respeito a* d_n.

De fato, sejam $x, y \in A_{n,\varepsilon}$ *distintos. Então existe algum* $t \in \{0, \ldots, n-1\}$ *tal que* $x_t \neq y_t$. *Assim, temos*

$$\begin{aligned} d_n(x,y) &= \max_{0 \leq j < n} \{ d(\sigma^j(x), \sigma^j(y)) \} \\ &= \max_{0 \leq j < n} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} |\sigma^j(x)_i - \sigma^j(y)_i| \right\} \\ &\geq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} |\sigma^t(x)_i - \sigma^t(y)_i| \\ &\geq |\sigma^t(x)_0 - \sigma^t(y)_0| \\ &= |x_t - y_t| \geq \varepsilon, \end{aligned} \tag{1.1}$$

o que mostra o afirmado.

Segue da Afirmação I que pontos distintos de $A_{n,\varepsilon}$ têm distância d_n maior ou igual que ε. Assim, qualquer coleção $\mathbb{U}$ de conjuntos que cobrem $[0,1]^{\mathbb{N}}$ cujos elementos têm diâmetro maior que ε com relação a métrica d_n, devem ter cardinalidade maior ou igual a cardinalidade de $A_{n,\varepsilon}$. Disso, temos que

$$\mathrm{cov_d}(n,\sigma,\varepsilon) \geq \left(1+\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\rfloor\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)^n.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathrm{h_{top}}([0,1]^{\mathbb{N}},\sigma) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\mathrm{cov_d}(n,\sigma,\varepsilon)\right)\\ &\geq \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)^n\\ &\geq \lim_{\varepsilon\to 0}\log\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)=\infty,\end{aligned}$$

findando o exemplo.

O Exemplo (1.1.14) mostra que uma dinâmica somente contínua pode ter entropia topológica infinita, algo que não acontece para dinâmicas Lipschitz, como indicado no Exemplo (1.1.13). Além disso, outras interessantes propriedades da entropia topológica são amplamente conhecidas e algumas delas são trazidas aqui nos próximos itens. A demonstração desses podem ser encontradas em Brin e Stuck (2002).

Propriedades da entropia topológica:

i) Sejam $(\mathbb{M}_1, f)$ e $(\mathbb{M}_2, g)$ sistemas dinâmicos onde $\mathbb{M}_1$ e $\mathbb{M}_2$ são espaços métricos compactos e f, g são contínuas. Se existe um homeomorfismo $\phi\colon \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ tal que $\phi\circ f = g\circ\phi$, então
$$\mathrm{h_{top}}(\mathbb{M}_1, f) = \mathrm{h_{top}}(\mathbb{M}_2, g).$$
Em palavras, isso significa dizer que sistemas dinâmicos que são topologicamente conjugados têm a mesma entropia topológica.

ii) $\mathrm{h_{top}}(\mathbb{M}, f^m) = m\ \mathrm{h_{top}}(\mathbb{M}, f)$, para todo $m\in\mathbb{N}$. Além disso, se f é homeomorfismo, então $\mathrm{h_{top}}(\mathbb{M}, f^m) = |m|\ \mathrm{h_{top}}(\mathbb{M}, f)$, para todo $m\in\mathbb{Z}$.

iii) Sejam $(\mathbb{M}, d)$ e $(\mathbb{N}, d')$ espaços métricos compactos e $f\colon \mathbb{M}\to\mathbb{M}$ e $g\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ aplicações contínuas. Se g é um fator [1] de f, então
$$\mathrm{h_{top}}(\mathbb{M}, f) \geq \mathrm{h_{top}}(\mathbb{N}, g).$$

[1]Sejam f e g aplicações que atuam nos respectivos espaços métricos $(\mathbb{M}, d)$ e $(\mathbb{Y}, d')$. Recordamos que quando existe uma aplicação sobrejetiva $\pi\colon\mathbb{M}\to\mathbb{Y}$ tal que $g^t\circ\pi = \pi\circ f^t$, para todo t, dizemos que g é um **fator** de f.

iv) $\mathrm{h_{top}}(\mathbb{M}, f) = \mathrm{h_{top}}(\Omega(f), f)$, onde $\Omega(f)$ é o conjunto não-errante[2] de f em $\mathbb{M}$.

v) Para $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ e $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ aplicações contínuas definidas nos espaços compactos $(\mathbb{M}, d)$ e $(\mathbb{N}, d')$, consideramos a aplicação $f \times g\colon \mathbb{M} \times \mathbb{N} \to \mathbb{M} \times \mathbb{N}$ definida por $(f \times g)(x, y) = (f(x), f(y))$, para todo $(x, y) \in \mathbb{M} \times \mathbb{N}$. Ainda, consideremos a métrica da soma em $\mathbb{M} \times \mathbb{N}$, a qual denotaremos por $d \times d'$. Temos que

$$\mathrm{h_{top}}(\mathbb{M} \times \mathbb{N}, f \times g, d \times d') = \mathrm{h_{top}}(\mathbb{M}, f, d) + \mathrm{h_{top}}(\mathbb{N}, g, d').$$

1.2 Dimensão Média

A dimensão média, introduzida por Gromov (1999) para sistemas dinâmicos, é um invariante topológico que pode dar informações sobre a dinâmica quando esta tem entropia topológica infinita. Tal conceito está fortemente relacionado com a dimensão topológica do espaço. As afirmações e resultados desta seção podem ser encontrados na referência Coornaert (2015).

Durante nesta seção, consideramos (X, τ) é um espaço topológico onde X é um conjunto e τ a topologia.

Definição 1.2.1. *Seja $\mathbb{I}$ um conjunto de índices e considere $\mathbb{U} = \{U_i \colon i \in \mathbb{I}\}$. Dizemos que $\mathbb{U}$ é uma **cobertura aberta** de X se cada U_i é aberto em X e*

$$X = \cup_{i \in \mathbb{I}} U_i.$$

Definição 1.2.2. *Uma cobertura aberta $\mathbb{V}$ de X é um **refinamento** da cobertura aberta $\mathbb{U}$ de X quando, para todo $V_j \in \mathbb{V}$, existe um aberto $U_i \in \mathbb{U}$ tal que $V_j \subset U_i$. Nesse caso, denotamos $\mathbb{V} \succ \mathbb{U}$.*

Recordamos que dada duas coberturas abertas $\mathbb{V} = \{V_j \colon j \in \mathbb{J}\}$ e $\mathbb{U} = \{U_i \colon i \in \mathbb{I}\}$ de X, podemos definir uma nova cobertura aberta em X por

$$\mathbb{V} \vee \mathbb{U} = \{U_i \cap V_j \colon i \in \mathbb{I} \text{ e } j \in \mathbb{J}\}.$$

Proposição 1.2.3. *Sejam $f\colon X \to X$ uma aplicação e $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ coberturas abertas de X. Então*

$$f^{-1}(\mathbb{U} \vee \mathbb{V}) = f^{-1}(\mathbb{U}) \vee f^{-1}(\mathbb{V}).$$

Demonstração. Ver Coornaert (2015), página 107-108. □

[2] Dizemos que $x \in \mathbb{M}$ é **não-errante** se para todo aberto $U \subset \mathbb{M}$ contendo x e todo $N > 0$, existir $n > N$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Denotamos por $\Omega(f)$ o conjuntos dos pontos não-errantes da dinâmica $(\mathbb{M}, f)$.

É possível mostrar que se $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ são coberturas abertas de X, então $\mathbb{U} \vee \mathbb{V}$ também é uma cobertura aberta de X e, ainda, $\mathbb{U} \vee \mathbb{V}$ refina tanto $\mathbb{U}$ quanto $\mathbb{V}$. Mais ainda, se $\mathbb{W}$ é uma cobertura aberta tal que $\mathbb{W} \succ \mathbb{U}$ e $\mathbb{W} \succ \mathbb{V}$, então $\mathbb{W} \succ \mathbb{U} \vee \mathbb{V}$.

Definição 1.2.4. *Definimos por **ordem** de uma cobertura aberta $\mathbb{U}$ de X, denotado por $\operatorname{ord}(\mathbb{U})$, o maior inteiro $k \geq 0$ (ou infinito, caso tal inteiro não exista) tal que existem distintos dois-a-dois conjuntos $U_{i_0}, \ldots, U_{i_k}$ tais que $U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k} \neq \emptyset$.*

Note que podemos escrever a ordem de uma cobertura aberta $\mathbb{U}$ em X como

$$\operatorname{ord}(\mathbb{U}) = \left(\sup_{x \in X} \sum_{U \in \mathbb{U}} 1_U(x) \right) - 1,$$

onde 1_U é a função indicador em $U \in \mathbb{U}$. Ainda, segue da definição de ordem que se $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ são coberturas abertas de X e $\mathbb{U} \succ \mathbb{V}$, então $\operatorname{ord}(\mathbb{U}) \leq \operatorname{ord}(\mathbb{V})$.

Definição 1.2.5. *Definimos o **grau** de uma cobertura aberta $\mathbb{U}$ de X, denotado por $\mathrm{D}(\mathbb{U})$, como a menor ordem entre todos os refinamentos de $\mathbb{U}$.*

Note que podemos escrever o grau de uma cobertura aberta $\mathbb{U}$ como

$$D(\mathbb{U}) = \min_{\mathbb{V} \succ \mathbb{U}} \operatorname{ord}(\mathbb{V}).$$

Proposição 1.2.6. *Sejam X um espaço normal e $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ coberturas abertas finitas de X. Então*

$$\mathrm{D}(\mathbb{U} \vee \mathbb{V}) \leq \mathrm{D}(\mathbb{U}) + \mathrm{D}(\mathbb{V}).$$

Demonstração. Ver Coornaert (2015), página 108. □

Observação 1.2.7. *A **dimensão topológica** de X, denotado por $\dim(X)$, é definido como o supremo entre todos os graus das coberturas abertas de X, isto é,*

$$\dim(X) = \sup \mathrm{D}(\mathbb{U}),$$

onde o supremo é tomado entre todas as coberturas abertas $\mathbb{U}$ de X.

Seja $\mathbb{U}$ uma cobertura aberta de X e $f : X \to X$ uma aplicação contínua, podemos criar uma nova cobertura aberta, denotada por $f^{-1}(\mathbb{U})$, para o espaço X tomando o conjunto das imagens inversas dos elemento de $\mathbb{U}$, isto é,

$$f^{-1}(\mathbb{U}) = \{f^{-1}(U_i) \colon i \in \mathbb{I}\}.$$

É possível mostrar que para toda cobertura aberta $\mathbb{U}$ de X, vale

$$D(f^{-1}(\mathbb{U})) \leq D(\mathbb{U}). \tag{1.2}$$

Conhecer essa forma de produzir coberturas para o espaço X através de uma função é essencial para o objeto que trata a próxima definição, a dimensão média. Este objeto é útil para o tratamento de sistemas dinâmicos que tem entropia topológica infinita, ou seja, a dimensão média é utilizada para distinguir sistemas dinâmicos que tem entropia infinita. Além disso, trata-se de um invariante topológico.

Definição 1.2.8. *Seja X um espaço normal e $f : X \to X$ uma aplicação contínua. Definimos a **dimensão média** do sistema dinâmico (X, f), denotado por $\mathrm{mdim}(X, f)$, por*

$$\mathrm{mdim}(X, f) = \sup \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{D}\left(\mathbb{U} \vee f^{-1}(\mathbb{U}) \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\mathbb{U})\right)}{n},$$

onde o supremo é tomado entre todas as coberturas abertas finitas $\mathbb{U}$ de X.

Note que o limite na Definição 1.2.8 existe pelo Lema de Fekete uma vez que $(D(\mathbb{U} \vee f^{-1}(\mathbb{U}) \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\mathbb{U})))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência subaditiva em n.

Exemplo 1.2.9. *Considere a aplicação identidade $I : X \to X$. Então mdim$(X, I) = 0$ (adaptado de Coornaert (2015), página 112).*

Seja $\mathbb{U}$ uma cobertura aberta do espaço X. Note que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{U} \vee I^{-1}\mathbb{U} \vee \cdots \vee I^{-n+1}\mathbb{U} = \mathbb{U} \vee \mathbb{U} \vee \cdots \vee \mathbb{U}.$$

Como $\mathbb{U} \vee I^{-1}\mathbb{U} \vee \cdots \vee I^{-n+1}\mathbb{U} \succ \mathbb{U}$ e $\mathbb{U} \succ \mathbb{U} \vee I^{-1}\mathbb{U} \vee \cdots \vee I^{-n+1}\mathbb{U}$, temos que

$$\mathrm{D}(\mathbb{U} \vee I^{-1}\mathbb{U} \vee \cdots \vee I^{-n+1}\mathbb{U}) = \mathrm{D}(\mathbb{U}).$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{D}(\mathbb{U} \vee I^{-1}\mathbb{U} \vee \cdots \vee I^{-n+1}\mathbb{U})}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{D}(\mathbb{U})}{n} = 0,$$

pois $\mathbb{U}$ é uma cobertura finita de X. Assim, a $\mathrm{mdim}(X, I) = 0$.

Seguindo com o objetivo de exibir resultados clássicos sobre dimensão média, trazemos uma lista de propriedades interessantes cujas demonstrações podem ser encontradas em Lindenstrauss e Weiss (2000), Coornaert (2015) e Rodrigues e Acevedo (2021).

Propriedades da dimensão média:

i) Suponha que os sistemas dinâmicos (X, f) e (Y, g) (ambos dinâmicas contínuas em espaços métricos compactos) sejam topologicamente conjugados. Então

$$\mathrm{mdim}(X, f) = \mathrm{mdim}(Y, g).$$

ii) $\mathrm{mdim}(X, f^n) = n\ \mathrm{mdim}(X, f)$, para todo inteiro $n \geq 0$. Mais geralmente, se f é um homeomorfismo em X, então $\mathrm{mdim}(X, f^n) = |n|\ \mathrm{mdim}(X, f)$, para todo inteiro n.

iii) Se $\dim(X) < \infty$, então $\mathrm{mdim}(X, f) = 0$.

iv) Se Y é um subconjunto fechado f-invariante de X, então

$$\mathrm{mdim}(Y, f) \leq \mathrm{mdim}(X, f).$$

Diferentemente da entropia topológica, a dimensão média de um fator pode ser maior que a dimensão média do sistema original (ver Lindenstrauss e Weiss (2000)).

v) Se f e g são aplicações contínuas no espaço métrico compacto (X, d), então

$$\mathrm{mdim}(X, f \circ g) = \mathrm{mdim}(X, g \circ f).$$

vi) Para $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ e $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ aplicações contínuas definidas nos espaços compactos $(\mathbb{M}, d)$ e $(\mathbb{N}, d')$, consideramos a aplicação $f \times g\colon \mathbb{M} \times \mathbb{N} \to \mathbb{M} \times \mathbb{N}$ definida por $(f \times g)(x, y) = (f(x), f(y))$, para todo $(x, y) \in \mathbb{M} \times \mathbb{N}$. Ainda, consideremos a métrica da soma em $\mathbb{M} \times \mathbb{N}$, a qual denotaremos por $d \times d'$. Temos que

$$\mathrm{mdim}(\mathbb{M} \times \mathbb{N}, f \times g, d \times d') \leq \mathrm{mdim}(\mathbb{M}, f, d) + \mathrm{mdim}(\mathbb{N}, g, d').$$

Ainda, Lindenstrauss e Weiss (2000) mostram que a inequação pode ser estrita.

1.3 Dimensão Média Métrica

Em 2000, Lindenstrauss e Weiss desenvolvem a teoria iniciada por Gromov sobre dimensão média e definem uma nova versão de dimensão, chamada de dimensão média métrica, que é uma versão dinâmica da dimensão de Minkowski. Entretanto, diferentemente da entropia topológica e da dimensão média, a dimensão média métrica não é uma invariante topológico uma vez que depende da métrica considerada no espaço.

Durante esta seção, consideramos $(\mathbb{M}, d)$ é um espaço métrico compacto e $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ é um aplicação contínua. Lembramos que, dados $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$,

$$\mathrm{cov}_{\mathrm{d}}(f, \varepsilon) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log(\mathrm{cov}_{\mathrm{d}}(n, f, \varepsilon)),$$

onde $\mathrm{cov}_{\mathrm{d}}(n, f, \varepsilon)$ é o número mínimo de elementos com diâmetro menor que ε, com respeito a métrica d_n, de uma cobertura de $(\mathbb{M}, d)$.

Definição 1.3.1. *Definimos a* ***dimensão média métrica inferior*** *e a* ***dimensão média métrica superior*** *de* $(\mathbb{M}, d)$ *com respeito a* f*, denotados respectivamente por* $\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d)$ *e* $\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d)$*, como*

$$\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d) = \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{cov}_{\mathrm{d}}(f,\varepsilon)}{|\log \varepsilon|} \quad e \quad \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{cov}_{\mathrm{d}}(f,\varepsilon)}{|\log \varepsilon|}.$$

Se o limite supremo e o limite inferior são iguais, denotamos o valor comum por $\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d)$*.*

Assim como na entropia topológica, podemos escrever, de forma equivalente, a dimensão média métrica inferior e a dimensão média métrica superior utilizando em termos de conjuntos geradores e conjuntos separados da seguinte forma:

$$\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d) = \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{span}_{\mathrm{d}}(f,\varepsilon)}{|\log \varepsilon|} = \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{sep}_{\mathrm{d}}(f,\varepsilon)}{|\log \varepsilon|}$$

e

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{span}_{\mathrm{d}}(f,\varepsilon)}{|\log \varepsilon|} = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{sep}_{\mathrm{d}}(f,\varepsilon)}{|\log \varepsilon|}.$$

Dessa forma, a definição de dimensão média métrica inferior (superior) se relaciona de perto com a entropia topológica. Ainda, Lindenstrauss e Weiss (2000) mostram que a dimensão média métrica inferior (superior) só pode ser não nula somente se a entropia topológica é infinita.

Por outro lado, observe que a dimensão média métrica inferior (superior) depende fortemente da métrica que estamos considerando no espaço e, portanto, não é um invariante topológico. A fim de obter um invariante, conforme apontado por Lindenstrauss e Weiss (2000), é preciso tomar o ínfimo entre todas as métricas que geram a topologia do espaço, isto é, tomar

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f) = \inf_{d\in\mathbb{M}(\tau)} \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d) \text{ e } \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f) = \inf_{d\in\mathbb{M}(\tau)} \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d)$$

onde $\mathbb{M}(\tau)$ é o conjunto das métricas que geram a topologia de $\mathbb{M}$.

