

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Modos de Bernstein-Greene-Kruskal e de
Case-van Kampen para a equação de
Landau-Vlasov**

Rodrigo Vidmar

Tese realizada sob a orientação do Dr. Fernando Haas apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Porto Alegre, abril de 2023.

Resumo

A equação de Landau-Vlasov unidimensional que descreve gases bosônicos diluídos frios no regime de campo médio sem colisão sob forte confinamento transversal é analisada usando métodos tradicionais da física de plasma. Soluções estacionárias independentes do tempo são encontradas usando uma abordagem semelhante aos modos de plasma não linear de Bernstein-Greene-Kruskal. Ondas estacionárias lineares semelhantes aos modos normais de plasma de Case-van Kampen também estão disponíveis. As novas soluções bosônicas não têm propriedades de decaimento ou de crescimento, no mesmo sentido que as soluções análogas de plasma.

Abstract

The one-dimensional Landau-Vlasov equation describing cold dilute bosonic gases in the mean field collisionless regime under strong transverse confinement is analyzed using traditional methods of plasma physics. Time-independent, stationary solutions are found using a similar approach as for the Bernstein-Greene-Kruskal nonlinear plasma modes. Linear stationary waves similar to the Case-van Kampen plasma normal modes are also shown to be available. The new bosonic solutions have no decaying or growth properties, in the same sense as the analog plasma solutions.

Sumário

1	Introdução	5
2	Contexto e metodologia	8
2.1	Histórico e estado da arte	8
2.2	Metodologia	9
3	A equação de transporte de Boltzmann	10
4	O sistema de Vlasov-Poisson para plasmas	12
4.1	Os modos de Bernstein-Greene-Kruskal para plasmas	15
4.2	Os modos de Case-van Kampen para plasmas	19
5	Equação de Landau-Vlasov e sua redução dimensional	22
6	Modos de Bernstein-Greene-Kruskal para bósons	27
6.1	Distribuição de Maxwell-Boltzmann	28
6.2	Distribuição degenerada semelhante a de Fermi-Dirac	32
7	Modos de Case-van Kampen para bósons	36
8	Artigo publicado	41
9	Conclusão	51
	Referências	53

Lista de Figuras

4.1	Gráfico do potencial adimensional da equação (4.31).	18
6.1	Gráfico da função de Lambert $W(x)$	30
6.2	Solução numérica da Eq. (6.17) para $0 \leq \bar{g} \leq 1$, onde \bar{g} e \bar{A} são dados na Eq. (6.16).	31
6.3	Solução numérica da Eq. (6.29) para $0 \leq \bar{g} \leq 1$, onde \bar{g} e \bar{A} são dados na Eq. (6.27).	34
6.4	Densidade de número 1D da Eq. (6.28), para $\bar{g} = 10^{-2}$, $\bar{A} = 1/(2\pi)$	34

Capítulo 1

Introdução

Quando o tempo médio de colisão em gases diluídos frios feitos de átomos de bósons é muito maior do que a escala de tempo característica da dinâmica relevante, é possível ter um modelo baseado na equação de Landau-Vlasov [1]. A equação de Landau-Vlasov é obtida a partir da equação de Boltzmann-Vlasov [1–4] negligenciando o operador de colisão. A dinâmica dos sistemas de bósons frios, por exemplo no cruzamento de regimes sem colisão para regimes de colisão é necessária a equação de Boltzmann-Vlasov [5]. Equações hidrodinâmicas [6] são ferramentas úteis no caso colisional, por exemplo para condensados de Bose-Einstein ou o gás de Fermi superfluido no cruzamento Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) - Condensado de Bose Einstein (BEC)

Sob um confinamento transversal muito forte, um gás de bósons está em uma configuração quase unidimensional (1D). A realização experimental de sistemas quase-1D é possível com átomos ultrafrios aprisionados em potenciais ópticos com energias de confinamento transversal harmônicas muito maiores do que a energia térmica ou potencial químico [7]. O regime sem colisão é aprimorado na configuração quase 1D. De fato, em colisões elásticas binárias 1D, as partículas trocam suas energias completamente, portanto, não há efeitos sensíveis dessas colisões entre partículas idênticas. Consequentemente, nenhuma termalização é possível, como verificado em átomos de bósons frios aprisionados em redes ópticas 1D [8]. Para estes sistemas de bósons diluídos 1D, a equação de Landau-Vlasov é aplicável, desde que o gás não contenha um quase-condensado e que não esteja no regime de Tonks-Girardeau (TG) [9], onde as partículas do gás de bósons são altamente interagentes, com propriedades fermiônicas [10]. O gás de TG pode ser obtido experi-

mentalmente através de um processo de diluição do gás de bósons 1D. A transição entre um BEC para um gás de TG se caracteriza pelo parâmetro $\Gamma = \epsilon_{int}/\epsilon_{kin}$, onde ϵ_{int} e ϵ_{kin} são, respectivamente, a energia média de interação e energia cinética calculadas através de uma teoria de campo médio [9]. Neste trabalho foi criado um gás de TG 1D para $\Gamma = 5.5$. O regime de forte acoplamento foi acessado através da combinação de duas armadilhas de luz independentes. Ao alterar as intensidades das armadilhas, nós variamos Γ e com isso tornamos os átomos um BEC ou um gás de TG.

Recentemente [11], a estabilidade linear de soluções da equação de Landau-Vlasov 1D foi investigada por meio de métodos bem conhecidos da física de plasma, nomeadamente a abordagem da transformada de Landau ou Laplace. Neste método, a evolução temporal das perturbações em torno da função de distribuição de equilíbrio é tratada como um problema de valor inicial. A taxa de amortecimento linear de Landau (ou taxa de crescimento, para equilíbrios instáveis) é, portanto, determinada através da análise adequada no plano complexo (contorno de Landau). A semelhança entre a equação de Landau-Vlasov e o sistema de Vlasov-Poisson que descreve plasmas eletrostáticos sem colisão fornece um cenário estimulante para a aplicação de técnicas de plasma em uma área aparentemente não correlacionada, como no estudo de gases de bósons frios.

Neste contexto, o presente trabalho é dedicado à discussão de soluções independentes do tempo e soluções de ondas estacionárias para a equação de Landau-Vlasov 1D. Em plasmas, soluções estacionárias para o sistema de Vlasov-Poisson podem ser derivadas a partir do teorema de Jeans, segundo o qual a função de distribuição de partículas que satisfaz a equação de Vlasov deve ser uma função das constantes de movimento. No caso independente do tempo, a energia da partícula é uma constante de movimento ou invariante, conforme tratado no trabalho original [12] de Bernstein, Greene e Kruskal (BGK). Por construção, esses chamados modos de BGK são oscilações de plasma não lineares exatas que não apresentam amortecimento ou crescimento. A abordagem de BGK, onde a energia é a variável dinâmica central, pode ser adaptada para a derivação de estruturas de buracos no espaço de fase [13, 14] e, em uma extensão mais limitada, para plasmas quânticos [15].

Apesar da visão mais popular em termos de interpretação do elétron surfando [16], uma interpretação alternativa e mais rigorosa do amortecimento de Landau é em termos

da superposição de mistura de fase dos modos de Case-van Kampen [17]. Introduzido por van Kampen [18] e demonstrado por Case [19] para formar um conjunto ortogonal completo para o sistema linearizado de Vlasov-Poisson, a onda estacionária ou modos de Case-van Kampen foram discutidos em uma variedade de contextos. Por exemplo, em plasmas com fundo iônico variando lentamente no tempo [20], em plasmas multidimensionais não uniformes [21], para ondas não lineares [22], sistemas de Fermi estendidos, plasmas eletromagnéticos [23], plasma colisional [24] e plasmas quânticos [25]. Conforme discutido no capítulo 7, os modos de Case-van Kampen também estão disponíveis para um gás de bósons ultrafrio descrito pela equação de Landau-Vlasov.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 1 é destinado à introdução. No capítulo 2, destina-se ao contexto e metodologia. No capítulo 3, é derivada a equação de transporte de Boltzmann. No capítulo 4 é abordado os modos de Bernstein-Greene-Kruskal (BGK) e de Case-van Kampen para o sistema físico de plasmas. Já no capítulo 5 é apresentado a equação de Boltzmann-Vlasov 3D, a redução para a equação de Landau-Vlasov 3D (aqui desprezado o operador de colisão) e derivada a equação de Landau-Vlasov 1D, seguindo os passos de [11]. No capítulo 6 considera os modos de BGK e o capítulo 7 os modos de Case-van Kampen para a equação de Landau-Vlasov 1D. O capítulo 9 está reservado para as conclusões e considerações finais.

