

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UMA METODOLOGIA UNIFICADA NO DOMÍNIO TEMPO  
PARA SISTEMAS CONCENTRADOS, DISCRETOS E  
DISTRIBUÍDOS

por

Inês Ferreira Moraes

Tese para a obtenção do Título de  
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Maio de 2002.

**UMA METODOLOGIA UNIFICADA NO DOMÍNIO TEMPO  
PARA SISTEMAS CONCENTRADOS, DISCRETOS E  
DISTRIBUÍDOS**

por

**Inês Ferreira Moraes**

**Mestre em Matemática**

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

**Doutor em Engenharia**

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen

Aprovada por:

Prof. Dr. Germán Ramón Canahualpa Suazo - DCET/URI

Prof. Dr. Paulo Zingano - IM/UFRGS

Prof. Dr. Alberto Tamagna -PROMEC/UFRGS

Prof. Dr. Alberto Tamagna  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 24 de maio de 2002.

Aos meus filhos,  
Otávio e Eduardo,  
razão de tudo.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Julio Cesar Ruiz Claeysen, pelos ensinamentos, apoio, incentivo e dedicação durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Maria, pela liberação para a realização deste trabalho.

A CAPES, pela concessão de bolsa PICDT, neste período.

Aos professores, funcionários e colegas do PROMEC, familiares e amigos, pelos ensinamentos transmitidos, colaboração, apoio e incentivo.

## RESUMO

A resposta impulso é utilizada como ferramenta padrão no estudo direto de sistemas concentrados, discretos e distribuídos de ordem arbitrária. Esta abordagem leva ao desenvolvimento de uma plataforma unificada para a obtenção de respostas dinâmicas. Em particular, as respostas forçadas dos sistemas são decompostas na soma de uma resposta permanente e de uma resposta livre induzida pelos valores iniciais da resposta permanente.

A teoria desenvolve-se de maneira geral e direta para sistemas de  $n$ -ésima ordem, introduzindo-se a base dinâmica gerada pela resposta impulso na forma padrão e normalizada, sem utilizar-se a formulação de estado, através da qual reduz-se um sistema de ordem superior para um sistema de primeira ordem. Considerou-se sistemas de primeira ordem a fim de acompanhar-se os muitos resultados apresentados na literatura através da formulação de espaço de estado.

Os métodos para o cálculo da resposta impulso foram classificados em espectrais, não espectrais e numéricos. A ênfase é dada aos métodos não espectrais, pois a resposta impulso admite uma fórmula fechada que requer o uso de três equações características do tipo algébrica, diferencial e em diferenças.

Realizou-se simulações numéricas onde foram apresentados modelos vibratórios clássicos e não clássicos. Os sistemas considerados foram sistemas do tipo concentrado, discreto e distribuído. Os resultados da decomposição da resposta dinâmica de sistemas concentrados diante de cargas harmônicas e não harmônicas foram apresentados em detalhe. A decomposição para o caso discreto foi desenvolvida utilizando-se os esquemas de integração numérica de Adams-Basforth, Strömer e Numerov. Para sistemas distribuídos, foi considerado o modelo de Euler-Bernoulli com força axial, sujeito a entradas oscilatórias com amplitude triangular, pulso e harmônica. As soluções permanentes foram calculadas com o uso da função de Green espacial. A resposta impulso foi aproximada com o uso do método espectral.

## ABSTRACT

**TITLE:** "AN UNIFIED TIME DOMAIN METHODOLOGY FOR CONCENTRATED, DISCRETE AND DISTRIBUTED SYSTEMS"

The impulse response is employed as a standard tool for a direct study of concentrated, discrete and distributed systems of arbitrary order. This approach leads to the development of a unified platform for obtaining dynamical responses. In particular, forced responses are decomposed into the sum of a permanent response and a free response induced by the initial values of the permanent solution.

The theory is developed in a general manner for  $n$ -th order systems; being introduced the standard dynamical basis generated by the impulse response and the normalized one, without employing the state formulation, through which a higher-order system is reduced to a first-order system. In order to follow the many results found in the literature through the state space formulation, first-order systems were considered.

The methods for computing the impulse response were classified into spectral, non spectral and numeric. Emphasis was given to non spectral methods, because the impulse response has a closed-form formula that requires the use of three characteristic equations of algebraic, differential and difference type.

Numerical simulations were performed with classical and non classical vibrating models. The systems considered were concentrated, discrete and distributed. The decomposition results of the forced response of concentrated systems subject to harmonic and non harmonic loads were worked out in detail. The decomposition for the discrete case was developed by using the numerical integration schemes of Adams-Basforth, Strömer and Numerov. For distributed systems was considered the Euler-Bernoulli model with an axial force subject to oscillating inputs with triangular, pulse and harmonic amplitude. The permanent solutions were computed with the spatial Green function. The impulse response was approximated with the spectral method.

## ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>REPRESENTAÇÃO DINÂMICA DE SISTEMAS LINEARES CONCENTRADOS E DISCRETOS INVARIANTES NO TEMPO</b>	<b>4</b>
<b>2.1</b>	<b>Sistemas Concentrados</b>	<b>4</b>
2.1.1	Solução Fundamental	5
2.1.2	Resposta a um Impulso e Função do Sistema	6
2.1.2.1	Resposta Impulso e Função de Transferência	9
2.1.3	Bases Dinâmicas	11
<b>2.2</b>	<b>Sistemas Discretos</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>CÁLCULO DA REPOSTA DINÂMICA DE SISTEMAS LINEARES CONCENTRADOS E DISCRETOS INVARIANTES NO TEMPO</b>	<b>17</b>
<b>3.1</b>	<b>Resolução de Sistemas de Primeira Ordem</b>	<b>17</b>
3.1.1	Sistemas Concentrados	17
3.1.1.1	Métodos Espectrais	19
3.1.1.2	Métodos Não-Espectrais	23
3.1.2	Modelo de Rastreamento de Aeronaves Rígidas	28
3.1.3	Sistemas Discretos	36
3.1.3.1	Métodos Espectrais	38
3.1.3.2	Métodos Não-Espectrais	42

<b>3.2</b>	<b>Sistemas Lineares de Ordem Superior</b>	<b>45</b>
3.2.1	Técnicas Básicas de Resolução para Sistemas Concentrados	45
3.2.1.1	Métodos Espectrais	45
3.2.1.2	Métodos Não-Espectrais	49
3.2.2	Modelos de Suspensão de Veículos	54
3.2.2.1	Modelo da Metade da Suspensão de um Veículo	54
3.2.2.2	Modelo Tridimensional da Suspensão de um Veículo	61
3.2.3	Técnicas Básicas de Resolução para Sistemas Discretos	71
3.2.3.1	Métodos Espectrais	71
3.2.3.2	Métodos Não-Espectrais	76
<b>3.3</b>	<b>Representação no Espaço de Estado para Sistemas Lineares Concentrados e Discretos de Ordem Superior</b>	<b>79</b>
3.3.1	Sistemas Concentrados	79
3.3.2	Sistemas Discretos	81
<b>4</b>	<b>CÁLCULO SIMBÓLICO DE RESPOSTAS FORÇADAS PARA SISTEMAS CONCENTRADOS E DISCRETOS</b>	<b>83</b>
<b>4.1</b>	<b>Decomposição da Resposta Forçada para Sistemas Concentrados</b>	<b>83</b>
4.1.1	Decomposição da Resposta Forçada para Diferentes Tipos de Entradas	86
4.1.1.1	Entrada Linear	86
4.1.1.2	Entrada Degrau	87
4.1.1.3	Entrada Polinomial	87

4.1.1.4	Entrada Harmônica . . . . .	88
4.1.1.5	Entrada Exponencial . . . . .	89
4.1.1.6	Entrada Seccionalmente Contínua . . . . .	90
4.1.1.7	Outros Tipos de Entradas . . . . .	91
4.1.2	Sistema Escalar de Sexta Ordem . . . . .	92
4.1.3	Sistema Matricial de Segunda Ordem . . . . .	99
4.1.4	Sistema Tridimensional para a Suspensão de Veículos . . . . .	108
<b>4.2</b>	<b>Decomposição da Resposta Forçada para Sistemas Discretos . . .</b>	<b>116</b>
4.2.1	Modelos Discretos Associados à Esquemas de Integração Numérica .	117
4.2.1.1	Esquema de Adams-Basforth de Quinta Ordem . . . . .	117
4.2.1.2	Esquema de Strömer de Quarta Ordem . . . . .	119
4.2.1.3	Esquema de Numerov para Sistemas Conservativos de Segunda Ordem . . . . .	121
<b>5</b>	<b>SISTEMAS DISTRIBUÍDOS . . . . .</b>	<b>123</b>
<b>6</b>	<b>CÁLCULO SIMBÓLICO DE RESPOSTAS FORÇADAS PARA SISTEMAS DISTRIBUÍDOS . . . . .</b>	<b>130</b>
<b>6.1</b>	<b>Decomposição da Resposta Forçada para Sistemas Distribuídos .</b>	<b>130</b>
<b>6.2</b>	<b>Modelo de uma Viga Euler-Bernoulli com Força Axial . . . . .</b>	<b>133</b>
6.2.1	Cálculo Modal . . . . .	135
6.2.2	Cálculo da Função de Green Espacial . . . . .	139
6.2.3	Decomposição da Resposta Forçada . . . . .	142

6.2.3.1	Decomposição da Resposta Forçada para uma Viga Fixa-Apoiada . . . . .	143
6.2.3.2	Simulações Numéricas . . . . .	146
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>166</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>168</b>
	<b>APÊNDICE A COEFICIENTES MATRICIAIS . . . . .</b>	<b>174</b>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	área da seção transversal
$A_j$	coeficiente matricial de ordem $n$
$A$	matriz companheira
$a_j$	coeficiente escalar
$B_j$	coeficiente matricial de ordem $m \times p$
$B$	matriz de contorno
$C, C_{ss}, g_{jj}$	coeficientes de amortecimento
$D$	matriz espectral
$E$	módulo elástico de Young
$EI$	rigidez flexural
$e(t)$	erro de rastreio
$f(t)$	vetor de forças externas
$F(s)$	transformada de Laplace de $f(t)$
$h(t), h(t)$	resposta impulso evolutiva
$h(x)$	resposta impulso estacionária
$\dot{h}(t), \dot{h}(t)$	derivada temporal da resposta impulso
$h(t, x, \xi)$	função de Green de valor inicial
$H(s, x, \xi)$	função de Green de contorno
$h_{i,j}$	componentes da matriz resposta impulso
$H(s)$	função de transferência
$H(i\omega, x, \xi)$	função frequência
$I$	matriz identidade, momento de inércia
$i$	unidade complexa
$J$	momento de inércia
$K, K_{ss}$	coeficientes de rigidez
$L, l$	comprimento
$\mathcal{L}$	operador transformada de Laplace
$\mathcal{L}^{-1}$	operador transformada inversa de Laplace

$M$ ,	matriz de massa
$m, m_c, m_s$	massas
$N$	força axial
$0$	matriz nula
$P(s), p(\lambda)$	polinômio característico
$t$	tempo
$U(s)$	transformada de Laplace de $u(t)$
$u(t)$	vetor de controle
$V$	matriz modal
$X_n(x)$	autofunção
$y$	resposta dinâmica
$y_k$	resposta discreta
$y_h$	resposta livre
$y_p$	resposta permanente
$Z$	vetor de estado
$Z(s)$	transformada de Laplace de $z(t)$
$\alpha$	coeficiente linear
$\delta(t)$	função delta de Dirac
$\lambda_j$	autovalor
$\Delta(s)$	polinômio matricial
$\Phi$	matriz base
$\phi$	ângulo de rolamento
$\phi, \psi, \theta$	ângulos de Euler
$\rho$	densidade linear
$\omega_n$	freqüência natural
$\Omega$	matriz espectral
$\theta$	ângulo de arfagem

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3.1	Forças que agem em uma aeronave . . . . .	29
Figura 3.2	Nomenclatura para movimentos longitudinais de uma aeronave . . . . .	30
Figura 3.3	Nomenclatura para movimentos laterais de uma aeronave . . . . .	30
Figura 3.4	Controle do ângulo de inclinação através dos ailerões . . . . .	31
Figura 3.5	Ângulos de Euler . . . . .	35
Figura 3.6	Dinâmica lateral . . . . .	35
Figura 3.7	Dinâmica longitudinal . . . . .	35
Figura 3.8	Modelo da suspensão da metade de um carro . . . . .	54
Figura 3.9	Entrada tipo oscilatória nas rodas . . . . .	59
Figura 3.10	Componentes da resposta do sistema . . . . .	60
Figura 3.11	Modelo tridimensional da suspensão de um carro . . . . .	61
Figura 3.12	Entrada tipo lombada nas rodas dianteiras e nula nas rodas traseiras . . . . .	66
Figura 3.13	Saída do sistema - suspensão passiva . . . . .	67
Figura 3.14	Saída do sistema - suspensão ativa . . . . .	67
Figura 3.15	Resposta nos eixos das rodas - suspensão passiva . . . . .	68
Figura 3.16	Resposta nos eixos das rodas - suspensão ativa . . . . .	68
Figura 3.17	Resposta na posição do motorista e no centro de gravidade do carro - suspensão passiva . . . . .	69
Figura 3.18	Resposta na posição do motorista e no centro de gravidade do carro - suspensão ativa . . . . .	69

Figura 3.19	Saída ângulos de arfagem e rolamento - suspensão passiva . . . . .	70
Figura 3.20	Saída ângulos de arfagem e rolamento - suspensão ativa . . . . .	70
Figura 4.1	Resposta forçada calculada a partir da convolução e do método de decomposição . . . . .	97
Figura 4.2	Resposta impulso discreta do sistema . . . . .	118
Figura 4.3	Decomposição do sistema discreto . . . . .	119
Figura 4.4	Resposta impulso discreta instável do sistema . . . . .	120
Figura 4.5	Resposta permanente e resposta livre induzida instável . . . . .	120
Figura 4.6	Resposta impulso discreta do sistema utilizando-se o esquema de Numerov . . . . .	121
Figura 4.7	Decomposição do sistema discreto utilizando-se o esquema de Numerov . . . . .	122
Figura 6.1	Viga fixa-livre sob ação de uma força axial $N$ . . . . .	134
Figura 6.2	Viga fixa-apoiada . . . . .	143
Figura 6.3	Cinco primeiros modos do sistema . . . . .	148
Figura 6.4	Função de Green espacial . . . . .	149
Figura 6.5	Parte espacial correspondentes a excitação e as respostas permanentes para duas frequências de entrada . . . . .	150
Figura 6.6	Função de Green espacial . . . . .	156
Figura 6.7	Parte espacial correspondentes a excitação e as respostas permanentes para duas frequências de entrada . . . . .	157
Figura 6.8	Função de Green espacial . . . . .	161
Figura 6.9	Parte espacial correspondentes a excitação e as respostas permanentes para duas frequências de entrada . . . . .	162

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 3.1	Valores dos parâmetros usados nas simulações do modelo da metade do carro . . . . .	57
Tabela 3.2	Valores dos parâmetros do sistema . . . . .	64
Tabela 4.1	Elementos da base impulsiva normalizada . . . . .	95
Tabela 4.2	Decomposição da resposta forçada para diferentes tipos de entradas . .	96
Tabela 4.3	Resposta permanente, respostas homogêneas induzidas pelo sistema e pela permanente e resposta forçada por intervalo de definição . . . . .	98
Tabela 4.4	Componentes do elemento $h_0(t)$ da base impulsiva normalizada . . . .	101
Tabela 4.5	Componentes do elemento $h_1(t)$ da base impulsiva normalizada . . . .	102
Tabela 4.6	Componentes da excitação . . . . .	103
Tabela 4.7	Resposta forçada para cada componente, calculada a partir da convolução e do método de decomposição . . . . .	105
Tabela 4.8	Resposta permanente, respostas homogêneas induzidas pelo sistema e pela permanente e resposta forçada, por componente . . . . .	106
Tabela 4.9	Entradas e respostas, por componente, provenientes da decomposição do sistema . . . . .	107
Tabela 4.10	Quatro primeiras componentes da entrada . . . . .	108
Tabela 4.11	Quatro últimas componentes da entrada . . . . .	109
Tabela 4.12	Resposta forçada para as quatro primeiras componentes, calculada a partir da convolução e do método de decomposição . . . . .	110
Tabela 4.13	Resposta forçada para as quatro últimas componentes, calculada a partir da convolução e do método de decomposição . . . . .	111

Tabela 4.14	Resposta permanente, respostas homogêneas induzidas pelo sistema e pela permanente e resposta forçada para as quatro primeiras componentes	112
Tabela 4.15	Resposta permanente, respostas homogêneas induzidas pelo sistema e pela permanente e resposta forçada para as quatro últimas componentes	113
Tabela 4.16	Excitações e respostas para as quatro primeiras componentes provenientes da decomposição do sistema . . . . .	114
Tabela 4.17	Excitações e respostas para as quatro últimas componentes provenientes da decomposição do sistema . . . . .	115
Tabela 6.1	Valores dos parâmetros usados nas simulações do modelo da viga . . .	147
Tabela 6.2	Valores calculados para os parâmetros $\varepsilon$ , $q$ , $\omega_n$ e $\delta$ . . . . .	148
Tabela 6.3	Resposta impulso temporal para diferentes tempos fixos . . . . .	151
Tabela 6.4	Resposta impulso temporal para diferentes posições fixas . . . . .	152
Tabela 6.5	Decomposição da resposta forçada do sistema e a correspondente entrada para a frequência $\omega f a_1 = 168.7562$ . . . . .	153
Tabela 6.6	Decomposição da resposta forçada do sistema e a correspondente entrada para a frequência $\omega f a_2 = 166$ . . . . .	154
Tabela 6.7	Seção da decomposição para $t = 15s$ . . . . .	155
Tabela 6.8	Decomposição da resposta forçada do sistema e a correspondente entrada para a frequência $\omega f a_1 = 80.17778$ . . . . .	158
Tabela 6.9	Decomposição da resposta forçada do sistema e a correspondente entrada para a frequência $\omega f a_2 = 79.1$ . . . . .	159
Tabela 6.10	Seção da decomposição para $t = 15s$ . . . . .	160
Tabela 6.11	Decomposição da resposta forçada do sistema e a correspondente entrada para a frequência $\omega f a_1 = 289.5986$ . . . . .	163

Tabela 6.12	Decomposição da resposta forçada do sistema e a correspondente entrada para a frequência $\omega f a_2 = 288.15$ . . . . .	164
Tabela 6.13	Seção da decomposição para $t = 15s$ . . . . .	165

## 1 INTRODUÇÃO

A vibração e controle de sistemas com parâmetros discretos, concentrados e distribuídos é um assunto de amplo e permanente interesse na engenharia e na matemática aplicada e computacional. Existe uma vasta literatura, tanto do ponto de vista teórico, quanto prático, veja-se [Meirovitch, 1997; Fuller, 1997], entre outros. Em muitas situações, por conveniência teórica e dificuldade na análise, é assumido que o sistema não possui amortecimento. Por este motivo, no estudo da dinâmica de sistemas, a técnica do desacoplamento por modos normais tem sido a mais explorada. Porém, todos os sistemas físicos possuem amortecimento não importando quanto pequeno seja e que seu desprezo esteja vinculado ao fato de considerar-se um tempo de observação pequeno [Woodhouse, 1998].

Os modelos contínuos para sistemas vibratórios e de controle são vistos como realísticos, pois suas propriedades são distribuídas, em vez de concentradas em pontos discretos. Esse aumento no realismo do modelo gera uma maior complexidade na formulação e resolução do mesmo. Para modelos concentrados as equações do movimento são sistemas de equações diferenciais ordinárias, entretanto, para modelos distribuídos são utilizadas equações diferenciais parciais, veja-se [Leipholtz, 1980]. As principais dificuldades são os fatores computacionais e a pouca ênfase encontrada na literatura a respeito da analogia existente entre ambos os tipos de equacionamentos. O uso da computação digital motiva a incorporação de modelos totalmente discretos, no tempo e no espaço, descritos por equações em diferenças. Eles permitem obter resultados numéricos aproximados para a dinâmica dos sistemas concentrados e distribuídos.

Dando continuidade aos trabalhos de [Claeyssen, 1990a,b], [Claeyssen, 1999], [Claeyssen, 2001], [Claeyssen, 2002], [Gallicchio, 1999], [Suazo, 2000], [Copetti, 2002], [Costa, 2001], [Giaretta, 2001], [Trott, 2001], entre outros; é desenvolvida uma formulação geral, no domínio tempo, para sistemas concentrados, discretos e distribuídos. Uma vantagem dessa metodologia é que diferentes sistemas são tratados sistematicamente numa forma compacta, simples e conveniente para simulação numérica e tratamento de dados. Além disso, diferentemente da maioria dos trabalhos encontrados na literatura de controle e de algumas áreas

em engenharia, essa metodologia é desenvolvida no seu próprio espaço físico, isto é, sem passar para a formulação de espaço estado, que transforma todas as equações em primeira ordem, largamente utilizada para o estudo de sistemas de controle; como referência veja-se [Kailath, 1980]. Recentemente, em [Ram, 1999] foi considerado o uso do espaço físico para o controle ótimo de sistemas vibratórios.

Aplicações da dinâmica estrutural na engenharia mecânica, aeroespacial e civil, ainda que diferentes, têm essencialmente os mesmos princípios e técnicas de resolução. Neste trabalho, dá-se ênfase a uma formulação da resposta dinâmica para sistemas de parâmetros concentrados, discretos, e distribuídos, em termos da resposta impulso. Uma adequada formulação no domínio tempo tem uma imediata utilização, tanto no domínio da frequência, quanto nas aplicações. Por exemplo, o controle ativo das vibrações de sistemas giroscópicos tem recebido muita atenção devido a sua importante aplicação em robótica, dinâmica de rotores, maquinaria de alta velocidade e precisão e, em grandes estruturas espaciais. Em vários problemas de controle é necessário obter a resposta frequência de vigas finas sujeitas a uma distribuição de força arbitrariamente harmônica, conforme os trabalhos de [Yang, 1994; Fuller, 1997].

No capítulo 2, apresenta-se um estudo de sistemas concentrados, e discretos em termos da resposta impulso e da base dinâmica gerada pela mesma. Esse estudo é desenvolvido utilizando-se uma formulação direta através do método operacional em termos de uma resposta fundamental, denominada também de solução dinâmica do sistema; veja-se [Claeysen, 1990a], [Claeysen, 1990b], [Claeysen, 1997], [Claeysen, 1999] e [Claeysen, 2001].

No capítulo 3, a resposta dinâmica ou total é calculada através de métodos espectrais e não espectrais. Considera-se em particular, sistemas de primeira ordem concentrados e discretos. Como ilustração, um modelo de rastreamento de aeronaves rígidas é discutido. Apresenta-se também, técnicas básicas de obtenção da resposta dinâmica de sistemas concentrados e discretos de ordem superior. Como aplicações, realiza-se o cálculo da resposta forçada para modelos de suspensão sujeitos a entradas do tipo pulso e harmônica (lombadas). A representação no espaço de estado através da matriz companheira é discutida.

No capítulo 4, é realizado o cálculo simbólico de respostas permanentes de sistemas concentrados sujeitos a diferentes tipos de entradas, tais como: entradas lineares, degrau, polinomiais, harmônicas e seccionalmente definidas. A resposta forçada de sistemas concentrados, conforme [Claeyssen, 1999], e discretos é decomposta na soma da resposta permanente e de uma resposta livre induzida pelas condições iniciais da resposta permanente. Essa decomposição é considerada em detalhe para um sistema escalar de sexta ordem e sistemas matriciais de segunda ordem com quatro e oito graus de liberdade. A decomposição da resposta forçada para sistemas discretos é feita utilizando-se esquemas de integração numérica para sistemas de primeira e segunda ordem.

Finalmente, nos capítulos 5 e 6, apresenta-se uma teoria direta para sistemas distribuídos, em termos da resposta impulso ou função de Green temporal e realiza-se a decomposição de respostas forçadas. Essa decomposição é considerada para uma viga fixa-apoiada com força axial, segundo a teoria de Euler-Bernoulli, para entradas oscilatórias no tempo e no espaço. As entradas consideradas foram do tipo oscilatória, degrau e triangular. Sendo que, para a entrada oscilatória no espaço, a amplitude da resposta permanente é determinada com auxílio da função de Green espacial, calculada em termos da base dinâmica normalizada.

## 2 REPRESENTAÇÃO DINÂMICA DE SISTEMAS LINEARES CONCENTRADOS E DISCRETOS INVARIANTES NO TEMPO

Aplicações da dinâmica estrutural na engenharia mecânica, aeroespacial e civil ainda que diferentes, têm essencialmente os mesmos princípios e técnicas de resolução. Nesse capítulo, dá-se ênfase a uma formulação da resposta dinâmica em tempo contínuo ou discreto, em termos da resposta impulso.

### 2.1 Sistemas Concentrados

Os sistemas lineares concentrados serão denotados por

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{d^j y}{dt^j}(t) = r(t), \quad (2.1)$$

onde os coeficientes  $A_j$  são matrizes constantes (*independentes do tempo*) de ordem  $n$ ,  $A_N$  não singular,  $y(t) = y$  o vetor *saída* de ordem  $n$  e  $r(t) = r$  o vetor *entrada* de ordem  $n$ .

Os sistemas concentrados do tipo (2.1) são referidos como sendo de *múltipla entrada com múltipla saída* quando  $n > 1$ , denominados na literatura com a terminologia MIMO (*multiple input - multiple output*). Em particular, para  $N = 1$  estes sistemas são denominados sistemas de *entrada simples com saída simples*, com terminologia SISO (*simple input - simple output*).

Nas aplicações, usualmente,  $r(t)$  pode ser de natureza forçante, isto é, denotar uma entrada forçada simples

$$r(t) = f(t), \quad (2.2)$$

ou uma entrada que descreva uma dinâmica de controle

$$r(t) = \sum_{j=0}^M B_j \frac{d^j u}{dt^j}(t). \quad (2.3)$$

Aqui, os coeficientes  $B_j$  são matrizes constantes de ordem  $n \times p$  e  $u(t) = u$  é um vetor de ordem  $p$ . É assumido que  $N \geq M$ .

Com o propósito de considerar ambos tipos de sistemas, será assumido que  $r(t)$  é uma combinação de ambos, ou seja,

$$r(t) = \sum_{j=0}^M B_j \frac{d^j u}{dt^j}(t) + f(t). \quad (2.4)$$

Quando conveniente,  $f(t)$  será referido como entrada *forçante* e  $u(t)$  como entrada de *controle*.

### 2.1.1 Solução Fundamental

A *resposta livre* do sistema (2.1) é a solução da equação diferencial homogênea

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{d^j y}{dt^j}(t) = 0, \quad (2.5)$$

que corresponde ao sistema com entrada identicamente nula. Por *resposta forçada* no tempo  $t = t_0$  será entendido como sendo a solução da equação diferencial (2.1) quando todas as *condições iniciais*

$$y(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0), \dots, \frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}}(t_0), \quad (2.6)$$

são identicamente nulas. A *resposta total* é dada pela soma da resposta livre com a resposta forçada.

A *solução fundamental* ou *solução dinâmica* do sistema (2.1) é a resposta livre  $h_d = h_d(t)$  que satisfaz as condições iniciais

$$h_d(0) = 0, \frac{dh_d}{dt}(0) = 0 \dots, \frac{d^{N-2}h_d}{dt^{N-2}}(0) = 0, A_N \frac{d^{N-1}h_d}{dt^{N-1}}(0) = I. \quad (2.7)$$

Aqui  $I$  corresponde a matriz identidade de ordem  $n$ , descrita funcionalmente com auxílio da função delta discreta,

$$\delta(k) = \begin{cases} 0, & \text{para } k = 0 \\ 1, & \text{para } k \neq 0 \end{cases}, \quad (2.8)$$

como

$$I = [\delta(i - j)] \quad \text{para } i, j = 1 : n. \quad (2.9)$$

### 2.1.2 Resposta a um Impulso e Função do Sistema

Através do método operacional é possível caracterizar a resposta total do sistema (2.1) para  $t > 0$ , com condições iniciais presentes em  $t = 0$  e supondo condição de repouso  $y(t) = 0$  para  $t < 0$ . Aplicando-se então, a transformada de Laplace em (2.1) resulta a equação operacional

$$\left( \sum_{j=0}^N s^j A_j \right) Y(s) - \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} A_j y_0^i = R(s), \quad (2.10)$$

onde  $y_0^i = y^{(i)}(0)$  denota as condições iniciais da saída no tempo  $t = 0$ . As expressões

$$Y(s) = \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} y(t) dt, \quad R(s) = \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} r(t) dt, \quad (2.11)$$

correspondem às transformadas da saída  $y(t)$  e do termo forçante  $r(t)$ , respectivamente <sup>1</sup>.

Assim, a transformada da saída pode ser expressa por

$$Y(s) = H(s) \left( \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} A_j y_0^i \right) + H(s) R(s), \quad (2.12)$$

onde

$$H(s) = \left( \sum_{j=0}^N s^j A_j \right)^{-1}, \quad (2.13)$$

<sup>1</sup>O limite inferior  $0^+$  indica que os valores iniciais serão incorporados as transformadas das derivadas de uma saída em repouso para  $t < 0$ . Este não é o caso quando se considera  $0^-$  como limite inferior. Para maiores detalhes veja-se [Lanczos, 1956].

é denominada *função do sistema* representado pela equação (2.1).

A inversa da transformada de Laplace da matriz  $H(s)$  é chamada de *resposta a um impulso* do sistema (2.1), sendo denotada por  $h(t)$ . Ela vem a ser uma matriz de ordem  $n$  que satisfaz, para  $t > 0$ , o sistema

$$\sum_{j=0}^N A_j h^{(j)}(t) = 0, \quad (2.14)$$

sujeito as condições iniciais

$$h(0^+) = 0, \dot{h}(0^+) = 0, \dots, h^{(N-2)}(0^+) = 0, A_N h^{(N-1)}(0^+) = I. \quad (2.15)$$

Equivalentemente,  $h(t)$  satisfaz a equação

$$\sum_{j=0}^N A_j h^{(j)}(t) = \delta(t)I, \quad (2.16)$$

sujeita as condições iniciais de repouso

$$h(0^-) = 0, \dot{h}(0^-) = 0, \dots, h^{(N-2)}(0^-) = 0, h^{(N-1)}(0^-) = 0, \quad (2.17)$$

para  $t > 0$  e sendo  $h(t) = 0$  para  $t < 0$ . Naturalmente,  $h(t)$  vem a ser resposta do sistema em repouso quando aplica-se o impulso  $r(t) = \delta(t)$ . Assim,

$$h(t) = \begin{cases} h_d(t) & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}. \quad (2.18)$$

Como  $H(s)$  é a inversa do polinômio matricial  $\Delta(s)$ , dado por

$$\Delta(s) = \sum_{j=0}^N s^j A_j, \quad (2.19)$$

segue-se que  $h(t)$  é uma solução à esquerda e à direita, isto é,

$$\sum_{j=0}^N A_j h^{(j)}(t) = \sum_{j=0}^N h^{(j)}(t) A_j = 0. \quad (2.20)$$

Aplicando-se a transformada inversa de Laplace em (2.12) e, utilizando-se o fato de que

$$\mathcal{L}(h^{(j)}(t)) = s^j H(s), \quad \text{para } j = 0 : N - 1, \quad (2.21)$$

devido as condições iniciais de  $h(t)$  obtêm-se uma expressão para a resposta total do sistema (2.1), em termos da resposta a um impulso associado ao sistema. A saída é então dada por

$$y(t) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} h^{(j-1-i)}(t) A_j y_0^i + \int_0^t h(t-\tau) r(\tau) d\tau. \quad (2.22)$$

O primeiro termo do segundo membro corresponde a resposta livre do sistema e o último vem a ser a resposta forçada. A resposta é expressa em função das condições iniciais e da entrada do sistema (2.1).

Introduzindo-se as funções matriciais

$$h_j(t) = \sum_{i=0}^{N-j-1} h^{(i)}(t) A_{j+1+i}, \quad \text{para } j = 0 : N - 1, \quad (2.23)$$

as quais podem ser denotadas matricialmente por

$$\begin{pmatrix} h_0(t) & h_1(t) & \cdots & h_{N-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(t) & \dot{h}(t) & \cdots & h^{(N-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_N \\ A_2 & A_3 & \cdots & A_N & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{N-1} & A_N & 0 & \cdots & 0 \\ A_N & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

a saída pode ser expressa de maneira explícita em relação aos valores iniciais, ou seja,

$$y(t) = \sum_{j=0}^{N-1} h_j(t) y_0^j + \int_0^t h(t-\tau) r(\tau) d\tau. \quad (2.25)$$

A rigor, as fórmulas (2.22) ou (2.25) são válidas para  $t \geq 0$ . Porém, por direta substituição em (2.1) com  $h_d(t)$  no lugar de  $h(t)$ , verifica-se que

$$y(t) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} h_d^{(j-1-i)}(t) A_j y_0^i + \int_0^t h_d(t-\tau) r(\tau) d\tau, \quad (2.26)$$

é a solução de (2.1), com condições iniciais dadas em  $t = 0$  e  $r(t)$  atuando em todo instante de tempo  $t$  real. Similarmente, introduzindo

$$h_{d,j}(t) = \sum_{i=0}^{N-j-1} h_d^{(i)}(t) A_{j+1+i}, \quad \text{para } j = 0 : N-1, \quad (2.27)$$

tem-se

$$y(t) = \sum_{j=0}^{N-1} h_{d,j}(t) y_0^j + \int_0^t h_d(t-\tau) r(\tau) d\tau, \quad -\infty < t < \infty. \quad (2.28)$$

### 2.1.2.1 Resposta Impulso e Função de Transferência

No caso de sistemas de controle em que  $r(t)$  é dado pela expressão

$$r(t) = \sum_{j=0}^M B_j \frac{d^j u}{dt^j}(t), \quad (2.29)$$

conforme descrito em (2.3), a resposta total pode ser explicitada em termos de  $u$  e de seus valores iniciais. Integrando-se por partes a expressão

$$\int_0^t h(t-\tau) r(\tau) d\tau, \quad (2.30)$$

e utilizando-se os valores iniciais de  $h(t)$  resulta que

$$\int_0^t h(t-\tau) \left( \sum_{j=0}^M B_j \frac{d^j u}{dt^j}(\tau) \right) d\tau = \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^M \sum_{i=0}^{j-1} h^{(j-1-i)}(t) B_j u_0^i, \quad (2.31)$$

onde

$$g(t-\tau) = \sum_{j=0}^M h^{(j)}(t-\tau) B_j, \quad (2.32)$$

sendo  $u_0^i = u^{(i)}(0)$  os valores iniciais do controle. A função  $g(t) = g$  será referida como a *resposta impulso* do sistema de controle.

A expressão (2.32) pode também ser obtida através do cálculo da transformada inversa de Laplace do termo

$$H(s)R(s) = \sum_{j=0}^M s^j H(s) B_j U(s) - \sum_{j=1}^M \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} H(s) B_j u_0^i \quad (2.33)$$

e com o auxílio de (2.21).

Diante de condições iniciais nulas, tanto da entrada quanto da saída tem-se, a partir de (2.12), que

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad (2.34)$$

onde

$$G(s) = H(s) \sum_{j=0}^M s^j B_j = \sum_{j=0}^M s^j H(s) B_j, \quad (2.35)$$

é a *função de transferência* do sistema de controle, relacionando-se as transformadas da entrada e da saída. Aplicando-se a transformada inversa de Laplace na equação (2.35) e utilizando-se a propriedade (2.21) obtêm-se a *resposta impulso* (2.32) do sistema.

Caso as condições iniciais da entrada e da saída sejam nulas ( $y_0^j = 0$  e  $u_0^j = 0$ ), a resposta forçada do sistema pode ser expressa através da convolução

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau. \quad (2.36)$$

As fórmulas de variação de parâmetros são dadas pelas expressões (2.22) e (2.25), com o termo integral em  $r(t)$  substituído pela integral (2.31).

OBSERVAÇÕES:

1. A função de transferência  $G(s)$ , pode ser considerada como sendo a transformada de Laplace da saída simultânea correspondente a entradas impulsivas concentradas por componentes. Mais precisamente, dada a entrada  $u_k(t) = e_k \delta(t)$  para  $k = 1 : p$ , tem-se

que a transformada da saída, expressa por

$$Y_k(s) = G(s)e_k, \quad (2.37)$$

é a  $k$ -ésima coluna da matriz  $G(s)$ . Assim, para a entrada matricial

$$u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \cdots \ u_p(t)] = \delta(t)I, \quad (2.38)$$

onde  $I$  denota a matriz identidade de ordem  $p$ , tem-se que  $U(s) = I$ . Portanto, a saída matricial  $Y(s)$  correspondente é justamente a função de transferência.

2. Para sistemas simples do tipo

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{d^j y}{dt^j} = u(t), \quad (2.39)$$

a resposta impulso  $g(t)$  coincide com a resposta  $h(t)$ . Por este motivo, muitas vezes, é utilizada indistintamente, na literatura, a denominação função do sistema ou função de transferência.

### 2.1.3 Bases Dinâmicas

A partir das equações (2.26) e (2.28) decorre que a resposta livre ( $r = 0$ ) dependerá de  $h_d(t)$  e de suas derivadas até ordem  $N - 1$ . Como os sistemas considerados são invariantes no tempo <sup>2</sup>, qualquer resposta livre pode ser expressa na forma

$$y(t) = h_d(t - t_0)c_0 + \dot{h}_d(t - t_0)c_1 + \dots + h_d^{(N-1)}(t - t_0)c_{N-1}, \quad (2.40)$$

---

<sup>2</sup>Estes sistemas, por terem coeficientes independentes do tempo, possuem a seguinte propriedade: para qualquer translação do tempo em  $r(t)$ , tem-se que a forma da saída é a mesma; porém, com a mesma translação aplicada no tempo.

onde  $h_d(t)$  satisfaz a equação (2.5) sujeita as condições iniciais dadas por (2.7), ou ainda, pode ser expressa por

$$y(t) = \sum_{j=0}^{N-1} h_{d,j}(t - t_0) y_0^j, \quad (2.41)$$

com as funções  $h_{d,j}(t)$  definidas através de (2.27).

Os vetores constantes  $c_k$  em (2.40), podem ser calculados com o auxílio das condições iniciais, resolvendo-se o sistema

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-2} \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_N \\ A_2 & A_3 & \cdots & A_N & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{N-1} & A_N & 0 & \cdots & 0 \\ A_N & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \\ \vdots \\ y_0^{N-2} \\ y_0^{N-1} \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

onde os dados  $y_0^j$  são fornecidos através da função  $y(t)$  no tempo  $t = t_0$ .

Assim, a fórmula de variação de parâmetros dada por (2.26), pode ser escrita por

$$y(t) = \sum_{j=0}^{N-1} h_{d,j}(t - t_0) y_0^j + \int_{t_0}^t h_d(t - \tau) r(\tau) d\tau, \quad (2.43)$$

para saídas com valores iniciais dados em  $t = t_0$ , dentro do intervalo de atuação de  $r(t)$ .

Os sistemas de funções matriciais

$$\{h_d(t), \dot{h}_d(t), \dots, h_d^{(N-1)}(t)\} \text{ e } \{h(t), \dot{h}(t), \dots, h^{(N-1)}(t)\}, \quad (2.44)$$

serão referidos como *base dinâmica* e *base impulsiva*, respectivamente; sendo gerados pela solução dinâmica ou fundamental,  $h_d(t)$  e resposta a um impulso  $h(t)$ , respectivamente.

De maneira similar, as funções matriciais  $\{h_{d,j}(t)\}$ , para  $j = 0 : N-1$  e  $\{h_j(t)\}$ , para  $j = 0 : N-1$ , serão referidas como *base dinâmica normalizada* e *base impulsiva normalizada*, respectivamente.

## OBSERVAÇÕES:

1. Deve ser salientado que no caso de sistemas onde os coeficientes variam com o tempo, uma solução e suas derivadas nem sempre formam uma base [Howland, 1911]. Porém, a resposta impulso  $h(t, \tau)$  de um sistema linear variante no tempo gera sempre uma base de soluções, veja-se [Miller, 1963].

2. Tem sido estabelecido por [Claeyssen, 1990a], que a solução dinâmica  $h(t)$  pode ser calculada simbolicamente em termos de três equações características: algébrica (polinômio característico), diferencial (cujos coeficientes são os mesmos do polinômio característico) e em diferenças (equação discreta). Para sistemas de ordem arbitrária e sem o uso da formulação de estado veja-se [Claeyssen, 1999].

Essa metodologia, em termos da base dinâmica, será desenvolvida na próxima seção para sistemas discretos e no capítulo 5, para sistemas distribuídos.

## 2.2 Sistemas Discretos

Considere-se sistemas discretos da forma

$$\sum_{j=0}^N A_j y_{k+j} = \sum_{j=0}^M B_j u_{k+j} + f_k, \quad N \geq M, \quad (2.45)$$

onde os coeficientes  $A_j$  e  $B_j$  são matrizes de ordem  $n \times n$  e  $n \times p$ ;  $y_j = y(j)$  e  $u_j = u(j)$  são vetores *saída* de ordem  $n$  e *entrada* de ordem  $p$ , respectivamente.

Por simplicidade, a discussão apresentada será restrita a entradas que sejam nulas para tempo negativo. Pode-se considerar o caso

$$\sum_{j=0}^N A_j y_{k+j} = r_k, \quad (2.46)$$

equivalentemente ao sistema (2.45), fazendo-se  $r_k = u_k$ ,  $f_k = 0$ ,  $B_0 = I$  e  $B_j = 0$  para  $j = 1 : M$ .

O sistema (2.45) pode ser discutido com o uso da transformada de Laplace em tempo discreto, denominada transformada  $\mathcal{Z}$  ou combinando-se a formulação contínua da seção anterior com o uso de série de potências, conforme [Claeyssen, 1990b]. Neste trabalho, será abordado a segunda opção.

Para tempo positivo, tem-se  $h_d(t) = h(t)$ . Assim,

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \frac{t^k}{k!}, \quad h_k = h_d^k(0). \quad (2.47)$$

Substituindo-se (2.47) na equação (2.14), decorre que  $h_k$  é solução do problema inicial discreto

$$\begin{aligned} A_N h_{k+N} + A_{N-1} h_{k+N-1} + \dots + A_1 h_{k+1} + A_0 h_k &= 0 \\ h_0 = 0, h_1 = 0, \dots, h_{N-2} = 0, A_N h_{N-1} &= I, \end{aligned} \quad (2.48)$$

sendo  $I$  a matriz identidade de ordem  $n$ .

Esta solução matricial será referida como a *solução dinâmica discreta* do sistema (2.45) quando considera-se  $k = -\infty : \infty$  ou de *resposta a um impulso discreto* quando definida nula para tempo negativo. Certamente, para tempo positivo ambas coincidem.

Decorre de (2.20), que  $h_k$  satisfaz também

$$h_{k+N} A_N + h_{k+N-1} A_{N-1} + \dots + h_{k+1} A_1 + h_k A_0 = 0, \quad (2.49)$$

ou seja,  $h_k$  é uma solução à esquerda e à direita. Além disso, o problema inicial dado pela equação (2.48) é equivalente para  $k > 0$  com o problema inicial

$$\begin{aligned} A_N h_{k+N} + A_{N-1} h_{k+N-1} + \dots + A_1 h_{k+1} + A_0 h_k &= \delta(k) \\ h_0 = 0, h_1 = 0, \dots, h_{N-2} = 0, h_{N-1} &= 0 \end{aligned}, \quad (2.50)$$

com  $\delta(k)$  definida na seção 2.1.1, equação (2.8). Por unicidade, verifica-se que sendo os coeficientes  $A_k$  simétricos a solução  $h_k$  é também uma matriz simétrica.

Do estudo feito nas seções anteriores para sistemas concentrados, com  $y_k = y^{(k)}(0)$ , decorre que a solução do problema inicial associado ao sistema (2.45) com condições

iniciais  $y_j = y_j^0$ , para  $j = 0 : N - 1$ , é dada por

$$y_k = \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} h_{j-1-i} A_j y_i^0 - \sum_{j=1}^M \sum_{i=0}^{j-1} h_{j-1-i} B_j u_i^0 + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^M h_{j+k-1-i} B_j u_i + \sum_{i=0}^{k-1} h_{k-i-1} f_i. \quad (2.51)$$

Os dois primeiros termos do segundo membro correspondem à resposta livre do sistema, introduzida pelas condições iniciais da saída e da entrada e os dois últimos formam a resposta forçada, devido as entradas  $u_k$  e  $f_k$ , respectivamente.

Introduzindo-se as funções

$$h_{k,j} = \sum_{i=0}^{N-j-1} h_{k+i} A_{j+1+i}, \quad \text{para } j = 0 : N - 1, \quad (2.52)$$

de modo que  $h_{k,N-1} = h_k A_N$ , têm-se que a resposta livre do sistema (2.45) é dada por

$$y_k = \sum_{j=0}^{N-1} h_{k,j} y_j^0 - \sum_{j=1}^M \sum_{i=0}^{j-1} h_{j-1-i} B_j u_i^0. \quad (2.53)$$

Considerando-se condições iniciais nulas, tanto da entrada quanto da saída, decorre de (2.51) que a resposta forçada é dada pela convolução discreta

$$y_k = \sum_{i=0}^{k-1} \left( \sum_{j=0}^M h_{j+k-1-i} B_j \right) u_i + \sum_{i=0}^{k-1} h_{k-1-i} f_i = g_k * u_k + h_k * f_k, \quad (2.54)$$

onde

$$g_k = \sum_{j=0}^M h_{k+j} B_j, \quad (2.55)$$

corresponde a *resposta impulso discreta*.

Para entradas do tipo exponenciais,  $u_k = z^k v$  e  $f_k = 0$ , têm-se saídas do mesmo tipo,  $y_k = z^k G(z) v$ , onde  $G(z)$  corresponde a *função de transferência discreta* dada por

$$G(z) = \sum_{j=0}^M z^{j-1} H(z) B_j, \quad (2.56)$$

sendo

$$H(z) = z \left( \sum_{i=0}^N A_i z^i \right)^{-1}, \quad (2.57)$$

denominada *função do sistema*.

Deve ser observado que a solução dinâmica discreta,  $h_k$ , gera as bases  $[h_{k,0}, h_{k,1}, \dots, h_{k,N-1}]$  e  $[h_k, h_{k+1}, \dots, h_{k+N-1}]$ , pois o casoratiano (wronskiano discreto) é não singular.

### 3 CÁLCULO DA REPOSTA DINÂMICA DE SISTEMAS LINEARES CONCENTRADOS E DISCRETOS INVARIANTES NO TEMPO

A resposta dinâmica ou total de um sistema LTI é usualmente calculada de maneira simbólica ou numérica. No cálculo simbólico, a distinção fundamental entre uma ou outra técnica é o uso ou não de autovetores (modos). Essas técnicas, podem ser agrupadas em três grandes métodos:

- Modal ou Espectral
- Não-Modal ou Não-Espectral
- Numérico

Em geral, na teoria de controle, usa-se a redução ao espaço de estado, que transforma o sistema original em um sistema de primeira ordem no tempo; a ser resolvido e após retorna-se às variáveis iniciais do problema. Assim, as técnicas abordadas na próxima seção resolvem sistemas que usam a formulação de espaço de estado. Por simplicidade, é abordado primeiro a resolução de sistemas de primeira ordem e após, é feita sua generalização para sistemas de ordem arbitrária.

#### 3.1 Resolução de Sistemas de Primeira Ordem

##### 3.1.1 *Sistemas Concentrados*

Sejam sistemas lineares contínuos de primeira ordem, denotados por

$$A_1 \frac{dy}{dt}(t) + A_0 y(t) = g(t), \quad (3.1)$$

com condição inicial em  $t = 0$  dada por  $y(0) = y_0$ .

Na literatura, o sistema (3.1) é colocado na forma normal, isto é, expresso como um sistema de primeira ordem do tipo

$$\frac{dy}{dt}(t) = Ay(t) + f(t), \quad (3.2)$$

onde  $A = -A_1^{-1}A_0$  e  $f(t) = A_1^{-1}g(t)$ , equivalentemente ao sistema anterior. Desta forma, todas as derivadas de  $y$  estão prontas a serem obtidas diretamente da equação e podem assim, serem utilizadas em métodos que as requeram, como o da série de Taylor. Por exemplo, a equação da resposta impulso  $h(t)$  dada por

$$\dot{h}(t) = Ah(t), \quad (3.3)$$

com condição inicial

$$h(0) = I, \quad (3.4)$$

pode ser utilizada para obter as derivadas de ordem arbitrária de  $h(t)$  no ponto  $t = 0$ .

Assim, a expansão em série de Taylor da resposta impulso pode ser escrita

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}. \quad (3.5)$$

Como a última série corresponde a expansão de Taylor da exponencial de uma matriz  $A$ , segue-se que

$$h(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}, \quad (3.6)$$

vem a ser a solução do problema inicial (3.3)-(3.4). De maneira análoga ao caso escalar, escreve-se

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(\tau) d\tau. \quad (3.7)$$

Outra derivação desta fórmula será realizada através do método de variação de parâmetros.

Na formulação de espaço de estado a matriz  $A$  corresponde a matriz companheira, sendo que para este caso a matriz exponencial em (3.6) foi identificada por [Claeyssen, 1990b], [Claeyssen, 1999], em termos dos elementos da base dinâmica  $[h_0, h_1, \dots, h_{N-1}]$  para

equações de ordem  $N$ , onde  $h_{N-1} = h(t)$  é a resposta impulso do sistema. Mais precisamente,

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_{N-2} & h(t)A_N \\ \dot{h}_0 & \dot{h}_1 & \cdots & \dot{h}_{N-2} & \dot{h}(t)A_N \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ h_0^{(N-1)} & h_1^{(N-1)} & \cdots & h_{N-2}^{(N-1)} & h^{(N-1)}(t)A_N \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

A seguir, apresenta-se de forma detalhada, alguns métodos para resolução de sistemas lineares de primeira ordem.

### 3.1.1.1 Métodos Espectrais

Os métodos espectrais aplicam-se, na prática, na resolução de sistemas lineares associados a uma matriz que seja diagonalizável (não-defeituosa), em outras palavras, que gere uma base de autovetores. Considere-se  $A$  uma matriz não-defeituosa, de ordem  $n$ , cujos autovalores são denotados por  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  e os autovetores correspondentes dados por  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ .

#### • Superposição Linear

Procura-se a solução para o sistema (3.2), com condição inicial  $y(0) = y_0$ , da forma

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t). \quad (3.9)$$

A solução homogênea é escrita como combinação linear das  $n$  autofunções do tipo  $e^{\lambda t}v$ , ou seja,

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v_n. \quad (3.10)$$

Uma solução particular do sistema pode ser decomposta em um somatório de  $n$  soluções particulares, sendo cada uma delas da mesma forma que as correspondentes componentes da entrada  $f$ , escrita como combinação linear dos autovetores. Em outras

palavras, escreve-se em primeiro lugar o termo forçante  $f$  como combinação linear da base de autovetores  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ :

$$f = PP^{-1}f = d_1v_1 + d_2v_2 + \dots + d_nv_n, \quad (3.11)$$

onde  $P$  corresponde a matriz modal denotada por

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Assim,  $w_i^T v_j = \delta_{i,j}$  para  $i, j = 1 : n$  e  $d_i = w_i^T f$  para cada  $i = 1 : n$ . Caso a matriz  $A$  seja simétrica o cálculo fica simplificado, pois  $P^{-1} = P^T$ , resultando em  $d_j = v_j^T f$ .