Exemplo 1.3.2. *Considere a aplicação shift utilizada no Exemplo* (1.1.14)*. Neste mostramos que, dados quaisquer* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\varepsilon > 0$*, vale*

$$\mathrm{cov}_{\mathrm{d}}(n, \sigma, \varepsilon) \geq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^n.$$

Disso, segue que

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}([0,1]^{\mathbb{N}}, \sigma, d) &= \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{cov}_{\mathrm{d}}(f,\varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|} \\ &= \liminf_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{\log\left(\mathrm{cov}_{\mathrm{d}}(n,f,\varepsilon)\right)}{|\log(\varepsilon)|} \\ &\geq \liminf_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{\log\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)^n}{|\log(\varepsilon)|} \\ &= \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\log\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)}{|\log(\varepsilon)|} = 1.\end{aligned}$$

Portanto, $\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}([0,1]^{\mathbb{N}},\sigma,d) \geq 1$. *Por outro lado, dado* $\varepsilon > 0$ *e* $l = \lceil \log_2(\frac{2}{\varepsilon}) \rceil$, *temos que*

$$\begin{aligned}\sum_{n>l} \frac{1}{2^n} &= \left(\sum_{n=l+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\right)\\ &= \frac{1}{2^{l+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\right)\\ &= \frac{1}{2^l} \leq \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned} \tag{1.3}$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{l} \frac{1}{2^n} &= \left(\sum_{n=1}^{l} \frac{1}{2^n}\right)+1\\ &= \left(1-\frac{1}{2^l}\right)+1 \leq 2.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Considerando a cobertura aberta de $[0,1]$ *dada por*

$$I_k = \left(\frac{(k-1)\varepsilon}{12}, \frac{(k+1)\varepsilon}{12}\right), 0 \leq k \leq \lfloor \frac{12}{\varepsilon} \rfloor,$$

podemos ver que cada I_k *tem comprimento igual a* $\frac{\varepsilon}{6}$. *Agora, para* $n \geq 1$, *consideramos a cobertura aberta de* $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ *por*

$$\mathbb{U} = \cup_{0 \leq k_{-l},\ldots,k_{l+n}} \{x \colon x_{-l} \in I_{k_{-l}}, \ldots, x_{l+n} \in I_{k_{l+n}}\}. \tag{1.5}$$

Note que cada conjunto aberto de $\mathbb{U}$ *tem diâmetro menor que* ε *com respeito a distância* d_n. *De fato, para um qualquer* $U \in \mathbb{U}$ *temos, para todo* $x, y \in U$, *que*

$$\begin{aligned}d_n(x,y) &= \max_{0\leq j<n} \left\{d(\sigma^j(x),\sigma^j(y))\right\}\\ &= \max_{0\leq j<n}\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^k}|x_{j+k}-y_{j+k}|\right\}\\ &= \max_{0\leq j<n}\left\{\sum_{k>l} \frac{1}{2^k}|x_{j+k}-y_{j+k}| + \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{2^k}|x_{j+k}-y_{j+k}|\right\}.\end{aligned}$$

Segue disso e das desigualdades (1.3) *e* (1.4) *que*

$$\begin{aligned}d_n(x,y) &= \max_{0\leq j<n}\left\{\sum_{k>l} \frac{1}{2^k}|x_{j+k}-y_{j+k}| + \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{2^k}|x_{j+k}-y_{j+k}|\right\}\\ &\leq \max_{0\leq j<n}\left\{\sum_{k>l}\frac{1}{2^k}\frac{\varepsilon}{3} + \sum_{k=0}^{l}\frac{1}{2^k}\frac{\varepsilon}{3}\right\}\\ &\leq \max_{0\leq j<n}\left\{\frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3}\right\} < \varepsilon,\end{aligned} \tag{1.6}$$

Da desigualdade (1.6), *temos que*

$$\mathrm{cov}_{\mathrm{d}}(n,\sigma,\varepsilon) \leq \left(1+\lfloor\frac{12}{\varepsilon}\rfloor\right)^{n+2l+1} \leq \left(1+\frac{12}{\varepsilon}\right)^{n+2l+1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}([0,1]^{\mathbb{N}},\sigma,d) &= \limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\log\left(\mathrm{cov}_{\mathrm{d}}(\sigma,\varepsilon)\right)}{|\log(\varepsilon)|}\\
&= \limsup_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\log\left(\mathrm{cov}_{\mathrm{d}}(n,\sigma,\varepsilon)\right)}{|\log(\varepsilon)|}\\
&\leq \limsup_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\log(1+\frac{12}{\varepsilon})^{n+2l+1}}{|\log(\varepsilon)|}\\
&= \limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\log(1+\frac{12}{\varepsilon})}{|\log(\varepsilon)|}=1.
\end{aligned}$$

Assim, mostramos que a $\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}([0,1]^{\mathbb{N}},\sigma,d)=1$.

Em Lindenstrauss e Weiss (2000), temos a conexão entre a dimensão média e a dimensão média métrica inferior (superior). Os autores mostraram que, para qualquer dinâmica f no espaço métrico compacto $\mathbb{M}$ e qualquer métrica d que seja compatível com a topologia de $\mathbb{M}$, vale que

$$\mathrm{mdim}(\mathbb{M},f)\leq \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f,d)\leq \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f,d). \tag{1.7}$$

Lindenstrauss (1999) mostra que se $(\mathbb{M},g)$ é uma extensão de um sistema minimal, então existe uma métrica d' tal que

$$\mathrm{mdim}(\mathbb{M},g)=\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},g,d').$$

As propriedades listadas abaixo podem ser encontradas em Velozo e Velozo (2017), Rodrigues e Acevedo (2021) e Acevedo (2020).

Propriedades da dimensão média métrica:

i) $\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f^n,d)\;\leq\; n\,\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f,d)$ e $\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f^n,d)\;\leq\; n\,\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f,d)$ para todo inteiro $n\geq 0$. Ainda, a inequação pode ser estrita.

ii) $\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f,d)=\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\Omega(f),f,d)$ e $\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f,d)=\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\Omega(f),f,d)$, onde $\Omega(f)$ é o conjuntos dos pontos não-errantes de f em $\mathbb{M}$.

iii) $\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f,d)\leq\overline{\mathrm{dim}}_{\mathrm{B}}(\mathbb{M},d)$ e $\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f,d)\leq\underline{\mathrm{dim}}_{\mathrm{B}}(\mathbb{M},d)$, onde $\overline{\mathrm{dim}}_{\mathrm{B}}(\mathbb{M},d)$ e $\underline{\mathrm{dim}}_{\mathrm{B}}(\mathbb{M},d)$ são as dimensões de Minkowski superior e inferior [3] , respectivamente.

[3]Dado $\varepsilon>0$, defina por $N(\varepsilon)$ a cardinalidade mínima de bolas fechadas de raio ε necessárias para cobrir $\mathbb{M}$. Os números

$$\overline{\mathrm{dim}}_{\mathrm{B}}(\mathbb{M},d)=\limsup_{\varepsilon\to\infty}\frac{N(\varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|}\ \text{ e }\ \underline{\mathrm{dim}}_{\mathrm{B}}(\mathbb{M},d)=\liminf_{\varepsilon\to\infty}\frac{N(\varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|}$$

são chamados, respectivamente, de dimensões de Minkowski superior e inferior de $\mathbb{M}$ com respeito a d.

Em particular, $\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{K}},\sigma,\tilde{d}) = \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(\mathbb{M},d)$ e $\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{K}},\sigma,\tilde{d}) = \underline{\dim}_{\mathrm{B}}(\mathbb{M},d)$, onde σ é a aplicação *shift*, $\mathbb{K} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ e $\tilde{d}(x,y) = \sum_{i\in\mathbb{K}} \frac{1}{2^{|i|}} d(x_i,y_i)$ para $x = (x_i)_{i\in\mathbb{K}}, y = (y_i)_{i\in\mathbb{K}} \in \mathbb{M}^{\mathbb{K}}$;

iv) Se f, g as aplicações contínuas no espaço métrico compacto $(\mathbb{M},d)$ são topologicamente conjugadas, então

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f) = \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},g) \text{ e } \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f) = \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},g).$$

v) Para quaisquer homeomorfismo f, g em $(\mathbb{M},d)$, vale

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f\circ g) = \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},g\circ f) \text{ e } \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f\circ g) = \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},g\circ f).$$

vi) Para $f\colon \mathbb{M}\to\mathbb{M}$ e $g\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ aplicações contínuas definidas nos espaços compactos $(\mathbb{M},d)$ e $(\mathbb{N},d')$, consideramos a aplicação $f\times g\colon \mathbb{M}\times\mathbb{N}\to\mathbb{M}\times\mathbb{N}$ definida por $(f\times g)(x,y) = (f(x),g(y))$, para todo $(x,y)\in\mathbb{M}\times\mathbb{N}$. Ainda, consideremos a métrica da soma em $\mathbb{M}\times\mathbb{N}$, a qual denotaremos por $d\times d'$. Então valem os seguintes itens:

a) $\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}\times\mathbb{N},f\times g,d\times d') \leq \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f,d) + \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{N},g,d')$;

b) $\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f,d) + \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{N},g,d') \leq \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}\times\mathbb{N},f\times g,d\times d')$;

c) $\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f,d) + \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{N},g,d') \leq \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}\times\mathbb{N},f\times g,d\times d')$;

d) $\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}\times\mathbb{N},f\times g,d\times d') \leq \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f,d) + \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{N},g,d')$;

e) Se $\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f,d) = \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f,d)$ ou $\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{N},g,d') = \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{N},g,d')$ então

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}\times\mathbb{N},f\times g,d\times d') = \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f,d) + \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{N},g,d')$$

e

$$\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}\times\mathbb{N},f\times g,d\times d') = \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f,d) + \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{N},g,d').$$

1.4 Dimensão de Hausdorff Média

O conceito que apresentaremos nesta seção foi definido por Lindenstrauss e Tsukamoto (2019) sendo uma versão dinâmica da dimensão de Hausdorff. Esse novo conceito é utilizado pelos autores com o intuito de conectar conceitos de teoria geométrica da medida com a dimensão média.

Seja $(\mathbb{M}, d)$ um espaço métrico compacto. Para $s \geq 0$ e $\varepsilon > 0$, definimos

$$\mathrm{H}^s_\varepsilon(\mathbb{M}, d) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{diam}_{\mathrm{d}} E_k)^s \colon \mathbb{M} = \cup_{k=1}^{\infty} E_k \text{ com } \mathrm{diam}_{\mathrm{d}} E_k < \varepsilon \text{ para todo } k \geq 1 \right\}.$$

Convencionamos, aqui, que $0^0 = 1$ e $\mathrm{diam}_{\mathrm{d}}(\emptyset)^s = 0$. Note que, como $\mathbb{M}$ é compacto, $\mathrm{H}^s_\varepsilon(\mathbb{M}, d)$ é igual ao ínfimo de

$$\sum_{i=1}^{m} (\mathrm{diam}_d U_i)^s$$

tomado sobre todas as coberturas abertas finitas $\{U_i\}_{i=1}^m$ de $\mathbb{M}$ com $\mathrm{diam}_d U_i < \varepsilon$, para todo $1 \leq i \leq m$.

Seguimos definindo

$$\dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d, \varepsilon) = \sup \left\{ s \geq 0 \colon \mathrm{H}^s_\varepsilon(\mathbb{M}, d) \geq 1 \right\}.$$

Definição 1.4.1. *A* ***dimensão de Hausdorff*** *de* $(\mathbb{M}, d)$ *é definido como*

$$\dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d) = \lim_{\varepsilon \to 0} \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d, \varepsilon).$$

Considere, agora, $f \colon (\mathbb{M}, d) \to (\mathbb{M}, d)$ uma aplicação contínua. Lembramos que, para $n \in \mathbb{N}$, $d_n(x, y) = \max_{0 \leq j < n} \{d(f^j(x), f^j(y))\}$.

Definição 1.4.2. *Definimos a* ***dimensão de Hausdorff média superior*** *e a* ***dimensão de Hausdorff média inferior*** *de* $(\mathbb{M}, d)$ *com respeito a* f*, respectivamente, por*

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d_n, \varepsilon) \right)$$

e

$$\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d_n, \varepsilon) \right).$$

Lindenstrauss e Tsukamoto (2019) mostram que a seguinte relação entre a dimensão média, dimensão média métrica e dimensão de Hausdorff média:

Proposição 1.4.3. *Seja* $(\mathbb{M}, d)$ *um espaço métrico compacto e* $f \colon (\mathbb{M}, d) \to (\mathbb{M}, d)$ *uma aplicação contínua. Então*

$$\mathrm{mdim}(\mathbb{M}, d) \leq \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d) \leq \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d) \leq \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d) \leq \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d).$$

Exemplo 1.4.4. *Seja* $\sigma \colon [0,1]^{\mathbb{Z}} \to [0,1]^{\mathbb{Z}}$ *a aplicação shift. Então* $mdim_H([0,1]^{\mathbb{Z}}, \sigma) = 1$ *(adaptado de Lindenstrauss e Tsukamoto (2019)).*

Para mostrar o exemplo, iniciamos observando que Lindenstrauss e Weiss (2000) estabelecem que $\mathrm{mdim}([0,1]^{\mathbb{Z}}, \sigma) \geq 1$*. Ainda, vimos no Exemplo 1.3.2 que* $\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}([0,1]^{\mathbb{Z}}, \sigma, \tilde{d}) = 1$*, onde* $\tilde{d}(x, y) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^k} d(x_k, y_k)$*. Portanto, segue da Proposição 1.4.3 que* $\mathrm{mdim}_{\mathrm{H}}([0,1]^{\mathbb{Z}}, \sigma, \tilde{d}) = 1$.

Definido em 2019, a dimensão de Hausdorff média não foi explorada quanto a suas propriedades. No Capítulo 4, mostraremos algumas propriedades fundamentais deste novo conceito na mesma direção das propriedades da dimensão média e da dimensão média métrica.

Capítulo 2

O *SHIFT* t-MODIFICADO

Muir e Urbanski (2014) introduziram uma generalização do *shift* decorrente da aplicação de um mapa contínuo sobrejetivo na primeira coordenada da aplicação usual, a qual chamaram de "*shift* modificado". Esta nova aplicação já foi explorada no contexto de formalismo termodinâmico, por Muir e Urbanski (2014), e quanto a sua entropia topológica, por Figueiredo (2019).

Neste capítulo, apresentamos uma generalização do "*shift* modificado", chamada de *shift* t-modificado, na qual permitimos a aplicação de um mapa contínuo sobrejetivo em t finitas coordenadas do *shift* usual. Alguns resultados acerca da entropia topológica[1] e a dimensão média[2] (Seção 2.1), e a dimensão média métrica[3] (Seção 2.2) para essa nova aplicação são investigados. Consideramos, durante este capítulo, $(\mathbb{M}, d)$ um espaço métrico compacto. Definimos o espaço de sequências $\mathbb{M}^{\mathbb{N}}$ por

$$\mathbb{M}^{\mathbb{N}} = \{(x_0, x_1, x_2, \dots) \colon x_i \in \mathbb{M} \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}$$

e a métrica produto $\tilde{d}$ em $\mathbb{M}^{\mathbb{N}}$ por

$$\tilde{d}(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} d(x_i, y_i),$$

para todo $x, y \in \mathbb{M}^{\mathbb{N}}$. Note que o espaço métrico $(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \tilde{d})$ é compacto, visto que $(\mathbb{M}, d)$ é.

Observação 2.0.1. *Por simplicidade, suprimimos a métrica quando formos nos dirigir aos espaços métricos* $(\mathbb{M}, d)$ *e* $(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \tilde{d})$.

Dada $f \colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ contínua e sobrejetiva, construímos a aplicação $\sigma_f \colon \mathbb{M}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{M}^{\mathbb{N}}$, denominada ***shift* modificado**, da seguinte forma:

$$\sigma_f(x) = \sigma_f(x_0, x_1, x_2, \dots) = (f(x_1), x_2, x_3, \dots),$$

[1]Conceito definido nas páginas 14 e 16.
[2]Conceito definido na página 21.
[3]Conceito definido na página 23.

para todo $x \in \mathbb{M}^{\mathbb{N}}$. Com o objetivo de permitir a modificação de mais coordenadas pela aplicação contínua e sobrejetiva $f\colon (\mathbb{M}, d) \to (\mathbb{M}, d)$, definimos, para t inteiro positivo, a aplicação

$$\sigma_{f,t}\colon (\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \tilde{d}) \to (\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \tilde{d}),$$

onde $\sigma_{f,t}(x) = \sigma_{f,t}(x_0, x_1, x_2, \dots) = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_t), x_{t+1}, x_{t+2}, \dots)$, para todo $x \in \mathbb{M}^{\mathbb{N}}$, a qual denominamos por ***shift* t-modificado**.

É claro que quando $t = 1$, recaímos no *shift* modificado definido por Muir e Urbanski (2014). Ainda, observamos que o *shift* t-modificado, para qualquer t inteiro positivo, é uma generalização do *shift* usual uma vez que f pode ser escolhida como a aplicação identidade no espaço métrico $(\mathbb{M}, d)$.

Observamos que a condição da aplicação f ser sobrejetiva é de cunho dinâmico, isto é, quando f é sobrejetivo, o *shift* t-modificado tem as mesmas propriedades dinâmicas da aplicação *shift*. Sendo assim, utilizaremos f sobrejetiva na maior parte do capítulo sendo em apenas poucos resultados esta condição desconsiderada.

2.1 Entropia Topológica e Dimensão Média para o *Shift* t-Modificado

Iniciamos esta seção relacionando os conceitos de entropia topológica e de dimensão média para o *shift* t-modificado e aplicação f que o define. O primeiro resultado segue os moldes do realizado em Figueiredo (2019), onde foi mostrado que a entropia do *shift* modificado por uma aplicação sobrejetiva é maior ou igual a entropia da aplicação. Por conveniência, reconstruimos a demonstração do resultado citado e expandimos discutindo, também, a dimensão média.

No que segue, para t inteiro positivo, consideraremos o conjunto $\mathcal{E}_t \subset \mathbb{M}^{\mathbb{N}}$ definido por

$$\mathcal{E}_t = \{(x_n)_{n=0}^{\infty}\colon x_k = x, 0 \leq k \leq t \text{ e } x_k = f^{k-t}(x), t+1 \leq k, \text{ para todo } x \in \mathbb{M}\}.$$

Observe que tal conjunto é $\sigma_{f,t}$-invariante e fechado.

Teorema 2.1.1. *Sejam $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ contínua e sobrejetiva e t inteiro positivo. Considere $\sigma_{f,t}$ o shift t-modificado. Então,*

$$\mathrm{h_{top}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_{f,t}) \geq \mathrm{h_{top}}(\mathcal{E}_t, \sigma_{f,t}) = \mathrm{h_{top}}(\mathbb{M}, f)$$

e

$$\mathrm{mdim}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_{f,t}) \geq \mathrm{mdim}(\mathcal{E}_t, \sigma_{f,t}) = \mathrm{mdim}(\mathbb{M}, f).$$

Demonstração. Primeiramente, temos que o conjunto $\mathcal{E}_t$ é $\sigma_{f,t}$-invariante e fechado. Assim a aplicação $\sigma_{f,t}$ restrita ao conjunto $\mathcal{E}_t$ pode ser visto como um fator da aplicação $\sigma_{f,t}$ em $\mathbb{M}^{\mathbb{N}}$. Nesse sentido, temos que

$$\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_{f,t}) \geq \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\mathcal{E}_t, \sigma_{f,t}). \tag{2.1}$$

Ainda, observe que, sendo $\pi \colon \mathcal{E}_t \to \mathbb{M}$ a aplicação projeção na primeira coordenada de $\mathcal{E}_t$ em $\mathbb{M}$, temos que

$$f \circ \pi = \pi \circ \sigma_{f,t}|_{\mathcal{E}_t}$$

e, logo, π é uma semi-conjugação entre $\sigma_{f,t}|_{\mathcal{E}_t}$ e f. Logo, temos que

$$\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\mathcal{E}_t, \sigma_{f,t}) \geq \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\mathbb{M}, f). \tag{2.2}$$

Observando que a aplicação $\pi^{-1} \colon \mathbb{M} \to \mathcal{E}_t$ definida por

$$\pi^{-1}(x) = (y_k),$$

onde $y_k = x$, para $0 \leq k \leq t$ e $y_k = f^{k-t}(x), k \geq t+1$, é a inversa de π e satisfaz $\pi^{-1} \circ f = \sigma_{f,t}|_{\mathcal{E}_t} \circ \pi^{-1}$, temos que

$$\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\mathcal{E}_t, \sigma_{f,t}) \leq \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\mathbb{M}, f). \tag{2.3}$$

Segue das inequações (2.1), (2.2) e (2.3) que

$$\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_{f,t}) \geq \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\mathcal{E}_t, \sigma_{f,t}) = \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\mathbb{M}, f). \tag{2.4}$$

Utilizando os mesmos argumentos de conjugação e restrição da aplicação $\sigma_{f,t}$ ao conjunto fechado e $\sigma_{f,t}$-invariante $\mathcal{E}_t$, temos que

$$\mathrm{mdim}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_{f,t}) \geq \mathrm{mdim}(\mathcal{E}_t, \sigma_{f,t}) = \mathrm{mdim}(\mathbb{M}, f). \tag{2.5}$$

$\square$

A seguir, passamos a investigar a relação entre o *shift* e o *shift* t-modificado no âmbito da entropia topológica e da dimensão média. Figueiredo (2019) mostra, para f contínua e sobrejetiva, que a aplicação σ_f é um fator de σ e, portanto,

$$\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma) \geq \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_f).$$

Por outro lado, sabe-se que a dimensão média não tem o mesmo comportamento que a entropia quando o assunto é fator. Lindenstrauss e Weiss (2000) mostram um exemplo de um fator que tem dimensão média maior que a dimensão média do sistema original. Os resultados deste fim de seção mostram, entre outras coisa, que se f é contínua e bijetiva, então a dimensão média do *shift* t-modificado é uma cota superior para a dimensão média do *shift* usual.