Capítulo 2

Contexto e metodologia

2.1 Histórico e estado da arte

O conteúdo desta seção foi extraído de [11]. A degenerescência de Bose [26] e Fermi [27] foram alcançadas alguns anos atrás em experimentos com átomos de metal alcalino ultra-frios, baseados em resfriamento a laser e aprisionamento magneto-óptico. Esses experimentos abriram caminho para a investigação e manipulação de novos estados da matéria atômica, como o condensado de Bose-Einstein [6] e o gás superfluido de Fermi no cruzamento BCS-BEC. Ferramentas teóricas simples, mas confiáveis para o estudo desses sistemas no regime colisional são as equações hidrodinâmicas [6]. No entanto, para reproduzir corretamente as propriedades dinâmicas dos gases atômicos no regime sem colisão de campo médio [24], ou no cruzamento do regime sem colisão para o regime colisional, é necessária a equação de Boltzmann-Vlasov [1, 3, 4]. De fato, acredita-se que a equação de Boltzmann-Vlasov seja a equação correta para investigar a cinética de um gás quântico genérico feito de átomos fora do condensado. Para gases atômicos diluídos e frios, o potencial de campo médio da equação de Boltzmann-Vlasov [1, 3, 4] é proporcional ao comprimento de espalhamento da onda s da interação interatômica e à densidade local do gás [4]. No regime sem colisão de campo médio, onde o tempo de interação entre os átomos é muito maior do que o período característico do fenômeno analisado, pode-se seguramente negligenciar a integral colisional da equação de Boltzmann-Vlasov obtendo a equação de Landau-Vlasov, também chamada de Equação de Hartree-Vlasov [1]. O regime sem colisão é fortemente aprimorado para um gás bosônico em uma configuração

quase unidimensional (1D). Um sistema 3D é dito quase 1D quando a energia axial de uma única partícula é muito menor do que a energia do confinamento transversal. Sistemas quase 1D são hoje rotineiramente projetados com átomos ultra frios em potenciais ópticos, com energias de confinamento transversal harmônico muito maiores do que a temperatura do gás ou potencial químico [7]. Notavelmente, em um sistema estritamente 1D de partículas idênticas, nenhuma termalização pode ocorrer [24]; tal comportamento foi observado com átomos bosônicos frios presos em uma rede óptica 1D [8]. De fato, as partículas trocam completamente sua energia em colisões elásticas binárias 1D, então, se elas são indistinguíveis, nenhum resultado sensato é produzido por tais colisões. Para gases bosônicos 1D, a equação de Vlasov sem colisão pode ser usada com segurança sob a condição $\lambda_{dB} \ll d \ll l_c$, onde $\lambda_{dB} = (\hbar/\sqrt{2\pi m k_B T})$ é o comprimento de onda de de Broglie com T a temperatura absoluta, $d = 1/\rho$ é a distância média entre as partículas com ρ a densidade local 1D, e $l_c = \hbar/\sqrt{m g \rho}$ é o comprimento de correlação com $g \rho$ o potencial de campo médio 1D e g uma constante de interação efetiva 1D do potencial interatômico, m a massa das partículas, \hbar a constante de Planck reduzida e k_B a constante de Boltzmann. É bem sabido que em um sistema bosônico 1D, a condensação de Bose-Einstein é proibida, mas a quase-condensação é possível [1, 6]; essas desigualdades garantem que o gás bosônico 1D não contém um quase-condensado (a descrição clássica é aplicável) e que não adquire as propriedades fermiônicas características do gás de Tonks-Girardeau [24].

2.2 Metodologia

Inicialmente deriva-se a equação de transporte de Boltzmann. Após, é apresentada a equação de Boltzmann-Vlasov 3D. Em seguida se reduz a equação anterior para a equação de Landau-Vlasov 3D, desprezando o operador de colisão. Por fim se reduz o problema para a equação de Landau-Vlasov 1D.

Em posse desta última equação é estudado os modos de Bernstein-Greene-Kruskal e os modos de Case-Van Kampen.

Capítulo 3

A equação de transporte de Boltzmann

O conteúdo deste capítulo foi extraído de [28]. O número médio de partículas por estado quântico para átomos em um determinado estado interno é dado pela função de distribuição semiclássica $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. Como o número de estados quânticos no elemento de espaço de fase $d\mathbf{p} d\mathbf{r}$ é $d\mathbf{p} d\mathbf{r}/(2\pi\hbar)^3$, o número médio de átomos no elemento do espaço de fase $d\mathbf{p} d\mathbf{r}$ é $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} d\mathbf{r}/(2\pi\hbar)^3$.

O espaço de fase é hexadimensional e definido pelas variáveis $\xi_\mu = (\mathbf{r}, \mathbf{p})$, onde $\mu = 1, \dots, 6$. As derivadas temporais $\dot{\xi}_\mu = (\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{p}})$ fornecem a “velocidade” generalizada e, conseqüentemente, o “fluxo” na direção ξ_μ é $F\dot{\xi}_\mu$. A taxa de mudança no número de partículas em uma determinada região do espaço de fase é igual ao fluxo líquido de partículas para dentro através da fronteira desta região, ou

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{\mu=1, \dots, 6} \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} (\dot{\xi}_\mu F) = \frac{\partial F}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla F + \dot{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} F + F \sum_{\mu=1, \dots, 6} \frac{\partial \dot{\xi}_\mu}{\partial \xi_\mu} = 0. \quad (3.1)$$

Quando \mathbf{r} e \mathbf{p} satisfazem as equações de Hamilton

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \quad (3.2)$$

onde $H = H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ é o Hamiltoniano para uma única partícula, segue-se

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial r_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_i} = 0, \quad (3.3)$$

onde \dot{r}_i e \dot{p}_j , como funções no espaço de fase vêm das equações de Hamilton (3.2) e,

portanto

$$\sum_{\mu=1,\dots,6} \frac{\partial \dot{\xi}_{\mu}}{\partial \xi_{\mu}} = 0$$

e a Eq.(3.1) assume a forma

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla F + \dot{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} F = 0. \quad (3.4)$$

Uma vez que a derivada temporal seguindo o movimento de uma partícula é dada por $dF/dt = \partial F/\partial t + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla F + \dot{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} F$, a Eq. (3.4) expressa o fato que a função de distribuição permanece constante para um ponto seguindo a trajetória de uma partícula no espaço de fase.

Em geral, haverá contribuições adicionais para $\partial F/\partial t$ devido ao fato de que os átomos não fluem livremente e que o estado interno de um átomo pode mudar. Estes efeitos podem ser descritos por um termo fonte $(\partial F/\partial t)_{\text{fonte}}$ na equação de transporte, e a equação resultante para F é

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla F + \dot{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} F = \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{\text{fonte}}, \quad (3.5)$$

que é a equação de transporte de Boltzmann. No presente contexto, o termo fonte descreve os efeitos das colisões elásticas entre os átomos.

Capítulo 4

O sistema de Vlasov-Poisson para plasmas

O conteúdo deste capítulo foi extraído de [29] e de [30]. O sistema de unidades utilizado neste capítulo é o CGS (centímetro-grama-segundo).

Possivelmente a mais importante equação em física de plasmas é a equação de Vlasov. Esta equação descreve a evolução da função distribuição $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ num espaço de fase de seis dimensões. A função de distribuição $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ pode ser pensada como o número médio do conjunto de partículas pontuais por unidade de espaço de fase hexa dimensional. Também pode ser pensado como o número de partículas para qualquer tempo t , numa pequena região do espaço de fase hexa dimensional. A equação de Vlasov torna-se exata no limite que o número de partículas num cubo de Debye torna-se infinito.

A equação de Vlasov surge naturalmente da equação de Klimontovich ou da hierarquia BBGKY [31] quando os efeitos de colisão são ignorados. Por esta razão, a equação de Vlasov também é chamada de equação de Boltzmann sem colisão.

Antes de derivarmos a equação de Vlasov, vamos derivar a equação de Klimontovich para plasmas. Suponha um gás com uma única espécie de partícula, esta espécie de partícula têm a órbita $\mathbf{X}_1(t)$ no espaço de configuração tridimensional \mathbf{x} . No espaço de configuração \mathbf{v} , a partícula tem a órbita $\mathbf{V}_1(t)$. Já a densidade de uma partícula no espaço de fase é

$$N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \delta[\mathbf{x} - \mathbf{X}_1(t)] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}_1(t)], \quad (4.1)$$

onde $\delta[\mathbf{x} - \mathbf{X}_1] \equiv \delta(x - X_1) \delta(y - Y_1) \delta(z - Z_1)$. O mesmo raciocínio segue para $\delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}_1(t)]$.

Para um sistema que contém duas espécies de partículas, elétrons e íons, e cada espécie têm N_0 partículas, então a densidade N_s da espécie s é

$$N_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{i=1}^{N_0} \delta[\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t)], \quad (4.2)$$

e a densidade total N é

$$N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{e,i} N_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (4.3)$$

A posição \mathbf{X}_i da partícula i satisfaz a equação:

$$\dot{\mathbf{X}}_i(t) = \mathbf{V}_i(t), \quad (4.4)$$

onde o ponto significa a derivada temporal. Já a velocidade $\mathbf{V}_i(t)$ da partícula i satisfaz a equação de força de Lorentz:

$$m_s \dot{\mathbf{V}}_i(t) = q_s \mathbf{E}^m[\mathbf{X}_i(t), t] + \frac{q}{c} \mathbf{V}_i(t) \times \mathbf{B}^m[\mathbf{X}_i(t), t] \quad (4.5)$$

onde \mathbf{E}^m é o campo elétrico e \mathbf{B}^m é o campo magnético. O sobrescrito m significa que os campos elétrico e magnético são campos microscópicos auto consistentemente produzidos pelas próprias partículas pontuais. Já q_s é a carga da partícula da espécie s e c é a velocidade da luz. Uma equação exata para a evolução de um plasma é obtida fazendo a derivada temporal da densidade N_s . Portanto, fazendo a derivada temporal de (4.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} &= - \sum_{i=1}^{N_0} \dot{\mathbf{X}}_i \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \delta[\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t)] \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N_0} \dot{\mathbf{V}}_i \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \delta[\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t)] \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde usamos que

$$\frac{\partial}{\partial a} f(a - b) = - \frac{\partial}{\partial b} f(a - b)$$

e

$$\frac{d}{dt} f[g(t)] = \frac{df}{dg} \dot{g}.$$

Utilizando (4.4) e (4.5), a equação (4.6) torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^{N_0} \mathbf{V}_i(t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \delta[\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t)] \\ & - \sum_{i=1}^{N_0} \left(\frac{q_s}{m_s} \mathbf{E}^m[\mathbf{X}_i(t), t] + \frac{q_s}{m_s c} \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}^m[\mathbf{X}_i(t), t] \right) \\ & \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \delta[\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t)] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Uma importante propriedade da função delta de Dirac é

$$a \delta(a - b) = b \delta(a - b)$$

com isso podemos trocar $\mathbf{V}_i(t)$ por \mathbf{v} e $\mathbf{X}_i(t)$ por \mathbf{x} e utilizando a equação (4.2), obtemos a equação de Klimontovich:

$$\frac{\partial N_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} N_s + \frac{q_s}{m_s} \left(\mathbf{E}^m + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}^m \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} N_s = 0. \quad (4.8)$$

Ignorando os efeitos de colisão desde o início, nós derivamos a equação de Vlasov como segue.