Procura-se, então uma solução particular da forma

$$y_p(t) = y_1^p(t) + y_2^p(t) + \dots + y_n^p(t), \quad (3.13)$$

com  $y_j^p(t)$  do mesmo tipo da componente  $d_j(t)v_j$  do forçante  $f$ , relativa ao autovetor  $v_j$ . Então, as  $j$ -ésimas soluções particulares são tais que

$$y_j^p(t) = g_j(t)v_j. \quad (3.14)$$

Para determinar os valores dos coeficientes  $g_j(t)$  resolve-se o sistema equivalente desacoplado,

$$\frac{dg_j}{dt}(t) = \lambda_j g_j(t) + d_j, \quad \text{para cada } j = 1 : n, \quad (3.15)$$

resultante da substituição da expressão (3.14) para  $y_j^p(t)$  no sistema original (3.2). Uma solução particular não-homogênea para a equação (3.15) é dada por

$$g_j(t) = \int_0^t e^{\lambda_j(t-\tau)} d_j d\tau. \quad (3.16)$$

As constantes da parte homogênea (3.10) são calculadas a partir de  $y(t)$  em  $t = 0$  com o valor inicial dado. Resultando,

$$c = P^{-1}(y_0 - y_p(0)),$$

onde  $c$  corresponde ao vetor das constantes da parte homogênea  $y_h(t)$ .

### • Variação de Parâmetros

Procura-se a solução do sistema (3.2) dada pela combinação linear das autofunções do sistema, sendo expressa por

$$y(t) = c_1(t)e^{\lambda_1 t}v_1 + c_2(t)e^{\lambda_2 t}v_2 + \cdots + c_n(t)e^{\lambda_n t}v_n, \quad (3.17)$$

onde os coeficientes são funções também na variável temporal  $t$ .

Como no método anterior,  $P$  denota a matriz modal, cujas colunas são os autovetores associados aos autovalores da matriz  $A$  e a entrada  $f$  é decomposta na base espectral. O cálculo dos coeficientes  $c_j(t)$  da solução (3.17), é feito obtendo-se as derivadas de  $y(t)$  e substituindo-as no sistema, resultando em  $n$  equações escalares de primeira ordem desacopladas, denotadas por

$$\frac{dc_j}{dt}(t) = e^{-\lambda_j t}d_j, \quad \text{para } j = 1 : n. \quad (3.18)$$

Então,

$$c_j(t) = \int_0^t e^{-\lambda_j \tau} d_j d\tau + c_j(0), \quad (3.19)$$

sendo que os coeficientes  $c_j(t)$  para  $t = 0$  são obtidos aplicando-se a condição inicial. Decorre então, que o vetor destes coeficientes, definido por  $c_0$ , é igual a  $P^{-1}y_0$ .

### • Desacoplamento Matricial Utilizando-se Mudanças de Variáveis

Supondo que a matriz  $A$  é diagonalizável, tem-se que  $A = PDP^{-1}$ . A matriz  $D$ , denominada matriz espectral é uma matriz diagonal, cujos elementos da sua diagonal

são os autovalores de  $A$ , denotados por  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  e a matriz modal,  $P$ , tem nas suas colunas os autovetores associados ao problema de autovalor.

Multiplicando-se o sistema considerado (3.2) por  $P^{-1}$  em ambos os membros, resulta

$$P^{-1} \frac{dy}{dt}(t) = DP^{-1}y(t) + P^{-1}f(t). \quad (3.20)$$

Considerando-se as mudanças de variáveis

$$q(t) = P^{-1}y(t), \quad (3.21)$$

$$g(t) = P^{-1}f(t), \quad (3.22)$$

tem-se um sistema equivalente desacoplado (diagonal), expresso por

$$\frac{dq}{dt}(t) = Dq(t) + g(t), \quad (3.23)$$

que permite obter cada componente  $q_j(t)$  resolvendo-se as  $n$  equações desacopladas

$$\frac{dq_j}{dt}(t) = \lambda_j q_j(t) + g_j(t), \text{ para } j = 1 : n. \quad (3.24)$$

Assim,

$$q_j(t) = e^{\lambda_j(t)} q_j(0) + \int_0^t e^{\lambda_j(t-\tau)} g_j(\tau) d\tau, \quad (3.25)$$

onde os termos  $q_j(0)$  são calculados a partir da equação (3.21), ou seja, o vetor  $q(0)$  é igual a  $P^{-1}y_0$ . Então a solução do sistema fica determinada por

$$y(t) = Pq(t). \quad (3.26)$$

#### • Desacoplamento Matricial Através da Fórmula de Variação de Parâmetros

De acordo com a fórmula de variação de parâmetros, a solução do sistema de primeira ordem (3.2) com valor inicial em  $t = 0$  é expressa por

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(\tau) d\tau. \quad (3.27)$$

Mas, sendo a matriz  $A$  diagonalizável, tem-se que  $A = PDP^{-1}$ . Assim, o cálculo da exponencial torna-se mais simples, ou seja,

$$e^{tA} = e^{tPDP^{-1}} = Pe^{tD}P^{-1}. \quad (3.28)$$

Resultando-se na expressão

$$y(t) = Pe^{Dt}P^{-1}y_0 + P \int_0^t e^{D(t-\tau)} P^{-1} f(\tau) d\tau, \quad (3.29)$$

onde

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

### 3.1.1.2 Métodos Não-Espectrais

Estes métodos não utilizam autovetores. Serão descritos os métodos operacional (transformada de Laplace), variação de parâmetros, a fórmula analítica e o método polinomial.

- **Método Operacional**

Aplicando-se a transformada de Laplace em ambos os lados do sistema (3.2) e utilizando-se a condição inicial dada, têm-se que

$$(Is - A)Y(s) - y_0 = F(s). \quad (3.31)$$

Considerando-se  $\Delta(s) = Is - A$ , que denota uma função matricial de primeira ordem, na variável  $s$ , resulta que

$$Y(s) = H(s)y_0 + H(s)F(s), \quad (3.32)$$

onde  $H(s) = \Delta(s)^{-1}$ .

Deve ser observado que  $H(s)$  é o fator de transferência para entradas  $f(t) = e^{st}v$ , cujas saídas correspondentes são do tipo  $y(t) = e^{st}w$ . Por coeficientes a determinar resulta que  $w = H(s)v$ .

Finalmente, aplica-se a transformada inversa de laplace a fim de retornar-se a variável original do problema.

• **Fórmula de Variação de Parâmetros Utilizando-se uma Base Qualquer**

Escrevendo-se a solução do sistema (3.2) na forma

$$y(t) = e^{tA}c(t) \quad (3.33)$$

e substituindo-a na equação resulta

$$e^{tA}\dot{c}(t) = f(t). \quad (3.34)$$

Decorre, em particular, da propriedade

$$e^{tA}e^{\tau A} = e^{(t+\tau)A}, \quad (3.35)$$

de semi-grupo da exponencial que  $e^{-tA} = [e^{tA}]^{-1}$  e  $e^0 = I$ .

Assim, da equação (3.34) resulta que

$$\dot{c}(t) = e^{-tA}f(t). \quad (3.36)$$

Integrando-se a expressão, tem-se que

$$c(t) = c(0) + \int_0^t e^{-\tau A} f(\tau) d\tau. \quad (3.37)$$

O valor inicial  $c(0)$  é o valor inicial de  $y(t)$ , uma vez que  $y(0) = Ic(0)$ . Substituindo-se (3.37) em (3.33) obtêm-se

$$y(t) = e^{tA} y_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(\tau) d\tau. \quad (3.38)$$

### • Fórmula Analítica

Dado o sistema representado pela equação (3.1), tem-se a partir do método de variação de parâmetros, uma fórmula para a solução, escrita em função da solução dinâmica do sistema, expressa por

$$y(t) = h(t) A_1 y_0 + \int_0^t h(t-\tau) g(\tau) d\tau, \quad (3.39)$$

onde a função  $h(t)$  satisfaz o problema homogêneo

$$A_1 \dot{h}(t) + A_0 h(t) = 0, \quad (3.40)$$

com condição inicial  $A_1 h(0) = I$ . A solução deste problema é expressa por

$$h(t) = e^{-(A_1^{-1} A_0)t} A_1^{-1}. \quad (3.41)$$

Então, fazendo-se  $A = -A_1^{-1} A_0$  e  $f(t) = A_1^{-1} g(t)$  o sistema linear (3.1) pode ser escrito na forma normal

$$\frac{dy}{dt}(t) = Ay(t) + f(t), \quad (3.42)$$

cujas solução é dada por

$$y(t) = h(t) y_0 + \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad (3.43)$$

sendo  $h(t) = e^{tA}$ .

A função matricial  $h(t)$  pode ser obtida como caso particular da fórmula analítica obtida por [Claeyssen, 1990b] para equações de ordem arbitrária. Ela é definida pela expressão

$$h(t) = e^{tA} = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=0}^{j-1} b_{n-k} d^{(j-1-k)}(t) h_{n-j} \right). \quad (3.44)$$

A equação (3.44) envolve três equações características dos tipos algébrica, diferencial e em diferenças. A equação algébrica corresponde ao polinômio característico

$$P(s) = \det(Is - A) = \sum_{k=0}^n b_k s^k, \quad (3.45)$$

associado ao sistema (3.42) o qual fornece os valores dos coeficientes  $b_k$ . A função temporal  $d(t)$  cujas derivadas aparecem na equação (3.44), satisfaz o problema de valor inicial dado por

$$b_n d^{(n)}(t) + b_{n-1} d^{(n-1)}(t) + \dots + b_1 \dot{d}(t) + b_0 d(t) = 0, \quad (3.46)$$

com condições iniciais

$$d(0) = 0, \quad \dot{d}(0) = 0, \dots, \quad d^{(n-2)}(0) = 0, \quad b_n d^{(n-1)}(0) = 1. \quad (3.47)$$

E por último, a função discreta  $h_k$  satisfaz a equação matricial em diferenças

$$h_{k+1} = Ah_k, \quad (3.48)$$

onde  $h_k = h^{(k)}(0)$  e o valor inicial  $h_0 = I$ .

### • Método Polinomial

As funções matriciais da forma

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \frac{A^k}{k!}, \quad (3.49)$$

obtidas a partir de séries de potências do tipo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}, \quad (3.50)$$

pela substituição da variável  $x$  pela variável matricial  $A$  de ordem  $n$ , podem ser calculadas com o uso do teorema de Cayley-Hamilton. Da divisão

$$\frac{f(x)}{p(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{p(x)}, \quad (3.51)$$

resulta que

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x), \quad (3.52)$$

onde

$$p(x) = \det[Ix - A],$$

corresponde ao polinômio característico da matriz  $A$ , de grau  $n$  e

$$r(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} x^{n-k}, \quad (3.53)$$

um polinômio de grau  $n - 1$ . Segue-se,

$$f(A) = q(A)p(A) + r(A) = r(A), \quad (3.54)$$

uma vez que, pelo teorema de Cayley-Hamilton,  $p(A) = 0$ . Assim,

$$f(A) = r(A) = a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1A + a_0I, \quad (3.55)$$

onde os escalares  $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$  são determinados conforme segue.

Para cada autovalor  $\lambda_j$  de  $A$ , tem-se de (3.52) que

$$f(\lambda_j) = r(\lambda_j), \quad (3.56)$$

pois  $p(\lambda_j) = 0$ .

Se  $\lambda_j$  é um autovalor duplo de  $A$ , considere-se

$$p(\lambda_j) = 0, \dot{p}(\lambda_j) = 0, \ddot{p}(\lambda_j) \neq 0. \quad (3.57)$$

Derivando-se (3.52), decorre que

$$\dot{f}(\lambda_j) = p(\lambda_j)\dot{q}(\lambda_j) + \dot{p}(\lambda_j)q(\lambda_j) + \dot{r}(\lambda_j) = \dot{r}(\lambda_j).$$

Em geral, para cada autovalor  $\lambda$  de multiplicidade  $k$ , sendo  $k \geq 1$ , formula-se as seguintes equações

$$\begin{aligned} \dot{f}(\lambda)|_{\lambda=\lambda_j} &= \dot{r}(\lambda)|_{\lambda=\lambda_j} \\ \ddot{f}(\lambda)|_{\lambda=\lambda_j} &= \ddot{r}(\lambda)|_{\lambda=\lambda_j} \\ \vdots &= \vdots \\ f^{k-1}(\lambda)|_{\lambda=\lambda_j} &= r^{k-1}(\lambda)|_{\lambda=\lambda_j} \end{aligned} \quad (3.58)$$

que envolvem as derivadas de  $f(\lambda)$  e  $r(\lambda)$  com respeito a  $\lambda$ .

Resolve-se então, o sistema de  $n$  equações (3.58), para os  $s$  autovalores distintos  $\lambda_j$ , com multiplicidade  $m_j$ ,  $j = 1 : m$ , tais que  $m_1 + m_2 + \dots + m_s = n$ ; obtendo-se dessa forma, os valores dos coeficientes  $a_k$  e assim, tem-se a expressão para  $f(A)$  através da equação (3.55).

A fim de ilustrar a aplicação dos diferentes métodos espectrais e não-espectrais na solução de sistemas lineares de primeira ordem, apresenta-se um modelo na área de dinâmica de controle de sistemas.

### 3.1.2 Modelo de Rastreamento de Aeronaves Rígidas

A dinâmica de muitos aviões pode ser modelada considerando-os como corpos rígidos que sofrem ação de forças do tipo gravitacional, aerodinâmica e de propulsão, mostradas na Fig. 3.1.

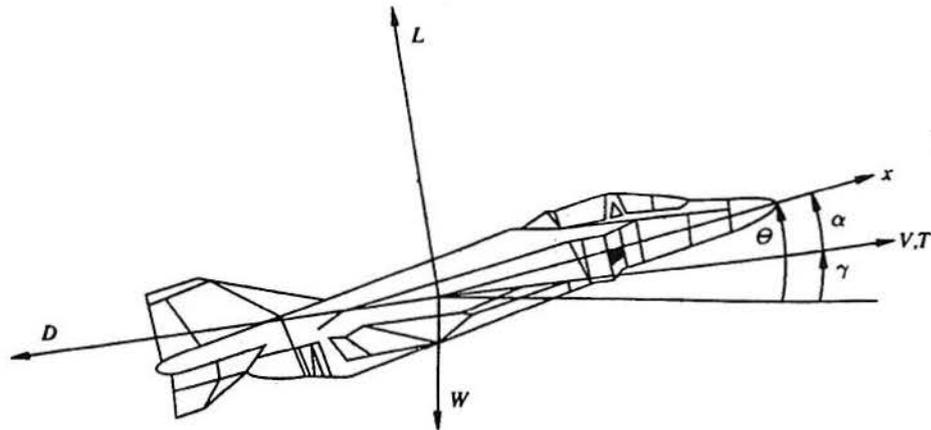


Figura 3.1 Forças que agem em uma aeronave

De acordo com [Bryson, 1994], as forças atuantes são a elevação causada pela aerodinâmica das asas que atua perpendicularmente a velocidade, denotada por  $L$ ; o empuxo  $T$  produzido pelos motores do avião na direção do vetor velocidade; as forças de arraste, que correspondem a forças aerodinâmicas que se opõem ao empuxo, normalmente são proporcionais à velocidade, dadas por  $D$  e o peso  $W$ , força devido a gravidade que atua perpendicularmente ao horizonte.

Os movimentos das aeronaves podem ser descritos fornecendo-se a posição e a velocidade do centro de massa e, a orientação e velocidade angular de um conjunto de eixos fixos no corpo em relação a um conjunto de eixos de referência. Usualmente, é conveniente escolher eixos de referência fixados em relação a terra. Considerando-se que a velocidade dos aviões é pequena se comparada com a velocidade orbital, pode ser assumido que os eixos de referência fixos a terra podem ser aproximados como eixos inerciais.

As equações dinâmicas do movimento são formuladas em termos da aceleração inercial  $\dot{\mathbf{v}}$  e da aceleração angular  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_B$ , cujas componentes da velocidade do centro de massa e velocidade angular em relação aos eixos de referência são denotadas por  $\mathbf{v} = [u, v, w]$  e  $\boldsymbol{\omega}_B = [p, q, r]$ , respectivamente.

As equações cinemáticas relacionam as taxas de localização do centro de massa do avião no sistema de eixos de referência  $[x, y, z]$  com a velocidade do corpo e, as taxas dos ângulos de Euler  $[\psi, \theta, \phi]$  com as componentes da velocidade angular.

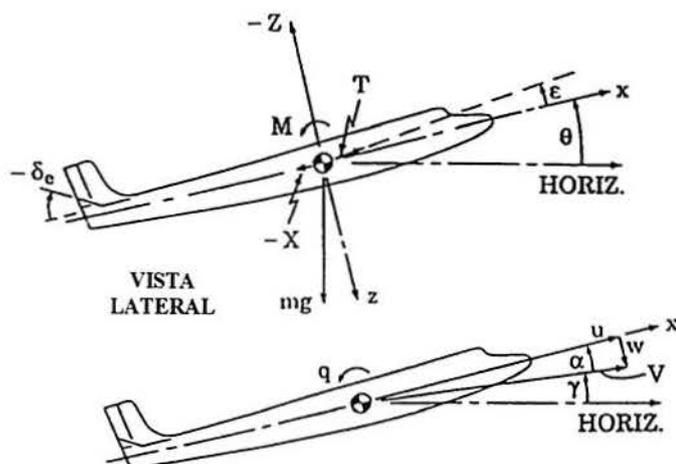


Figura 3.2 Nomenclatura para movimentos longitudinais de uma aeronave

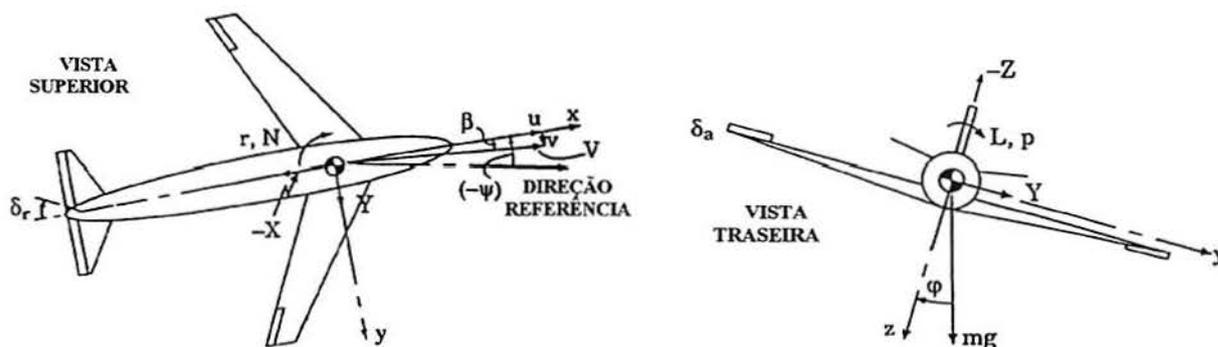


Figura 3.3 Nomenclatura para movimentos laterais de uma aeronave

Os movimentos longitudinais e laterais de uma aeronave são descritos empregando-se, usualmente, eixos alinhados aos eixos do avião, conforme mostram Figs. 3.2 e 3.3. Tais movimentos são monitorados pelo deslocamento de superfícies de controle sobre asas e cauda (ailerões, flaps e lemes) que podem trocar a inclinação, de modo que as forças aerodinâmicas mudam a orientação da ponta do avião. A Fig. 3.4, ilustra o comportamento do ângulo de inclinação sob a ação de diferentes deflexões nos ailerões.

Com o objetivo de ilustrar problemas de controle de rastreamento ou de dinâmica longitudinal e lateral de aeronaves será considerado neste trabalho, conforme [Lyshevski, 2001], um modelo linearizado para um avião caça.

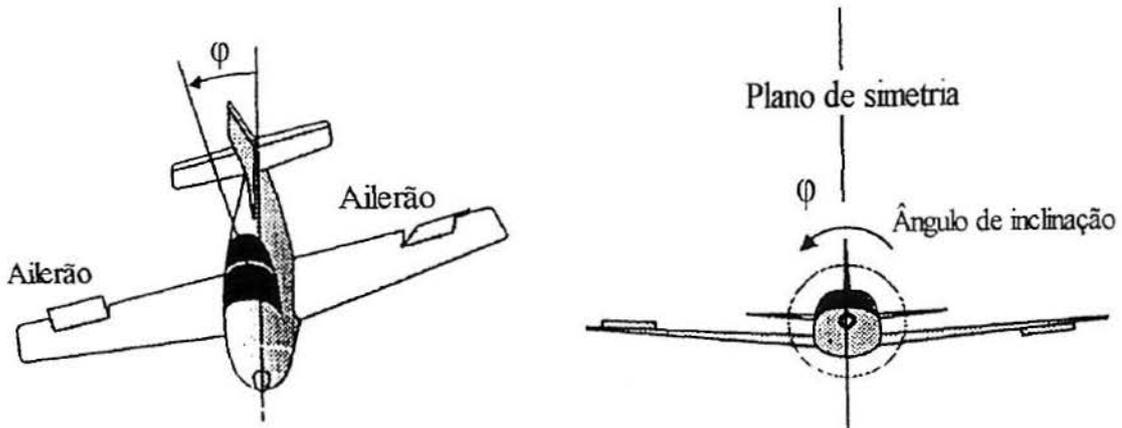


Figura 3.4 Controle do ângulo de inclinação através dos ailerões

O vetor velocidade é denotado por  $v$  [ $m/s$ ], sendo que o ângulo de ataque dado por  $\alpha$  [ $rad$ ], fornece a direção do vetor velocidade  $v$ , ou seja, corresponde ao ângulo formado entre o vetor velocidade do avião e o eixo  $x$  de orientação do seu corpo. O ângulo de inclinação longitudinal, formado entre o horizonte e o eixo  $x$  do avião denotado por  $\theta$  [ $rad$ ], o ângulo de giro em torno do eixo paralelo ao eixo normal do avião dado por  $\varphi$  [ $rad$ ] e o ângulo de rolamento longitudinal dado por  $\psi$  [ $rad$ ] são denominados na literatura de ângulos de Euler; sendo que as respectivas taxas de variações serão denotadas por  $q$ ,  $p$  e  $r$  [ $rad/s$ ]. O ângulo de deslizamento lateral será dado por  $\beta$  [ $rad$ ], as deflexões dos estabilizadores horizontais direito e esquerdo por  $\delta_{HR}(t)$  e  $\delta_{HL}(t)$  [ $rad$ ], respectivamente; os parâmetros  $\delta_{FR}(t)$  e  $\delta_{FL}(t)$  [ $rad$ ] corresponderão as deflexões dos flaps direito e esquerdo, respectivamente;  $\delta_C(t)$  e  $\delta_R(t)$  [ $rad$ ] as deflexões do comando dianteiro e do leme, respectivamente.

A altitude do avião está relacionada com o seu ângulo de inclinação, o qual indica se este está direcionado para cima ou para baixo. Normalmente o avião ascende suavemente, de modo que a aerodinâmica de suas asas produz a elevação suficiente para vencer a gravidade. Não se tem nível de vôo quando  $\theta = 0$  e sim quando  $\theta = \alpha$ . Na Fig. 3.1, se mostra o avião ascendendo, pois têm-se  $\theta > \alpha$ . Para análise das condições de vôo a quantidade de elevação aumenta quando  $\alpha$  também aumenta.

A Dinâmica lateral-longitudinal de uma aeronave pode ser estudada aplicando-se o modelo de espaço de estado, resultando em

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (3.59)$$

onde  $x(t) = x$  é o vetor de estado e,  $u(t) = u$ , o controle de entrada, denotados por

$$x = \begin{bmatrix} v \\ \alpha \\ q \\ \theta \\ \beta \\ p \\ r \\ \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u = \begin{bmatrix} \delta_{HR} \\ \delta_{HL} \\ \delta_{FR} \\ \delta_{FL} \\ \delta_C \\ \delta_R \end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

Considerando-se os coeficientes matriciais  $A$  e  $B$  dados por <sup>1</sup>

$$A = \begin{bmatrix} -0.016 & 8.4 & -0.9 & -9.6 & -1.5 & -0.27 & -0.086 & 0 & 0 \\ -0.003 & -1.2 & 1 & 0 & 0.08 & 0.062 & 0.009 & 0 & 0 \\ -0.0001 & 3.9 & -0.85 & 0 & 0.017 & 0.0038 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.003 & 0.15 & 0.02 & 0.97 & -0.56 & 0.13 & -0.91 & 0 & 0 \\ -0.00001 & 0.71 & 0.03 & 0.01 & -48 & -3.5 & 0.22 & 0 & 0 \\ 0.00001 & -0.94 & 0.06 & 0.005 & 9.2 & -0.028 & -0.51 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

<sup>1</sup>Os valores dos parâmetros encontram-se em [Lyshevski, 2001].

$$B = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.12 & -0.38 & -3.8 & 0 & 0 \\ -0.16 & -0.16 & -0.27 & -0.27 & 0 & 0 \\ -9.5 & -9.5 & -2.5 & -2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.019 & -0.019 & -0.001 & 0.001 & 0.42 & 0.053 \\ -2.9 & 2.9 & -3.1 & 3.1 & 0.73 & 0.92 \\ 3.1 & -3.1 & 0.78 & -0.78 & 0.61 & -0.45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

o modelo é instável. O modelo é então, estabilizado com o uso da técnica de desenho do regulador quadrático, que determina uma matriz de ganho ótima. As simulações numéricas para a obtenção da matriz de ganho foram realizadas usando-se o software MATLAB. Onde resulta o sistema de estado aumentado estável, representado por

$$\dot{\mathcal{X}}_{\Sigma}(t) = \mathcal{A}\mathcal{X}_{\Sigma}(t) + f(t), \quad (3.61)$$

com a saída,  $\mathcal{X}_{\Sigma}(t) = \mathcal{X}_{\Sigma}$  e a entrada,  $f(t) = f$ , sendo vetores de ordem 12, dados por

$$\mathcal{X}_{\Sigma} = \begin{bmatrix} v \\ \alpha \\ q \\ \theta \\ \beta \\ p \\ r \\ \varphi \\ \psi \\ x_{\theta}^{ref} \\ x_{\phi}^{ref} \\ x_{\psi}^{ref} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

O coeficiente matricial

$$A = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 \end{bmatrix},$$

do sistema tem como valores

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.1204 & 7.8278 & -0.8666 & -8.9564 & -1.5962 & -0.2636 \\ -0.0541 & -1.6149 & 0.7321 & -1.4244 & -0.82660.1466 & \\ 0.2823 & -0.2155 & -12.8651 & -74.7071 & -35.7809 & 3.4039 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0040 & 0.0368 & 0.0047 & 0.8903 & -3.6061 & 0.3003 \\ 0.0503 & -0.2064 & -0.0610 & -0.5143 & -47.4985 & -3.4888 \\ -0.0176 & 0.1756 & 0.2366 & 2.1404 & 20.0887 & -2.2848 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.0721 & 0.0418 & -0.0964 & 0.2968 & -0.0056 & 0.0686 \\ 0.1630 & 0.5441 & -0.2064 & 4.6170 & -0.7051 & 0.5457 \\ 6.1769 & 21.8555 & -6.4212 & 186.8032 & -29.4511 & 21.2980 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7924 & 1.1833 & -2.4891 & -1.6853 & -1.2657 & 3.3541 \\ 8.3585 & -3.4970 & 28.1265 & -3.8232 & 27.0789 & -56.5742 \\ -11.5978 & -12.6074 & -34.7830 & 1.0057 & 10.0947 & 58.8791 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0000 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para uma formulação detalhada veja-se [Lyshevski, 2001; Bryson, 1994; Rohrs, 1993].

Com o objetivo de estudar um problema de controle do erro de rastreamento considere-se o sistema sujeito a condições iniciais nulas, desse modo calcula-se a resposta forçada do mesmo.

O sistema de primeira ordem na formulação de espaço de estado, dado pela equação (3.61), foi resolvido utilizando-se os métodos espectrais de variação de parâmetros e superposição linear; os métodos não-espectrais operacional e fórmula analítica, cujas

variáveis fornecem a dinâmica dos movimentos laterais e longitudinais do problema aerodinâmico. Os resultados obtidos através destas técnicas são apresentados nas Figs. 3.5, 3.6 e 3.7.

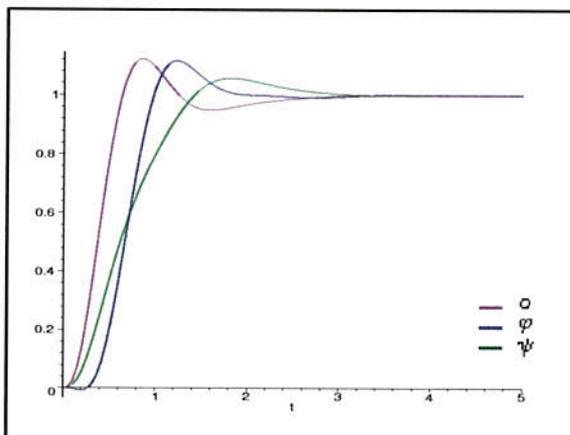


Figura 3.5 Ângulos de Euler

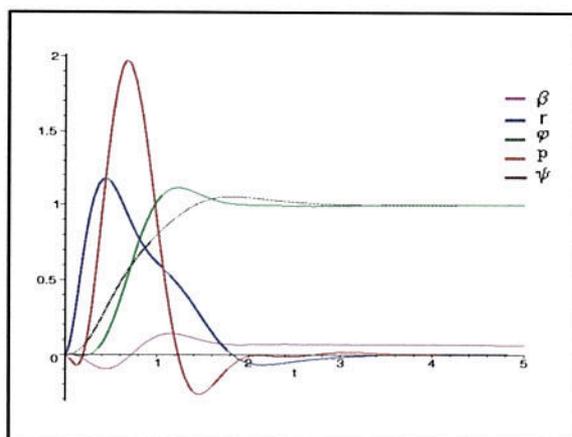


Figura 3.6 Dinâmica lateral

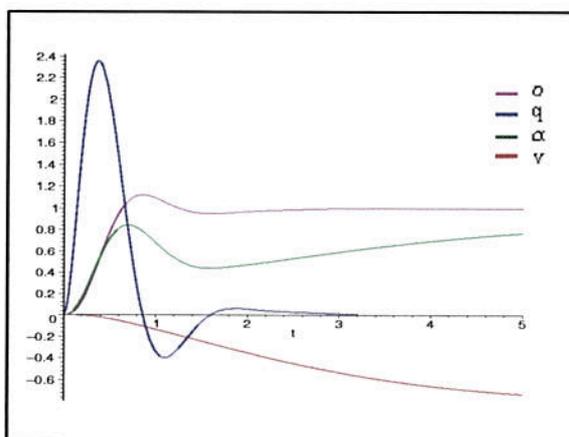


Figura 3.7 Dinâmica longitudinal

O erro de rastreamento é dado por  $e(t) = r_e(t) - y(t)$ , onde  $r_e(t)$  é uma entrada de referência associada aos ângulos de Euler, denotada por

$$r_e(t) = \begin{bmatrix} r_\theta(t) \\ r_\phi(t) \\ r_\psi(t) \end{bmatrix}$$

e

$$y = Hx = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \alpha \\ q \\ \theta \\ \beta \\ p \\ r \\ \varphi \\ \psi \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

### 3.1.3 Sistemas Discretos

Sejam sistemas lineares discretos de primeira ordem, denotados por

$$A_1 y_{k+1} + A_0 y_k = g_k, \quad (3.64)$$

com condição inicial em  $k = 0$  dada por  $y_0 = y_0$ .

Em geral, na literatura o sistema (3.64) é colocado na forma normal, isto é, expresso por

$$y_{k+1} = A y_k + f_k, \quad (3.65)$$

onde  $A = -A_1^{-1}A_0$  e  $f_k = A_1^{-1}g_k$ . Desse modo, todas as translações de  $y_k$  podem ser obtidas diretamente da equação e assim, utilizadas em métodos que as requeram.

Por exemplo, a partir da solução da equação

$$h_{k+1} = Ah_k, \quad (3.66)$$

com condição inicial  $h_0 = I$ , obtêm-se por iterações, potências da matriz  $A$ , ou seja, a solução deste problema corresponde à resposta impulso discreta  $h_k$ , dada por

$$h_k = A^k. \quad (3.67)$$

De maneira análoga ao caso contínuo, a fórmula de variação de parâmetros no caso discreto é escrita

$$y_k = A^k y_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} f_j. \quad (3.68)$$

Outra derivação desta fórmula será realizada através do método de variação de parâmetros.

Na formulação de espaço de estado a matriz  $A$  do sistema (3.65) corresponde a matriz companheira do sistema de ordem  $N$ , denotado por (2.46), cujas potências têm sido identificadas por [Claeyssen, 1990b], [Claeyssen, 1999], em termos dos elementos da base dinâmica  $[h_{0,k}, h_{1,k}, \dots, h_{N-1,k}]$ , onde  $h_{N-1,k} = h_k$  corresponde à resposta impulso do sistema (2.46), expresso por

$$\sum_{j=0}^N A_j y_{k+j} = f_k. \quad (3.69)$$

Mais precisamente,

$$A^k = \begin{bmatrix} h_{0,k} & h_{1,k} & \cdots & h_{N-2,k} & h_k A_N \\ h_{0,k+1} & h_{1,k+1} & \cdots & h_{N-2,k+1} & h_{k+1} A_N \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ h_{0,k+N-1} & h_{1,k+N-1} & \cdots & h_{N-2,k+N-1} & h_{k+N-1} A_N \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

Nas próximas subseções apresenta-se de forma mais detalhada alguns métodos para resolução de sistemas lineares de primeira ordem.

### 3.1.3.1 Métodos Espectrais

Os métodos espectrais aplicam-se, na prática, na resolução de sistemas lineares discretos desde que, a matriz associada ao sistema seja diagonalizável (não-defeituosa), em outras palavras, que gere uma base de autovetores. Suponha-se  $A$  uma matriz não-defeituosa de ordem  $n$ , cujos autovalores são denotados por  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  e os autovetores correspondentes dados por  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ .

#### • Superposição Linear

Procura-se solução para o sistema discreto (3.65), com condição inicial  $y_0 = y_0$ , da forma

$$y_k = y_k^h + y_k^p. \quad (3.71)$$

A solução homogênea é escrita como combinação linear das  $n$  autofunções do tipo  $\lambda^k v$ , ou seja,

$$y_k^h = c_1 \lambda_1^k v_1 + c_2 \lambda_2^k v_2 + \dots + c_n \lambda_n^k v_n. \quad (3.72)$$

No caso de autovalor nulo,  $\lambda_1 = 0$ , considera-se  $\delta_{ok}$ , ao invés de  $\lambda_1^k$ . Uma solução particular do sistema pode ser decomposta em um somatório de  $n$  soluções particulares, sendo cada uma delas do mesmo tipo que as correspondentes componentes da entrada  $f_k$ , escrita como combinação linear dos autovetores. Em outras palavras, escreve-se em primeiro lugar o termo forçante  $f_k$  como combinação linear da base de autovetores, ou seja,

$$f_k = PP^{-1}f_k = d_{1,k}v_1 + d_{2,k}v_2 + \dots + d_{n,k}v_n, \quad (3.73)$$

sendo  $P$  e  $P^{-1}$  expressos por (3.12). Assim,  $w_i^T v_j = \delta_{i,j}$  para  $i, j = 1 : n$  e  $d_{i,k} = w_i^T f_k$  para cada  $i = 1 : n$ . Caso a matriz  $A$  seja simétrica, o cálculo fica simplificado, pois  $P^{-1} = P^T$  resultando em  $d_{j,k} = v_j^T f_k$ .

Procura-se então uma solução particular da forma

$$y_k^p = y_{1,k}^p + y_{2,k}^p + \cdots + y_{n,k}^p, \quad (3.74)$$

com  $y_{j,k}^p$  do mesmo tipo que a componente  $d_{j,k}v_j$  do forçante  $f_k$ , relativa ao autovetor  $v_j$ . Então, as  $j$ -ésimas soluções particulares são tais que

$$y_{j,k}^p = g_{j,k}v_j. \quad (3.75)$$

Para determinar os valores dos coeficientes  $g_{j,k}$  resolve-se o sistema equivalente desacoplado,

$$g_{j,k+1} = \lambda_j g_{j,k} + d_{j,k}, \quad \text{para } j = 1 : n, \quad (3.76)$$

resultante da substituição da expressão (3.75) para  $y_{j,k}^p$  no sistema original (3.65). Assim, a solução particular não-homogênea para a equação discreta (3.76) é dada por

$$g_{j,k} = \sum_{r=0}^{k-1} \lambda_j^{k-1-r} d_{j,r}. \quad (3.77)$$

As constantes  $c_k$  da parte homogênea expressa por (3.72) podem ser calculadas a partir do valor inicial da solução  $y_k$  para  $k = 0$ , resultando no vetor

$$c = P^{-1}(y_0 - y_0^p),$$

gerado por essas constantes.

### • Variação de Parâmetros

Procura-se solução do sistema (3.65) expressa como combinação linear das autofunções do sistema, ou seja,

$$y_k = c_{1,k}\lambda_1^k v_1 + c_{2,k}\lambda_2^k v_2 + \cdots + c_{n,k}\lambda_n^k v_n, \quad (3.78)$$

sendo que os coeficientes são funções também na variável discreta  $k$ .

Como foi desenvolvido no item anterior, a entrada  $f_k$  é decomposta na base espectral. E o cálculo dos coeficientes  $c_{j,k}$  da solução (3.78) é feito a partir de uma translação unitária nesta expressão com a substituição dos resultados no sistema (3.65); obtêm-se assim,  $n$  equações escalares discretas de primeira ordem desacopladas, dadas por

$$c_{j,k+1} = c_{j,k} + \lambda_j^{-k-1} d_{j,k}, \quad \text{para } j = 1 : n, \quad (3.79)$$

cuja solução é

$$c_{j,k} = \sum_{r=0}^{k-1} \lambda_j^{-r-1} d_{j,r} + c_{j,0}. \quad (3.80)$$

Os coeficientes  $c_{j,0}$  para  $j = 1 : n$  são obtidos aplicando-se a condição inicial do problema. Decorre, que o vetor composto por estes coeficientes e denotado por  $c_0$  é igual  $P^{-1}y_0$ .

#### • Desacoplamento Matricial Utilizando-se Mudanças de Variáveis

Supondo-se que a matriz  $A$  seja diagonalizável, têm-se que  $A = PDP^{-1}$ , onde a matriz  $D$  é uma matriz diagonal denominada *matriz espectral*, cujos elementos da sua diagonal são os autovalores de  $A$  e a matriz  $P$  a *matriz modal*.

Multiplicando-se o sistema (3.65) por  $P^{-1}$  em ambos os membros têm-se

$$P^{-1}y_{k+1} = DP^{-1}y_k + P^{-1}f_k. \quad (3.81)$$

Considerando-se as mudanças de variáveis

$$q_k = P^{-1}y_k, \quad (3.82)$$

$$g_k = P^{-1}f_k, \quad (3.83)$$

resulta um sistema discreto diagonal equivalente expresso por

$$q_{k+1} = Dq_k + g_k, \quad (3.84)$$

que permite obter cada componente  $q_{j,k}$  resolvendo-se as  $n$  equações desacopladas do tipo

$$q_{j,k+1} = \lambda_j q_{j,k} + g_{j,k}, \quad \text{para } j = 1 : n, \quad (3.85)$$

cuja solução é dada por

$$q_{j,k} = \lambda_j^k q_{j,0} + \left( \sum_{r=0}^{k-1} \lambda_j^{k-1-r} g_{j,k} \right), \quad (3.86)$$

sendo os termos  $q_{j,0}$ , para  $j = 0 : n$ , calculados a partir da equação (3.82), isto é, o vetor  $q_0$  gerado por estes termos é igual  $P^{-1}y_0$ .

Assim, a solução do sistema (3.65) fica determinada a partir de

$$y_k = Pq_k. \quad (3.87)$$

- **Desacoplamento Matricial Através da Fórmula Decorrente do Método de Variação de Parâmetros**

De acordo com o método de variação de parâmetros, procura-se uma solução para o sistema (3.65) da forma

$$y_k = A^k c_k. \quad (3.88)$$

Decorre, então da fórmula

$$y_k = A^k y_0 + \left( \sum_{r=0}^{k-1} A^{k-1-r} f_r \right). \quad (3.89)$$

Mas sendo a matriz  $A$  diagonalizável, tem-se que  $A = PDP^{-1}$ . Desta forma o cálculo das potências de  $A$  torna-se mais simples, ou seja,

$$A^k = (PDP^{-1})^k = PD^k P^{-1}. \quad (3.90)$$

A solução de (3.65) é então dada pela expressão

$$y_k = PD^k P^{-1} y_0 + \left( \sum_{r=0}^{k-1} PD^{k-1-r} P^{-1} f_r \right), \quad (3.91)$$

onde

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}. \quad (3.92)$$

### 3.1.3.2 Métodos Não-Espectrais

Os métodos não-espectrais abordados nesta subseção são os métodos operacional discreto (transformada  $\mathcal{Z}$ ), a fórmula discreta e o método polinomial; sendo que estes não utilizam os autovetores associados ao sistema.

#### • Método Operacional

Aplicando-se a transformada  $\mathcal{Z}$  em ambos os lados do sistema (3.65) e utilizando-se a condição inicial dada, têm-se que

$$(Iz - A)Y(z) - zy_0 = F(z). \quad (3.93)$$

Considere-se

$$\Delta(z) = Iz - A, \quad (3.94)$$

que denota uma função matricial de primeira ordem na variável  $z$ ; resulta então

$$Y(z) = H(z)y_0 + H(z)\frac{F(z)}{z}, \quad (3.95)$$

onde

$$H(z) = z\Delta(z)^{-1}. \quad (3.96)$$

**OBSERVAÇÃO:**

O termo  $\Delta(z)^{-1}$  corresponde ao fator de transferência para entradas  $f_k = z^k v$ , cuja saída é do mesmo tipo, denotada por  $y_k = z^k w$ . Sendo que, pelo método de coeficientes a determinar, têm-se

$$w = \frac{H(z)}{z} v.$$

Finalmente, aplica-se a transformada inversa  $\mathcal{Z}$  a fim de retornar-se a variável original do problema.

- **Fórmula Discreta**

Dado o sistema representado pela equação (3.64), tem-se pelo método de variação de parâmetros, uma fórmula para a solução; sendo esta escrita em função da solução dinâmica do sistema

$$y_k = h_k A_1 y_0 + \left( \sum_{r=0}^{k-1} h_{k-1-r} g_r \right), \quad (3.97)$$

onde a função  $h_k$  satisfaz o problema de valor inicial discreto

$$A_1 h_{k+1} + A_0 h_k = 0, \quad (3.98)$$

com condição inicial  $A_1 h_0 = I$ . A solução deste problema homogêneo é expressa por

$$h_k = (-1)^k (A_1^{-1} A_0)^k A_1^{-1}. \quad (3.99)$$

Por conveniência, considera-se o sistema linear (3.64) escrito na forma

$$y_{k+1} = A y_k + f_k, \quad (3.100)$$

cujas solução é dada por

$$y_k = h_k y_0 + \sum_{r=0}^{k-1} h_{k-1-r} f_r, \quad (3.101)$$

onde  $h_k = A^k$ .

A função matricial  $h_k$ , pode ser obtida a partir da extensão da fórmula analítica dada pela expressão (3.44), uma vez que

$$A^k = \left. \frac{d^k e^{tA}}{dt^k} \right|_{t=0}. \quad (3.102)$$

Assim,

$$A^k = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{l=0}^{j-1} b_{n-l} d^{(k+j-1-l)}(0) h_{n-j} \right). \quad (3.103)$$

Fazendo-se  $d_k = d^{(k)}(0)$ , decorre de (3.44), que  $d_k$  satisfaz a equação escalar em diferenças de ordem  $n$

$$b_n d_{k+n} + b_{n-1} d_{k+n-1} + \cdots + b_1 d_{k+1} + b_0 d_k = 0, \quad (3.104)$$

com valores iniciais

$$d_0 = 0, d_1 = 0, \cdots, d_{n-2} = 0, b_n d_{n-1} = 1. \quad (3.105)$$

Os parâmetros  $b_k$  são os coeficientes do polinômio característico

$$P(z) = \det(Iz - A) = \sum_{k=0}^n b_k z^k. \quad (3.106)$$

E a função discreta  $h_k = h^{(k)}(0)$  satisfaz a equação matricial em diferenças

$$h_{k+1} = Ah_k, \quad (3.107)$$

sendo o valor inicial  $h_0 = I$ .

### • Método Polinomial

A maior dificuldade no cálculo da solução do sistema de primeira ordem (3.65) é a obtenção das potências da matriz  $A$ . O método polinomial, introduzido para o caso contínuo, permite calcular estas potências com o uso da função  $f(z) = z^k$ . Segue-se, então

que

$$f(A) = A^k = r(A) = a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1A + a_0I, \quad (3.108)$$

onde os escalares  $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$  são determinados de forma análoga ao caso contínuo, isto é, resolve-se o sistema de  $n$  equações dado por (3.58) para os  $s$  autovalores distintos  $\lambda_j$  com multiplicidade  $m_j, j = 1 : m$  tais que  $m_1 + m_2 + \cdots + m_s = n$ . Assim, a expressão para  $f(A)$  pode ser calculada.

### 3.2 Sistemas Lineares de Ordem Superior

Nesta seção são descritas algumas técnicas analíticas gerais para a resolução de sistemas lineares concentrados e discretos de ordem superior através de métodos espectrais e não espectrais.

#### 3.2.1 Técnicas Básicas de Resolução para Sistemas Concentrados

Considere-se sistemas lineares concentrados de ordem  $N$  da forma

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{d^j y}{dt^j}(t) = f(t), \quad (3.109)$$

com condições iniciais dadas por

$$y(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0), \dots, \frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}}(t_0). \quad (3.110)$$

##### 3.2.1.1 Métodos Espectrais

O método espectral para resolução de sistemas descritos pela equação (3.109), aplica-se aqui, quando o problema associado de autovalor

$$\left( \sum_{j=0}^N A_j \lambda^j \right) v = 0, \quad \text{para } v \neq 0, \quad (3.111)$$

gera a partir de seus  $Nn$  autovalores  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{Nn})$  e dos autovetores correspondentes  $(v_1, v_2, \dots, v_{Nn})$ , uma matriz  $V$  de ordem  $Nn$ , denotada por

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{Nn} \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_{Nn} v_{Nn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} v_1 & \lambda_2^{N-1} v_2 & \cdots & \lambda_{Nn}^{N-1} v_{Nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_o \\ V_o D \\ \vdots \\ V_o D^{N-1} \end{bmatrix}, \quad (3.112)$$

cujas colunas são linearmente independentes. Nesta expressão,  $D$  é a *matriz espectral*, uma matriz diagonal de ordem  $Nn$ , cujos elementos da diagonal correspondem autovalores do problema e  $V_o$  é a matriz, cujas colunas são os autovetores associados; isto é,

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{Nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V_o = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_{Nn}]. \quad (3.113)$$

Em particular, este resultado é satisfeito quando o sistema possui todos os autovalores distintos. A técnica de superposição linear é usualmente utilizada quando têm-se uma entrada simples do tipo exponencial, trigonométrica ou polinomial entre outras; porém, o método de variação de parâmetros aplica-se para entradas quaisquer.

### • Cálculo da Resposta Livre Através do Método de Superposição Linear

Procuram-se respostas livres na forma

$$y(t) = \sum_{j=0}^{Nn} c_j e^{\lambda_j t} v_j, \quad (3.114)$$

onde as constantes  $c_j$  são obtidas resolvendo-se o sistema

$$\begin{cases} c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_{Nn} v_{Nn} & = y_0 \\ c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + c_{Nn} \lambda_{Nn} v_{Nn} & = \dot{y}_0 \\ \vdots & = \vdots \\ c_1 \lambda_1^{N-1} v_1 + c_2 \lambda_2^{N-1} v_2 + \cdots + c_{Nn} \lambda_{Nn}^{N-1} v_{Nn} & = y_0^{N-1} \end{cases},$$

cujas matrizes dos coeficientes correspondem a matriz  $V$ .

- **Cálculo da Resposta Total do Sistema Através do Método de Variação de Parâmetros Utilizando-se a Base Espectral**

Procura-se para o sistema (3.109) uma resposta da forma

$$y(t) = c_1(t)e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2(t)e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + c_{Nn}(t)e^{\lambda_{Nn} t} v_{Nn}. \quad (3.115)$$

O cálculo das derivadas de  $y(t)$  é simplificado com as condições de Lagrange

$$\sum_{j=1}^{Nn} \dot{c}_j(t) \lambda_j^{k-1} e^{\lambda_j t} v_j = 0, \quad \text{para } k = 1 : N - 1, \quad (3.116)$$

de modo que,

$$y^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{Nn} c_j(t) \lambda_j^k e^{\lambda_j t} v_j, \quad \text{para } k = 1 : N - 1. \quad (3.117)$$

Substituindo-se a expressão para  $y(t)$  e de suas derivadas (3.117) na equação (3.109), resulta que

$$A_N \sum_{j=1}^{Nn} \dot{c}_j(t) \lambda_j^{N-1} e^{\lambda_j t} v_j = f(t). \quad (3.118)$$

Assim, as  $N$  equações descritas por (3.116) e (3.118) formam o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{Nn} \dot{c}_j(t) e^{\lambda_j t} v_j = 0 \\ \sum_{j=1}^{Nn} \dot{c}_j(t) \lambda_j e^{\lambda_j t} v_j = 0 \\ \vdots = \vdots \\ \sum_{j=1}^{Nn} \dot{c}_j(t) \lambda_j^{N-2} e^{\lambda_j t} v_j = 0 \\ \sum_{j=1}^{Nn} \dot{c}_j(t) \lambda_j^{N-1} e^{\lambda_j t} A_N v_j = f(t) \end{array} \right.$$

em  $\dot{c}_j(t)$ , que pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{Nn} \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_{Nn} v_{Nn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} v_1 & \lambda_2^{N-1} v_2 & \cdots & \lambda_{Nn}^{N-1} v_{Nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_{Nn} t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{c}_{Nn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1} f(t) \end{bmatrix}. \quad (3.119)$$

O sistema pode ser representado de forma compacta por

$$V e^{Dt} \dot{c}(t) = \mathcal{F}(t), \quad (3.120)$$

onde denota-se

$$V = \begin{bmatrix} V_o \\ V_o D \\ \vdots \\ V_o D^{N-1} \end{bmatrix}, \quad e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_{Nn} t} \end{bmatrix}, \quad (3.121)$$

$$\dot{c}(t) = \begin{bmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{c}_{Nn}(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1} f(t) \end{bmatrix}. \quad (3.122)$$

Resolvendo-se (3.120) em termos das componentes do vetor  $\dot{c}(t)$  resulta

$$\dot{c}(t) = (Ve^{Dt})^{-1} \mathcal{F}(t), \quad (3.123)$$

sendo que a solução desta equação diferencial matricial de primeira ordem, para  $t = 0$ , pode ser expressa por

$$c(t) = c(0) + \int_0^t e^{-D\tau} V^{-1} \mathcal{F}(\tau) d\tau. \quad (3.124)$$

Assim, a solução (3.115) pode ser escrita como

$$y(t) = V_0 e^{Dt} c(0) + \int_0^t V_0 e^{D(t-\tau)} V^{-1} \mathcal{F}(\tau) d\tau, \quad (3.125)$$

onde o vetor inicial  $c(0)$  é obtido a partir das condições iniciais do problema, isto é,

$$c(0) = V^{-1} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (3.126)$$

### 3.2.1.2 Métodos Não-Espectrais

Nesta subsecção aborda-se o método de variação de parâmetros, utilizando-se uma base qualquer e o método operacional que utiliza a transformada de Laplace, já introduzido em sistemas de primeira ordem. Com o uso do método operacional uma fórmula para a resposta impulso foi obtida por [Claeyssen, 1990b].