Teorema 2.1.2. *Seja $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ uma aplicação contínua e bijetiva e t inteiro positivo. Considere $\sigma_{f,t}$ o shift t-modificado. Então,*

$$\mathrm{mdim}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_{f,t+1}) \geq \mathrm{mdim}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_{f,t}).$$

Demonstração. Iniciamos a demonstração definindo, para cada inteiro positivo $t < \infty$, a aplicação auxiliar $H_{f,t}\colon \mathbb{M}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{M}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$H_{f,t}\left((x_i)_{i=0}^{\infty}\right) = (y_i)_{i=0}^{\infty}$$

onde $y_k = f(x_k)$ para todo $0 \leq k \leq t-1$ e $y_k = x_k$ para $k \geq t$. Por hipótese, f é contínua e implica que $H_{f,t}$ também é contínua. Assim, como $\mathbb{M}^{\mathbb{N}}$ é compacto e $H_{f,t}$ é contínua, segue que o conjunto $Z = H_{f,t}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}})$ é compacto e, em particular, fechado. Ainda, pode-se notar que Z é $\sigma_{f,t}$-invariante. Portanto,

$$\mathrm{mdim}(Z, \sigma_{f,t}) \leq \mathrm{mdim}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_{f,t}). \tag{2.6}$$

Agora, note que sendo f injetiva, $H_{f,t}$ também é injetiva e, ainda, vale

$$H_{f,t+1} \circ \sigma_{f,t}(x) = \sigma_{f,t+1} \circ H_{f,t+1}(x), \text{ qualquer } x \in \mathbb{M}^{\mathbb{N}}.$$

De fato, para um qualquer $x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{M}^{\mathbb{N}}$, temos

$$\begin{aligned} H_{f,t+1} \circ \sigma_{f,t}\,(x_0, x_1, x_2, \dots) &= H_{f,t+1}\,(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_t), x_{t+1}, x_{t+2}, \dots) \\ &= \left(f^2(x_1), f^2(x_2), \dots, f^2(x_t), f(x_{t+1}), x_{t+2}, \dots\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_{f,t+1} \circ H_{f,t+1}\,(x_0, x_1, x_2, \dots) &= \sigma_{f,t+1}\,(f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_t), x_{t+1}, x_{t+2}, \dots) \\ &= \left(f^2(x_1), f^2(x_2), \dots, f^2(x_t), f(x_{t+1}), x_{t+2}, \dots\right). \end{aligned}$$

Sendo assim, $H_{f,t}$ é uma conjugação entre $\sigma_{f,t}$ e $\sigma_{f,t+1}|_Z$ e, portanto,

$$\mathrm{mdim}(Z, \sigma_{f,t+1}) = \mathrm{mdim}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_{f,t}). \tag{2.7}$$

O resultado segue da inequação (2.6) e da equação (2.7). □

O corolário a seguir decorre diretamente do trabalho de Figueiredo (2019) e do Teorema 2.1.2.

Corolário 2.1.3. *Seja $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ contínua e bijetiva. Considere σ_f o shift modificado definido por f. Então*

$$\mathrm{h_{top}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma) \geq \mathrm{h_{top}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_f) \geq \mathrm{mdim}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_f) \geq \mathrm{mdim}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma)$$

2.2 Dimensão Média Métrica para o *Shift* t-Modificado

Iniciamos a seção relacionando a dimensão média métrica do *shift* t-modificado com a dimensão média métrica da aplicação f que o define. Novamente, para t inteiro positivo, consideramos o conjunto auxiliar $\mathcal{E}_t \subset \mathbb{M}^{\mathbb{N}}$ dado por

$$\mathcal{E}_t = \{(x_n)_{n=0}^{\infty}; x_k = x, 0 \leq k \leq t \text{ e } x_k = f^{k-t}(x), t+1 \leq k, \text{ para todo } x \in \mathbb{M}\}.$$

Como observado anteriormente, tal conjunto é fechado e $\sigma_{f,t}$-invariante. Como veremos a seguir, $\mathcal{E}_t$ é útil para relacionarmos as dimensão média métrica do *shift* t-modificado com a aplicação f.

Teorema 2.2.1. *Sejam $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ uma aplicação contínua e sobrejetiva e t inteiro positivo. Considere $\sigma_{f,t}$ o shift t-modificado definido por f. Então,*

$$\overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_{f,t}, \tilde{d}) \geq \overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathcal{E}_t, \sigma_{f,t}, \tilde{d}) \geq \overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathbb{M}, f, d)$$

e

$$\underline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_{f,t}, \tilde{d}) \geq \underline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathcal{E}_t, \sigma_{f,t}, \tilde{d}) \geq \underline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathbb{M}, f, d).$$

Demonstração. Podemos notar que $\mathcal{E}_t$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{M}$ e, ainda, é $\sigma_{f,t}$-invariante. Segue que

$$\overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_f, \tilde{d}) \geq \overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathcal{E}_t, \sigma_f, \tilde{d}) \quad \text{e} \quad \underline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_f, \tilde{d}) \geq \underline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathcal{E}_t, \sigma_f, \tilde{d}).$$

Para as demais inequações, denote uma sequência $(x, \dots, x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots)$ em $\mathcal{E}_t$ por $\bar{x}_t$. Note que, para fixados $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, se $A \subset \mathcal{E}_t$ é um conjunto $(n, \sigma_{f,t}, \varepsilon)$-gerador em $\mathcal{E}_t$, então o conjunto formado pelos elementos que são a projeção na primeira coordenada de cada elemento de A é também um conjunto (n, f, ε)-gerador em $\mathbb{M}$.

De fato, se $A \subset \mathcal{E}_t$ é um conjunto $(n, \sigma_{f,t}, \varepsilon)$-gerador em $\mathcal{E}_t$, então para todo $\bar{x}_t \in \mathcal{E}_t$ existe $\bar{a}_t \in A$ tal que

$$\tilde{d}_n(\bar{x}_t, \bar{a}_t) < \varepsilon. \tag{2.8}$$

Da inequação (2.8), segue que

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_n(\bar{x}_t, \bar{a}_t) < \varepsilon &\Rightarrow \max_{0 \leq j < n} \left\{ \tilde{d}(\sigma_{f,t}^j(\bar{x}_t), \sigma_{f,t}^j(\bar{a}_t)) \right\} < \varepsilon \\
&\Rightarrow \max_{0 \leq j < n} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} d(\sigma_{f,t}^j(\bar{x}_t)_k, \sigma_{f,t}^j(\bar{a}_t)_k) \right\} < \varepsilon \\
&\Rightarrow \max_{0 \leq j < n} \left\{ d(\sigma_{f,t}^j(\bar{x}_t)_0, \sigma_{f,t}^j(\bar{a}_t)_0) \right\} < \varepsilon \\
&\Rightarrow \max_{0 \leq j < n} \left\{ d(f^j(x), f^j(a)) \right\} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Portanto, o conjunto formado pelos elementos que são projeção na primeira coordenada de cada elemento de A é um (n, f, ε)-gerador em $\mathbb{M}$ e, assim, temos

$$\operatorname{span}_{\tilde{d}}(n, \sigma_{f_t}|_{\mathcal{E}_t}, \varepsilon) \geq \operatorname{span}_{\mathrm{d}}(n, f, \varepsilon),$$

donde

$$\operatorname{span}_{\tilde{d}}(\sigma_{f,t}|_{\mathcal{E}_t}, \varepsilon) \geq \operatorname{span}_{\mathrm{d}}(f, \varepsilon). \tag{2.9}$$

Seguem da inequação (2.9) que

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathcal{E}_t, \sigma_{f,t}, \tilde{d}) &= \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\operatorname{span}_{\tilde{d}}(\sigma_{f,t}|_{\mathcal{E}_t}, \varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|} \\ &\geq \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\operatorname{span}_{d}(f, \varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|} = \overline{\operatorname{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\underline{\operatorname{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathcal{E}_t, \sigma_{f,t}, \tilde{d}) &= \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\operatorname{span}_{\tilde{d}}(\sigma_{f,t}|_{\mathcal{E}_t}, \varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|} \\ &\geq \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\operatorname{span}_{d}(f, \varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|} = \underline{\operatorname{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d).\end{aligned}$$

□

Quando f é uma aplicação Lipschitz, então a dimensão média métrica do *shift* t-modificado restrito ao conjunto $\mathcal{E}_t$ é igual a dimensão média métrica da aplicação f. Para este próximo resultado, relaxamos a hipótese sobre f ser sobrejetiva.

Teorema 2.2.2. *Sejam $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ uma aplicação contínua e t inteiro positivo. Considere $\sigma_{f,t}$ o shift t-modificado definido por f. Suponha que f é uma aplicação λ-Lipschitz, isto é, para $0 < \lambda < 1$ vale*

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda\, d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{M}.$$

Então

$$\underline{\operatorname{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathcal{E}_t, \sigma_{f,t}, \tilde{d}) = \underline{\operatorname{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d) \text{ e } \overline{\operatorname{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathcal{E}_t, \sigma_{f,t}, \tilde{d}) = \overline{\operatorname{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d).$$

Demonstração. Do Teorema 2.2.1, segue que

$$\underline{\operatorname{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathcal{E}_t, \sigma_{f,t}, \tilde{d}) \geq \underline{\operatorname{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d) \text{ e } \overline{\operatorname{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathcal{E}_t, \sigma_{f,t}, \tilde{d}) \geq \overline{\operatorname{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d).$$

Para findar o teorema, basta mostrarmos as desigualdades opostas. Note que a partir da hipótese, temos que

$$d(f^{m+1}(x), f^{m+1}(y)) \leq \lambda\, d(f^m(x), f^m(y)), \forall\, x, y \in \mathbb{M} \text{ e } m \in \mathbb{N}.$$

Para as demais inequações, denote uma sequência $(x, \ldots, x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots)$ em $\mathcal{E}_t$ por $\bar{x}_t$. Assim, para fixados $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, segue que para todo $\bar{x}_t, \bar{y}_t \in \mathcal{E}_t$

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_n(\bar{x}_t, \bar{y}_t) &= \max_{0 \leq j < n} \left\{ \tilde{d}(\sigma^j_{f,t}(\bar{x}_t), \sigma^j_{f,t}(\bar{y}_t)) \right\} \\
&= \max_{0 \leq j < n} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} d(\sigma^j_{f,t}(\bar{x}_t)_k, \sigma^j_{f,t}(\bar{y}_t)_k) \right\} \\
&\leq \max_{0 \leq j < n} \left\{ d(f^j(x), f^j(y)) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right\} \\
&= \max_{0 \leq j < n} \left\{ d(f^j(x), f^j(y)) \right\} = d_n(x, y).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Decorre da inequação (2.10) que se $A \subset \mathbb{M}$ é um (n, f, ε)-gerador em $\mathbb{M}$, então o conjunto $A^\infty \subset \mathcal{E}_t$, definido por

$$A^\infty = \{\bar{a}_t = (a, \ldots, a, f(a), f^2(a), f^3(a), \ldots); a \in A\},$$

é um $(n, \sigma_{f,t}, \varepsilon)$-gerador em $\mathcal{E}_t$.

Portanto,

$$\mathrm{span}_d(n, f, \varepsilon) \geq \mathrm{span}_{\tilde{d}}(n, \sigma_{f,t}|_{\mathcal{E}_t}, \varepsilon). \tag{2.11}$$

Seguem da inequação (2.11) que

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathcal{E}_t, \sigma_{f,t}, \tilde{d}) &= \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{span}_{\tilde{d}}(\sigma_{f,t}|_{\mathcal{E}_t}, \varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|} \\
&\leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{span}_d(f, \varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|} = \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathcal{E}_t, \sigma_{f,t}, \tilde{d}) &= \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{span}_{\tilde{d}}(\sigma_{f,t}|_{\mathcal{E}_t}, \varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|} \\
&\leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{span}_d(f, \varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|} = \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d).
\end{aligned}$$

□

Observação 2.2.3. *O Teorema 2.2.2 é válido, também, quando f é uma contração fraca.*

A partir desse ponto, investigamos a relação entre o dimensão média métrica do *shift* usual e a dimensão média métrica do *shift* modificado. Veremos nos próximos dois resultados que essa relação tem uma dependência da aplicação f que define o *shift* modificado. No primeiro resultado, temos que se f é contração fraca, então a dimensão média métrica do *shift* é maior que a do *shift* modificado. Novamente, relaxamos a hipótese de f ser sobrejetiva no resultado que segue.

Teorema 2.2.4. *Seja $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ uma aplicação contínua. Considere σ_f o shift modificado definido por f. Suponha que*

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{M}.$$

Então

$$\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_f, \tilde{d}) \leq \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma, \tilde{d}) \quad e \quad \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_f, \tilde{d}) \leq \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma, \tilde{d}).$$

Demonstração. Fixe $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$. Denotamos por d_1 a métrica $\tilde{d}_n$ com relação a aplicação *shift* usual e por d_2 a métrica $\tilde{d}_n$ com relação a aplicação *shift* modificado. Note que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{M}^{\mathbb{N}}$ vale

$$\begin{aligned}
d_1(x, y) &= \max_{0 \leq j < n} \left\{ \tilde{d}(\sigma^j(x), \sigma^j(y)) \right\} \\
&= \max_{0 \leq j < n} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} d(x_{k+j}, y_{k+j}) \right\} \\
&= \max_{0 \leq j < n} \left\{ d(x_j, y_j) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} d(x_{k+j}, y_{k+j}) \right\} \qquad (2.12) \\
&\geq \max \left\{ \tilde{d}(x, y), \max_{0 < j < n} \left\{ d(f(x_j), f(y_j)) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} d(x_{k+j}, y_{k+j}) \right\} \right\} \\
&= \max_{0 \leq j < n} \left\{ \tilde{d}(\sigma_f^j(x), \sigma_f^j(y)) \right\} = d_2(x, y),
\end{aligned}$$

onde utilizamos a hipótese na desigualdade. Decorre da desigualdade (2.12) que se A é um conjunto (n, σ, ε)-gerador em $\mathbb{M}^{\mathbb{N}}$, então A é também um conjunto $(n, \sigma_f, \varepsilon)$-gerador em $\mathbb{M}^{\mathbb{N}}$. Portanto,

$$\mathrm{span}_{\tilde{d}}(n, \sigma, \varepsilon) \geq \mathrm{span}_{\tilde{d}}(n, \sigma_f, \varepsilon). \qquad (2.13)$$

Seguem da inequação (2.13) que

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_f, \tilde{d}) &= \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{span}_{\tilde{d}}(\sigma_f, \varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|} \\
&\leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{span}_{\tilde{d}}(\sigma, \varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|} = \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma, \tilde{d})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_f, \tilde{d}) &= \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{span}_{\tilde{d}}(\sigma_f, \varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|} \\
&\leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{span}_{\tilde{d}}(\sigma, \varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|} = \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma, \tilde{d}).
\end{aligned}$$

□

No resultado seguinte, veremos que se a distância das imagens de x e y por f é maior ou igual a distância de x e y, então a dimensão média métrica do *shift* modificado é maior que a do *shift* usual.

Teorema 2.2.5. *Seja $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ uma aplicação contínua sobrejetiva. Considere σ_f o shift modificado definido por f. Suponha que*

$$d(f(x), f(y)) \geq d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{M}.$$

Então

$$\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_f, \tilde{d}) \geq \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma, \tilde{d}) \quad e \quad \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_f, \tilde{d}) \geq \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma, \tilde{d}).$$

Demonstração. Análogo a demonstração do Teorema 2.2.4.

□

Rodrigues e Acevedo (2021) mostram que para toda aplicação contínua $g\colon \mathbb{M}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{M}^{\mathbb{N}}$ que

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, g, \tilde{d}) \leq \overline{\dim}_B(\mathbb{M}, d) \quad \text{e} \quad \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, g, \tilde{d}) \leq \underline{\dim}_B(\mathbb{M}, d). \tag{2.14}$$

Em particular, mostram que para a aplicação *shift* em $\mathbb{M}^{\mathbb{N}}$ vale

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma, \tilde{d}) = \overline{\dim}_B(\mathbb{M}, d) \quad \text{e} \quad \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma, \tilde{d}) = \underline{\dim}_B(\mathbb{M}, d). \tag{2.15}$$

Segue, portanto, da inequação (2.14), da equação (2.15) e do Teorema 2.2.5, o seguinte corolário:

Corolário 2.2.6. *Se $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$, aplicação contínua e sobrejetiva, é tal que*

$$d(f(x), f(y)) \geq d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{M},$$

então

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_f, \tilde{d}) = \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma, \tilde{d}) \quad e \quad \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma_f, \tilde{d}) = \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma, \tilde{d}).$$

Capítulo 3

PONTO DE ENTROPIA E PONTO DE DIMENSÃO MÉDIA MÉTRICA

Em 2013, Andrzej Biś introduz a ideia de ponto de entropia para ações de pseudo-grupos finitamente gerados. Em 2016, Rodrigues e Varandas definem pontos de entropia para ações de grupos finitamente gerados. Nesse contexto, introduzimos a ideia de ponto de entropia para o caso em que a dinâmica é definida em um não compacto (Seção 3.1). Ainda, mostramos que quando a dinâmica é um homeomorfismo agindo em um espaço não compacto que goza de uma aproximação por compactos invariantes, é possível obter um ponto e uma vizinhança aberta arbitrariamente pequena deste que aproxima, de forma arbitrária, a entropia no espaço todo.

Sarkooh e Ghane (2019) generalizam o resultado obtido por Biś (2013) e obtiveram ponto de entropia para sistemas dinâmicos não-autônomos em um espaço métrico compacto. Nesse sentido, definimos ponto de dimensão média métrica para sistemas não-autônomos (Seção 3.2) e mostramos que quando esses sistemas são localmente homeomorfos em um espaço métrico compacto, então é possível obter um ponto de dimensão média métrica.

3.1 Ponto de Entropia em Espaços Métricos

Começamos esta seção, seguindo o trabalho de Biś (2013), trazendo a definição de ponto de entropia para uma dinâmica agindo em um espaço métrico $(\mathbb{M}, d)$ compacto.

Definição 3.1.1. *Seja* $(\mathbb{M}, d)$ *um espaço métrico compacto e* $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ *uma aplicação contínua. Dizemos que um ponto* $x \in \mathbb{M}$ *é* ***ponto de entropia topológica*** *se para* *qualquer vizinhança aberta U_x de x, a igualdade*

$$\mathrm{h_{top}}(\mathbb{M}, f) = \mathrm{h_{top}}(\overline{U_x}, f)$$

é válida.

Biś (2013) mostra que se $(\mathbb{M}, d)$ é um espaço métrico compacto e $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ é um homeomorfismo, então existe um ponto de entropia topológica. A partir de agora, começamos a considerar o caso em que o espaço métrico $(\mathbb{M}, d)$ é não compacto. Relembre que nesse caso a entropia topológica é definida como o supremo das entropias topológicas em cada compacto do espaço, isto é,

$$\mathrm{h_{top}}(\mathbb{M}, f) = \sup\{\mathrm{h_{top}}(K, f)^1 \colon K \text{ é um compacto em } \mathbb{M}\}.$$

O teorema a seguir mostra que no caso em que f é um homeomorfismo definido em um espaço métrico que não é compacto mas goza de uma sequência de compactos invariantes encaixados cuja união é densa no espaço, podemos exibir um ponto e uma vizinhança aberta arbitrariamente pequeno deste que aproxima, de forma arbitrária, a entropia no espaço todo.

Teorema 3.1.2. *Seja $(\mathbb{M}, d)$ um espaço métrico não-compacto. Suponha que existe uma sequência crescente $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que cada K_n é um compacto em $\mathbb{M}$ e $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} K_n} = \mathbb{M}$. Então, para qualquer $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ homeomorfismo, dado $\delta > 0$, existe um ponto $x = x(\delta)$ tal que*

$$\mathrm{h_{top}}(\mathbb{M}, f) - \delta \leq \mathrm{h_{top}}(\overline{V_x}, f),$$

onde $V_x \subset \mathbb{M}$ é uma vizinhança arbitrariamente pequena de x.

