

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

LUCAS PEIXOTO HOFF

**ASSEMBLY CALCULUS:
Um modelo dinâmico para a formação de memórias**

Porto Alegre - RS

2023

Lucas Peixoto Hoff

ASSEMBLY CALCULUS:
Um modelo dinâmico para a formação de memórias

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
no Instituto de Física, da Universidade Federal
do Rio Grande do Sul, como requisito para
obtenção do grau de Bacharel em Física.

Orientador(a): Prof. Marco Aurélio Pires Idiart

Porto Alegre - RS
2023

What if a cyber brain could possibly generate its own ghost, and create a soul all by itself? And if it did, just what would be the importance of being human then?

— Motoko Kusanagi, *Ghost in the Shell* (1995)

Assembleias são conjuntos de neurônios densamente conectados os quais acredita-se que sejam responsáveis por representar uma informação cognitiva. Elas inicialmente foram hipotetizadas por Donald Hebb e posteriormente foram encontradas por de meio experimentos. Neste trabalho, procurou-se estudar um modelo, denominado *Assembly Calculus*, que tem como base essas assembleias. Esse modelo é munido com certas operações que permitem a formação e manutenção desses conjuntos de neurônios. O trabalho teve dois objetivos: determinar os tempos de convergência das operações *projection*, *reciprocal projection* e *merge*, que é um tempo adimensional associado ao número de iterações necessárias para formar uma assembleia, e também entender e estudar a origem dos padrões de disparo periódico das assembleias. Para o tempo de convergência, foram encontrados valores entre 6 e 80 iterações necessárias para os diversos valores de plasticidade. Com relação à origem dos padrões de disparo, notou-se que são consequência de neurônios que ficam disparando de maneira periódica durante a formação de uma assembleia.

Palavras-chave: *Assembly Calculus*, assembleias, sistemas dinâmicos.

Assemblies are densely connected sets of neurons that are believed to be responsible for representing cognitive information. They were initially hypothesized by Donald Hebb and later found through experiments. In this work, we aimed to study a model called Assembly Calculus, which is based on these assemblies. This model is equipped with certain operations that allow for the formation and maintenance of these sets of neurons. The work had two objectives: to determine the convergence times of the projection, reciprocal projection, and merge operations, which is a dimensionless time associated with the number of iterations required to form an assembly, and to understand and study the origin of the periodic firing patterns of assemblies. For the convergence time, values between 6 and 80 iterations were found to be necessary for various plasticity values. Regarding the origin of firing patterns, it was observed that they are a consequence of neurons that fire periodically during the formation of an assembly.

Keywords: Assembly Calculus, assemblies, dynamical system.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	BASES BIOLÓGICAS	2
2.1	Introdução	2
2.2	Neurônios	2
2.2.1	A estrutura neuronal	2
2.2.2	A membrana neuronal e o potencial de ação	3
2.2.3	Sinapses e a transmissão sináptica	5
3	ASSEMBLY CALCULUS	7
3.1	Introdução	7
3.2	Um modelo matemático para a dinâmica neuronal	7
3.3	Operações intrínsecas	9
3.4	Operações auxiliares	10
3.5	Operações de formação	10
3.5.1	Transição de estado e o processo de formação de assembleias	10
3.5.2	<i>Projection</i>	12
3.5.3	<i>Reciprocal Projection</i>	13
3.5.4	<i>Merge</i>	14
4	RESULTADOS	14
4.1	<i>Projection</i>	15
4.2	<i>Reciprocal Projection</i>	16
4.3	<i>Merge</i>	18
4.4	Comparação entre as operações e o tempo de convergência T	19
4.5	Padrões de disparo	20
5	CONCLUSÃO	22
	Referências	24

1 INTRODUÇÃO

O cérebro é um dos órgãos mais complexo e relevante para o sistema nervoso. Responsável por gerar funções cognitivas através da sua dinâmica neuronal, como por exemplo linguagem, atenção e raciocínio, tem se tornado alvo de amplo estudo bem como base para sistemas associados a inteligência artificial (*deep learning*, por exemplo). No entanto, como de fato as funções cognitivas emergem a partir da atividade de neurônios e sinapses é um fato pouco compreendido. Neste contexto, um modelo denominado de *Assembly Calculus* [1], foi proposto tendo como peça fundamental um conjunto de neurônios excitatórios chamado de assembleia. Acredita-se que tais assembleias são responsáveis por representar um conceito, palavra ou qualquer outra informação cognitiva.

Neste trabalho procura-se estudar o modelo de *Assembly Calculus* dando um tratamento mais formal voltado para sistemas dinâmicos. O projeto começa inicialmente dando uma breve introdução sobre os neurônios, comentando sobre sua estrutura geral e passando posteriormente à produção e transmissão dos impulsos nervosos, chamados de potencial de ação. Posteriormente a isso, descreve-se o modelo de *Assembly Calculus*, definindo-se o que são áreas, neurônios e sinapses nesse sistema. Também nesse mesmo tópico, procura-se descrever as operações que estão associadas ao modelo, só que do ponto de vista de sistemas dinâmicos.

Os principais objetivos desse projeto são: estudar a convergência das operações, tendo como principal foco determinar o número de iterações necessárias para formar um assembleia. Já o último objetivo está associado à origem dos padrões de disparos que algumas assembleias formadas com baixa plasticidade apresentam.

2 BASES BIOLÓGICAS

2.1 Introdução

Os neurônios (juntamente com as células gliais) são os componentes básicos necessários para formar um sistema nervoso. São eles responsáveis por captar estímulos externos, processar as informações associadas a eles e gerar uma resposta por meio de sinais elétricos e químicos. Estima-se que apenas no encéfalo humano existam aproximadamente 86 bilhões de neurônios, porém o número pode ser maior [2]. Nesta seção, uma breve descrição dos neurônios será dada, desde sua estrutura básica até a formação e transmissão dos impulsos nervosos, chamados de potenciais de ação.

2.2 Neurônios

O neurônio é a célula responsável pelo processamento de informação no sistema nervoso, tanto central quanto periférico. Graças às proteínas associadas à sua membrana, ele consegue conduzir e gerar novos impulsos nervosos, cuja finalidade é transmitir uma informação para outros neurônios e regiões do sistema nervoso.

2.2.1 A estrutura neuronal

Um neurônio típico tem sua estrutura dividida em duas partes: **soma** (ou também corpo celular) e **neuritos**. O **soma** é a parte central de um neurônio. Sua estrutura interna é composta por diversas organelas. As principais são: o núcleo, o complexo de Golgi, o retículo endoplasmático rugoso, o retículo endoplasmático liso e as mitocôndrias. Todas as proteínas necessárias para o seu funcionamento são fabricadas pelos ribossomos, presentes tanto no citosol quanto no retículo endoplasmático rugoso. São essas proteínas que conferem aos neurônios a sua especialização em gerar e conduzir informações através de sua membrana. Com relação aos **neuritos**, eles são ramificações que têm começo no soma e podem se estender por pequenas até grandes distâncias. Eles são divididos em dois grupos: **axônios** e **dendritos**. Os **axônios** são longos filamentos que podem se prolongar para regiões próximas do corpo celular que o gera ou para outros locais do sistema nervoso. Em geral, cada neurônio pode dar origem a apenas um axônio, sendo que em alguns casos o axônio pode apresentar ramificações ortogonais ao filamento principal, chamadas de **colaterais**. Ao final de cada axônio existem certas ramificações, chamadas de **botões terminais**, que são responsáveis por inervar os diferentes neurônios e músculos existentes. Os **dendritos** são ramificações com origem no corpo celular do neurônio, porém eles atuam como antenas que são responsáveis por receber informações de outros neurônios. Diferentemente dos axônios, suas ramificações não se estendem para muito longe do corpo celular que os origina e também alguns apresentam certas rugosidades em sua superfície, chamadas de **espinhos dendríticos**.

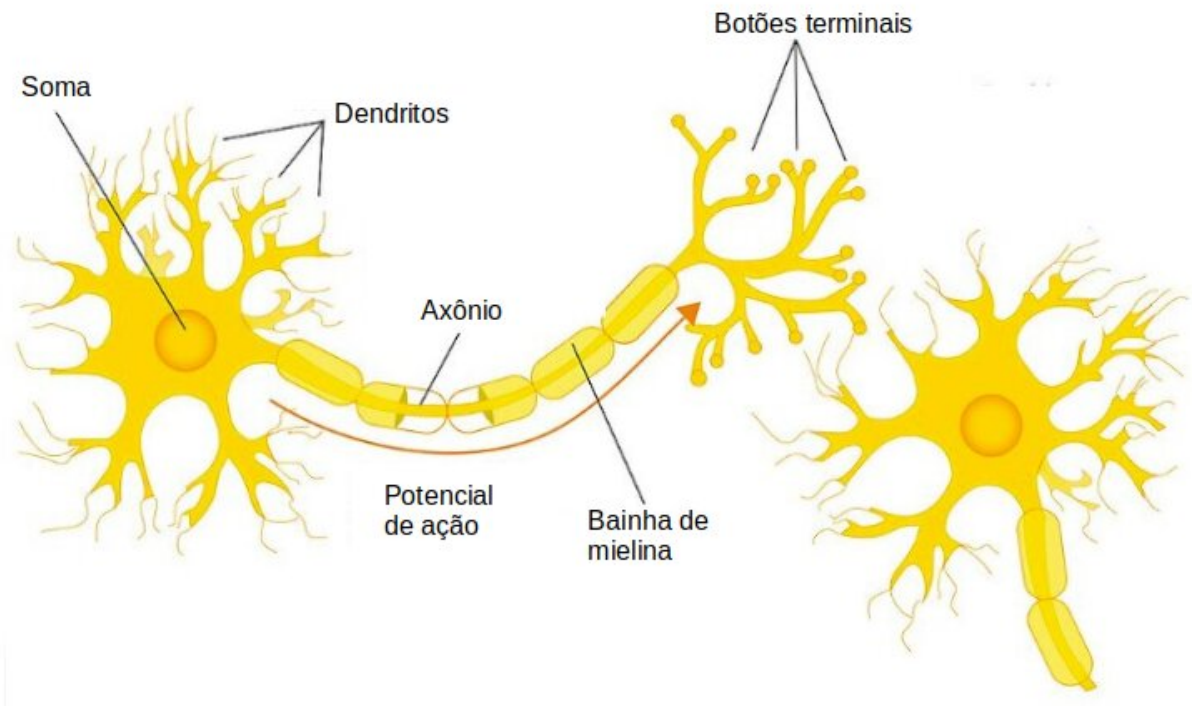


Figura 1: Estrutura típica de um neurônio. (Imagem adaptada de [3])