- **Cálculo da Resposta Total Através do Método de Variação de Parâmetros Utilizando-se uma Base Qualquer**

A resposta total para sistemas concentrados do tipo (3.109) pode ser escrita da forma

$$y(t) = c_1(t)\phi_1(t) + c_2(t)\phi_2(t) + \dots + c_{N_n}(t)\phi_{N_n}(t) = \Phi(t)c(t), \quad (3.127)$$

onde  $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_{Nn}]$  é uma base do sistema.

Para determinar as funções  $c_j(t)$  assume-se as condições de Lagrange

$$\Phi(t)c^{(k)}(t) = 0, \quad \text{para } k = 1 : N - 1. \quad (3.128)$$

Assim, resulta que as  $k$ -ésimas derivadas de  $y(t)$  são da forma

$$y^{(k)}(t) = \Phi^{(k)}(t)c(t), \quad \text{para } k = 1 : N - 1. \quad (3.129)$$

Substituindo-se a expressão para  $y(t)$ , dada por (3.127) e, para suas derivadas (3.129) na equação (3.109), resulta

$$A_N \Phi^{(N-1)}(t) \dot{c}(t) = f(t). \quad (3.130)$$

Desta forma, as  $N$  equações descritas por (3.128) e (3.130) formam o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{Nn} \dot{c}_j(t) \phi_j(t) v_j = 0 \\ \sum_{j=1}^{Nn} \dot{c}_j(t) \dot{\phi}_j(t) v_j = 0 \\ \vdots = \vdots \\ \sum_{j=1}^{Nn} \dot{c}_j(t) \phi_j^{(N-2)}(t) v_j = 0 \\ \sum_{j=1}^{Nn} \dot{c}_j(t) \phi_j^{(N-1)}(t) A_N v_j = f(t) \end{array} \right.$$

que pode ser escrito na forma matricial por

$$\begin{bmatrix} \phi_1(t)v_1 & \phi_2(t)v_2 & \cdots & \phi_{Nn}(t)v_{Nn} \\ \dot{\phi}_1(t)v_1 & \dot{\phi}_2(t)v_2 & \cdots & \dot{\phi}_{Nn}(t)v_{Nn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_1^{(N-1)}(t)v_1 & \phi_2^{(N-1)}(t)v_2 & \cdots & \phi_{Nn}^{(N-1)}(t)v_{Nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{c}_{Nn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1} f(t) \end{bmatrix}. \quad (3.131)$$

Denotando-se,

$$V = \begin{bmatrix} V_o \\ \dot{V}_o \\ \vdots \\ V_o^{(N-1)} \end{bmatrix}, \quad \dot{c}(t) = \begin{bmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{c}_{Nn}(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1}f(t) \end{bmatrix}, \quad (3.132)$$

o sistema pode ser representado na forma compacta

$$V\dot{c}(t) = \mathcal{F}(t). \quad (3.133)$$

Resolvendo-o em termos das componentes do vetor  $\dot{c}(t)$  obtém-se

$$\dot{c}(t) = V^{-1}\mathcal{F}(t). \quad (3.134)$$

A solução desta equação para  $t = 0$  é dada por

$$c(t) = c(0) + \int_0^t V^{-1}(\tau)\mathcal{F}(\tau)d\tau. \quad (3.135)$$

Assim, a solução (3.115) pode ser escrita na forma

$$y(t) = V_o c(0) + \int_0^t V_o(\tau)V^{-1}(\tau)\mathcal{F}(\tau)d\tau, \quad (3.136)$$

sendo o vetor inicial  $c(0)$  obtido a partir das condições iniciais do problema, isto é,

$$c(0) = V^{-1} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (3.137)$$

### • Fórmula Analítica

Utilizando-se o método operacional, [Claeyssen, 1990a] obteve uma fórmula não modal para a solução dinâmica de sistemas de segunda ordem. Junto com esta fórmula, várias propriedades da solução dinâmica foram obtidas. No trabalho de [Claeyssen, 1990b], esta fórmula foi estendida para sistemas de ordem arbitrária. Recentemente, [Claeyssen, 1999] obteve de maneira direta esses resultados, isto é, sem o uso do artifício encontrado na literatura, de utilizar a redução de Hamilton para uma equação de estado de primeira ordem; veja-se [Newland, 1989], [Ogata, 1998].

Os métodos numéricos podem ser considerados em dois grandes grupos: aqueles que consideram o cálculo aproximado de fórmulas e propriedades para  $h(t)$  e, os que de maneira direta, integram numericamente a equação do sistema com o uso de diferenças finitas ou interpolação. Os sistemas de primeira ordem foram abordados exaustivamente, veja-se [Moler, 1978], [Golub, 1996].

A solução dinâmica  $h(t)$  e a matriz de transferência  $H(s)$ , têm sido estabelecidas nos trabalhos de [Claeyssen, 1990a], [Claeyssen, 1990b] e [Claeyssen, 1999], através de fórmulas que envolvem equações características dos tipos algébrica, diferencial e em diferenças. Mais precisamente,

$$h(t) = \sum_{j=1}^{Nn} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) h_{Nn-j}, \quad (3.138)$$

onde  $h_k = h^{(k)}(0)$  satisfaz a equação matricial em diferenças

$$\sum_{j=0}^N A_j h_{k+j} = 0, \quad (3.139)$$

com valores iniciais

$$h_0 = 0, \quad h_1 = 0, \quad \dots, \quad h_{N-2} = 0, \quad A_N h_{N-1} = I.$$

O polinômio de grau  $Nn$ , denotado por

$$P(s) = \det \left[ \sum_{j=0}^N s^j A_j \right] = \sum_{k=0}^{Nn} b_k s^k, \quad (3.140)$$

corresponde ao *polinômio característico* associado ao sistema e  $d(t)$  representa a solução do *problema de valor inicial* expresso por

$$b_{Nn} d^{(Nn)}(t) + b_{Nn-1} d^{(Nn-1)}(t) + \dots + b_1 \dot{d}(t) + b_0 d(t) = 0, \quad (3.141)$$

com os valores iniciais dados

$$d(0) = 0, \quad \dot{d}(0) = 0, \quad \dots, \quad d^{(Nn-2)}(0) = 0, \quad b_{Nn} d^{(Nn-1)}(0) = 1. \quad (3.142)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace em (3.138), obtêm-se que a matriz de transferência, dada pela expressão (2.13), pode também ser escrita como

$$H(s) = \left( \sum_{j=0}^N s^j A_j \right)^{-1} = \sum_{j=1}^{Nn} \sum_{i=0}^{j-1} b_i \frac{s^{j-i-1}}{P(s)} h_{Nn-j} = \frac{Q(s)}{P(s)}, \quad (3.143)$$

onde

$$Q(s) = \sum_{j=1}^{Nn} \sum_{i=0}^{j-1} b_i s^{j-i-1} h_{Nn-j}. \quad (3.144)$$

Uma importante propriedade da solução dinâmica foi obtida por [Claeyssen, 1999], que corresponde a translação das derivadas no tempo da solução dinâmica  $h(t)$  para as derivadas discretas de  $h_k$ , ou seja, a  $k$ -ésima-derivada de  $h(t)$  pode ser escrita como

$$h^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{Nn} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-1-i+k)}(t) h_{Nn-j} = \sum_{j=1}^{Nn} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-1-i)}(t) h_{Nn-j+k}, \quad \text{para } k \text{ qualquer.} \quad (3.145)$$

### 3.2.2 Modelos de Suspensão de Veículos

Aborda-se nesta subseção, dois modelos de suspensão de veículos; sendo que, tais modelos embora apresentados de forma simplificada são bastante usados na teoria de controle de sistemas dinâmicos. Uma das aplicações desse tipo de formulação é a análise dos efeitos das vibrações sobre os veículos em relação ao conforto dos passageiros e a capacidade dos mesmos manterem-se na estrada, isto é, a eficiência do sistema de suspensão do carro. Estes efeitos podem ser observados a partir da variação de diferentes parâmetros tais como: os coeficientes da suspensão, as irregularidades da estrada e a posição do assento, entre outros.

#### 3.2.2.1 Modelo da Metade da Suspensão de um Veículo

Considere-se um modelo simplificado da metade de um carro com cinco graus de liberdade, conforme mostra a Fig. 3.8. De acordo com [Lyshevski, 2001; Brogan, 1991], assume-se o sistema sem movimentos de rolamentos laterais.

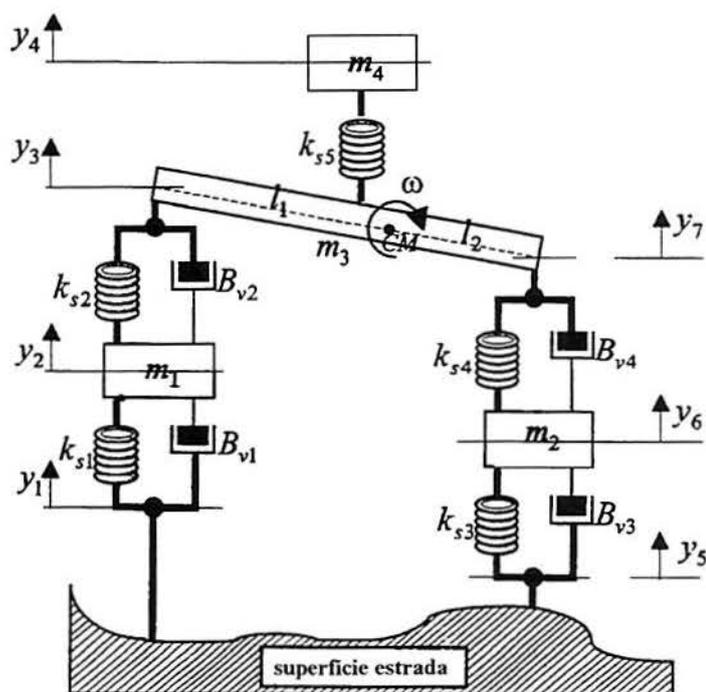


Figura 3.8 Modelo da suspensão da metade de um carro

Os deslocamentos  $y_1$  e  $y_5$  são as entradas, os parâmetros  $m_1$  e  $m_2$  representam as massas equivalentes das rodas dianteira e traseira, respectivamente; enquanto  $m_3$  representa a massa da estrutura principal do automóvel e  $m_4$ , a massa equivalente dos assentos e dos passageiros. As propriedades de elasticidade e dissipação de energia (atrito viscoso) dos pneus são dadas por  $(k_{s1}, k_{s3})$  e  $(B_{\nu1}, B_{\nu3})$ , respectivamente; para o sistema de suspensão do carro representa-se por  $(k_{s2}, k_{s4})$  e  $(B_{\nu2}, B_{\nu4})$ , respectivamente. A rigidez dos assentos é expressa por  $k_{s5}$ .

Aplicando-se a 2ª Lei de Newton na posição das rodas obtêm-se

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_2 = k_{s1}(y_1 - y_2) + B_{\nu1}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_{s2}(y_3 - y_2) + B_{\nu2}(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) \\ m_2 \ddot{y}_6 = k_{s3}(y_5 - y_6) + B_{\nu3}(\dot{y}_5 - \dot{y}_6) + k_{s4}(y_7 - y_6) + B_{\nu4}(\dot{y}_7 - \dot{y}_6) \end{cases} \quad (3.146)$$

Denota-se por  $l_1$  e  $l_2$  as distâncias das extremidades esquerda e direita ao centro de massa do carro, respectivamente. Supondo ângulos pequenos as relações geométricas relativas ao deslocamento do centro de massa da estrutura do carro e o ângulo de giro podem ser expressas por

$$\begin{aligned} y_{CM} &= y_3 + \frac{l_1}{l_1 + l_2}(y_7 - y_3), \\ y_s &= y_3 + \frac{l_2}{l_1 + l_2}(y_7 - y_3), \\ \omega &= \frac{y_7 - y_3}{l_1 + l_2}. \end{aligned}$$

Assumindo-se forças sobre a massa  $m_3$  da estrutura do carro resulta

$$m_3 \ddot{y}_{CM} = k_{s2}(y_2 - y_3) + B_{\nu2}(\dot{y}_2 - \dot{y}_3) + k_{s4}(y_6 - y_7) + B_{\nu4}(\dot{y}_6 - \dot{y}_7) + k_{s5}(y_4 - y_s). \quad (3.147)$$

Utilizando-se a lei rotacional de Newton têm-se a equação

$$J\ddot{\omega} = -l_1 k_{s2}(y_2 - y_3) - l_1 B_{\nu2}(\dot{y}_2 - \dot{y}_3) + l_2 k_{s4}(y_6 - y_7) + l_2 B_{\nu4}(\dot{y}_6 - \dot{y}_7) - (l_1 - l_2) k_{s5}(y_4 - y_s). \quad (3.148)$$

Finalmente, assumindo forças sobre a massa dos passageiros e dos assentos, obtêm-se a expressão

$$m_4 \ddot{y}_4 = k_{s5}(y_s - y_4). \quad (3.149)$$

As equações diferenciais ordinárias de segunda ordem acopladas dadas por (3.146)-(3.149), definem o modelo matemático para o sistema de parâmetros concentrados da suspensão da metade um carro, o qual é denotado matricialmente por

$$A_2 \frac{d^2 y}{dt^2}(t) + A_1 \frac{dy}{dt}(t) + A_0 y(t) = B_0 u(t) + B_1 \frac{du}{dt}(t). \quad (3.150)$$

Os vetores correspondentes a entrada,  $u(t)$ , e a saída,  $y(t)$ , do sistema são de segunda e quinta ordem, respectivamente, denotados por

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_6 \\ y_{CM} \\ \omega \\ y_4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_5 \end{bmatrix}.$$

Os coeficientes matriciais  $A_2$ ,  $A_1$ ,  $A_0$ ,  $B_0$  e  $B_1$  são da forma

$$A_2 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} B_{\nu 1} + B_{\nu 2} & 0 & -B_{\nu 2} & B_{\nu 2} l_1 & 0 \\ 0 & B_{\nu 3} + B_{\nu 4} & -B_{\nu 4} & -B_{\nu 4} l_2 & 0 \\ -B_{\nu 2} & -B_{\nu 4} & B_{\nu 2} + B_{\nu 4} & B_{\nu 4} l_2 - B_{\nu 2} l_1 & 0 \\ B_{\nu 2} l_1 & -B_{\nu 4} l_2 & B_{\nu 4} l_2 - B_{\nu 2} l_1 & B_{\nu 2} l_1^2 + B_{\nu 4} l_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$
85Kg	153Kg	1876Kg	240Kg
$B_{v1}$	$B_{v2}$	$B_{v3}$	$B_{v4}$
16 Ns/m	782 Ns/m	7 Ns/m	348 Ns/m
$k_{s1}$	$k_{s2}$	$k_{s3}$	$k_{s4}$
240000 N/m	15730 N/m	240000 N/m	12480 N/m
$J$	$K_{s5}$	$l_1$	$l_2$
2337Kg $m^2$	15N/m	1.718 m	0.945 m

Tabela 3.1 Valores dos parâmetros usados nas simulações do modelo da metade do carro

$$A_0 = \begin{bmatrix} k_{s1} + k_{s2} & 0 & -k_{s2} & k_{s2}l_1 & 0 \\ 0 & k_{s3} + k_{s4} & -k_{s4} & -k_{s4}l_2 & 0 \\ -k_{s2} & -k_{s4} & k_{s2} + k_{s4} + k_{s5} & k_{s4}l_2 - k_{s2}l_1 + k_{s5}(l_2 - l_1) & -k_{s5} \\ k_{s2}l_1 & -k_{s4}l_2 & k_{s4}l_2 - k_{s2}l_1 + k_{s5}(l_2 - l_1) & k_{s2}l_1^2 + k_{s4}l_2^2 - k_{s5}(l_2 - l_1)^2 & -k_{s5}(l_2 - l_1) \\ 0 & 0 & -k_{s5} & -k_{s5}(l_2 - l_1) & k_{s5} \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} k_{s1} & 0 \\ 0 & k_{s3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_1 = \begin{bmatrix} B_{v1} & 0 \\ 0 & B_{v3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como pode ser observado neste problema, os coeficientes matriciais  $A_j$  são simétricos. Os valores dos parâmetros considerados nas simulações são apresentados na Tab. 3.1, para os quais os coeficientes matriciais do modelo resultaram em

$$A_2 = \begin{bmatrix} 85 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 153 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1876 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2337 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 240 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 798 & 0 & -782 & 1343.476 & 0 \\ 0 & 355 & -348 & -328.86 & 0 \\ -782 & -348 & 1130 & -1014.616 & 0 \\ 1343.476 & -328.86 & -1014.616 & 2618.8645 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 255730 & 0 & -15730 & 27024.14 & 0 \\ 0 & 252480 & -12480 & -11793.6 & 0 \\ -15730 & -12480 & 28225 & -40986.365 & -15 \\ 27024.14 & -11793.6 & -15242.135 & 46418.50959 & 11.595 \\ 0 & 0 & -15 & 11.595 & 15 \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 240000 & 0 \\ 0 & 240000 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$B_1 = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 7 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Supondo-se que a entrada no sistema se dá apenas na posição dos pneus, de acordo com as irregularidades da estrada, considere-se para efeitos de ilustração<sup>2</sup>, entradas do tipo oscilatórias nas duas rodas, dadas por

<sup>2</sup>Na realidade, as irregularidades das estradas correspondem à entradas aleatórias no sistema, isto é, não determinísticas.

$$y_1 = y_5 = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 0.25 \\ 0.075 - 0.075 \cos(8\pi t), & 0.25 \leq t < 0.5 \\ 0, & t \geq 0.5 \end{cases},$$

com amplitude máxima de  $15\text{cm}$ , conforme mostra a Fig. 3.9 e condições iniciais nulas. A resposta forçada do sistema é apresentada na Fig. 3.10. As simulações numéricas foram realizadas utilizando-se os métodos não-espectrais operacional e a fórmula analítica, obtendo-se os mesmos resultados.

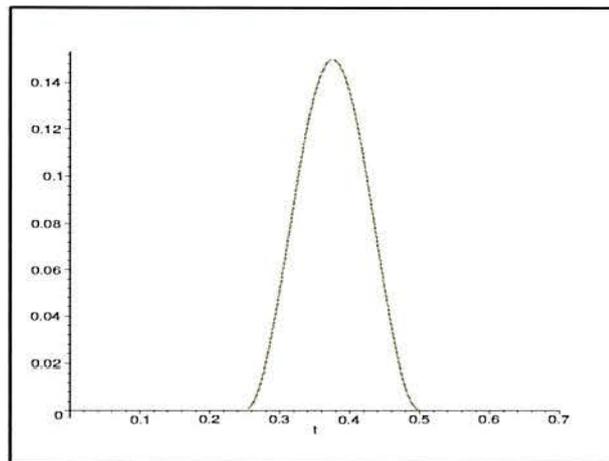


Figura 3.9 Entrada tipo oscilatória nas rodas

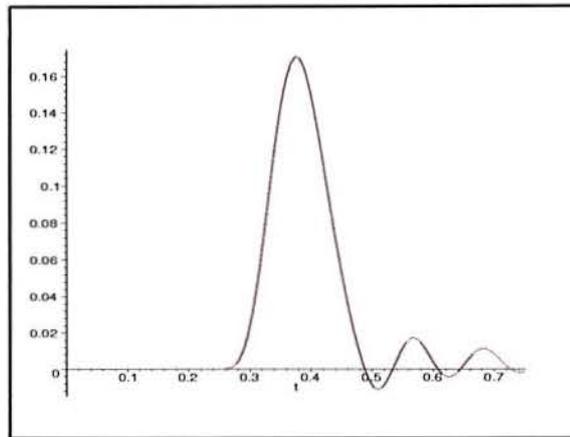
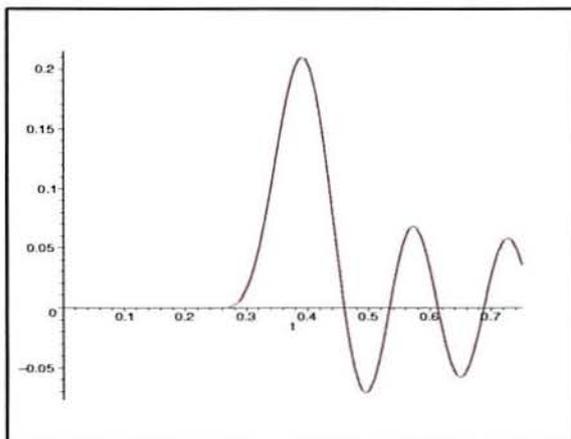
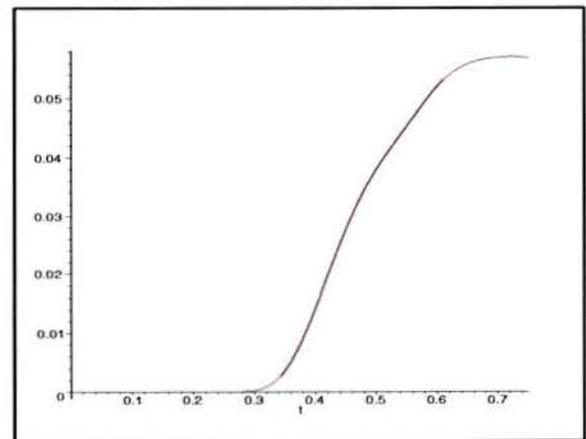
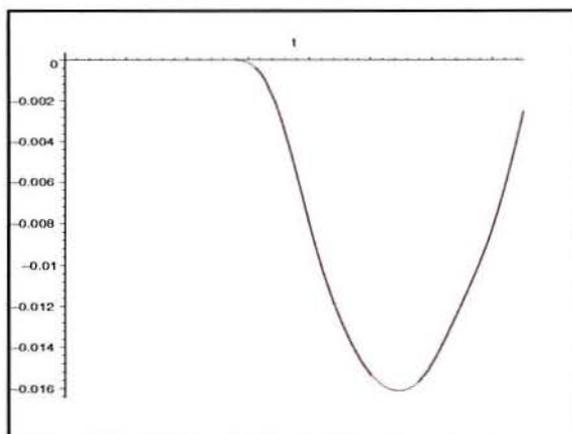
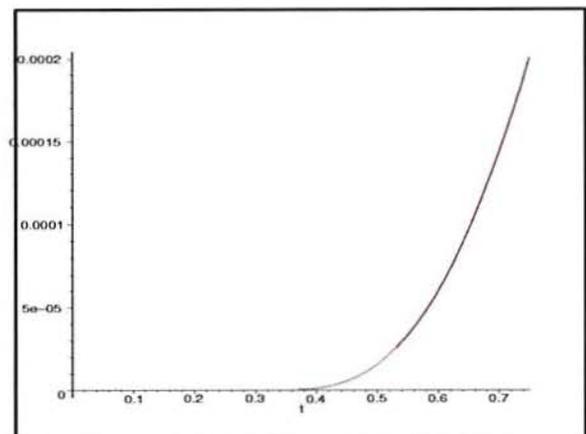
(a)  $y_2(t)$ (b)  $y_6(t)$ (c)  $y_{CM}(t)$ (d)  $\omega(t)$ (e)  $y_A(t)$ 

Figura 3.10 Componentes da resposta do sistema

### 3.2.2.2 Modelo Tridimensional da Suspensão de um Veículo

Para simular o comportamento dinâmico de um veículo em três dimensões será considerado um modelo matemático que gera um sistema de segunda ordem com oito graus de liberdade, conforme Fig. 3.11, [Bouazara, 2001].

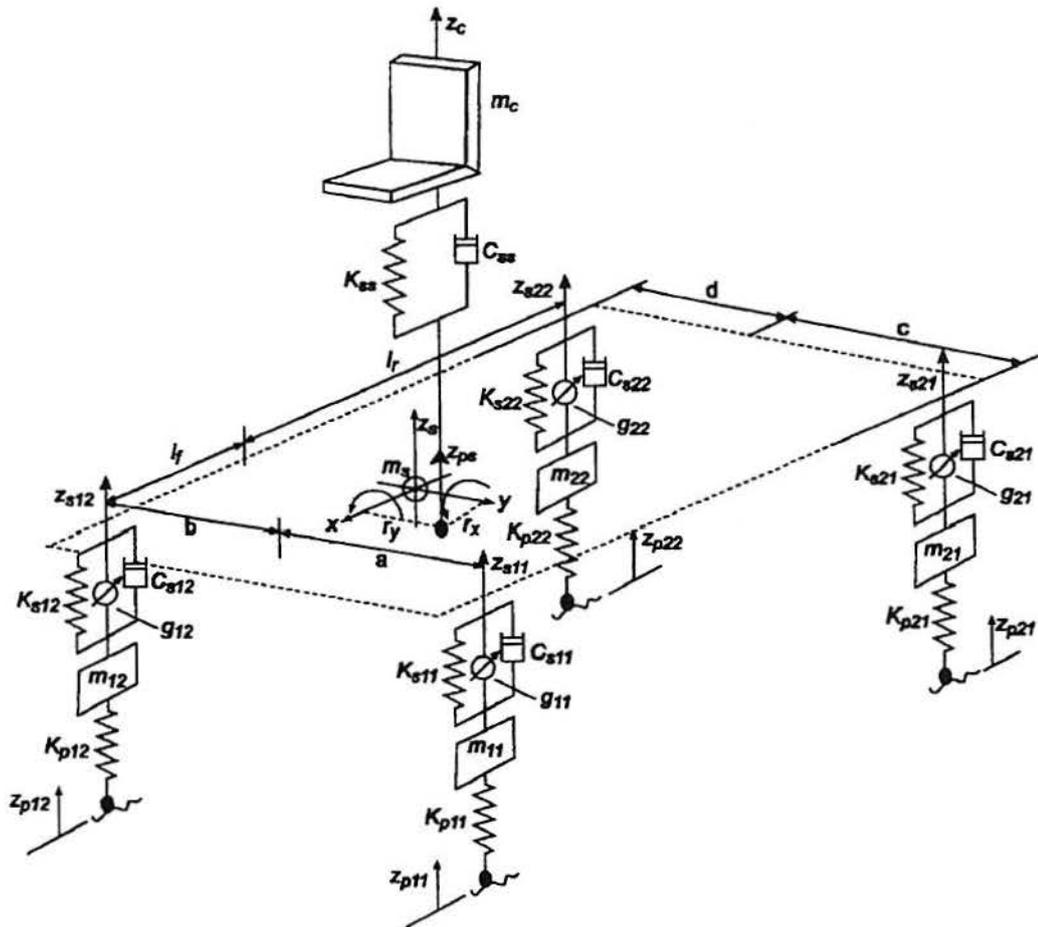


Figura 3.11 Modelo tridimensional da suspensão de um carro

O comportamento do veículo é expresso pelos movimentos verticais de arfagem (*pitching*) e de rolamento (*rolling*) em termos da aceleração, velocidade e deslocamento. Neste modelo, será desprezado o movimento de giro em torno do eixo paralelo ao eixo normal do carro (*yaw*).

As equações de Newton-Euler são usadas para obter as equações diferenciais do movimento do sistema, sendo que o modelo considera suspensões ativas. Este sistema

é construído utilizando-se os parâmetros  $m_c$ ,  $m_s$ ,  $m_{11}$ ,  $m_{12}$ ,  $m_{22}$  e  $m_{21}$  que correspondem as massas do motorista, do corpo do carro, e dos eixos das rodas 11, 12, 22, e 21, respectivamente;  $C_{ss}$ ,  $C_{s11}$ ,  $C_{s12}$ ,  $C_{s22}$  e  $C_{s21}$  são os coeficientes de amortecimento e  $K_{ss}$ ,  $K_{s11}$ ,  $K_{s12}$ ,  $K_{s22}$  e  $K_{s21}$  os coeficientes de rigidez para o assento e as suspensões do veículo;  $K_{p11}$ ,  $K_{p12}$ ,  $K_{p22}$  e  $K_{p21}$  são os coeficientes de rigidez dos pneus e por último,  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{22}$  e  $g_{21}$  os coeficientes de amortecimento para suspensões ativas obtidas pela solução da equação de Ricatti [Bouazara, 1991]. Para ângulos pequenos,  $\phi$  e  $\theta$ , as equações linearizadas do movimento deste sistema são

$$\begin{aligned}
z_{ps} &= z_s - r_x \theta + r_y \phi \\
z_{s11} &= z_s - l_f \theta + a \phi \\
z_{s12} &= z_s - l_f \theta - b \phi \\
z_{s21} &= z_s + l_r \theta + c \phi \\
z_{s22} &= z_s + l_r \theta - d \phi \\
F_{ss} &= K_{ss}(z_c - z_{ps}) + C_{ss}(\dot{z}_c - \dot{z}_{ps}) \\
F_{s11} &= K_{s11}(z_{s11} - z_{11}) + C_{s11}(\dot{z}_{s11} - \dot{z}_{s11}) \\
F_{s12} &= K_{s12}(z_{s12} - z_{12}) + C_{s12}(\dot{z}_{s12} - \dot{z}_{s12}) \\
F_{s22} &= K_{s22}(z_{s22} - z_{22}) + C_{s22}(\dot{z}_{s22} - \dot{z}_{s22}) \\
F_{s21} &= K_{s21}(z_{s21} - z_{21}) + C_{s21}(\dot{z}_{s21} - \dot{z}_{s21}) \\
F_{a11} &= g_{11} \dot{z}_{s11} \\
F_{a12} &= g_{12} \dot{z}_{s12} \\
F_{a21} &= g_{21} \dot{z}_{s21} \\
F_{a22} &= g_{22} \dot{z}_{s22} \\
m_c \ddot{z}_c &= -F_{ss} \\
m_s \ddot{z}_s &= -F_{s11} - F_{s12} - F_{s22} - F_{s21} - F_{a11} - F_{a12} - F_{a21} - F_{a22} + F_{ss} \\
I_{sy} \ddot{\theta} &= l_f F_{s11} + l_f F_{s12} - l_r F_{s22} - l_r F_{s21} + l_f F_{a11} + l_f F_{a12} - l_r F_{a22} - l_r F_{a21} - r_x F_{ss} \\
I_{sx} \ddot{\phi} &= -a F_{s11} + b F_{s12} + d F_{s22} - c F_{s21} - a F_{a11} + b F_{a12} + d F_{a22} - c F_{a21} + r_y F_{ss} \\
m_{11} \ddot{z}_{11} &= F_{s11} + F_{a11} - K_{p11}(z_{11} - z_{p11}) \\
m_{12} \ddot{z}_{12} &= F_{s12} + F_{a12} - K_{p12}(z_{12} - z_{p12}) \\
m_{22} \ddot{z}_{22} &= F_{s22} + F_{a22} - K_{p22}(z_{22} - z_{p22}) \\
m_{21} \ddot{z}_{21} &= F_{s21} + F_{a21} - K_{p21}(z_{21} - z_{p21})
\end{aligned}$$

No caso de um sistema com suspensão passiva as forças  $F_{aij}$  são nulas. As variáveis de entrada encontram-se na posição dos pneus e correspondem as irregularidades da estrada, são denotadas por  $z_{p11}$ ,  $z_{p12}$ ,  $z_{p22}$  e  $z_{p21}$ . Por sua vez, as variáveis de saída, que correspondem aos deslocamentos nos quatro eixos, no assento e no centro de gravidade do carro, mais os ângulos de arfagem e de rolamento, são denotadas por  $z_{11}$ ,  $z_{12}$ ,  $z_{22}$ ,  $z_{21}$ ,  $\theta$  e  $\phi$ , respectivamente.

Este modelo representa um sistema de parâmetros concentrados modelado matematicamente por um conjunto de oito equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem acopladas. Sendo que a equação diferencial matricial que o representa pode ser denotada por

$$M \frac{d^2 z}{dt^2}(t) + C \frac{dz}{dt}(t) + Kz(t) = Bu(t). \quad (3.151)$$

A expressão literal das componentes dos coeficientes matriciais  $M$ ,  $C$ ,  $K$  e  $B$  do sistema encontram-se no apêndice A. Os vetores da entrada  $u(t)$  e da saída  $z(t)$  do sistema são de quarta e oitava ordem, respectivamente; denotados por

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ z_{22} \\ z_{21} \\ z_c \\ z_s \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u(t) = \begin{bmatrix} z_{p11} \\ z_{p12} \\ z_{p22} \\ z_{p21} \end{bmatrix}.$$

A diferença entre os modelos com suspensão ativa e passiva, em termos numéricos dos coeficientes, se dá apenas no coeficiente  $C$  de amortecimento. Na Tab. 3.2, encontram-se os valores dos parâmetros utilizados nas simulações numéricas e que resultaram nos coefi-

$m_{11}$	$m_{12}$	$m_{21}$	$m_{22}$
40Kg	40Kg	35.5Kg	35.5Kg
$m_c$	$m_s$	$I_{sy}$	$I_{sx}$
75Kg	730Kg	1230 Kg $m^2$	1230 Kg $m^2$
$K_{s11}$	$K_{s12}$	$K_{s21}$	$K_{s22}$
19.96 KN/m	19.96 KN/m	17.5 KN/m	17.5 KN/m
$C_{s11}$	$C_{s12}$	$C_{s21}$	$C_{s22}$
1290 Ns/m	1290 Ns/m	1620 Ns/m	1620 Ns/m
$g_{11}$	$g_{12}$	$g_{21}$	$g_{22}$
1290 Ns/m	1290 Ns/m	1620 Ns/m	1620 Ns/m
$K_{p11}$	$K_{p12}$	$K_{p21}$	$K_{p22}$
175.5 KN/m	175.5 KN/m	175.5 KN/m	175.5 KN/m
$a$	$b$	$c$	$d$
0.761 m	0.761 m	0.755 m	0.755 m
$l_f$	$l_r$	$r_x$	$r_y$
1.011 m	1.803 m	0.36 m	0.234 m
$K_{ss}$	$C_{ss}$		
97.985 KN/m	1.926 KNs/m		

Tabela 3.2 Valores dos parâmetros do sistema

cientes matriciais

$$M = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 35.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 730 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1230 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1230 \end{bmatrix};$$

para a suspensão passiva tem-se

$$C = \begin{bmatrix} 1290 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1290 & 1304.190 & -981.690 \\ 0 & 1290 & 0 & 0 & 0 & -1290 & 1304.190 & 981.690 \\ 0 & 0 & 1620 & 0 & 0 & -1620 & -2920.860 & 1223.100 \\ 0 & 0 & 0 & 1620 & 0 & -1620 & -2920.860 & -1223.100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1926 & -1926 & 693.36 & -450.684 \\ -1290 & -1290 & -1620 & -1620 & -1926 & 7746 & 2539.980 & 450.684 \\ 1304.190 & 1304.190 & -2920.860 & -2920.860 & 693.36 & 2539.980 & 13419.30294 & -162.24624 \\ -981.690 & 981.690 & 1223.100 & -1223.100 & -450.684 & 450.684 & -162.24624 & 3446.473236 \end{bmatrix}$$

e para suspensão ativa

$$C = \begin{bmatrix} 1290 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2580 & 2608.380 & -1963.380 \\ 0 & 1290 & 0 & 0 & 0 & -2580 & 2608.380 & 1963.380 \\ 0 & 0 & 1620 & 0 & 0 & -3240 & -5841.720 & 2446.200 \\ 0 & 0 & 0 & 1620 & 0 & -3240 & -5841.720 & -2446.200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1926 & -1926 & 693.36 & -450.684 \\ -1290 & -1290 & -1620 & -1620 & -1926 & 13566 & 5773.320 & 450.684 \\ 1304.190 & 1304.190 & -2920.860 & -2920.860 & 693.36 & 5773.320 & 26588.99628 & -162.24624 \\ -981.690 & 981.690 & 1223.100 & -1223.100 & -450.684 & 450.684 & -162.24624 & 6787.486416 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 195460 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19960 & 20179.560 & -15189.560 \\ 0 & 195460 & 0 & 0 & 0 & -19960 & 20179.560 & 15189.560 \\ 0 & 0 & 193000 & 0 & 0 & -17500 & -31552.500 & 13212.500 \\ 0 & 0 & 0 & 193000 & 0 & -17500 & -31552.500 & -13212.500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 97985 & -97985 & 35274.60 & -22928.490 \\ -19960 & -19960 & -17500 & -17500 & -97985 & 172905 & -12528.720 & 22928.490 \\ 20179.560 & 20179.560 & -31552.500 & -31552.500 & 35274.60 & -12528.720 & 167280.2413 & -8254.25640 \\ -15189.560 & 15189.560 & 13212.500 & -13212.500 & -22928.490 & 22928.490 & -8254.25640 & 48434.65198 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 175500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 175500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 175500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 175500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Supondo-se que a entrada no sistema se dá apenas na posição dos pneus do carro, de acordo com as irregularidades da estrada, será considerado para efeitos de ilus-

tração, uma entrada não nula apenas nas rodas dianteiras, do tipo lombada com amplitude máxima de  $15\text{cm}$ , conforme gráficos apresentados na Fig. 3.12.

A expressão matemática da entrada  $u$  nos pneus dos eixos 11 e 12 é dada por

$$z_{p11} = z_{p12} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 0.25 \\ 0.075 - 0.075 \cos(8\pi t), & 0.25 \leq t < 0.5 \\ 0, & t \geq 0.5 \end{cases} .$$

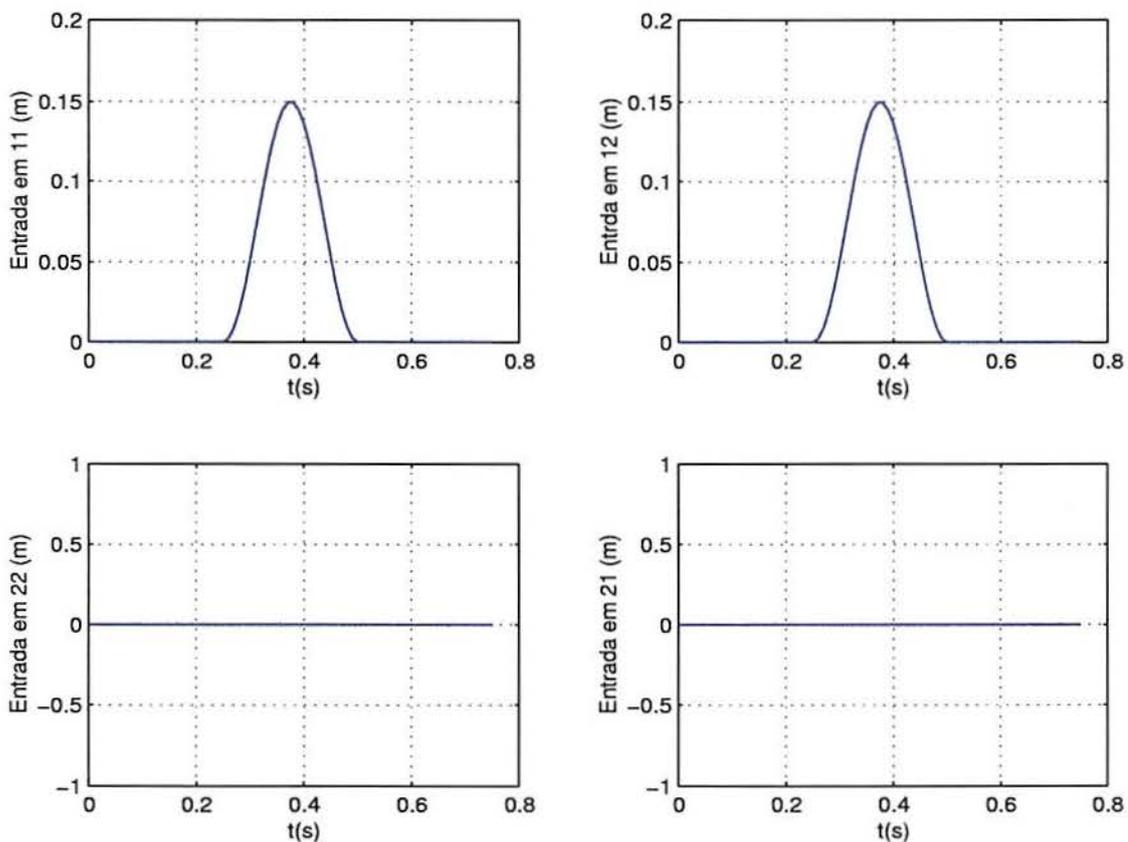


Figura 3.12 Entrada tipo lombada nas rodas dianteiras e nula nas rodas traseiras

As simulações numéricas foram realizadas no software MATLAB, de forma numérica e, no MAPLE V de forma simbólica utilizando-se os diferentes métodos descritos no capítulo para resolução de sistemas lineares. Todas as saídas são apresentadas nas Figs. 3.13 e 3.14, considerando-se suspensões do tipo passiva e ativa para o sistema; provenientes das simulações realizadas utilizando-se o *toolbox* de controle, do software MATLAB.

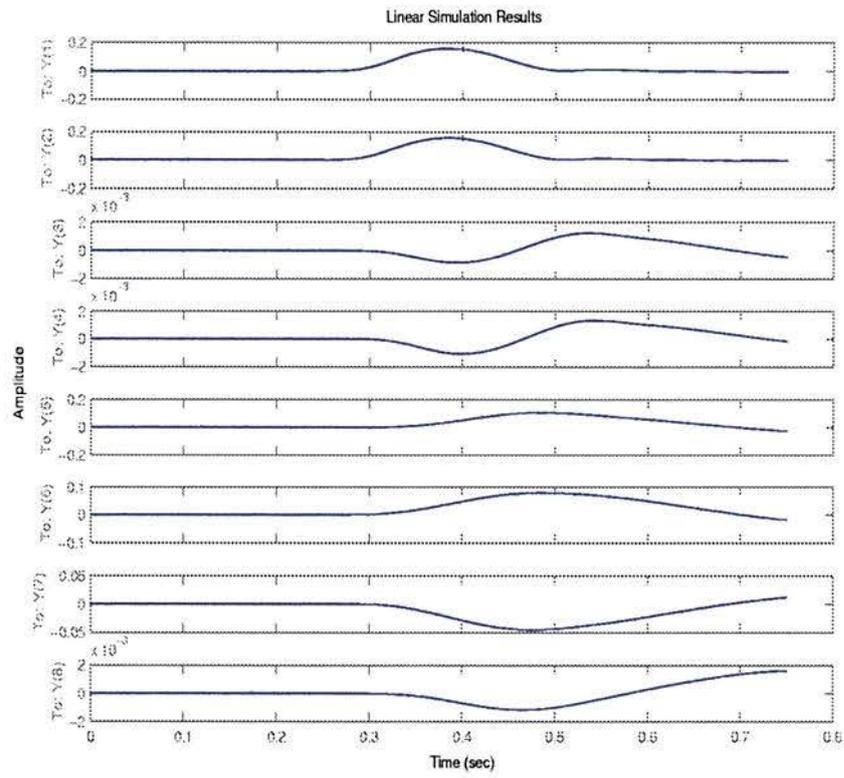


Figura 3.13 Saída do sistema - suspensão passiva

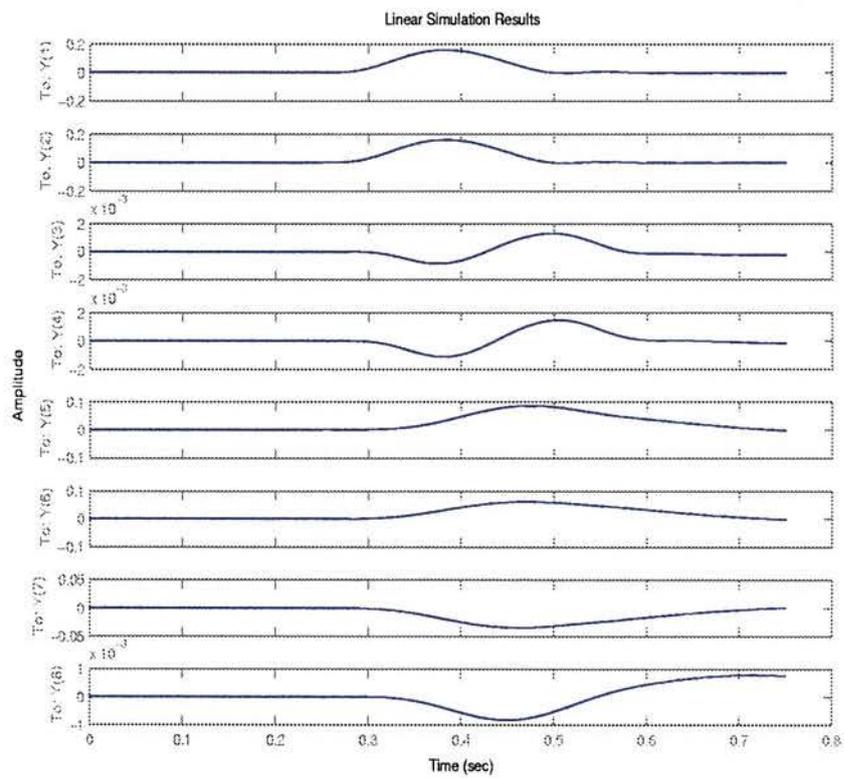


Figura 3.14 Saída do sistema - suspensão ativa

Os gráficos que representam as respostas na posição das rodas, considerando-se suspensões ativa e passiva são apresentados nas Figs. 3.15 e 3.16.

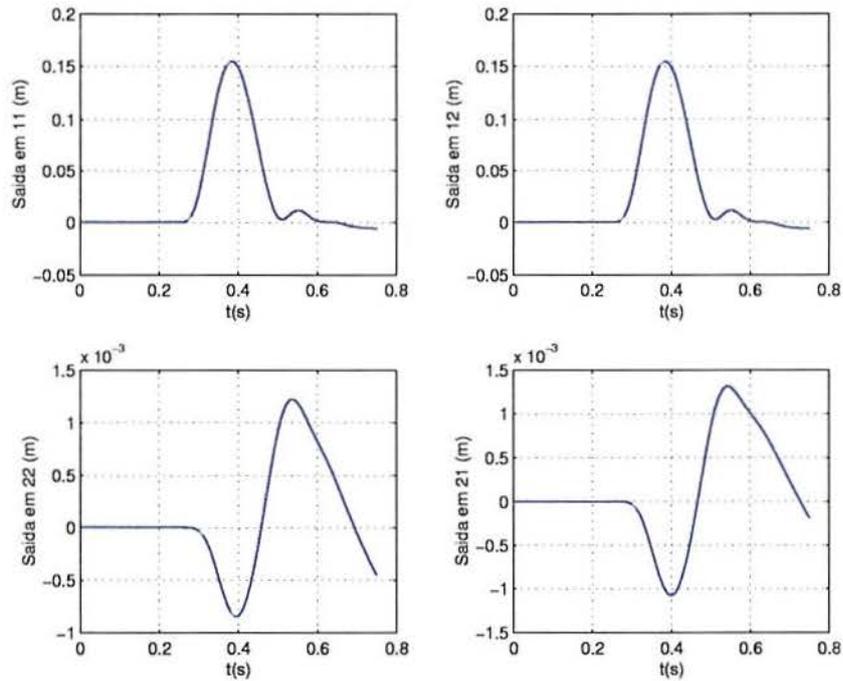


Figura 3.15 Resposta nos eixos das rodas - suspensão passiva

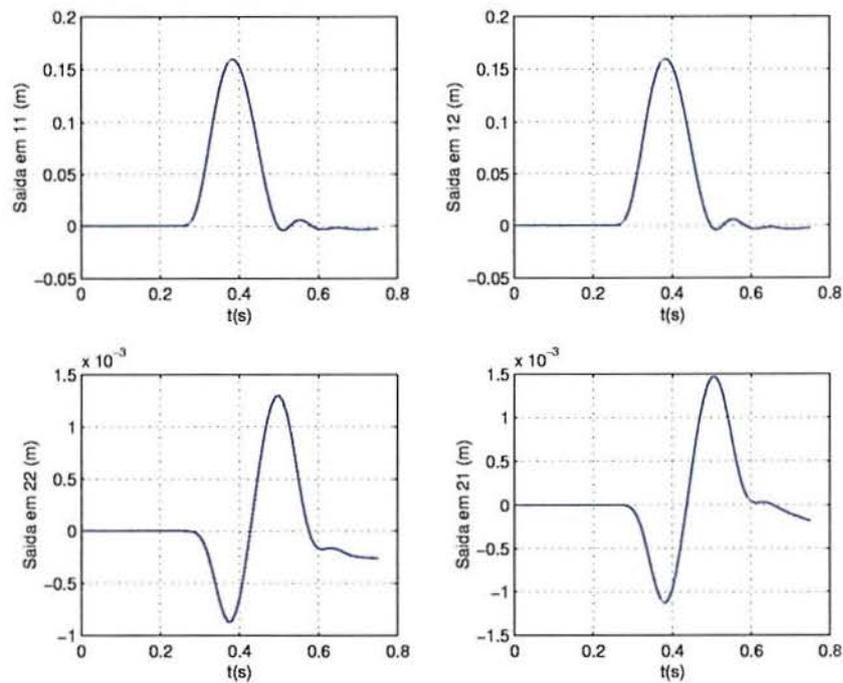


Figura 3.16 Resposta nos eixos das rodas - suspensão ativa

As respostas na posição do motorista e no centro de gravidade do carro para os dois tipos de suspensões são apresentados nas Figs. 3.17 e 3.18.

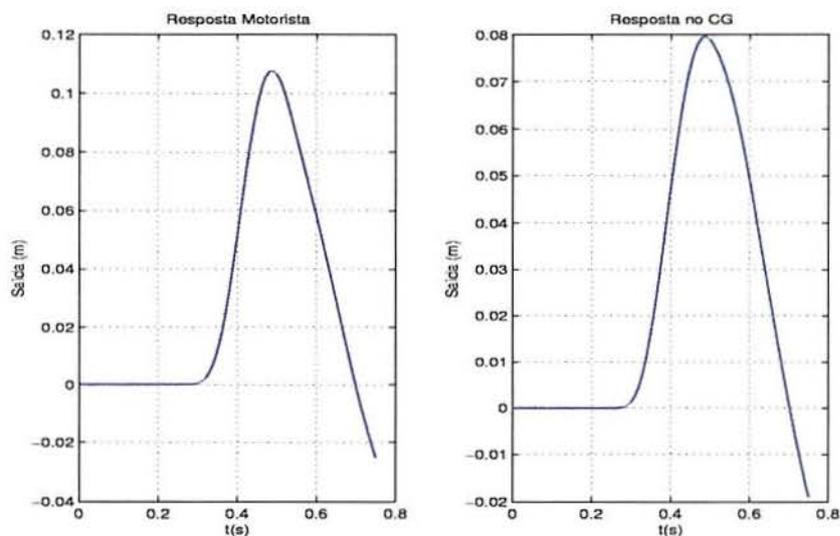


Figura 3.17 Resposta na posição do motorista e no centro de gravidade do carro - suspensão passiva

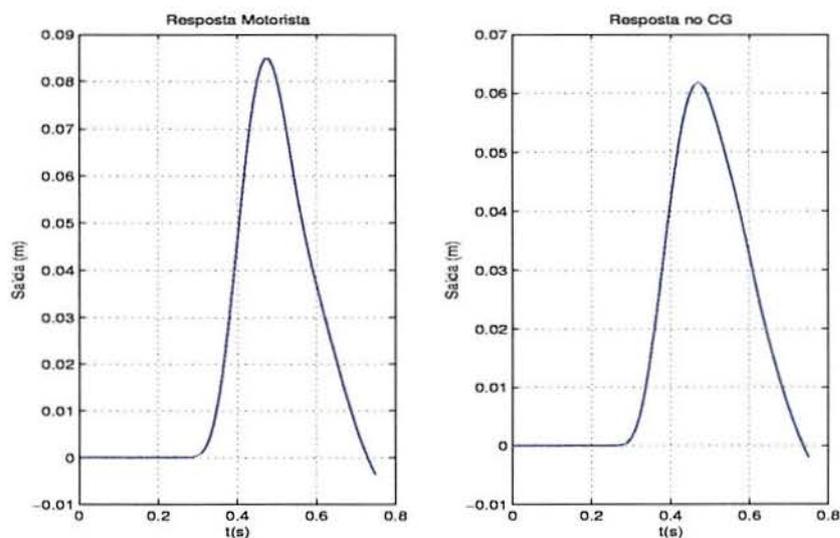


Figura 3.18 Resposta na posição do motorista e no centro de gravidade do carro - suspensão ativa

O comportamento dos ângulos de arfagem e de rolamento durante o percurso do carro na lombada, tanto para suspensão passiva como ativa, estão representados nas Figs. 3.19 e

3.20; sendo que a partir dos mesmos pode-se fazer um comparativo do comportamento do veículo quando submetido as mesmas condições, considerando-se suspensões distintas.