Demonstração. Como $\cup_{n=1}^{\infty} K_n$ é denso em $\mathbb{M}$, dado qualquer $\delta > 0$, existe uma constante $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |\mathrm{h_{top}}(K_n, f) - \mathrm{h_{top}}(\mathbb{M}, f)| \leq \delta. \tag{3.1}$$

Do trabalho de Biś, temos que para qualquer compacto $K \in (K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe um ponto $x_K \in K$ e uma vizinhança $V_{x_K} \subset K$ de x_K tal que

$$\mathrm{h_{top}}(\overline{V_{x_K}}, f) = \mathrm{h_{top}}(K, f). \tag{3.2}$$

Considere uma subsequência $(K_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ da sequência crescente $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\mathrm{h_{top}}(\mathbb{M}, f) = \lim_{j\to\infty} \mathrm{h_{top}}(K_{n_j}, f). \tag{3.3}$$

[1] Conceito definido nas páginas 14 e 16.

Segue da inequação (3.1) e da equação (3.2) que, para $n_{j_0} > n_0$, existe um ponto $x = x(\delta)$ e uma vizinhança $V_{x_{K_{n_j}}} \in K$ de $x_{K_{n_j}}$ tais que

$$|\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\overline{V_{x_{K_{n_j}}}}, f) - \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\mathbb{M}, f)| \leq \delta. \tag{3.4}$$

Como $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\mathbb{M}, f) \geq \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\overline{V_{x_{K_{n_j}}}}, f)$, segue da inequação (3.4) que

$$\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\mathbb{M}, f) - \delta \leq \mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\overline{V_{x_{K_{n_j}}}}, f).$$

□

Exemplo 3.1.3. *Para uma sequência estritamente positiva $v = (v_k)_{k \in \mathbb{N}}$, considere os seguintes espaços de Banach*

$$l^p(v) = \left\{ (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \colon ||x|| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p v_k \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Como mostra Bartoll et al (2012), o shift definido no espaço $l^p(v)$ é uma aplicação linear e limitada sempre que a sequência v satisfaz

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{v_k}{v_{k+1}} < \infty.$$

Note que, para $m \in \mathbb{N}$, os conjuntos $K_m = mK$, onde $K = \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \colon ||x|| \leq 1\}$, são conjuntos compactos e σ-invariante e, ainda, $\overline{\cup_{m=1}^{\infty} K_m} = l^p(v)$.

3.2 Ponto de Dimensão Média Métrica para Sistemas Dinâmicos Não-Autônomos

Desde a definição de entropia topológia para sistemas não-autônomos por Kolyda e Snoda (1996) até os dias atuais, em pesquisas como as realizadas por Rodrigues e Acevedo (2021), busca-se estender resultados válidos para dinâmicas autônomas para o contexto não-autônomo. Tendo em vista esse horizonte, dedicamos o início desta seção para apresentar dinâmicas que dependem do tempo e definir dimensão média métrica nesse contexto.

Um **sistema dinâmico não-autonomo** (SDN) é um par $(X_{1,\infty}, f_{i,\infty})$ onde $X_{1,\infty} = (X_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de conjuntos e $f_{1,\infty} = (f_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de aplicações tais que $f_n \colon X_n \to X_{n+1}$. Denotamos por $(X_{j,\infty}, f_{j,\infty})$ o conjunto j vezes transladado de $(X_{1,\infty}, f_{i,\infty})$, onde $X_{j,\infty} = (X_{j+k})_{k=0}^{\infty}$ e $f_{j,\infty} = (f_{j+k})_{k=0}^{\infty}$.

A evolução do tempo num sistema dinâmico não-autônomo é dado pela composição dos aplicações f_n, isto é,

$$f_k^n = f_{k+n-1} \circ \cdots \circ f_k, \forall k, n \in \mathbb{N}$$

e

$$f_k^0 = Id_{\mathbb{M}}.$$

Neste trabalho, restringímo-nos ao caso em que todos conjuntos X_n são espaços métricos compactos iguais, isto é, para $(\mathbb{M}, d)$ espaço métrico, consideramos $X_n = \mathbb{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, utilizamos a notação $(\mathbb{M}, f_{1,\infty})$ para nos referenciar a este caso.

Em $(\mathbb{M}, f_{1,\infty})$, definimos a família de métricas

$$d_{k,n}(x, y) = \max_{0\leq j<n}\{d(f_k^j(x), f_k^j(y))\},$$

par todo $x, y \in \mathbb{M}$. Ainda, definimos a bolas de centro $x \in \mathbb{M}$ e raio $\varepsilon > 0$, com respeito a métrica $d_{n,k}$, como o conjunto

$$B(x, f_{1,\infty}, \varepsilon) = B(x, k, n, \epsilon) = \{y \in \mathbb{M}; d_{k,n}(x, y) < \varepsilon\}.$$

Observação 3.2.1. *No decorrer do texto, utilizamos majoritariamente a métrica $d_{1,n}$.*

A seguir, de maneira análoga ao que fizemos para dinâmicas autônomas, definimos o conjunto separado e o conjunto gerador de um subconjunto $K \subset \mathbb{M}$, referente a métrica $d_{1,k}$.

Definição 3.2.2. *Fixe $\varepsilon > 0$. Dizemos que um subconjunto $A \subset \mathbb{M}$ é dito $(n, f_{1,\infty}, \varepsilon)$-**separado** para $K \subset \mathbb{M}$ se para quaisquer pontos distintos $x, y \in A$ vale*

$$d_{1,n}(x, y) > \varepsilon.$$

Denotamos por $\mathrm{sep_d}(n, f_{1,\infty}, \varepsilon, K)$ a máxima cardinalidade de $(n, f_{1,\infty}, \varepsilon)$-separados de K.

Definição 3.2.3. *Fixe $\varepsilon > 0$. Dizemos que um subconjunto $F \subset \mathbb{M}$ é dito $(n, f_{1,\infty}, \varepsilon)$-**gerador** para $K \subset \mathbb{M}$ se para quaisquer ponto $x \in K$, existir $y \in F$ tal que*

$$d_{1,n}(x, y) \leq \varepsilon.$$

Denotamos por $\mathrm{span_d}(n, f_{1,\infty}, \varepsilon, K)$ a máxima cardinalidade de $(n, f_{1,\infty}, \varepsilon)$-gerador de K.

Observação 3.2.4. *Denotamos por $\mathrm{span_d}(n, f_{1,\infty}, \varepsilon)$ e por $\mathrm{sep_d}(n, f_{1,\infty}, \varepsilon)$, respectivamente, o $\mathrm{span_d}(n, f_{1,\infty}, \varepsilon, K)$ e o $\mathrm{sep_d}(n, f_{1,\infty}, \varepsilon, K)$ no caso em que $K = \mathbb{M}$.*

Assim como para dinâmicas autônomas, Rodrigues e Acevedo (2021) definem a dimensão média métrica inferior e a dimensão média métrica superior do sistema $(\mathbb{M}, f_{1,\infty})$, respectivamente, como

$$\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f_{1,\infty}, d) = \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{sep}_d(f_{1,\infty}, \varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|} = \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{span}_d(f_{1,\infty}, \varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|} = \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{cov}_d(f_{1,\infty}, \varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|}$$

e

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f_{1,\infty}, d) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{sep}_d(f_{1,\infty}, \varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|} = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{span}_d(f_{1,\infty}, \varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|} = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{cov}_d(f_{1,\infty}, \varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|},$$

onde

- $\text{sep}_d(f_{1,\infty}, \varepsilon) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\text{sep}_d(n, f_{1,\infty}, \varepsilon))$;

- $\text{span}_d(f_{1,\infty}, \varepsilon) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\text{span}_d(n, f_{1,\infty}, \varepsilon))$;

- $\text{cov}_d(f_{1,\infty}, \varepsilon) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\text{cov}_d(n, f_{1,\infty}, \varepsilon))$, sendo $\text{cov}_d(n, f_{1,\infty}, \varepsilon)$ o número mínimo de ε-bolas com respeito a métrica $d_{1,n}$ que cobrem $\mathbb{M}$.

Resultados sobre a dimensão média métrica no âmbito dos sistemas dinâmicos não-autônomos são provados no trabalho de Rodrigues e Acevedo (2021) e, alguns deles, apresentados aqui na forma de itens.

Propriedades da dimensão média métrica para SDN:

Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de aplicações contínuas no espaço métrico $(\mathbb{M}, d)$. Então vale:

i) $\overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathbb{M}, f_{1,\infty}, d) = \overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\Omega(f_{1,\infty}), f_{1,\infty}, d)$ e
$\underline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathbb{M}, f_{1,\infty}, d) = \underline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\Omega(f_{1,\infty}), f_{1,\infty}, d)$ onde $\Omega(f_{1,\infty})$ é o conjunto dos pontos não-errantes;

ii) $\text{mdim}(\mathbb{M}, f_{1,\infty}) \leq \underline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathbb{M}, f_{1,\infty}, d) \leq \overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathbb{M}, f_{1,\infty}, d)$;

iii) $\overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathbb{M}, \sigma^k(f_{1,\infty}), d) \leq \overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathbb{M}, f_{1,\infty}, d)$ e
$\underline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathbb{M}, \sigma^k(f_{1,\infty}), d) \leq \underline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathbb{M}, f_{1,\infty}, d)$ para todo k inteiro positivo;

iv) $\overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathbb{M}, f_{1,\infty}^p, d) \leq p\ \overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathbb{M}, f_{1,\infty}, d)$ e
$\underline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathbb{M}, f_{1,\infty}^p, d) \leq p\ \underline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathbb{M}, f_{1,\infty}, d)$ para todo p inteiro positivo.

Voltamo-nos, agora, na direção do trabalho de Sarkooh e Ghane (2019) e propomos a definição de ponto de dimensão média métrica para sistemas dinâmicos não-autônomos.

Definição 3.2.5. *Seja o SDN formado pelo espaço compacto* $(\mathbb{M}, d)$ *e a sequência de aplicações* $f_{1,\infty} = (f_n)_{n=1}^{\infty}$. *Dizemos que um ponto* $x \in \mathbb{M}$ *é* ***ponto de dimensão média métrica superior (inferior)*** *se para qualquer vizinhança aberta* U_x *de* x, *a igualdade*

$$\underline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathbb{M}, f_{1,\infty}) = \underline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\overline{U_x}, f_{1,\infty}) \ \textit{(resp. } \overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\mathbb{M}, f_{1,\infty}) = \overline{\text{mdim}}_{\text{M}}(\overline{U_x}, f_{1,\infty}))$$

vale.

A seguir, mostramos que quando o SDN é composto por uma sequência de aplicações localmente homeomorfas em um espaço métrico compacto, então obtemos um ponto (sua vizinhança, para ser mais preciso) que carrega a informação da dinâmica quanto a sua dimensão média métrica. Vale ressaltar que a demonstração é uma adaptação do trabalho de Biś (2013), já adaptado para o contexto de SDN por Sarkooh e Ghane (2019).

Teorema 3.2.6. *Seja* $(\mathbb{M}, f_{1,\infty})$ *um SDN onde* $f_{1,\infty}$ *é uma sequência de aplicações localmente homeomorfas e* $(\mathbb{M}, d)$ *é um espaço métrico compacto. Então existe um ponto* $x_0 \in \mathbb{M}$ *e uma vizinhança aberta arbitrariamente pequena* U_{x_0} *de* x_0 *tal que*

$$\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f_{1,\infty}, d) = \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\overline{U_{x_0}}, f_{1,\infty}, d)$$

e

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f_{1,\infty}, d) = \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\overline{U_{x_0}}, f_{1,\infty}, d).$$

Em particular, $(\mathbb{M}, f_{1,\infty})$ *admite um ponto de dimensão média métrica superior (inferior).*

Demonstração. Iniciamos a demonstração notando que o resultado é imediato se $\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f_{1,\infty}, d) = 0$. Assuma, então, que $\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f_{1,\infty}, d) > 0$. Para $\delta > 0$ fixado arbitrariamente, denotemos por $B_\delta(x)$ a bola fechada de centro x e raio δ. Como $\mathbb{M}$ é compacto, existem finitos pontos $x_1, \cdots, x_m \in \mathbb{M}$ tais que

$$\mathbb{M} \subset B_\delta(x_1) \cup \cdots \cup B_\delta(x_m).$$

Fixe $\varepsilon > 0$. Por definição, temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{sep_d}(n, f_{1,\infty}, \varepsilon, \mathbb{M}) \leq{} & \mathrm{sep_d}(n, f_{1,\infty}, \varepsilon, B_\delta(x_1)) + \\ & + \mathrm{sep_d}(n, f_{1,\infty}, \varepsilon, B_\delta(x_2)) + \cdots + \mathrm{sep_d}(n, f_{1,\infty}, \varepsilon, B_\delta(x_m)), \end{aligned} \tag{3.5}$$

para qualquer $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Observe que para qualquer inteiro positivo n existe $i(n, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathrm{sep_d}(n, f_{1,\infty}, \varepsilon, B_\delta(x_{i(n,\varepsilon)})) = \max\{\mathrm{sep}_d(n, f_{1,\infty}, \varepsilon, B_\delta(x_j)); j = 1, 2, \ldots, m\}. \tag{3.6}$$

Portanto, segue da inequação (3.5) e da equação (3.6) que

$$\mathrm{sep_d}(n, f_{1,\infty}, \varepsilon, \mathbb{M}) \leq m \; \mathrm{sep_d}(n, f_{1,\infty}, \varepsilon, B_\delta(x_{i(n,\varepsilon)})). \tag{3.7}$$

Agora, escolha uma sequência crescente de inteiros $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tais que a sequência $(\frac{1}{n_j}\log(\mathrm{sep}_d(n_j, f_{1,\infty}, \varepsilon, \mathbb{M})))_{j\in\mathbb{N}}$ tende para $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(\mathrm{sep_d}(n, f_{1,\infty}, \varepsilon, \mathbb{M}))$, quando j tende ao infinito. Pelo princípio da casa dos pombos, pelo menos um elemento do conjunto $\{B_\delta(x_1), \ldots, B_\delta(x_m)\}$ aparece infinitas vezes na sequência infinita $\{B_\delta(x_{i(n_j,\varepsilon)})_{j\in\mathbb{N}}\}$. Seja $B_\delta(x_{i*})$ este elemento. Note que a bola $B_\delta(x_{i*})$ depende de ε e, portanto, denotamos $B_\delta(x_{i*}) = B_\delta(x_{i*}(\varepsilon))$. Novamente, escolha uma subsequência da sequência $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$, denota por $(n_j)_{j\in\mathbb{N}'}$, tal que

$$B_\delta(x_{i(n_j,\varepsilon)}) = B_\delta(x_{i*}(\varepsilon)), \text{ para todo } j \in \mathbb{N}'.$$

Para tal subsequência de índices $(n_j)_{j\in\mathbb{N}'}$ e utilizando a desigualdade (3.7), segue que

$$\begin{aligned}
\limsup_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\log \operatorname{sep}_{\mathrm{d}}(n_j,f_{1,\infty},\varepsilon,\mathbb{M}) &\leq \limsup_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\log m+\\
&+\limsup_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\log \operatorname{sep}_{\mathrm{d}}(n_j,f_{1,\infty},\varepsilon,B_\delta(x_{i(n_j,\varepsilon)}))\\
&=0+\limsup_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\log \operatorname{sep}_{\mathrm{d}}(n_j,f_{1,\infty},\varepsilon,B_\delta(x_{i(n_j,\varepsilon)}))\\
&=\limsup_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\log \operatorname{sep}_{\mathrm{d}}(n_j,f_{1,\infty},\varepsilon,B_\delta(x_{i*}(\varepsilon))).
\end{aligned}$$

Agora, tome uma sequência $(\varepsilon_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de números reais positivos convergindo a zero. Como anteriormente, pelo menos uma bola do conjunto $\{B_\delta(x_1),\ldots,B_\delta(x_m)\}$, digamos $B_\delta(x_\star)$, aparece infinitas vezes na sequência infinita $\{B_\delta(x_{i*}(\varepsilon_p))_{p\in\mathbb{N}}$. Tomando uma subsequência $(\varepsilon_{p_l})_{l\in\mathbb{N}}$ tal que

$$B_\delta(x_{i*}(\varepsilon_{p_l}))=B_\delta(x_\star),$$

para todo $l\in\mathbb{N}$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\underline{\operatorname{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f_{1,\infty},d) &= \liminf_{l\to\infty}\lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\frac{\log \operatorname{sep}_{\mathrm{d}}(n_j,f_{1,\infty},\varepsilon_{p_l},\mathbb{M})}{|\log(\varepsilon_{p_l})|}\\
&\leq \liminf_{l\to\infty}\lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\frac{\log \operatorname{sep}_{\mathrm{d}}(n_j,f_{1,\infty},\varepsilon_{p_l},B_\delta(x_\star))}{|\log(\varepsilon_{p_l})|}\\
&=\underline{\operatorname{mdim}}_{\mathrm{M}}(B_\delta(x_\star),f_{1,\infty},d).
\end{aligned}$$

Fazendo algumas poucas alterações, é possível mostrar que

$$\begin{aligned}
\overline{\operatorname{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M},f_{1,\infty},d) &= \limsup_{l\to\infty}\lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\frac{\log \operatorname{sep}_{d}(n_j,f_{1,\infty},\varepsilon_{p_l},K)}{|\log(\varepsilon_{p_l})|}\\
&\leq \limsup_{l\to\infty}\lim_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\frac{\log \operatorname{sep}_{d}(n_j,f_{1,\infty},\varepsilon_{p_l},B_\delta(x_\star))}{|\log(\varepsilon_{p_l})|}\\
&=\overline{\operatorname{mdim}}_{\mathrm{M}}(B_\delta(x_\star),f_{1,\infty},d).
\end{aligned}$$

Para finalizar a demonstração, basta notar que as desigualdades inversas são diretas. $\square$

Capítulo 4

PROPRIEDADE DE ESPECIFICAÇÃO GERAL E A DIMENSÃO MÉDIA MÉTRICA

Neste capítulo, estamos interessados em explorar relações entre a dimensão média métrica e as propriedades dinâmicas do sistema. Mais especificamente, relacionamos a propriedade de especificação para aplicações contínuas em espaço de Banach de dimensão infinita e a dimensão média métrica dessas aplicações.

Sigmund (1974) mostrou que o fato de um sistema dinâmico ter a propriedade de especificação implica que esse tem entropia topológica positiva. Mostraremos que uma aplicação contínua em um espaço de Banach de dimensão infinita que goza da propriedade de especificação geral tem dimensão média métrica inferior positiva. Iniciamos, assim como é definido para entropia topológica, definindo a dimensão média métrica de uma aplicação contínua em um espaço de Banach qualquer.

Definição 4.0.1. *Se $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach e $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ é uma aplicação contínua, então definimos as **dimensões média métrica superior e inferior de** f **no espaço** $\mathbb{X}$, respectivamente, por*

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{X}, f) = \sup\{\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(K, f)^{1}; K \text{ é um compacto em } \mathbb{X}\}$$

e

$$\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{X}, f) = \sup\{\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(K, f)^{2}; K \text{ é um compacto em } \mathbb{X}\}.$$

A propriedade de especificação foi definida, primeiramente, por Bowen (1971) e, desde então, várias formulações desta vem sendo estudadas como em Sigmund (1974) e

[1] Conceito definido na página 23.
[2] Conceito definido na página 23.

Oprocha (2007). Recentemente, a propriedade de especificação tem sido explorada no âmbito dos aplicações lineares limitadas em espaço de Banach, como podemos ver em Bartoll et al (2012; 2016; 2019).

Neste trabalho, seguimos a definição da propriedade de especificação apresentada em Rodrigues e Varandas (2016) e, adaptando os trabalho de Bartoll et al citados anteriormente, definimos a propriedade de especificação no caso de aplicações contínuas em espaços de Banach.

Definição 4.0.2. *Uma aplicação contínua* $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ *em um espaço métrico compacto* $(\mathbb{M}, d)$ *tem a* ***propriedade de especificação*** *se para qualquer* $\varepsilon > 0$ *existe um inteiro positivo* $p = p(\varepsilon)$ *tal que para qualquer inteiro* $k \geq 2$*, quaisquer pontos* $x_1, x_2, \ldots, x_k$*, quaisquer inteiros positivos* $m_1, m_2, \ldots, m_k$ *e quaisquer inteiros positivos* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *com* $p_r \geq p$ *para* $r = 1, \ldots, k$*, existe um ponto* $x \in M$ *tal que*

$$d(f^j(x), f^j(x_1)) < \varepsilon, \ \text{com } 0 \leq j \leq m_1,$$

e

$$d(f^{j+m_1+p_1+\cdots+m_{i-1}+p_{i-1}}(x), f^j(x_i)) < \varepsilon, \ \text{com } 0 \leq j \leq m_i,$$

para todo $2 \leq i \leq k$*.*

Intuitivamente temos que se um sistema $(\mathbb{M}, f)$ goza da propriedade de especificação, então dados finitos trechos de órbitas existe um ponto que acompanha cada trecho a uma distância fixada. A seguinte definição é uma extensão natural da propriedade de especificação para aplicação f contínuas em espaços de Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ de dimensão infinita, onde d é a métrica induzida pela normal $\|\cdot\|$.