Considere $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ como uma densidade de probabilidade associado com um conjunto de sistemas. A densidade de probabilidade pode ser pensada como um fluido num espaço de fase hexa dimensional. Uma vez que as partículas não são criadas nem destruídas, este fluido deve satisfazer uma equação de continuidade da forma:

$$\partial_t f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \Big|_{\text{órbita}} f_s \right) + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \Big|_{\text{órbita}} f_s \right) = 0 \quad (4.9)$$

onde $d/dt|_{\text{órbita}}$ refere-se a órbita do elemento de fluido na posição (\mathbf{x}, \mathbf{v}) no espaço de fase. Mas o fluido representa a densidade de probabilidade das partículas; então a órbita do elemento de fluido deve ser a mesma que a órbita de uma partícula da espécie s na posição \mathbf{x} com velocidade \mathbf{v} . Com esta identificação, nós temos imediatamente

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \Big|_{\text{órbita}} = \mathbf{v}, \quad (4.10)$$

e

$$\left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_{\text{órbita}} = \frac{q_s}{m_s} \left[\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \right] \quad (4.11)$$

onde por causa os efeitos de colisão estão sendo ignorados os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} são campos médios suaves, que satisfazem as equações de Maxwell. Aqui q_s e m_s são a carga e a massa da espécie de partículas do tipo s , c é a velocidade da luz. A Equação (4.9) torna-se

$$\partial_t f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v} f_s) + \frac{q_s}{m_s} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \left[\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) f_s \right] = 0. \quad (4.12)$$

Com a identidade vetorial $\nabla \cdot (\mathbf{a} b) = b \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla b$, encontramos

$$\partial_t f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_s + \frac{q_s}{m_s} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_s = 0, \quad (4.13)$$

que é a equação de Vlasov.

4.1 Os modos de Bernstein-Greene-Kruskal para plasmas

Os modos de BGK formam uma importante classe de ondas não lineares [12]. Em plasmas não interagentes, essas ondas não lineares são ondas eletrostáticas.

Por simplicidade consideramos a situação independente do tempo com variação espacial somente no eixo x . Então para cada espécie, a equação de Vlasov é

$$\left(v \partial_x - \frac{q_s}{m_s} \frac{d\phi}{dx} \partial_v \right) f_s(x, v) = 0 \quad (4.14)$$

onde $v \equiv v_x$, ϕ é o potencial eletrostático. O potencial deve ser determinado de forma auto consistente através da equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 4 \pi e \left[\int_{-\infty}^{\infty} dv f_e(x, v) - \int_{-\infty}^{\infty} dv f_i(x, v) \right] \quad (4.15)$$

Aqui f_e é a função de distribuição para os elétrons e f_i a função de distribuição para os íons.

A solução para a equação (4.14) é a função de distribuição de equilíbrio

$$f_s = f_s \left[v^2 + \frac{2 q_s \phi(x)}{m_s} \right] \quad (4.16)$$

Inserindo (4.16) em (4.15), obtemos:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 4 \pi e \int_{-\infty}^{\infty} dv \left(f_e \left[v^2 - 2 e \phi(x)/m_e \right] - f_i \left[v^2 + 2 e \phi(x)/m_i \right] \right). \quad (4.17)$$

Aqui consideramos a carga dos elétrons q_e como sendo $-e$ e a carga dos íons q_i como sendo e , m_e é a massa dos elétrons e m_i a massa dos íons. f_e é a função de distribuição para os elétrons e f_i a de distribuição para os íons. Esta equação deve ser resolvida para $\phi(x)$ sujeita a condição de contorno apropriada. Por exemplo, podemos desejar olhar para soluções tipo onda, ou para soluções tipo sóliton localizado. Significa que existe um grande número de soluções para a equação integro-diferencial (4.17).

Vamos inicialmente considerar, em (4.17), um caso bastante simples, onde cada espécie é um feixe de partículas frio, cada partícula da espécie s tem a mesma velocidade para uma dada posição. Então escolhemos

$$f_e(x, v) = n_0 v_e \delta[v^2 - 2 e \phi(x)/m_e - v_e^2] \quad (4.18)$$

com v_e a velocidade de referência dos elétrons, onde nós recaímos na relação

$$\delta[f(y)] = \sum_i \frac{\delta(y - y_i)}{\left| \frac{df}{dy} \right|_{y=y_i}}, \quad (4.19)$$

onde y_i são os zeros da função f . Então a equação (4.18) torna-se

$$f_e(x, v) = \frac{n_0 v_e}{2 \tilde{v}_e} \left(\delta(v - \tilde{v}_e) + \delta(v + \tilde{v}_e) \right) \quad (4.20)$$

onde

$$\tilde{v}_e = \left[v_e^2 + \frac{2 e \phi(x)}{m_e} \right]^{1/2}. \quad (4.21)$$

Similarmente para íons,

$$f_i(x, v) = \frac{n_0 v_i}{2 \tilde{v}_i} \left(\delta(v - \tilde{v}_i) + \delta(v + \tilde{v}_i) \right) \quad (4.22)$$

onde

$$\tilde{v}_i = \left[v_i^2 - \frac{2 e \phi(x)}{m_i} \right]^{1/2}. \quad (4.23)$$

Aqui, v_i e v_e são constantes arbitrárias que nós escolhemos serem grandes o suficiente tal que (4.21) e (4.23) sempre resultam em valores positivos e reais para \tilde{v}_e e \tilde{v}_i . Nós temos escolhido a constante de normalização n_0 a mesma para íons e elétrons; devemos verificar no final dos cálculos que isto nos dá um plasma neutro.

Agora olhamos para soluções espacialmente periódicas para (4.17). Integrando f_e e f_i sobre todo espaço de velocidades, nós encontramos

$$n_e(x) = n_0 \frac{v_e}{\tilde{v}_e} \quad (4.24)$$

e

$$n_i(x) = n_0 \frac{v_i}{\tilde{v}_i} \quad (4.25)$$

tal que (4.17) torna-se

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 4 \pi n_0 e \left(\frac{v_e}{\tilde{v}_e} - \frac{v_i}{\tilde{v}_i} \right) \quad (4.26)$$

ou

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 4 \pi n_0 e \left[\left(1 + \frac{2 e \phi(x)}{m_e v_e^2} \right)^{-1/2} - \left(1 - \frac{2 e \phi(x)}{m_i v_i^2} \right)^{-1/2} \right]. \quad (4.27)$$

Notamos uma circunstância afortunada que a equação (4.27) é da forma de uma equação pseudopotencial; que é na forma

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = - \frac{\partial}{\partial \phi} V(\phi) \quad (4.28)$$

com

$$V(\phi) = -4 \pi n_0 \left[m_e v_e^2 \left(1 + \frac{2 e \phi}{m_e v_e^2} \right)^{1/2} + m_i v_i^2 \left(1 - \frac{2 e \phi}{m_i v_i^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (4.29)$$

Como um exemplo específico, escolhemos $m_e v_e^2 = m_i v_i^2 \equiv T$, sendo T em unidades de

energia. Então

$$V(\phi) = -4\pi n_0 T \left[\left(1 + \frac{2e\phi}{T}\right)^{1/2} + \left(1 - \frac{2e\phi}{T}\right)^{1/2} \right], \quad (4.30)$$

que é um poço de potencial, correspondente a um movimento oscilatório conhecido também como potencial de Sagdeev. Equações da forma (4.28) são chamadas de equações pseudopotenciais por causa de sua semelhança com a lei de Newton para o movimento $m\ddot{x} = -dV(x)/dx$.

Com o objetivo de fazer um gráfico da equação (4.30), consideramos as seguintes quantidades adimensionais, $\bar{V} = V/(4\pi n_0 T)$ e $\bar{\phi} = e\phi/T$. A equação (4.30), na sua forma adimensional, resulta em

$$\bar{V}(\bar{\phi}) = -(1 + \bar{\phi})^{1/2} - (1 - \bar{\phi})^{1/2} \quad (4.31)$$

O gráfico da equação (4.31) é mostrado na figura 4.1

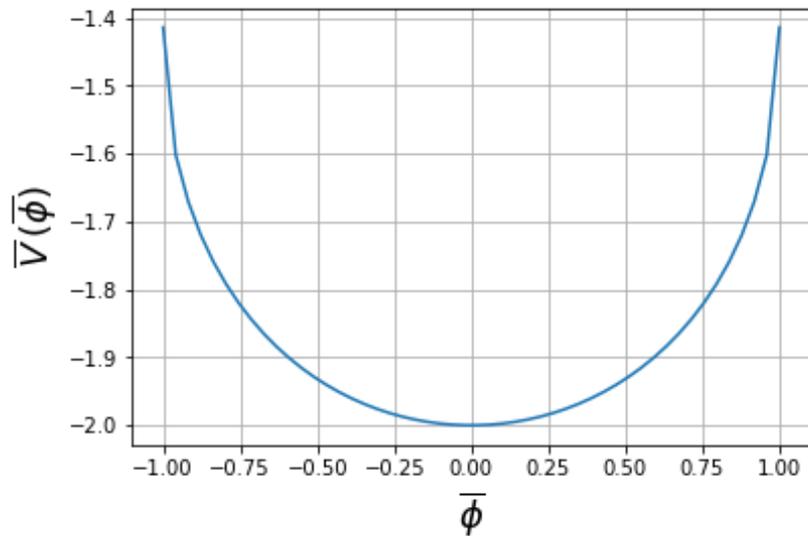


Figura 4.1: Gráfico do potencial adimensional da equação (4.31).

4.2 Os modos de Case-van Kampen para plasmas

Partindo do sistema de Vlasov-Poisson

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_e + \frac{e}{m} \nabla \phi \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_e = 0, \quad (4.32)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi e \left(\int f_e d^3 \mathbf{v} - n_0 \right), \quad (4.33)$$

linearizamos com $f_e = f_0 + f$ e tomando ϕ de ordem 1, sendo n_0 uma densidade iônica imóvel e homogênea. Segue a equação de Vlasov linearizada

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{e}{m} \nabla \phi \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 = 0 \quad (4.34)$$

onde f_0 é a função distribuição de ordem zero, f uma perturbação de f_0 , ϕ é o potencial eletrostático, $-e$ e m são a carga e a massa do elétron, respectivamente.

