

## Esquemas de Quadratura na Esfera Unitária: Uma Aplicação em Tomografia Ótica

Tiago Gusberti Cortelini<sup>1</sup>  
Liliane Basso Barichello<sup>2</sup>  
IME/UFRGS, Porto Alegre, RS

A tomografia ótica (OT) é uma forma de imagem médica usada no diagnóstico de doenças que alteram as propriedades óticas dos tecidos biológicos. Como exemplo temos o monitoramento da oxigenação do sangue no cérebro [1]. Propriedades importantes a serem observadas são a absorção e o espalhamento da luz no tecido. Em comparação com métodos clássicos que utilizam comprimentos de onda curtos, a OT utiliza fótons com comprimentos de onda próximos à luz visível e às ondas infravermelhas [1].

Utilizamos como modelo matemático fundamental a equação de transferência radiativa [1]

$$\omega \cdot \nabla \Psi(\mathbf{r}, \omega) + (\mu_a + \mu_s) \Psi(\mathbf{r}, \omega) = S(\mathbf{r}, \omega) + \mu_s \int_{4\pi} p(\omega, \omega') \Psi(\mathbf{r}, \omega') d\omega', \quad (1)$$

de onde avaliamos a radiância angular  $\Psi$  em um ponto  $\mathbf{r} = (x, y)$  em uma direção  $\omega$  na esfera unitária. O termo  $S(\mathbf{r}, \omega)$  representa fontes de radiância angular. Uma grandeza básica de interesse em problemas de tomografia é a fluência. A fluência em cada ponto  $\phi(x, y)$  é dada pela soma de todas radiâncias angulares naquele ponto, e sua unidade é  $Wcm^{-2}sr^{-1}$ . A função de fase de espalhamento  $p(\omega, \omega')$  para os problemas de ótica biomédica é a Função de Henyey-Greenstein, que trabalha na faixa de fator de anisotropia  $-1 < g < 1$ , coincidente com os valores de  $g$  para tecidos do corpo humano. Os termos  $\mu_a$  e  $\mu_s$  representam os coeficientes de absorção e espalhamento, respectivamente.

A equação (1) tem solução analítica complexa e neste trabalho optamos por aplicar métodos numéricos para realizarmos as simulações, seguindo [1]. Utilizamos a discretização por diferenças finitas na variável espacial, com o esquema *upwind-difference*, em conjunto com o método de ordenadas discretas na variável angular. A equação (2) é avaliada no ponto  $(i, j)$  e em  $\xi_k = \cos(\omega_k) > 0$  e  $\eta_k = \sin(\omega_k) > 0$ , onde  $\omega_k$  representa uma direção (ordenada) discreta:

$$\Psi_{k,i,j}^{z+1} = \frac{S_{k,i,j} + \mu_s \sum_{k'=1}^K a_{k'} p_{k,k'} \Psi_{k',i,j}^z + \left(\frac{\xi_k}{\Delta x}\right) \Psi_{k,i-1,j}^{z+1} + \left(\frac{\eta_k}{\Delta y}\right) \Psi_{k,i,j-1}^{z+1}}{\frac{\xi_k}{\Delta x} + \frac{\eta_k}{\Delta y} + (\mu_a + \mu_s)}. \quad (2)$$

Dessa forma, a fluência  $\phi(\mathbf{r}) = \phi(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^K a_k \Psi_{k,i,j}$ , onde  $a_k$  é o peso de cada ordenada, e varia de acordo com o esquema de quadratura escolhido, com  $K$  nós.

Para o método de ordenadas discretas, usamos uma abordagem distinta de [1]. Enquanto a referência utiliza a regra trapezoidal estendida como esquema de quadratura, neste trabalho utilizamos o esquema de quadratura simétrica de nível  $LQ_N$  [2], que resulta em  $K = N(N+2)/8$

<sup>1</sup>tiagogusbertic@gmail.com

<sup>2</sup>lbaric@ufrgs.br

ordenadas discretas por quadrante, e o esquema de quadratura Legendre-Chebyshev Quadrangular  $P_N T_N$  [3], que resulta em  $K = N^2/4$  ordenadas discretas por quadrante. Dessa forma temos a possibilidade de estender a solução do problema para ordens  $N$  superiores.