Definição 4.0.3. *Uma aplicação contínua* $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ *em um espaço de Banach* $\mathbb{X}$ *tem a* ***propriedade de especificação geral*** *se existe uma sequência crescente de compactos* $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *que são* f*-invariantes, com* $0 \in K_1$ *e* $\overline{\cup_{j\in\mathbb{N}} K_j} = \mathbb{X}$ *tal que para cada* $j \in \mathbb{N}$ *a aplicação* $f|_{K_j}$ *tem especificação.*

A seguir, trazemos um exemplo aplicação que goza da propriedade de especificação geral. Para mais informações e outros exemplos vide Bartoll et al (2012; 2016).

Exemplo 4.0.4. *Considere a aplicação shift definida no espaço* $l^p(v)$*, conforme definido no Exemplo 3.1.3. Bartoll et al (2012) mostram que a aplicação shift goza da propriedade de especificação geral se, e somente se, a sequência de pesos* $v = (v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *satisfaz*

$$\sum_{k=1}^{\mathbb{N}} v_k < \infty.$$

A saber, a sequência de compactos σ*-invariante é dado pelos conjuntos* $K_m = mK$*, onde* $K = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \colon ||x|| \leq 1\}$*.*

A seguir, demonstramos um lema técnico importante para o teorema principal desta seção.

Lema 4.0.5. *Seja $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach de dimensão infinita. Se existe uma sequência crescente de conjuntos compactos $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tais que $0 \in K_1$ e $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j} = \mathbb{X}$, então para qualquer $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ existe $j_0 = j_0(\varepsilon)$ e pontos $x_1, x_2, \dots x_{\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor} \in K_{j_0}$ tais que*

$$\|x_i - x_k\| \geq 2\varepsilon,$$

sempre que $i, k \in \{0, \cdots, \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor\}$ e $i \neq k$.

Demonstração. Tome um qualquer $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$. Primeiramente, vamos mostrar que existem pontos $z_1, \dots, z_{\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor} \in \mathbb{X}$ tais que

$$\|z_i - z_j\| \geq 2\varepsilon,$$

sempre que $i, k \in \{0, \cdots, \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor\}$ e $i \neq k$.

De fato, escolha em $\mathbb{X}$ um vetor z_1 tal que $\|z_1\| = 1$. O espaço gerado por $\{z_1\}$, denotado por M_1, é um subespaço próprio fechado em $\mathbb{X}$ cujo dimensão é um. Pelo Lema de Riesz, existe um $z_2 \in \mathbb{X} - \{M_1\}$ tal que $\|z_2\| = 1$ e

$$\|z_1 - z_2\| \leq 4\varepsilon.$$

Os vetores z_1 e z_2 geram um subespaço próprio fechado M_2 em $\mathbb{X}$ cuja dimensão é dois. Novamente, pelo Lema de Riesz, existe um $z_3 \in \mathbb{X} - \{M_2\}$ tal que $\|z_3\| = 1$ e

$$\|z_1 - z_3\| \leq 4\varepsilon \text{ e } \|z_2 - z_3\| \leq 4\varepsilon.$$

Continuando este raciocínio, obtemos uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|z_i - z_k\| \leq 4\varepsilon$ para todo $i, k \in \mathbb{N}$ e $i \neq k$. Agora, pela densidade de $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j$, para cada $i \in \{1, \dots \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor\}$ existe um $x_i \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ satisfazendo $\|z_i - x_i\| < \varepsilon$. Como $\{K_j\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência encaixante, temos que existe $j_0 = j_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ e $K_{j_0} \in \{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de modo que $\{x_i\}_{i=1}^{\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor} \in K_{j_0}$.

Finalmente, para $i \neq k$,

$$4\varepsilon \leq \|z_i - z_k\| \leq \|x_i - z_i\| + \|x_k - z_k\| + \|x_i - x_k\| \leq 2\varepsilon + \|x_i - x_k\|,$$

que implica que

$$\|x_i - x_k\| \geq 2\varepsilon,$$

provando o lema. □

O teorema a seguir é nosso resultado principal da seção e mostra que aplicações contínuas em um espaço de Banach de dimensão infinita que satisfaçam a propriedade de especificação geral têm dimensão média métrica inferior positiva relativa a métrica induzida pela norma do espaço.

Teorema 4.0.6. *Seja $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ aplicação contínua agindo em um espaço de Banach $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ de dimensão infinita. Se f tem a propriedade de especificação geral, então*

$$0 < \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{X}, f, d) \leq \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{X}, f, d),$$

onde d é a métrica induzida pela norma do espaço.

Demonstração. Sendo f aplicação que goza da propriedade de especificação geral, tomamos $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sequência de compactos encaixantes, f-invariantes e que satisfazem $\overline{\cup_{j\in\mathbb{N}} K_j} = \mathbb{X}$. Note que, para fixo $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$, o Lema 4.0.5 nos garante a existência de uma constante natural $j_0 = j_0(\varepsilon)$ e pontos $x_1, x_2, \ldots x_N \in K_{j_0}$, onde $N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$, tais que $\|x_i - x_k\| \geq 2\varepsilon$, para $i, k \in \{1, \ldots, N\}$ e $i \neq k$.

Por hipótese, $f|_{K_{j_0}}$ tem propriedade de especificação. Logo, para qualquer $m \geq 1$ inteiro, tomamos $p = p(\frac{\varepsilon}{2})$ dado pela propriedade de especificação referente a aplicação f restrita ao compacto K_{j_0} tal que, para os pontos $x_1, x_2, \ldots, x_N$, os inteiros $m_1 = m_2 = \cdots = m_N = m$ e $p_1 = p_2 = \cdots = p_N = p$, existe, para cada i fixado, pontos $x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,N}$ tais que

$$\|f^k(x_{i,j}) - f^k(x_i)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } 0 \leq k \leq m$$

e

$$\|f^{k+m+p}(x_{i,j}) - f^k(x_j)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } 0 \leq k \leq m.$$

Então, temos que o conjunto

$$A = \{x_{i,j}; 1 \leq i, j \leq N\}$$

é formado por distintos pontos $(2m + p, \varepsilon)$-separados. Portanto,

$$\mathrm{sep}_{\mathrm{d}}(2m + p, f, \varepsilon) \geq N^2.$$

Note que, o conjunto A é formado por pontos $x_{i,j}$ cujas m primeiras iteradas acompanham x_i e, depois de p iteradas passa a acompanhar x_j por m iterados. Agora, podemos refazer tal raciocínio utilizando pontos $x_{i,j,t}$ que acompanharam três trechos de órbitas, a saber dos pontos x_i, x_j e x_t, por tempo m e com intervalo de p iterados cada troca de ponto. Assim, geramos o conjunto B formado pelos pontos

$$\{x_{i,j,t}; 1 \leq i, j, t \leq N\}$$

tais que

$$\|f^k(x_{i,j,t}) - f^k(x_i)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } 0 \leq k \leq m,$$

$$\|f^{k+n+p}(x_{i,j,t}) - f^k(x_j)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } 0 \leq k \leq m$$

e

$$\|f^{k+2n+2p}(x_{i,j,t}) - f^k(x_t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } 0 \leq k \leq m.$$

Sendo assim,

$$\mathrm{sep_d}(3m+2p, f, \varepsilon) \geq N^3.$$

Repetindo o raciocínio obtemos, para todo $n \geq 1$, que

$$\mathrm{sep}_d(nm + (n-1)p, f, \varepsilon) \geq N^n.$$

Disso segue que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nm+(n-1)p} \log \mathrm{sep_d}(nm+(n-1)p, , f, \varepsilon) &\geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nm+np} \log N^n \\ &= \frac{1}{m+p} \log N.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{X}, f, d) &= \liminf_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nm+(n-1)p} \frac{\log \mathrm{sep_d}(nm+(n-1)p, f, \varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|} \\ &\geq \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{m+p} \frac{\log(\frac{1}{\varepsilon})}{|\log(\varepsilon)|} \\ &= \frac{1}{m+p} > 0,\end{aligned}$$

mostrando o afirmado. $\square$

Capítulo 5

PROPRIEDADES DA DIMENSÃO DE HAUSDORFF MÉDIA

A dimensão de Hausdorff média, definida por Lindenstrauss e Tsukamoto (2019), é uma versão dinâmica da dimensão de Hausdorff. Mostraremos, durante este capítulo, algumas propriedades da dimensão de Hausdorff média inspirados tanto nas propriedades que a dimensão de Hausdorff goza quanto nas propriedades que a dimensão média métrica goza. Para tanto, fixemos $(\mathbb{M}, d)$ um espaço métrico compacto e $f\colon (\mathbb{M}, d) \to (\mathbb{M}, d)$ uma aplicação contínua.

Por conveniência, recordaremos as definições da dimensão de Hausdorff e das dimensões de Hausdorff média superior e inferior de $(\mathbb{M}, d)$ com respeito a dinâmica f. Para $s \geq 0$ e $\varepsilon > 0$, definimos

$$\mathrm{H}^s_\varepsilon(\mathbb{M}, d_n) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(\mathrm{diam}_{d_n} E_k)^s \colon \mathbb{M} = \cup_{k=1}^{\infty} E_k \text{ com } \mathrm{diam}_{d_n} E_k < \varepsilon \text{ para todo } k \geq 1\right\},$$

onde convencionamos que $0^0 = 1$ e $\mathrm{diam}_d(\emptyset)^s = 0$. Definimos, ainda,

$$\dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d_n, \varepsilon) = \sup\left\{s \geq 0 \colon \mathrm{H}^s_\varepsilon(\mathbb{M}, d_n) \geq 1\right\}.$$

A dimensão de Hausdorff é definida por

$$\dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d) = \lim_{\varepsilon \to 0} \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d, \varepsilon).$$

Já as dimensões de Hausdorff média superior e inferior são definidas, respectivamente, como

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d_n, \varepsilon)\right)$$

e

$$\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d_n, \varepsilon)\right).$$

Focaremos, a partir de agora, em mostrar algumas propriedades dimensão de Hausdorff média que conversam com algumas propriedades básicas da dimensão média métrica. Em 2019, Lindenstrauss e Tsukamoto mostram que a dimensão média, dimensão média métrica e a dimensão de Hausdorff média se relacionam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathrm{mdim}(\mathbb{M}, f) &\leq \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d) \leq \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d) \\ &\leq \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d) \leq \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ainda, Lindenstrauss e Weiss (2000) mostram que se o sistema dinâmico f tem entropia finita, então

$$\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d') = \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d') = 0,$$

para toda métrica d' compatível com a topologia de $\mathbb{M}$. Disso e da inequação (5.1), segue o seguinte resultado:

Proposição 5.0.1. *Se* $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\mathbb{M}, f) < \infty$*, então*

$$\mathrm{mdim}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d') = 0,$$

para toda d' compatível com a topologia de $\mathbb{M}$.

Salientamos que, assim como acontece para dimensão média métrica, Lindenstrauss e Tsukamoto (2019) mostram que para sistemas dinâmicos com a propriedade de marcação[1] existe uma métrica $\mathbf{d}$ compatível com a topologia de $\mathbb{M}$ tal que

$$\mathrm{mdim}(\mathbb{M}, f) = \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, \mathbf{d}) = \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, \mathbf{d}) = \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, \mathbf{d}) = \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, \mathbf{d}).$$

A seguir, provaremos que a dimensão de Hausdorff média é concentrada no conjunto não-errante, o qual denotaremos por $\Omega(f)$. Tal fato também é verdadeiro para o caso da entropia topológica, dimensão média e dimensão média métrica.

Proposição 5.0.2. *Seja* $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ *uma aplicação contínua no espaço compacto* $(\mathbb{M}, d)$*. Então*

$$\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d) = \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\Omega(f), f, d) \quad e \quad \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d) = \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\Omega(f), f, d).$$

[1]Um sistema dinâmico $(\mathbb{M}, f)$ tem a **propriedade de marcação** se para qualquer $N > 0$ existe um conjunto aberto $U \subset \mathbb{M}$ satisfazendo

$$\mathbb{M} = \cup_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(U), \; U \cap f^{-n}(U) = \emptyset \; (\forall\, 1 \leq n \leq N).$$

Demonstração. Sabemos que

$$\mathrm{h_{top}}(f) = \mathrm{h_{top}}(f|_{\Omega(f)}).$$

Portanto, fora do conjunto $\Omega(f)$ a entropia topológica se anula. Como entropia finita implica que a dimensão de Hausdorff média é nula, temos que a dimensão de Hausdorff média também se anula fora do $\Omega(f)$, fato que demonstra a proposição. $\square$

Como acontece com a dimensão média métrica, a dimensão de Hausdorff média da aplicação f^p, para inteiro $p \geq 1$, é cotada superiormente por p vezes a dimensão de Hausdorff média de f. Mostraremos essa propriedade na seguinte proposição.

Proposição 5.0.3. *Para qualquer inteiro $p \geq 1$, temos que*

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f^p, d) \leq p\, \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d) \quad e \quad \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f^p, d) \leq p\, \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d).$$

Demonstração. Para qualquer inteiro n, temos que

$$d_{n,f^p}(x,y) = \max_{0 \leq j < n} d(f^{jp}(x), f^{jp}(y)) \leq \max_{0 \leq j < np} d(f^j(x), f^j(y)) = d_{np,f}(x,y),$$

para todo $x, y \in \mathbb{M}$. Esta última desigualdade implica, para $\varepsilon > 0$, que toda cobertura com diâmetro menor que ε com respeito a métrica dinâmica $d_{np,f}$ é também uma cobertura cujos elementos tem diâmetro menor que ε com respeito a métrica dinâmica d_{n,f^p}.

Então, para cada $s \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^s_\varepsilon(\mathbb{M}, d_{n,f^p}) &= \inf \left\{ \Sigma_{k=1}^\infty (\mathrm{diam}_{d_{n,f^p}} E_k)^s \colon \mathbb{M} = \cup_{k=1}^\infty E_k \text{ com } \mathrm{diam}_{d_{n,f^p}} E_k < \varepsilon; \forall k \geq 1 \right\} \\
&\leq \inf \left\{ \Sigma_{k=1}^\infty (\mathrm{diam}_{d_{np,f}} E_k)^s : \mathbb{M} = \cup_{k=1}^\infty E_k \text{ com } \mathrm{diam}_{d_{np,f}} E_k < \varepsilon; \forall k \geq 1 \right\} \\
&= \mathrm{H}^s_\varepsilon(\mathbb{M}, d_{np,f}),
\end{aligned}$$

onde $\mathrm{diam}_{d_{n,f}}$ denota o diâmetro com respeito a métrica dinâmica d_n em relação a dinâmica f. Portanto,

$$\dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d_n, \varepsilon, f^p) \leq \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d_{np}, \varepsilon, f)$$

e disso, segue que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d_n, \varepsilon, f^p) \leq p \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{np} \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d_{np}, \varepsilon, f) \tag{5.2}$$

e

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d_n, \varepsilon, f^p) \leq p \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{np} \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d_{np}, \varepsilon, f). \tag{5.3}$$

Tomando o limite em $\varepsilon \to \infty$ nas inequações (5.2) e (5.3), segue o resultado. $\square$

Para a dimensão de Hausdorff, sabe-se (ver Falconer (1990)) que se $A, B \subset \mathbb{R}^n$ são tais que $A \subset B$, então

$$\dim_{\mathrm{H}}(A, d) \leq \dim_{\mathrm{H}}(B, d)$$

e, ainda, se $A \in (\mathbb{R}^n, d)$ e $B \in (\mathbb{R}^m, d')$ são compactos, então vale

$$\dim_{\mathrm{H}}(A, d) + \dim_{\mathrm{H}}(B, d') \leq \dim_{\mathrm{H}}(A \times B, d \times d')$$

onde $d \times d'$ é a métrica da soma.

Mostraremos, nos seguintes resultados, que as propriedades exibidas acima para dimensão de Hausdorff têm sua versão para a dimensão de Hausdorff média. Para tanto, salientamos que se $A \subset \mathbb{M}$ um subconjunto f-invariante, podemos considerar a dinâmica f restrita ao conjunto A, a qual denotaremos por $f|_A$.

Proposição 5.0.4. *Seja $A \subset \mathbb{M}$ um subconjunto não-vazio e f-invariante. Então*

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(A, f|_A, d) \leq \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d) \quad e \quad \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(A, f|_A, d) \leq \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d).$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ e um inteiro $n > 0$, considere $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma cobertura de $\mathbb{M}$ tal que $\mathrm{diam}_{d_n}(E_k) < \varepsilon$, para todo $k \geq 1$. Observe que o conjunto $\{A_k = E_k \cap A \colon k \geq 1\}$ é uma cobertura de A cujos elementos tem diâmetro menor que ε, com respeito a d_n.

Portanto, para $s \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_{\varepsilon}^{s}(\mathbb{M}, d_n) &= \inf\{\Sigma_{k=1}^{\infty}(\mathrm{diam}_{d_n} E_k)^s \colon \mathbb{M} = \cup_{k=1}^{\infty} E_k \text{ com } \mathrm{diam}_{d_n} E_k < \varepsilon, \forall k \geq 1\} \\
&\geq \inf\{\Sigma_{k=1}^{\infty}(\mathrm{diam}_{d_n} A_k)^s \colon \mathbb{M} = \cup_{k=1}^{\infty} E_k \text{ com } \mathrm{diam}_{d_n} E_k < \varepsilon, \forall k \geq 1\} \\
&\geq \inf\{\Sigma_{k=1}^{\infty}(\mathrm{diam}_{d_n} A_k)^s \colon A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ com } \mathrm{diam}_{d_n} A_k < \varepsilon, \forall k \geq 1\} \\
&= \mathrm{H}_{\varepsilon}^{s}(A, d_n).
\end{aligned}$$

Consequentemente, para quaisquer inteiros $s \geq 0$ e $n \geq 0$, temos que

$$\dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d_n, \varepsilon) \geq \dim_{\mathrm{H}}(A, d_n, \varepsilon).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d) &= \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d_n, \varepsilon)\right) \\
&\geq \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \dim_{\mathrm{H}}(A, d_n, \varepsilon)\right) = \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(A, f|_A, d)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d) &= \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d_n, \varepsilon)\right) \\
&\geq \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \dim_{\mathrm{H}}(A, d_n, \varepsilon)\right) = \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(A, f|_A, d).
\end{aligned}$$

$\square$

Agora, passamos a investigar a dimensão de Hausdorff média quanto a ação da dinâmica $f \times g$ no espaço produto $d \times d'$. Para tanto, usaremos dois resultados de teoria geométrica da medida em sua versão para espaços métricos compactos: o primeiro, uma versão do princípio da distribuição de massa; o segundo, uma versão do lema de Frostman.