A segunda e terceira equação do sistema são, respectivamente,

$$\nabla^2 \phi = 4\pi e \int f d^3 \mathbf{v} \quad (4.35)$$

e

$$\int d v f_0(\mathbf{v}) = n_0, \quad (4.36)$$

Estas três equações formam o sistema de Vlasov-Poisson linearizado.

Supondo que a perturbação inicial, $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0)$ é conhecida. O sistema é expandido em série de Fourier da seguinte forma [32]

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_k f_k(\mathbf{v}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (4.37)$$

e

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_k \phi_k(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (4.38)$$

Inserindo (4.38) e (4.37) em (4.34) e (4.35) e, sem perda de generalidade, orientando o sistema de forma que o eixo z coincida com o sentido de propagação de k , obtemos, para

cada componente,

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + i k v_z f_k + i k \frac{e}{m} \phi_k \frac{\partial f_0}{\partial v_z} = 0, \quad (4.39)$$

e

$$-k^2 \phi_k = 4 \pi e \int f_k d^3 \mathbf{v}. \quad (4.40)$$

Eliminando ϕ_k mutuamente entre as duas equações, obtemos

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + i k v_z f_k - i \frac{\omega_p^2}{k n_0} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \int f_k(k, \mathbf{v}', t) d^3 \mathbf{v}' = 0. \quad (4.41)$$

onde $\omega_p = \sqrt{4 \pi n_0 e^2 / m}$ é a frequência de plasma. Fazendo outra transformada, agora no tempo

$$f_k(k, \mathbf{v}, t) = f_\omega(k, \mathbf{v}, \omega) e^{-i \omega t}, \quad (4.42)$$

sendo ω uma constante real arbitrária. Inserindo (4.42) em 4.41, obtemos

$$\left(v_z - \frac{\omega}{k} \right) f_\omega = \frac{\omega_p^2}{k^2 n_0} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \int f_\omega(k, \mathbf{v}', \omega) d^3 \mathbf{v}' \quad (4.43)$$

Como k aponta na direção de z , podemos fazer $f_\omega(k, u, \omega) = \int \int f_\omega(k, \mathbf{v}, \omega) dv_x dv_y$ (aqui definimos $u \equiv v_z$) e escrever $f_\omega(k, u, \omega)$ como $f_\omega(u)$ por brevidade. Integrando em v_x e em v_y , a equação (4.43) resulta em

$$\left(u - \frac{\omega}{k} \right) f_\omega(u) = -\eta_C(u) \int f_\omega(u') du' \quad (4.44)$$

onde

$$\eta_C(u) = -\frac{\omega_p^2}{k^2 n_0} \frac{\partial}{\partial u} \int f_0(\mathbf{v}) dv_x dv_y \quad (4.45)$$

Escolhendo a normalização

$$\int f_\omega(u) du = 1, \quad (4.46)$$

a equação (4.44) se reduz à

$$\left(u - \frac{\omega}{k} \right) f_\omega(u) = -\eta_C(u). \quad (4.47)$$

Supomos que as soluções de (4.47) sejam $f_\nu(u)$, em que $\nu = \omega/k$ é a velocidade de fase.

A equação (4.47) resulta em

$$(u - \nu)f_\nu(u) = -\eta_C(u), \quad (4.48)$$

que também pode ser escrita como

$$(u - \nu)f_\nu(u) = -\eta_C(u) \int f_\nu(u') du', \quad (4.49)$$

Juntamente com a equação (4.48), é interessante estudar as soluções da equação adjunta

$$(u - \nu)\tilde{f}_\nu(u) = - \int \eta_C(u')\tilde{f}_\nu(u') du' \quad (4.50)$$

com a condição de normalização

$$\int \eta_C(u')\tilde{f}_\nu(u') du' = 1 \quad (4.51)$$

temos

$$(u - \nu)\tilde{f}_\nu(u) = -1. \quad (4.52)$$

Case [19] classificou as soluções (4.48) e (4.52) para $\nu \in \mathbb{R}$ e $\nu \in \mathbb{C}$, respectivamente, nos casos 1 e 2. O caso 1 é dividido em 3 subcasos. Não iremos aqui adentrar nesses casos visto que nosso foco não é o sistema de plasmas e sim o gás de bósons.

Capítulo 5

Equação de Landau-Vlasov e sua redução dimensional

O conteúdo deste capítulo foi retirado de [11]. Na ausência de condensação de Bose-Einstein, gases frios e diluídos feitos de átomos de metal alcalino de bósons de massa m são bem descritos pela equação de Boltzmann-Vlasov [1–4], considerando que a força \mathbf{F} num dado ponto do sistema é $\mathbf{F} = m \ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U$ onde $U = U_{\text{ext}} + U_{\text{mf}}$ é a energia potencial do sistema, U_{mf} é o potencial de campo médio devido à interação interatômica e

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{\text{fonte}} = I_{\text{col}}[F],$$

onde $I_{\text{col}}[F]$ é a integral de colisão e descreve processos dissipativos. A Eq. (3.5) resulta em

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} - \nabla_{\mathbf{r}} (U_{\text{ext}} + U_{\text{mf}}) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \right] F = I_{\text{col}}[F]. \quad (5.1)$$

A equação (5.1) é válida no limite semiclássico, ou seja, quando a energia térmica é grande em comparação com a separação entre os autovalores de energia do potencial [33]. Aqui,

$$U_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = V(x) + W(\mathbf{r}_{\perp}) \quad (5.2)$$

é o potencial de confinamento externo, devido a um potencial genérico $V(x)$ na direção axial x e a um potencial harmônico

$$W(\mathbf{r}_\perp) = \frac{m\omega_\perp^2}{2} (y^2 + z^2) \quad (5.3)$$

com frequência ω_\perp na direção transversal $\mathbf{r}_\perp = (y, z)$.

$$U_{\text{mf}}(\mathbf{r}, t) = \gamma n(\mathbf{r}, t) \quad (5.4)$$

novamente é o potencial de campo médio devido à interação interatômica. Para bósons $U_{\text{mf}}(\mathbf{r}, t) = 2g n(\mathbf{r}, t)$ [4, 33], onde g é a constante de acoplamento [28]. Então

$$\gamma = \frac{8\pi\hbar^2}{m} a_s, \quad (5.5)$$

onde a_s é o comprimento de espalhamento de ondas s da interação entre átomos de bósons diluídos [6]. As não linearidades no lado esquerdo da equação (5.1) surgem da densidade local 3D $n(\mathbf{r}, t)$, que é obtida a partir da distribuição do espaço de fase $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ como

$$n(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{p} F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t). \quad (5.6)$$

Uma integração espacial adicional dá o número total de átomos N :

$$N = \int d^3\mathbf{r} n(\mathbf{r}, t). \quad (5.7)$$

O potencial de campo médio $U_{\text{mf}}(\mathbf{r}, t)$, que é linear em a_s , afeta a parte de fluxo da equação cinética de Boltzmann, enquanto a integral de colisão $I_{\text{col}}[F]$, que é quadrática no comprimento de espalhamento a_s , descreve processos dissipativos [24]. A integral colisional pode ser tratada dentro de uma formulação geral ou, mais simplesmente, dentro da aproximação do tempo de relaxação [24, 34]

$$I_{\text{col}}[F] \simeq -\frac{1}{\tau} [F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) - F_{\text{eq}}(\mathbf{r}, \mathbf{p})] \quad (5.8)$$

onde τ é o tempo de relaxação relacionado ao tempo médio entre as colisões, para $\tau \rightarrow \infty$ entramos no regime sem colisão e $F_{\text{eq}}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ é a distribuição de equilíbrio global. Por definição, no regime sem colisão de campo médio a integral colisional pode ser desprezada: neste caso, o fenômeno sob investigação tem um tempo característico muito menor do que o tempo de relaxação [1]. Devemos trabalhar neste regime sem colisão e a equação de Boltzmann-Vlasov 3D (5.1) se torna a chamada equação de Landau-Vlasov 3D [35]:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} - \nabla_{\mathbf{r}} (V(x) + W(\mathbf{r}_{\perp}) + \gamma n(\mathbf{r}, t)) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \right] F = 0 \quad (5.9)$$

Uma simplificação adicional é alcançada assumindo que a amostra atômica está sob um confinamento transversal muito forte devido a uma grande frequência ω_{\perp} do potencial harmônico de confinamento [7]. De forma consistente, supomos que a energia transversal do confinamento é muito maior do que a energia cinética axial média dos átomos. Ou seja,

$$\hbar \omega_{\perp} \gg \frac{\langle p^2 \rangle}{2m}. \quad (5.10)$$

Desse modo, o sistema 3D é restringido a ocupar o estado fundamental transversal, que é descrito por uma densidade de probabilidade gaussiana de largura espacial $a_{\perp} = \sqrt{\hbar / (m \omega_{\perp})}$, tornando-se praticamente unidimensional (quase 1D) [36]. Definimos

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f(x, p, t) f_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{p}_{\perp}) \quad (5.11)$$

onde $f(x, p, t)$ é a função de distribuição axial dependente do tempo e $f_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{p}_{\perp}) = f_{\perp}(y, z, p_y, p_z)$ é a função de distribuição transversal, definida como

$$f_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{p}_{\perp}) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^2} \exp\left(-\frac{\frac{p_{\perp}^2}{2m} + W_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp})}{\frac{\hbar \omega_{\perp}}{2}}\right) \quad (5.12)$$

e tal que

$$n_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}) = \int d^2 \mathbf{p}_{\perp} f_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{p}_{\perp}) = \frac{1}{\pi a_{\perp}^2} \exp\left(-\frac{y^2 + z^2}{a_{\perp}^2}\right). \quad (5.13)$$

As integrais são calculadas de menos para mais infinito, exceto se explicitamente declarado. Inserindo a equação (5.11) na equação (5.9) e levando em consideração as equações (5.12) e (5.13), após a integração sobre y, p_y, z, p_z , ficamos com a equação Landau-Vlasov

1D

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (V(x) + g\rho(x, t)) \frac{\partial}{\partial p} \right) f = 0 \quad (5.14)$$

onde

$$\rho(x, t) = \int dp f(x, p, t) \quad (5.15)$$

é a densidade local axial e

$$g = \gamma \int d^2 \mathbf{r}_\perp n_\perp(\mathbf{r}_\perp)^2 = \frac{\gamma}{2\pi a_\perp^2} = \frac{4\hbar^2 a_s}{ma_\perp^2} \quad (5.16)$$

é uma constante de interação efetiva do potencial interatômico 1D, em que \hbar é a constante de Planck reduzida, m é a massa atômica, a_s é o comprimento de espalhamento de ondas s da interação entre átomos e a_\perp é a largura transversal característica ocupada pelo gás de bósons diluído. Observe também que $f(x, p, t)$ é normalizada para o número total de átomos N , a saber

$$N = \int dx dp f(x, p, t), \quad (5.17)$$

onde N é o número total de bósons. Em alguns casos, usaremos o potencial externo harmônico

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (5.18)$$

embora esta escolha não seja decisiva para o tratamento seguinte.