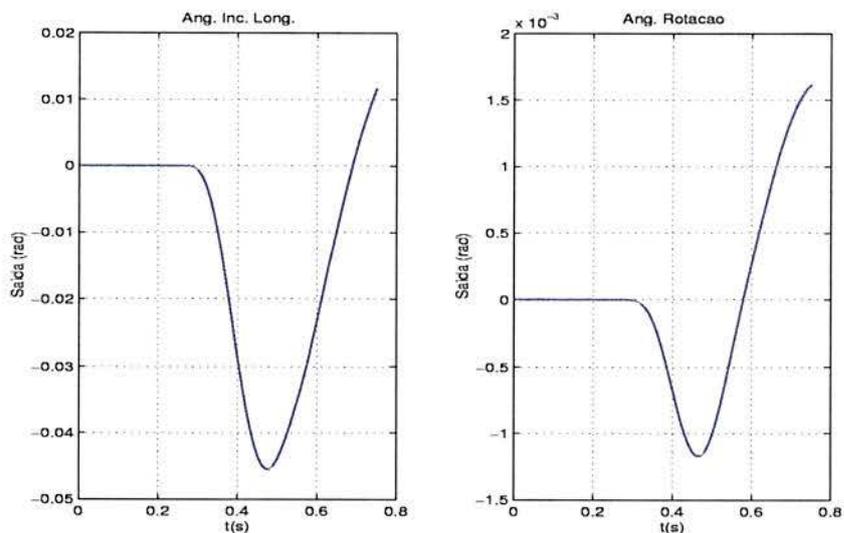


Figura 3.19 Saída ângulos de arfagem e rolamento - suspensão passiva

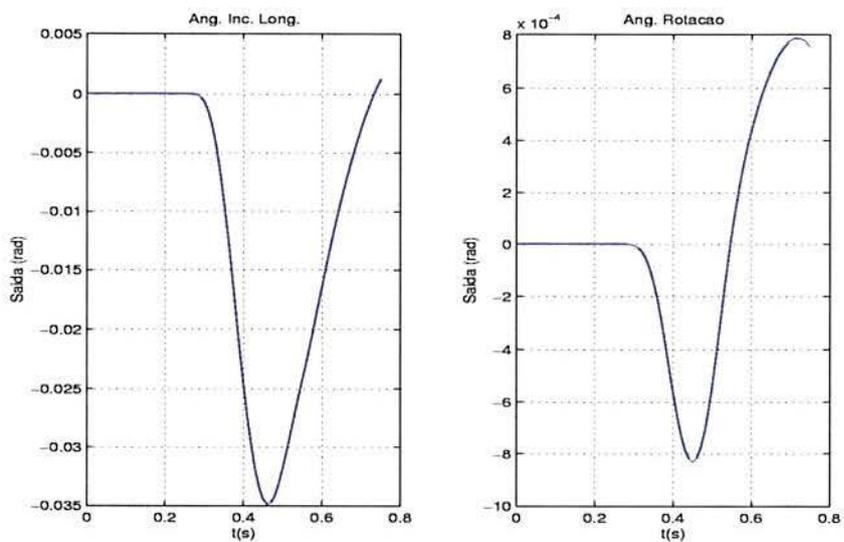


Figura 3.20 Saída ângulos de arfagem e rolamento - suspensão ativa

### 3.2.3 Técnicas Básicas de Resolução para Sistemas Discretos

Considere-se sistemas lineares discretos representados por

$$\sum_{j=0}^N A_j y_{k+j} = f_k, \quad (3.152)$$

com condições iniciais

$$y_0, y_1, \dots, y_{N-1}. \quad (3.153)$$

#### 3.2.3.1 Métodos Espectrais

O método espectral para resolução de sistemas discretos descritos pela equação (3.152) é aplicado aqui, quando o problema associado de autovalor, denotado por

$$\left( \sum_{j=0}^N A_j \lambda^j \right) v = 0, \quad \text{para } v \neq 0, \quad (3.154)$$

gera a partir de seus  $Nn$  autovalores  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{Nn})$  e dos autovetores correspondentes  $(v_1, v_2, \dots, v_{Nn})$  uma matriz  $V$  de ordem  $Nn$ , dada por

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_{Nn} \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \dots & \lambda_{Nn} v_{Nn} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} v_1 & \lambda_2^{N-1} v_2 & \dots & \lambda_{Nn}^{N-1} v_{Nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_o \\ V_o D \\ \vdots \\ V_o D^{N-1} \end{bmatrix}, \quad (3.155)$$

com colunas linearmente independentes. Nesta expressão,  $D$  é uma matriz diagonal de ordem  $Nn$ , denominada *matriz espectral*, cujos elementos da diagonal correspondem aos autovalores do problema e  $V_o$  é a matriz cujas colunas são os autovetores associados, ou

seja, denotam-se por

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{Nn} \end{bmatrix} \text{ e } V_o = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{Nn} \end{bmatrix}. \quad (3.156)$$

Em particular, este resultado é verificado quando o sistema possui todos os autovalores distintos.

A técnica de superposição linear é usualmente utilizada quando tem-se uma entrada simples, do tipo exponencial, trigonométrica ou polinomial, entre outras; já o método de variação de parâmetros, aplica-se para entradas quaisquer.

- **Cálculo da Resposta Livre através da Técnica de Superposição Linear**

Procuram-se respostas livres da forma

$$y_k = \sum_{j=0}^{Nn} c_j \lambda_j^k v_j. \quad (3.157)$$

Deste modo as constantes  $c_j$  são obtidas resolvendo-se o sistema

$$\begin{cases} c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_{Nn} v_{Nn} & = y_0 \\ c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + c_{Nn} \lambda_{Nn} v_{Nn} & = y_1 \\ \vdots & = \vdots \\ c_1 \lambda_1^{N-1} v_1 + c_2 \lambda_2^{N-1} v_2 + \cdots + c_{Nn} \lambda_{Nn}^{N-1} v_{Nn} & = y_{N-1} \end{cases}$$

cujas matriz dos coeficientes do sistema corresponde a matriz  $V$ .

- **Cálculo da Resposta Total do Sistema Através do Método de Variação de Parâmetros Utilizando-se a Base Espectral**

Procura-se a resposta total do sistema (3.152) da forma

$$y_k = c_{1,k}\lambda_1^k v_1 + c_{2,k}\lambda_2^k v_2 + \cdots + c_{Nn,k}\lambda_{Nn}^k v_{Nn}. \quad (3.158)$$

Escreve-se o valor  $y_{k+1}$  como

$$y_{k+1} = \sum_{j=1}^{Nn} (c_{j,k+1} - c_{j,k})\lambda_j^{k+1} v_j + \sum_{j=0}^{Nn} c_{j,k}\lambda_j^{k+1} v_j$$

e considera-se a condição de Lagrange

$$\sum_{j=1}^{Nn} (c_{j,k+1} - c_{j,k})\lambda_j^{k+1} v_j = 0.$$

Analogamente, o valor  $y_{k+2}$  é escrito

$$y_{k+2} = \sum_{j=1}^{Nn} (c_{j,k+1} - c_{j,k})\lambda_j^{k+2} v_j + \sum_{j=0}^{Nn} c_{j,k}\lambda_j^{k+2} v_j,$$

considerando-se a condição de Lagrange

$$\sum_{j=1}^{Nn} (c_{j,k+1} - c_{j,k})\lambda_j^{k+2} v_j = 0.$$

Generalizando-se, têm-se que

$$y_{k+m} = \sum_{j=1}^{Nn} (c_{j,k+1} - c_{j,k})\lambda_j^{k+m} v_j + \sum_{j=0}^{Nn} c_{j,k}\lambda_j^{k+m} v_j, \quad (3.159)$$

com a condição de Lagrange

$$\sum_{j=1}^{Nn} (c_{j,k+1} - c_{j,k})\lambda_j^{k+m} v_j = 0, \quad \text{para } m = 1 : N - 1. \quad (3.160)$$

Resulta, então que

$$y_{k+N} = \sum_{j=1}^{Nn} (c_{j,k+1} - c_{j,k}) \lambda_j^{k+N} v_j + \sum_{j=0}^{Nn} c_{j,k} \lambda_j^{k+N} v_j.$$

Substituindo-se as expressões, para  $y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+N}$ , obtidas a partir de (3.159) no sistema (3.158), decorre que

$$A_N \left[ \sum_{j=1}^{Nn} (c_{j,k+1} - c_{j,k}) \lambda_j^{k+N} v_j \right] = f_k. \quad (3.161)$$

Deste modo o sistema linear formado pelas  $N$  equações (3.160) e (3.161) é definido por

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{Nn} (c_{j,k+1} - c_{j,k}) \lambda_j^{k+1} v_j = 0 \\ \sum_{j=1}^{Nn} (c_{j,k+1} - c_{j,k}) \lambda_j^{k+2} v_j = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{Nn} (c_{j,k+1} - c_{j,k}) \lambda_j^{k+N-1} v_j = 0 \\ \sum_{j=1}^{Nn} A_N (c_{j,k+1} - c_{j,k}) \lambda_j^{k+N} v_j = f_k \end{array} \right.$$

Considerando-se as variáveis em diferenças  $\Delta c_{j,k} = c_{j,k+1} - c_{j,k}$ , o sistema pode ser representado na forma matricial

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{Nn} \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_{Nn} v_{Nn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} v_1 & \lambda_2^{N-1} v_2 & \cdots & \lambda_{Nn}^{N-1} v_{Nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{k+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{Nn}^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_{1,k} \\ \Delta c_{2,k} \\ \vdots \\ \Delta c_{Nn,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1} f_k \end{bmatrix}, \quad (3.162)$$

ou ainda, na forma compacta

$$VD^{k+1} \Delta C_k = \mathcal{F}_k, \quad (3.163)$$

onde denotam-se

$$V = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_0 D \\ \vdots \\ V_0 D^{N-1} \end{bmatrix}, \quad D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{Nn}^k \end{bmatrix}, \quad \Delta C_k = \begin{bmatrix} \Delta c_{1,k} \\ \Delta c_{2,k} \\ \vdots \\ \Delta c_{Nn,k} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1} f_k \end{bmatrix}. \quad (3.164)$$

Escrevendo-se,

$$c_{k+1} = \begin{bmatrix} c_{1,k+1} \\ c_{2,k+1} \\ \vdots \\ c_{Nn,k+1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad c_k = \begin{bmatrix} c_{1,k} \\ c_{2,k} \\ \vdots \\ c_{Nn,k} \end{bmatrix},$$

a expressão (3.163) equivale a equação em diferenças de primeira ordem

$$c_{k+1} = c_k + (VD^{k+1})^{-1} \mathcal{F}_k, \quad (3.165)$$

com solução da forma

$$c_k = c_0 + \sum_{j=1}^k (VD^j)^{-1} \mathcal{F}_j.$$

O valor do vetor  $c_0$  é obtido a partir dos valores das condições iniciais,  $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$ , resultando-se em

$$c_0 = V^{-1} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (3.166)$$

Finalmente, a resposta total do sistema pode ser obtida a partir da expressão

$$y_k = V_0 D^k c_0 + \sum_{j=1}^k V_0 D^{k-1-j} V^{-1} \mathcal{F}_j. \quad (3.167)$$

### 3.2.3.2 Métodos Não-Espectrais

Para sistemas discretos, neste trabalho serão abordados os métodos de variação de parâmetros para uma base qualquer e o método operacional através da transformada discreta  $\mathcal{Z}$ ; sendo que o uso da transformada discreta permite a obtenção de uma fórmula para a resposta impulso discreta [Claeyssen, 1999].

#### • Método de Variação de Parâmetros com o Uso de uma Base Qualquer

Aplicando-se o método no sistema discreto definido por (3.152), tem-se que a resposta total pode ser escrita como

$$y_k = c_{1,k}\phi_{1,k} + c_{2,k}\phi_{2,k} + \cdots + c_{Nn,k}\phi_{Nn,k} = \Phi_k C_k, \quad (3.168)$$

onde  $\Phi_k = [\phi_{1,k} \ \phi_{2,k} \ \cdots \ \phi_{Nn,k}]$  é uma base do sistema discreto livre.

Para determinar as funções  $c_{j,k}$ , assume-se as condições de Lagrange

$$\Phi_{k+m} \Delta C_k = 0, \quad \text{para } m = 1 : N - 1, \quad (3.169)$$

onde  $\Delta C_k = c_{k+1} - c_k$ . Assim,

$$y_{k+m} = \Phi_{k+m} C_k, \quad \text{para } m = 1 : N - 1. \quad (3.170)$$

Substituindo-se  $y_k$  e suas translações dadas por (3.170) no sistema (3.152) e, considerando-se o fato de que cada coluna de  $\Phi_k$  é solução, resulta

$$A_N \Phi_{k+N} \Delta C_k = f_k. \quad (3.171)$$

Assim, as expressões (3.169) e (3.171) formam o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{Nn} \Delta c_{j,k} \phi_{j,k+1} = 0 \\ \sum_{j=1}^{Nn} \Delta c_{j,k} \phi_{j,k+2} = 0 \\ \vdots = \vdots, \\ \sum_{j=1}^{Nn} \Delta c_{j,k} \phi_{j,k+N-1} = 0 \\ \sum_{j=1}^{Nn} A_N \Delta c_{j,k} \phi_{j,k+N} = f_k \end{array} \right.$$

que pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \phi_{1,k+1} & \phi_{2,k+1} & \cdots & \phi_{Nn,k+1} \\ \phi_{1,k+2} & \phi_{2,k+2} & \cdots & \phi_{Nn,k+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_{1,k+N} & \phi_{2,k+N} & \cdots & \phi_{Nn,k+N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_1 \\ \Delta c_2 \\ \vdots \\ \Delta c_{Nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1} f_k \end{bmatrix}. \quad (3.172)$$

Denotando-se,

$$V = \begin{bmatrix} \phi_{1,k+1} & \phi_{2,k+1} & \cdots & \phi_{Nn,k} \\ \phi_{1,k+2} & \phi_{2,k+2} & \cdots & \phi_{Nn,k+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_{1,k+N} & \phi_{2,k+N} & \cdots & \phi_{Nn,k+N} \end{bmatrix}, \quad \Delta C_k = \begin{bmatrix} \Delta c_{1,k} \\ \Delta c_{2,k} \\ \vdots \\ \Delta c_{Nn,k} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1} f_k \end{bmatrix}, \quad (3.173)$$

o sistema pode ser representado de forma compacta

$$V \Delta C_k = \mathcal{F}_k. \quad (3.174)$$

Resolvendo-o em termos das componentes do vetor  $\Delta C_k$ , obtém-se

$$c_{k+1} = c_k + V^{-1} \mathcal{F}_k. \quad (3.175)$$

A solução da equação em diferenças matricial de primeira ordem (3.175) é dada por

$$c_k = c_0 + \sum_{j=0}^{k-1} V^{-1} \mathcal{F}_j. \quad (3.176)$$

Desta forma a solução do sistema (3.152) pode ser escrita como

$$y_k = \Phi_k c_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi_k V^{-1} \mathcal{F}_j. \quad (3.177)$$

O vetor  $c_0$  é obtido a partir das condições iniciais do problema, ou seja,

$$c_0 = V^{-1} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (3.178)$$

#### • Fórmula Discreta

Será apresentado uma extensão do caso contínuo descrito na seção 3.2.1.2, para sistemas discretos de ordem  $N$ . Como foi feito anteriormente, a resposta impulso discreta  $h_k$  é obtida de forma direta, sem utilizar-se a formulação de espaço de estado.

A resposta impulso discreta corresponde a solução do problema de valor inicial discreto, dado pela equação matricial em diferenças

$$\sum_{j=0}^N A_j h_{k+j} = 0, \quad (3.179)$$

sendo  $h_k = h^{(k)}(0)$  e os valores iniciais dados por

$$h_0 = 0, \quad h_1 = 0, \quad \dots, \quad h_{N-2} = 0, \quad A_N h_{N-1} = I. \quad (3.180)$$

A fórmula discreta desenvolvida é

$$h_k = \sum_{j=1}^{N-k} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d_{k+j-i-1} h_{N-k-j}, \quad (3.181)$$

onde os parâmetros  $b_i$  são os coeficientes do polinômio característico associado ao sistema, denotado por

$$P(z) = \det \left[ \sum_{j=0}^N A_j z^j \right] = \sum_{k=0}^{Nn} b_k z^k; \quad (3.182)$$

a função discreta  $d_k = d^{(k)}(0)$ , corresponde a solução da equação em diferenças escalar

$$b_{Nn} d_{k+Nn} + b_{Nn-1} d_{k+Nn-1} + \cdots + b_1 d_{k+1} + b_0 d_0 = 0, \quad (3.183)$$

com valores iniciais

$$d_0 = 0, \quad d_1 = 0, \quad d_{Nn-2} = 0, \quad b_{Nn} d_{Nn-1} = 1. \quad (3.184)$$

Aplicando-se a transformada  $\mathcal{Z}$  em (3.181) obtém-se a matriz de transferência, cuja expressão é

$$H(z) = z \left( \sum_{j=0}^N A_j z^j \right)^{-1} = \frac{Q(z)}{P(z)}, \quad (3.185)$$

sendo

$$Q(z) = \sum_{j=1}^{Nn} \sum_{i=0}^{j-1} b_i z^{j-i-1} h_{Nn-j}. \quad (3.186)$$

### 3.3 Representação no Espaço de Estado para Sistemas Lineares Concentrados e Discretos de Ordem Superior

#### 3.3.1 Sistemas Concentrados

Considere-se sistemas lineares concentrados da forma

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{d^j y}{dt^j} = f(t), \quad (3.187)$$

sendo os coeficientes  $A_j$  matrizes de ordem  $n$ ; a saída  $y(t) = y$  e a entrada  $f(t) = f$  do sistema são funções matriciais em  $t$ , respectivamente. As condições iniciais são

$$y(0) = y_0, \frac{dy}{dt}(0) = y_1, \dots, \frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}}(0) = y_{N-1}. \quad (3.188)$$

Define-se a seqüência de  $N$  vetores de ordem  $n$ , denotados por

$$\begin{cases} z_1 = y \\ z_2 = \dot{y} \\ \vdots \\ z_N = y^{(N-1)} \end{cases}. \quad (3.189)$$

Então, a equação (3.187) pode ser escrita como

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{N-1} = z_N \\ \dot{z}_N = -A_N^{-1}A_0z_1 - A_N^{-1}A_1z_2 - \dots - A_N^{-1}A_{N-2}z_{N-1} - A_N^{-1}A_{N-1}z_N + f \end{cases}. \quad (3.190)$$

Colocando-se as  $N$  equações na forma matricial resulta uma equação diferencial matricial de primeira ordem denotada por

$$\dot{\mathcal{Z}} = \mathcal{A}\mathcal{Z} + \mathcal{F}, \quad (3.191)$$

onde

$$\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1}f \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \\ -A_N^{-1}A_0 & -A_N^{-1}A_1 & -A_N^{-1}A_2 & \dots & -A_N^{-1}A_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (3.192)$$

Na literatura, a matriz  $\mathcal{A}$  é denominada *matriz companheira* e o vetor  $\mathcal{Z}$  *vetor de estado*, veja-se [Meirovitch, 1997; Ogata, 1998] para maiores detalhes.

A partir da teoria desenvolvida na seção (3.1.1), têm-se que a solução de uma equação não homogênea de primeira ordem arbitrária do tipo (3.191) é dada pela fórmula

$$\mathcal{Z}(t) = h(t)\mathcal{Z}(0) + \int_0^t h(t-\tau)\mathcal{F}(\tau)d\tau, \quad (3.193)$$

onde  $h(t)$  é a solução matricial do problema de valor inicial

$$\dot{h}(t) = \mathcal{A}h(t), \quad h(0) = I. \quad (3.194)$$

### 3.3.2 Sistemas Discretos

Para sistemas discretos de ordem  $n$ , do tipo

$$\sum_{j=0}^N A_j y_{k+j} = f_k, \quad (3.195)$$

sendo os coeficientes  $A_j$  matrizes de ordem  $n$ ;  $y_k$  e  $f_k$  funções vetoriais em  $k$ , com condições iniciais dadas por  $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$ ; define-se a seqüência de  $N$  vetores de ordem  $n$ , denotados por

$$\begin{cases} z_{1,k} = y_k \\ z_{2,k} = y_{k+1} \\ \vdots \\ z_{N,k} = y_{k+N-1} \end{cases} \quad (3.196)$$

A equação discreta (3.195) pode ser escrita como

$$\begin{cases} z_{1,k+1} &= z_{2,k} \\ z_{2,k+1} &= z_{3,k} \\ &\vdots \\ z_{N-1,k+1} &= z_{N,k} \\ z_{N,k+1} &= -A_N^{-1}A_0z_{1,k} - A_N^{-1}A_1z_{2,k} - \cdots - A_N^{-1}A_{N-2}z_{N-1,k} - A_N^{-1}A_{N-1}z_{N,k} + A_N^{-1}f_k \end{cases} \quad (3.197)$$

As  $N$  equações podem ser expressas na forma matricial, por um equação em diferenças de primeira ordem

$$\mathcal{Z}_{k+1} = \mathcal{A}\mathcal{Z}_k + \mathcal{F}_k, \quad (3.198)$$

onde

$$\mathcal{Z}_k = \begin{bmatrix} z_{1,k} \\ z_{2,k} \\ \vdots \\ z_{N,k} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1}f_k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ -A_N^{-1}A_0 & -A_N^{-1}A_1 & -A_N^{-1}A_2 & \cdots & -A_N^{-1}A_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (3.199)$$

Na literatura, a matriz  $\mathcal{A}$  é denominada *matriz companheira discreta* e o vetor  $\mathcal{Z}_k$ , *vetor de estado discreto*; para maiores detalhes, veja-se [Meirovitch, 1997; Ogata, 1998].

Da teoria desenvolvida na seção (3.1.3), resulta que a solução de uma equação não homogênea de primeira ordem discreta é dada pela fórmula

$$\mathcal{Z}_k = h_k \mathcal{Z}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} h_{k-1-j} \mathcal{F}_j, \quad (3.200)$$

onde  $h_k$  é a solução matricial do problema de valor inicial discreto

$$h_{k+1} = \mathcal{A}h_k, \quad h_0 = I. \quad (3.201)$$

## 4 CÁLCULO SIMBÓLICO DE RESPOSTAS FORÇADAS PARA SISTEMAS CONCENTRADOS E DISCRETOS

Neste capítulo, considera-se a extração de respostas livres de respostas dinâmicas ou em particular, de resposta forçadas. As componentes livres na resposta dinâmica de uma máquina, contêm informações valiosas acerca das propriedades do sistema. Tais informações pode ser utilizadas para monitorar e diagnosticar problemas na mesma, veja-se [Zheng, 1995]. Tanto para um sistema concentrado ou discreto a resposta forçada é decomposta na soma de uma resposta permanente e uma resposta livre, a qual depende diretamente dos valores iniciais da resposta permanente; atuando esta última como uma retroalimentação no sistema.

### 4.1 Decomposição da Resposta Forçada para Sistemas Concentrados

A *resposta forçada* de um sistema concentrado corresponde a solução do sistema matricial

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{d^j y}{dt^j}(t) = f(t), \quad (4.1)$$

com condições iniciais nulas, ou seja,

$$y(t_0) = 0, \quad \dot{y}(t_0) = 0, \quad \dots, \quad y^{(N-1)}(t_0) = 0, \quad (4.2)$$

é dada pela *integral de convolução*, ou simplesmente *convolução*,

$$y(t) = \int_{t_0}^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (4.3)$$

Na prática, o cálculo desta integral apresenta sempre uma resposta permanente e pode incluir respostas livres. A seguir, será mostrado que estas respostas livres são a rigor, introduzidas pelas respostas permanentes como uma retroalimentação no sistema. A sua caracterização é obtida com uso da base dinâmica gerada pela resposta impulso  $h(t)$  e de

suas derivadas. Para tanto, a resposta forçada dada por (4.3) é decomposta numa solução homogênea,  $y_h(t)$  e, numa solução não homogênea,  $y_p(t)$ , ou seja,

$$y(t) = \int_{t_0}^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau = y_h(t) + y_p(t). \quad (4.4)$$

Como  $\{h(t), \dot{h}(t), \dots, h^{(N-1)}(t)\}$  formam uma base de soluções da equação homogênea

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{d^j y}{dt^j}(t) = 0, \quad (4.5)$$

a integral (4.3), que corresponde a uma solução não homogênea, pode ser escrita como

$$y(t) = \int_{t_0}^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau = \sum_{j=0}^{N-1} h^{(j)}(t-t_0)a_j + y_p(t), \quad (4.6)$$

sendo que, os parâmetros  $a_j$  são vetores, a serem determinados a partir das condições iniciais nulas de  $y(t)$  em  $t = t_0$ , isto é, resolve-se o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{j=0}^{N-1} h^{(j)}(0)a_j + y_p(t_0) \\ 0 = \sum_{j=0}^{N-1} h^{(j+1)}(0)a_j + \dot{y}_p(t_0) \\ \vdots \\ 0 = \sum_{j=0}^{N-1} h^{(j+N-1)}(0)a_j + y_p^{(N-1)}(t_0) \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Sabe-se que a resposta impulso satisfaz a equação (4.5), com condições iniciais  $h(0) = 0, \dot{h}(0) = 0, \dots, A_N h^{(N-1)}(0) = I$ . Utilizando-se este fato, os valores  $h^{(j)}(0)$ , para  $j \geq N+1$ , podem ser determinados. Decorre, então que

$$\begin{cases} a_{N-1} = -A_N y_p(t_0) \\ a_{N-2} = -A_{N-1} y_p(t_0) - A_N \dot{y}_p(t_0) \\ a_{N-3} = -A_{N-2} y_p(t_0) - A_{N-1} \dot{y}_p(t_0) - A_N \ddot{y}_p(t_0) \\ \vdots \\ a_1 = -A_2 y_p(t_0) - A_3 \dot{y}_p(t_0) - \dots - A_N y_p^{(N-2)}(t_0) \\ a_0 = -A_1 y_p(t_0) - A_2 \dot{y}_p(t_0) - \dots - A_N y_p^{(N-1)}(t_0) \end{cases} \quad (4.8)$$

ou de forma compacta,

$$a_j = - \sum_{k=1}^{N-j} A_{k+j} y_p^{(k-1)}(t_0), \quad \text{para } j = 0 : N-1. \quad (4.9)$$

A resposta livre introduzida pela convolução vem a ser então

$$y_h(t) = - \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} h^{(j)}(t-t_0) A_{k+j} y_p^{(k-1)}(t_0). \quad (4.10)$$

Utilizando-se a base impulso normalizada descrita em (2.23), tem-se que

$$y_h(t) = - \sum_{j=0}^{N-1} h_j(t-t_0) y_p^{(j)}(t_0). \quad (4.11)$$

*Esta expressão significa que, sendo conhecidas as condições iniciais de uma solução não homogênea,  $y_p(t)$ , a solução homogênea,  $y_h(t)$ , fica determinada com o auxílio da resposta impulso  $h(t)$ .*

Desta forma, o cálculo da resposta forçada fica reduzido a obtenção da resposta particular,  $y_p(t)$  e, tem-se a seguinte expressão para a resposta forçada do sistema (4.64), a qual caracteriza uma decomposição da convolução

$$y(t) = \int_{t_0}^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau = y_p(t) - \sum_{j=0}^{N-1} h_j(t-t_0) y_p^{(j)}(t_0). \quad (4.12)$$

A fórmula anterior é atraente para entradas em que a parcela  $y_p(t)$  possa ser facilmente calculada. Por exemplo, para entradas lineares, exponenciais ou harmônicas, em que o método dos coeficientes indeterminados possa ser utilizado. Nesta situação, a resposta permanente,  $y_p(t)$ , é do mesmo tipo, envolvendo uma combinação linear da entrada e de um certo número de suas derivadas. Assim, os valores iniciais de  $y_p(t)$ , dependem diretamente dos valores iniciais da entrada. Este último será posteriormente considerado num contexto de entradas arbitrárias.

Na próxima seção, aborda-se a decomposição da resposta forçada do sistema, sujeito a diferentes tipos de entradas.

#### 4.1.1 Decomposição da Resposta Forçada para Diferentes Tipos de Entradas

##### 4.1.1.1 Entrada Linear

Quando a excitação é linear, da forma  $f(t) = ct + d$ , com  $c$  e  $d$  vetores escalares de ordem  $n$ , uma solução particular, pode ser expressa por

$$y_p(t) = \alpha t + \beta, \quad (4.13)$$

onde os vetores  $\alpha$  e  $\beta$  são obtidos ao resolver-se os sistemas lineares

$$\begin{cases} A_0\alpha = c \\ A_0\beta = d - A_1\alpha \end{cases}, \quad (4.14)$$

resultantes da substituição de (4.13) no sistema (4.1). Assim, para  $A_0$  não singular, tem-se

$$y_p(t) = A_0^{-1} [ct + d - A_1A_0^{-1}c]. \quad (4.15)$$

Segue-se, que os valores iniciais são dados por

$$\begin{cases} y_p(t_0) &= A_0^{-1} [ct_0 + d - A_1 A_0^{-1} c] \\ \dot{y}_p(t_0) &= A_0^{-1} c \\ y^{(j)}(t_0) &= 0 \text{ para } j = 2 : N - 1 \end{cases} \quad (4.16)$$

A resposta forçada dada a partir de (4.12), sujeita à uma entrada linear e com condições iniciais nulas em  $t = t_0$  é dada então por

$$y(t) = y_p(t) - h_0(t - t_0)y_p(t_0) - h_1(t - t_0)\dot{y}_p(t - t_0), \quad (4.17)$$

onde  $y_p(t)$  é definida segundo a expressão (4.15).

#### 4.1.1.2 Entrada Degrau

Em particular, para uma entrada degrau

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ d, & t > t_0 \end{cases}, \quad (4.18)$$

tem-se a resposta forçada do mesmo tipo

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ A_0^{-1}d - h_0(t - t_0)A_0^{-1}d, & t > t_0 \end{cases}. \quad (4.19)$$

#### 4.1.1.3 Entrada Polinomial

Considere-se uma entrada polinomial homogênea definida por

$$f(t) = t^m v, \quad m \leq N, \quad (4.20)$$

procura-se então uma solução não homogênea polinomial do mesmo tipo, expressa por

$$y_p(t) = \sum_{k=0}^m \frac{t^k}{k!} c_k, \quad (4.21)$$

onde os vetores constantes,  $c_k$ , são obtidos pelo método dos coeficientes a determinar. Após substituição de (4.21) no sistema (4.1), obtém-se o sistema linear

$$\begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \cdot & A_m \\ 0 & A_0 & A_1 & \cdot & A_{m-1} \\ 0 & 0 & A_0 & \cdot & A_{m-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ m!v \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

o qual pode ser resolvido por retrosubstituição.

Em particular, para uma entrada quadrática,  $f(t) = t^2v$ , têm-se a resposta permanente definida por

$$y_p(t) = A_0^{-1} (t^2 - 2tA_1A_0^{-1} + 2(A_1A_0^{-1})^2 - 2A_2A_0^{-1}) v; \quad (4.23)$$

sendo então a resposta forçada representada pela expressão

$$y(t) = y_p(t) - h_0(t - t_0)y_p(t_0) - h_1(t - t_0)\dot{y}_p(t - t_0) - h_2(t - t_0)\ddot{y}_p(t_0). \quad (4.24)$$

#### 4.1.1.4 Entrada Harmônica

Suponha-se uma entrada do tipo harmônica definida por

$$f(t) = e^{i\omega t}v, \quad (4.25)$$

onde  $\omega$  é uma frequência, denominada *frequência de entrada* e,  $v$  um vetor constante conhecido.

Seja uma solução permanente do mesmo tipo, expressa por

$$y_p(t) = e^{i\omega t} w, \quad (4.26)$$

decorre por substituição na equação (4.1) que

$$y_p(t) = H(i\omega) e^{i\omega t} v, \quad (4.27)$$

sendo que,

$$H(i\omega) = \left( \sum_{j=0}^N (i\omega)^j A_j \right)^{-1}, \quad (4.28)$$

corresponde a *resposta em frequência do sistema*.

Então, o sistema (4.1) diante de uma entrada harmônica com amplitude  $v$  e frequência  $\omega$  tem como resposta forçada

$$y(t) = e^{i\omega t} H(i\omega) v - \sum_{j=0}^{N-1} h_j(t - t_0) [(i\omega)^{k-1} e^{i\omega t_0} H(i\omega) v]. \quad (4.29)$$

Decorre, pelo princípio da superposição linear, que para entradas do tipo

$$f(t) = \sum_{k=0}^N e^{i\omega_k t} v_k, \quad (4.30)$$

tem-se a resposta

$$y(t) = \sum_{k=0}^N e^{i\omega_k t} H(i\omega_k) v_k. \quad (4.31)$$

#### 4.1.1.5 Entrada Exponencial

Para entradas do tipo exponencial

$$f(t) = e^{\lambda t} v, \quad (4.32)$$

onde  $\lambda$  é um escalar e  $v$  um vetor constante conhecido, procuram-se soluções permanentes do mesmo tipo

$$y_p(t) = e^{\lambda t} w, \quad (4.33)$$

decorre por substituição em (4.1) que

$$y_p(t) = H(\lambda) e^{\lambda t} v, \quad (4.34)$$

onde

$$H(\lambda) = \left( \sum_{j=0}^N (\lambda)^j A_j \right)^{-1}, \quad (4.35)$$

corresponde a função de transferência do sistema.

Então, o sistema (4.64) diante de uma entrada exponencial, com amplitude  $v$  e expoente  $\lambda$ , possui a resposta forçada definida por

$$y(t) = e^{\lambda t} H(\lambda) v - \sum_{j=0}^{N-1} h_j(t - t_0) [(\lambda)^{k-1} e^{\lambda t_0} H(\lambda) v]. \quad (4.36)$$

Decorre, pelo princípio da superposição linear, que para entradas do tipo

$$f(t) = \sum_{k=0}^N e^{i\omega_k t} v_k, \quad (4.37)$$

tem-se a resposta expressa por

$$y(t) = \sum_{k=0}^N e^{\lambda_k t} H(\lambda_k) v_k. \quad (4.38)$$

#### 4.1.1.6 Entrada Seccionalmente Contínua

Considere-se o sistema

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{d^j y}{dt^j}(t) = f(t), \quad (4.39)$$

em que o termo forçante  $f(t)$ , é do tipo

$$f(t) = \begin{cases} f_k(t) & t_k < t < t_{k+1}, \quad k = 0 : N - 1 \\ 0, & t \geq t_N \end{cases}, \quad (4.40)$$

onde  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$ . As funções  $f_k(t)$  são tais que, torna-se simples construir uma correspondente resposta particular,  $y_{p,k}(t)$ , do sistema no intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$ . Pela fórmula de variação de parâmetros, dada pela expressão (2.22), tem-se que em cada subintervalo  $[t_k, t_{k+1}]$  a resposta total é dada por

$$y(t) = \sum_{j=0}^{N-1} h_j(t - t_0) y^{(j)}(t_k) + \int_{t_k}^t h(t - \tau) f_k(\tau) d\tau, \quad \text{para } t \in [t_k, t_{k+1}]. \quad (4.41)$$

Pela decomposição da resposta forçada descrita por (4.12), resulta que

$$y(t) = y_{p,k}(t) - \sum_{j=0}^{N-1} h_j(t - t_k) \left[ y_k^{(j)}(t_k^-) - y_{p,k}^{(j)}(t_k) \right], \quad (4.42)$$

para  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ .

#### 4.1.1.7 Outros Tipos de Entradas

O princípio da superposição linear pode ser utilizado para obter respostas do sistema sujeito à excitações constituídas pela superposição de entradas de diferentes tipos considerados anteriormente. Por exemplo, para a entrada

$$f(t) = e^{\lambda_1 t} v_1 + v_2 + \sin(\omega_3 t) v_3,$$

têm-se a resposta

$$y(t) = e^{\lambda_1 t} H(\lambda_1) v_1 + A_o^{-1} v_2 + \frac{1}{2} \left[ e^{i\omega t} H(i\omega_3) v_3 + e^{-i\omega t} \overline{H(i\omega_3)} \overline{v_3} \right].$$

Apresenta-se nas próximas subseções, três sistemas do tipo escalar ou matricial, com o objetivo de ilustrar a teoria de decomposição para a resposta forçada de sistemas concentrados desenvolvida neste capítulo.

#### 4.1.2 Sistema Escalar de Sexta Ordem

Na análise de modelagem de sistemas [Lyshevski, 2001], considera o sistema SISO concentrado de sexta ordem, expresso por

$$\frac{dy^6}{dt^6}(t) + 16.5 \frac{dy^5}{dt^5}(t) + 165 \frac{dy^4}{dt^4}(t) + 1075 \frac{dy^3}{dt^3}(t) + 4688 \frac{dy^2}{dt^2}(t) + 12500 \frac{dy}{dt}(t) + 15625y(t) = f(t), \quad (4.43)$$

cuja equação característica

$$s^6 + 16.5s^5 + 165s^4 + 1075s^3 + 4688s^2 + 12500s + 15625 = 0, \quad (4.44)$$

possui raízes

$$s_{1,2} = -3.7221 \pm 1.3238I, \quad s_{3,4} = -3.2119 \pm 3.8261I, \quad s_{5,6} = -1.3159 \pm 6.1956I. \quad (4.45)$$

Nas simulações numéricas para a obtenção e decomposição da resposta forçada deste sistema, considerou-se uma entrada seccionalmente contínua, denotada por

$$f(t) = \begin{cases} f_1, & 0 \leq t < 4 \\ f_2, & 4 \leq t < 8 \\ f_3, & t \geq 8 \end{cases} . \quad (4.46)$$

Para determinar a resposta forçada do sistema, foi utilizado o algoritmo de decomposição desenvolvido na seção anterior. Desta forma, a partir da expressão (4.42), a

resposta forçada do sistema pode ser escrita por

$$y(t) = \begin{cases} y_{p,0}(t) - \sum_{j=0}^5 h_j(t) [y^{(j)}(0) - y_{p,0}^{(j)}(0)], & 0 \leq t < 4 \\ y_{p,1}(t) - \sum_{j=0}^5 h_j(t-4) [y^{(j)}(4^-) - y_{p,1}^{(j)}(4)], & 4 \leq t < 8 \\ y_{p,2}(t) - \sum_{j=0}^5 h_j(t-8) [y^{(j)}(8^-) - y_{p,2}^{(j)}(8)], & t \geq 8 \end{cases}, \quad (4.47)$$

onde  $y_{p,j}(t)$ , denota a resposta permanente por intervalo e,  $h_j(t)$  as componentes da base dinâmica gerada a partir da resposta impulso do sistema (4.43). A expressão analítica da resposta impulso é dada por

$$\begin{aligned} h(t) = & -0.00045e^{-3.2119t}\cos(3.8261t) - 0.00045e^{-3.2119t}\sin(3.8261t) + \\ & + 0.00033e^{-3.7221t}\cos(1.3238t) + 0.00129e^{-3.7221t}\sin(1.3238t) + \\ & + 0.00012e^{-1.3159t}\cos(6.1956t) - 0.7228)10^{-5}e^{-1.3159t}\sin(6.1956t). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Os elementos da base impulsiva normalizada,  $h_j(t)$ , os quais são gerados a partir de (4.48), através da equação (2.23) são

$$\begin{aligned} h_0(t) &= 12500h(t) + 4688\dot{h}(t) + 1075\ddot{h}(t) + 165\ddot{\ddot{h}}(t) + 16.5h^{(iv)}(t) + h^{(v)}(t) \\ h_1(t) &= 4688h(t) + 1075\dot{h}(t) + 165\ddot{h}(t) + 16.5\ddot{\ddot{h}}(t) + h^{(iv)}(t) \\ h_2(t) &= 1075h(t) + 165\dot{h}(t) + 16.5\ddot{h}(t) + \ddot{\ddot{h}}(t) \\ h_3(t) &= 165h(t) + 16.5\dot{h}(t) + \ddot{h}(t) \\ h_4(t) &= 16.5h(t) + \dot{h}(t) \\ h_5(t) &= h(t) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Substituindo-se as expressões da resposta impulso e de suas derivadas em (4.49), obtêm-se as expressões analíticas

$$h_0(t) = 2.9456e^{-3.7221t} \cos(1.3238t) - 0.2965e^{-1.3159t} \sin(6.1956t) + \\ + 0.04475e^{-1.3159t} \cos(6.1956t) + 4.3694e^{-3.7221t} \sin(1.3238t) + \\ - 1.9904e^{-3.2119t} \cos(3.8261t) + 0.1784e^{-3.2119t} \sin(3.8261t),$$

$$h_1(t) = 1.2833e^{-3.7221t} \cos(1.3238t) - 0.2206e^{-1.3159t} \sin(6.1956t) + \\ + 0.0801e^{-1.3159t} \cos(6.1956t) + 2.7033e^{-3.7221t} \sin(1.3238t) + \\ - 1.3635e^{-3.2119t} \cos(3.8261t) - 0.1854e^{-3.2119t} \sin(3.8261t),$$

$$h_2(t) = 0.0449e^{-1.3159t} \cos(6.1956t) + -0.0694e^{-1.3159t} \sin(6.1956t) + \\ + 0.3484e^{-3.7221t} \cos(1.3238t) + 0.7751e^{-3.7221t} \sin(1.3238t) + \\ - 0.3933e^{-3.2119t} \cos(3.8261t) - 0.1316e^{-3.2119t} \sin(3.8261t),$$

$$h_3(t) = 0.0123e^{-1.3159t} \cos(6.1956t) - 0.0112e^{-1.3159t} \sin(6.1956t) + \\ + 0.0538e^{-3.7221t} \cos(1.3238t) + 0.1453e^{-3.7221t} \sin(1.3238t) + \\ - 0.0661e^{-3.2119t} \cos(3.8261t) - 0.0311e^{-3.2119t} \sin(3.8261t),$$

$$h_4(t) = 0.0018e^{-1.3159t} \cos(6.1956t) - 0.0086e^{-1.3159t} \sin(6.1956t) + \\ + 0.0059e^{-3.7221t} \cos(1.3238t) + 0.0161e^{-3.7221t} \sin(1.3238t) + \\ - 0.0077e^{-3.2119t} \cos(3.8261t) - 0.0043e^{-3.2119t} \sin(3.8261t),$$

$$h_5(t) = 0.0001e^{-1.3159t} \cos(6.1956t) + 0.0003e^{-3.7221t} \cos(1.3238t) + \\ + 0.0013e^{-3.7221t} \sin(1.3238t) - 0.0004e^{-3.2119t} \cos(3.8261t) + \\ - 0.0004e^{-3.2119t} \sin(3.8261t).$$

O comportamento dos elementos da base impulsiva normalizada são apresentados na Tab. 4.1; sendo que, o elemento  $h_5(t)$  é igual a resposta impulso  $h(t)$  do sistema, pois o coeficiente da componente de maior ordem no sistema é unitário.

Na Tab. 4.2, é apresentada a decomposição da resposta forçada do sistema, considerando-se diferentes tipos de entradas para a excitação.

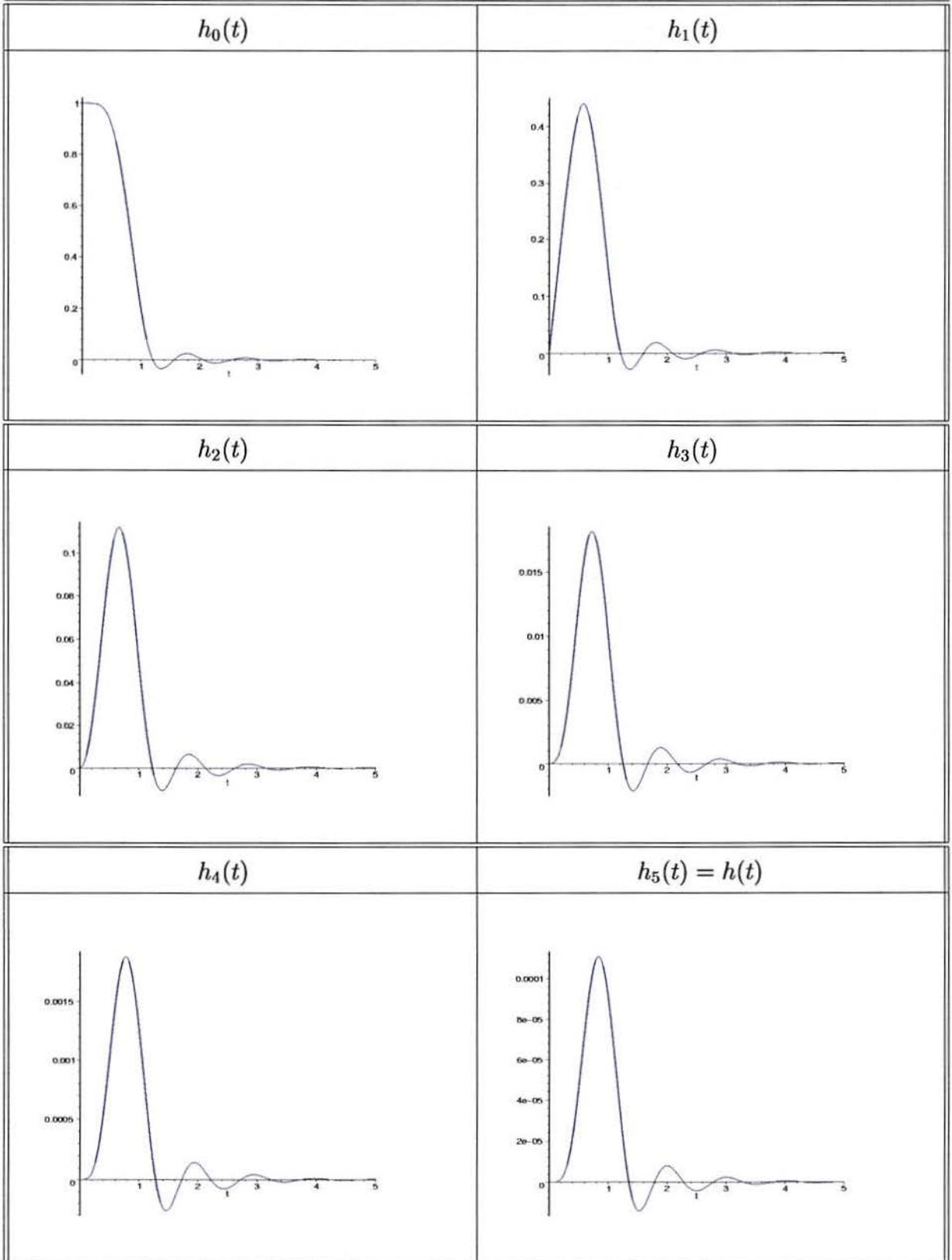


Tabela 4.1 Elementos da base impulsiva normalizada

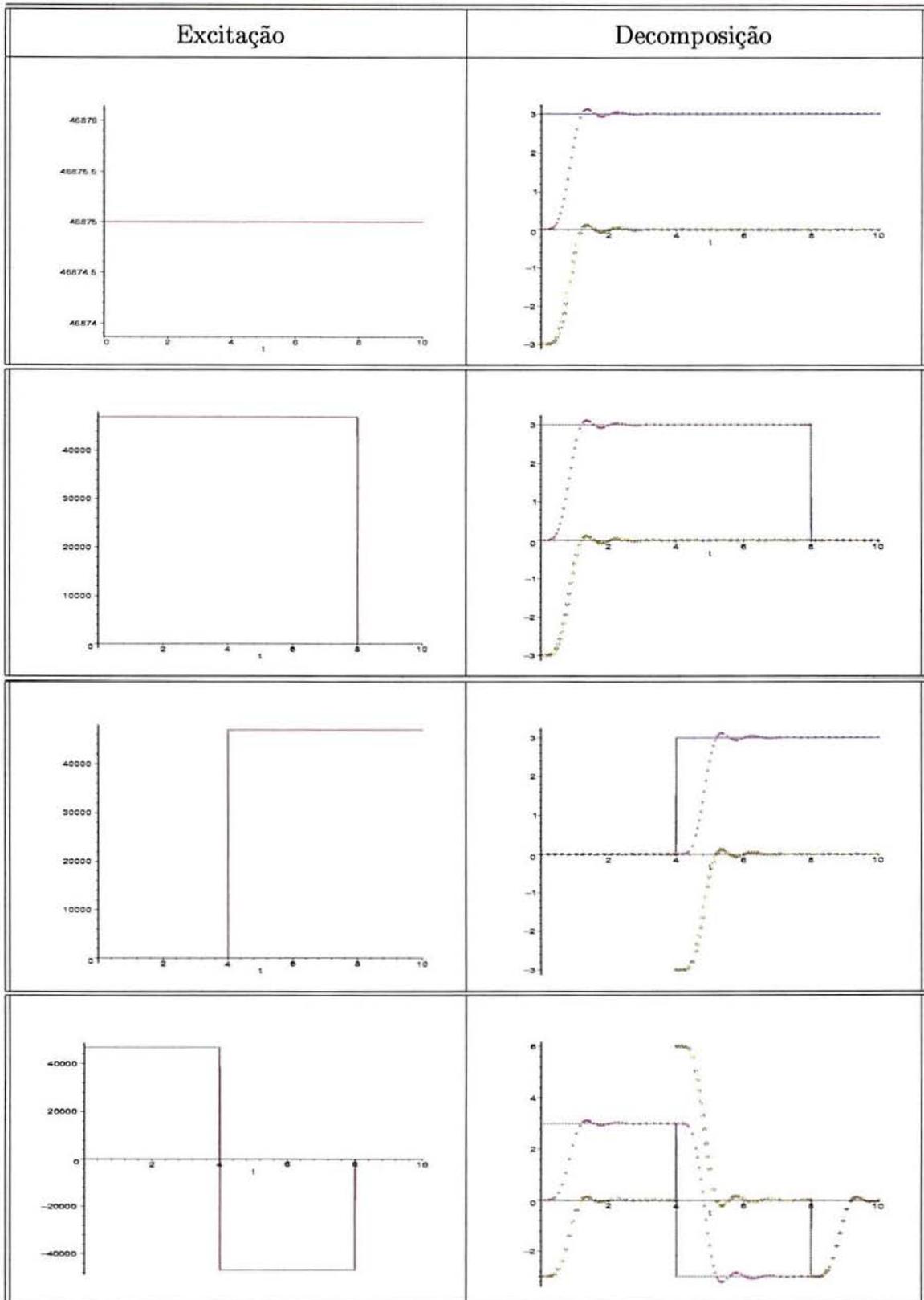


Tabela 4.2 Decomposição da resposta forçada para diferentes tipos de entradas

Pode ser observado que, o elemento de base  $h_0(t)$ , predomina na resposta livre, tanto na induzida pela permanente como na induzida pelo sistema, sendo ativado nos pontos de salto da entrada. A seguir, faz-se uma análise detalhada do quarto tipo de entrada apresentado na Tab. 4.2. Considere-se o sistema descrito em (4.43), com uma excitação do tipo

$$f(t) = \begin{cases} 46875, & 0 \leq t < 4 \\ -46875, & 4 \leq t < 8 \\ 0, & t \geq 8 \end{cases} . \quad (4.50)$$

A resposta permanente do sistema sendo do mesmo tipo é dada por

$$y_p(t) = \begin{cases} \frac{8}{125}, & 0 \leq t < 4 \\ -\frac{8}{125}, & 4 \leq t < 8 \\ 0, & t \geq 8 \end{cases} . \quad (4.51)$$

Para efeitos de verificação, apresenta-se na Fig. (4.1), a resposta forçada do sistema obtida através da fórmula de convolução (4.3) e do método de decomposição descrito.