2.2.2 A membrana neuronal e o potencial de ação

Assim como todas as células presentes no corpo, os neurônios possuem também uma membrana, chamada de **membrana neuronal**. A membrana neuronal é formada por duas camadas de fosfolípídeos, chamada de **bicamada de fosfolípídeo**, que é responsável por separar o meio intracelular do meio extracelular. Ao longo de toda sua extensão, ela possui algumas proteínas transmembranares acopladas que são os **canais iônicos** e as **bombas iônicas**. Os **canais iônicos** são proteínas formadas a partir de uma longa cadeia de polipeptídeos e são responsáveis por permitir a passagem de íons através da membrana neuronal por meio de forças de difusão (quando existir um gradiente de concentração entre os meios) e forças elétricas (quando existir diferença de cargas entre os meios). Uma característica fundamental dos canais iônicos é sua propriedade de **seletividade iônica**, que permite que tais canais sejam permeáveis apenas por alguns íons. Existem basicamente três tipos de canais iônicos: canais iônicos de repouso, canais iônicos dependentes de voltagem e canais iônicos ativados por transmissores. Com exceção dos canais iônicos de repouso (que estão sempre abertos), os outros dois se abrem apenas sob certas condições. Com relação as **bombas iônicas**, elas são proteínas responsáveis por bombear certos íons para dentro ou fora do neurônio por meio de transporte ativo (utiliza a energia da quebra de ATP). As bombas iônicas mais relevantes são as bombas iônicas de cálcio e as bombas iônicas de sódio e potássio.

Como mencionado anteriormente, o neurônio produz e conduz impulsos nervosos por meio de sua membrana. Esses impulsos nervosos são chamados de **potenciais de ação**. Em

situações em que o neurônio não está produzindo um potencial de ação, dizemos que a membrana neuronal está em **repouso**. No repouso, o meio intracelular possui uma maior concentração de K^+ com relação ao meio extracelular, enquanto que no meio extracelular há uma maior concentração de Na^+ , Ca^{2+} e Cl^- com relação ao meio intracelular. Sob essas condições, a membrana neuronal adquire uma diferença de potencial de elétrico de -65 mV , o qual é chamada de **potencial de repouso**. O valor desse potencial é mantido por meio da ação das bombas iônicas, que regulam os gradientes de concentração existentes. No caso do potencial de ação, ele surge a partir do momento em que o potencial de membrana atinge um valor denominado de **limiar**, que é aproximadamente -55 mV . Quando a membrana neuronal atinge esse limiar, canais de sódio dependentes de voltagem se abrem, de modo a causar uma massiva despolarização da membrana devido ao influxo de Na^+ .

O potencial de ação, quando gerado, possui quatro fases características: **fase ascendente**, **pico de ultrapassagem**, **fase descendente** e **hiperpolarização pós-potencial**. Cada uma é descrita a seguir:

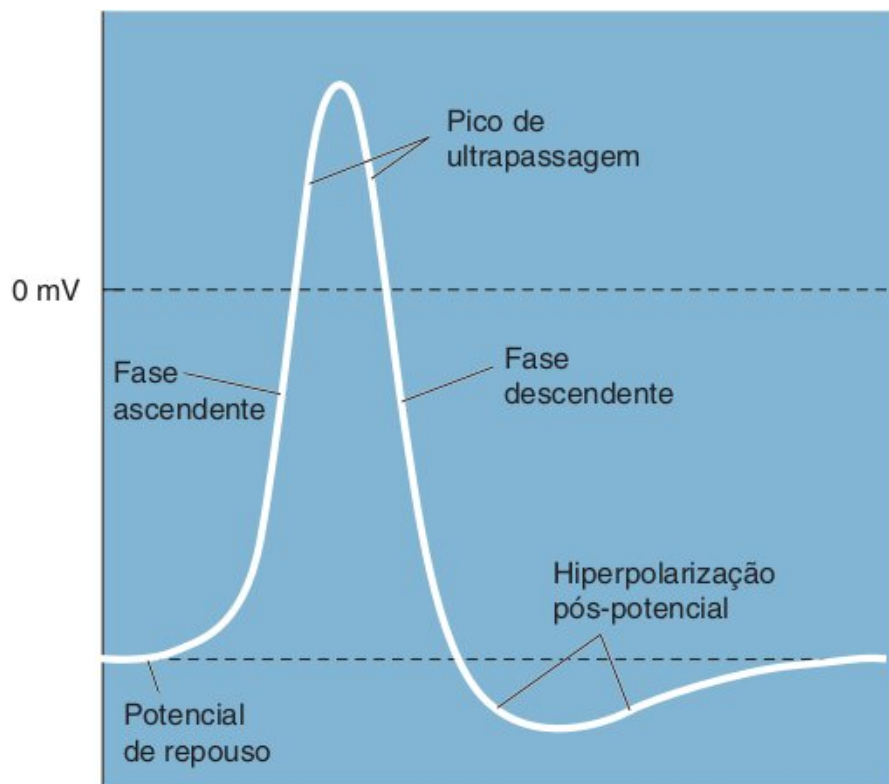


Figura 2: Fases de um potencial de ação. (Fonte: [4])

- **Fase ascendente:** Caracterizada pela abertura dos canais de sódio dependentes de voltagem. Devido a isso, haverá um influxo de Na^+ a favor do gradiente de concentração (Na^+ é menos concentrado no meio intracelular) causando a despolarização da membrana neuronal;
- **Pico de ultrapassagem:** Corresponde ao momento em que o potencial de membrana é

positivo;

- **Fase descendente:** Caracterizada pela inativação dos canais de sódio dependentes de voltagem e a abertura dos canais de potássio dependentes de voltagem. Devido a isso, ocorre um efluxo de K^+ causando a polarização da membrana neuronal;
- **Hiperpolarização pós-potencial:** Nessa última parte, o neurônio sofre uma hiperpolarização (o potencial de membrana atinge um valor menor que o potencial de repouso). Nessa fase também alguns canais de sódio dependentes de voltagem voltam a ficar ativos e podem ser abertos se o potencial de membrana atingir o valor do limiar. Aos poucos o potencial da membrana volta para o potencial de repouso à medida que os canais de potássio dependentes de voltagem se fecham.

O período em que os canais de sódio dependentes de voltagem ficam inativos é chamado de **período refratário absoluto**. Existe também o **período refratário relativo**, que é o período que um maior estímulo é necessário para abrir os canais de sódio dependentes de voltagem. Esse período ocorre durante a última fase do potencial de ação (fase de hiperpolarização pós-potencial).

2.2.3 Sinapses e a transmissão sináptica

A região onde ocorre a transmissão de informação de um neurônio para outro é chamada de **sinapse**. As sinapses são divididas em dois lados: um lado **pré-sináptico**, que é o lado que transmite a informação, e um lado **pós-sináptico**, que recebe a informação. Em geral, o lado pré-sináptico é representado por uma terminação axonal enquanto que o lado pós-sináptico é representado por um dendrito (existem outros tipos possíveis de conexão, mas aqui iremos usar esse caso como exemplo). Existem dois tipos de sinapse: a **sinapse elétrica** e a **sinapse química**. As sinapses elétricas são formadas por meio estruturas chamadas de **junções comunicantes**. Essas junções formam túneis entre o neurônio pré-sináptico e o neurônio pós-sináptico permitindo a passagem de correntes iônicas do lado pré-sináptico para o lado pós-sináptico. O potencial gerado pela corrente iônica na membrana pós-sináptica é chamado de **potencial pós-sináptico (PPS)** e dependendo da intensidade pode desencadear um potencial de ação. No caso da sinapse química, ela transmite a informação de um neurônio para o outro por meio de moléculas chamadas de **neurotransmissores**. Esses neurotransmissores são armazenados em certas estruturas chamadas de **vesículas sinápticas** e posteriormente liberados na **fenda sináptica**. Essa liberação dos neurotransmissores ocorre após a abertura de canais iônicos de cálcio dependentes de voltagem na terminação axonal devido a um potencial de ação que chega do axônio. Uma vez que os neurotransmissores foram liberados na fenda sináptica, eles se ligam em certas proteínas na membrana pós-sináptica chamadas de **receptores**. A ação do receptor ligado ao neurotransmissor pode causar um **potencial excitatório pós-sináptico (PEPS)**, o qual aumenta a chance do neurônio pós-sináptico disparar (gerar um potencial de ação) ou pode causar

um **potencial inibitório pós-sináptico (PIPS)**, o qual diminui a chance do neurônio disparar. Neurônios que causam um PEPS em neurônios pós sinápticos são chamados comumente de **neurônios excitatórios**, enquanto aqueles que geram um PIPS são chamados de **neurônios inibitórios**.