Teorema 5.0.5. *Seja* $(\mathbb{M}, d)$ *um espaço métrico compacto. Suponha que existe uma medida de Borel* μ *em* $(\mathbb{M}, d)$ *satisfazendo:*

i) $\mu(\mathbb{M}) \geq 1$*;*

ii) para qualquer cobertura aberta $\mathcal{E} = \{E_i\}_{i=1}^k$ *de* $\mathbb{M}$ *tal que* $diam_d E_i \leq \delta$*, vale*

$$\mu(E_i) \leq (\mathrm{diam}_d(E_i))^{\bar{s}}, \tag{5.4}$$

para todo $i = 1, \ldots, k$*.*

Então,

$$\dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d, \delta) \geq \bar{s}.$$

Demonstração. Seja $\delta > 0$. Considere $\{U_j\}_{n=1}^{\infty}$ uma coleção qualquer de conjuntos abertos em $(\mathbb{M}, d)$ com $\cup_{j=1}^{\infty} U_j = \mathbb{M}$ e $\mathrm{diam}_d U_j \leq \delta$. Como $\mathbb{M}$ é compacto, podemos extrair uma subcobertura $\{A_j\}_{j=1}^m$ para $\mathbb{M}$. Por hipótese, temos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\mathrm{diam}_d(U_j))^{\bar{s}} \geq \sum_{j=1}^{m} (\mathrm{diam}_d(A_j))^{\bar{s}} \geq \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j) \geq \mu(\cup_{j=1}^m A_j) = \mu(\mathbb{M}) \geq 1. \tag{5.5}$$

Tomando o ínfimo sobre todas as coleções de δ-coberturas abertas de $(\mathbb{M}, d)$ na inequação (5.5), temos que $\mathrm{H}_{\delta}^{\bar{s}}(\mathbb{M}, d) \geq 1$. Portanto, $\dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d, \delta) \geq \bar{s}$. □

Lema 5.0.6. *Seja* $0 < c < 1$*. Existe* $0 < \delta_0(c) = \delta_0 < 1$*, dependendo somente de* c*, satisfazendo o seguinte afirmação: para qualquer espaço métrico compacto* $(\mathbb{M}, d)$ *e* $0 < \delta \leq \delta_0$*, existe uma medida de probabilidade de Borel* μ *em* $(\mathbb{M}, d)$ *tal que*

$$\mu(E) \leq (diam_d E)^{c \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d, \delta)}$$

para todo $E \subset \mathbb{M}$ *com* $diam_d E < \frac{\delta}{6}$*.*

Demonstração. Veja Lindenstrauss e Tsukamoto (2019), corolário 4.4. □

Consideremos, para o próximo resultado, duas aplicações contínuas $f \colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ e $g \colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, onde $(\mathbb{M}, d)$ e $(\mathbb{E}, d')$ são espaços métricos compactos. No espaço produto $\mathbb{M} \times \mathbb{E}$, consideraremos a métrica

$$(d \times d')((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) + d'(y_1, y_2), \text{ para } x_1, x_2 \in \mathbb{M} \text{ e } y_1, y_2 \in \mathbb{E}. \tag{5.6}$$

Teorema 5.0.7. *Considere as dinâmicas* $(\mathbb{M}, f)$, $(\mathbb{E}, g)$ *e* $(\mathbb{M} \times \mathbb{E}, f \times g)$ *como anteriormente definidas. Então*

$$\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M} \times \mathbb{E}, f \times g, d \times d') \geq \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d) + \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{E}, g, d')$$

Demonstração. Para $0 < c < 1$, segue do Lema 5.0.6 que existe um $\delta_0 = \delta_0(c) \in (0, 1)$ tal que, para todo $\delta \in (0, \delta_0]$, existem medidas de probabilidade de Borel μ e ν em $(\mathbb{M}, d)$ e $(\mathbb{E}, d')$, respectivamente, satisfazendo

$$\mu(E) \leq (\mathrm{diam}_d(E))^{c \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M},d,\delta)} \quad \text{e} \quad \nu(F) \leq (\mathrm{diam}_{d'}(F))^{c \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{E},d',\delta)}$$

para todo $E \subset \mathbb{M}$ e $F \subset \mathbb{E}$ com $\mathrm{diam}_d E < \frac{\delta}{6}$ e $\mathrm{diam}_{d'} F < \frac{\delta}{6}$. Observe que

$$\mathrm{diam}_{d \times d'}(E \times F) \geq \max\{\mathrm{diam}_d E, \mathrm{diam}_{d'} F\}.$$

Portanto, para todo $E \times F \in \mathbb{M} \times \mathbb{E}$ tais que $\mathrm{diam}_{d \times d'}(E \times F) < \frac{\delta}{6}$, temos

$$\begin{aligned}
(\mu \times \nu)(E \times F) &= \mu(E)\nu(F) \\
&\leq (\mathrm{diam}_d(E))^{c \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M},d,\delta)} (\mathrm{diam}_{d'}(F))^{c \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{E},d',\delta)} \\
&\leq (\mathrm{diam}_{d \times d'}(E \times F))^{c \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M},d,\delta)} (\mathrm{diam}_{d \times d'}(E \times F))^{c \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{E},d',\delta)} \\
&= (\mathrm{diam}_{d \times d'}(E \times F))^{c\, (\dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M},d,\delta) + \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{E},d',\delta))}.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 5.0.5, temos que

$$\dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M} \times \mathbb{E}, (d \times d')_n, \delta/6) \geq c\, (\dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d, \delta) + \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{E}, d', \delta)). \tag{5.7}$$

Agora, para cada $k \geq 1$, tome $c_k \in (0, 1)$ tal que $c_k \to 1$ quando $k \to \infty$. Segue que existe um $\delta_k(c_k) = \delta_k \in (0, 1)$ tal que $\delta_k \to 0$ e

$$\dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M} \times \mathbb{E}, (d \times d')_n, \delta_k/6) \geq c_k(\dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d_n, \delta_k) + \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{E}, d'_n, \delta_k)),$$

para todo $n, k \in \mathbb{N}$. Assim, para cada k, n, temos

$$\frac{1}{n}\dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M} \times \mathbb{E}, (d \times d')_n, \delta_k/6) \geq \frac{c_k}{n}(\dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d_n, \delta_k) + \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{E}, d'_n, \delta_k)). \tag{5.8}$$

Portanto, tomando os respectivos limites inferiores em $n \to 0$ e o limite em $k \to \infty$, temos que

$$\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M} \times \mathbb{E}, f \times g, d \times d') \geq \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d) + \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{E}, g, d'),$$

provando o resultado. □

Finalizaremos este capítulo buscando cotas superiores para a dimensão de Hausdorff média.

Teorema 5.0.8. *Seja $\mathbb{K} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Para qualquer métrica d em $\mathbb{M}$, temos que*

$$\dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d) \leq \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}^{\mathbb{K}}, \sigma, \tilde{d}) \leq \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}^{\mathbb{K}}, \sigma, \tilde{d}) \leq \underline{\dim}_{\mathrm{B}}(\mathbb{M}, d),$$

onde $\tilde{d}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j \in \mathbb{K}} \frac{1}{2^j} d(x_k, y_k)$ *para todo* $\bar{x} = (x_k), \bar{y} = (y_k) \in \mathbb{M}^{\mathbb{K}}$.

Demonstração. Note que a terceira inequação segue do fato que

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}^{\mathbb{K}}, \sigma, \tilde{d}) \leq \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}^{\mathbb{K}}, \sigma, \tilde{d}) = \underline{\dim}_{\mathrm{B}}(\mathbb{M}, d)$$

Passaremos a provar a primeira inequação para $\mathbb{K} = \mathbb{N}$ (o caso $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ pode ser provado analogamente). Para cada $k \geq 1$, tome $c_k \in (0, 1)$ tal que $c_k \to 1$ quando $k \to \infty$. Segue do Lema 5.0.6 que, para cada $k \geq 1$, existe um $\delta_k = \delta_k(c_k) \in (0, 1)$, satisfazendo $\delta_k \to 0$ quando $k \to \infty$, tal que existe uma medida de probabilidade de Borel μ em $(\mathbb{M}, d)$ tal que

$$\mu(E) \leq (\mathrm{diam}_d E)^{c_k \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d, \delta_k)}$$

para todo $E \subset \mathbb{M}$ com $\mathrm{diam}_d E < \delta_k/6$.

Seja $\mathcal{E} = \{E_i\}_{i=1}^m$ uma cobertura aberta finita de $\mathbb{M}$ tal que $\mathrm{diam}_d E_i < \delta_k/6$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Note que existe $\beta \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $i = 1, \ldots, m$, vale

$$E_i = A_{i,1} \times A_{i,2} \times \cdots \times A_{i,\beta} \times \mathbb{M} \times \mathbb{M} \times \ldots,$$

onde $A_{i,t} \subset \mathbb{M}$ é um conjunto aberto para todo $1 \leq t \leq \beta$.

Tome $n > \beta$ e note que, para todo $i = 1, \ldots, m$, vale

$$\mathrm{diam}_{\tilde{d}_n} E_i \geq \mathrm{diam}_d A_{i,t},$$

para todo $1 \leq t \leq \beta$.

Defina, agora, uma medida de probabilidade de Borel $\tilde{\mu} = \mu^{\mathbb{N}}$ em $(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \tilde{d})$. Portanto, para todo $i = 1, \ldots, m$, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(E_i) &= \mu(A_{i,1})\mu(A_{i,2}) \ldots \mu(A_{i,\beta}) \\
&\leq (\mathrm{diam}_d A_{i,1})^{c_k \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d, \delta_k)} \ldots (\mathrm{diam}_d A_{i,\beta})^{c_k \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d, \delta_k)} \\
&\leq (\mathrm{diam}_{\tilde{d}_n} E_i)^{c_k \beta \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d, \delta_k)} \\
&\leq (\mathrm{diam}_{\tilde{d}_n} E_i)^{c_k n \dim_H(\mathbb{M}, d, \delta_k)}.
\end{aligned}$$

Portanto, segue do Teorema 5.0.5 que

$$\frac{1}{n} \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \tilde{d}, \delta_k/6) \geq c_k \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d, \delta_k),$$

onde $c_k \to 1$ e $\delta_k \to 0$ quando $k \to \infty$. Esse fato prova o teorema. $\square$

Rodrigues e Acevedo (2021) provaram que para qualquer aplicação contínua $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ vale

$$\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d) \leq \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d) \leq \underline{\dim}_{\mathrm{B}}(\mathbb{M}, d).$$

Consequentemente

$$\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d) \leq \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d) \leq \underline{\dim}_{\mathrm{B}}(\mathbb{M}, d).$$

O próximo resultado decorre diretamente do Teorema 5.0.8.

Corolário 5.0.9. *Se* $\dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d) = \underline{\dim}_{\mathrm{B}}(\mathbb{M}, d)$*, então*

$$\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma, \tilde{d}) = \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}^{\mathbb{N}}, \sigma, \tilde{d}) = \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d)$$

e, portanto,

$$\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d) \leq \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d) \leq \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d).$$

Um fator de um sistema dinâmico pode ter a dimensão média (métrica) maior que o sistema original (ver Lindenstrauss e Weiss (2000) e Acevedo (2020)). O mesmo ocorre para a dimensão de Hausdorff média. De fato, seja C o conjunto de Cantor ternário em $[0, 1]$ e tome uma qualquer aplicação sobrejetiva $\Phi\colon C \to [0, 1]$. Segue que $([0, 1]^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ é um fator de (C, σ) considerando a semi-conjugação

$$\tilde{\Phi}\colon C^{\mathbb{Z}} \to [0, 1]^{\mathbb{Z}}$$

definida por $\tilde{\Phi}(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) = (\dots, \Phi(x_{-1}), \Phi(x_0), \Phi(x_1), \dots)$. Portanto, temos

$$0 = \dim(C) = \mathrm{mdim}(C^{\mathbb{Z}}, \sigma) < \mathrm{mdim}([0, 1]^{\mathbb{Z}}, \sigma) = 1$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\log 2}{\log 3} = \dim_{\mathrm{H}}(C) = \dim_{\mathrm{B}}(C) &= \mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}(C^{\mathbb{Z}}, \sigma, \tilde{d}) \\ &= \mathrm{mdim}_{\mathrm{H}}(C^{\mathbb{Z}}, \sigma, \tilde{d}) < \mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}([0, 1]^{\mathbb{Z}}, \sigma, \tilde{d}) = 1.\end{aligned}$$

Capítulo 6

CONTINUIDADE DA DIMENSÃO MÉDIA MÉTRICA E DA DIMENSÃO DE HAUSDORFF MÉDIA COM RESPEITO A MÉTRICA

Neste capítulo, buscamos responder a seguinte pergunta: como varia a dimensão média métrica[1] e a dimensão de Hausdorff média[2] em relação a métrica? Para tanto, fixamos um espaço topológico compacto metrizável $(\mathbb{M}, \tau)$, onde τ é a topologia de $\mathbb{M}$, e uma aplicação contínua $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$. Denotamos por $\mathbb{M}(\tau)$ o conjunto consistindo das métricas definidas em $\mathbb{M}$ cujas topologias geradas são iguais a τ, isto é,

$$\mathbb{M}(\tau) = \{d\colon d \text{ é uma métrica em } \mathbb{M} \text{ e } \tau_d = \tau\},$$

onde τ_d denota a topologia induzida pela métrica d em $\mathbb{M}$.

Passamos, então, a estudar a continuidade das aplicações

$$\begin{aligned} \mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f)\colon \mathbb{M}(\tau) &\to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ d &\mapsto \mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathrm{mdim}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f)\colon \mathbb{M}(\tau) &\to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ d &\mapsto \mathrm{mdim}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d), \end{aligned}$$

onde $\mathbb{M}(\tau)$ será munido da métrica

$$D(d_1, d_2) = \sup_{x,y \in \mathbb{M}} \{|d_1(x, y) - d_2(x, y)| : \text{ para } d_1, d_2 \in \mathbb{M}(\tau)\}.$$

[1]Conceito definido na página 23.
[2]Conceito definido na página 27.

Observação 6.0.1. *Durante este capítulo, escreveremos* $\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d)$ *para nos referirmos a ambas* $\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d)$ *e* $\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d)$ *e escreveremos* $\mathrm{mdim}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d)$ *para nos referirmos a ambas* $\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d)$ *e* $\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d)$*, a menos que seja necessário distinguí-las.*

A fim de encontrar uma resposta para o problema proposto, iremos considerar casos particulares de métricas que induzem a topologia τ. Isto é, trabalharemos com classes de métricas equivalentes e investigaremos o comportamento da dimensão média métrica e da dimensão de Hausdorff média quando variamos a métricas nessas classes.

Relembramos que duas métricas d_1 e d_2 em $\mathbb{M}$ são ditas **equivalentes**, denotado por $d_1 \sim d_2$, se as aplicações $i_{12}\colon (\mathbb{M}, d_1) \to (\mathbb{M}, d_2)$ e $i_{21}\colon (\mathbb{M}, d_2) \to (\mathbb{M}, d_1)$ são contínuas. Denotando por $B_d(x; \varepsilon)$ a bola aberta de centro em $x \in \mathbb{M}$ e raio $\varepsilon > 0$, com respeito a d em $\mathbb{M}$, é possível provar que, para dado $x \in \mathbb{M}$ e $\varepsilon > 0$, d_1 e d_2 são equivalentes se, e somente se, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$B_{d_1}(x; \delta_1) \subset B_{d_2}(x; \varepsilon) \quad \text{e} \quad B_{d_2}(x; \delta_2) \subset B_{d_1}(x; \varepsilon).$$

As classes de métricas equivalentes que nos restringiremos no decorrer desse capítulo são: métricas uniformemente equivalentes (Seção 6.1); métricas geradas através da composição de uma certa classe de funções com uma métrica que gera a topologia do espaço $\mathbb{M}$ (Seção 6.2); métricas induzidas por homeomorfismos (Seção 6.3); métricas obtidas como combinção convexa de métricas que geram a topologia de $\mathbb{M}$ (Seção 6.4).

No restante do capítulo iremos supor que f tem entropia infinita uma vez que tanto a dimensão média métrica quanto a dimensão de Hausdorff média são identicamente nulas sempre que a aplicação f tiver entropia topológica finita, como mostra a seguinte proposição:

Proposição 6.0.2. *Se* $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\mathbb{M}, f) < \infty$*, então*

$$\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f)\colon \mathbb{M}(\tau) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \qquad e \qquad \mathrm{mdim}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f)\colon \mathbb{M}(\tau) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

são aplicações identicamente nula.

Demonstração. Note que se $\mathrm{h}_{\mathrm{top}}(\mathbb{M}, f) < \infty$, então $\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d) = 0$ para qualquer $d \in \mathbb{M}(\tau)$. Segue disso e do fato da entropia topológica não depender da métrica que $\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, \tilde{d}) = 0$ para toda $\tilde{d} \in \mathbb{M}(\tau)$. Analogamente, é possível provar que $\mathrm{mdim}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, \tilde{d}) = 0$ para toda $\tilde{d} \in \mathbb{M}(\tau)$. $\square$

6.1 Métricas Uniformemente Equivalentes

Nesta seção, trataremos de métricas que são uniformemente equivalentes, conforme a definição a seguir.

Definição 6.1.1. *Dizemos que d_1 e d_2, métrica em $\mathbb{M}$, são* ***uniformemente equivalentes*** *se existem constantes reais $0 < a \leq b$ tais que*

$$ad_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq bd_1(x, y), \tag{6.1}$$

para todos $x, y \in \mathbb{M}$. Nesse caso, denotamos $d_1 \sim_u d_2$.

A partir de agora, fixaremos uma métrica d em $\mathbb{M}(\tau)$ e denotaremos por $\mathcal{U}(d)$ o conjunto das métricas em $\mathbb{M}$ que são uniformemente equivalente a d. Ainda, escreveremos $\operatorname{diam}_d(A)$, para $A \subset \mathbb{M}$, para nos referir ao diâmetro de A com respeito a d, isto é,

$$\operatorname{diam}_d(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

Uma vez que estamos adotando o espaço métrico $(\mathbb{M}, d)$ compacto, temos que $\operatorname{diam}_d(\mathbb{M}) < \infty$. Claramente, se $\tilde{d}$ é uma métrica uniformemente equivalente a métrica d, então $\operatorname{diam}_{\tilde{d}}(\mathbb{M}) < \infty$.

Exemplo 6.1.2. *Considere a métrica $\tilde{d}(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ para todo $x, y \in \mathbb{M}$. Temos que $d \sim_u \tilde{d}$, uma vez que*

$$\tilde{d}(x, y) \leq d(x, y) \leq \operatorname{diam}(\mathbb{M})\tilde{d}(x, y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{M}$.

Exemplo 6.1.3. *A métrica definida por $\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, para todo $x, y \in \mathbb{M}$, é tal que $d \sim_u \tilde{d}$, uma vez que*

$$\tilde{d}(x, y) \leq d(x, y) \leq [\operatorname{diam}(\mathbb{M}) + 1]\tilde{d}(x, y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{M}$.

É relevante mencionar que se d_1 e d_2 são métricas uniformemente equivalentes, então d_1 e d_2 são equivalentes. Por outro lado, existem métricas que geram mesma topologia mas não são uniformemente equivalentes, isto é, são métricas equivalentes que não satisfazem a condição (6.1).

Exemplo 6.1.4. *Considere a função $\tan\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ e tome a métrica em $\mathbb{R}$ definida por*

$$\tilde{d}(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)| \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Portanto, a métrica $\tilde{d}$ gera a mesma topologia de $d(x, y) = |x - y|$ mas, visto que tan *e* arctan *não são funções Lipschitz, d e $\tilde{d}$ não são uniformemente equivalentes.*

Acevedo (2020) mostrou que para duas métricas $d_1, d_2 \in \mathbb{M}(\tau)$ uniformemente equivalentes vale

$$\text{mdim}_{\text{M}}(\mathbb{M}, f, d_1) = \text{mdim}_{\text{M}}(\mathbb{M}, f, d_2).$$

Desse fato decorre que a dimensão média métrica é contínua com respeito a métricas que são uniformemente equivalentes. Por conveniência, faremos a demonstração desse fato no resultado seguinte.

Proposição 6.1.5. *As seguintes afirmações são válidas:*

i) sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{M}(\tau)$. Se existe uma constante $c > 0$ tal que $d_1(x, y) \leq c\, d_2(x, y)$ para todo $x, y \in \mathbb{M}$, então

$$\text{mdim}_{\text{M}}(\mathbb{M}, f, d_1) \leq \text{mdim}_{\text{M}}(\mathbb{M}, f, d_2).$$

ii) a aplicação

$$\text{mdim}_{\text{M}}(\mathbb{M}, f)\colon \mathcal{U}(d) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

é constante.

Demonstração. Começaremos provando o item i). Note que, dado $\varepsilon > 0$, segue da hipótese que existe $\delta = \frac{\varepsilon}{c} > 0$ tal que

$$d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(x, y) < \varepsilon, \forall\ x, y \in \mathbb{M}.$$

Portanto, todo conjunto (n, f, δ)-gerador em $(\mathbb{M}, d_1)$ é também um conjunto (n, f, ε)-gerador em $(\mathbb{M}, d_2)$. Segue, portanto, que

$$\text{span}_{d_1}(n, f, \varepsilon/c) \geq \text{span}_{d_2}(n, f, \varepsilon),$$

que, por sua vez, implica no item i). Claramente, o item ii) decorre do item i). □

Para a dimensão de Hausdorff média, temos o seguinte resultado:

Proposição 6.1.6. *As seguintes afirmações são válidas:*

i) sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{M}(\tau)$. Se existe uma constante $c > 0$ tal que $d_1(x, y) \leq c\, d_2(x, y)$ para todo $x, y \in \mathbb{M}$, então

$$\text{mdim}_{\text{H}}(\mathbb{M}, f, d_1) \leq \text{mdim}_{\text{H}}(\mathbb{M}, f, d_2).$$

ii) a aplicação

$$\text{mdim}_{\text{H}}(\mathbb{M}, f)\colon \mathcal{U}(d) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

é constante.