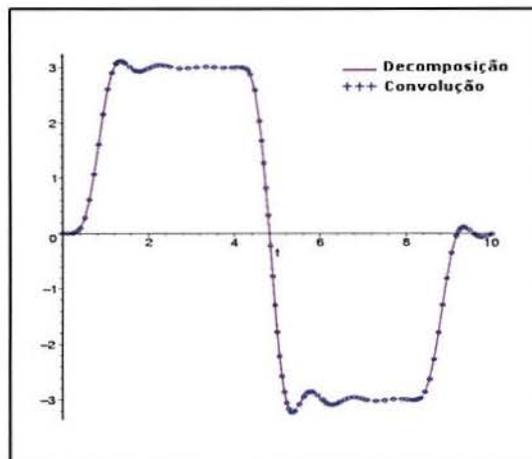


Figura 4.1 Resposta forçada calculada a partir da convolução e do método de decomposição

Os resultados da decomposição da resposta forçada, por intervalo de definição da entrada, são apresentados na Tab 4.3.

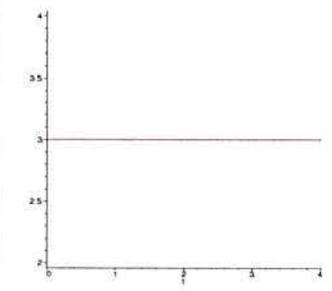
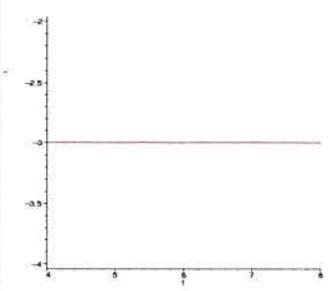
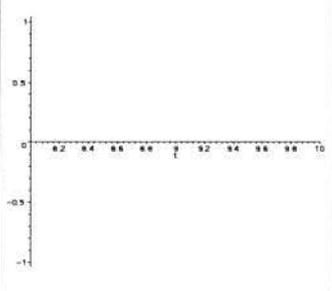
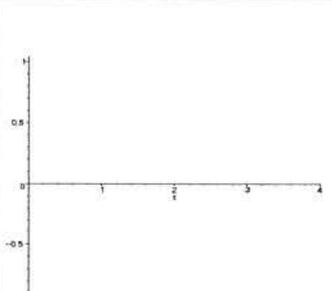
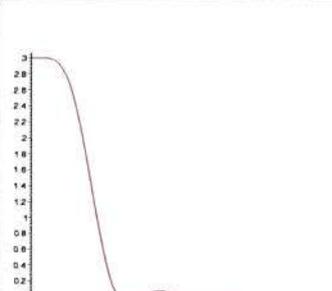
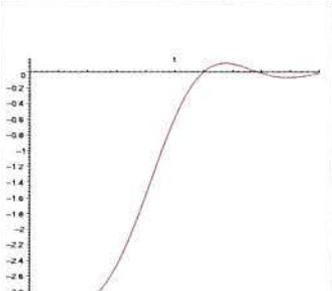
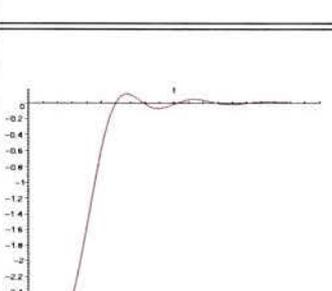
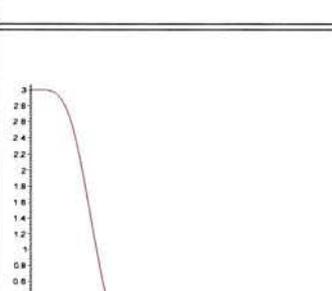
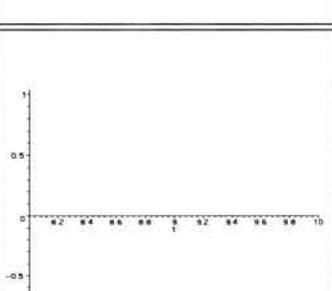
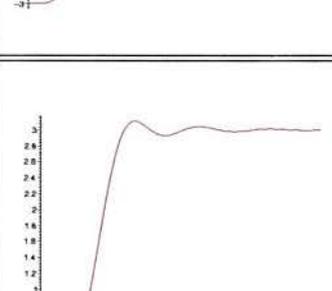
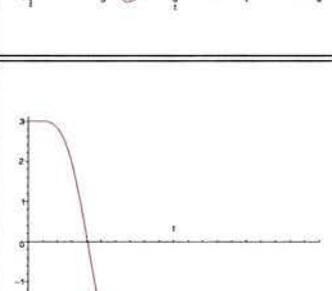
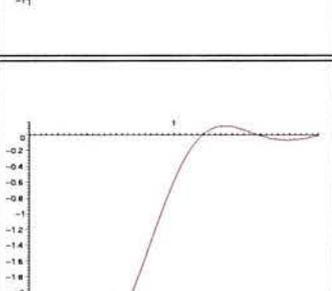
Gráficos	$0 \leq t < 4$	$4 \leq t < 8$	$t \geq 8$
Resposta Permanente			
Resposta Homogênea Induzida Sistema			
Resposta Homogênea Induzida Permanente			
Resposta Forçada do Sistema			

Tabela 4.3 Resposta permanente, respostas homogêneas induzidas pelo sistema e pela permanente e resposta forçada por intervalo de definição

### 4.1.3 Sistema Matricial de Segunda Ordem

Nesta seção considera-se, para efeitos de ilustração, um sistema MIMO centrado estável descrito por uma equação diferencial matricial de segunda ordem, dada na forma adimensional por

$$A_2 \frac{d^2 y}{dt^2}(t) + A_1 \frac{dy}{dt}(t) + A_0 y(t) = f(t), \quad (4.52)$$

onde

$$A_2 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -5 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 36.20 & -7.80 & -5.40 & -11.80 \\ -7.80 & 42.0 & -19.80 & 5.40 \\ 5.40 & -19.80 & 62.0 & -7.80 \\ -11.80 & 5.40 & -7.80 & 96.20 \end{bmatrix},$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 120 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 400 & -10 & 0 \\ 0 & -10 & 400 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 400 \end{bmatrix}.$$

Sendo as condições iniciais nulas, denotadas por

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0. \quad (4.53)$$

Nas simulações numéricas para obtenção e decomposição da resposta forçada deste sistema a excitação foi definida por

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}, \quad (4.54)$$

onde cada componente  $f_j$  corresponde a uma entrada seccionalmente contínua, denotada por

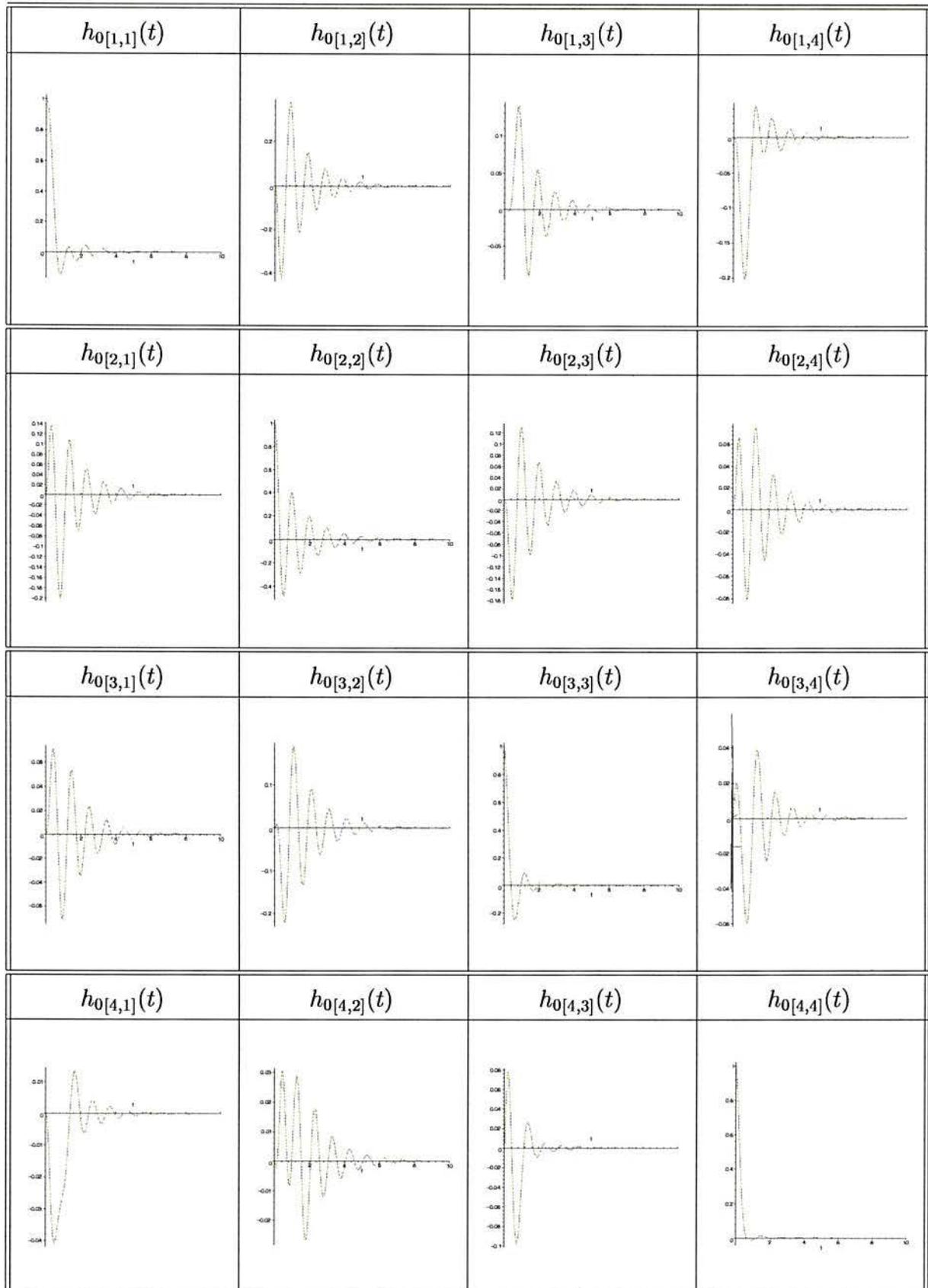
$$f_j(t) = \begin{cases} f_{j1}, & t_0 \leq t < t_1 \\ f_{j2}, & t_1 \leq t < t_2 \\ f_{j3}, & t \geq t_2 \end{cases} . \quad (4.55)$$

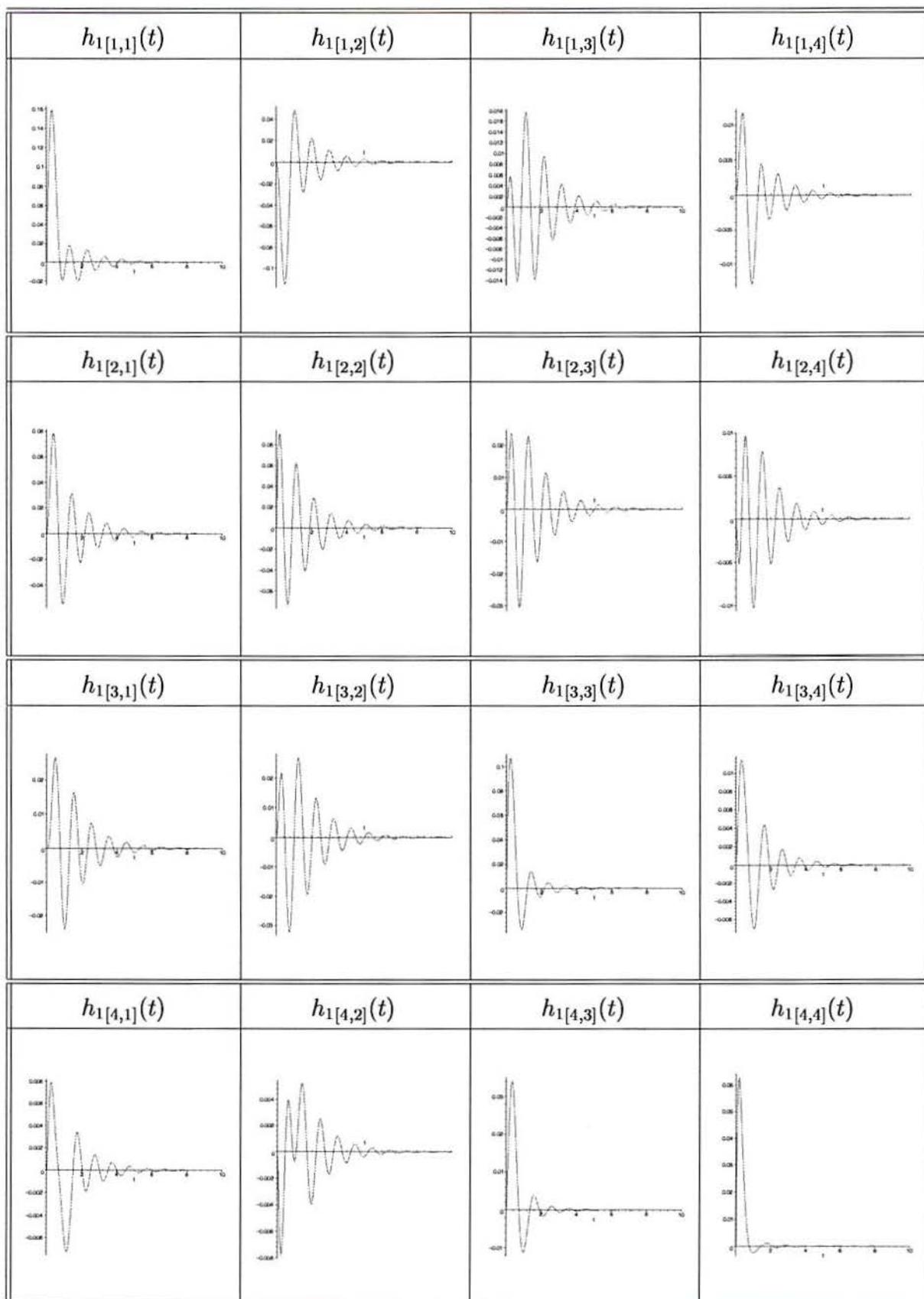
Através do algoritmo de decomposição a solução é dada por

$$y(t) = \begin{cases} y_{p,0}(t) - h_0(t - t_0) [y(t_0) - y_{p,0}(t_0)] - h_1(t) [\dot{y}(t_0) - \dot{y}_{p,0}(t_0)], & t_0 \leq t < t_1 \\ y_{p,1}(t) - h_0(t - t_1) [y(t_1^-) - y_{p,1}(t_1)] - h_1(t - t_1) [\dot{y}(t_1^-) - \dot{y}_{p,1}(t_1)], & t_1 \leq t < t_2 \\ y_{p,2}(t) - h_0(t - t_2) [y(t_2^-) - y_{p,2}(t_2)] - h_1(t - t_2) [\dot{y}(t_2^-) - \dot{y}_{p,2}(t_2)], & t \geq t_2 \end{cases} , \quad (4.56)$$

onde  $y_{p,j}(t)$  denota a resposta permanente por intervalo e  $h_j(t)$  as componentes matriciais da base dinâmica gerada a partir da resposta impulso do sistema (4.52).

As componentes das matrizes  $h_0(t)$  e  $h_1(t)$ , que formam a base impulsiva normalizada, são apresentadas nas Tabs. 4.4 e 4.5.

Tabela 4.4 Componentes do elemento  $h_0(t)$  da base impulsiva normalizada

Tabela 4.5 Componentes do elemento  $h_1(t)$  da base impulsiva normalizada

A seguir, apresenta-se os resultados obtidos para uma entrada com comportamento descrito na Tab. 4.6, cujas componentes são definidas por

$$f_1(t) = 10, \quad f_2(t) = -10, \quad f_3(t) = \begin{cases} -30, & 0 \leq t < 4 \\ 30, & 4 \leq t < 8 \\ -30, & t \geq 8 \end{cases}, \quad f_4(t) = 20. \quad (4.57)$$

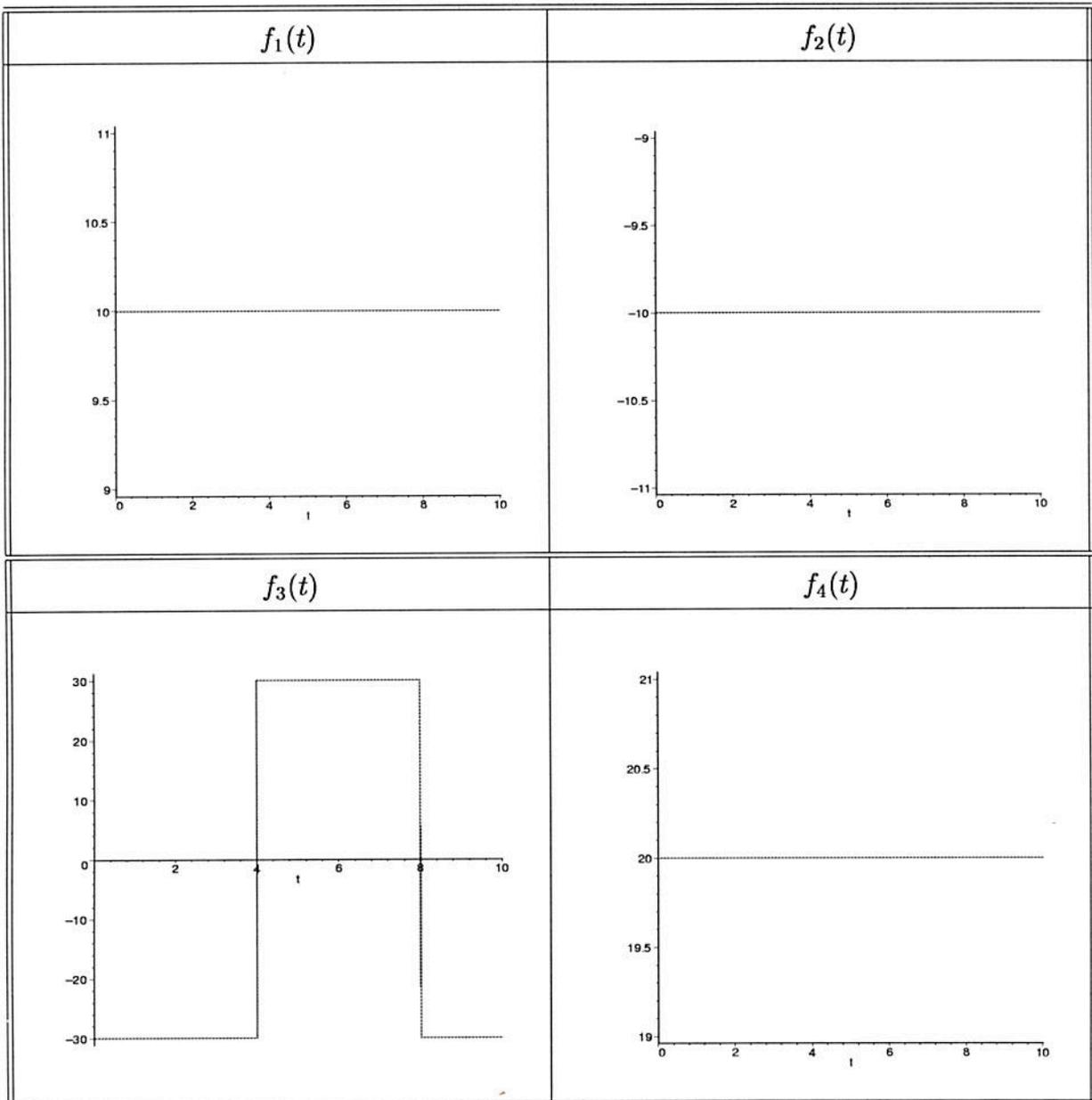


Tabela 4.6 Componentes da excitação

Assim, a resposta permanente do sistema, denotada por

$$y_p(t) = \begin{bmatrix} y_{p1}(t) \\ y_{p2}(t) \\ y_{p3}(t) \\ y_{p4}(t) \end{bmatrix}, \quad (4.58)$$

tem as componentes expressas por

$$y_{p1}(t) = \begin{cases} 0.0813, & 0 \leq t < 4 \\ 0.0816, & 4 \leq t < 8 \\ 0.0813, & t \geq 8 \end{cases}, \quad (4.59)$$

$$y_{p2}(t) = \begin{cases} -0.0248, & 0 \leq t < 4 \\ -0.0211, & 4 \leq t < 8 \\ -0.0248, & t \geq 8 \end{cases}, \quad (4.60)$$

$$y_{p3}(t) = \begin{cases} -0.0744, & 0 \leq t < 4 \\ 0.0758, & 4 \leq t < 8 \\ -0.0744, & t \geq 8 \end{cases}, \quad (4.61)$$

$$y_{p4}(t) = \begin{cases} 0.0481, & 0 \leq t < 4 \\ 0.0519, & 4 \leq t < 8 \\ 0.0481, & t \geq 8 \end{cases}. \quad (4.62)$$

Para efeitos de verificação, apresenta-se na Fig. (4.7), para cada componente, a resposta forçada do sistema obtida através da fórmula de convolução (4.3) e do método de decomposição.

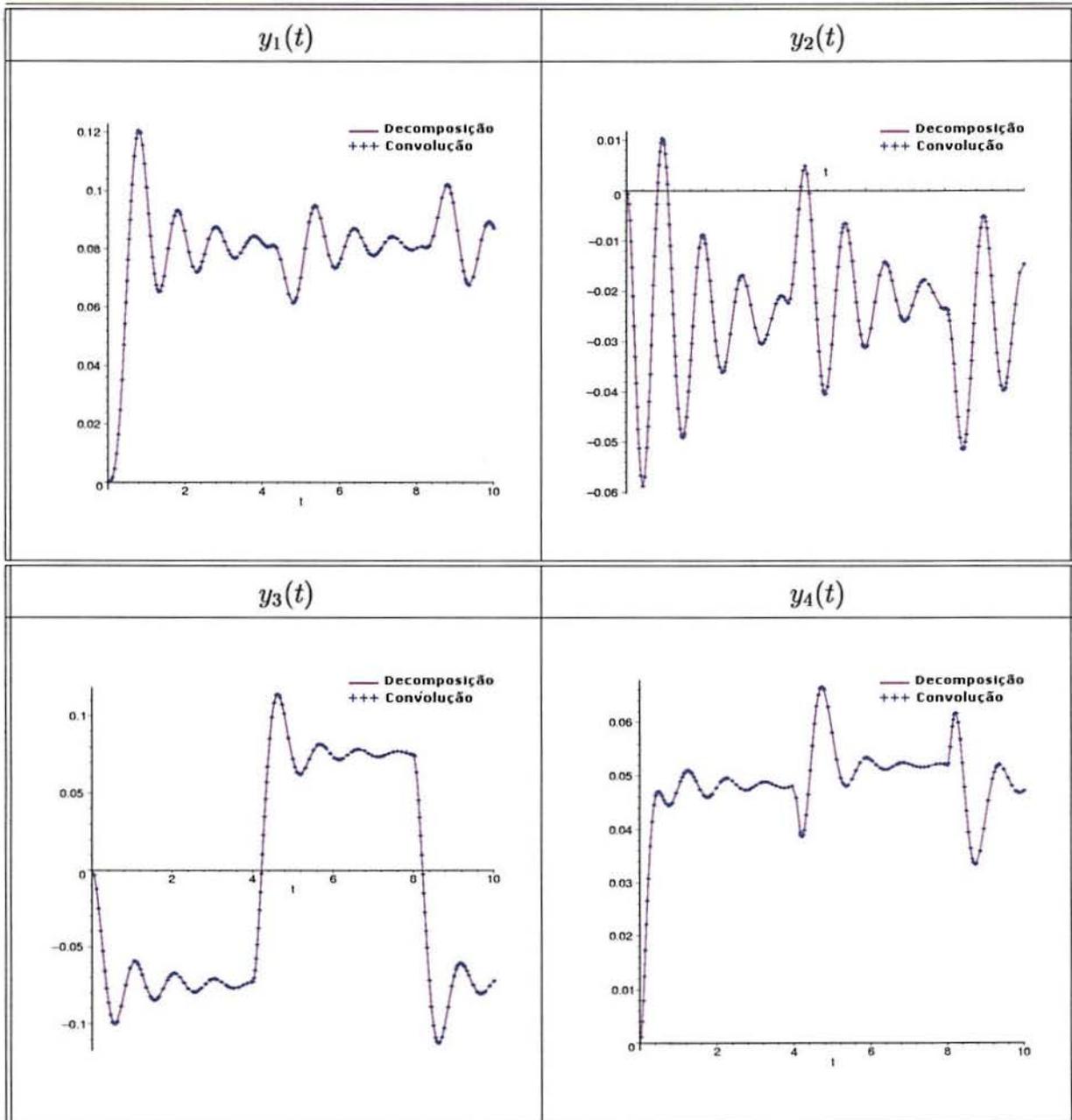


Tabela 4.7 Resposta forçada para cada componente, calculada a partir da convolução e do método de decomposição

Os resultados da decomposição da resposta forçada são apresentados nas Tabs. 4.8 e 4.9; sendo que, nesta última são apresentadas, para cada componente do sistema, as respostas provenientes da decomposição em um mesmo gráfico.

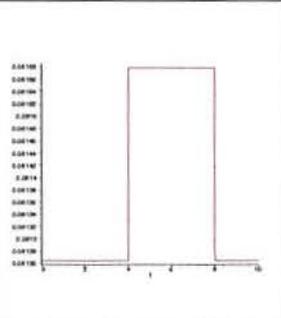
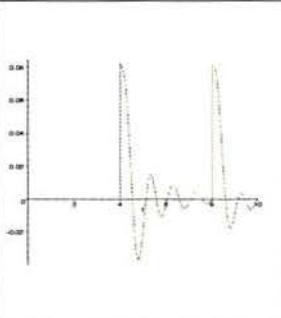
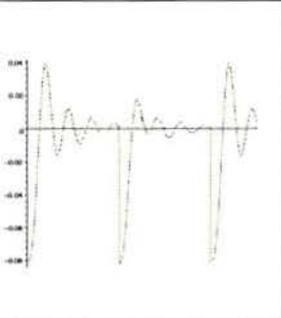
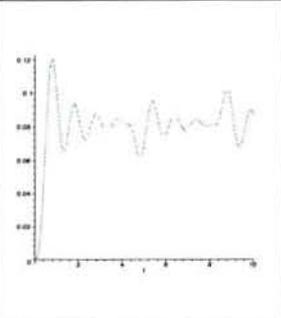
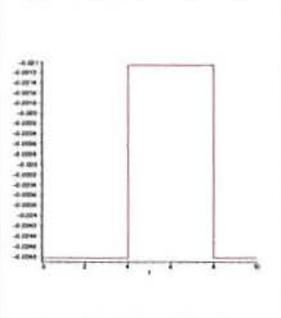
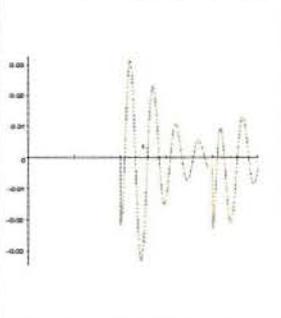
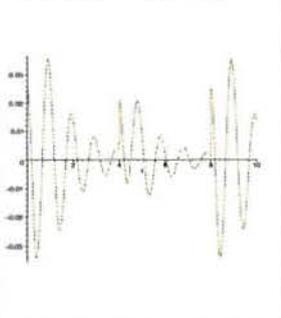
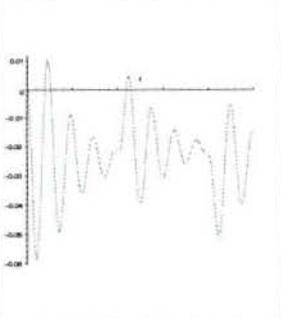
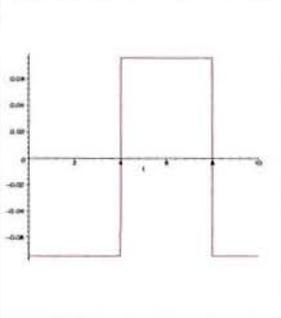
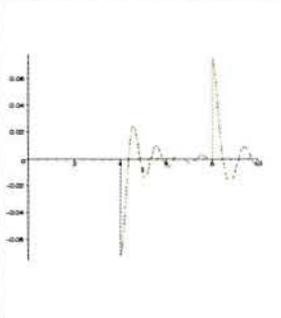
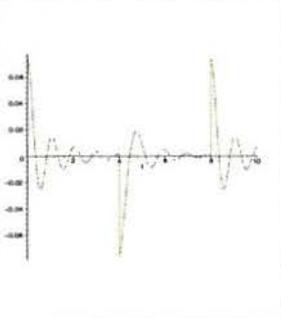
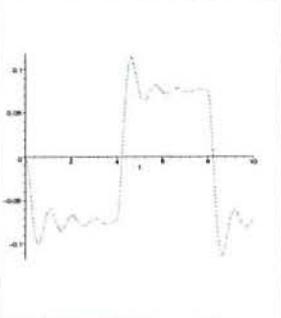
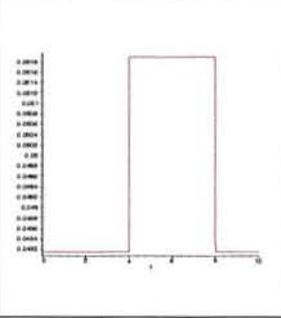
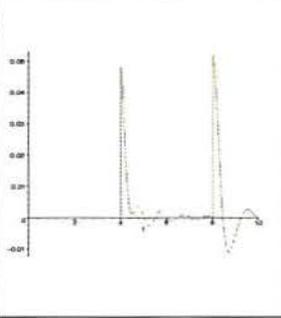
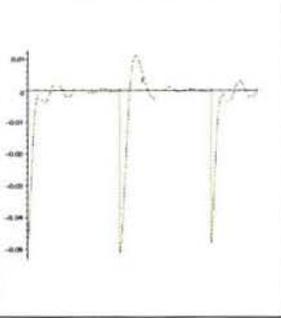
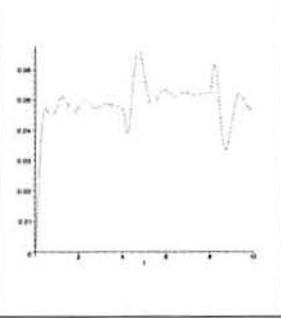
Cptes	Permanente	Homogênea Induzida Cls.	Homogênea Induzida Perm.	Resposta Forçada
1				
2				
3				
4				

Tabela 4.8 Resposta permanente, respostas homogêneas induzidas pelo sistema e pela permanente e resposta forçada, por componente

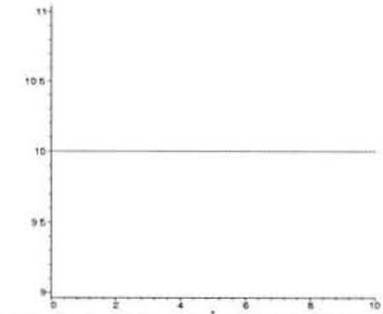
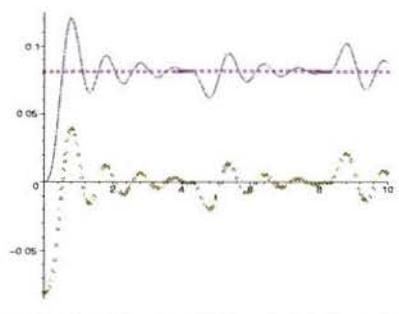
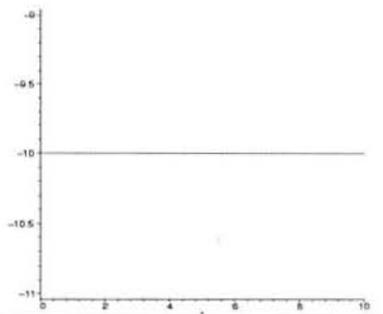
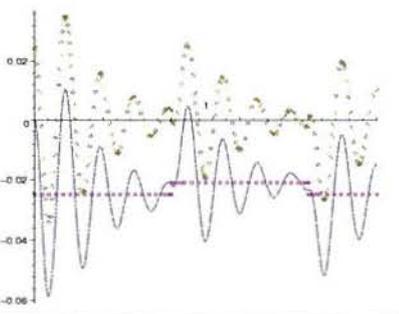
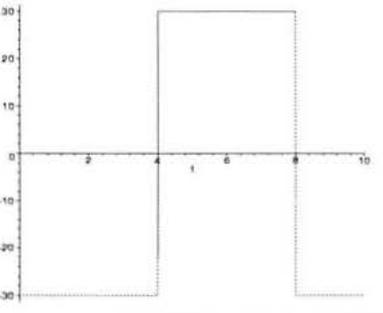
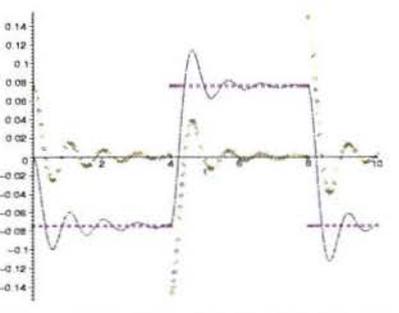
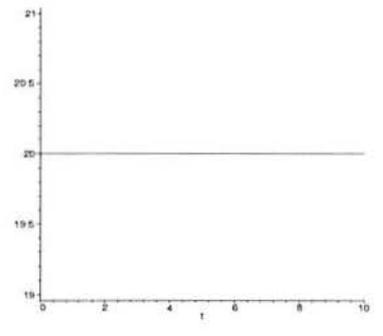
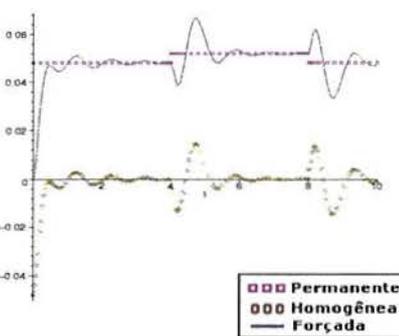
Cptes	Excitação	Decomposição
1		
2		
3		
4		 <div data-bbox="1157 1892 1332 1960" style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> <p> <span style="color: red;">- - -</span> Permanente  <span style="color: green;">. . .</span> Homogênea  <span style="color: blue;">—</span> Forçada </p> </div>

Tabela 4.9 Entradas e respostas, por componente, provenientes da decomposição do sistema

#### 4.1.4 Sistema Tridimensional para a Suspensão de Veículos

Considere-se o sistema MIMO concentrado do modelo da suspensão de veículos, apresentado na subseção 3.2.2.2, com os mesmos parâmetros numéricos considerados para a suspensão passiva, descritos na Tab. 3.2. Suponha-se também, que a entrada é do mesmo tipo apresentado anteriormente, ou seja, tipo lombada, que age apenas nas rodas dianteiras do veículo. Os resultados da decomposição da resposta forçada deste sistema, utilizando-se a teoria desenvolvida, sendo as condições iniciais nulas, denotadas por

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0, \quad (4.63)$$

são apresentados a seguir. As Tabs. 4.10 e 4.11 correspondem a excitação dada ao sistema, para cada componente.

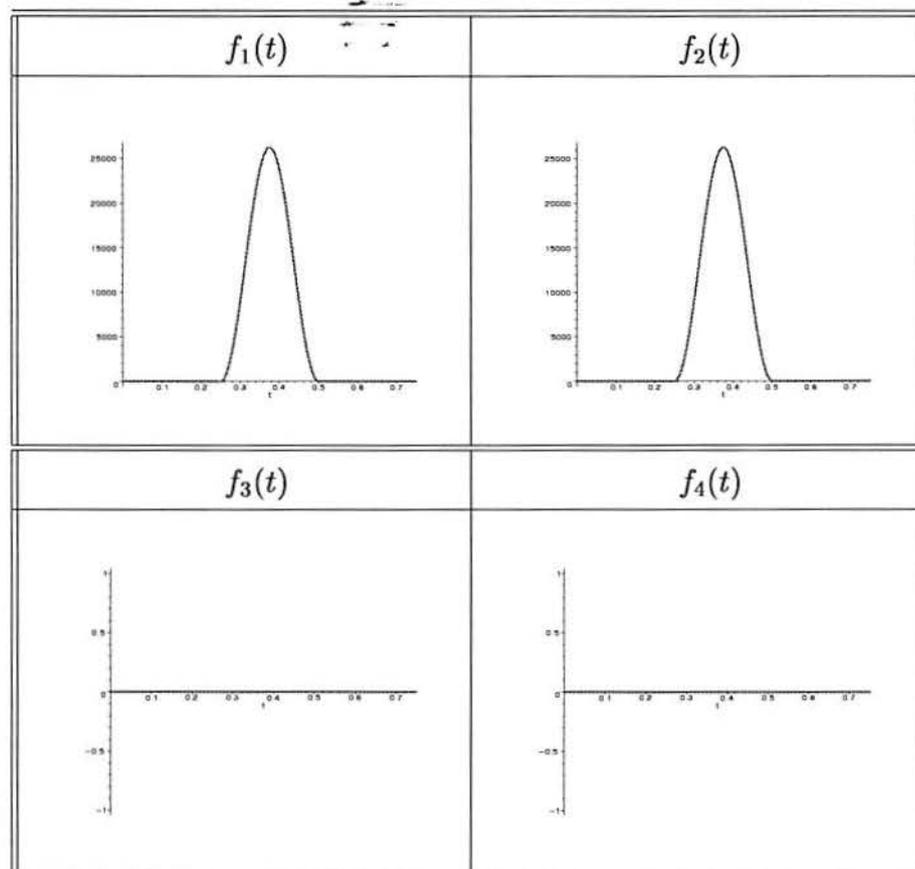


Tabela 4.10 Quatro primeiras componentes da entrada

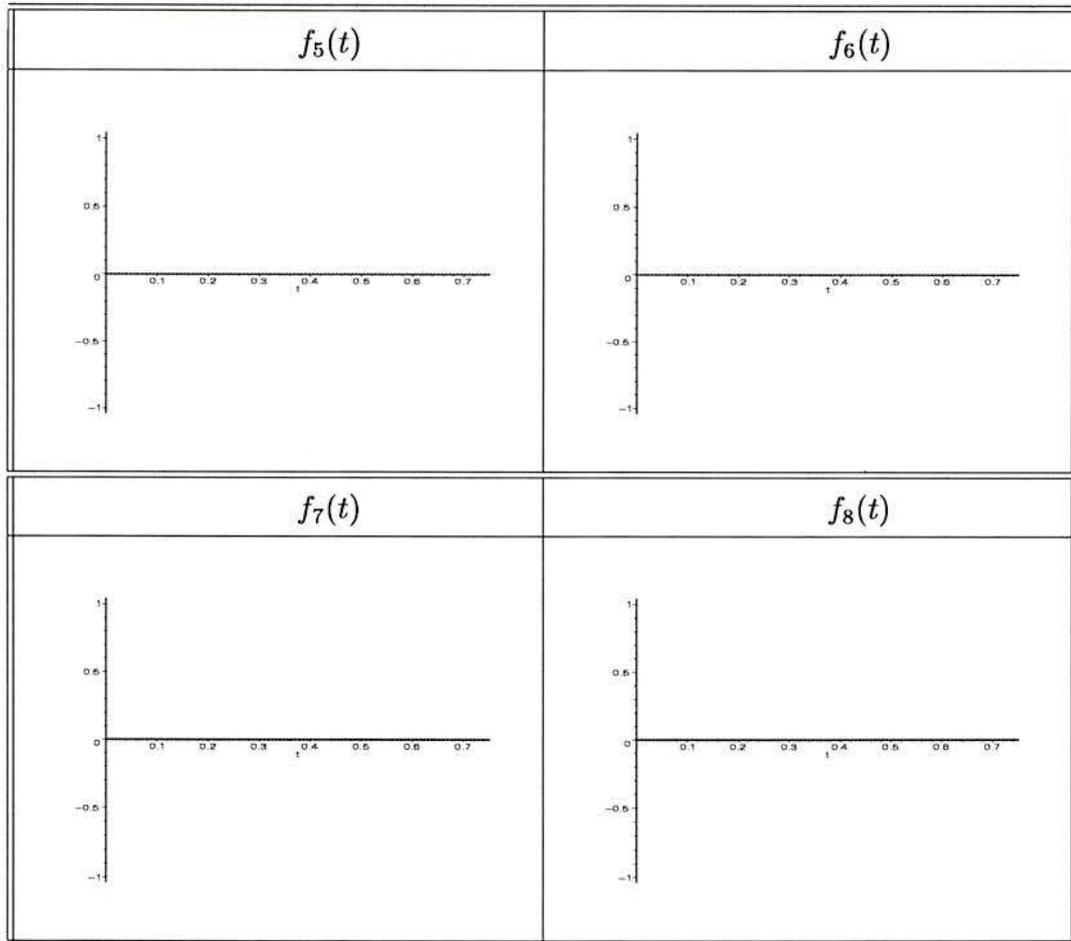


Tabela 4.11 Quatro últimas componentes da entrada

Para efeitos de verificação, apresenta-se nas Figs. (4.12) e (4.13) a resposta forçada do sistema obtida através da fórmula de convolução (4.3) e do método de decomposição para cada componente.

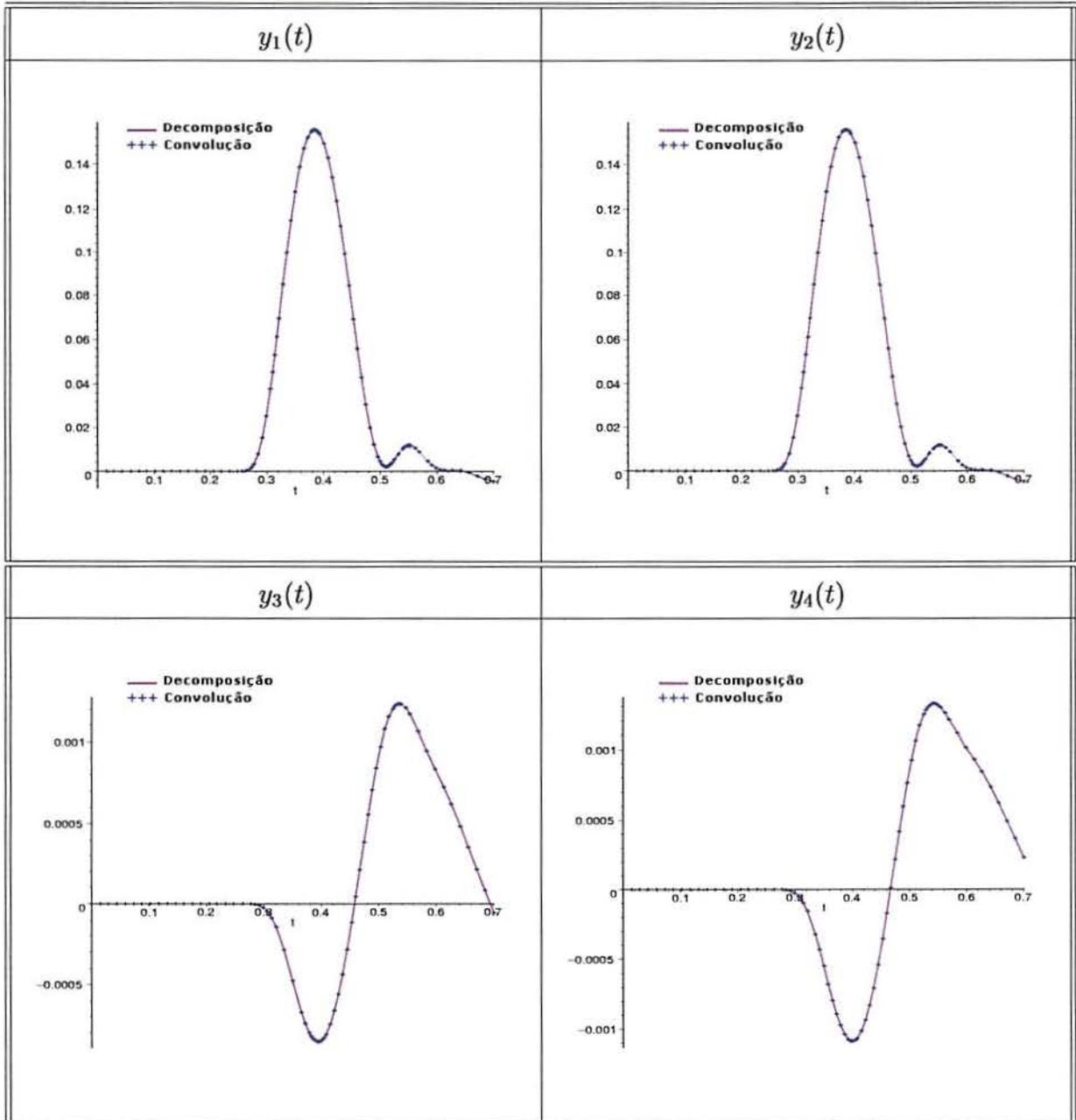


Tabela 4.12 Resposta forçada para as quatro primeiras componentes, calculada a partir da convolução e do método de decomposição

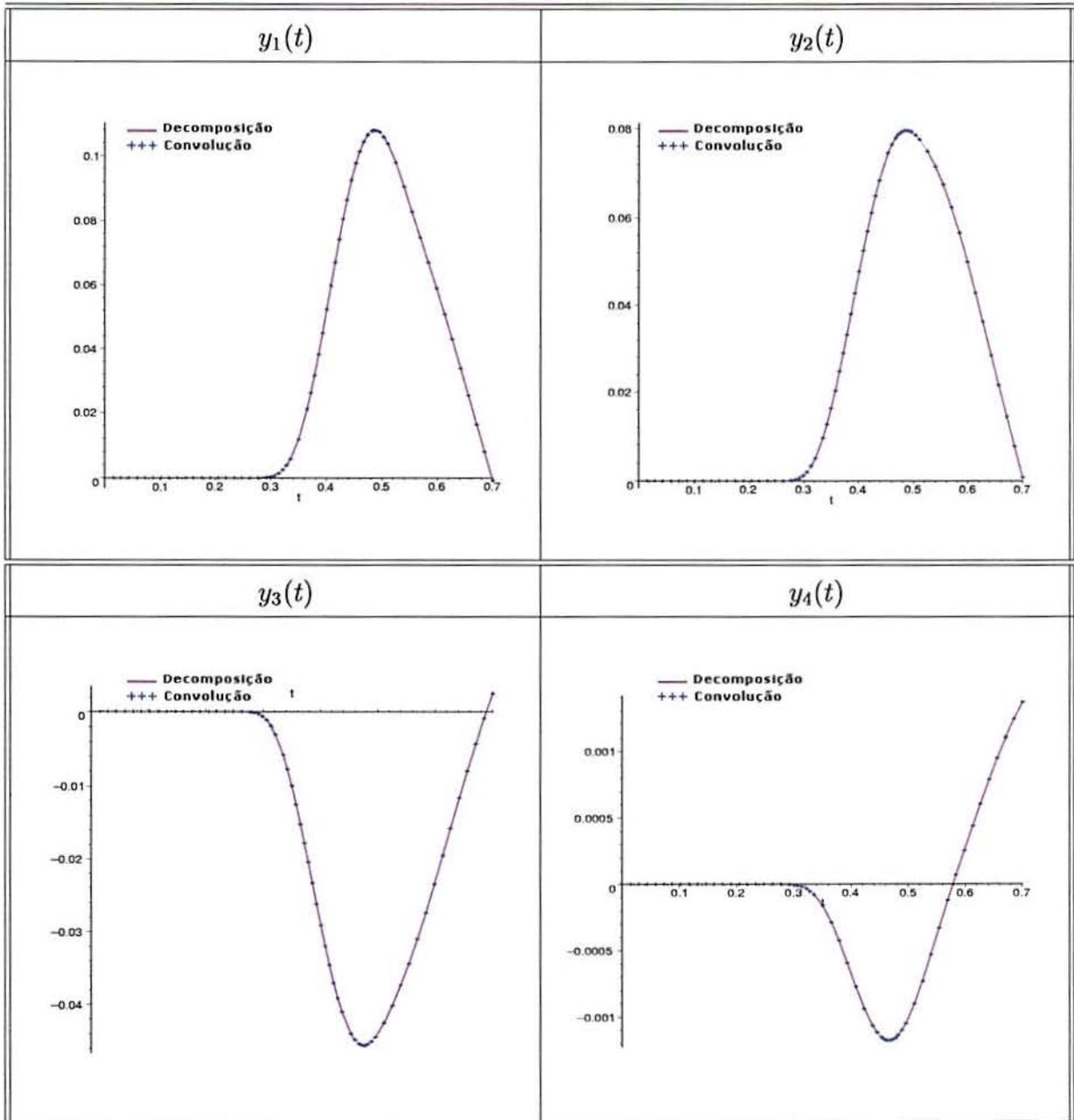


Tabela 4.13 Resposta forçada para as quatro últimas componentes, calculada a partir da convolução e do método de decomposição

Os resultados da decomposição da resposta forçada, para cada componente do sistema, são apresentados nas Tabs. 4.14-4.17.