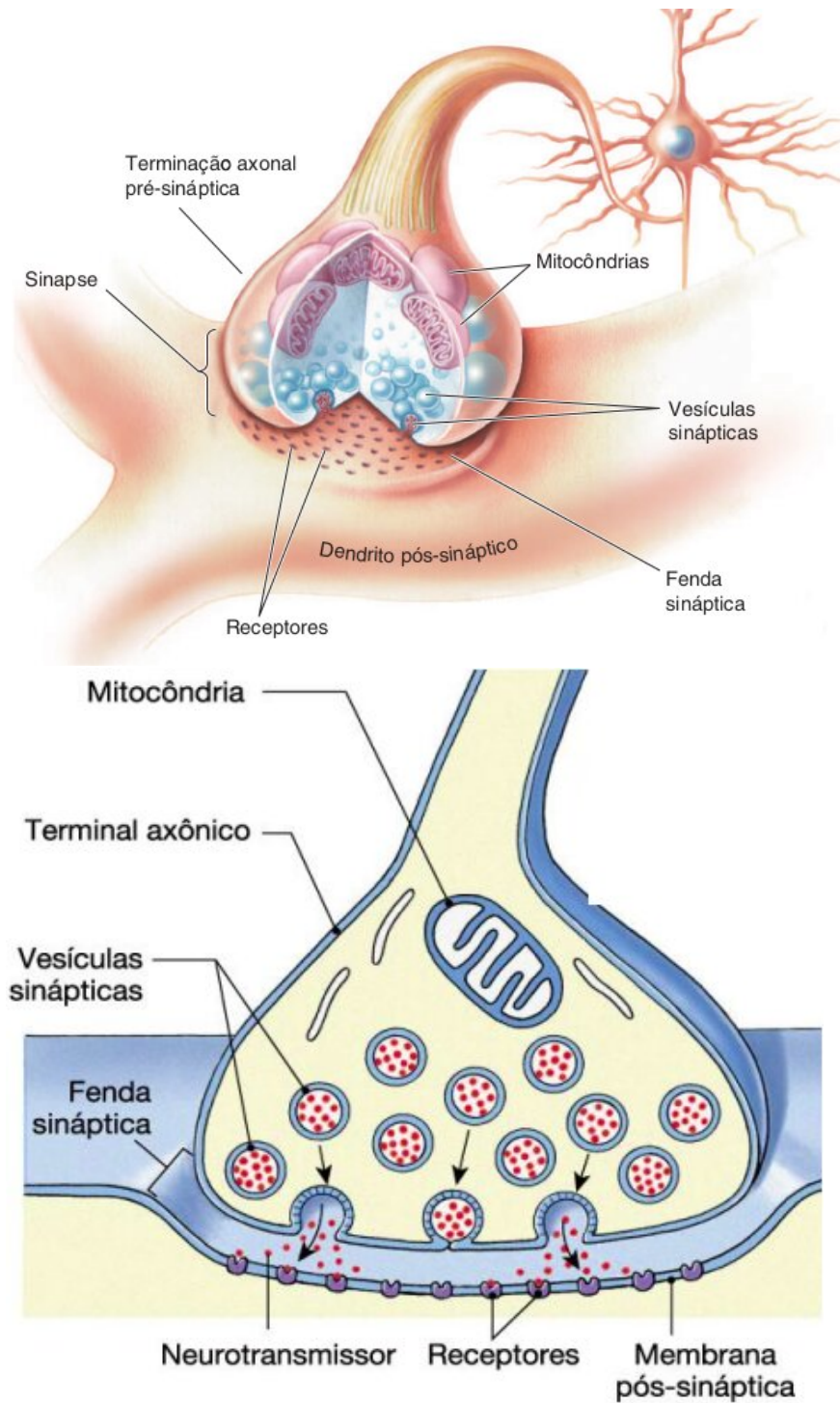


Figura 3: Estrutura de uma sinapse química. A primeira imagem mostra a estrutura como um todo (Fonte: [4]), enquanto que a segunda mostra a transmissão por receptores. (Fonte: [5])

3 ASSEMBLY CALCULUS

3.1 Introdução

A memória é a capacidade de adquirir, armazenar e recuperar informações obtidas por meio de estímulos externos. Por exemplo, podemos ver uma imagem e posteriormente reconhecer ela ao vê-la novamente. Podemos também aprender palavras novas e por meio da linguagem utilizá-las. Todo esse tipo de informação é armazenada no cérebro. Recentemente, um modelo denominado de *Assembly Calculus*[1] foi proposto, tendo como peça fundamental assembleias. Assembleias são conjuntos de neurônios densamente conectados os quais acredita-se que sejam responsáveis por representar informações cognitivas. Nesta seção, será discutido o modelo de AC bem como as suas operações mais importantes.

3.2 Um modelo matemático para a dinâmica neuronal

O modelo de *Assembly Calculus* é descrito da seguinte forma:

- Considere um número finito de conjuntos, $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$;
- Cada \mathcal{A} possui n neurônios excitatórios;
- Dado um conjunto qualquer \mathcal{A} , ele pode ser classificado como uma **área sensorial** (\mathcal{S}) ou como uma **área de memória** (\mathcal{M}).
- Existe uma probabilidade p de $i \in \mathcal{S}$ formar uma sinapse com $j \in \mathcal{M}$;
- Existe uma probabilidade p de $i \in \mathcal{M}_{\alpha_1}$ formar uma sinapse com $j \in \mathcal{M}_{\alpha_2}$;
- Toda sinapse entre duas áreas é chamada de **fibra**.

Tanto as fibras quanto as áreas podem estar ou não inibidas em um dado tempo t :

- $F(t) = 0$ ou $F(t) = 1$ (**estado de fibra**);
- $I(t) = 0$ ou $I(t) = 1$ (**estado de inibição**).

Os disparos dos neurônios ocorrem em tempos discretos e dependem da soma das entradas sinápticas (*inputs*) que eles recebem em um dado tempo (note que esse modo de disparo por *inputs* só é válido para neurônios em uma área \mathcal{M} , já que neurônios de uma área sensorial não recebem *inputs* de outros neurônios). A soma de todos esses *inputs* é denotada por SI e leva em consideração: o peso sináptico (ω) das sinapses formadas, o número de neurônios pré-sinápticos (s) que formam uma sinapse com o neurônio em questão e os disparos dos neurônios pré-sinápticos (f) em um tempo t . Matematicamente, se j é um neurônio pós-sináptico e ele tem

sinapses formadas com s neurônios pré-sinápticos, então a soma de *inputs* de j (SI_j), em um tempo $t + 1$ será descrita por

$$SI_j(t + 1) = \sum_{i=1}^s f_i(t)\omega_{ji}(t) \quad (1)$$

onde os índices i e j representam os neurônios pré-sinápticos e pós-sináptico, respectivamente. A função $f_i(t)$ é chamada de **estado de disparo**. Ela representa matematicamente se um neurônio i disparou ou não em um tempo t , ou seja, $f_i(t) = 1$ indica que o neurônio i disparou no tempo t e $f_i(t) = 0$ indica que o neurônio não disparou no tempo t . O que determina se o estado de disparo é 1 ou 0 é um processo chamado de ***k-winner-take-all***, o qual tem como objetivo simular a inibição causada por neurônios inibitórios. Esse tipo de processo permite que apenas k neurônios excitatórios disparem em cada área \mathcal{M} considerada no modelo. Os k neurônios que irão disparar serão aqueles que, em um tempo $t + 1$, possuírem o maior valor de $SI(t + 1)$ dentre todos os n neurônios de \mathcal{M} . Tendo em vista isso, o estado de disparo (f) pode ser escrito como

$$f_j(t + 1) = \begin{cases} 1, & \text{se } j \in y_{t+1} \\ 0, & \text{se } j \notin y_{t+1} \end{cases}$$

onde $y_{t+1} = \{j \in \mathcal{M} \mid "SI_j(t + 1)$ está entre os k maiores *inputs* de $\mathcal{M}"\}$.

O modelo leva em conta também o que é chamado de **plasticidade Hebbiana** (ou **aprendizado Hebbiano**): se um neurônio i disparar em um tempo t ($f_i(t) = 1$) e, em $t + 1$, um outro neurônio j disparar ($f_j(t + 1) = 1$), e se ambos formam uma sinapse, então o peso sináptico da sinapse formada entre eles é multiplicado por um fator $1 + \beta$ no tempo $t + 1$, ou seja

$$\omega_{ji}(t + 1) = \omega_{ji}(t)(1 + \beta f_j(t + 1)f_i(t)) \quad (2)$$

onde j representa o neurônio pós-sináptico, i o neurônio pré-sináptico e β a **taxa de aprendizado**.

As equações (1) e (2), juntamente com as características apresentadas anteriormente, definem um sistema dinâmico discreto. A transição de estado desse sistema é regida pelas equações mencionadas e cada estado fica bem definido se

- Os pesos sinápticos ($\omega(t)$);
- O estado de disparo ($f(t)$) de todos os neurônios;
- O estado de inibição ($I(t)$) de todas as áreas existentes;
- O estado de todas as fibras ($F(t)$).

estiverem bem definidos em um dado tempo t . Além disso, o estado inicial do sistema ($t = 0$) é caracterizado por:

- Um conjunto de neurônios com $f(0) = 1$;
- Os pesos sinápticos $\omega(0) = 1$, para todas as sinapses existentes;
- Um conjunto de áreas e fibras com $I(0) = 0$ e $F(0) = 0$, respectivamente.

3.3 Operações intrínsecas

As **operações intrínsecas** são funções responsáveis por alterar os estados do elementos do modelo. Existem quatro operações desse tipo que são:

- FIRE (x): responsável por alterar os estados de disparo de um conjunto de neurônios excitatórios para 1 ($f(t) = 1$). Em $t + 1$ os estados de disparos voltam a ser zero ($f(t + 1) = 0$) caso essa função não seja aplicada novamente no conjunto;
- INHIBITION (A): altera o estado de inibição de uma área A para 1 ($I(t) = 1$);
- DISINHIBITION (A): altera o estado de inibição de uma área A para 0 ($I(t) = 0$);
- FIBER (A, B) [6]: muda o estado de fibra de um conjunto de fibras com neuronios pré-sinápticos em A e pós-sinápticos em B . A função atua tanto com inibição como com desinibição. Altera para 1 se o conjunto está desinibido ($F(t) = 1$) e 0 caso contrário ($F(t) = 0$.)