Em resumo, a equação (5.16) é totalmente confiável para um gás de bósons 1D de átomos frios sob duas condições:

$$\frac{4\pi\hbar^2\rho^2}{\langle p^2 \rangle} \ll 1 \quad (5.19)$$

garantir que o gás de Bose 1D não esteja no regime de quase condensado, e

$$\frac{mg}{\hbar^2\rho} = \frac{4a_s}{\rho a_\perp^2} \ll 1 \quad (5.20)$$

o que implica que o gás bósons 1D não está no regime de Tonks-Girardeau (neste regime as partículas que formam o gás são altamente interagentes). Lembramos que uma derivação mais geral da equação cinética 1D, válida para um gás de bósons caracterizado por um quase-condensado e um componente térmico é fornecida em [35].

Uma observação sobre a possibilidade de cumprir as condições (5.10), (5.19), (5.20)

em experimentos como aqueles relatados em [6, 7] está em ordem. Pode-se considerar um gás axialmente uniforme de átomos de metal alcalino com densidade linear $\rho = N/L$. Os números experimentais típicos são $N \simeq 10^2$, $a_s/a_\perp \simeq 10^{-4}$, $L/a_\perp \simeq 10^4$, de modo que a equação (19) é satisfeita com $4a_s/(\rho a_\perp^2) \simeq 10^{-2}$. Com esses valores experimentais, temos $2\pi N^2 (a_\perp/L)^2 \simeq 10^{-2}$. Assim, as condições pares (5.10) e (5.19), que podem ser reescritas como

$$2\pi N^2 \left(\frac{a_\perp}{L}\right)^2 \ll \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} \ll 1 \quad (5.21)$$

são satisfeitas com a escolha

$$\langle p^2 \rangle / (2m) \simeq 10^{-1} \hbar \omega_\perp \quad (5.22)$$

uma solicitação razoável em configurações experimentais. Para os parâmetros importantes N e a_s/a_\perp as equações (5.10), (5.19) e (5.20) definem os intervalos $10 \leq N \leq 5 \cdot 10^2$ e $10^{-4} \leq a_s/a_\perp \leq 5 \cdot 10^{-2}$.

Capítulo 6

Modos de Bernstein-Greene-Kruskal para bósons

O conteúdo deste capítulo foi extraído de [37]. No caso estacionário onde $\partial/\partial t = 0$ em todos os lugares, a solução geral para a Eq. (5.14) é

$$f = f(H), \quad (6.1)$$

onde f é uma função arbitrária da função de energia

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(x) \quad (6.2)$$

com o potencial total

$$U(x) = V(x) + g\rho(x). \quad (6.3)$$

Isso vale para o potencial externo arbitrário, desde que seja independente do tempo. O mesmo raciocínio se aplica à solução BGK para o sistema estacionário de Vlasov-Poisson, com algumas diferenças. A função de energia no problema de plasma contém o potencial eletrostático, enquanto no problema de bósons H depende da própria função de distribuição de partículas, através do potencial de interação $g\rho$ onde ρ é um funcional de f , viz. Eq. (5.15). Além disso, não há nada semelhante à equação de Poisson para ser resolvida de forma autoconsistente, mas apenas a condição de normalização (5.17). Nesse contexto, portanto, não é exagero considerar a equação estacionária de Vlasov-Landau muito mais

simples do que o sistema estacionário de Vlasov-Poisson. No entanto, aplicações concretas requerem uma análise detalhada, como mostrado nos próximos exemplos.

6.1 Distribuição de Maxwell-Boltzmann

A forma funcional de $f(H)$ é totalmente livre, o que está de acordo com a suposição de não colisão, de modo que nenhum equilíbrio particular (por exemplo, a distribuição de Bose-Einstein) é preferido. Como explicado, a solução de equilíbrio da Eq. (6.1) é uma forma arbitrária dependendo apenas de H . Não se trata necessariamente de uma função de equilíbrio para um gás de natureza específica. Por exemplo, para um gás de bósons a solução de equilíbrio é uma função de Bose-Einstein, para um gás férmions a distribuição de equilíbrio é uma função de Fermi-Dirac etc. Trata-se aqui no problema matemático de resolver a Eq. (6.1) para a solução de equilíbrio ($\partial/\partial t = 0$), independentemente da natureza estatística do gás.

Suponha que haja uma distribuição Maxwell-Boltzmann

$$f(H) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\beta H) \quad (6.4)$$

onde β tem o papel de temperatura inversa em unidades de energia, A é uma constante de normalização a ser determinada e $1/\sqrt{2\pi}$ é um fator numérico incluído por conveniência.

Das Eqs. (5.15) e (6.2)-(6.4), temos:

$$\rho(x, t) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \exp [V(x) - g \rho(x)] \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp \left[-\frac{\beta p^2}{2m} \right]. \quad (6.5)$$

Utilizando:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \exp \left[-\frac{\beta p^2}{2m} \right] = \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}}. \quad (6.6)$$

obtemos a densidade do número de partículas 1D

$$\rho(x) = A \left(\frac{m}{\beta} \right)^{1/2} \exp \left[-\beta \left(V(x) + g \rho(x) \right) \right]. \quad (6.7)$$

A densidade local axial aparece em ambos os lados da Eq. (6.7). No entanto, neste exemplo, a equação determinante pode ser facilmente desemaranhada. Multiplicando

ambos os lados da equação (6.7) por $\exp[\beta g \rho(x)]$, obtemos

$$\exp[\beta g \rho(x)] \rho(x) = A \sqrt{\frac{m}{\beta}} \exp[-\beta V(x)] \quad (6.8)$$

Agora multiplicando ambos os lados da equação (6.8) por βg resulta em:

$$(\beta g \rho(x)) \exp[\beta g \rho(x)] = g A \sqrt{\beta m} \exp[-\beta V(x)], \quad (6.9)$$

que têm o formato da equação de Lambert

$$y e^y = z, \quad (6.10)$$

com

$$y = \beta g \rho(x) \quad (6.11)$$

e

$$z = g A \sqrt{\beta m} \exp[-\beta V(x)]. \quad (6.12)$$

Então

$$\beta g \rho(x) = W \left(g A \sqrt{\beta m} \exp[-\beta V(x)] \right). \quad (6.13)$$

Finalmente

$$\rho(x) = \frac{1}{\beta g} W \left(g A \sqrt{\beta m} \exp(-\beta V(x)) \right), \quad (6.14)$$

onde a função Lambert W ou “função produto log” é definida [38] como a solução de $W(s) \exp[W(s)] = s$, no domínio $s \geq -1/e$. A função de Lambert pode ser expandida como segue:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^{n-2}}{(n-1)!} x^n. \quad (6.15)$$

Abaixo gráfico da função de Lambert, Fig. 6.1.

Por construção, a solução é analiticamente exata. O potencial total exato (6.3) também está inteiramente disponível. Para simplificar, uma interação repulsiva ($g > 0$) é assumida, de forma que $\rho(x)$ na Eq. (6.14) é automaticamente uma quantidade real positivo definida.

A última etapa diz respeito à determinação da constante de normalização A . Por exemplo, para o potencial harmônico na Eq. (5.18), é conveniente introduzir as variáveis

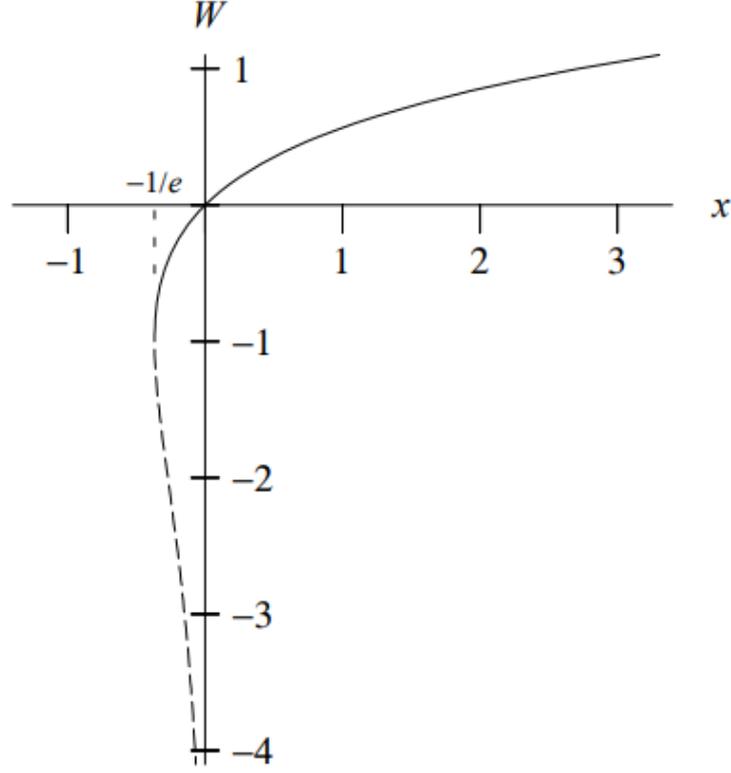


Figura 6.1: Gráfico da função de Lambert $W(x)$

reescaloadas

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{g} = \frac{N\beta g}{L}, \quad \bar{A} = \frac{A}{N\beta\omega}, \quad (6.16)$$