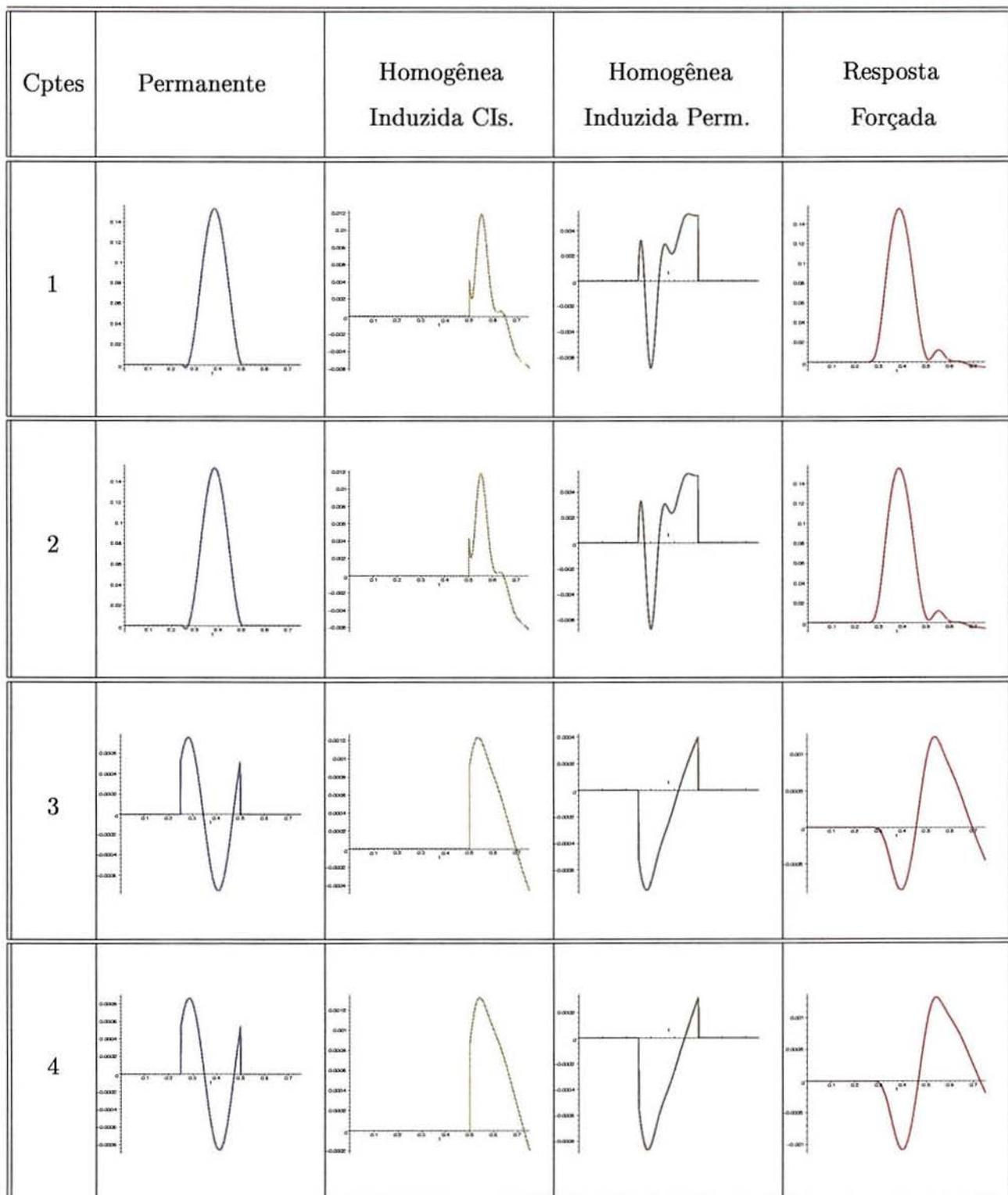


Tabela 4.14 Resposta permanente, respostas homogêneas induzidas pelo sistema e pela permanente e resposta forçada para as quatro primeiras componentes

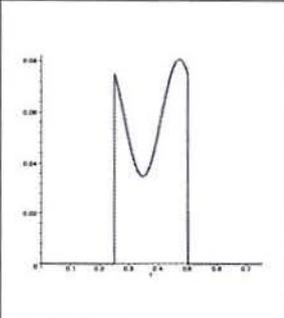
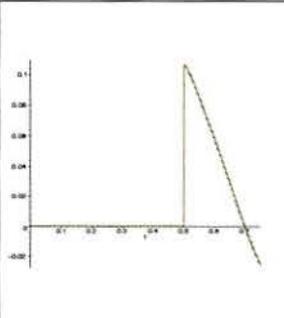
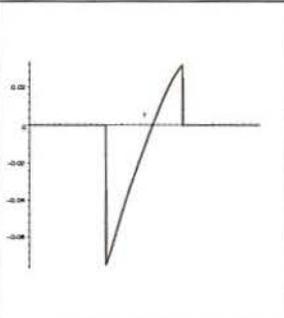
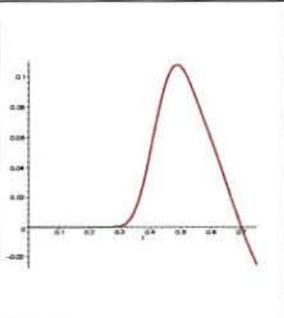
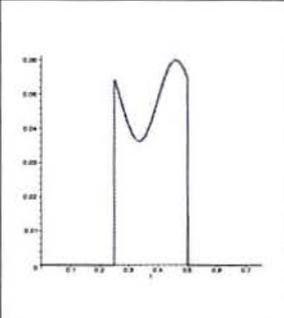
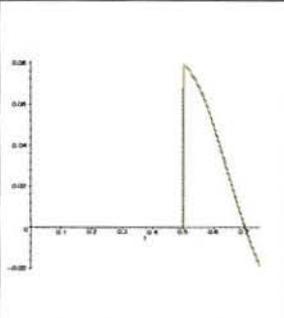
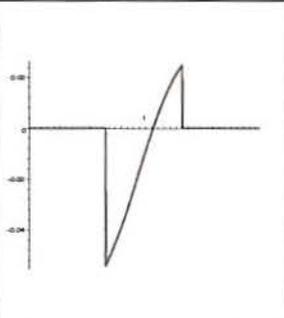
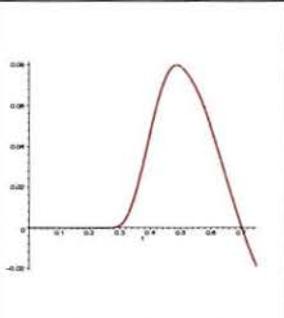
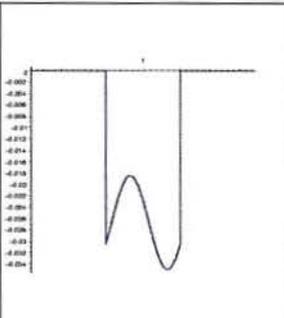
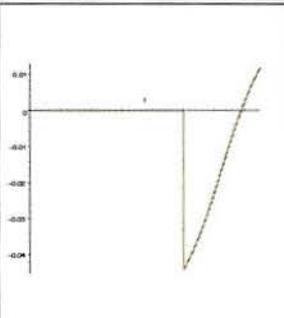
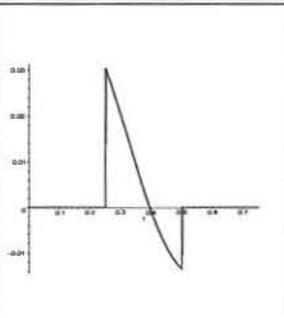
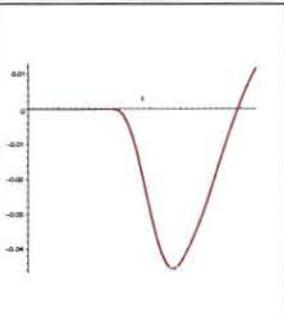
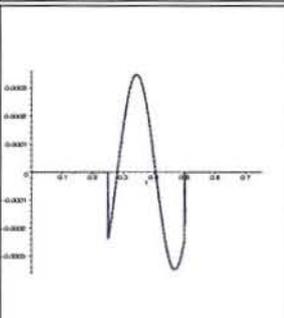
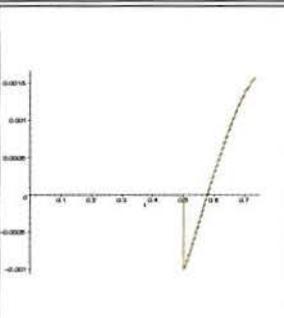
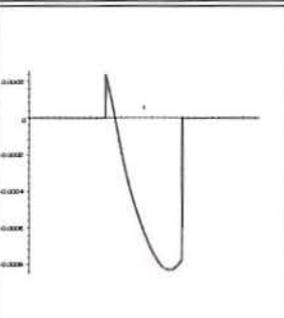
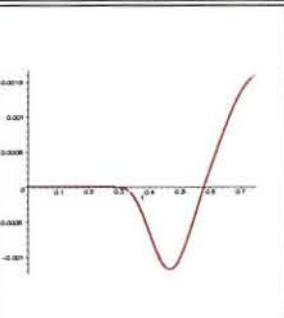
Cptes	Permanente	Homogênea Induzida CIs.	Homogênea Induzida Perm.	Resposta Forçada
5				
6				
7				
8				

Tabela 4.15 Resposta permanente, respostas homogêneas induzidas pelo sistema e pela permanente e resposta forçada para as quatro últimas componentes

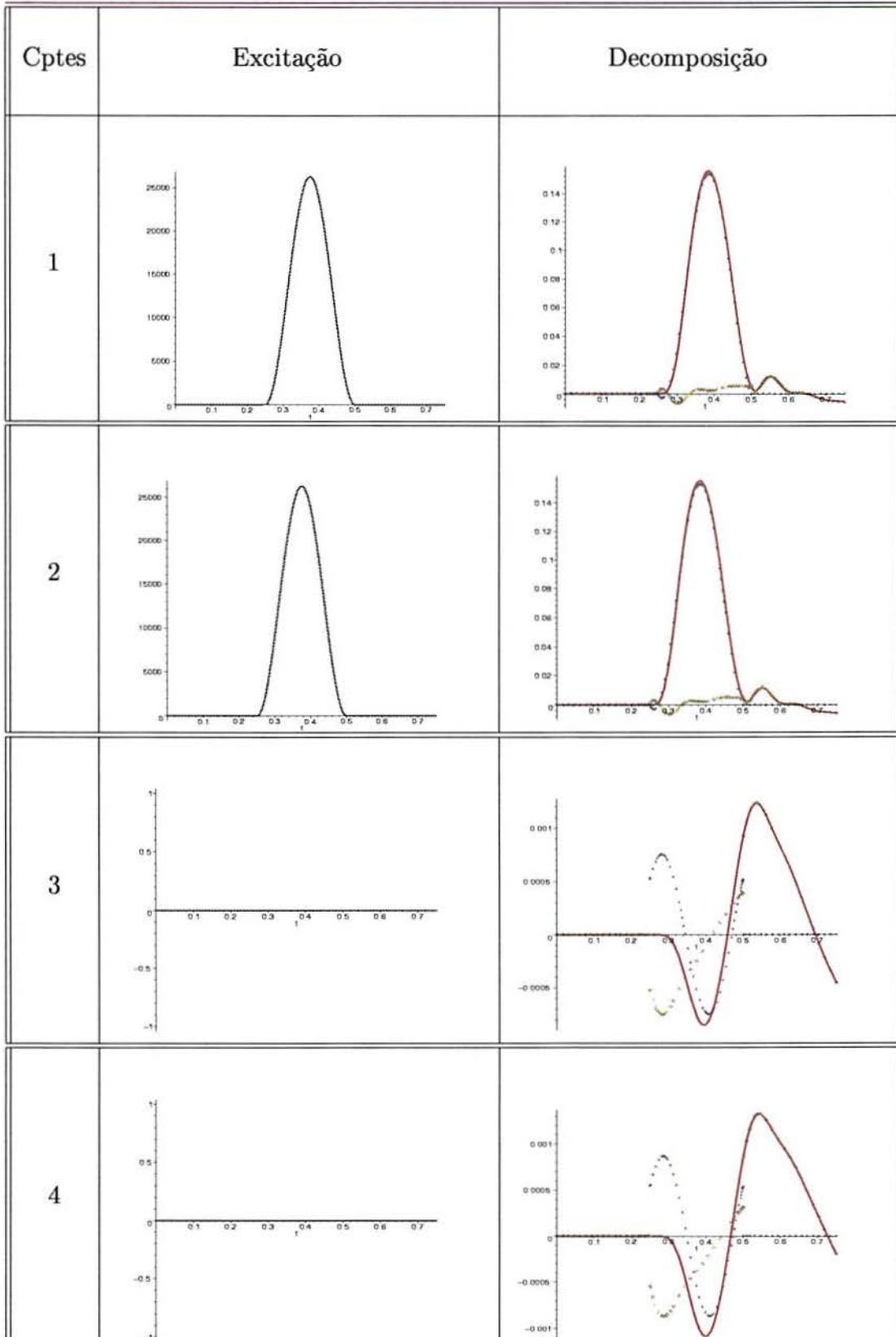


Tabela 4.16 Excitações e respostas para as quatro primeiras componentes provenientes da decomposição do sistema

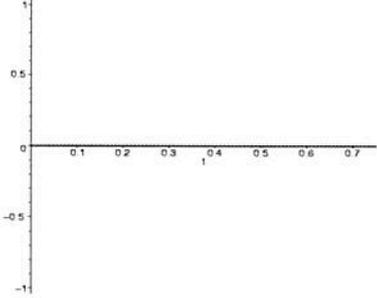
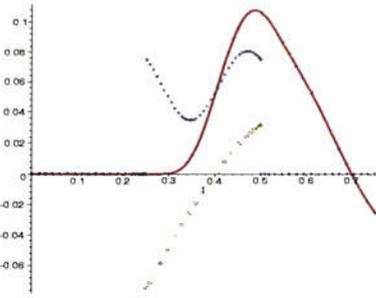
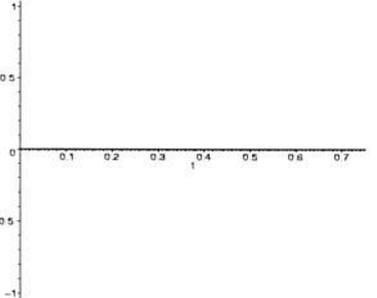
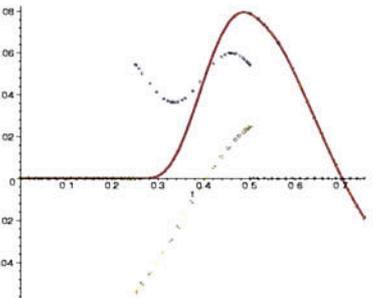
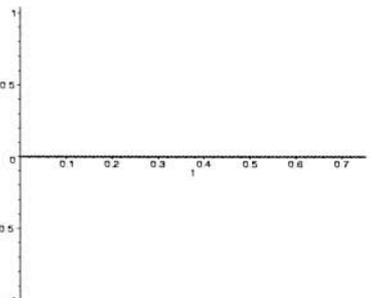
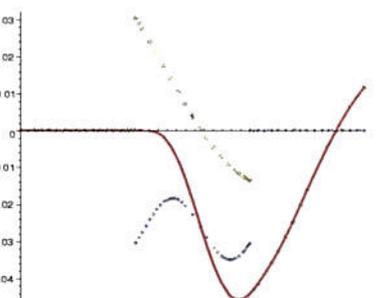
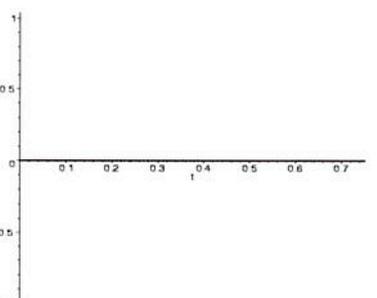
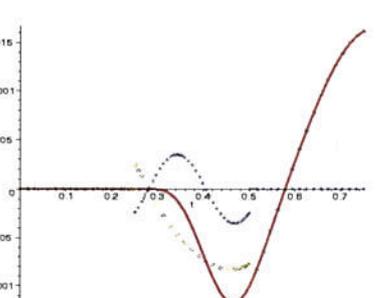
Cptes	Excitação	Decomposição
5		
6		
7		
8		

Tabela 4.17 Excitações e respostas para as quatro últimas componentes provenientes da decomposição do sistema

## 4.2 Decomposição da Resposta Forçada para Sistemas Discretos

A *resposta forçada* de um sistema discreto corresponde a solução do sistema matricial

$$\sum_{j=0}^N A_j y_{k+j} = f_j, \quad (4.64)$$

com condições iniciais nulas, denotadas por

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 0, \quad \dots, \quad y_{N-1} = 0. \quad (4.65)$$

É obtida através da *convolução discreta*

$$y_k = \sum_{j=0}^{k-1} h_{k-j-1} f_j. \quad (4.66)$$

A resposta então, pode ser decomposta na forma

$$y_k = y_{h,k} + y_{p,k}, \quad (4.67)$$

onde  $y_{p,k}$  é a solução permanente e  $y_{h,k}$ , uma resposta livre. As respostas livres, analogamente ao caso para sistemas concentrados, são introduzidas pelas respostas permanentes como uma retroalimentação no sistema. Elas podem ser caracterizadas com o uso da base dinâmica gerada pela resposta impulso discreta,  $h_k$  e de suas translações. Por simplicidade, utiliza-se a decomposição desenvolvida para sistemas concentrados e, a partir destes resultados obtêm-se a resposta dinâmica discreta por simples diferenciação, isto é, fazendo-se,  $y_k = y^{(k)}(0)$  em (4.12), resulta que a decomposição para a resposta forçada discreta é dada por

$$y_k = y_{p,k} - \sum_{j=0}^{N-1} h_{j,k} y_{p,k+j}, \quad (4.68)$$

onde

$$h_{j,k} = \sum_{i=0}^{N-j-1} h_{k+i} A_{j+1+i}, \quad \text{para } j = 0 : N - 1,$$

sendo  $h_k$  a resposta impulso discreta.

Esta decomposição torna-se prática quando a resposta permanente é facilmente obtida.

A seguir, com objetivo de ilustrar a decomposição para sistemas discretos, consideram-se esquemas de integração numérica para equações diferenciais de primeira e segunda ordem.

#### 4.2.1 Modelos Discretos Associados à Esquemas de Integração Numérica

A integração numérica de sistemas de equações diferenciais é realizada através de esquemas em diferenças que correspondem a sistemas discretos, veja-se [Elaydi,1996], [Asher,1998] e [Godunov, 1987], entre outros. Estes esquemas são sempre testados com sistemas lineares conhecidos.

##### 4.2.1.1 Esquema de Adams-Basforth de Quinta Ordem

Para sistemas de primeira ordem, denotados por  $\dot{y} = f(t, y)$ , considere-se o esquema de Adams-Basforth de quinta ordem

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\Delta t}{720} (1901f(t_k, y_k) - 2774f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 2616f(t_{k-2}, y_{k-2})) + \frac{\Delta t}{720} (-1274f(t_{k-3}, y_{k-3}) + 251f(t_{k-4}, y_{k-4})). \quad (4.69)$$

Denota-se,  $y_k$  como um valor aproximado para  $y(t_k)$ , com  $t_k = k\Delta t$ , para  $k = 1, 2, \dots$ , sendo  $\Delta t$ , um passo de tempo. Este sistema é testado com o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -6y(t) + 6 \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad (4.70)$$

cuja solução exata é  $y(t) = e^{-6t} + 1$ .

Para as condições iniciais

$$y_0 = 0, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 0,$$

o esquema

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\Delta t}{720} \sum_{i=0}^5 b_{5-i} (-6y_{k+1-i} + 6), \quad (4.71)$$

com  $b_5 = 0$ ,  $b_4 = 1901$ ,  $b_3 = -2774$ ,  $b_2 = 2616$ ,  $b_1 = -1274$  e  $b_0 = 251$  é iterado para obter-se a resposta forçada do sistema.

A resposta impulso discreta  $h_k$  é obtida iterando-se o sistema

$$h_{k+1} = h_k + \frac{\Delta t}{720} \sum_{i=0}^5 b_{5-i} (-6h_{k+1-i}), \quad (4.72)$$

onde  $h_0 = 0$ ,  $h_1 = 0$ ,  $h_2 = 0$ ,  $h_3 = 0$  e  $h_4 = 1$ . Na Fig. (4.2) representa-se a resposta impulso discreta do sistema.

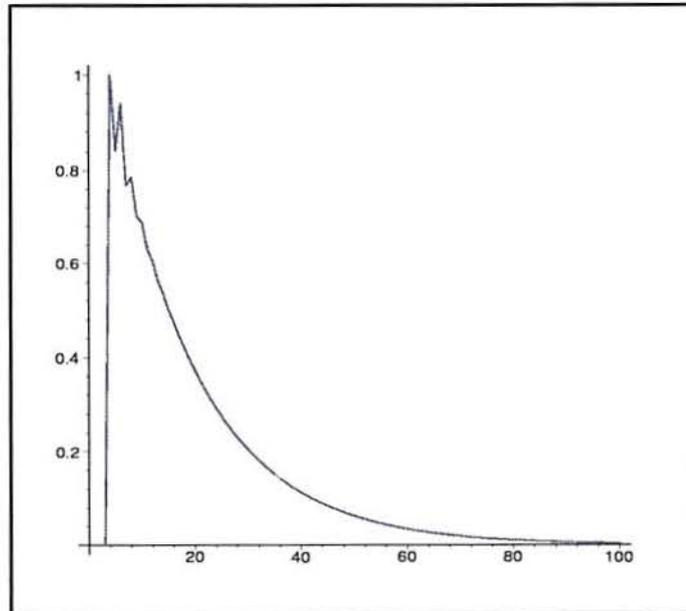


Figura 4.2 Resposta impulso discreta do sistema

Assim, a resposta permanente do sistema discreto é dada por

$$y_{p,k} = \frac{\frac{\Delta t}{720} \sum_{i=0}^5 b_{5-i} 6}{-\frac{\Delta t}{720} \sum_{i=0}^5 b_{5-i} (-6)} = 1. \quad (4.73)$$

E a resposta livre induzida por  $y_{p,k}$ , é expressa por

$$y_{h,k} = - \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^{3-j} h_{k+i} A_{1+j+i}, \quad (4.74)$$

onde

$$A_j = a_j - \frac{\Delta t}{720} b_j, \quad a_5 = 1, \quad a_4 = -1, \quad a_3 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_1 = 0 \text{ e } a_0 = 0.$$

Os resultados das simulações para 100 iterações e com passo de tempo  $\Delta t = 0.01$ , são apresentados na Fig. (4.3).

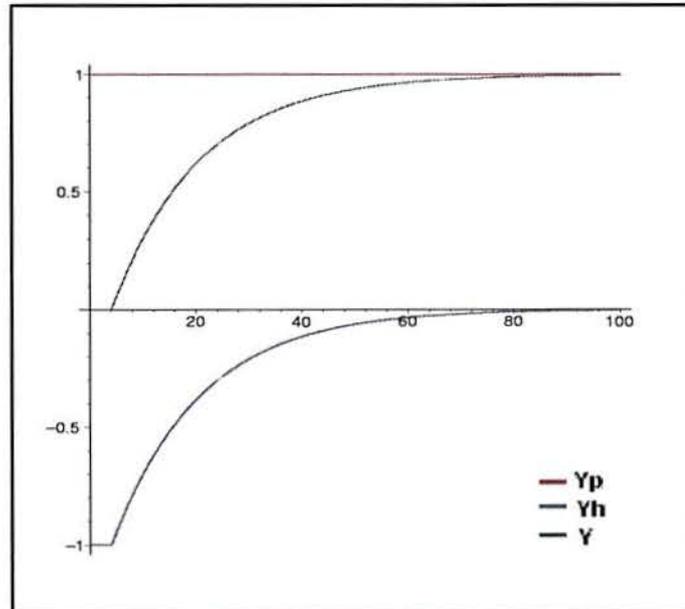


Figura 4.3 Decomposição do sistema discreto

#### 4.2.1.2 Esquema de Strömer de Quarta Ordem

Este esquema apresenta o fenômeno da instabilidade numérica para a equação de primeira ordem (4.70) considerada.

Utilizando-se o esquema de Strömer, definido por

$$y_{k+1} = 2y_{k-1} - y_{k-2} + \frac{(\Delta t)^2}{15}(f(t_{k+1}, y_{k+1}) + 16f(t_k, y_k)) + \frac{(\Delta t)^2}{15}(26f(t_{k-1}, y_{k-1}) + 16f(t_{k-2}, y_{k-2}) + f(t_{k-3}, y_{k-3})), \quad (4.75)$$

com passo de tempo  $\Delta t = 0.01$  e, considerando-se 100 iterações, resulta na instabilidade do sistema.

É apresentado nas Figs. (4.4) e (4.5) o comportamento instável da resposta impulso discreta e da resposta livre, juntamente com a resposta permanente do sistema, respectivamente.

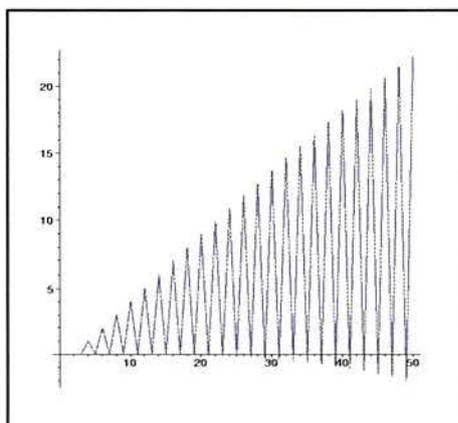


Figura 4.4 Resposta impulso discreta instável do sistema

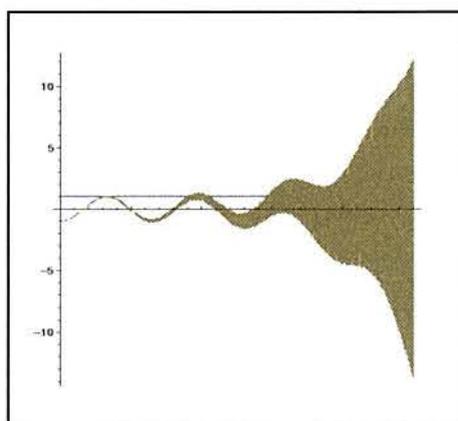


Figura 4.5 Resposta permanente e resposta livre induzida instável

#### 4.2.1.3 Esquema de Numerov para Sistemas Conservativos de Segunda Ordem

Considere-se equações de segunda ordem do tipo  $\ddot{y}(t) = f(t, y)$ . O esquema de Numerov é dado pela expressão

$$y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = \frac{(\Delta t)^2}{12} (12f(t_{k+2}, y_{k+2}) + 10f(t_{k+1}, y_{k+1}) + f(t_k, y_k)). \quad (4.76)$$

Seja o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = -6y(t) + 6 \\ y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0 \end{cases}, \quad (4.77)$$

cuja solução exata é  $y(t) = -\cos(\sqrt{6}t) + 1$ .

Os resultados das simulações numéricas, utilizando-se o esquema de Numerov com passo de tempo  $\Delta t = 0.01$  e, para 1000 iterações realizadas, são apresentados nas Figs. (4.6) e (4.7).

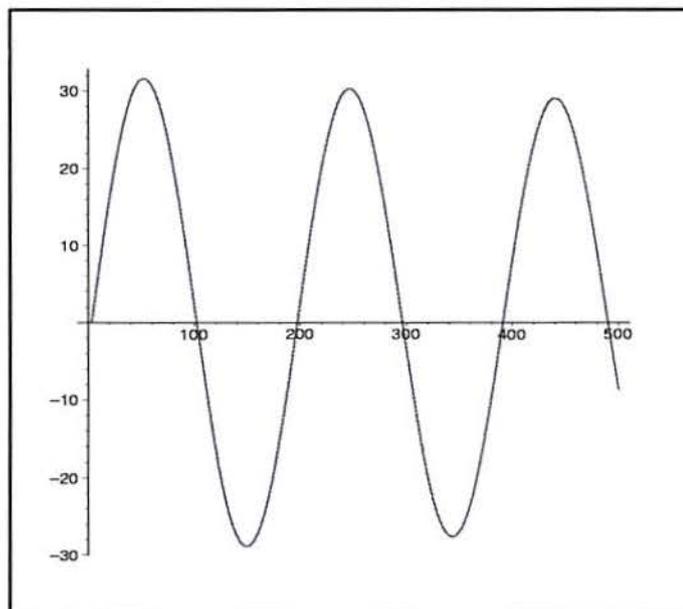


Figura 4.6 Resposta impulso discreta do sistema utilizando-se o esquema de Numerov

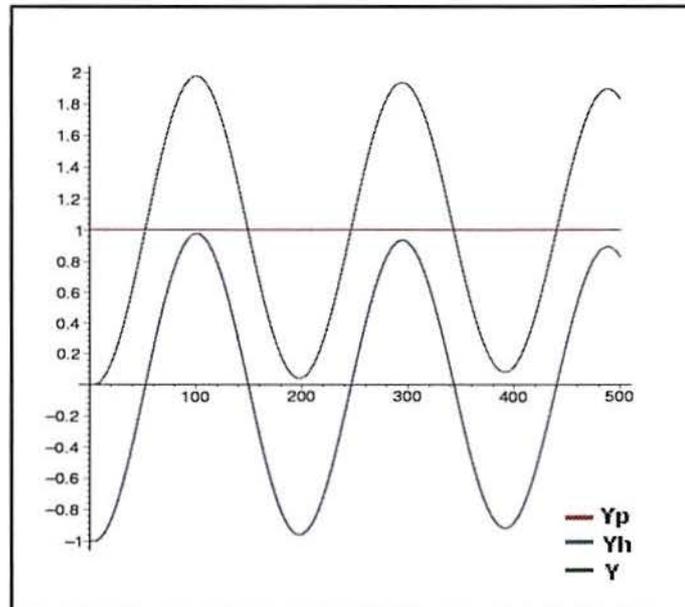


Figura 4.7 Decomposição do sistema discreto utilizando-se o esquema de Numerov

## 5 SISTEMAS DISTRIBUÍDOS

Este capítulo aborda sistemas distribuídos do tipo

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{\partial^j y}{\partial t^j}(t, x) = r(t, x), \quad (5.1)$$

onde as funções  $y(t, x) = y$  e  $r(t, x) = r$ , dependentes do tempo  $t$  e do espaço  $x$ , correspondem a *saída* e a *entrada* do sistema, respectivamente.

Em particular, para sistemas distribuídos com dinâmica de controle considera-se

$$r(t, x) = \sum_{j=0}^M B_j \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(t, x) + f(t, x), \quad (5.2)$$

com  $u(t, x) = u$  e  $f(t, x) = f$  dependentes também do tempo e do espaço. Os coeficientes  $A_j$  e  $B_j$  são operadores espaciais contendo somente derivadas com respeito a variável  $x$ , definidos por

$$A_j w(x) = \sum_{k=0}^{m_j} p_{jk}(x) \frac{d^k w}{dx^k}, \quad j = 0 : N, \quad (5.3)$$

$$B_j w(x) = \sum_{k=0}^{b_j} q_{jk}(x) \frac{d^k w}{dx^k}, \quad j = 0 : M. \quad (5.4)$$

O valor do parâmetro  $m = \text{máx}(m_1, \dots, m_N)$  corresponde a ordem espacial do sistema distribuído, isto é, o valor máximo das derivadas que aparecem nos coeficientes  $A_j$ , descritos pelos operadores da parte espacial (5.3). Similarmente,  $m_b = \text{máx}(b_1, \dots, b_M)$  vem a ser a ordem espacial relativa a entrada do sistema, isto é, o valor máximo das derivadas que aparecem nos coeficientes  $B_j$ , descritos pelos operadores da parte espacial (5.4). Será assumido que  $N \geq M$ .

A *resposta livre* do sistema é a solução da equação diferencial (5.1) quando a entrada  $r(t, x)$  é identicamente nula. A *resposta forçada* no tempo  $t = t_0$  corresponde à solução da equação diferencial quando todas as condições iniciais

$$y(t_0, x), \frac{\partial y}{\partial t}(t_0, x), \dots, \frac{\partial^{N-1} y}{\partial t^{N-1}}(t_0, x), \quad (5.5)$$

são identicamente nulas. Junto com as condições iniciais são fornecidas condições de contorno genéricas, veja-se [Costa, 2001; Naimark, 1967], denotadas por

$$\begin{aligned} \alpha_{0k}y(t, 0) + \alpha_{1k}\frac{\partial y(t, 0)}{\partial x} + \cdots + \alpha_{m-1k}\frac{\partial^{m-1}y(t, 0)}{\partial x^{m-1}} + \beta_{0k}y(t, L) + \\ + \beta_{1k}\frac{\partial y(t, L)}{\partial x} + \cdots + \beta_{m-1k}\frac{\partial^{m-1}y(t, L)}{\partial x^{m-1}} = 0, \text{ para } k = 1 : m. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace em (5.1), resulta que

$$\sum_{j=0}^N s^j \sum_{k=0}^{m_j} p_{jk}(x) \frac{\partial^k Y(s, x)}{\partial x^k} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} A_j y_0^i + R(s, x). \quad (5.7)$$

Rearranjando-se a expressão (5.7), têm-se

$$\sum_{k=0}^m p_k(x, s) \frac{\partial^k Y(s, x)}{\partial x^k} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} A_j y_0^i + R(s, x), \quad (5.8)$$

para certas funções  $p_k(x, s)$ . Aqui,  $y_0^i = \frac{\partial^i}{\partial t^i} y(0, x)$ , denotam as condições iniciais da saída;  $Y(s, x)$  e  $R(s, x)$  denotam as transformadas da saída  $y(t, x)$  e da entrada  $r(t, x)$ , respectivamente. Aplicando-se a transformada de Laplace nas condições de contorno dadas pela expressão (5.6), decorre que

$$\begin{aligned} \alpha_{0k}Y(s, 0) + \alpha_{1k}\frac{\partial Y(s, 0)}{\partial x} + \cdots + \alpha_{m-1k}\frac{\partial^{m-1}Y(s, 0)}{\partial x^{m-1}} + \beta_{0k}Y(s, L) + \\ + \beta_{1k}\frac{\partial Y(s, L)}{\partial x} + \cdots + \beta_{m-1k}\frac{\partial^{m-1}Y(s, L)}{\partial x^{m-1}} = 0, \text{ para } k = 1 : m. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Definindo-se,

$$\Delta(s) = \sum_{j=0}^N s^j A_j = \sum_{j=0}^N s^j \sum_{k=0}^{m_j} p_{jk}(x) \frac{d^k}{dx^k} = \sum_{k=0}^m p_k(x, s) \frac{d^k}{dx^k},$$

o problema de contorno (5.8) pode ser escrito de maneira compacta

$$\Delta(s)Y(s, x) = F(s, x), \quad (5.10)$$

onde

$$F(s, x) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} A_j y_0^i + R(s, x), \quad (5.11)$$

para funções  $Y(s, x)$  que satisfazem as condições de contorno (5.9).

Considerando-se  $H(s, x, \xi)$  a *função de Green* do problema (5.10) resulta que,

$$Y(s, x) = \int_0^L H(s, x, \xi) \left[ \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} A_j y_0^i(\xi) \right] d\xi + \int_0^L H(s, x, \xi) R(s, \xi) d\xi, \quad (5.12)$$

ou seja,

$$Y(s, x) = \int_0^L H(s, x, \xi) F(s, \xi) d\xi. \quad (5.13)$$

Definindo-se que

$$h(t, x, \xi) = \mathcal{L}^{-1}[H(s, x, \xi)] \quad (5.14)$$

e considerando-se a propriedade

$$\begin{aligned} h(0, x, \xi) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s, x, \xi) &= 0 \\ \dot{h}(0, x, \xi) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 H(s, x, \xi) &= 0 \\ &\vdots &\vdots \\ h^{(N-2)}(0, x, \xi) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s^{N-1} H(s, x, \xi) &= 0 \\ A_N h^{(N-1)}(0, x, \xi) &= A_N \lim_{s \rightarrow \infty} s^N H(s, x, \xi) &= \delta(x - \xi) \end{aligned} \quad (5.15)$$

da função  $h(t, x, \xi)$  de modo que

$$s^k H(s, x, \xi) = \mathcal{L}(h^{(k)}(t, x, \xi)), \quad \text{para } k = 0 : N - 1 \quad (5.16)$$

a saída do sistema pode ser expressa por

$$y(t, x) = \int_0^L \left( \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} h^{(j-1-i)}(t, x, \xi) A_j y_0^i(\xi) \right) d\xi + \int_0^L \int_0^t h(t - \tau, x, \xi) r(\tau, \xi) d\tau d\xi, \quad (5.17)$$

ou

$$y(t, x) = \int_0^L \left( \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} h^{(j-1-i)}(t, x, \xi) A_j y_0^i(\xi) + \int_0^t h(t - \tau, x, \xi) r(\tau, \xi) d\tau \right) d\xi. \quad (5.18)$$

Esta representação ilustra uma distribuição espacial da saída, a qual pode ser simplificada com a introdução da *solução dinâmica*  $h(t)$  do sistema distribuído, definida através do operador integral

$$h(t)\phi(x) = \int_0^L h(t, x, \xi)\phi(\xi)d\xi, \quad (5.19)$$

onde  $h(t, x, \xi)$  é a inversa da transformada de Laplace da função de Green  $H(s, x, \xi)$  do problema de contorno, definido pelas equações (5.9) e (5.10).

Com a introdução da solução dinâmica a saída pode ser escrita na forma evolutiva

$$y(t) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} h^{(j-1-i)}(t) A_j y_0^i + \int_0^t h(t - \tau) r(\tau) d\tau, \quad (5.20)$$

onde  $y(t)$  é uma função com valores distribuídos, isto é, para cada  $t$  fixo,  $y(t)$  é uma função que depende da variável espacial e cujo valor é  $y(t)(x) = y(t, x)$ . Analogamente, têm-se para  $r(t)$  que  $r(t)(x) = r(t, x)$ .

Aplicando-se a transformada de Laplace na solução dinâmica (5.19) obtêm-se o *operador de transferência*  $H(s)$  atuando sobre funções de variável espacial

$$H(s)\phi(x) = \int_0^L H(s, x, \xi)\phi(\xi)d\xi, \quad (5.21)$$

que vem a ser o operador inverso do operador

$$\Delta(s) = \sum_{j=0}^N s^j A_j, \quad (5.22)$$

definido sobre funções que satisfazem as condições de contorno (5.9), ou seja,

$$\Delta(s)H(s) = H(s)\Delta(s) = I. \quad (5.23)$$

Desta forma, a relação (5.12) com condições iniciais nulas pode ser escrita como

$$Y(s) = H(s)R(s), \quad (5.24)$$

onde  $Y(s)$  e  $R(s)$  são funções com valores distribuídos espacialmente, isto é,  $Y(s)(x) = Y(s, x)$  e  $R(s)(x) = R(s, x)$ .

O sistema distribuído com dinâmica de controle definido por

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{\partial^j y}{\partial t^j}(t, x) = \sum_{j=0}^M B_j \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(t, x), \quad (5.25)$$

pode ser analisado de maneira análoga. Aplicando-se a transformada de Laplace, têm-se

$$\left( \sum_{j=0}^N s^j A_j \right) Y(s, x) - \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} A_j y_0^i = \left( \sum_{j=0}^M s^j B_j \right) U(s, x) - \sum_{j=1}^M \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} B_j u_0^i, \quad (5.26)$$

onde  $u_0^i$  denotam as condições iniciais da entrada no tempo  $t = 0$ . Assim,

$$Y(s, x) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} H(s) A_j y_0^i + \sum_{j=0}^M s^j H(s) B_j U(s, x) - \sum_{j=1}^M \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} H(s) B_j u_0^i. \quad (5.27)$$

Utilizando-se a expressão (5.21), segue-se que

$$\begin{aligned}
Y(s, x) = & \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{j-1} \left( \int_0^L s^{j-1-i} H(s, x, \xi) A_j y_0^i(\xi) d\xi \right) + \sum_{j=0}^M \left( \int_0^L s^j H(s, x, \xi) B_j U(s, \xi) d\xi \right) + \\
& - \sum_{j=1}^M \sum_{i=0}^{j-1} \left( \int_0^L s^{j-1-i} H(s, x, \xi) B_j u_0^i(\xi) d\xi \right). \quad (5.28)
\end{aligned}$$

Decorre, no domínio tempo, que a saída é dada por

$$y(t, x) = \int_0^L \left( \sum_{j=0}^{N-1} h_j(t, x, \xi) y_0^j(\xi) + \int_0^t \sum_{j=0}^M h^{(j)}(t - \tau, x, \xi) B_j u(\tau, \xi) d\tau - \sum_{j=1}^M \sum_{i=0}^{j-1} h^{(j-1-i)}(t, x, \xi) B_j u_0^i(\xi) \right) d\xi, \quad (5.29)$$

onde

$$h_j(t, x, \xi) = \sum_{i=0}^{N-j-1} h^{(i)}(t, x, \xi) A_{j+1+i}, \quad \text{para } j = 0 : N - 1. \quad (5.30)$$

Diante de condições iniciais nulas, tanto da entrada quanto da saída, decorre de (5.27) que

$$Y(s, x) = G(s)U(s, x), \quad (5.31)$$

onde

$$G(s) = \sum_{j=0}^M s^j H(s) B_j, \quad (5.32)$$

é denominada *função de transferência* do sistema de controle, a qual relaciona as transformadas da entrada e da saída do sistema.

Aplicando-se a transformada inversa de Laplace em (5.32) e sendo  $\mathcal{L}[h^{(j)}(t)] = s^j H(s)$ , para  $j = 0 : N - 1$ , obtêm-se

$$g(t) = \sum_{j=0}^M h^{(j)}(t) B_j. \quad (5.33)$$

Se as condições iniciais da entrada e da saída são nulas ( $y_0^j = 0$  e  $u_0^j = 0$ ) a resposta do sistema pode ser expressa através da fórmula

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau. \quad (5.34)$$

Para sistemas do tipo (5.25) a função temporal  $g(t)$  é referida como *resposta impulso*. Esta denominação pode ser justificada considerando-se a entrada como uma função impulso temporal  $u(t, x) = \delta(t)l$ , onde  $l$  denota o operador espacial identidade, isto é,  $lw(x) = w(x)$ . Em particular, para sistemas distribuídos simples dados pela equação (5.1), a resposta impulso coincide com a solução dinâmica. Os resultados acima tem sido, por conveniência, estabelecidos para um domínio espacial unidimensional  $\Omega = [0, L]$ . Porém, com a transformação do tempo  $t$  em um parâmetro  $s$ , obtém-se uma equação operacional espacial e resultando-se a representação

$$y(t, x) = \int_{\delta\Omega} \left( \sum_{j=0}^{N-1} h_j(t, x, \xi)y_0^j(\xi) + \int_0^t \sum_{j=0}^M h^{(j)}(t - \tau, x, \xi)B_j u(\tau, \xi)d\tau - \sum_{j=1}^M \sum_{i=0}^{j-1} h^{(j-1-i)}(t, x, \xi)B_j u_0^i(\xi) \right) d\xi, \quad (5.35)$$

onde

$$h_j(t, x, \xi) = \sum_{i=0}^{N-j-1} h^{(i)}(t, x, \xi)A_{j+1+i}, \quad \text{para } j = 0 : N - 1 \quad (5.36)$$

e  $\delta\Omega$  denota o contorno da região  $\Omega$  em duas ou três dimensões, veja-se [Butkovskiy, 1983].

## 6 CÁLCULO SIMBÓLICO DE RESPOSTAS FORÇADAS PARA SISTEMAS DISTRIBUÍDOS

Neste capítulo é considerada a extração de respostas livres a partir de respostas dinâmicas; em particular, de respostas forçadas. Para um sistema distribuído a resposta forçada é decomposta na soma de uma resposta permanente e de uma resposta livre, que depende diretamente dos valores iniciais da resposta permanente; atuando esta última como uma retroalimentação no sistema. Para entradas temporais harmônicas o cálculo da resposta permanente, neste caso a resposta frequência, pode ser realizado com o uso da função de Green espacial.

### 6.1 Decomposição da Resposta Forçada para Sistemas Distribuídos

A solução do sistema matricial

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{\partial^j y}{\partial t^j}(t, x) = f(t, x), \quad (6.1)$$

com condições iniciais nulas

$$y(t_0, x) = 0, \quad \dot{y}(t_0, x) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{N-1} y}{\partial t^{N-1}}(t_0, x) = 0, \quad (6.2)$$

é chamada de resposta forçada em  $t = t_0$ ; sendo dada pela *integral de convolução*

$$y(t) = \int_{t_0}^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau, \quad (6.3)$$

onde  $y(t)$  é uma função com valores distribuídos, isto é, para cada  $t$  fixo,  $y(t)$  é uma função que depende da variável espacial e cujo valor é  $y(t)(x) = y(t, x)$ ; analogamente para  $f(t)$ .

A resposta impulso  $h(t)$  foi definida em (5.19) através do operador integral

$$h(t)\phi(x) = \int_0^L h(t, x, \xi)\phi(\xi)d\xi, \quad (6.4)$$

onde  $h(t, x, \xi)$  corresponde a *função de Green temporal*, isto é, a inversa da transformada de Laplace da função de Green espacial  $H(s, x, \xi)$  do problema de contorno (5.9)-(5.10).

Com a introdução destas funções a resposta forçada (6.3) pode ser escrita na forma usual

$$y(t) = \int_{t_0}^t \left[ \int_0^L h(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi \right] d\tau. \quad (6.5)$$

Para efeitos de decomposição no tempo, torna-se muito simples trabalhar com a forma evolutiva (6.3) e após escrever o resultado na forma usual.

A resposta forçada pode ser decomposta numa resposta livre  $y_h(t)$  e numa resposta particular (*permanente*)  $y_p(t)$ , ou seja,

$$y(t) = \int_{t_0}^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau = y_h(t) + y_p(t), \quad (6.6)$$

onde  $y_h(t)(x) = y_h(t, x)$  e  $y_p(t)(x) = y_p(t, x)$ .

Como  $\{h(t), \dot{h}(t), \dots, h^{(N-1)}(t)\}$  formam uma base de soluções da equação homogênea

$$\sum_{j=0}^N A_j \frac{\partial^j y}{\partial t^j}(t, x) = 0, \quad (6.7)$$

a integral (6.3), que corresponde a uma solução não homogênea, pode ser escrita como

$$y(t) = \int_{t_0}^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau = \sum_{j=0}^{N-1} h^{(j)}(t - t_0) a_j + y_p(t), \quad (6.8)$$

sendo  $a_j$  funções da variável espacial a serem determinadas a partir das condições iniciais nulas de  $y(t)$  em  $t = t_0$ . Desta forma, têm-se o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{j=0}^{N-1} h^{(j)}(0)a_j + y_p(t_0) \\ 0 = \sum_{j=0}^{N-1} h^{(j+1)}(0)a_j + \dot{y}_p(t_0) \\ \vdots \\ 0 = \sum_{j=0}^{N-1} h^{(j+N-1)}(0)a_j + y_p^{(N-1)}(t_0) \end{array} \right. \quad (6.9)$$

Os valores  $h^{(j)}(0)$ , para  $j \geq N + 1$  são determinados a partir da equação diferencial que é satisfeita por  $h(t)$  com condições iniciais em  $t = 0$ .

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{N-1} = -A_N y_p(t_0) \\ a_{N-2} = -A_{N-1} y_p(t_0) - A_N \dot{y}_p(t_0) \\ a_{N-3} = -A_{N-2} y_p(t_0) - A_{N-1} \dot{y}_p(t_0) - A_N \ddot{y}_p(t_0) \\ \vdots \\ a_1 = -A_2 y_p(t_0) - A_3 \dot{y}_p(t_0) - \dots - A_N y_p^{(N-2)}(t_0) \\ a_0 = -A_1 y_p(t_0) - A_2 \dot{y}_p(t_0) - \dots - A_N y_p^{(N-1)}(t_0) \end{array} \right. \quad (6.10)$$

ou de maneira compacta

$$a_j = - \sum_{k=1}^{N-j} A_{k+j} y_p^{(k-1)}(t_0, x), \quad \text{para } j = 0 : N - 1. \quad (6.11)$$

A resposta livre introduzida pela convolução é então dada por

$$y_h(t) = - \sum_{j=0}^{N-1} h^{(j)}(t - t_0) \sum_{k=1}^{N-j} A_{k+j} y_p^{(k-1)}(t_0) = - \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} h^{(k-1)}(t - t_0) A_{k+j} y_p^{(j)}(t_0), \quad (6.12)$$

onde

$$h^{(j)}(t)\phi(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial^j h}{\partial t^j}(t, x, \xi)\phi(\xi)d\xi. \quad (6.13)$$

No domínio original têm-se

$$y_h(t, x) = - \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} \int_{\Omega} \frac{\partial^{k-1} h}{\partial t^{k-1}}(t, x, \xi) A_{k+j} y_p^{(j)}(t_0, \xi) d\xi. \quad (6.14)$$

*Resulta desta expressão que, sendo conhecidas as condições iniciais de uma solução não homogênea  $y_p(t, x)$ , a solução homogênea  $y_h(t, x)$  fica determinada com o auxílio da resposta impulso funcional  $h(t)$ .*

Desta forma, o cálculo da resposta forçada fica reduzido a obtenção da resposta particular  $y_p(t)$  e têm-se como expressão

$$y(t) = \int_{t_0}^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau = y_p(t) - \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} h^{(k-1)}(t - t_0) A_{k+j} y_p^{(j)}(t_0), \quad (6.15)$$

a qual caracteriza uma decomposição da convolução.

A fim de ilustrar a decomposição da resposta forçada para sistemas distribuídos, na próxima seção apresenta-se um modelo de uma viga fixa-apoiada, sujeita a diferentes excitações oscilatórias no tempo.

## 6.2 Modelo de uma Viga Euler-Bernoulli com Força Axial

Nas formulações das teorias estruturais clássicas para vigas as descrições geométricas são bastante simplificadas, necessitando-se apenas de uma dimensão (comprimento), uma propriedade da seção transversal (área ou momento de inércia) e uma propriedade constitutiva (Young ou cisalhamento), para maiores detalhes veja-se [Clough, 1993]. Para a análise infinitesimal de vigas isotrópicas, isto é, que apresentam as mesmas propriedades físicas, considera-se neste trabalho que, quaisquer que sejam as direções de propagação dos fenômenos que incidem sobre a viga, desprezar-se-á as forças de cisalhamento e de inércia de rotação, ou seja, segue-se o modelo Euler-Bernoulli.

A teoria de Euler-Bernoulli considera no campo do deslocamento que qualquer seção transversal da viga permanece sempre plana, com a mesma forma e perpendicular ao eixo da mesma, isto é, a curvatura é proporcional ao momento, veja-se [Craig, 1981].

O modelo matemático para uma viga flexível sujeita à ação de uma força axial constante que interage com os deslocamentos laterais, de acordo com a teoria de Euler-Bernoulli, é dado através da expressão

$$\rho A \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y(t, x)}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2} = F(t, x), \quad (6.16)$$

que corresponde a uma equação diferencial parcial evolutiva de segunda ordem no tempo e de quarta ordem espacial sujeita às condições iniciais

$$y(0, x) = y_0(x) \text{ e } y_t(0, x) = \dot{y}_0(x). \quad (6.17)$$

Na Fig. (6.1) é apresentada uma viga com condições de contorno fixa-livre, que satisfaz o modelo de Euler-Bernoulli. Para dedução do modelo veja-se [Meirovitch, 1993], [Inman, 1994], [Timoshenko, 1974], [Ginsberg, 2001], entre outros. Uma breve descrição destes modelos pode também ser encontrada nos trabalhos de [Soder, 2000] e [Giaretta, 2001].

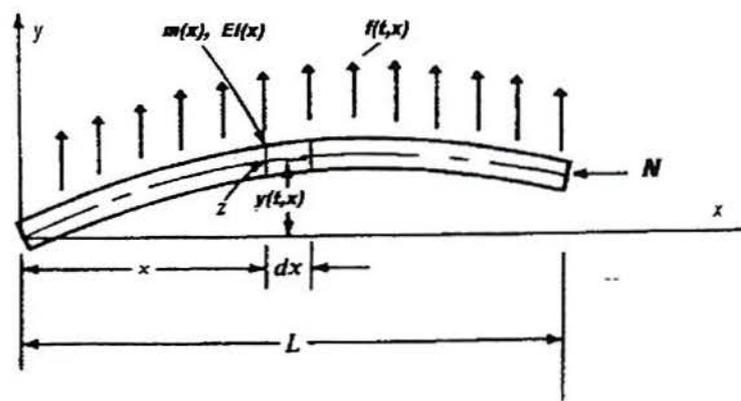


Figura 6.1 Viga fixa-livre sob ação de uma força axial  $N$

As condições de contorno do modelo podem ser escritas na forma genérica

$$B_j(y) = \alpha_{1j}y(t, 0) + \alpha_{2j}y_x(t, 0) + \alpha_{3j}y_{xx}(t, 0) + \alpha_{4j}y_{xxx}(t, 0) + \beta_{1j}y(t, L) + \beta_{2j}y_x(t, L) + \beta_{3j}y_{xx}(t, L) + \beta_{4j}y_{xxx}(t, L) = 0, \text{ para } j = 1 : 4, \quad (6.18)$$

matricialmente denotadas por  $\mathbf{B}\mathcal{Y} = \mathbf{0}$ , onde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{41} & \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} & \beta_{41} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \alpha_{42} & \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} & \beta_{42} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{43} & \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} & \beta_{43} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} & \beta_{14} & \beta_{24} & \beta_{34} & \beta_{44} \end{bmatrix} \text{ e } \mathcal{Y} = \begin{bmatrix} y(t, 0) \\ y_x(t, 0) \\ y_{xx}(t, 0) \\ y_{xxx}(t, 0) \\ y(t, L) \\ y_x(t, L) \\ y_{xx}(t, L) \\ y_{xxx}(t, L) \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

### 6.2.1 Cálculo Modal

Supondo que a viga descrita anteriormente pela expressão (6.16), não está sujeita à ação de uma força externa ( $F(t, x) = 0$ ), têm-se que a solução do problema corresponde a vibração livre do sistema.