Por *default*, todas as áreas e fibras do modelo começam inibidas e todos os neurônios excitatórios começam em repouso ($f = 0$). Tendo em vista isso, o estado inicial do sistema deve ser obrigatoriamente obtido por meio das operações intrínsecas. Por exemplo, suponhamos a existência de duas áreas A e B com $x \subset A$, onde x é um subconjunto de k neurônios. Um possível estado inicial que poder ser definido seria

```
DISINHIBITION (A)
DISINHIBITION (B)
FIBER (A, B)
FIRE (x)
```

onde após utilizar essas operações teríamos (os pesos sinápticos estão implícitos):

- $I_A(0) = 0$;
- $I_B(0) = 0$;
- $F_{(A,B)}(0) = 0$;
- $f_i(0) = 1 \quad \forall \quad i \leq k$.

3.4 Operações auxiliares

O modelo também comporta algumas outras operações que ajudam no funcionamento do sistema (do ponto de vista computacional). Essas operações, chamadas de **operações auxiliares**, têm como objetivo retornar certas propriedades dos conjuntos de neurônios existentes nas áreas. Elas são:

- $\text{PARENT}(x)$: retorna o estímulo ou a assembleia que gerou a assembleia x ;
- $\text{AREA}(x)$: retorna a área em que o estímulo ou a assembleia x pertence.

3.5 Operações de formação

Diferentemente das operações intrínsecas, que alteram apenas o estado dos elementos do modelo (estados de disparo, inibição e fibra), as **operações de formação** são responsáveis por levar o sistema dinâmico para um estado em que uma assembleia está formada. Como o estado do sistema é caracterizado pelos estados dos elementos (juntamente com os pesos sinápticos), então tais operações podem ser escritas como uma combinação de operações intrínsecas. Toda teoria analítica de transição de estados e convergência podem ser encontradas em [7] e [8]. Aqui, será utilizada uma abordagem similar a apresentada em [1], porém um pouco mais formal e detalhada.

3.5.1 Transição de estado e o processo de formação de assembleias

Suponhamos duas áreas denotadas por \mathcal{S} e \mathcal{M} e seja $x \subset \mathcal{S}$ (x é um estímulo). Seja o estado inicial ($t = 0$) do sistema descrito por

$\text{DISINHIBITION}(\mathcal{S})$
 $\text{DISINHIBITION}(\mathcal{M})$
 $\text{FIBER}(\mathcal{S}, \mathcal{M})$

$\text{FIRE}(x)$

ou seja $I_{\mathcal{S}}(0) = 0$, $I_{\mathcal{M}}(0) = 0$, $F_{(\mathcal{S}, \mathcal{M})}(0) = 0$ e $f(0) = 1$ para todos os neurônios de x (todos disparam em $t = 0$). Suponha agora que em $t = 1$ todas as condições anteriores sejam mantidas, com exceção do estado de disparo dos neurônios de x ($f(1) = 0$ para todo neurônio em x). O que ocorrerá com o sistema em $t = 1$, sabendo que x disparou em $t = 0$? Nessa situação, sabendo que x disparou, teremos que os n neurônios excitatórios em \mathcal{M} receberão os *inputs* de x , cuja soma total para cada neurônio é dada pela equação (1). Agora, lembrando que a inibição é realizada pelo processo *k-winners-take-all*, apenas k neurônios excitatórios de \mathcal{M} irão disparar em $t = 1$ ($f(1) = 1$), de modo que esse conjunto que disparou é representado pelo subconjunto

y_1 (conforme a definição do estado de disparo). Por fim, os pesos sinápticos serão atualizados em $t = 1$ conforme a plasticidade hebbiana (equação 2).

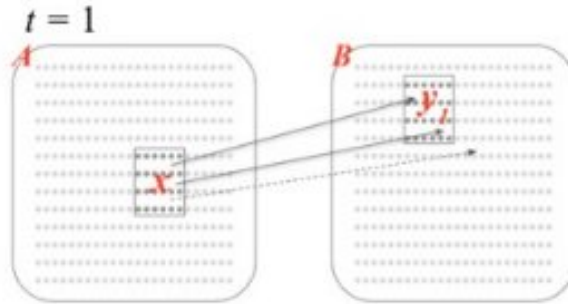


Figura 4: Representação das áreas envolvidas no processo de transição de $t = 0$ para $t = 1$. Considere aqui $A = \mathcal{S}$ e $B = \mathcal{M}$. (Fonte: [1])

Suponhamos agora que em $t = 1$ os neurônios de x disparem novamente. O que acontecerá com o sistema em $t = 2$? Nesse caso o procedimento será descrito de forma análoga ao caso em $t = 1$, porém os neurônios na área \mathcal{M} receberão *inputs* dos neurônios de x e também dos k neurônios que dispararam em $t = 1$ em \mathcal{M} ($y_1 \subset \mathcal{M}$). Como consequência teremos um novo conjunto y_2 , o qual será formado por um conjunto de neurônios que disparou em $t = 1$ mais um conjunto de neurônios que não disparou em $t = 1$, o qual iremos denotar por N_2 .

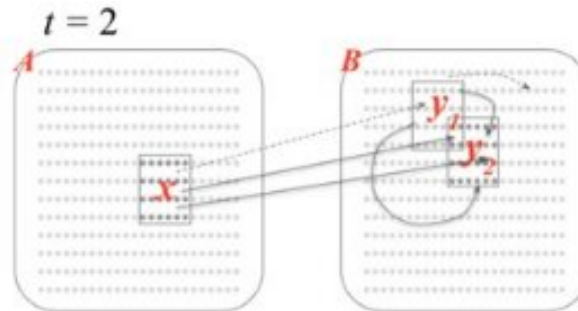


Figura 5: Representação das áreas envolvidas no processo de transição de $t = 1$ para $t = 2$. Considere aqui $A = \mathcal{S}$ e $B = \mathcal{M}$. (Fonte: [1])

Se continuarmos o processo de sucessivos disparos de $x \subset \mathcal{S}$, uma sequência de subconjuntos $\{y_1, y_2, y_3, \dots\}$ será criado ao longo do processo. Esses subconjuntos serão compostos por neurônios que já dispararam em \mathcal{M} pelo menos uma vez e dispararam novamente em $t + 1$ e também por neurônios que dispararam a primeira vez em $t + 1$ (N_{t+1}). Os neurônios que já dispararam pelo menos uma vez ao longo do processo descrito até agora são chamados de **velhos neurônios**, enquanto os que dispararam pela primeira vez são chamados de **novos neurônios**.

Tendo em vista a discussão acima, iremos dizer que uma **assembleia** a foi formada em \mathcal{M} se, para um dado tempo T , $|N_t| = 0$ para todo $t \geq T$, onde a notação $|A|$ representa a cardinalidade de A . Ou seja, não há mais novos neurônios disparando. O tempo T é chamado de **tempo de convergência**. Esse tempo de convergência pode ser visto como o número de

disparos que um ou mais conjuntos de k neurônios devem dar para formar uma assembleia. Ele é adimensional e será útil para definir um limite de disparos para as operações de formação.

Uma outra maneira de verificar a formação de uma assembleia, é considerando um conjunto denotado por S_t que é definido da seguinte forma:

$$S_t = N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup \dots \cup N_t$$

Se considerarmos a cardinalidade de S_t , teremos

$$|S_t| = |N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup \dots \cup N_t|$$

$$|S_t| = \left| \bigcup_{i=1}^t N_i \right|$$

mas como $N_i \cap N_j = \emptyset$ para $i \neq j$, $|S_t|$ pode ser escrito como

$$|S_t| = \sum_{i=1}^t |N_i|$$

Dessa forma, podemos dizer que uma assembleia foi formada se, para um dado T , $|S_t|$ é constante para todo $t \geq T$.

Todas as definições dadas até agora levaram em conta apenas a transição de estado uma única vez. Logo, o tempo de convergência T só é válido para essa única vez. Isso ocorre pelo fato do sistema possuir conexões probabilísticas. Para contornar esse problema, podemos tomar o valor esperado de $|S_t|$:

$$E[|S_t|] = \sum_{i=1}^t E[|N_i|]$$

Portanto, podemos redefinir o tempo de convergência como sendo um tempo T tal que $E[|N_t|] = 0$ para todo $t \geq T$.

Mesmo que a definição acima resolva o problema associado à aleatoriedade do modelo, existe o problema de que N_t não possui uma forma fechada. Logo, para definir T , serão utilizadas simulações, conforme será visto nos resultados.

3.5.2 Projection

A operação de formação PROJECTION é a mais relevante do modelo. Ela é responsável por criar uma assembleia inteiramente nova proveniente de um estímulo e também por projetar uma assembleia, já existente em uma área, em outra. Se \mathcal{A} é uma área (podendo ser \mathcal{S} ou \mathcal{M}), \mathcal{M} uma área de memória e x um estímulo/assembleia em \mathcal{A} , a operação PROJECTION(x, \mathcal{M}, y), irá gerar uma nova assembleia em \mathcal{M} , denominada por y , que irá disparar toda vez que x também disparar. Em termos das operações intrínsecas, a operação PROJECTION(x, \mathcal{M}, y) pode ser

efetuada da seguinte forma:

```
DISINHIBITION (A)
DISINHIBITION (M)
FIBER (A, M)
```

```
for all T
    FIRE (x)
```

Aqui, T é o tempo de convergência definido anteriormente.