Demonstração. Começaremos provando o item i). Para qualquer inteiro $n > 0$, temos que

$$d_{1,n}(x,y) = \max_{0\leq j<n}\{d_1(f^j(x), f^j(y))\} \leq \max_{0\leq j<n}\{c\ d_2(f^j(x), f^j(y))\} = c\ d_{2,n}(x,y), \quad (6.2)$$

para todo $x, y \in \mathbb{M}$. Agora, para dado $\varepsilon > 0$, observe que se $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma cobertura de $\mathbb{M}$ tal que $\operatorname{diam}_{d_{2,n}}(E_i) < \varepsilon$, para todo $i \geq 1$, segue da inequação (6.2) que $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma cobertura de $\mathbb{M}$ com $\operatorname{diam}_{d_{1,n}}(E_i) < c\ \varepsilon$, para todo $i \geq 1$. Disso, para $s \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_{\varepsilon}^{s}(\mathbb{M}, d_{1,n}) &= \inf\left\{\Sigma_{k=1}^{\infty}(\operatorname{diam}_{d_{1,n}}E_k)^s \colon \mathbb{M} = \cup_{k=1}^{\infty}E_k \text{ com } \operatorname{diam}_{d_{1,n}}E_k < \varepsilon, \forall k \geq 1\right\}\\
&\leq \inf\left\{\Sigma_{k=1}^{\infty}(c\operatorname{diam}_{d_{2,n}}E_k)^s \colon \mathbb{M} = \cup_{k=1}^{\infty}E_k \text{ com } \operatorname{diam}_{d_{1,n}}E_k < \varepsilon, \forall k \geq 1\right\}\\
&\leq \inf\left\{\Sigma_{k=1}^{\infty}(c\operatorname{diam}_{d_{2,n}}E_k)^s \colon \mathbb{M} = \cup_{k=1}^{\infty}E_k \text{ com } \operatorname{diam}_{d_{2,n}}E_k < \varepsilon/c, \forall k \geq 1\right\}\\
&= \inf\left\{\Sigma_{k=1}^{\infty}(c\operatorname{diam}_{d_{2,n}}E_k)^s \colon \mathbb{M} = \cup_{k=1}^{\infty}E_k \text{ com } c\operatorname{diam}_{d_{2,n}}E_k < \varepsilon, \forall k \geq 1\right\}\\
&= \inf\left\{\Sigma_{k=1}^{\infty}(\operatorname{diam}_{d_{2,n}}F_k)^s \colon \mathbb{M} = \cup_{k=1}^{\infty}F_k \text{ com } \operatorname{diam}_{d_{2,n}}F_k < \varepsilon, \forall k \geq 1\right\}\\
&= \mathrm{H}_{\varepsilon}^{s}(\mathbb{M}, d_{2,n})
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\sup\{s \geq 0 \colon \mathrm{H}_{\varepsilon}^{s}(\mathbb{M}, d_{2,n}) \geq 1\} \geq \sup\{s \geq 0 \colon \mathrm{H}_{\varepsilon}^{s}(\mathbb{M}, d_{1,n}) \geq 1\},$$

que, por sua vez, implica em

$$\dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d_{2,n}, \varepsilon) \geq \dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, d_{1,n}, \varepsilon). \quad (6.3)$$

A inequação (6.3) implica o item i). Claramente, se d_1 e d_2 são uniformemente equivalentes, segue do item i) que

$$\operatorname{mdim}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d_1) = \operatorname{mdim}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d_2),$$

provando, assim, o item ii). □

Em particular, se $\mathbb{K}$ é uma variedade riemaniana compacta de dimensão finita, então quaisquer duas métricas riemanianas em $\mathbb{K}$ são uniformemente equivalentes. Portanto, se ρ_1 e ρ_2 são duas métricas riemanianas $\mathbb{K}$, temos que

$$\operatorname{mdim}_{\mathrm{M}}(\mathbb{K}, f, \rho_1) = \operatorname{mdim}_{\mathrm{M}}(\mathbb{K}, f, \rho_2) \quad \text{e} \quad \operatorname{mdim}_{\mathrm{H}}(\mathbb{K}, f, \rho_1) = \operatorname{mdim}_{\mathrm{H}}(\mathbb{K}, f, \rho_2).$$

Considere, para o resultado seguinte, o conjunto

$$\operatorname{Riem}(\mathbb{K}) = \{\rho \colon \rho \text{ é uma métrica riemaniana em } \mathbb{K}\}.$$

Corolário 6.1.7. *Se $\mathbb{K}$ é uma variedade riemaniana compacta de dimensão finita, então as aplicações*

$$\operatorname{mdim}_{\mathrm{M}}(\mathbb{K}, f) \colon \operatorname{Riem}(\mathbb{K}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad e \quad \operatorname{mdim}_{\mathrm{H}}(\mathbb{K}, f) \colon \operatorname{Riem}(\mathbb{K}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

são constantes.

6.2 Métricas em $\mathcal{A}_d(\mathbb{M})$

Nesta seção, restringiremos nossa problema a uma classe de métricas equivalentes, mas não necessariamente uniformemente equivalentes, formada por métricas $g \circ d$, onde $g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ é uma aplicação contínua, crescente, subaditiva [3] e que satisfaz $g^{-1}(0) = \{0\}$. Consideramos, portanto, o seguinte conjunto

$$\mathcal{A}_d(\mathbb{M}) = \{g_d\colon g_d = g \circ d \text{ para alguma } g \in \mathcal{A}[0,\infty)\}, \tag{6.4}$$

onde

$$\mathcal{A}[0,\infty) = \left\{g \in C^0[0,\infty)\colon g \text{ é crescente, subaditiva e tal que } g^{-1}\{0\} = \{0\}\right\}.$$

Exemplo 6.2.1. *Qualquer aplicação $g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ derivável, com $g(0) = 0$, $\frac{dg}{dx} > 0$ e $\frac{d^2g}{dx^2} \leq 0$ é tal que $g \in \mathcal{A}[0,\infty)$.*

Na próxima proposição, mostraremos que, de fato, $g \circ d$ é uma métrica em $\mathbb{M}$ e, ainda, equivalente a d. Assim, providenciamos uma forma de produzir métricas equivalentes a métrica fixada $d \in \mathbb{M}(\tau)$.

Proposição 6.2.2. *Seja $g \in \mathcal{A}[0,\infty)$ fixa qualquer e considere*

$$g_d(x,y) = g \circ d(x,y) \text{ para todo } x,y \in \mathbb{M}.$$

Então, temos que g_d é uma métrica em $\mathbb{M}$ e, ainda, $g_d \in \mathbb{M}(\tau)$.

Demonstração. Faremos tal demonstração por etapas.

Etapa 1: g_d é uma métrica em $\mathbb{M}$.

De fato, note que $g_d(x,y) \geq 0$ uma vez que a imagem de g está contida em $[0,\infty)$. Ainda, usando que $g^{-1}\{0\} = \{0\}$ e o fato de d ser métrica em $\mathbb{M}$, segue que

$$g_d(x,y) = 0 \Leftrightarrow g(d(x,y)) = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Claramente, $g_d(x,y) = g_d(y,x)$ para todo $x,y \in \mathbb{M}$.

Agora, considere $x,y,z \in \mathbb{M}$ e note que

$$g_d(x,z) = g(d(x,z)) \leq g(d(x,y) + d(y,z)) \leq g(d(x,y)) + g(d(y,z)) = g_d(x,z) + g_d(z,y),$$

onde, na primeira desigualdade, utilizamos a desigualdade triangular para d e a hipótese que g é crescente e, na segunda desigualdade, a subaditividade da g.

Etapa 2: para todo $x \in \mathbb{M}$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_d(x,\delta) \subset B_{g_d}(x,\varepsilon).$$

[3] g é dita subaditiva se $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$ para todo $x,y \in [0,\infty)$.

De fato, como g é uma aplicação contínua em 0 e $g^{-1}\{0\} = \{0\}$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 \leq a < \delta \Rightarrow 0 \leq g(a) < \varepsilon.$$

Segue disso que, para $y \in \mathbb{M}$

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow g(d(x,y)) < \varepsilon \Rightarrow g_d(x,y) < \varepsilon.$$

Etapa 3: para quaisquer $a, b \geq 0$, vale que

$$g(b) < \frac{g(a)}{2} \Rightarrow b < \frac{a}{2}.$$

Sejam $a, b \geq 0$ tais que $a \leq 2b$. Como g é crescente e subaditiva, temos que

$$g(a) \leq g(2b) = g(b+b) \leq 2g(b),$$

e, portanto, segue que

$$a \leq 2b \Rightarrow g(a) \leq 2g(b).$$

Etapa 4: para todo $x \in \mathbb{M}$ e todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_{g_d}(x,\delta) \subset B_d(x,\varepsilon).$$

Note que, da Etapa 3, temos que

$$g_d(x,y) = g(d(x,y)) < \frac{g(\varepsilon)}{2} \Rightarrow d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Para findar a etapa basta tomar $\delta = \frac{g(\varepsilon)}{2}$.

Segue dos quatro etapas que g_d é uma métrica em $\mathbb{M}$ e $g_d \sim d$. □

Para provar os resultados seguintes, utilizaremos o próximo lema técnico.

Lema 6.2.3. *Seja $n > 0$ um inteiro. Para qualquer métrica d em $\mathbb{M}$ e uma aplicação crescente $g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, temos que*

$$(g_d)_n(x,y) = g(d_n(x,y))$$

para todo $x, y \in \mathbb{M}$.

Demonstração. Dado $n \in \mathbb{N}$, temos que para todo $x, y \in \mathbb{M}$ vale

$$\begin{aligned}(g_d)_n(x,y) &= \max\{g_d(x,y), g_d(f(x),f(y))\ldots, g_d(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y))\}\\ &= \max\{g(d(x,y)), g(d(f(x),f(y)))\ldots, g(d(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y)))\}\\ &= g\left(\max\{d(x,y), d(f(x),f(y))\ldots, d(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y))\}\right) = g(d_n(x,y)),\end{aligned}$$

que prova o lema. □

A proposição a seguir trata de mostrar que a dimensão de Hausdorff média de com respeito a métrica g_d é igual a dimensão de Hausdorff com respeito a d.

Proposição 6.2.4. *Para qualquer $g \in \mathcal{A}[0,\infty)$, temos que*

$$\mathrm{mdim}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, g_d) = \mathrm{mdim}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d).$$

Portanto, para qualquer $\tilde{d}$ em $\mathbb{M}$ uniformemente equivalente d, temos que

$$\mathrm{mdim}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, g_{\tilde{d}}) = \mathrm{mdim}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d).$$

Demonstração. Segue do Lema 6.2.3 que $(g_d)_n(x,y) = g(d_n(x,y))$ para todo $x, y \in \mathbb{M}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então temos, para $s > 0$ e $\varepsilon > 0$, que

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^s_\varepsilon(\mathbb{M}, (g_d)_n) &= \inf\left\{\Sigma_{k=1}^\infty (\mathrm{diam}_{(g_d)_n} E_k)^s \colon \mathbb{M} = \cup_{k=1}^\infty E_k \text{ com } \mathrm{diam}_{(g_d)_n} E_k < \varepsilon, \forall k \geq 1\right\} \\
&= \inf\{\Sigma_{k=1}^\infty (g(\mathrm{diam}_{d_n} E_k))^s \colon \mathbb{M} = \cup_{k=1}^\infty E_k \text{ com } (g(\mathrm{diam}_{d_n} E_k)) < \varepsilon, \forall k \geq 1\} \\
&= \inf\{\Sigma_{k=1}^\infty (\mathrm{diam}_{d_n} E_k)^s \colon \mathbb{M} = \cup_{k=1}^\infty E_k \text{ com } \mathrm{diam}_{d_n} E_k < \varepsilon, \forall k \geq 1\} \\
&= \mathrm{H}^s_\varepsilon(\mathbb{M}, d_n),
\end{aligned}$$

isto é, para todo $s > 0$ e $\varepsilon > 0$, vale

$$\mathrm{H}^s_\varepsilon(\mathbb{M}, (g_d)_n) = \mathrm{H}^s_\varepsilon(\mathbb{M}, d_n). \tag{6.5}$$

Tomando os respectivos limites na equação (6.5), segue a primeira parte da proposição. A segunda parte da proposição segue da primeira e da Proposição 6.1.5. □

Segue diretamente da Proposição 6.2.4 o seguinte corolário:

Corolário 6.2.5. *A aplicação*

$$\mathrm{mdim}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f) \colon \mathcal{A}_d(\mathbb{M}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

é constante.

A partir de agora, trataremos da dimensão média métrica com respeito as métricas em $\mathcal{A}_d(\mathbb{M})$. Desse modo, para qualquer aplicação contínua $h \colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, consideraremos

$$k_m(h) = \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \frac{|\log(h(\varepsilon))|}{|\log(\varepsilon)|} \quad \text{e} \quad k_M(h) = \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \frac{|\log(h(\varepsilon))|}{|\log(\varepsilon)|}.$$

Proposição 6.2.6. *Seja $g \in \mathcal{A}[0,\infty)$ e defina $g_d(x,y) = g \circ d(x,y)$, para todo $x, y \in \mathbb{M}$. São válidas as seguintes igualdades:*

i) $\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d) = k_M(g)\, \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, g_d)$.

ii) $\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d) = k_m(g)\ \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, g_d)$.

Demonstração. Provaremos, primeiramente, que

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d) \geq k_M(g)\ \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, \tilde{d}) \quad \text{e} \quad \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d) \geq k_m(g)\ \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, \tilde{d}).$$

Fixemos $\varepsilon > 0$ e um inteiro $n > 0$. Se $d_n(x, y) < \varepsilon$, então segue do Lema 6.2.3 que $(g_d)_n(x, y) = g(d_n(x, y)) < g(\varepsilon)$. Segue, portanto, que para qualquer conjunto (n, f, ε)-gerador com respeito a métrica d é, também, um conjunto $(n, f, g(\varepsilon))$-gerador com respeito a métrica g_d. Desse fato obtemos que

$$\mathrm{span}_d(n, f, \varepsilon) \geq \mathrm{span}_{g_d}(n, f, g(\varepsilon)).$$

Portanto, sendo g contínua e $g(0) = 0$, temos que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} g(\varepsilon) = g(0) = 0$ e dessa forma

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d) &= \limsup_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{\log \mathrm{span}_d(n, f, \varepsilon)}{n|\log(\varepsilon)|} \\
&= \limsup_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{\log \mathrm{span}_d(n, f, \varepsilon)}{n|\log(\varepsilon)|} \frac{|\log(g(\varepsilon))|}{|\log(g(\varepsilon))|} \\
&\geq \limsup_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{\log \mathrm{span}_{g_d}(n, f, g(\varepsilon))}{n|\log(g(\varepsilon))|} \frac{|\log(g(\varepsilon))|}{|\log(\varepsilon)|} \\
&= k_M(g)\ \limsup_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{\log \mathrm{span}_{g_d}(n, f, g(\varepsilon))}{n|\log(g(\varepsilon))|} \\
&= k_M(g)\ \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, g_d).
\end{aligned}$$

Analogamente é possível provar que $\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d) \geq k_m(g)\ \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, g_d)$.

Para provar as desigualdades contrárias, fixemos $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$. Seja A um conjunto (n, f, ε)-separado com respeito a métrica d. Assim, para quaisquer distintos $x, y \in A$, temos $d_n(x, y) = \max_{0\leq j<n} \{d(f^j(x), f^j(y))\} > \varepsilon$, e, portanto, existe $j_0 \in \{0, \ldots, n-1\}$ tal que $d(f^{j_0}(x), f^{j_0}(y)) > \varepsilon$. Sendo g crescente, segue que $g\left(d(f^{j_0}(x), f^{j_0}(y))\right) > g(\varepsilon)$ e, portanto,

$$g_{d_n}(x, y) = \max_{0\leq j<n} \{g\left(d(f^j(x), f^j(y))\right)\} > g(\varepsilon).$$

Temos, assim, que A é um subconjunto $(n, f, g(\varepsilon))$-separado com respeito a g_d. Assim sendo, temos que

$$\mathrm{sep}_d(n, f, \varepsilon) \leq \mathrm{sep}_{g_d}(n, f, g(\varepsilon))$$

e, portanto,

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d) &= \limsup_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{sep}_d(n, f, \varepsilon)}{n|\log(\varepsilon)|} \\
&= \limsup_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{sep}_d(n, f, \varepsilon)}{n|\log(\varepsilon)|} \frac{|\log(g(\varepsilon))|}{|\log(g(\varepsilon))|} \\
&\leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{sep}_{g_d}(n, f, g(\varepsilon))}{n|\log(g(\varepsilon))|} \frac{|\log(g(\varepsilon))|}{|\log(\varepsilon)|} \\
&= k_M(g)\ \limsup_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{sep}_{g_d}(n, f, g(\varepsilon))}{n|\log(g(\varepsilon))|} \\
&= k_M(g)\ \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, g_d).
\end{aligned}
$$

Analogamente é possível provar que $\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d) \leq k_m(g)\ \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, g_d)$. $\square$

Considere, agora, uma aplicação contínua $f : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ com dimensão média positiva e tal que

$$\mathrm{mdim}(\mathbb{M}, f) = \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d) = \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d) = \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d) = \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d).$$

Segue da Proposição 6.2.6 que para qualquer $g \in \mathcal{A}[0, \infty)$ que

$$\mathrm{mdim}(\mathbb{M}, f) = k_m(g)\ \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, g_d) = k_M(g)\ \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, g_d).$$

Lindenstrauss e Weiss (2000) mostraram que para qualquer $\mathbf{d}$ métrica em $\mathbb{M}$ compatível com a topologia vale

$$\mathrm{mdim}(\mathbb{M}, f) \leq \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, \mathbf{d})$$

e, portanto, temos que

$$0 < k(g) := k_m(g) = k_M(g) \leq 1$$

para qualquer $g \in \mathcal{A}[0, \infty)$. Sumarizamos os argumentos anteriores no seguinte lema:

Lema 6.2.7. *Para qualquer $g \in \mathcal{A}[0, \infty)$, o limite $k(g) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{|\log(g(\varepsilon))|}{|\log(\varepsilon)|}$ existe e pertence ao intervalo* $(0, 1]$.

O Teorema a seguir mostra que, assim como acontece com a dimensão de Hausdorff média, a dimensão média métrica é contínua quanto a dependência da métrica em $\mathcal{A}_d(\mathbb{M})$. Salientamos que a métrica utilizada entre duas aplicações de $\mathcal{A}[0, \infty)$ é a métrica do supremo.

Teorema 6.2.8. *A aplicação*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f) \colon \mathcal{A}_d(\mathbb{M}) &\to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\
g_d &\mapsto \mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, g_d)
\end{aligned}
$$

é contínua.

Demonstração. A continuidade da aplicação $\text{mdim}_{\mathbb{M}}(\mathbb{M}, f)\colon \mathcal{A}_d(\mathbb{M}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ segue da Proposição 6.2.6, uma vez que mostramos no Lema 6.2.7 que $k(g) > 0$ para qualquer $g \in \mathcal{A}(\mathbb{M})$. □

A seguir, trazemos alguns exemplos interessantes de métricas em $\mathcal{A}_d(\mathbb{M})$.