No método espectral procuram-se soluções do tipo oscilatórias

$$y(t, x) = e^{i\omega t} \phi(x), \quad (6.20)$$

com  $\phi(x)$  denominada *modo* ou *autofunção* associada ao autovalor  $\lambda = i\omega$ . Estas soluções podem também ser representadas na forma real por

$$y(t, x) = [a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)] \phi(x). \quad (6.21)$$

Substituindo-se a expressão oscilatória da solução na equação homogênea

$$\mathcal{M} \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} + \mathcal{K}y(t, x) = 0, \quad (6.22)$$

onde

$$\mathcal{M} = \rho A \mathcal{I}, \quad (6.23)$$

é um operador constante, sendo que  $\mathcal{I}$  denota o operador identidade e

$$\mathcal{K} = EI \frac{d^4}{dx^4} + N \frac{d^2}{dx^2}, \quad (6.24)$$

um operador diferencial linear espacial de quarta ordem, atuando sob funções que satisfazem as condições de contorno (6.18), resulta que

$$\mathcal{K}\phi(x) - \mathcal{M}\omega^2\phi(x) = 0. \quad (6.25)$$

A partir dos operadores diferenciais (6.44) e (6.45) obtêm-se a equação modal do problema, definida por

$$\phi^{iv}(x) + p^2\ddot{\phi}(x) - q^4\phi(x) = 0, \quad (6.26)$$

onde

$$p^2 = \frac{N}{EI} \quad \text{e} \quad q^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (6.27)$$

e, com condições de contorno

$$\begin{aligned} B_j(y) &= \alpha_{1j}\phi(0) + \alpha_{2j}\dot{\phi}(0) + \alpha_{3j}\ddot{\phi}(0) + \alpha_{4j}\ddot{\phi}(0) + \\ &\beta_{1j}\phi(L) + \beta_{2j}\dot{\phi}(L) + \beta_{3j}\ddot{\phi}(L) + \beta_{4j}\ddot{\phi}(L) = 0, \quad \text{para } j = 1 : 4. \end{aligned} \quad (6.28)$$

A solução da equação diferencial homogênea (6.26) é escrita como combinação linear

$$\phi(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + c_3\phi_3(x) + c_4\phi_4(x) = \Phi c, \quad (6.29)$$

onde as colunas da matriz  $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4]$  formam uma base de soluções de (6.26) e  $c$  corresponde ao vetor da incógnitas. Na resolução do problema podem ser usadas a base espectral ou a base dinâmica.

Neste trabalho, considera-se o uso da base dinâmica. Ela é gerada a partir da resposta impulso ou solução dinâmica espacial  $h(x)$  e de suas derivadas até terceira ordem. Por definição, tem-se que  $h(x)$  satisfaz o problema

$$h^{(iv)}(x) + p^2 \ddot{h}(x) - q^4 h(x) = 0, \quad (6.30)$$

com as condições iniciais

$$h(0) = 0, \quad \dot{h}(0) = 0, \quad \ddot{h}(0) = 0, \quad \dddot{h}(0) = 1. \quad (6.31)$$

A resposta resposta impulso do sistema é então, dada por

$$h(x) = \frac{\delta \sinh(\varepsilon x) - \varepsilon \sin(\delta x)}{\delta \varepsilon (\varepsilon^2 + \delta^2)}, \quad (6.32)$$

sendo que os parâmetros  $\varepsilon$  e  $\delta$  surgem a partir do cálculo das raízes do polinômio característico

$$P(\lambda) = \lambda^4 + p^2 \lambda^2 - q^4, \quad (6.33)$$

associado ao sistema, cujas raízes fornecem os autovalores  $\lambda$ , dados por

$$\lambda_{1,2} = \pm i\delta \quad \text{e} \quad \lambda_{3,4} = \pm \varepsilon, \quad (6.34)$$

onde

$$\delta = \sqrt{\sqrt{q^4 + \frac{p^4}{4}} + \frac{p^2}{2}} \quad \text{e} \quad \varepsilon = \sqrt{\sqrt{q^4 + \frac{p^4}{4}} - \frac{p^2}{2}}. \quad (6.35)$$

A partir dos parâmetros do problema obtêm-se a frequência característica dos modos de vibração expressa por

$$(\omega_n)_m = q_m^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad \text{para} \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.36)$$

Os elementos da base dinâmica  $\Phi_D$  são

$$\begin{aligned}
 \phi_1(x) &= h(x) = \frac{\delta \sinh(\varepsilon x) - \varepsilon \sin(\delta x)}{\delta \varepsilon (\varepsilon^2 + \delta^2)} \\
 \phi_2(x) &= \dot{h}(x) = \frac{\cosh(\varepsilon x) - \cos(\delta x)}{(\varepsilon^2 + \delta^2)} \\
 \phi_3(x) &= \ddot{h}(x) = \frac{\varepsilon \sinh(\varepsilon x) + \delta \sin(\delta x)}{(\varepsilon^2 + \delta^2)} \\
 \phi_4(x) &= \dddot{h}(x) = \frac{\varepsilon^2 \cosh(\varepsilon x) + \delta^2 \cos(\delta x)}{(\varepsilon^2 + \delta^2)}
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

Os elementos da base normalizada  $\Phi_{DN}$  são obtidos a partir da expressão

$$h_j(x) = \sum_{i=0}^{N-j-1} h^{(i)}(x) a_{j+1+i}, \quad \text{para } j = 0 : N - 1, \tag{6.38}$$

sendo que,  $a_k$ , corresponde aos coeficientes da equação do problema. Desta forma, os elementos da base normalizada são dados por

$$\begin{aligned}
 h_0 &= p^2 \dot{h}(x) + \ddot{h}(x) \\
 h_1 &= p^2 h(x) + \dot{h}(x) \\
 h_2 &= \dot{h}(x) \\
 h_3 &= h(x)
 \end{aligned} \tag{6.39}$$

Substituindo-se as expressões (6.37) em (6.39) resulta

$$\begin{aligned}
 \phi_{1N}(x) &= h_0 = \frac{\varepsilon^2 \cosh(\delta x) + \cos(\varepsilon x) \delta^2}{(\varepsilon^2 + \delta^2)} \\
 \phi_{2N}(x) &= h_1 = \frac{\delta^3 \sinh(\varepsilon x) + \varepsilon^3 \sin(\delta x)}{\delta \varepsilon^2 (\varepsilon^2 + \delta^2)} \\
 \phi_{3N}(x) &= h_2 = \frac{\cosh(\varepsilon x) - \cos(\delta x)}{(\varepsilon^2 + \delta^2)} \\
 \phi_{4N}(x) &= h_3 = \frac{\delta \sinh(\varepsilon x) - \varepsilon \sin(\delta x)}{\delta \varepsilon (\varepsilon^2 + \delta^2)}
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

Os coeficientes  $c_j$  da solução (6.29) podem ser determinados resolvendo-se o sistema linear resultante das condições de contorno do problema espacial (6.26), denominado de problema modal algébrico<sup>1</sup>, denotado por

$$Uc = 0, \quad (6.41)$$

para as raízes  $\omega$  da equação característica  $\Delta = \det(U) = 0^2$ . Aqui  $U = B\Upsilon$ , sendo  $B$  a matriz dos coeficientes das condições de contorno (6.19) e  $\Upsilon$  a matriz de base definida por

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} h(0) & \dot{h}(0) & \ddot{h}(0) & \ddot{h}(0) \\ \dot{h}(0) & \ddot{h}(0) & \ddot{h}(0) & h^{(iv)}(0) \\ \ddot{h}(0) & \ddot{h}(0) & h^{(iv)}(0) & h^{(v)}(0) \\ \ddot{h}(0) & h^{(iv)}(0) & h^{(v)}(0) & h^{(vi)}(0) \\ h(L) & \dot{h}(L) & \ddot{h}(L) & \ddot{h}(L) \\ \dot{h}(L) & \ddot{h}(L) & \ddot{h}(L) & h^{(iv)}(L) \\ \ddot{h}(L) & \ddot{h}(L) & h^{(iv)}(L) & h^{(v)}(L) \\ \ddot{h}(L) & h^{(iv)}(L) & h^{(v)}(L) & h^{(vi)}(L) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}. \quad (6.42)$$

### 6.2.2 Cálculo da Função de Green Espacial

A equação (6.16) pode ser escrita na forma

$$\mathcal{M} \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} + \mathcal{K}y(t, x) = F(t, x), \quad (6.43)$$

onde

$$\mathcal{M} = \rho A \mathcal{I}, \quad (6.44)$$

é um operador constante; sendo que,  $\mathcal{I}$  denota o operador identidade e

$$\mathcal{K} = EI \frac{d^4}{dx^4} + N \frac{d^2}{dx^2}, \quad (6.45)$$

<sup>1</sup>OBSERVAÇÃO: O sistema linear definido por  $Uc = 0$  pode ser simplificado dependendo do tipo de condições de contorno do problema. Desta forma, alguns coeficientes  $c_j$  podem ser obtidos facilmente.

<sup>2</sup>O sistema (6.41) possui soluções não nulas somente quando  $\Delta = \det U = 0$ .

um operador diferencial linear espacial de quarta ordem, atuando sob funções que satisfazem as condições de contorno (6.18).

Para uma entrada do tipo harmônica

$$F(t, x) = e^{i\omega t} f(x),$$

tem-se a resposta em frequência

$$y(t, x) = e^{i\omega t} \phi(x), \quad (6.46)$$

onde  $\phi(x)$  satisfaz o problema de contorno espacial

$$\mathcal{K}\phi(x) - \mathcal{M}\omega^2\phi(x) = f(x), \quad (6.47)$$

ou seja, o problema de contorno não homogêneo

$$\begin{aligned} \phi^{(iv)}(x) + p^2\ddot{\phi}(x) - q^4\phi(x) &= f(x) \\ B_j(y) &= \alpha_{1j}\phi(0) + \alpha_{2j}\dot{\phi}(0) + \alpha_{3j}\ddot{\phi}(0) + \alpha_{4j}\ddot{\phi}(0) + \\ &\beta_{1j}\phi(L) + \beta_{2j}\dot{\phi}(L) + \beta_{3j}\ddot{\phi}(L) + \beta_{4j}\ddot{\phi}(L) = 0, \quad \text{para } j = 1 : 4. \end{aligned} \quad (6.48)$$

A solução é dada em termos da integral

$$\phi(x) = [\mathcal{K} - \mathcal{M}\omega^2]^{-1}f(x) = \int_0^L G(x, \xi)f(\xi)d\xi, \quad (6.49)$$

onde a função de Green espacial  $G(x, \xi)$  é expressa por

$$G(x, \xi) = \frac{H(x, \xi)}{\Delta}, \quad (6.50)$$

com

$$H(x, \xi) = \det \begin{bmatrix} h_0(x) & h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) & g(x, \xi) \\ B_1(h_0) & B_1(h_1) & B_1(h_2) & B_1(h_3) & B_1(g) \\ B_2(h_0) & B_2(h_1) & B_2(h_2) & B_2(h_3) & B_2(g) \\ B_3(h_0) & B_3(h_1) & B_3(h_2) & B_3(h_3) & B_3(g) \\ B_4(h_0) & B_4(h_1) & B_4(h_2) & B_4(h_3) & B_4(g) \end{bmatrix}, \quad (6.51)$$

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} B_1(h_0) & B_1(h_1) & B_1(h_2) & B_1(h_3) \\ B_2(h_0) & B_2(h_1) & B_2(h_2) & B_2(h_3) \\ B_3(h_0) & B_3(h_1) & B_3(h_2) & B_3(h_3) \\ B_4(h_0) & B_4(h_1) & B_4(h_2) & B_4(h_3) \end{bmatrix} \quad e \quad (6.52)$$

$$g(x, \xi) = \frac{\text{sign}(x - \xi)}{2W(\xi)} \det \begin{bmatrix} h_0(x) & h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \\ \ddot{h}_0(\xi) & \ddot{h}_1(\xi) & \ddot{h}_2(\xi) & \ddot{h}_3(\xi) \\ \dot{h}_0(\xi) & \dot{h}_1(\xi) & \dot{h}_2(\xi) & \dot{h}_3(\xi) \\ h_0(\xi) & h_1(\xi) & h_2(\xi) & h_3(\xi) \end{bmatrix}, \quad (6.53)$$

para

$$W(\xi) = \det \begin{bmatrix} \ddot{h}_0(\xi) & \ddot{h}_1(\xi) & \ddot{h}_2(\xi) & \ddot{h}_3(\xi) \\ \ddot{h}_0(\xi) & \ddot{h}_1(\xi) & \ddot{h}_2(\xi) & \ddot{h}_3(\xi) \\ \dot{h}_0(\xi) & \dot{h}_1(\xi) & \dot{h}_2(\xi) & \dot{h}_3(\xi) \\ h_0(\xi) & h_1(\xi) & h_2(\xi) & h_3(\xi) \end{bmatrix}. \quad (6.54)$$

A partir da fórmula (6.50), obtêm-se diferentes expressões para a função de Green, pois a mesma está condicionada ao tipo de condição de contorno do problema. Para maiores detalhes, veja-se as referências [Naimark, 1967], [Butkovskiy, 1983], [Miller, 1963].

### 6.2.3 Decomposição da Resposta Forçada

De acordo com a teoria desenvolvida neste capítulo a resposta forçada do sistema pode ser decomposta em

$$y(t, x) = y_p(t, x) + y_h(t, x) = y_p(t, x) - \int_0^L h(t, x, \xi) \rho A \left( \frac{\partial}{\partial t} y_p \right) (0, \xi) + \left( \frac{\partial}{\partial t} h \right) (t, x, \xi) \rho A y_p(0, \xi) d\xi, \quad (6.55)$$

onde  $y_h(t, x)$  é a resposta livre induzida pela resposta permanente,  $y_p(t, x)$ .

Na próxima subseção apresentam-se simulações numéricas para uma viga fixa-apoiada, sendo a resposta impulso expressa na forma modal, [Giaretta, 2001], por

$$0h(t, x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin w_n t}{w_n} \frac{1}{m} \left( \frac{X_n(\xi) X_n(x)}{\|X_n\|^2} \right), \quad (6.56)$$

onde  $\|X_n\|$  denota a norma integral quadrática do modo  $X_n$ , obtido ao resolver-se a equação modal algébrica (6.41).

Em particular, para entradas no sistema distribuído (6.16), do tipo

$$F(t, x) = e^{i\omega t} f(x),$$

tem-se de (6.46) e (6.49), que a resposta permanente é dada por

$$y_p(t, x) = e^{i\omega t} \int_0^L G(x, \eta) f(\eta) d\eta. \quad (6.57)$$

Assim, a resposta forçada do sistema é

$$y(t, x) = e^{i\omega t} \left[ \int_0^L G(x, \eta) f(\eta) d\eta - \rho A \int_0^L \left( i\omega h(t, x, \xi) + \frac{\partial}{\partial t} h(t, x, \xi) \right) \left( \int_0^L G(\xi, \eta) f(\eta) d\eta \right) d\xi \right]. \quad (6.58)$$

### 6.2.3.1 Decomposição da Resposta Forçada para uma Viga Fixa-Apoiada

Nesta seção, considera-se condições de contorno do tipo fixa-apoiada para a viga Euler-Bernoulli com força axial descrita pela equação (6.16), conforme é mostrado na Fig. (6.2).



Figura 6.2 Viga fixa-apoiada

Para uma viga deste tipo, as condições de contorno são expressas por

$$\begin{cases} \phi(0) = 0, \dot{\phi}(0) = 0 \\ \phi(L) = 0, \ddot{\phi}(L) = 0 \end{cases} \quad (6.59)$$

e a equação modal algébrica (6.41),  $Uc = 0$ , é dada por

$$\begin{bmatrix} h(0) & \dot{h}(0) & \ddot{h}(0) & \dddot{h}(0) \\ \dot{h}(0) & \ddot{h}(0) & \dddot{h}(0) & h^{(iv)}(0) \\ h(L) & \dot{h}(L) & \ddot{h}(L) & \dddot{h}(L) \\ \ddot{h}(L) & \dddot{h}(L) & h^{(iv)}(L) & h^{(v)}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Substituindo-se  $h(x)$  e suas derivadas em  $x = 0$  e  $x = L$ , o sistema de quatro equações simplifica-se para um sistema de duas equações; neste caso, ao obter-se  $c_3 = c_4 = 0$ . Assim, a equação modal reduzida torna-se

$$\begin{bmatrix} h(L) & \dot{h}(L) \\ \ddot{h}(L) & \dddot{h}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Decorre, então dessa expressão, que a equação característica é

$$\Delta = h(L)\ddot{\dot{h}}(L) - \dot{h}(L)\ddot{h}(L) = 0. \quad (6.60)$$

Resolvendo-se a equação modal reduzida para as raízes de (6.60), tem-se que a forma dos modos para estas condições de contorno é

$$X(x) = h(x) + \sigma \dot{h}(x), \quad \text{com } \sigma = -\frac{\ddot{\dot{h}}(L)}{\dot{\ddot{h}}(L)}. \quad (6.61)$$

Usando-se a base dinâmica normalizada têm-se que a expressão dos modos pode ser escrita como

$$X(x) = h_3 + \sigma h_2, \quad \text{com } \sigma = -\frac{h_0(L) - p^2 h_2(L)}{h_1(L) - p^2 h_3(L)}. \quad (6.62)$$

Substituindo-se

$$h(x) = \frac{\delta \sinh(\varepsilon x) - \varepsilon \sin(\delta x)}{\delta \varepsilon (\varepsilon^2 + \delta^2)},$$

em (6.60), a equação característica torna-se igual a

$$\sqrt{\varepsilon^2 + p^2} \tanh(\varepsilon L) - \varepsilon \tan(\sqrt{\varepsilon^2 + p^2} L) = 0. \quad (6.63)$$

Para o cálculo das frequências naturais  $\omega_n$ , resolve-se (6.63) para  $\varepsilon$  e a partir destes valores, calculam-se os parâmetros  $q$  e  $\delta$ , ou seja,

$$q = \sqrt{\sqrt{(\varepsilon^2 + \frac{p^2}{2})^2 - \frac{p^4}{4}}} \quad \text{e} \quad \delta^2 = \varepsilon^2 + p^2.$$

As frequências naturais,  $\omega_n$ , do sistema são obtidas a partir da expressão

$$q^4 = \frac{\rho A \omega_n^2}{EI},$$

onde  $q = q(\varepsilon)$  para  $\varepsilon = \varepsilon_m$  e  $m = 1, 2, \dots$ .

Para o cálculo da função de Green, utiliza-se a fórmula (6.50), juntamente com a base dinâmica normalizada  $\Phi_{DN} = [h_0, h_1, h_2, h_3]$ ; sendo que neste caso resulta

$$H(x, \xi) = \det \begin{bmatrix} h_0(x) & h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) & g(x, \xi) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & g(0, \xi) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & g_x(0, \xi) \\ h_0(L) & h_1(L) & h_2(L) & h_3(L) & g_x(L, \xi) \\ \ddot{h}_0(L) & \ddot{h}_1(L) & \ddot{h}_2(L) & \ddot{h}_3(L) & g_{xx}(L, \xi) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (6.64)$$

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ h_0(L) & h_1(L) & h_2(L) & h_3(L) \\ \ddot{h}_0(L) & \ddot{h}_1(L) & \ddot{h}_2(L) & \ddot{h}_3(L) \end{bmatrix}. \quad (6.65)$$

Como pode ser observado, estas expressões tornam-se mais simples com o uso da base dinâmica normalizada.

A função  $g(x, \xi)$  calculada através da expressão (6.53) é

$$g(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \sin(\delta(x - \xi)) - \delta \sinh(\varepsilon(x - \xi))}{\varepsilon \delta (\delta^2 + \varepsilon^2)}, & x < \xi \\ -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon \sin(\delta(x - \xi)) - \delta \sinh(\varepsilon(x - \xi))}{\varepsilon \delta (\delta^2 + \varepsilon^2)}, & \xi < x \end{cases}. \quad (6.66)$$

Finalmente, calculam-se as expressões (6.64) e (6.65) e assim, obtêm-se a função de Green espacial para uma viga fixa-apoiada, denotada por

$$G(x, \xi) = \begin{cases} G_1(x, \xi), & 0 \leq x \leq \xi \\ G_2(x, \xi), & \xi < x \leq L \end{cases}, \quad (6.67)$$

com

$$\begin{aligned}
 G_1(x, \xi) = & -\frac{\varepsilon^2 \sin(\delta(-L + \xi)) \sin(\delta x) \cosh(\varepsilon L) + \sin(\delta(x - L)) \sinh(\varepsilon(L - \xi))}{((\varepsilon \cosh(\varepsilon L) \sin(\delta L) - \delta \cos(\delta L) \sinh(\varepsilon L))(\delta^2 + \varepsilon^2)\delta\varepsilon)} + \\
 & + \frac{\sinh(\varepsilon(-L + \xi)) \cosh(\varepsilon x) \sin(\delta L) + \sin(\delta(-L + \xi)) \cos(\delta x) \sinh(\varepsilon L)}{((\varepsilon \cosh(\varepsilon L) \sin(\delta L) - \delta \cos(\delta L) \sinh(\varepsilon L))(\delta^2 + \varepsilon^2)\delta\varepsilon)} + \\
 & - \frac{\sinh(\varepsilon(x - L)) \sin(\delta(L - \xi))\delta\varepsilon + \delta^2 \sinh(\varepsilon(-L + \xi)) \sinh(\varepsilon x) \cos(\delta L)}{((\varepsilon \cosh(\varepsilon L) \sin(\delta L) - \delta \cos(\delta L) \sinh(\varepsilon L))(\delta^2 + \varepsilon^2)\delta\varepsilon)}
 \end{aligned} \tag{6.68}$$

e

$$\begin{aligned}
 G_2(x, \xi) = & -\frac{\varepsilon^2 \sin(\delta(x - L)) \sin(\delta\xi) \cosh(\varepsilon L) + \sinh(\varepsilon(x - L)) \sin(\delta(L - \xi))}{((\varepsilon \cosh(\varepsilon L) \sin(\delta L) - \delta \cos(\delta L) \sinh(\varepsilon L))(\delta^2 + \varepsilon^2)\delta\varepsilon)} + \\
 & + \frac{\sinh(\varepsilon(x - L)) \cosh(\varepsilon\xi) \sin(\delta L) + \sin(\delta(x - L)) \cos(\delta\xi) \sinh(\varepsilon L)}{((\varepsilon \cosh(\varepsilon L) \sin(\delta L) - \delta \cos(\delta L) \sinh(\varepsilon L))(\delta^2 + \varepsilon^2)\delta\varepsilon)} + \\
 & - \frac{\sin(\delta(x - L)) \sinh(\varepsilon(L - \xi))\delta\varepsilon + \delta^2 \sinh(\varepsilon(x - L)) \sinh(\varepsilon\xi) \cos(\delta L)}{((\varepsilon \cosh(\varepsilon L) \sin(\delta L) - \delta \cos(\delta L) \sinh(\varepsilon L))(\delta^2 + \varepsilon^2)\delta\varepsilon)}
 \end{aligned} \tag{6.69}$$

Nas simulações numéricas foi considerado entradas contínuas por intervalos, na parte espacial, ou seja,

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & 0 < x < L/2 \\ f_2(x), & L/2 < x < L \end{cases} \tag{6.70}$$

Desse modo, a resposta permanente espacial  $\phi(x)$ , pode ser escrita na forma adequada

$$\phi(x) = \begin{cases} \int_0^x G_2(x, \xi) f_1(\xi) d\xi + \int_x^{L/2} G_1(x, \xi) f_1(\xi) d\xi + \int_{L/2}^L G_1(x, \xi) f_2(\xi) d\xi, & 0 \leq x \leq L/2 \\ \int_0^{L/2} G_2(x, \xi) f_1(\xi) d\xi + \int_{L/2}^x G_2(x, \xi) f_2(\xi) d\xi + \int_x^L G_1(x, \xi) f_2(\xi) d\xi, & L/2 < x \leq L \end{cases} \tag{6.71}$$

### 6.2.3.2 Simulações Numéricas

Os valores numéricos dos parâmetros usados nas simulações encontram-se na Tab. 6.1. Para estes valores, foram calculadas as raízes  $\varepsilon_m$ , para  $m = 1 : 5$ , da equação característica (6.63) e determinados os correspondentes valores de  $q_m$ ,  $\delta_m$  e  $(\omega_n)_m$ ; os quais

encontram-se na Tab. 6.2. Foram calculados também, os cinco primeiros modos de vibração do sistema, a partir da expressão (6.62), ou seja, através de

$$X_m(x) = \dot{h}_{[m]}(x) + \sigma_m h_{[m]}(x), \quad \sigma_m = -\frac{\ddot{h}_{[m]}(L)}{\dot{h}_{[m]}(L)}, \quad (6.72)$$

onde  $h_{[m]}(x)$  é a solução dinâmica  $h(x)$ , obtida a partir da resolução do problema de valor inicial (6.30)-(6.31), correspondente a cada parâmetro  $q_m$  associado a frequência natural  $(\omega_n)_m$ , resultando em

$$h_{[m]}(x) = \frac{\delta_m \sinh(\varepsilon_m x) - \varepsilon_m \sin(\delta_m x)}{\delta_m \varepsilon_m (\varepsilon_m^2 + \delta_m^2)}. \quad (6.73)$$

Os modos normalizados são apresentados na Fig. 6.3.

$L$	$E$
$1m$	$8000N/Kg$
$I$	$\rho$
$1Kg m^2$	$300000Kg/m^3$
$A$	$N$
$0.01 m^3$	$16000 N$

Tabela 6.1 Valores dos parâmetros usados nas simulações do modelo da viga

$m$	$\varepsilon_m$	$q_m$	$(\omega_n)_m$	$\delta_m$
1	3.699351189	3.827677072	23.92516533	3.960454421
2	6.936058637	7.007048374	80.17788531	7.078764682
3	10.11664554	10.16571093	168.7562547	10.21501429
4	13.27949641	13.31698936	289.5986091	13.35458816
5	16.43447034	16.46481008	442.6880688	16.49520583

Tabela 6.2 Valores calculados para os parâmetros  $\varepsilon$ ,  $q$ ,  $\omega_n$  e  $\delta$

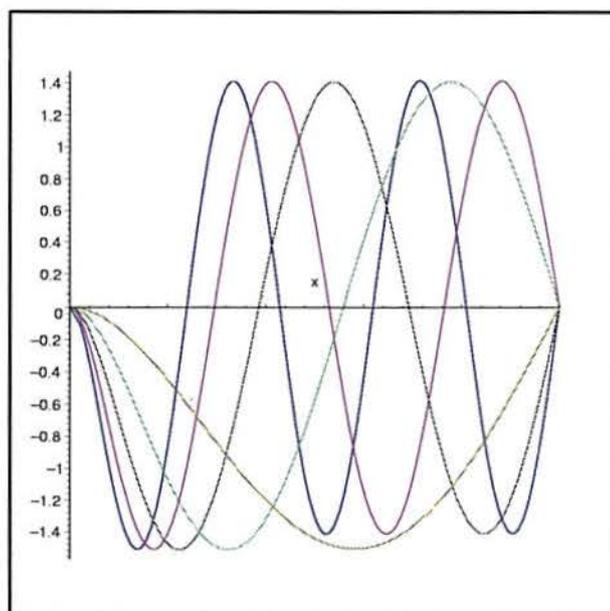


Figura 6.3 Cinco primeiros modos do sistema

• Entrada - Oscilatória no Espaço

Considere-se a entrada do sistema oscilatória no tempo e no espaço, expressa por

$$F(t, x) = \begin{cases} \frac{5}{2} \sin(2\pi x) \sin(\omega t), & 0 < x < 1/2 \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases}, \quad (6.74)$$

sendo que, para a frequência  $\omega$  de entrada definiu-se dois valores distintos. O primeiro, denotado por  $\omega f a_1$ , igual a 168.7562, tem o seu valor bem próximo da terceira frequência natural do sistema e o segundo denotado por  $\omega f a_2$  igual a 166.

A função de Green espacial do problema, para as duas frequências consideradas, é apresentada na Fig. 6.4.

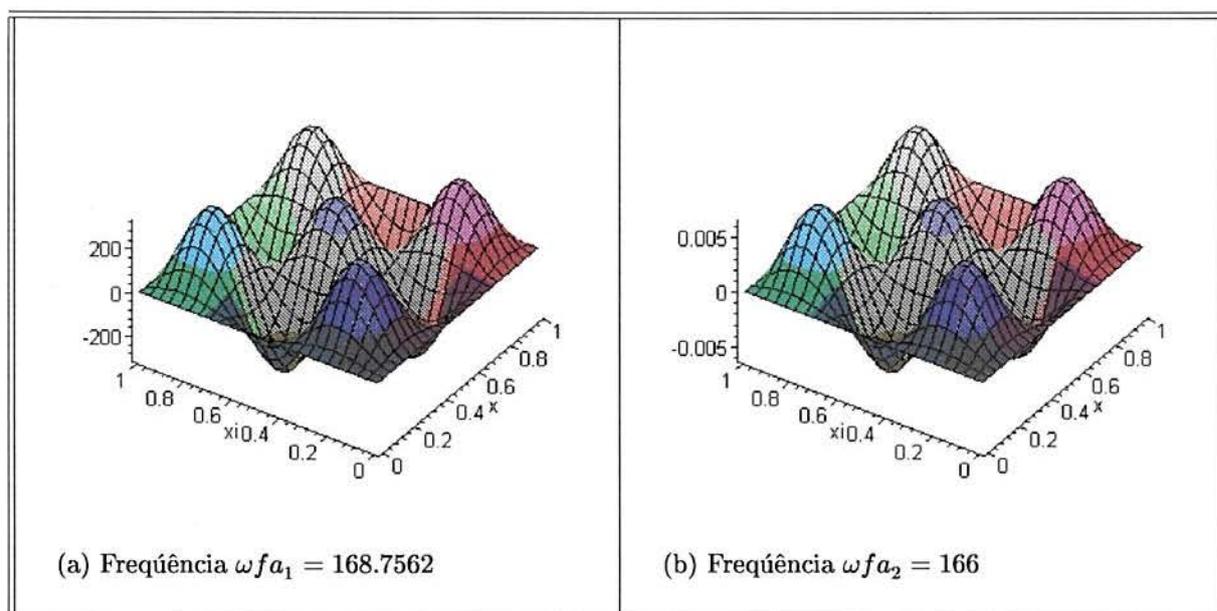
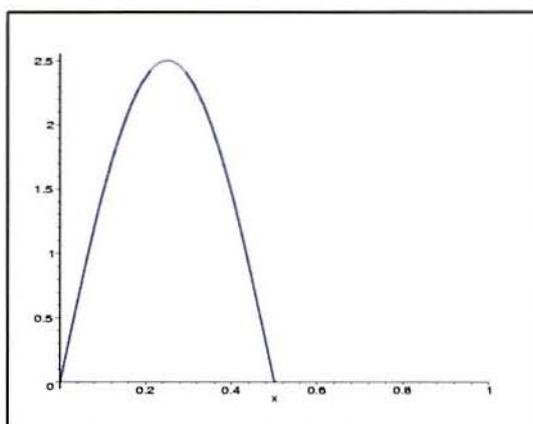
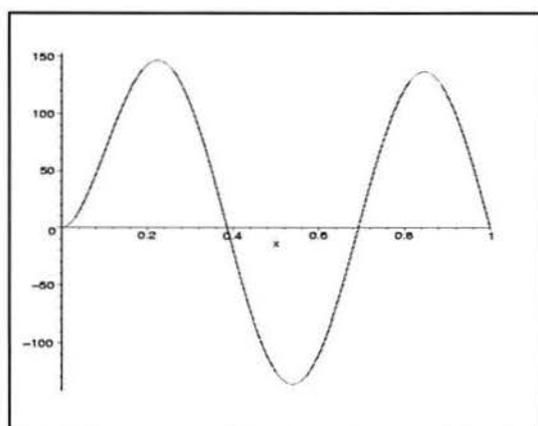


Figura 6.4 Função de Green espacial

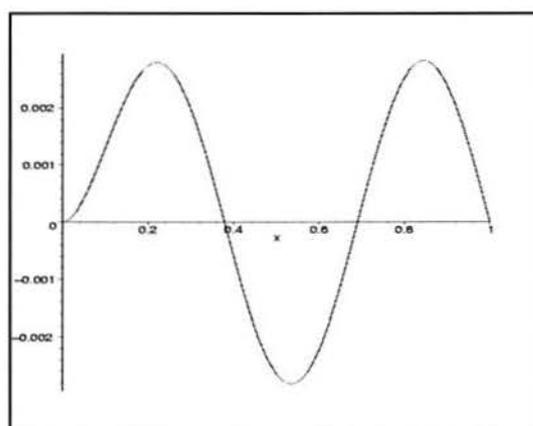
Apresenta-se na Fig. 6.5, a parte espacial da entrada ( $f(x)$ ) e as correspondentes respostas permanentes ( $\phi_j(x)$ ) do sistema, para as duas frequências de entrada consideradas.



(a) Forçante - parte espacial



(b) Resposta Permanente - parte espacial

Freq.  $\omega f a_1 = 168.7562$ 

(c) Resposta Permanente - parte espacial

Freq.  $\omega f a_2 = 166$ 

Figura 6.5 Parte espacial correspondentes a excitação e as respostas permanentes para duas frequências de entrada

A resposta impulso temporal  $h(t, x, \xi)$  é apresentada nas Tabs. 6.3 e 6.4; sendo que, na primeira encontram-se os gráficos que representam o seu comportamento para diferentes tempos fixos e na segunda, encontram-se os gráficos que correspondem ao seu comportamento em determinados pontos da viga.

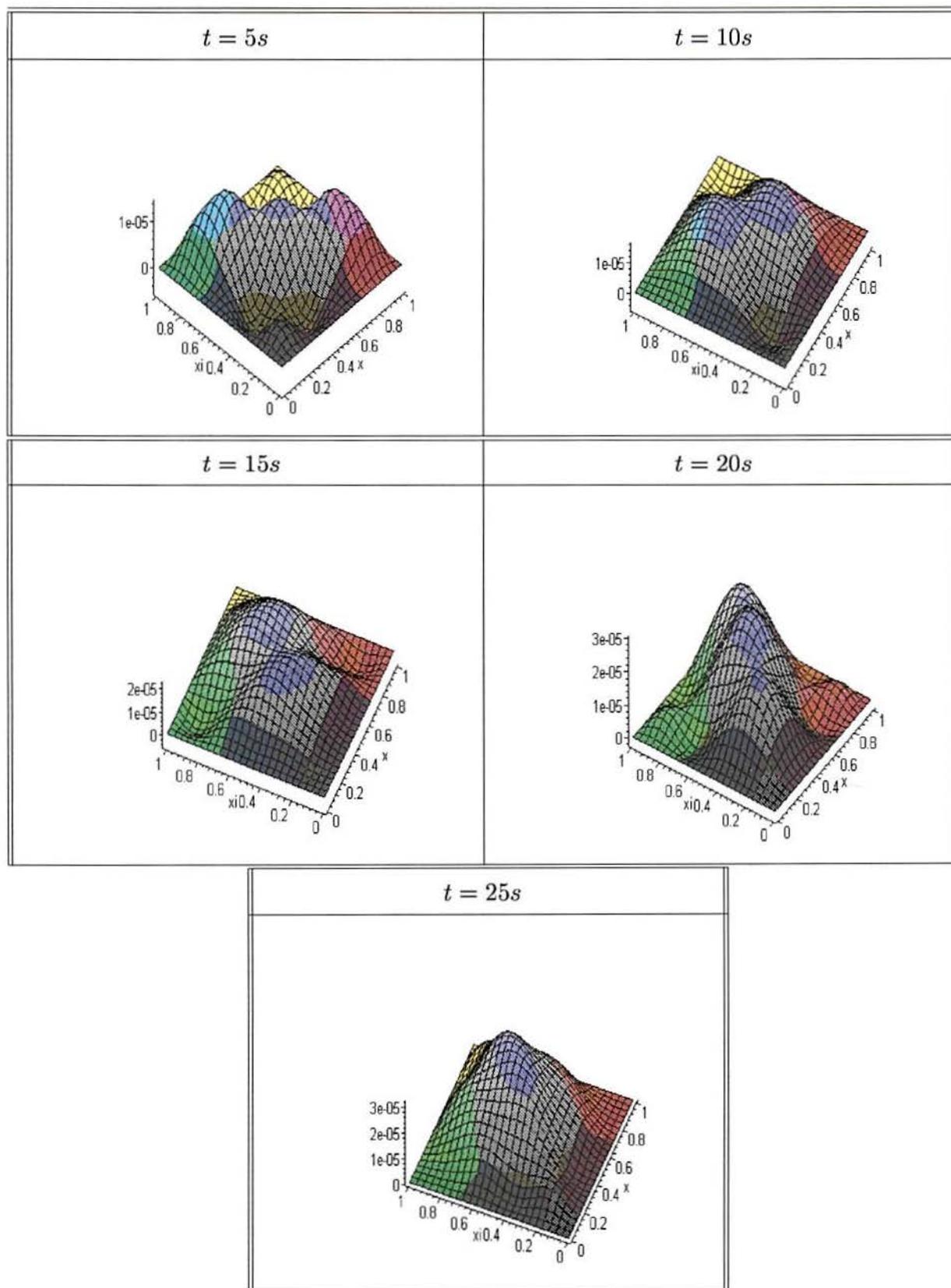


Tabela 6.3 Resposta impulso temporal para diferentes tempos fixos

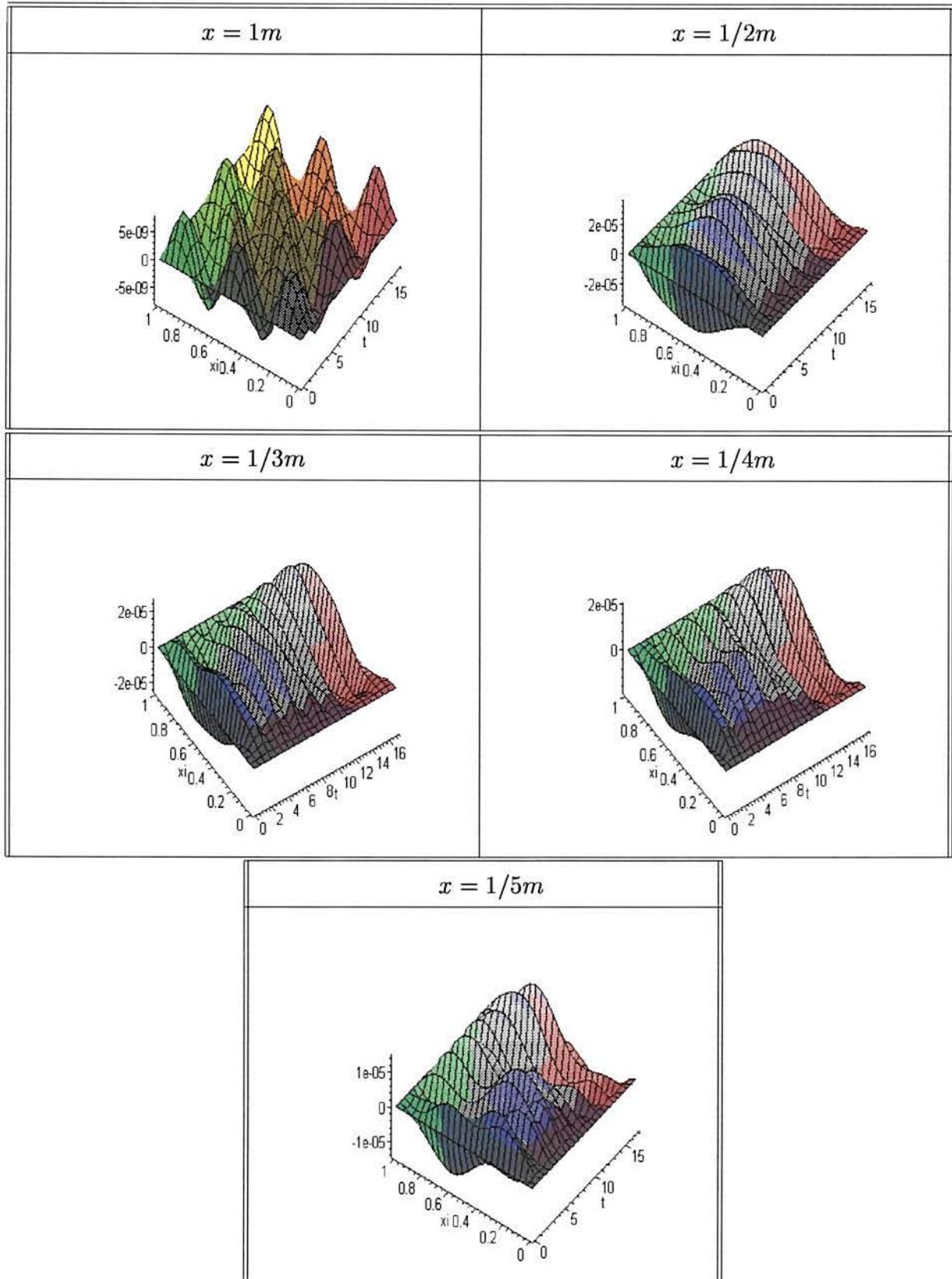


Tabela 6.4 Resposta impulso temporal para diferentes posições fixas

A decomposição da resposta forçada do sistema para as duas frequências consideradas são apresentadas nas Tabs. 6.5 e 6.6.

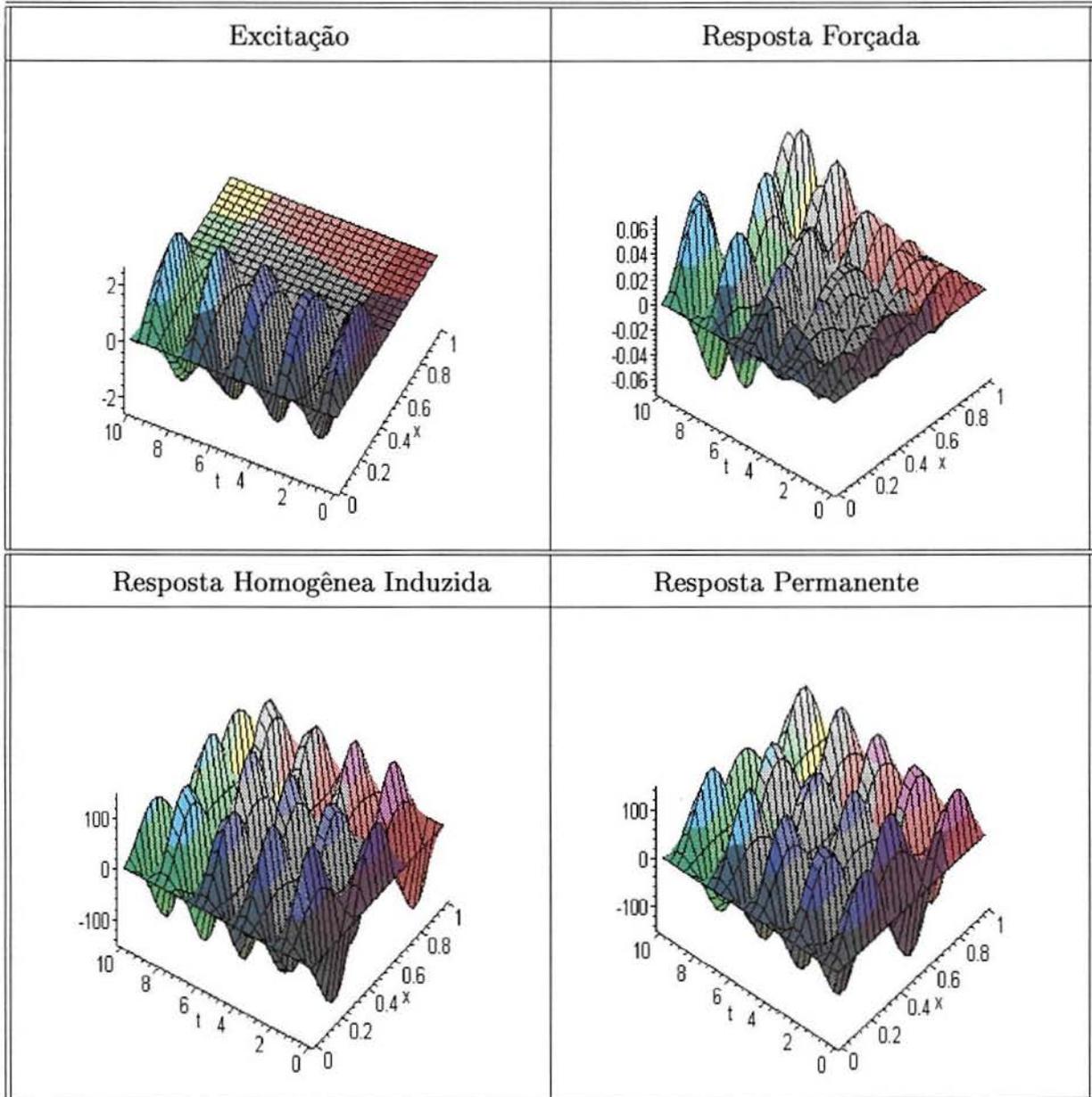


Tabela 6.5 Decomposição da resposta forçada do sistema e a correspondente entrada para a frequência  $\omega f a_1 = 168.7562$

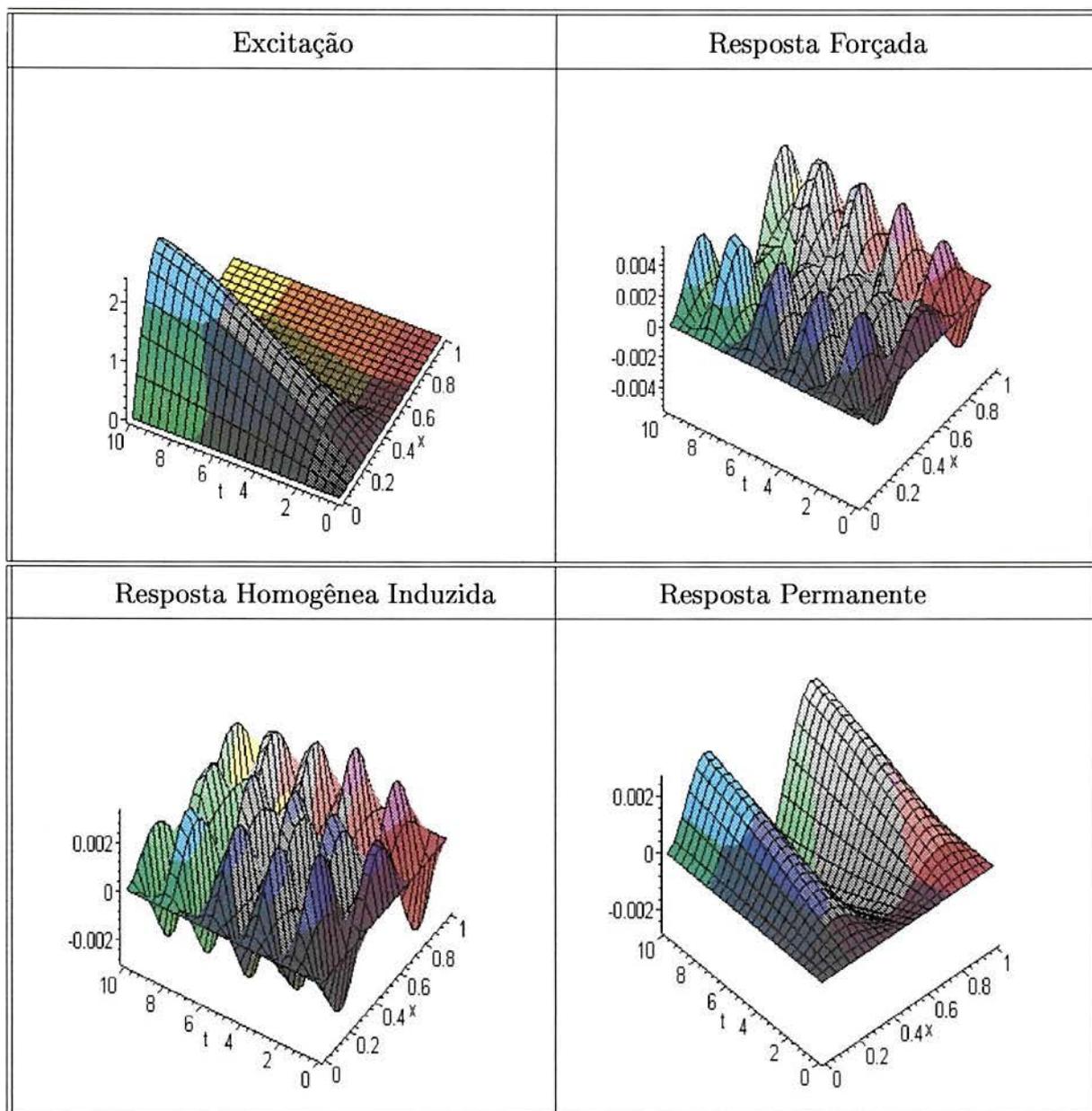
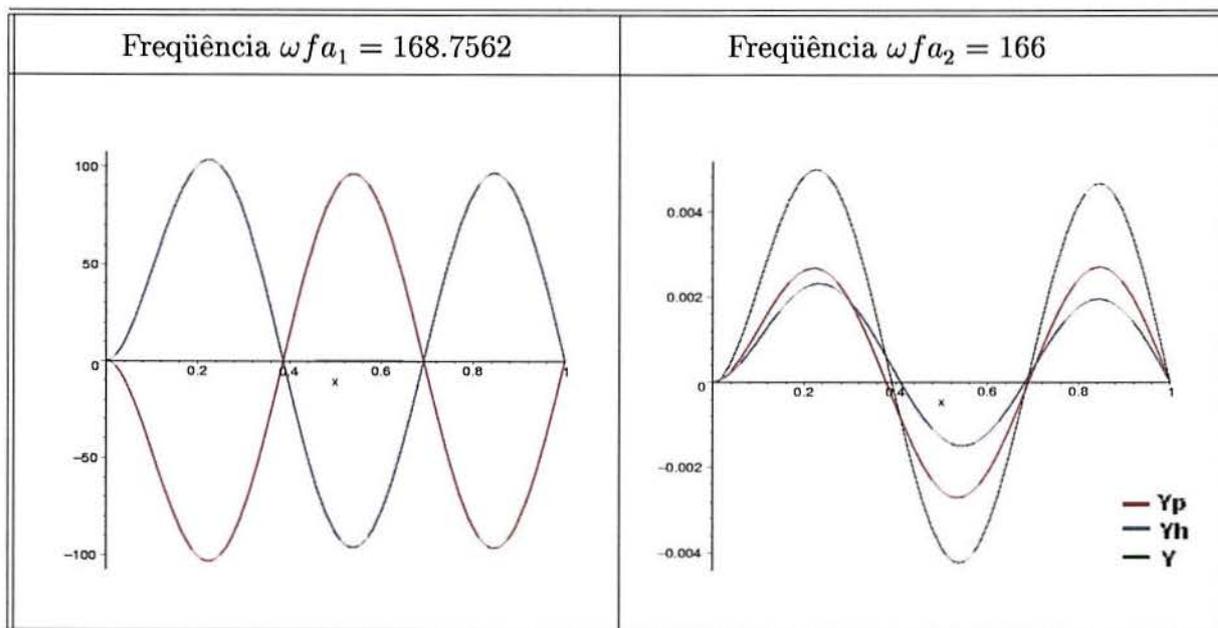


Tabela 6.6 Decomposição da resposta forçada do sistema e a correspondente entrada para a frequência  $\omega f a_2 = 166$

Na Tab. 6.7, são apresentados, para as duas frequências consideradas, a resposta homogênea induzida, resposta permanente e a resposta forçada plotadas juntas para o tempo  $t = 15s$ .