3.5.3 *Reciprocal Projection*

A operação `RECIPROCAL_PROJECTION` consiste no processo de formação de uma assembleia, em uma área \mathcal{M}_2 , por meio de uma outra assembleia existente em uma área \mathcal{M}_1 . O processo de formação é similar ao da operação `PROJECTION`, no entanto, aqui é considerada a existência de conexões sinápticas entre as duas áreas envolvidas no processo (ou seja, existem fibras de \mathcal{M}_1 para \mathcal{M}_2 e de \mathcal{M}_2 para \mathcal{M}_1). Além disso, note que pela descrição dela, não é possível realizar uma `RECIPROCAL_PROJECTION` utilizando um estímulo de uma área sensorial \mathcal{S} , uma vez que tais áreas não admitem projeções de outras áreas (não existem fibras de \mathcal{M} para \mathcal{S}). Para descrever a `RECIPROCAL_PROJECTION` consideremos uma área de memória \mathcal{M}_1 contendo uma assembleia a e seja \mathcal{A} uma área (podendo ser \mathcal{S} ou \mathcal{M}) contendo um conjunto de neurônios excitatórios, denotado por g (podendo ser um estímulo ou uma assembleia), que gerou a assembleia a , ou seja, $\text{PARENT}(a) = g$. Seja também uma segunda área, denotado por \mathcal{M}_2 , onde será formada uma assembleia, que será denotada por b . Supondo que há fibras entre \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 (e de \mathcal{M}_2 para \mathcal{M}_1), a operação `RECIPROCAL_PROJECTION` (a , \mathcal{M}_2 , b) consiste em realizar sucessivos disparos do conjunto gerador de a , obtido por meio de $\text{PARENT}(a) = g$. Nesse procedimento, uma parte da assembleia a começa a disparar que, como consequência, fará disparar k neurônios na área \mathcal{M}_2 . Ao longo do processo, \mathcal{M}_1 recebe *inputs* da área \mathcal{A} e da área \mathcal{M}_2 (devido a existência das fibras de \mathcal{M}_2 para \mathcal{M}_1) enquanto \mathcal{M}_2 receberá *inputs* apenas de \mathcal{M}_1 . Ao longo da operação, a será levemente modificada, enquanto que em \mathcal{M}_2 , uma nova assembleia será formada, porém um pouco mais lentamente com relação a operação `PROJECTION`. Em termos das operações intrínsecas teremos:

```
DISINHIBITION (A)
DISINHIBITION (M_1)
DISINHIBITION (M_2)
FIBER (A, M_1)
FIBER (M_1, M_2)
FIBER (M_2, M_1)
```

```

for all T
    FIRE(PARENT(a_1))

```

3.5.4 Merge

A operação MERGE é a mais elaborada do modelo e envolve ao todo cinco áreas distintas e diversas fibras interconectando a maioria delas. Essa operação tem como objetivo formar também uma assembleia nova, no entanto envolve a utilização de duas assembleias existentes, em áreas diferentes, para formar uma terceira assembleia em uma área diferente das demais. Sejam \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 áreas (podendo ser \mathcal{S} ou \mathcal{M}) e \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 áreas de memória contendo assembleias a_1 e a_2 , respectivamente, formadas por dois conjuntos de neurônios $g_1 \subset \mathcal{A}_1$ e $g_2 \subset \mathcal{A}_2$ (onde eles podem ser estímulos ou assembleias), respectivamente. A operação MERGE, consiste basicamente em disparar simultaneamente os conjuntos g_1 e g_2 (um processo análogo ao da RECIPROCAL_PROJECTION, porém feito simultaneamente), de modo a gerar uma nova assembleia, denotada por a_3 , em uma área de memória \mathcal{M}_3 . Em termos das operações intrínsecas, a operação MERGE ($a_1, a_2, \mathcal{M}_3, a_3$) será descrita da seguinte forma:

```

DISINHIBITION(A_1)
DISINHIBITION(A_2)
DISINHIBITION(M_1)
DISINHIBITION(M_2)
DISINHIBITION(M_3)
FIBER(A_1, M_1)
FIBER(A_2, M_2)
FIBER(M_1, M_3)
FIBER(M_2, M_3)
FIBER(M_3, M_1)
FIBER(M_3, M_2)

for all T
    do in parallel(FIRE(PARENT(a_1)), FIRE(PARENT(a_2)))

```

4 RESULTADOS

Nesta seção serão apresentados os resultados das simulações feitas com as operações de formação. Foram feitas aproximadamente 100 iterações para cada uma. Abaixo são apresentados os parâmetros utilizados:

- $n = 10^4$ - neurônios por área;
- $p = 10^{-2}$ - probabilidade de dois neurônios formarem uma sinapse;

- $k = 10^2$ - número de neurônios que disparam por área;
- $n_a = 2.5$ - número de áreas (o valor varia dependendo da operação aplicada);
- $0 \leq \beta \leq 0.2$ - taxa de aprendizado.

Para estudar o comportamento do sistema durante o processo de formação de assembleias pelas operações descritas, foram feitos gráficos de $|S_t| \times t$, $\overline{|S_t|} \times t$ e $\overline{|N_t|} \times t$. Os valores de $\overline{|N_t|}$ e $\overline{|S_t|}$ são valores médios para um número m de simulações, considerando um tempo fixo t . Mais explicitamente, esse valores foram calculados como se segue:

$$\overline{|S_t|} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |S_t|_i$$

$$\overline{|N_t|} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |N_t|_i$$

Nas expressões acima, t é um tempo fixo e m é o número de simulações feitas para cada operação do modelo descrita na seção anterior.

4.1 Projection

No caso da operação PROJECTION, temos o seguinte comportamento para seis valores diferentes de β :

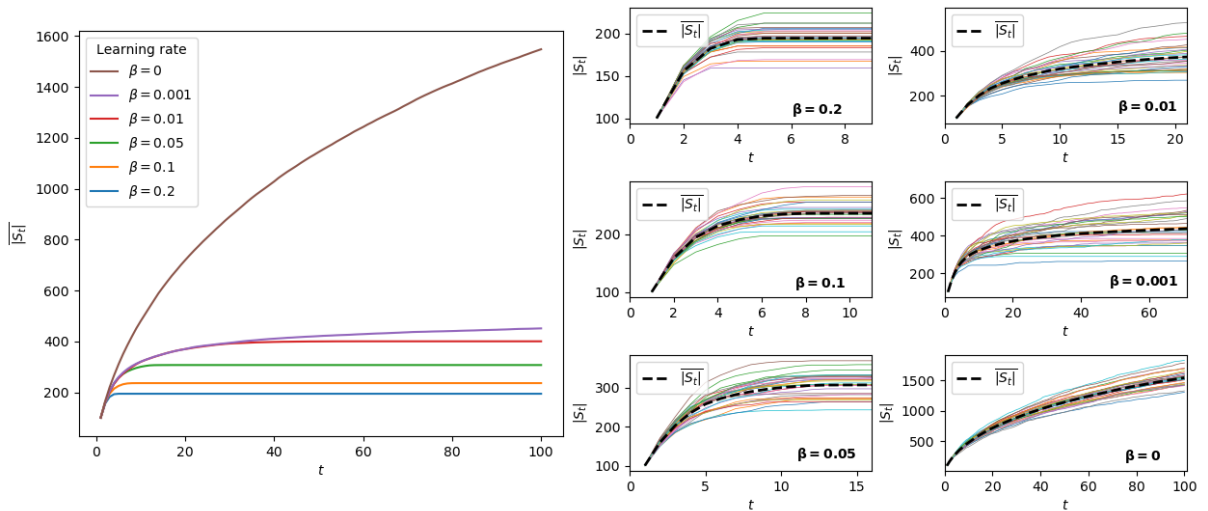


Figura 6: Processo de formação de uma assembleia em uma área qualquer ao longo de 30 simulações para cada taxa de aprendizado. À direita são apresentados o comportamento para $|S_t|$ ao longos das simulações, sendo $\overline{|S_t|}$ a curva média. À esquerda é feita uma comparação de $\overline{|S_t|}$ para os diversos β .

Note que, conforme o valor da taxa de aprendizado diminui, o valor de $\overline{|S_t|}$ tende a aumentar. Note também que, conforme β tende à zero, um tempo maior é necessário para que

$\overline{|S_t|}$ fique constante, indicando que são necessários mais disparos para formar uma assembleia, segundo a definição dada na seção anterior.

No caso do comportamento de novos neurônios disparando, temos que $\overline{|N_t|}$ diminui ao longo do tempo para valores de $\beta \geq 0$. À medida que β se aproxima de zero, um número maior de disparos são necessários para a formação da assembleia. Tal comportamento é apresentado abaixo para os diferentes valores de β . Note que em $\beta = 0$, mesmo para $t = 100$, não há formação de uma assembleia, conforme a definição dada anteriormente.