em termos do comprimento característico $L = 1/(\sqrt{\beta m \omega})$. A condição de normalização (5.17) produz

$$\bar{g} = \int d\bar{x} W \left[\bar{g} \bar{A} \exp\left(-\frac{\bar{x}^2}{2}\right) \right], \quad (6.17)$$

que não pode ser resolvido analiticamente para \bar{A} . No entanto, dada a constante de acoplamento reescalada \bar{g} , pode-se facilmente obter \bar{A} numericamente, como mostrado na Fig. 6.2. Deve-se notar que \bar{g} tem valores muito pequenos nos experimentos de hoje [11, 39], o que permite aproximar $W(s) \simeq s$ para um argumento genérico $s \ll 1$ na Eq. (6.17), resultando em $\bar{A} = 1/\sqrt{2\pi} = 0.40$ nesta aproximação. Por exemplo, com $N = 100, g = 5 \times 10^{-41} \text{kg m}^3 \text{s}^{-2}, m = 9 \times 10^{-27} \text{kg}$ (átomo de Li) como na Ref. [11] junto com os valores típicos $\omega = 700 \text{rad/s}, \beta = 10^{28} \text{J}^{-1}$ [40] um tem $L = 0.15 \text{mm}, \bar{g} = 3.32 \times 10^{-7}$. As condições de validade (5.19) e (5.20) são atendidas com segurança para estes parâmetros. É interessante reescrever a condição de validade (5.19)

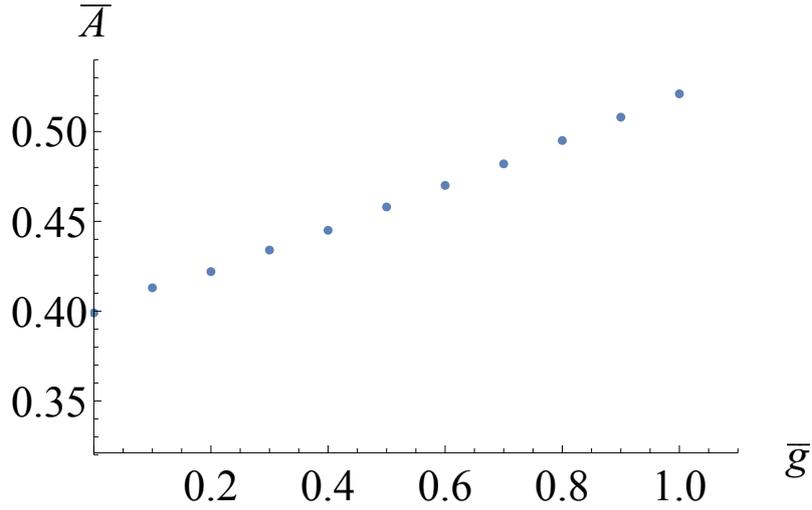


Figura 6.2: Solução numérica da Eq. (6.17) para $0 \leq \bar{g} \leq 1$, onde \bar{g} e \bar{A} são dados na Eq. (6.16).

usando as aproximações $\bar{g} \ll 1$ e $\bar{A} \simeq 1/\sqrt{2\pi}$ tal que $A \simeq N\beta\omega/\sqrt{2\pi}$. Da Eq. (6.7) temos a estimativa $\rho \sim N\omega\sqrt{\beta m/(2\pi)}$. Junto com $\langle p^2 \rangle / (2m) \sim 1/\beta$, temos que Eq. (5.19) torna-se

$$\frac{1}{\beta} \gg N \hbar \omega, \quad (6.18)$$

que tem um significado termodinâmico evidente, ou seja, significa que a energia térmica é muito maior que a energia dos quanta de oscilação. Sob a mesma aproximação, a função de Lambert na Eq. (6.14) pode ser substituída com segurança por $W(s) \simeq s$ para que a densidade numérica assuma a forma Maxwelliana

$$\rho(x) = N \omega \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{1/2} \exp(-\beta V(x)). \quad (6.19)$$

Para resumir e sem qualquer aproximação dentro do modelo de Landau-Vlasov, para a distribuição de Maxwell-Boltzmann (6.4) tem-se a densidade de número exata (6.14), sujeito a $N = \int dx \rho(x)$ que determina a constante de normalização A dado um potencial externo arbitrário $V(x)$.

6.2 Distribuição degenerada semelhante a de Fermi-Dirac

Um segundo exemplo é fornecido por uma distribuição tipo Fermi-Dirac completamente degenerada

$$f(H) = A \Theta(E_F - H), \quad (6.20)$$

onde Θ é a função degrau, A é uma constante de normalização e $E_F > 0$ é um parâmetro de energia que seria a energia de Fermi se fosse um gás de Fermi, usando a nomenclatura tradicional [41]. Além disso, será assumido $E_F \geq U(x)$, caso contrário algumas quantidades passariam a ter valor complexo no que segue. Porém, no contexto de um gás de bósons, E_F é apenas uma medida do alcance ou amplitude da energia, exatamente como no “water bag model” [41]. Por construção, a Eq. (6.20) mostra uma solução estacionária exata da equação de Landau-Vlasov. Fazendo a integração no espaço de momento

$$\rho(x) = \int dp A \Theta(E_F - H), \quad (6.21)$$

que resulta em

$$\rho(x) = \int dp A \Theta(E_F - p^2/2m - U(x)) \quad (6.22)$$

Usando a propriedade da função degrau, $\Theta = 1$ para $E_F - p^2/2m - U(x) \geq 0$. Isso nos dá os seguintes valores: $p \leq \sqrt{2m}(E_F - U(x))$ e $p \geq -\sqrt{2m}(E_F - U(x))$. Fazendo a integração de (6.21) com esses limites de integração, resulta em:

$$\rho(x) = 2 A \sqrt{2m} (E_F - U(x))^{1/2} \Theta(E_F - U(x)). \quad (6.23)$$

Elevando ao quadrado a equação acima e utilizando $U(x) = V(x) + g \rho(x)$, obtemos

$$\rho(x)^2 = 8 m A^2 (E_F - V(x) - g \rho(x)) \Theta(E_F - V(x)). \quad (6.24)$$

Fazendo uma manipulação algébrica simples em (6.24), obtemos a seguinte equação de segundo grau para $\rho(x)$:

$$\rho(x)^2 + \left(8 m A^2 g \rho(x) - 8 m A^2 (E_F - V(x)) \right) \Theta(E_F - V(x)) = 0. \quad (6.25)$$

A solução sempre não negativa de (6.25) é

$$\rho(x) = 4 m A^2 \left[-g + \left(g^2 + \frac{1}{2 m A^2} (E_F - V(x)) \right)^{1/2} \right] \Theta(E_F - V(x)), \quad (6.26)$$

assumindo $g > 0$ (interação repulsiva). O potencial total exato (6.3) também está imediatamente disponível, para potencial externo arbitrário.

A última etapa é a determinação da constante de normalização A , uma vez escolhido um potencial externo específico. Para o potencial harmônico (5.18), é conveniente introduzir o reescalonamento

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{g} = \frac{N g}{E_F L}, \quad \bar{A} = \frac{E_F A}{N \omega}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{N/L}, \quad (6.27)$$

em termos do comprimento característico $L = \sqrt{E_F/m}/\omega$. A densidade de número 1D adimensional torna-se

$$\bar{\rho} = 4 \bar{A}^2 \left[-\bar{g} + \left(\bar{g}^2 + \frac{1}{2 \bar{A}^2} \left(1 - \frac{\bar{x}^2}{2} \right) \right)^{1/2} \right] \Theta \left(1 - \frac{\bar{x}^2}{2} \right), \quad (6.28)$$

e a condição de normalização $\int dx \rho(x) = N$ produz

$$\frac{1}{4 \bar{A}^2} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} d\bar{x} \left[-\bar{g} + \left(\bar{g}^2 + \frac{1}{2 \bar{A}^2} \left(1 - \frac{\bar{x}^2}{2} \right) \right)^{1/2} \right]. \quad (6.29)$$

A integral na Eq. (6.29) pode ser feita analiticamente, mas em termos de funções transcendentais que é melhor não mostrar. Para valores específicos de \bar{g} , pode-se determinar numericamente \bar{A} e, portanto, a normalização necessária, conforme ilustrado na Fig. 6.3. No limite de \bar{g} muito pequeno, temos $\bar{A} = 1/(2\pi) = 0.16$. A densidade de número 1D sem dimensão é mostrada na Fig. 6.4.

Da mesma forma que no caso Maxwelliano, é possível reescrever a condição de validade

(5.19) usando as aproximações $\bar{g} \ll 1$ e $\bar{A} \simeq 1/(2\pi)$. Da Eq. (6.23) tem-se a estimativa $\rho \sim 2 A \sqrt{2m E_F}$. Juntamente com $\langle p^2 \rangle / (2m) \sim E_F$ resulta

$$E_F \gg N \hbar \omega, \quad (6.30)$$

com um significado termodinâmico evidente (a energia térmica é muito maior que a energia dos quanta de oscilação).