Tabela 6.7 Seção da decomposição para  $t = 15s$ 

### • Entrada - Degrau no Espaço

Considere-se a entrada do sistema oscilatória no tempo e degrau no espaço, expressa por

$$F(t, x) = \begin{cases} -\frac{5}{2} \cos(\omega t), & 0 < x < 1/2 \\ \frac{5}{2} \cos(\omega t), & 1/2 < x < 1 \end{cases}, \quad (6.75)$$

sendo que, para a frequência  $\omega$  de entrada, definiu-se dois valores distintos. O primeiro, denotado por  $\omega f a_1$  igual a 80.1778, tem o seu valor bem próximo da segunda frequência natural do sistema e o segundo denotado por  $\omega f a_2$  igual a 79.1.

A função de Green espacial do problema para as duas frequências consideradas é apresentada na Fig. (6.6).

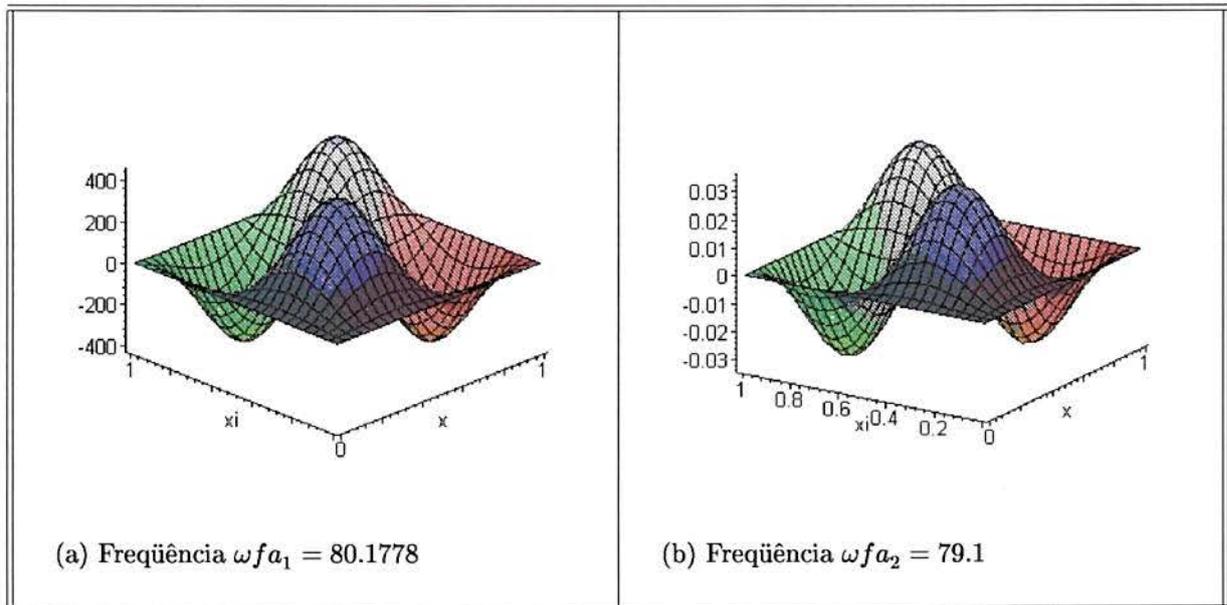
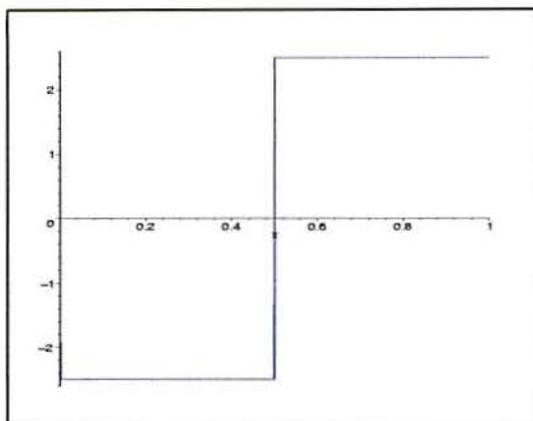
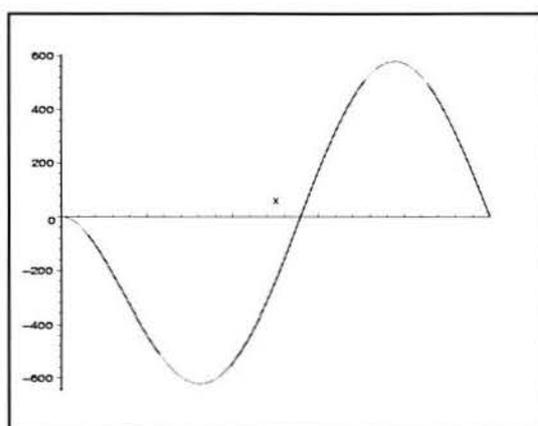


Figura 6.6 Função de Green espacial

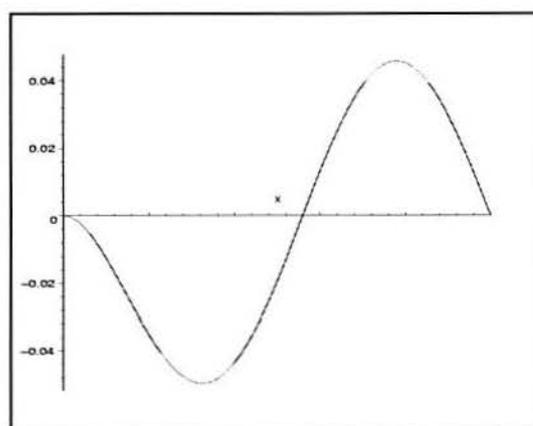
Apresenta-se na Fig. 6.7, a parte espacial da entrada,  $f(x)$  e as correspondentes respostas permanentes,  $\phi_j(x)$  do sistema, para as duas frequências de entrada consideradas.



(a) Excitação - parte espacial



(b) Resposta Permanente - parte espacial

Freq.  $\omega f a_1 = 80.1778$ 

(c) Resposta Permanente - parte espacial

Freq.  $\omega f a_2 = 79.1$ 

Figura 6.7 Parte espacial correspondentes a excitação e as respostas permanentes para duas frequências de entrada

Nas Tabs. 6.8 e 6.9, apresentam-se as decomposições obtidas para as duas frequências consideradas.

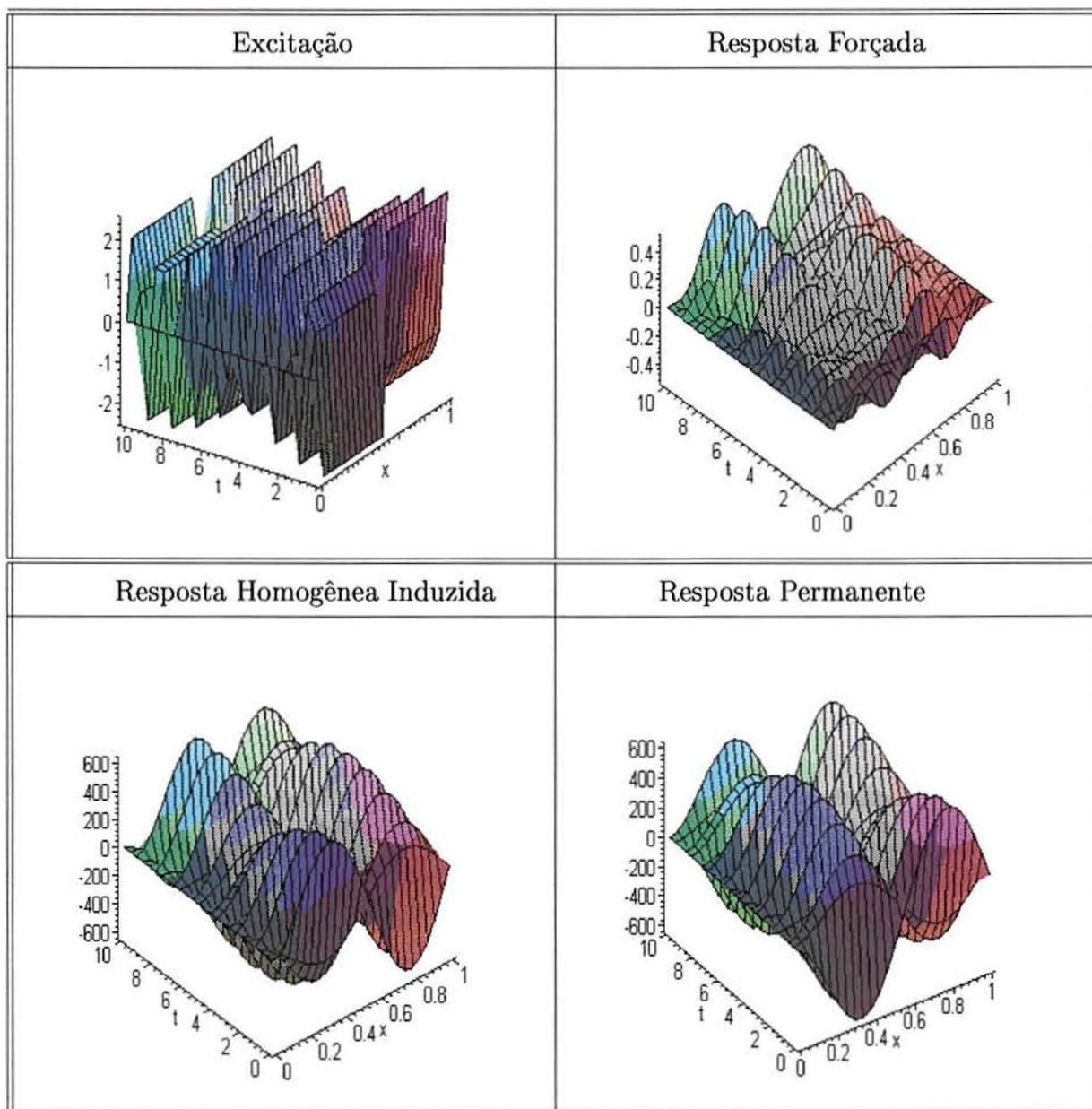


Tabela 6.8 Decomposição da resposta forçada do sistema e a correspondente entrada para a frequência  $\omega f a_1 = 80.17778$

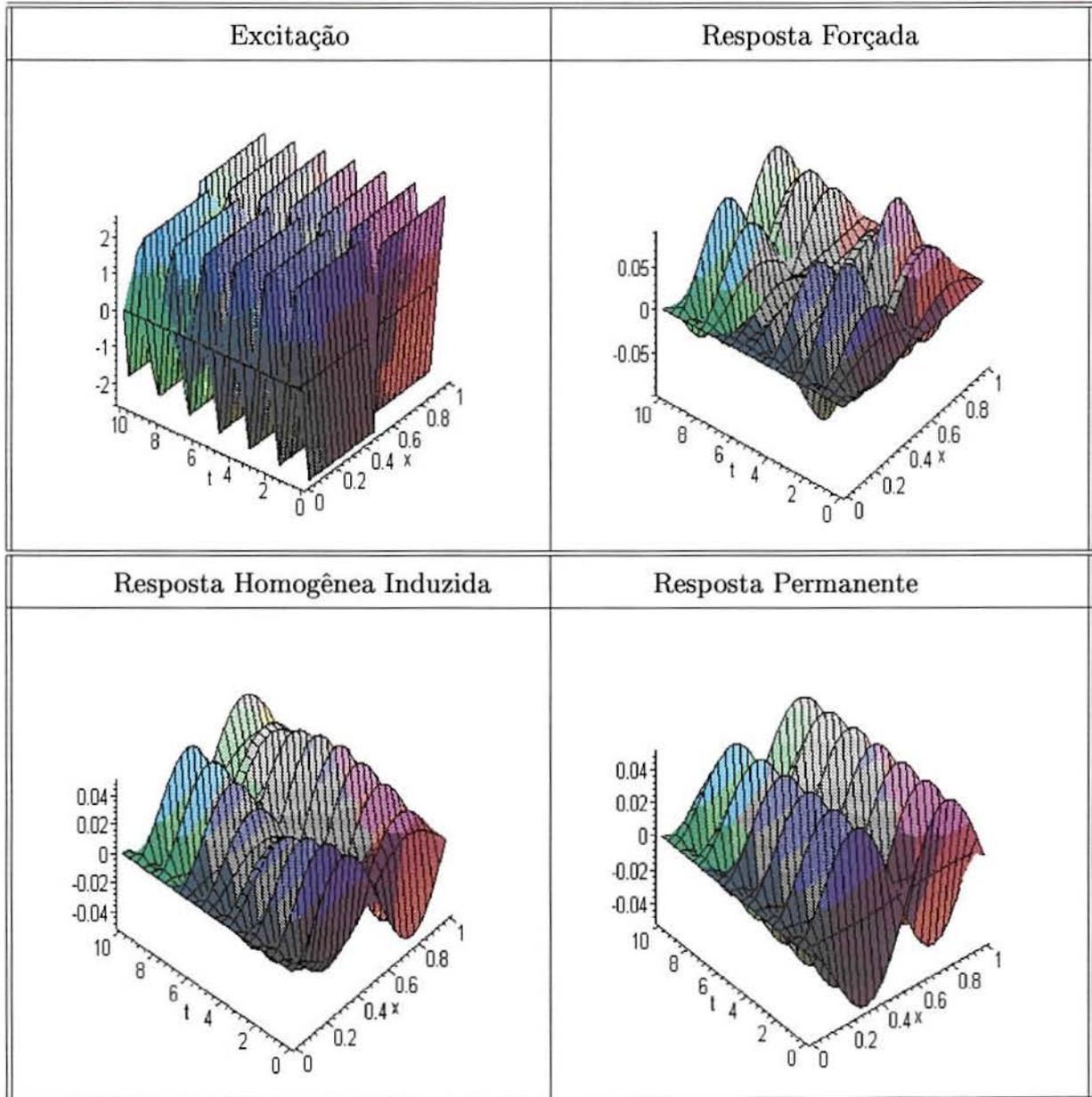
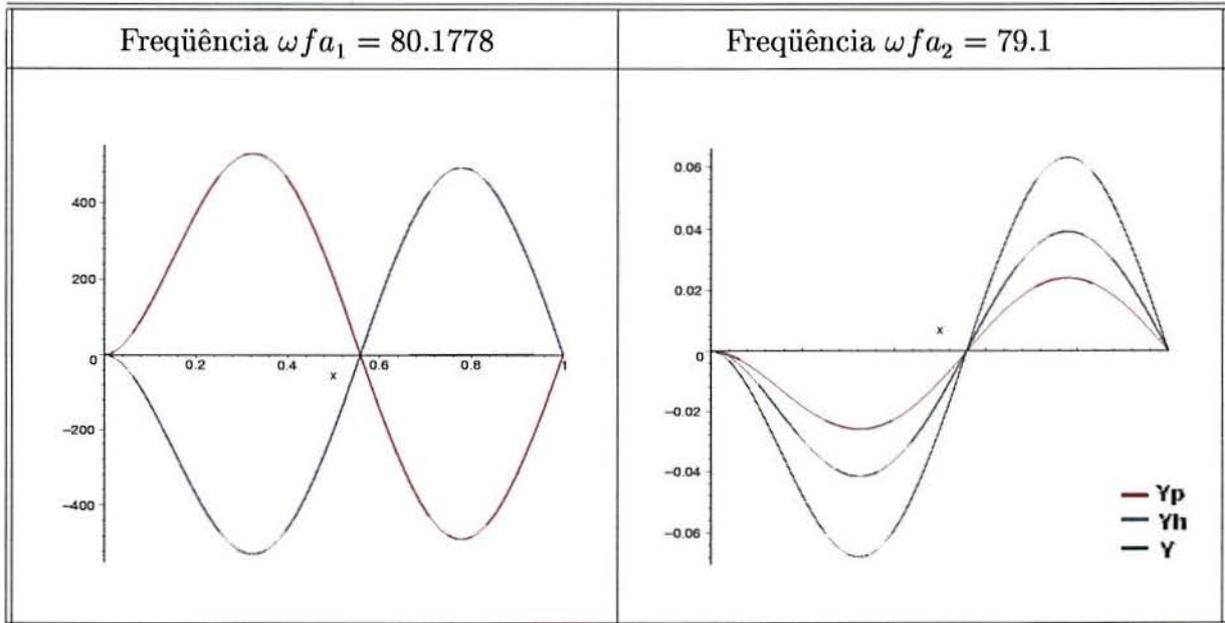


Tabela 6.9 Decomposição da resposta forçada do sistema e a correspondente entrada para a frequência  $\omega f a_2 = 79.1$

Na Tab. 6.10, são apresentados a resposta homogênea induzida, resposta permanente e a resposta forçada plotadas juntas para o tempo  $t = 15s$ , para as duas frequências consideradas.

Tabela 6.10 Seção da decomposição para  $t = 15s$ 

• **Entrada - Triangular no Espaço**

Considere-se a entrada do sistema oscilatória no tempo e triangular no espaço expressa por

$$F(t, x) = \begin{cases} -\frac{5x}{2} \sin(\omega t), & 0 < x < 1/2 \\ \left(\frac{5}{2} - \frac{5x}{2}\right) \sin(\omega t), & 1/2 < x < 1 \end{cases}, \quad (6.76)$$

sendo que, para a frequência  $\omega$  de entrada definiu-se dois valores distintos. O primeiro, denotado por  $\omega f a_1$  igual a 289.5986, tem o seu valor bem próximo da quarta frequência natural do sistema e, o segundo denotado por  $\omega f a_2$  igual a 288.15.

A função de Green espacial do problema para as duas frequências consideradas é apresentada na Fig. 6.8.

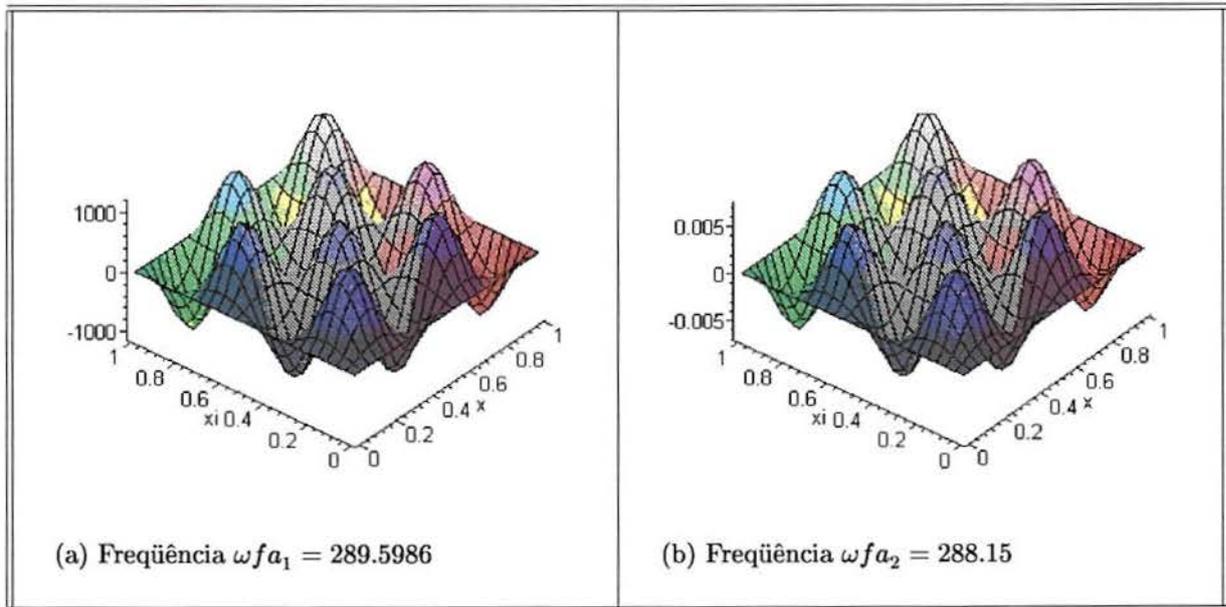
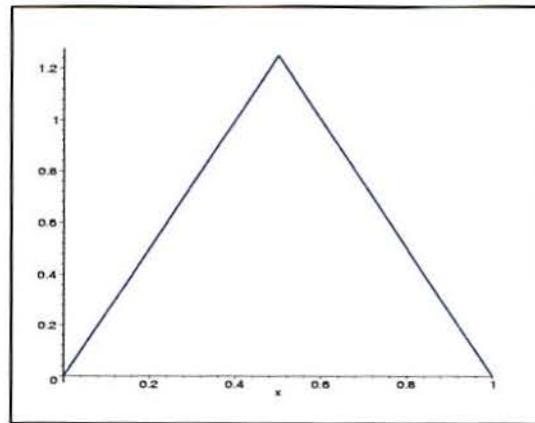
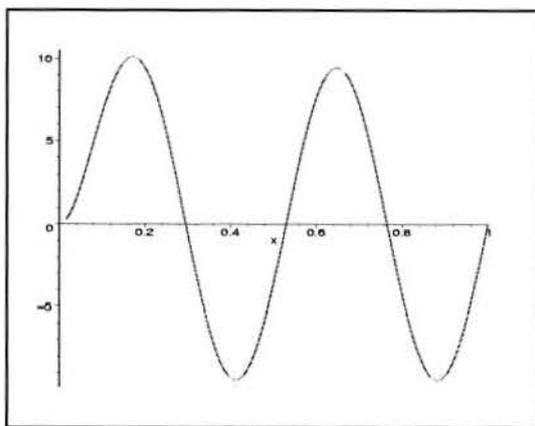


Figura 6.8 Função de Green espacial

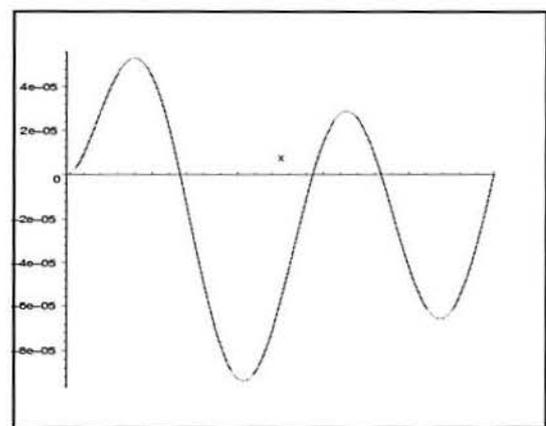
Apresenta-se na Fig. 6.9 a parte espacial da entrada,  $f(x)$  e, as correspondentes respostas permanentes,  $\phi_j(x)$  do sistema, para as duas frequências de entrada consideradas.



(a) Excitação - parte espacial



(b) Resposta Permanente - parte espacial

Freq.  $\omega f a_1 = 289.5986$ 

(c) Resposta Permanente - parte espacial

Freq.  $\omega f a_2 = 288.15$ 

Figura 6.9 Parte espacial correspondentes a excitação e as respostas permanentes para duas frequências de entrada

Nas Tabs. 6.11 e 6.12, apresentam-se as decomposições obtidas para as duas frequências consideradas.

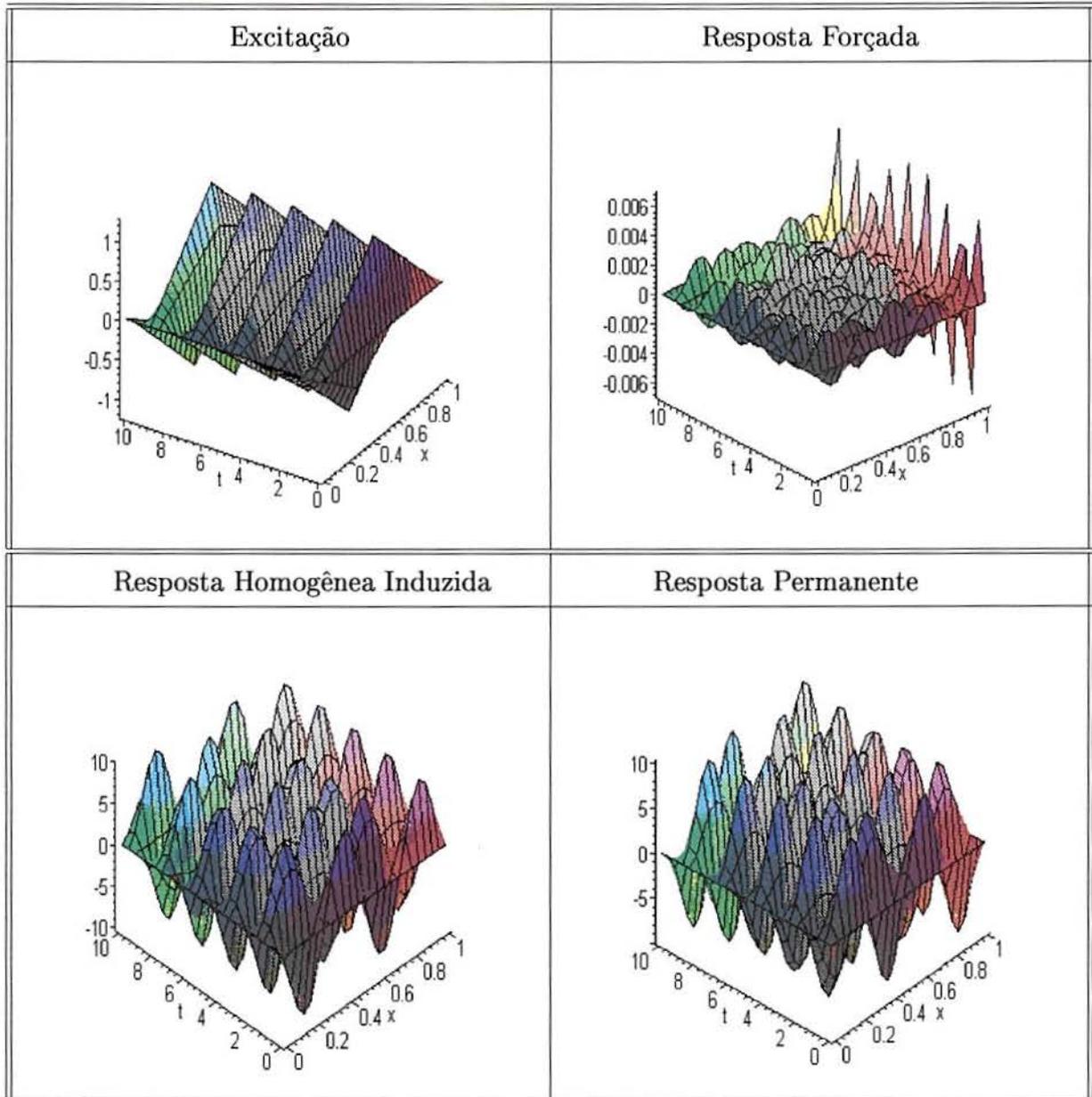


Tabela 6.11 Decomposição da resposta forçada do sistema e a correspondente entrada para a frequência  $\omega f a_1 = 289.5986$

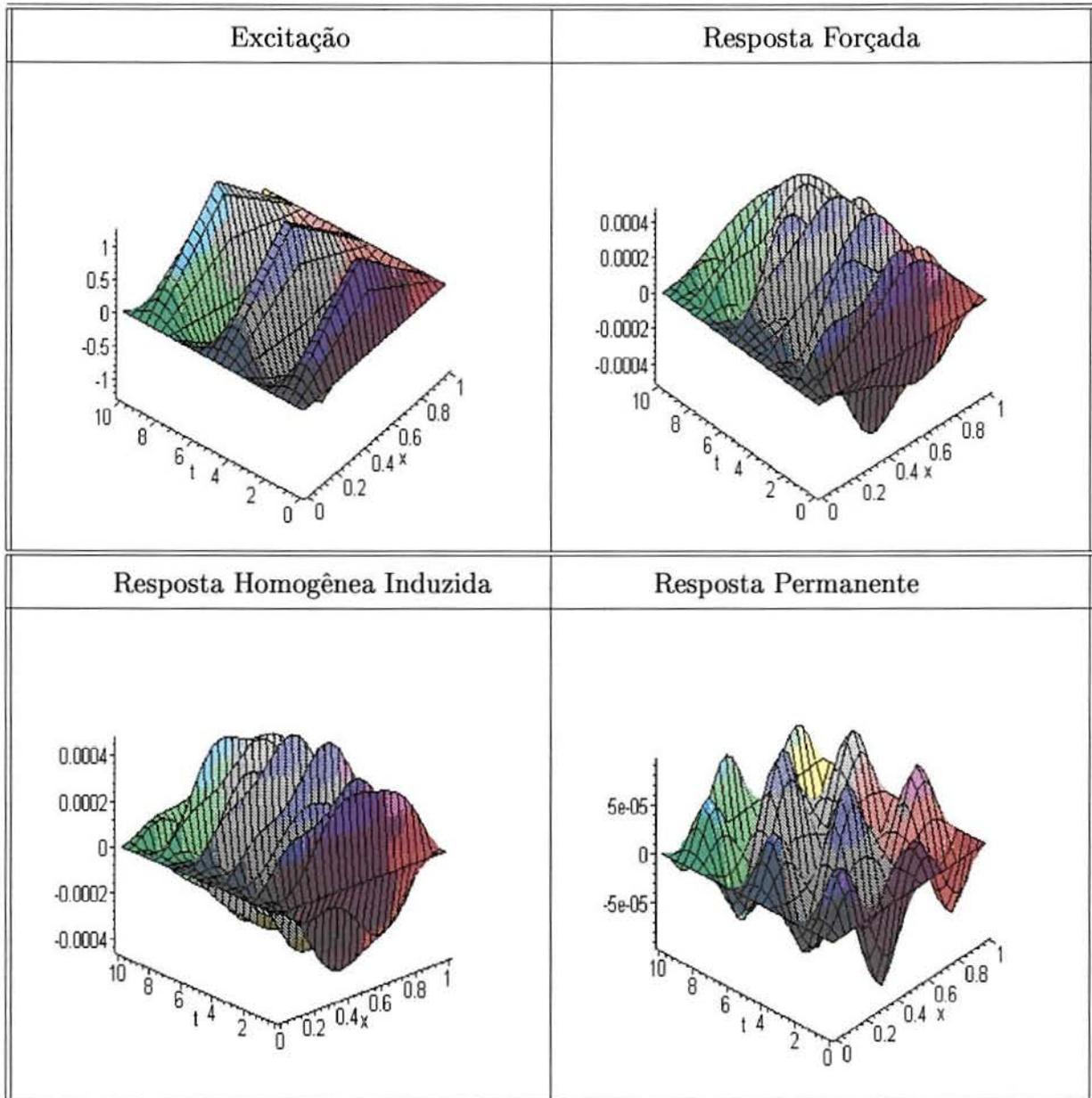


Tabela 6.12 Decomposição da resposta forçada do sistema e a correspondente entrada para a frequência  $\omega f a_2 = 288.15$

Na Tab. 6.13 são apresentados, para as duas frequências consideradas, a resposta homogênea induzida, resposta permanente e a resposta forçada, plotadas juntas para o tempo  $t = 15s$ .

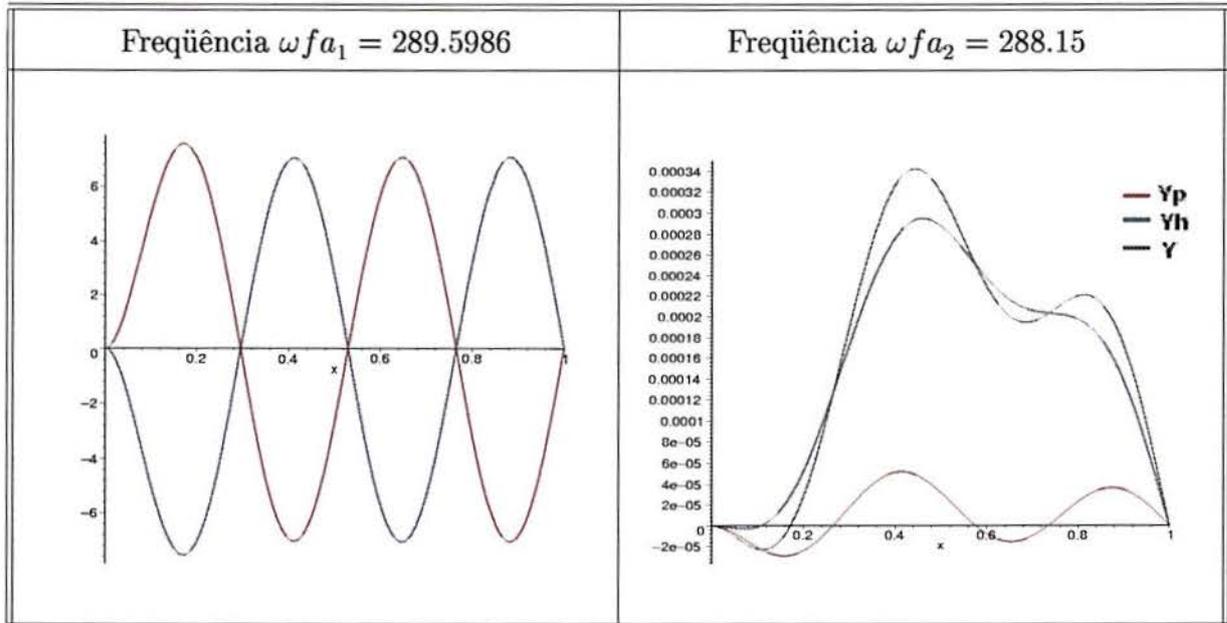


Tabela 6.13 Seção da decomposição para  $t = 15s$

## 7 CONCLUSÕES

Neste trabalho desenvolveu-se uma plataforma unificada para a abordagem de sistemas concentrados, discretos e distribuídos, em termos da resposta impulso. Uma vantagem desta metodologia é que, diferentes sistemas evolutivos e de ordem arbitrária podem ser tratados sistematicamente numa forma compacta, simples e conveniente para simulação numérica e tratamento de dados. O uso da resposta impulso permite observar a introdução de transientes na resposta forçada, devido a excitação no sistema.

A metodologia desenvolvida foi testada com diversas aplicações para a obtenção de respostas dinâmicas dos sistemas; sendo que, estes cálculos foram realizados diretamente no espaço físico do problema, sem transformá-lo num sistema de primeira ordem. Cabe ressaltar que, a redução de um sistema de  $n$ -ésima ordem para um sistema de primeira ordem, muitas vezes, acarreta perdas importantes como a de simetria ou a de positividade dos coeficientes do sistema. Mas, como os sistemas de primeira ordem possuem muitas técnicas para seu estudo, eles mereceram especial atenção .

O uso da resposta impulso foi fundamental na integração simbólica de sistemas de tempo contínuo com excitações lineares por intervalos. Os resultados da decomposição da resposta dinâmica diante cargas harmônicas e não harmônicas, foram expostos em detalhe. Para sistemas distribuídos, considerou-se o modelo de uma viga Euler-Bernoulli com força axial, com entrada oscilatória no tempo e, no espaço supôs-se entradas do tipo oscilatória, degrau e triangular. A função de Green espacial foi utilizada na obtenção da distribuição de amplitude espacial. Foi registrada a introdução das contribuições livres devido a cada mudança de intervalo da entrada.

Sistemas discretos de primeira ordem foram considerados, em particular, pelo seu uso na dinâmica estrutural através do método das matrizes de transferência . Os sistemas discretos de ordem superior foram desenvolvidos, pois na literatura não encontra-se muitos trabalhos com uma abordagem direta, sem utilizar-se a redução a espaço de estado. Muitos dos esquemas iterativos utilizados na literatura, para a integração numérica de sistemas não lineares visando o estado permanente, consideram condições iniciais nulas, isto é, calcula-se,

teoricamente, uma resposta do tipo forçada. Porém, não é apresentada uma discussão sobre como é que as não linearidades influenciam na introdução de respostas livres. A metodologia desenvolvida neste trabalho para sistemas discretos, permite observar a decomposição da resposta forçada com o teste de esquemas numéricos para equações de primeira e de segunda ordem.

A metodologia desenvolvida permite dar continuidade ao trabalho, através da abordagem de sistemas distribuídos com amortecimento, do estudo de problemas de controle ótimo em vibrações, sem o uso do espaço de estado; realizar simulações numéricas com sistemas que possuem geometria simétrica plana e espacial, e considerar-se, ainda, sistemas concentrados e discretos singulares, os quais são de interesse para problemas com restrições tais como os encontrados na área de robótica.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asher, U.M., Petzhold, L. R., 1998. "Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Difference Algebraic Equations", SIAM.

Bouazara, M., Richard, M.J., 2001. "An Optimization Method Designed to Improve 3-D Vehicle Comfort and Road Holding Capability Through the Use of Active and Semi-Active Suspensions", **European Journal Mechanics A/Solids**, Vol. 20, pp. 509-520.

Brenan, K. E., Campbell, S. L. & Petzhold, L.R., 1995. "Numerical Solution of Initial-Value Problems in Difference Algebraic Equations", SIAM, **Classics in Applied Mathematics**, Vol. 14.

Bryson, A.E.Jr., 1994. "Control of Spacecraft and Aircraft", Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Butkovskiy, A.G., 1983. "Structural Theory of Distributed Systems", Halsted Press: John Wiley & Sons, New York.

Chen, J., 1997. "Natural Frequencies and Stability of an Axially-Travelling String in Contact with a Stationary Load System ", **Journal of Vibration and Acoustics**, Vol. 119, pp. 152-157.

Cherian, T., Rakehja, S. & Bhat, R.B., 1995. "An Analytical Investigation of an Energy Flow Divider to Attenuate the Hand-transmitted Vibration", **International Journal of Industrial Ergonomics**.

Chou, K., Guthart, G., 2000. "Representation of Green's Function Integral Operators Using Wavelet Transforms ", **Journal of Vibration and Control**, Vol. 6, pp. 19-48.

Claeysen, J.R., 1990a. "On Predicting the Response of Non-Conservative Linear Vibrating Systems by Using Dynamical Matrix Solutions", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 140, No. 1, pp. 73-84.

Claeysen, J.R., Tsukazan, T., 1990b. "Dynamical Solutions of Linear Matrix Differential Equations", **Quarterly of Applied Mathematics**, Vol. 48, No. 1.

Claeysen, J.R., Schuckman, V., 1997. "On the Minimal Extension on  $C_0$ -semigroup for Second-order Damped Equations", **Mathematics Analysis and Applications**, Vol. 211, pp. 213-222.

Claeysen, J.R., Suazo, G.C. & Jung, C., 1999a. "A Direct Approach to Second-Order Matrix Non-Classical Vibrating Equations", **Applied Numerical Mathematics**, Vol. 30, pp. 65-78.

Claeysen, J.R., 1999b, "The Matrix Impulse Response in Vibrating Systems", **Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and their Applications to Engineering Sciences**, Ed. J. Balthazar, T. Gonçalves, J. Claeysen, Vol.2, pp. 122-135.

Claeysen, J.R., Chiwiacowsky, L.D. & Suazo, G.S., 2002. "The Impulse Response in the Symbolic Computing of Modes for Beams and Plates", **Applied Numerical Mathematics**, Vol. 40, pp. 119-135.

Clough, R., Penzien, J., 1993. "**Dynamics of Structures**", McGraw-Hill, , New York.

Copetti, R.D., 2002. "Sistemas concentrados e Distribuídos através da Análise Modal Adjunta", **Tese de Doutorado**, UFRGS/PROMEC, Porto Alegre.

Costa, S. N. J., 2001. "Problemas de Contorno de Ordem Superior e Cálculo da Função de Green", **Dissertação de Mestrado**, UFRGS/CPGMap, Porto Alegre.

Dias, G.A.D., 2000. "Análise de Wavelet-Aplicação em Qualidade de Energia", **Tese de Doutorado**, UFRGS/PROMEC, Porto Alegre.

Elaydi, S.N., 1996. "**An Introduction to Difference Equations**", Springer, Verlag, New York.

Eslimy-Isfahany, S.H.R., Banerjee, J.R. & Sobey, A.J, 1996. "Response of a Bending-Torsion Coupled Beam to Deterministic and Random Loads", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 195, No. 2, pp. 267-283.

Ferreira, I., Claeysen, J.C.R. & Canahualpa, G., 2001. "Convolution with Weighting, Impulse, Transient and Permanent Responses", **SIAM Meeting in Control, Signals and Linear Algebra**, Boston.

Fuller, C.R., Elliot, S.J. & Nelson, P.A., 1997. "**Active Control of Vibration**", Academic Press, New York.

Gallicchio, E., 1999. "Sistemas Vibratórios: Um Enfoque através da Solução Dinâmica e a Matriz de Transferência", **Tese de Doutorado**, UFRGS/PROMEC, Porto Alegre.

Giaretta, M.K., 2001. "Vibrações Forçadas com Força Axial num Modelo de Euler-Bernoulli para Vigas", **Dissertação de Mestrado**, UFRGS/CPGMap, Porto Alegre.

Ginsberg, J. H., 2002. "**Mechanical and Structural Vibration: Theory and Applications**", Halsted Press: John Wiley & Sons, New York.

Gladwell, G.M., England, A.H. & Wang, D., 1987. "Examples of Reconstruction of an Euler-Bernoulli Beam from Spectral Data", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 119, No. 1, pp. 81-94.

Gladwell, G.M., Willms, N.B., 1988. "The Reconstruction of a Tridiagonal System from its Frequency Response at an Interior Point", **Inverse Problems**, Vol. 4, pp. 1013-1024.

Gladwell, G.M., 2001. "On The Reconstruction of a Damped Vibrating System from Two Complex Spectra, Part 1: Theory", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 240, No. 2, pp. 203-217.

Godunov, S.K., Ryabenkii, V.S., 1987. "Difference Schemes- An Introduction to the Underlying Theory", **Studies in Mathematics and its Applications**, Elsevier Science Publishers, Vol. 19.

Golub, G.H., Van Loan, C.F., 1996. "**Matrix Computations**", John Hopkins University Press, 3Rd. Ed., Baltimore.

Howland, L.A., 1911. "A Type of Homogeneous Linear Diferential Equation", **Annals of Mathematics**, Princeton University, New York.

- Inman, D., 1989. "**Vibration, with Control, Measurement, and Stability**", Prentice Hall, New Jersey.
- Inman, D., 1994. "**Engineering Vibration**", Prentice Hall, New Jersey.
- Kailath, T., 1980. "**Linear System**", Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, New Jersey.
- Kammer, D.C., 1998. "Input Force Reconstruction Using a Time Domain Technique", **ASME Journal of Vibration and Acoustics**, Vol. 120, pp. 868-874.
- Kuipers, L., Timman, R., 1969. "**Handbook of Mathematics**", Pergamon Press.
- Lanczos, C., 1956. "**Applied Analysis**", Upper Saddle River, NJ:Prentice Hall, New Jersey.
- Leipholtz, H., 1980. "**Stability of Elastic Systems**", Sijthoff & Noordhoff.
- Lyshevski, S.E., 2001. "**Control Systems Theory**", Birkhäuser, Boston.
- Maciejowski, J.M., 1989. "**Multivariable Feedback Design**", Reading MA:Addison-Wesley, New York.
- Meirovitch, L., 1997. "**Principles and Techniques of Vibrations**", Upper Saddle River, NJ:Prentice Hall, New Jersey.
- Miller, K.S., 1963. "**Linear Differential Equations in the Real Domain**", Routledge, London.
- Moler, C., Van Loan, C., 1978. "Nineteen dubious ways of computing the exponential of a matrix", **SIAM Review**.
- Naimark, M.A., 1967. "**Linear Differential Operators**", Frederick Ungar Pub., New York.
- Newland, D.E., 1989. "**Mechanical Vibration Analysis and Computation**", Longman Scientific & Technical, London.

Ogata, K., 1998. "**Engenharia de Controle Moderno**", Prentice-Hall do Brasil, 3a. Ed., Rio de Janeiro.

Ram, Y. M., Inman, D.J., 1999. "Optimal Control for Vibrating Systems", **Mechanical Systems and Signal Processing**, Vol. 13, No. 6, pp. 879-892.

Reynolds, D.D., 1982. "Three and Four Degree of Freedom Models of Vibration Response of the Human Hand", **Vibration Effects on the Hand Arm in Industry**, pp. 117-132.

Rigter, P.D., Rose, N.J., 1968. "**Differential Equations with Applications**", McGraw-Hill, New York.

Rohrs, C.E., Schultz, D.G., 1993. "**Linear Control Systems**", Mc Graw-Hill, New York.

Simonian, S.S., 1981. "Inverse Problems in Structural Dynamics - II. Applications", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 17, pp. 367-386.

Sivan, D., Ram, Y., 1997. "Optimal Construction of a Mass-Spring System with Prescribed Modal and Spectral Data", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 201, No. 3, pp. 335-352.

Soder, R.A., 2000. "Modos Flexurais sob a Influência de uma Força Axial", **Dissertação de Mestrado**, UFRGS/CPGMap, Porto Alegre.

Stakgold, I., 1975. "**Green's Functions and Boundary Value Problems**", John Wiley, New York.

Suazo, G.R.C., 2000. "A Resposta Impulso em Problemas Vibratórios Evolutivos e Modais", **Tese de Doutorado**, UFRGS/PROMECC, Porto Alegre.

Timoshenko, S.P., Weaver. W. Jr., 1974. "**Vibration Problems in Engineering**", John Wiley, New York.

Toresan Jr., W., 2001. "Uma Metodologia para o Estudo da Dinâmica de Eixos Rotativos de Transmissão, com Aplicações em Semi-Eixos Homocinéticos e Eixos Cardan de Dupla Seção", **Tese de Doutorado**, UFRGS/PROMEC, Porto Alegre.

Volterra, E., Zachmanoglou, E.C., 1965. "**Dynamics of Vibrations**", Charles E. Merrill Books Inc., Ohio.

Wood, L.A., Suggs, C.W., 1977. "Distributed Parameter Dynamic Model of the Human Forearm", **Proceedings of the International Occupational Hand Arm Vibration Conference**, Ohio, pp. 142-145.

Woodhouse, J., 1998. "Linear Damping Models for Structural Vibration", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 215, No. 3, pp. 547-569.

Yang, B., 1994. "Vibration Control of Gyroscopic Systems Via Direct Velocity Feedback", **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 175, No. 4, pp. 525-534.

Young, D.M., Gregory, R.T., 1972. "**A Survey of Numerical Mathematics**", Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts.

Zheng, A. Kujath, F., 1995. "Extraction of Transient Signals From Nonperiodic Dynamic Responses", **Journal Dynamic Systems, Measurement and Control**, Vol. 117, No. 9, pp. 270-276.

## APÊNDICE A COEFICIENTES MATRICIAIS

Os coeficientes matriciais  $M$ ,  $C$ ,  $K$  e  $B$  do sistema apresentado na seção 3.2.2.2 têm a seguinte forma literal:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{sy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{sx} \end{bmatrix},$$

$$C = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4],$$

onde

$$c_1 = \begin{bmatrix} C_{s11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{s12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{s22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{s21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{ss} \\ -C_{s11} & -C_{s12} & -C_{s22} & -C_{s21} & -C_{ss} \\ C_{s11}l_f & C_{s12}l_f & -C_{s22}l_r & -C_{s21}l_r & C_{ss}r_x \\ -C_{s11}a & C_{s12}b & C_{s22}d & -C_{s21}c & -C_{ss}r_y \end{bmatrix},$$

$$c_2 = \begin{bmatrix} -C_{s11} \\ -C_{s12} \\ -C_{s22} \\ -C_{s21} \\ -C_{ss} \\ C_{s11} + C_{s12} + C_{s22} + C_{s21} + C_{ss} + g_{11} + g_{12} + g_{22} + g_{21} \\ (C_{s22} + C_{s21} + g_{22} + g_{21})l_r - (C_{s11} + C_{s12} + g_{11} + g_{12})l_f - C_{ss}r_x \\ (C_{s11} + g_{11})a - (C_{s12} + g_{12})b + (C_{s21} + g_{21})c - (C_{s22} + g_{22})d + C_{ss}r_y \end{bmatrix},$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} (C_{s11} + g_{11})l_f \\ (C_{s12} + g_{12})l_f \\ -(C_{s22} + g_{22})l_r \\ -(C_{s21} + g_{21})l_r \\ C_{ss}r_x \\ (C_{s22} + C_{s21} + g_{22} + g_{21})l_r - (C_{s11} + C_{s12} + g_{11} + g_{12})l_f - C_{ss}r_x \\ (C_{s11} + C_{s12} + g_{11} + g_{12})l_f^2 + (C_{s22} + C_{s21} + g_{22} + g_{21})l_r^2 + C_{ss}r_x^2 \\ -((C_{s11} + g_{11})a - (C_{s12} + g_{12})b)l_f + ((C_{s21} + g_{21})c - (C_{s22} + g_{22}d)l_r - C_{ss}r_x r_y \end{bmatrix},$$

$$C_4 = \begin{bmatrix} -(C_{s11} + g_{11})a \\ (C_{s12} + g_{12})b \\ (C_{s22} + g_{22})d \\ -(C_{s21} + g_{21})c \\ -C_{ss}r_y \\ (C_{s11} + g_{11})a - (C_{s12} + g_{12})b + (C_{s21} + g_{21})c - (C_{s22} + g_{22})d + C_{ss}r_y \\ -((C_{s11} + g_{11})a - (C_{s12} + g_{12})b)l_f - ((C_{s22} + g_{22})d - (C_{s21} + g_{21})c)l_r - C_{ss}r_x r_y \\ (C_{s11} + g_{11})a^2 + (C_{s12} + g_{12})b^2 + (C_{s22} + g_{22})d^2 + (C_{s21} + g_{21})c^2 + C_{ss}r_y^2 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & \kappa_4 \end{bmatrix},$$

$$\kappa_1 = \begin{bmatrix} K_{p11} + K_{s11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{p12} + K_{s12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{p22} + K_{s22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{p21} + K_{s21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{ss} \\ -K_{s11} & -K_{s12} & -K_{s22} & -K_{s21} & -K_{ss} \\ K_{s11}l_f & K_{s12}l_f & -K_{s22}l_r & -K_{s21}l_r & K_{ss}r_x \\ -K_{s11}a & K_{s12}b & K_{s22}d & -K_{s21}c & -K_{ss}r_y \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{K}_2 = \begin{bmatrix} -K_{s11} \\ -K_{s12} \\ -K_{s22} \\ -K_{s21} \\ -K_{ss} \\ K_{s11} + K_{s12} + K_{s22} + K_{s21} + K_{ss} \\ (K_{s22} + K_{s21})l_r - (K_{s11} + K_{s12})l_f - K_{ss}r_x \\ K_{s11}a - K_{s12}b + K_{s21}c - K_{s22}d + K_{ss}r_y \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{K}_3 = \begin{bmatrix} K_{s11}l_f \\ K_{s12}l_f \\ -K_{s22}l_r \\ -K_{s21}l_r \\ K_{ss}r_x \\ (K_{s22} + K_{s21})l_r - (K_{s11} + K_{s12})l_f - K_{ss}r_x \\ (K_{s11} + K_{s12})l_f^2 + (K_{s22} + K_{s21})l_r^2 + K_{ss}r_x^2 \\ -(K_{s11}a - K_{s12}b)l_f + (K_{s21}c - K_{s22}d)l_r - K_{ss}r_xr_y \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{K}_4 = \begin{bmatrix} -K_{s11}a \\ K_{s12}b \\ K_{s22}d \\ -K_{s21}c \\ -K_{ss}r_y \\ K_{s11}a - K_{s12}b + K_{s21}c - K_{s22}d + K_{ss}r_y \\ -(K_{s11}a - K_{s12}b)l_f - (K_{s22}d - K_{s21}c)l_r - K_{ss}r_xr_y \\ K_{s11}a^2 + K_{s12}b^2 + K_{s22}d^2 + K_{s21}c^2 + K_{ss}r_y^2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} K_{p11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{p12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{p22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{p21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$