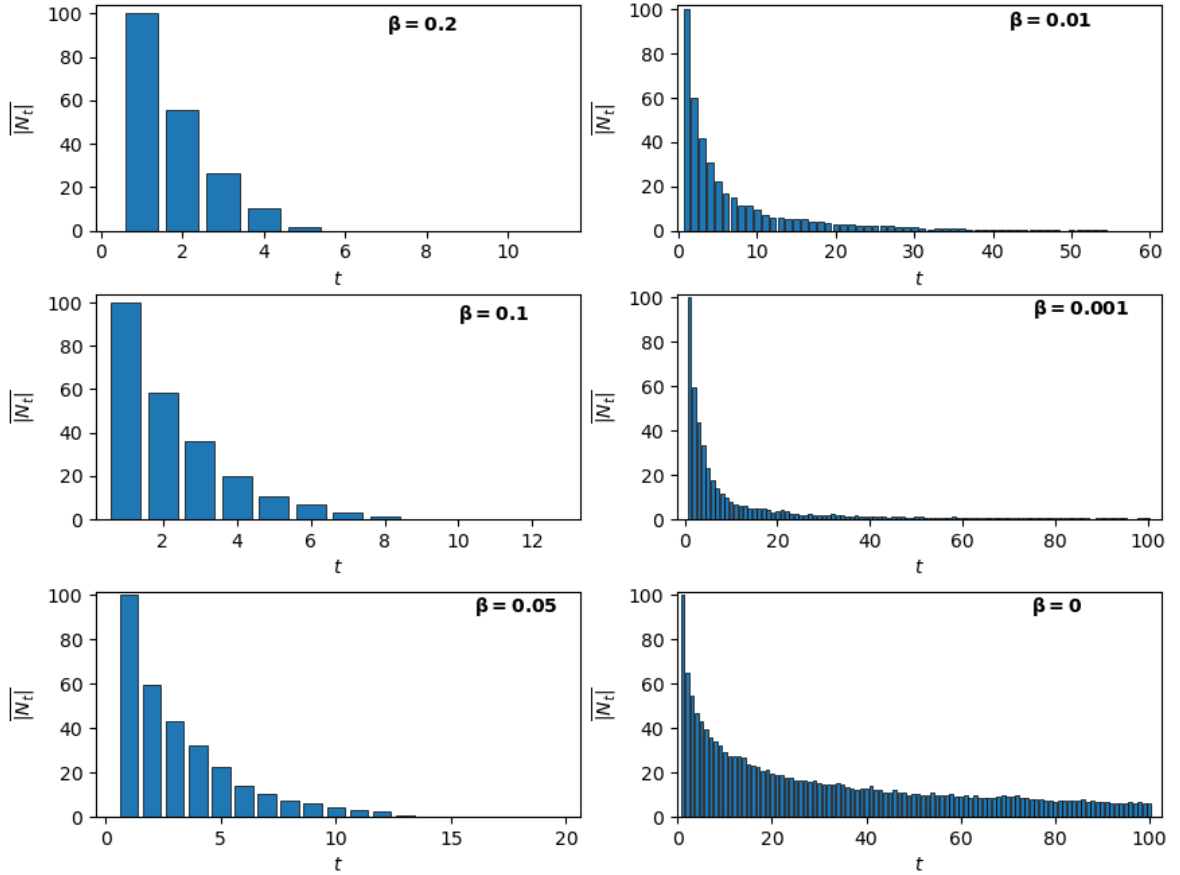


Figura 7: Comportamento da variável $\overline{|N_t|}$, durante o processo de convergência. Similarmente a $\overline{|S_t|}$, $\overline{|N_t|}$ representa o número médio de novos neurônios que disparam em um tempo t . O valor $\overline{|N_t|}$ foi calculado utilizando os dados de 30 simulações.

4.2 Reciprocal Projection

No caso da operação `RECIPROCAL_PROJECTION`, pelo fato de envolver duas áreas de memória, devemos notar que a contagem dos valores de $\overline{|S_t|}$ e $\overline{|N_t|}$ começa em $t = 2$. Isso ocorre porque inicialmente o conjunto que gerou a assembleia a_1 em \mathcal{M}_1 dispara em $t = 0$, logo a_1 só irá disparar em $t = 1$. Porém como estamos monitorando a formação de assembleia na área \mathcal{M}_2 , os *inputs* de a_1 só chegaram em $t = 2$. Abaixo é apresentado o comportamento do sistema para a formação de assembleia:

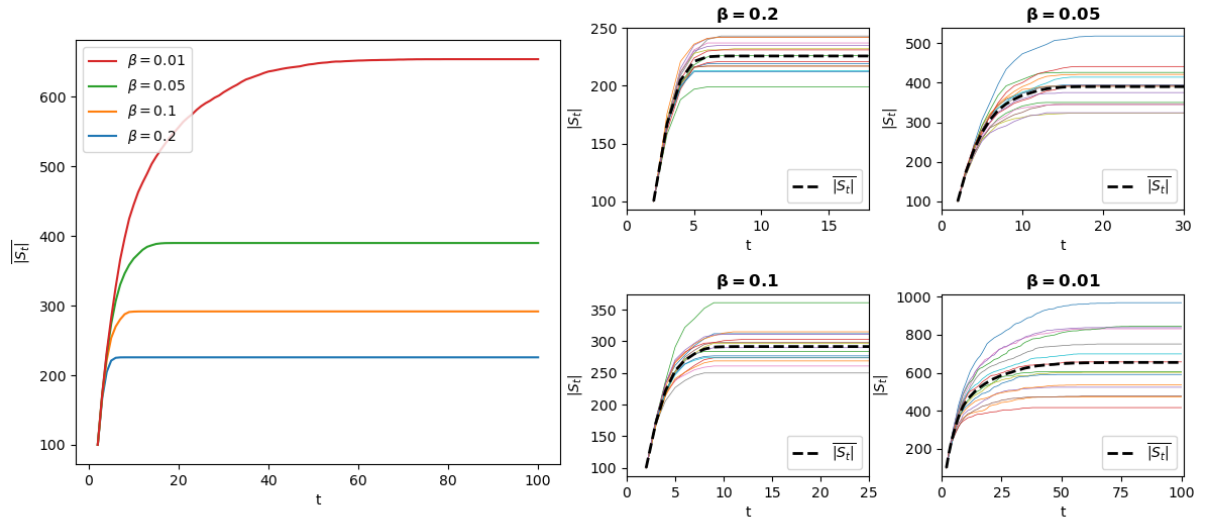


Figura 8: Formação de uma assembleia pela operação RECIPROCAL_PROJECTION. Por envolver mais áreas, foram feitas apenas 15 simulações para cada valor de β . Como comentado anteriormente, a contagem dos valor de $|S_t|$ começa em $t = 2$.

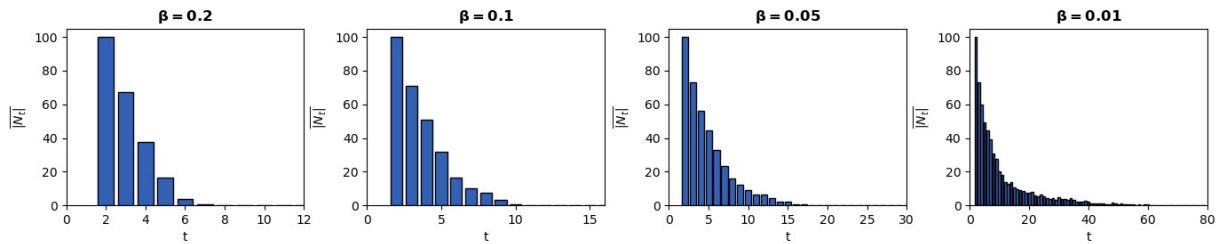


Figura 9: Comportamento de $|N_t|$ ao longo do processo de formação de uma assembleia pela operação RECIPROCAL_PROJECTION. Novamente, a contagem dos valor de $|N_t|$ começa em $t = 2$.

Note que, como a operação RECIPROCAL_PROJECTION depende de assembleias já formadas, ela depende da operação PROJECTION. Portanto, os únicos valores utilizados de β foram: 0.2, 0.1, 0.05 e 0.01. Para valores inferiores como 0.001 e 0, a operação PROJECTION apresenta convergência lenta e por isso não foram utilizados tais valores para formar uma assembleia para uso posterior.

Como foi comentado na seção anterior, a assembleia em \mathcal{M}_1 é levemente alterada durante o processo de realizar a RECIPROCAL_PROJECTION. Durante esse processo, os sucessivos disparos de g recuperam parcialmente a assembleia a em \mathcal{M}_1 , no entanto, o número de neurônios recuperados é, em média, inferior ao número de neurônios recuperados realizando apenas disparos de g sem considerar *inputs* vindos da área \mathcal{M}_2 (note que a causa da alteração é o fato de que existem fibras de \mathcal{M}_2 para \mathcal{M}_1). No gráfico abaixo pode ser observado que, conforme β tende a ficar menor, menos neurônios, em média, são recuperados:

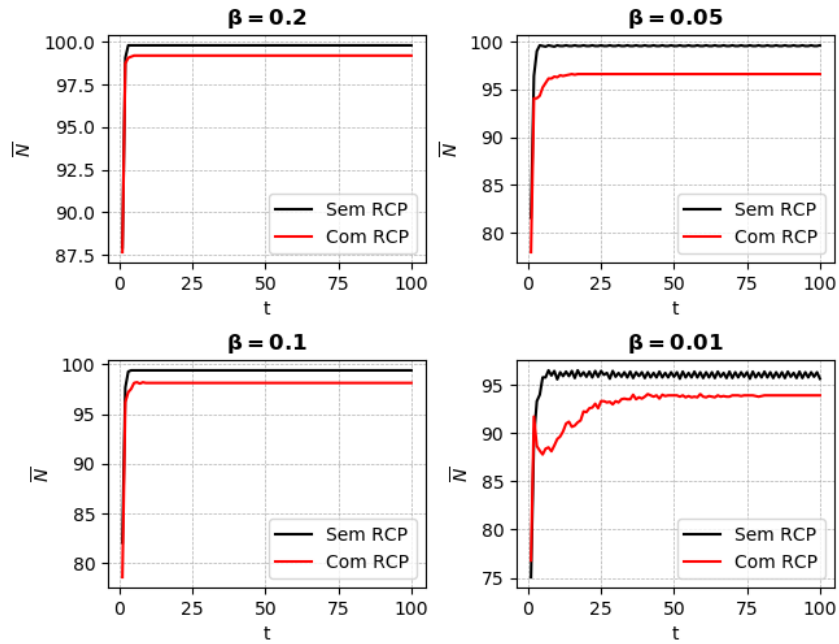


Figura 10: Recuperação de uma assembleia existente através da RECIPROCAL_PROJECTION (RCP) e sem ela (utilizando apenas disparos ordinários de g sem a interferência de $inputs$ de \mathcal{M}_2). Note que, em média (\bar{N}), menos neurônios são recuperados durante a RCP, indicando uma modificação feita em a .