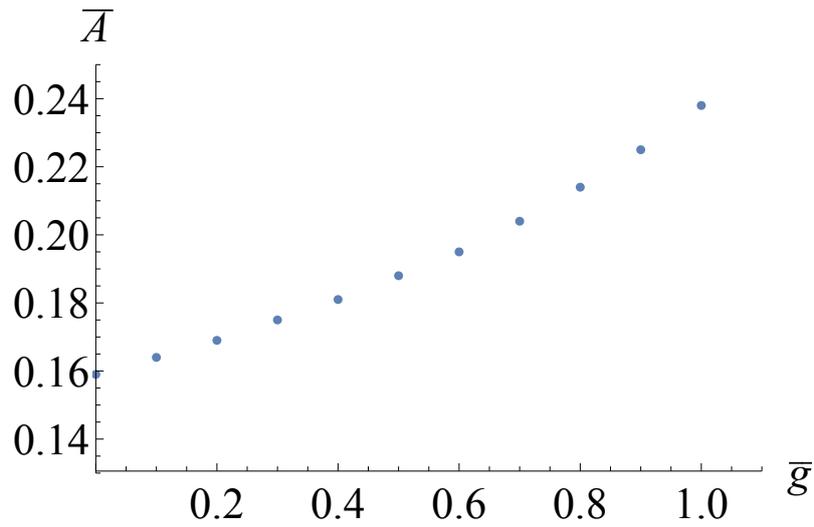


Figura 6.3: Solução numérica da Eq. (6.29) para $0 \leq \bar{g} \leq 1$, onde \bar{g} e \bar{A} são dados na Eq. (6.27).

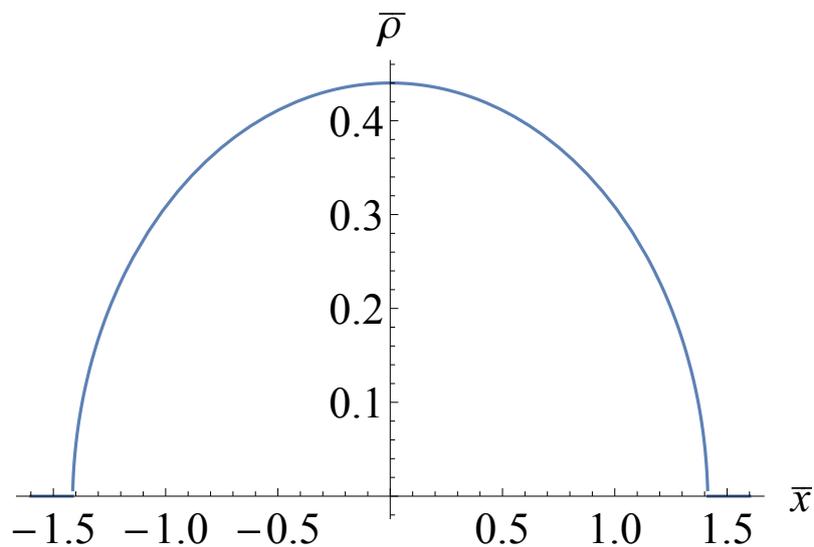


Figura 6.4: Densidade de número 1D da Eq. (6.28), para $\bar{g} = 10^{-2}$, $\bar{A} = 1/(2\pi)$.

Para resumir e sem qualquer aproximação dentro do modelo de Landau-Vlasov, para a distribuição completamente degenerada do tipo Fermi-Dirac (6.20) tem-se a densidade numérica exata (6.26), sujeita a $N = \int dx \rho(x)$ que determina a constante de normalização A dado um potencial externo arbitrário $V(x)$.

Capítulo 7

Modos de Case-van Kampen para bósons

O conteúdo deste capítulo foi extraído de [37]. Os modos de Case-van Kampen são os modos normais em um plasma [18, 19]. Para a equação de Landau-Vlasov, os modos de Case-van Kampen podem ser derivados a partir da suposição $V = 0$. Experimentalmente, uma configuração 1D de átomos ultra frios livres de confinamento externo pode ser produzida por meio de uma geometria de anel 1D com grande raio [8] ou considerando duas barreiras altas nas bordas de um arranjo axial reto [42]. Em ambos os casos, as condições periódicas espaciais podem ser assumidas. A equação Landau-Vlasov 1D se reduz a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} - g \int dp' \frac{\partial f(x, p', t)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p} \right) f(x, p, t) = 0, \quad (7.1)$$

Para prosseguir, definimos

$$f(x, p, t) = f_0(p) + \delta f(x, p, t), \quad (7.2)$$

onde $f_0(p)$ é a distribuição de equilíbrio sujeita a

$$\int dp f_0(p) = n_0 \quad (7.3)$$

onde n_0 é a densidade numérica de equilíbrio 1D e $\delta f(x, p, t)$ é uma perturbação de

primeira ordem. Substituindo (7.2) em (7.1), a equação linearizada resultante é:

$$\frac{\partial \delta f(x, p, t)}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial \delta f(x, p, t)}{\partial x} - g \frac{\partial f_0(p)}{\partial p} \int dp' \frac{\partial \delta f(x, p', t)}{\partial x} = 0 \quad (7.4)$$

Devido às condições de contorno periódicas, é significativo para a transformada de Fourier de acordo com

$$\delta f(x, p, t) = \sum_k f_k(p, t) e^{ikx}, \quad (7.5)$$

onde k é um múltiplo de um número de onda fundamental. Substituindo a Eq. (7.5) em (7.4), resulta:

$$\sum_k e^{ikx} \left(\frac{\partial f_k(p, t)}{\partial t} + \frac{ipk}{m} f_k(p, t) - igk \frac{\partial f_0(p)}{\partial p} \int dp' f_k(p', t) \right) = 0. \quad (7.6)$$

Finalmente a equação acima simplifica para:

$$\frac{\partial f_k(p, t)}{\partial t} + \frac{ikp}{m} f_k(p, t) - igk \frac{\partial f_0(p)}{\partial p} \int dp' f_k(p', t) = 0. \quad (7.7)$$

Complementarmente à abordagem de Landau onde a equação linearizada de Landau-Vlasov é tomada como um problema de valor inicial analisado pelos métodos de transformada de Laplace, a abordagem de Case-Van Kampen assume

$$f_k(p, t) = f_\nu(p) e^{-i\omega t}, \quad \nu = \frac{\omega}{k}, \quad (7.8)$$

onde ω é uma constante arbitrária e real e ν é a velocidade de fase. Inserindo a Eq. (7.8) na Eq. (7.7) dá o problema de autovalor

$$(p - m\nu) f_\nu(p) = gm \frac{\partial f_0(p)}{\partial p} \int dp' f_\nu(p'). \quad (7.9)$$

Seguindo [18, 19], é conveniente assumir a normalização

$$\int dp f_\nu(p) = \text{cte.} = n_0, \quad (7.10)$$

de modo que a equação integral (7.9) simplifica para

$$(p - m\nu) f_\nu(p) = g m n_0 \frac{\partial f_0(p)}{\partial p}. \quad (7.11)$$

No sentido de teoria das distribuições, a solução para a Eq. (7.11) é

$$f_\nu(p) = g m n_0 \wp \left(\frac{\partial f_0(p)}{\partial p} \frac{1}{p - m\nu} \right) + \lambda(\nu) \delta(p - m\nu), \quad (7.12)$$

onde \wp denota o símbolo do valor principal de Cauchy, $\lambda(\nu)$ é uma função a ser determinada e δ é a delta de Dirac. Como pode ser facilmente verificado, a solução (sem valor principal e com $\lambda(\nu) = 0$) não pode ser tornada compatível com a normalização (7.10). Na verdade, para cumprir a normalização é necessário

$$\lambda(\nu) = n_0 - g m n_0 \wp \int dp \frac{\partial f_0(p)}{\partial p} \frac{1}{p - m\nu}, \quad (7.13)$$

onde a integral é considerada no sentido de valor principal. O resultado final é

$$\begin{aligned} f_\nu(p) &= g m n_0 \wp \left(\frac{\partial f_0(p)}{\partial p} \frac{1}{p - m\nu} \right) + \\ &+ \left(n_0 - g m n_0 \wp \int dp' \frac{\partial f_0(p')}{\partial p'} \frac{1}{p' - m\nu} \right) \delta(p - m\nu). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Como aparente, esses modos de Case-Van Kampen não são amortecidos (são ondas estacionárias) e têm um caráter singular, também são designados como modos normais, e não a resposta ao problema de valor inicial por transformada de Laplace, como na abordagem de Landau. Seguindo Case, por meio da introdução de soluções adjuntas adequadas é possível demonstrar que a Eq. (7.14) fornece um conjunto completo, no sentido de que todas as soluções para a equação linearizada de Landau-Vlasov podem ser expressas como uma combinação linear desses modos. Mais precisamente, para simplificar, discutimos apenas a classe 1a entre as quatro classes de autofunções na terminologia de Case, conforme detalhado no artigo original [19] e no livro-texto [31]. Para demonstrar a completude do conjunto completo de autofunções de Case-Van Kampen torna-se necessário introduzir uma equação auxiliar (ou adjunta) com um conjunto diferente de autofunções ortogonais àquelas do conjunto original, exceto quando os autovalores coincidem. A análise completa

não é trivial, mas inteiramente semelhante ao caso de Vlasov-Poisson, mostrado em [31] por exemplo.

Apesar do caráter singular dos modos de Case-Van Kampen, eles podem ser usados para calcular quantidades físicas bem comportadas. Por exemplo, podemos considerar a perturbação da densidade numérica 1D

$$\delta n(x, t) = \int dp dw c(\omega) \delta f(x, p, t), \quad (7.15)$$

onde $c(\omega)$ é uma função peso arbitrária. Devido a linearidade da equação de Vlasov, é possível superpor vários modos próprios com frequências distintas, no sentido expresso na Eq. (7.15). Restringindo-se à k -ésima componente de Fourier, aplicando às Eqs. (7.8) e (7.14), temos

$$\delta n(x, t) = n_0 \int dp \int d\omega c(\omega) \delta \left(p - \frac{m\omega}{k} \right) e^{ikx - i\omega t}, \quad (7.16)$$

que resulta na função bem comportada

$$\delta n(x, t) = \frac{n_0 k}{m} \int dp c \left(\omega = \frac{kp}{m} \right) e^{ik \left(x - \frac{pt}{m} \right)}, \quad (7.17)$$

depois de usar a propriedade $\delta(p - m\omega/k) = (k/m)\delta(\omega - kp/m)$. Nesse caso, o primeiro e o último termos da Eq. (7.14) cancela na integração (o mesmo ocorre para plasmas de Vlasov-Poisson [29, 31]). Como uma ilustração simples, a função de peso gaussiana

$$c(\omega) = \frac{\delta n_0}{\sqrt{2\pi} \Omega n_0} \exp \left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\Omega^2} \right) \quad (7.18)$$

substituindo na Eq. (7.17)

$$\delta n(x, t) = \frac{\delta n_0}{\sqrt{2\pi} \Omega} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \text{Exp} \left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\Omega^2} + ik \left(x - \frac{\omega t}{k} \right) \right) \quad (7.19)$$

produz a perturbação de densidade

$$\delta n(x, t) = \delta n_0 \exp \left(i \left(kx - \omega_0 t \right) - \frac{\Omega^2 t^2}{2} \right). \quad (7.20)$$

Este é um exemplo do fato bem conhecido de que embora os modos próprios de Case-Van Kampen isolados sejam ondas estacionárias, eles podem produzir objetos macroscópicos

amortecidos, levando em consideração a mistura de fases. De forma consistente, o limite monocromático $\Omega \rightarrow 0$ não é amortecido.