A partir de um experimento inicial com um tecido homogêneo de resina epoxi, com área de  $3\text{cm} \times 3\text{cm}$ , a referência [1] fornece, através de uma simulação de Monte Carlo, os coeficientes ideais para o material adotado. Para este caso,  $\mu_a = 0.35\text{cm}^{-1}$ ,  $\mu_s = 58\text{cm}^{-1}$  e  $g = 0.8$ . O passo seguinte foi construir uma malha sobre o tecido. Utilizamos o método de diferenças finitas com  $\Delta x = \Delta y = 3/180\text{cm}$ , de modo a ser formada uma malha com  $181 \times 181$  pontos. As quadraturas utilizadas foram  $LQ_{16}$  e  $P_{20}T_{20}$ , com um total de 144 e 400 ordenadas discretas respectivamente. Como o experimento da referência utiliza um receptor com abertura de  $45^\circ$ , então o cálculo da fluência nas fronteiras do tecido foi feito apenas em 20 direções para  $LQ_{16}$  e em 40 direções para  $P_{20}T_{20}$ . Com esses dados, construímos um problema com 3 fontes pontuais e colimadas ao longo do eixo  $x$ , nas posições  $A = 1.5\text{cm}$ ,  $B = 0.9\text{cm}$  e  $C = 0.3\text{cm}$ . Essas fontes simulam um laser de diodo entrando no tecido. Implementamos as simulações utilizando o software MATLAB. A implementação foi feita de maneira que a equação (2) fosse avaliada através dos métodos de Gauss-Seidel e Sobre-Relaxação [1]. Obtivemos os dados da fluência ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  opostos a fonte luminosa. Os valores preliminares obtidos resultaram em comparação satisfatória reproduzindo o padrão dos gráficos disponíveis em [1]. Como projeto futuro visamos aprimorar a modelagem das condições de contorno, através da introdução da Fórmula de Fresnel [1], a fim de simular mais precisamente o modelo dado em [1].

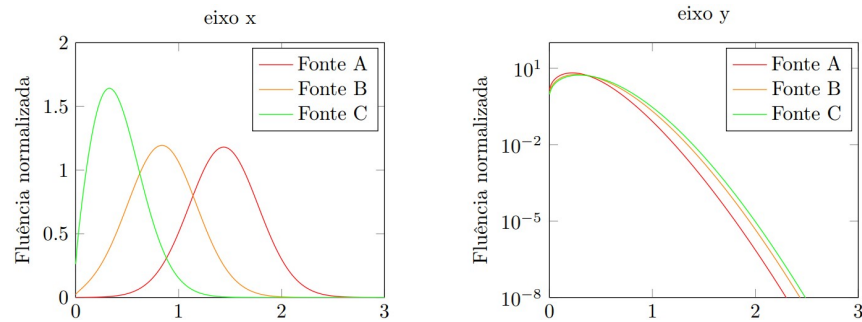


Figura 1: Simulação com  $LQ_{16}$  (Fonte: Os Autores).

## Agradecimentos

Os autores agradecem apoio ao CNPq e FAPERGS (PROBIC e Proc. 19/2551-0001766-9).

## Referências

- [1] A D Klose et al. "Optical tomography using the time-independent equation of radiative transfer — Part 1: forward model". Em: **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer** 72 (2002), pp. 691–713.
- [2] E E Lewis e W F Muller. **Computational Methods of Neutron Transport**. John Wiley & Sons, Inc., 1984.
- [3] G Longoni e A Haghghat. "A Development of New Quadrature Sets with the "Ordinate Splitting"Technique". Em: **Proceedings ANS International Meeting on Mathematical Methods for Nuclear Applications (M&C2001)** 1 (2001).