4.3 Merge

Por último, a operação MERGE. De forma análoga ao caso da RECIPROCAL_PROJECTION, o processo de convergência começa em $t = 2$. Além disso, os valores β utilizados foram os mesmos. Abaixo são apresentados os resultados para essa operação:

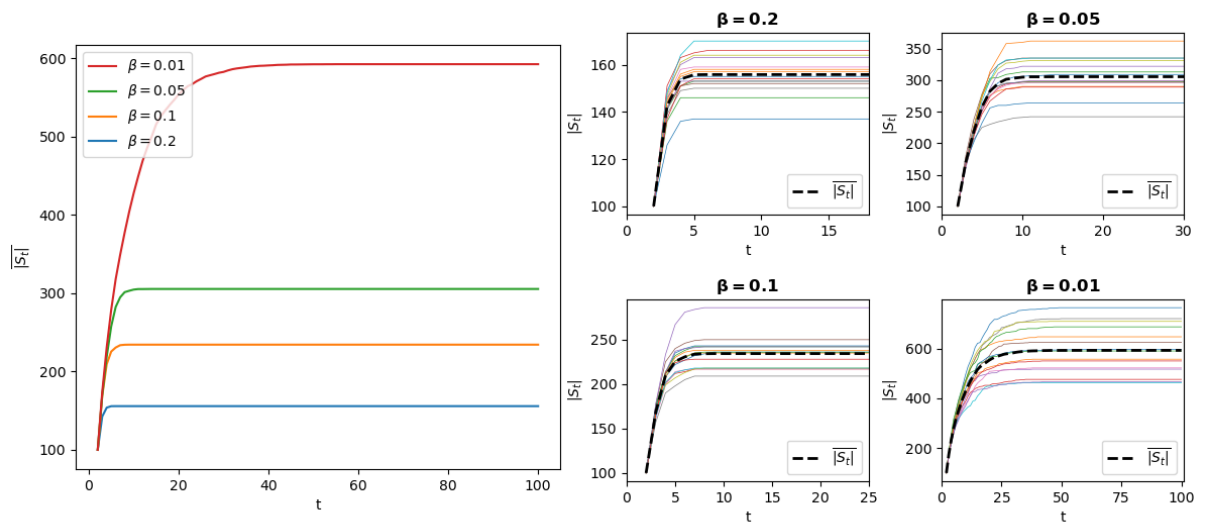


Figura 11: Comportamento de $|S_t|$ ao longo do processo de formação de uma assembleia pela operação MERGE.

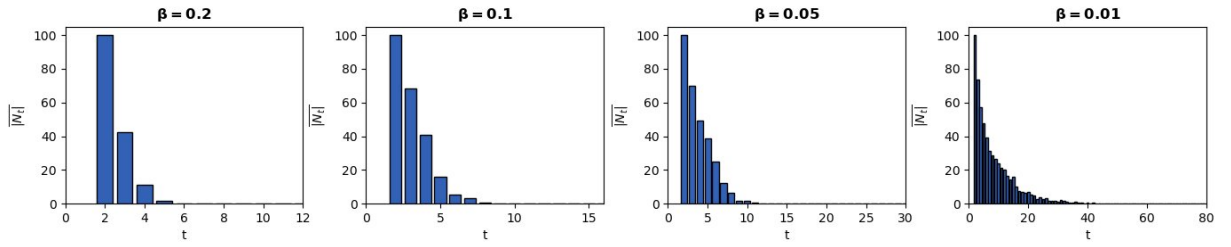


Figura 12: Comportamento de $\overline{|N_t|}$ ao longo do processo de formação de uma assembleia pela operação MERGE. Como comentado, a contagem dos valores de $\overline{|N_t|}$ começa em $t = 2$.

4.4 Comparação entre as operações e o tempo de convergência T

Como foi comentado na seção anterior, o valor do tempo de convergência (T) não pode ser obtido de maneira analítica pelo fato de não se ter uma expressão para $E[N_t]$. Uma maneira de contornar tal problema é estimando um valor para esse tempo de convergência por meio do comportamento de $\overline{|N_t|}$ para cada operação. Esse comportamento é apresentado nos gráficos (7), (9) e (12). A partir deles, os valores para o tempo de convergência são:

Taxa de aprendizado (β)	0.2	0.1	0.05	0.01
Projection (T)	7	11	18	60
Reciprocal Projection (T)	9	13	20	80
Merge (T)	6	10	14	45

Tabela 1: Estimativa para o tempo de convergência para as diferentes taxas de aprendizado.

Podemos comparar também o comportamento das operações descritas anteriormente utilizando as curvas de $\overline{|S_i|}$:

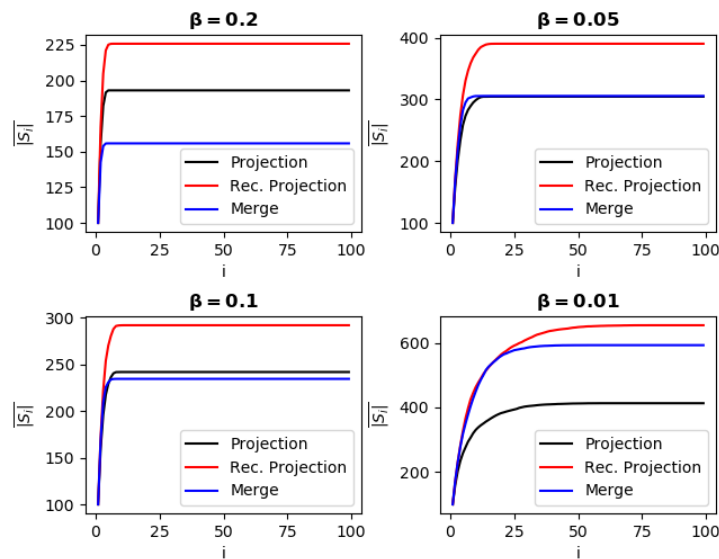


Figura 13: Comparação entre as diferentes operações existentes.

Note que a MERGE tende, em média, disparar menos neurônios novos inicialmente, porém, conforme a plasticidade diminui, mais neurônios novos são disparados, em média. Além disso, a operação PROJECTION sempre está abaixo da RECIPROCAL_PROJECTION (em termos de $|\overline{S_i}|$), indicando que são necessários menos novos neurônios para formar uma assembleia.

4.5 Padrões de disparo

Como comentado anteriormente, a assembleia é definida, no modelo, como um conjunto de k neurônios que disparam em sincronia. Dessa definição, espera-se que uma assembleia recuperada dispare em sincronia. Por exemplo, no caso abaixo uma assembleia formada pela operação PROJECTION foi recuperada por meio de sucessivos disparos do conjunto de neurônios que a gerou:

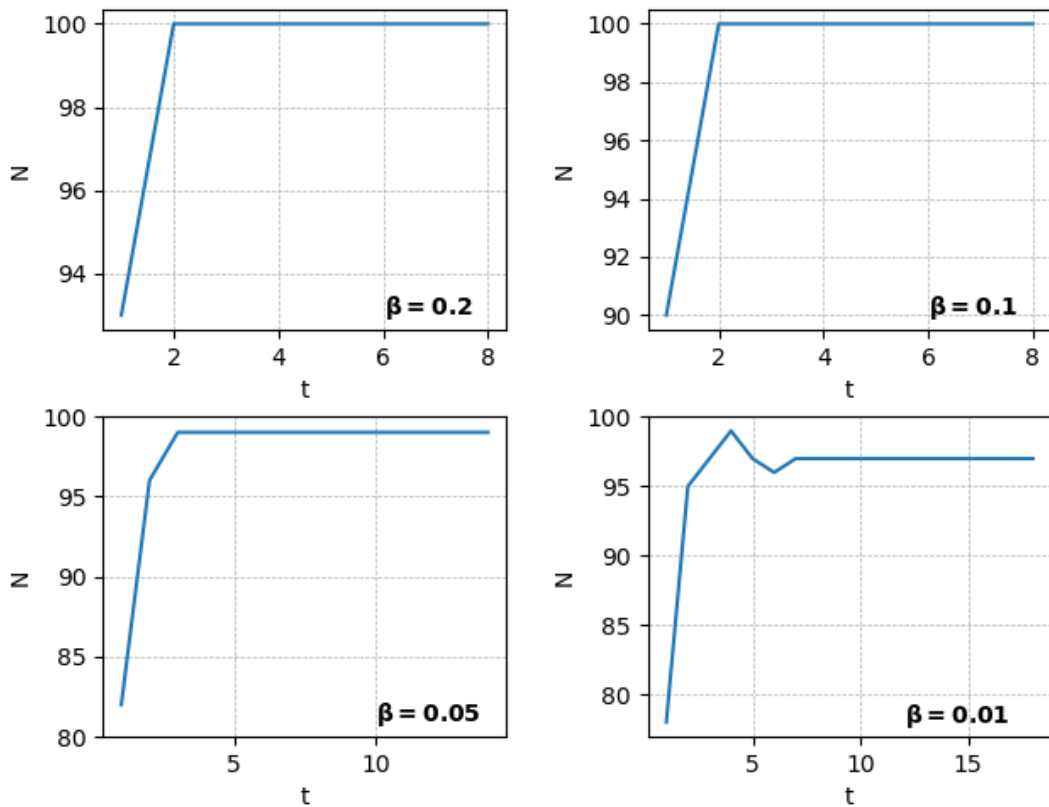


Figura 14: Recuperação de uma assembleia formada. Note que a medida que β diminui, menor é o número de neurônios recuperados (N)

Note que para verificar se a assembleia foi recuperada, devemos verificar quantos neurônios da assembleia disparam ao longo do tempo. Vemos que inicialmente para $\beta = 0.2$ recupera-se rapidamente a assembleia (em $t = 2$). O mesmo comportamento é verificado para $\beta = 0.1$ onde a assembleia foi recuperada completamente. À medida que β diminui, menos neurônios são recuperados. Independente do número de neurônios recuperados, vemos que todos os neurônios

observados dispararam ao mesmo tempo, ou seja, estão em sincronia. No entanto, existem certos casos em que não é possível obter disparos em sincronia, mas sim disparos com padrões periódicos. Abaixo é apresentado um caso em que a assembleia recuperada apresentou padrões de disparos periódicos:

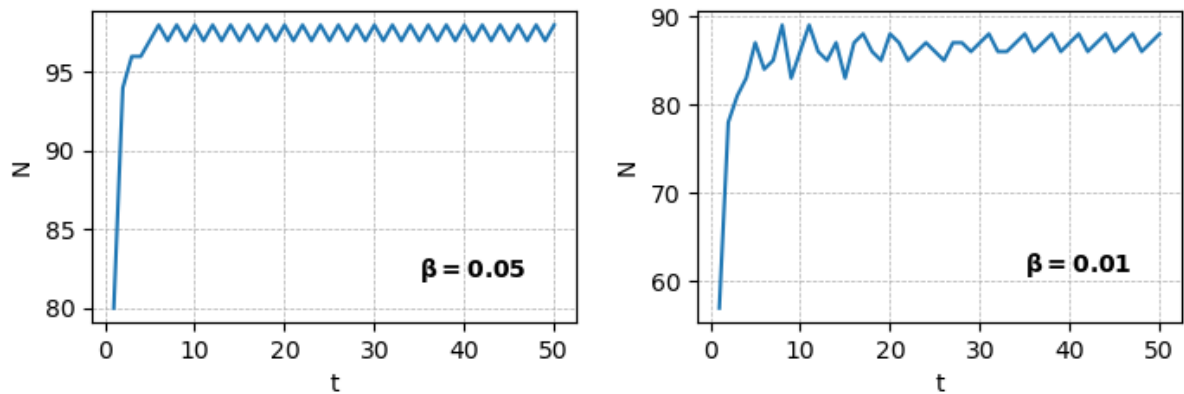


Figura 15: Padrões periódicos para diferentes valores de plasticidade.