Exemplo 6.2.9. *Tome a métrica* $d'(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ *para todo* $x, y \in \mathbb{M}$. *Neste caso,* $g(x) = \min\{1, x\}$ *e portanto*

$$k_m(g) = k_M(g) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|\log(g(x))|}{|\log(x)|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|\log(x)|}{|\log(x)|} = 1.$$

Exemplo 6.2.10. *Agora, considere a métrica* $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ *para todo* $x, y \in \mathbb{M}$. *Neste caso,* $g(x) = \frac{x}{1+x}$ *e portanto*

$$k_m(g) = k_M(g) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|\log(g(x))|}{|\log(x)|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|\log\left(\frac{x}{1+x}\right)|}{|\log(x)|} = 1.$$

Exemplo 6.2.11. *Fixe* $a \in (0,1]$. *Considere a aplicação* $g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *definida por* $g(x) = x^a$ *para todo* $x \in [0,\infty)$. *Afirmamos que* $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$ *para todo* $x, y \geq 0$. *De fato, precisamos mostrar que* $(x+y)^a \leq x^a + y^a$. *Este fato é claramente válido para* $x = 0$. *Seja, então* $x > 0$. *Então*

$$x^a \left(1 + \frac{y}{x}\right)^a \leq x^a \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^a\right) \Rightarrow \left(1 + \frac{y}{x}\right)^a \leq 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^a$$

Denotando $u = \frac{y}{x}$, *precisamos mostrar que a seguinte inequação* $f(u) = 1 + u^a - (1+u)^a \geq 0$. *Note que* $f(0) = 0$. *Temos, também, que*

$$f'(u) = au^{a-1} - a(1+u)^{a-1} = \frac{a}{u^{1-a}} - \frac{a}{(1+u)^{1-a}} > 0$$

para qualquer $u > 0$ *(e* $f'(u)$ *tende a* $+\infty$ *quando* $u \to 0$*), que prova que* f *cresce com* u.

Tomando, então, $g_d(x,y) = d(x,y)^a$, *temos que* $k_m(g) = k_M(g) = a$ *e, portanto,*

$$mdim_M(\mathbb{M}, f, g_d) = \frac{mdim_M(\mathbb{M}, f, d)}{a}.$$

Exemplo 6.2.12. *Considere* $g(x) = \log(1+x)$. *Como* $(1+x+y) \leq 1+x+y+xy$, *temos que*

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \log(1+x+y) \\ &\leq \log((1+x)(1+y)) \\ &= \log(1+x) + \log(1+y) \\ &= g(x) + g(y). \end{aligned}$$

Portanto, g é subaditiva. Note que se g_1 e $g_2 \in \mathcal{A}[0,\infty)$, então $g_1 \circ g_2 \in \mathcal{A}[0,\infty)$. Considerando $g_1(x) = x^a$, para $a \in (0,1)$, e $g_2(x) = \log(1+x)$ então a composição $h(x) = g_2 \circ g_1(x) = \log(1+x^a)$ pertence a $\mathcal{A}[0,\infty)$. É possível provar que $k_m(h) = k_M(h) = a$. Portanto,

$$mdim_M(\mathbb{M}, f, h_d) = \frac{mdim_M(\mathbb{M}, f, d)}{a}.$$

A proposição a seguir providencia algumas informações sobre a imagem da aplicação dimensão média métrica.

Proposição 6.2.13. *Suponha que* $\mathrm{mdim_M}(\mathbb{M}, f, d) > 0$. *Os seguintes itens são válidos:*

i) a imagem da aplicação

$$\mathrm{mdim_M}(\mathbb{M}, f)\colon \mathcal{A}_d(\mathbb{M}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

contém o intervalo $[\mathrm{mdim_M}(\mathbb{M}, f, d), \infty)$*;*

ii) $\sup_{d' \in \mathbb{M}(\tau)} \mathrm{mdim_M}(\mathbb{M}, f, d') = \infty$;

iii) para qualquer $g \in \mathcal{A}(\mathbb{M})$ e qualquer métrica $\mathbf{d}$ em $\mathbb{M}$ uniformemente equivalente a d, vale que

$$\mathrm{mdim_H}(\mathbb{M}, f, d) \leq \mathrm{mdim_M}(\mathbb{M}, f, g_{\mathbf{d}}).$$

Demonstração. Os itens i) e ii) são decorrentes do Exemplo 6.2.11 e da Proposição 6.2.4. Passamos, portanto, a prova do item iii). Da Proposição 6.1.6 e da Proposição 6.2.4 segue que para qualquer métrica $\mathbf{d}$ em $\mathbb{M}$ que é uniformemente equivalente a d e para qualquer $g \in \mathcal{A}(\mathbb{M})$, vale

$$\mathrm{mdim_H}(\mathbb{M}, f, \mathbf{d}) = \mathrm{mdim_H}(\mathbb{M}, f, d) = \mathrm{mdim_H}(\mathbb{M}, f, g_{\mathbf{d}}).$$

Uma vez que a inequação $\mathrm{mdim_H}(\mathbb{M}, f, g_{\mathbf{d}}) \leq \mathrm{mdim_M}(\mathbb{M}, f, g_{\mathbf{d}})$ é sempre válida, temos

$$\mathrm{mdim_H}(\mathbb{M}, f, \mathbf{d}) \leq \mathrm{mdim_M}(\mathbb{M}, f, g_{\mathbf{d}}),$$

provando, assim, o item iii). □

Se $\mathbb{K}$ é uma variedade riemaniana compacta, então o conjunto consistindo das aplicações contínuas cuja dimensão média métrica é positiva é denso em $C^0(\mathbb{K})$. Portanto, para qualquer f em um subconjunto denso $C^0(\mathbb{M})$, temos que

$$\sup_{d' \in \mathbb{M}(\tau)} \mathrm{mdim_M}(\mathbb{M}, f, d') = \infty.$$

Corolário 6.2.14. *Suponha que* $\dim_{\mathrm{B}}(\mathbb{M}, d) > 0$. *Então, para qualquer* $t \in [\dim_{\mathrm{B}}(\mathbb{M}, d), \infty)$, *existe uma métrica* $d' \in \mathbb{M}(\tau)$ *tal que* $\dim_{\mathrm{B}}(\mathbb{M}, d') = t$.

Demonstração. Como $\mathrm{mdim_M}(\mathbb{M}^{\mathbb{Z}}, \sigma, \tilde{d}) = \dim_{\mathrm{B}}(\mathbb{M}, d)$, temos, para qualquer $a \in (0,1]$, que

$$\mathrm{mdim_M}(\mathbb{M}^{\mathbb{Z}}, \sigma, \tilde{d}^a) = \frac{\mathrm{mdim_M}(\mathbb{M}^{\mathbb{Z}}, \sigma, \tilde{d})}{a} = \frac{\dim_{\mathrm{B}}(\mathbb{M}, d)}{a},$$

o que mostra o corolário. □

6.3 Métricas Induzidas por Homeomorfismos

Para qualquer homeomorfismo $h\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$, no espaço métrico compacto $(\mathbb{M}, d)$, podemos considerar uma nova métrica induzida por h da definindo $d_h\colon \mathbb{M} \times \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ tal que $d_h(x,y) = d(h(x), h(y))$, para todo $x, y \in \mathbb{M}$. Sendo h homeomorfismo e d métrica, é possível mostrar que, de fato, d_h define uma métrica em $\mathbb{M}$ e, ainda, $d_h \in \mathbb{M}(\tau)$.

Lindenstrauss e Weiss (2000) comentam que a dimensão média métrica não é um invariante quanto a conjugação topológica, visto sua dependência quanto a métrica utilizada no espaço. Por outro lado, se $g\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ e $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ aplicações contínuas são tais que existe um homeomorfismo $h : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ satisfazendo $g(x) = h \circ f \circ h^{-1}(x)$, para todo $x \in \mathbb{M}$, temos que

$$\mathrm{mdim_M}(\mathbb{M}, f, d_h) = \mathrm{mdim_M}(\mathbb{M}, h \circ f \circ h^{-1}, d) = \mathrm{mdim_M}(\mathbb{M}, g, d)$$

e

$$\mathrm{mdim_H}(\mathbb{M}, f, d_h) = \mathrm{mdim_H}(\mathbb{M}, h \circ f \circ h^{-1}, d) = \mathrm{mdim_H}(\mathbb{M}, g, d),$$

uma vez que $h\colon (\mathbb{M}, d_h) \to (\mathbb{M}, d)$ é isometria.

Sumarizamos os parágrafos anteriores no seguinte resultado:

Proposição 6.3.1. *Sejam $g, f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ aplicações contínuas definidas no espaço métrico compacto $(\mathbb{M}, d)$. Suponha que exista $h\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ homeomorfismo tal que $g \circ h = h \circ f$. Então existe uma métrica $\boldsymbol{d}$ em $\mathbb{M}$, equivalente a d, tal que*

$$\mathrm{mdim_M}(\mathbb{M}, f, \boldsymbol{d}) = \mathrm{mdim_M}(\mathbb{M}, g, d)$$

e

$$\mathrm{mdim_H}(\mathbb{M}, f, \boldsymbol{d}) = \mathrm{mdim_H}(\mathbb{M}, g, d).$$

Note que se h é lipschitz com respeito a métrica d, então seguem das Proposições 6.1.5 e 6.1.6 que

$$\mathrm{mdim_M}(\mathbb{M}, f, d_h) \leq \mathrm{mdim_M}(\mathbb{M}, f, d) \quad \text{e} \quad \mathrm{mdim_H}(\mathbb{M}, f, d_h) \leq \mathrm{mdim_H}(\mathbb{M}, f, d).$$

Observe que se h é bilipshitz com respeito a d, isto é, se existe $k > 0$ tal que

$$\frac{1}{k} d(x,y) \leq d(h(x), h(y)) \leq k d(x,y), \forall x, y \in \mathbb{M},$$

então $d_h \sim_u d$ donde, pelas Proposições 6.1.5 e 6.1.6, segue que

$$\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d_h) = \mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d) \quad \text{e} \quad \mathrm{mdim}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d_h) = \mathrm{mdim}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d).$$

Assim sendo, tomando o conjunto

$$\mathrm{BL}(\mathbb{M}, d) = \{h\colon h \text{ é um homeomorfismo bilipschitz }\},$$

temos o seguinte resultado:

Proposição 6.3.2. *Seja*

$$\mathrm{BLX}(\mathbb{M}, d) = \{d_h\colon d_h(\cdot,\cdot) = d(h(\cdot), h(\cdot)) \text{ para } h \in \mathrm{BL}(\mathbb{M}, d)\}.$$

Então, as aplicações

$$\mathrm{mdim}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f)\colon \mathrm{BLX}(\mathbb{M}, d) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

e

$$\mathrm{mdim}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f)\colon \mathrm{BLX}(\mathbb{M}, d) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

são constantes.

6.4 Métricas como Combinação Convexa

Como é bem conhecido, o espaço das métricas sobre um conjunto $\mathbb{M}$ é um espaço convexo, isso é, dado quaisquer métricas d_1, d_2 e $t \in (0,1)$, a aplicação $d_t\colon \mathbb{M}\times\mathbb{M} \to [0,\infty]$ definida por

$$d_t(x,y) = td_1(x,y) + (1-t)d_2(x,y),$$

para todo $x, y \in \mathbb{M}$, também é uma métrica em $\mathbb{M}$. Ainda, se d_1 e d_2 são métricas em $\mathbb{M}(\tau)$, então d_t também é uma métrica em $\mathbb{M}(\tau)$.

Podemos, então, nos questionar o seguinte: qual a relação entre a dimensão média métrica e da dimensão de Hausdorff média com respeito a métrica d_t em relação as dimensão média métrica e dimensão de Hausdorff média com respeito a d_1 e d_2? Responder essa pergunta é o que direciona a explanação nesta subseção.

Dada um $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $d_{t,n}, d_{1,n}$ e $d_{2,n}$ as n-métricas dinâmicas em $\mathbb{M}$ com respeito a d_t, d_1 e d_2, respectivamente. O lema a seguir relaciona essas n-métricas.

Lema 6.4.1. *Para um qualquer fixo $n \in \mathbb{N}$, considere as n-métricas dinâmicas $d_{t,n}, d_{1,n}$ e $d_{2,n}$ como definidas anteriormente. Então, vale*

$$\max\{td_{1,n}(x,y), (1-t)d_{2,n}(x,y)\} \leq d_{t,n}(x,y) \leq td_{1,n}(x,y) + (1-t)d_{2,n}(x,y),$$

para todo $x, y \in \mathbb{M}$.

Demonstração. Verificamos, primeiramente, que $td_{1,n}(x,y) \leq d_{t,n}(x,y)$, para todo $x, y \in \mathbb{M}$. Note que, da definição decorre que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{M}$, vale

$$td_{1,n}(x,y) = t \max_{k=0,\dots,n-1} \left\{ d_1(f^k x, f^k y) \right\} = td_1(f^l x, f^l y)$$

para algum $l \in \{0, \dots, n-1\}$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned} td_{1,n}(x,y) &= td_1(f^l x, f^l y) \\ &\leq td_1(f^l x, f^l y) + (1-t)d_2(f^l x, f^l y) \\ &\leq \max_{k=0,\dots,n-1} \left\{ td_1(f^k x, f^k y) + (1-t)d_2(f^k x, f^k y) \right\} \\ &= \max_{k=0,\dots,n-1} \left\{ d_t(f^k x, f^k y) \right\} \\ &= d_{t,n}(x,y), \end{aligned}$$

mostrando o que queríamos inicialmente. A demonstração que $(1-t)d_{2,n}(x,y) \leq d_{t,n}(x,y)$ é realizada de forma similar. Para finalizarmos, basta notar que a segunda desigualdade que trata o lema é direta da definição de $d_{t,n}$. □

A seguir, mostramos que a dimensão média métrica inferior (superior) com relação a métrica d_t é maior ou igual ao máximo entre as dimensão média métrica inferior (superior) com relação as métricas d_1 e d_2 que a definem. O mesmo ocorre com a dimensão de Hausdorff média.

Proposição 6.4.2. *Sejam d_1, d_2 métricas em $\mathbb{M}(\tau)$. Para $t \in [1, \infty)$ inteiro, considere a métrica d_t como definida anteriormente. Temos que:*

i) $\max \left\{ \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d_1), \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d_2) \right\} \leq \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d_t)$.

ii) $\max \left\{ \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d_1), \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d_2) \right\} \leq \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d_t)$.

iii) $\max \left\{ \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d_1), \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d_2) \right\} \leq \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d_t)$.

iv) $\max \left\{ \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d_1), \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d_2) \right\} \leq \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d_t)$.

Demonstração. A prova da Proposição segue diretamente do Lema 6.4.1 e das Proposições 6.1.6 e 6.1.5. □

O corolário a seguir dá uma cota por cima para a dimensão média métrica inferior (superior) e para dimensão de Hausdorff média com respeito a d_t, quando a métrica d_2 é maior ou igual a d_1.

Corolário 6.4.3. *Sejam d_1, d_2 métricas em $\mathbb{M}$ que definem uma mesma topologia. Para $t \in (0,1)$, considere a métrica convexa d_t com respeito a d_1 e d_2, como anteriormente definido. Se existe $c > 0$ tal que $d_1(x,y) \leq c\, d_2(x,y)$ para todo $x, y \in \mathbb{M}$, então*

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d_2) = \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d_t) \text{ e } \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d_2) = \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d_t)$$

e

$$\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d_2) = \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d_t) \text{ e } \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d_2) = \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d_t),$$

para $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ *contínua.*

Demonstração. Segue da Proposição 6.4.2 que

$$\overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d_2) \leq \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d_t) \text{ e } \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d_2) \leq \overline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d_t)$$

e

$$\underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d_2) \leq \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{M}}(\mathbb{M}, f, d_t) \text{ e } \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d_2) \leq \underline{\mathrm{mdim}}_{\mathrm{H}}(\mathbb{M}, f, d_t).$$

A inequação contrária segue notando que

$$\begin{aligned} d_t(x, y) &= t d_1(x, y) + (1 - t) d_2(x, y) \\ &\leq t c d_2(x, y) + (1 - t) d_2(x, y) \\ &= (tc + 1 - t) d_2(x, y), \end{aligned}$$

para todo $x, y \in \mathbb{M}$, e utilizando as Proposições 6.1.6 e 6.1.5. □

REFERÊNCIAS

Acevedo, Jeovanny de Jesus Muentes and Carlos Rafael Payares Guevara. Properties of mean dimension and metric mean dimension coming from the topological entropy. **arXiv:1905.13299v3**, preprint, 2019.

Acevedo, Jeovanny de Jesus Muentes. Density of continuous maps with positive metric mean dimension. **arXiv:2010.14074v1**, preprint, 2020.

Bartoll, Salud; Martínez-Giménez, Félix; Peris, Alfredo. The specification property for backward shifts. J. Difference Equ. Appl. 18 (2012), no. 4, 599–605.

Bartoll, Salud; Martínez-Giménez, Félix; Peris, Alfredo. Operators with the specification property. J. Math. Anal. Appl. 436 (2016), no. 1, 478–488.

Bartoll, S.; Martínez-Giménez, F.; Peris, A.; Rodenas, F. The specification property for C0-semigroups. Mediterr. J. Math. 16 (2019), no. 3, Paper No. 80, 12 pp.

Biś, Andrzej. An analogue of the variational principle for group and pseudogroup actions. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 63 (2013), no. 3, 839–863.

Bowen, Rufus. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 153 (1971), 401–414.

Brin, Michael; Stuck, Garrett. Introduction to dynamical systems. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. xii+240 pp. ISBN: 0-521-80841-3.

Carvalho, M.; Rodrigues, F. B.; Varandas, P. Generic homeomorphisms have full metric mean dimension. **arXiv:1910.07376v1**, preprint, 2019.

Coornaert, Michel. Topological dimension and dynamical systems. Translated and revised from the 2005 French original. Universitext. Springer, Cham, 2015. xvi+233 pp. ISBN: 978-3-319-19793-7; 978-3-319-19794-4

Falconer, Kenneth. Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. Third edition. John Wiley and Sons, Ltd., Chichester, 2014. xxx+368 pp. ISBN:978-1-119-94239-9.

Figueiredo, F. R. de. Variações sobre o shift de Haydn e propriedades do shift em alfabetos gerais. 2019. 44f. Tese (Doutorado em Matemática)- UFRGS: Porto Alegre, 2019 - https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/204844.

Gromov, Misha. Topological invariants of dynamical systems and spaces of holomorphic maps. I. Math. Phys. Anal. Geom. 2 (1999), no. 4, 323–415.

Gutman, Yonatan; Tsukamoto, Masaki. Embedding minimal dynamical systems into Hilbert cubes. Invent. Math. 221 (2020), no. 1, 113–166.

Katok, Anatole; Hasselblatt, Boris. Introduction to the modern theory of dynamical systems. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. xviii+802 pp. ISBN: 0-521-34187-6.

Kolyada, Sergiĭ; Snoha, Ľubomír. Topological entropy of nonautonomous dynamical systems. Random Comput. Dynam. 4 (1996), no. 2-3, 205–233

Lindenstrauss, Elon; Weiss, Benjamin. Mean topological dimension. Israel J. Math. 115 (2000), 1–24.

Lindenstrauss, Elon. Mean dimension, small entropy factors and an embedding theorem. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 89 (1999), 227–262 (2000).

Lindenstrauss, Elon; Tsukamoto, Masaki. Mean dimension and an embedding problem: an example. Israel J. Math. 199 (2014), no. 2, 573–584.

Lindenstrauss, Elon; Tsukamoto, Masaki. Double variational principle for mean dimension. Geom. Funct. Anal. 29 (2019), no. 4, 1048–1109.

Muir, Stephen; Urbański, Mariusz. Thermodynamic formalism for a modified shift map. Stoch. Dyn. 14 (2014), no. 2, 1350020, 38 pp.

Oprocha, Piotr Specification properties and dense distributional chaos. Discrete Contin. Dyn. Syst. 17 (2007), no. 4, 821–833.

Rodrigues, Fagner B.; Varandas, Paulo. Specification and thermodynamical properties of semigroup actions. J. Math. Phys. 57 (2016), no. 5, 052704, 27 pp.

Rodrigues, F.B., Acevedo, J.M. Mean Dimension and Metric Mean Dimension for Non-autonomous Dynamical Systems. J Dyn Control Syst (2021).

Sarkooh, Javad Nazarian; Ghane, F. H. Specification and thermodynamic properties of topological time-dependent dynamical systems. Qual. Theory Dyn. Syst. 18 (2019), no. 3, 1161–1190.

Sigmund, Karl. On dynamical systems with the specification property. Trans. Amer. Math. Soc. 190 (1974), 285–299.

Velozo, A., Velozo, R. Rate distortion theory, metric mean dimension and measure theoretic entropy. **arXiv:1707.05762v1**, preprint, 2017.

Yano, Koichi. A remark on the topological entropy of homeomorphisms. Invent. Math. 59 (1980), no. 3, 215–220.