Para entender a origem desse comportamento, consideremos observar durante a execução das operações o número de novos neurônios com relação à iteração anterior, ou seja, neurônios que dispararam em t mas não em $t - 1$. Para as operações `RECIPROCAL_PROJECTION` e `MERGE` teremos o seguinte comportamento:

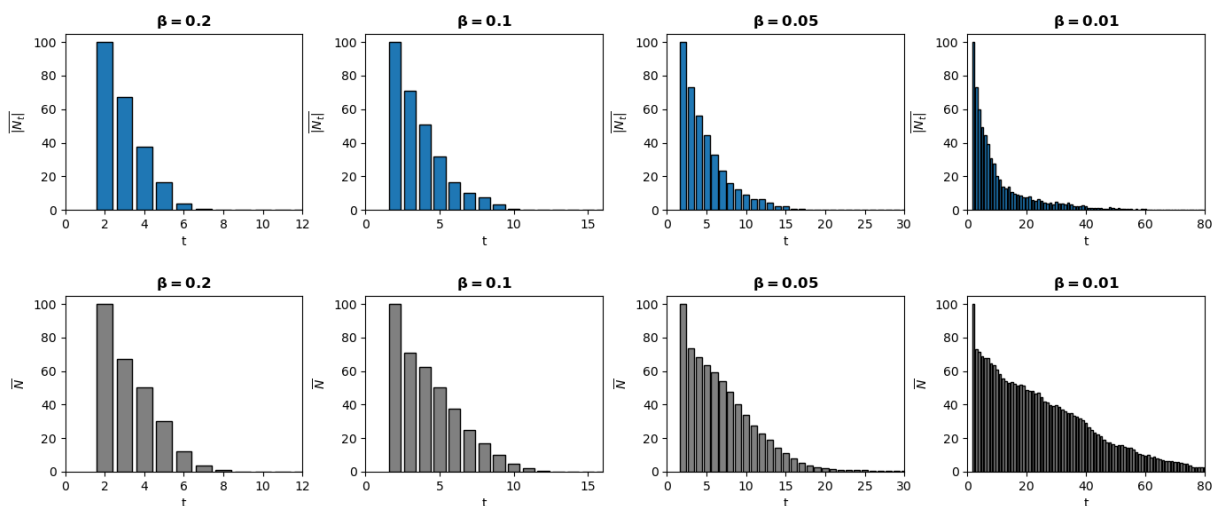


Figura 16: Formação de uma assembleia por meio da operação `RECIPROCAL_PROJECTION`. O gráfico superior representa o número médio de novos neurônios em cada tempo ao longo de todo processo. O inferior representa o número médio de novos neurônios em cada tempo com relação a iteração anterior.

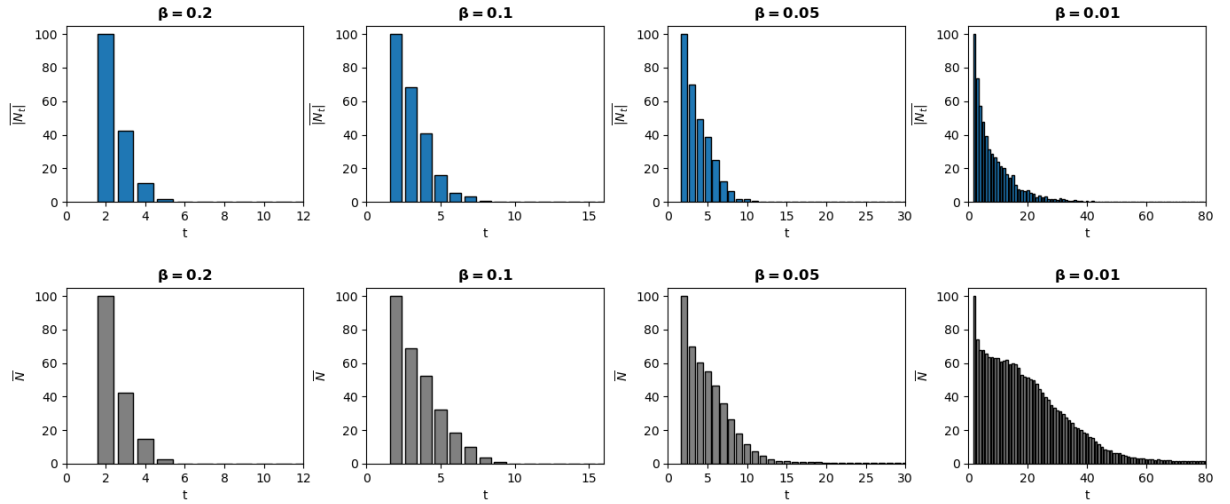


Figura 17: Formação de uma assembleia por meio da operação MERGE. O gráfico superior representa o número médio de novos neurônios em cada tempo ao longo de todo processo. O inferior representa o número médio de novos neurônios em cada tempo com relação a iteração anterior.

Dos gráficos acima, devemos notar que mesmo que o valor de $|\overline{N}_t|$ (barras em azul) seja zero a partir de um tempo t , ainda existem neurônios disparando com relação à iteração anterior. A interpretação para esse fato é bem simples. Uma vez que não há neurônios novos no conjunto y_t (conjunto de k -winners) disparando, isso implica que neurônios que já dispararam, tendem a ficar "entrando" e "saindo" do conjunto y_t conforme o tempo passa (por exemplo, um neurônio dispara em t , mas não dispara em $t + 1$ e depois dispara em $t + 2$). Tendo em vista isso, o padrão periódico nas assembleias deve surgir quando o número de neurônios novos com relação à iteração anterior for constante ou quando apresentar algum padrão periódico, como por exemplo nos casos em que $\beta \leq 0.05$.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, procurou-se estudar a convergência das operações do modelo de *Assembly Calculus* bem como determinar a possível causa para os padrões de disparos em plasticidades baixas. Para alcançar esses objetivos, inicialmente foi dado um tratamento formal para o modelo, dando uma ênfase maior em sistemas dinâmicos, definindo os estados dos elementos e como ocorre evolução do sistema como um todo. Posteriormente, foram definidas as operações que formam e realizam a manutenção de assembleias. Por meio dessas definições e operações, foram feitas diversas simulações com intuito de captar os fenômenos de convergência e também de disparos periódicos em baixas plasticidades. Através dos resultados obtidos com as simulações foi possível, primeiramente, determinar os tempos de convergência, que estão associados a formação de uma assembleia. Para uma janela de plasticidade entre 0.01 e 0.2, foram obtidos diversos valores para o tempo de convergência para as operações definidas. onde tais valores estão

entre 6 e 80 iterações. Com relação aos padrões periódicos de disparo, notou-se inicialmente que eles só ocorrem em baixas plasticidades (menores ou iguais a 0.05). Após a análise dos resultados, conclui-se que a possível causa dos padrões de disparo ocorrem quando há neurônios disparando em um certo padrão durante e após a formação de uma assembleia. Tendo em vista esses resultados, talvez uma nova definição para assembleias, no modelo de *Assembly Calculus* seja necessária, uma vez que a definição dada pelo autor do modelo não engloba os padrões descritos precisamente aqui.

Referências

- [1] PAPADIMITRIOU, C. H. et al. Brain computation by assemblies of neurons. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 117, n. 25, p. 14464–14472, 2020. Disponível em: <<https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.2001893117>>.
- [2] HERCULANO-HOUZEL, S. The human brain in numbers: a linearly scaled-up primate brain. *Frontiers in Human Neuroscience*, v. 3, 2009. ISSN 1662-5161. Disponível em: <<https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/neuro.09.031.2009>>.
- [3] Wikipedia contributors. *Neuron* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2023. [Online; accessed 15-April-2023]. Disponível em: <<https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Neuron&oldid=1148868409>>.
- [4] BEAR, M.; CONNORS, B.; PARADISO, M. *Neurociências: Desvendando o Sistema Nervoso*. [S.l.]: Artmed Editora, 2017. ISBN 9788582714331.
- [5] SILVERTHORN, D. *Fisiologia Humana: Uma Abordagem Integrada*. Artmed, 2010. ISBN 9788536322841. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=5-bXRgAACAAJ>>.
- [6] MITROPOLSKY, D.; COLLINS, M. J.; PAPADIMITRIOU, C. H. A Biologically Plausible Parser. *Transactions of the Association for Computational Linguistics*, v. 9, p. 1374–1388, 12 2021. ISSN 2307-387X. Disponível em: <https://doi.org/10.1162/tacl_a_00432>.
- [7] LEGENSTEIN, R. et al. Long Term Memory and the Densest K-Subgraph Problem. In: KARLIN, A. R. (Ed.). *9th Innovations in Theoretical Computer Science Conference (ITCS 2018)*. Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2018. (Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), v. 94), p. 57:1–57:15. ISBN 978-3-95977-060-6. ISSN 1868-8969. Disponível em: <<http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2018/8359>>.
- [8] PAPADIMITRIOU, C. H.; VEMPALA, S. S. Random Projection in the Brain and Computation with Assemblies of Neurons. In: BLUM, A. (Ed.). *10th Innovations in Theoretical Computer Science Conference (ITCS 2019)*. Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2018. (Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), v. 124), p. 57:1–57:19. ISBN 978-3-95977-095-8. ISSN 1868-8969. Disponível em: <<http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2018/10150>>.