Capítulo 8

Artigo publicado



Article

Bernstein–Greene–Kruskal and Case–Van Kampen Modes for the Landau–Vlasov Equation

Fernando Haas ^{*,†} and Rodrigo Vidmar

Physics Institute, Federal University of Rio Grande do Sul, Av. Bento Gonçalves 9500, Porto Alegre 91501-970, RS, Brazil; rodrigovidmar@gmail.com

* Correspondence: fernando.haas@ufrgs.br

† Current address: Institut für Theoretische Physik, Lehrstuhl IV: Weltraum- und Astrophysik, Ruhr-Universität Bochum, D-44780 Bochum, Germany.

Abstract: The one-dimensional Landau–Vlasov equation describing ultracold dilute bosonic gases in the mean-field collisionless regime under strong transverse confinement is analyzed using traditional methods of plasma physics. Time-independent, stationary solutions are found using a similar approach as for the Bernstein–Greene–Kruskal nonlinear plasma modes. Linear stationary waves similar to the Case–Van Kampen plasma normal modes are also shown to be available. The new bosonic solutions have no decaying or growth properties, in the same sense as the analog plasma solutions. The results are applied for real ultracold bosonic gases accessible in contemporary laboratory experiments.

Keywords: cold dilute bosonic gas; Landau–Vlasov equation; Bernstein–Greene–Kruskal modes; Case–Van Kampen modes

PACS: 05.30.Jp; 52.35.Sb; 67.85.-d



Citation: Haas, F.; Vidmar, R. Bernstein–Greene–Kruskal and Case–Van Kampen Modes for the Landau–Vlasov Equation. *Atoms* **2022**, *10*, 28. <https://doi.org/10.3390/atoms10010028>

Academic Editors: J. Tito Mendonça and Hugo Terças

Received: 13 January 2022

Accepted: 24 February 2022

Published: 1 March 2022

Publisher's Note: MDPI stays neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



Copyright: © 2022 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

1. Introduction

When the average collision time in ultracold dilute gases made of bosonic atoms is much larger than the relevant dynamics characteristic time scale, it is possible to have a model based on the Landau–Vlasov equation [1]. The Landau–Vlasov equation is obtained from the Boltzmann–Vlasov equation [1–4] neglecting the collision operator. The dynamics of ultracold bosonic systems, e.g., in the crossover from collisionless to collisional regimes needs the Boltzmann–Vlasov equation [5]. Hydrodynamic equations [6,7] are useful tools in the collisional case, for instance, for Bose–Einstein condensates [6] or the superfluid Fermi gas in the BCS–BEC crossover [8].

Under a very strong transverse confinement, a bosonic gas is in a quasi one-dimensional (1D) configuration. Experimental achievement of quasi-1D systems is realized in ultracold atoms trapped in optical potentials with harmonic transverse confinement energies much larger than the temperature or chemical potential [9]. The collisionless regime is enhanced in the quasi-1D configuration. Indeed, in 1D binary elastic collisions, particles exchange their energies completely, thus there is no sensible effects from these collisions between identical particles. Consequently, no thermalization is possible, as verified in ultracold bosonic atoms trapped in 1D optical lattices [10,11]. For these dilute 1D bosonic systems, the Landau–Vlasov equation is applicable, provided the gas does not contain a quasi-condensate and that it is not in the Tonks–Girardeau regime, with fermionic properties [10,12]. We are following the terminology of ultracold atoms community [12] (and references therein) when referring to the Landau–Vlasov equation. Namely, it is collisionless so that it has no “Landau collision operator”, as would be implied in the context of plasma physics.

Recently [12], the linear stability of solutions of the 1D Landau–Vlasov equation was investigated by means of well-known methods from plasma physics, namely, the Landau or Laplace transform approach. In this method, the time-evolution of perturbations around the equilibrium distribution function is treated as an initial-value problem. The linear Landau damping rate (or growth rate, for unstable equilibria) is therefore determined upon the adequate analysis in the complex plane (Landau contour). The similarity between the Landau–Vlasov equation and the Vlasov–Poisson system describing collisionless electrostatic plasmas provides a stimulating scenario for the application of plasma techniques in a seemingly uncorrelated area such as in the study of ultracold bosonic gases.

In this context, the present work is dedicated to the discussion of time-independent solutions and stationary wave solutions for the 1D Landau–Vlasov equation. In plasmas, stationary solutions for the Vlasov–Poisson system can be derived starting from Jeans’s theorem according to which the particle distribution function satisfying Vlasov’s equation should be a function of the constants of motion. In the time-independent case, the particle energy is such a constant of motion or invariant, as treated in the original work [13] by Bernstein, Greene, and Kruskal (BGK). By construction, these so-called BGK modes are exact nonlinear plasma oscillations which do not present damping or growth. The BGK approach where the energy is the central dynamical variable can be adapted for the derivation of phase-space hole structures [14–17] and, to a more limited extent, to quantum plasmas [18].

In spite of the more popular view in terms of the surfing electron interpretation [19], an alternative, more rigorous interpretation of Landau damping is in terms of the phase mixing superposition of Case–Van Kampen modes [20]. Introduced by Van Kampen [21] and demonstrated by Case [22] to form a complete orthogonal set for the linearized Vlasov–Poisson system, the stationary wave or Case–Van Kampen modes have been discussed in a variety of contexts. For instance, in plasmas with an ionic background slowly varying in time [23]; in multidimensional non-uniform plasmas [24]; for nonlinear waves [25]; extended Fermi systems [26]; and electromagnetic [27], collisional [28], and quantum [29] plasmas. As discussed in Section 3, the Case–Van Kampen modes are also available for an ultracold boson gas described by the Landau–Vlasov equation.

This work is organized as follows. In Section 2, we revisit the 1D Landau–Vlasov equation, which was derived and discussed in detail in [12]. Section 3 considers BGK modes and Section 4 the Case–Van Kampen modes for the 1D Landau–Vlasov equation. Section 5 is reserved to the conclusions and final remarks.

2. The One-Dimensional Landau–Vlasov Equation

The one-dimensional (1D) Landau–Vlasov equation is given [12] by

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(V(x) + g \rho(x, t) \right) \frac{\partial}{\partial p} \right] f = 0, \quad (1)$$

where $f = f(x, p, t)$ is the 1D probability distribution function, $V(x)$ is the external confinement potential,

$$\rho = \rho(x, t) = \int dp f(x, p, t) \quad (2)$$

is the axial local density and

$$g = \frac{4 \hbar^2 a_s}{m a_{\perp}^2} \quad (3)$$

is the renormalized 1D interaction strength, in which \hbar is the reduced Planck constant, m is the atomic mass, a_s is the s-wave scattering length of the interaction between atoms, and a_{\perp} is the characteristic transverse width occupied by the dilute bosonic gas. The integrals are taken from minus to plus infinity except if explicitly stated. The normalization

$$N = \int dx dp f(x, p, t) \quad (4)$$

is adopted, where N is the total number of bosons. In some cases we will use the harmonic external potential

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \tag{5}$$

although this choice is not decisive for the following treatment.

The validity conditions of the 1D Landau–Vlasov equation are

$$\hbar\omega_{\perp} \gg \frac{\langle p^2 \rangle}{2m}, \tag{6}$$

where $\hbar\omega_{\perp}$ is the energy associated with the transverse confinement,

$$\frac{4\pi\hbar^2\rho^2}{\langle p^2 \rangle} \ll 1, \tag{7}$$

and

$$\frac{m g}{\hbar^2\rho} \ll 1. \tag{8}$$

Equations (6)–(8) are resp. Equations (10), (18) and (19) in [12], assuring a quasi-1D configuration where the ultracold dilute bosonic gas is neither in a quasi-condensate or Tonks–Girardeau regime.

3. Bernstein–Greene–Kruskal Modes

In the stationary case where $\partial/\partial t = 0$ everywhere, the general solution to Equation (1) is

$$f = f(H), \tag{9}$$

where f is an arbitrary function of the energy function

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(x) \tag{10}$$

with the total potential

$$U(x) = V(x) + g\rho(x). \tag{11}$$

This holds for arbitrary external potential, as long as it is time-independent. The same reasoning applies to the BGK solution for the stationary Vlasov–Poisson system, with some differences. The energy function in the plasma problem contains the electrostatic potential, while in the bosons problem H depends on the particle distribution function itself, through the interaction potential $g\rho$ where ρ is a functional of f , viz. Equation (2). Moreover, there is nothing similar to Poisson’s equation to be self-consistently solved, but only the normalization condition (4). In this context, therefore, it is not an exaggeration to consider the stationary Vlasov–Landau equation to be much simpler than the stationary Vlasov–Poisson system. Nevertheless, concrete applications require a detailed analysis, as shown in the next examples.

3.1. Maxwell–Boltzmann Distribution

The functional form of $f(H)$ is entirely free, which is in accordance with the collisionless assumption so that no particular equilibrium (e.g., the Bose–Einstein distribution) is preferred. Suppose there is a Maxwell–Boltzmann distribution

$$f(H) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\beta H) \tag{12}$$

where β has the role of inverse temperature in energy units, A is a normalization constant to be determined and $1/\sqrt{2\pi}$ is a numerical factor included for convenience.

From Equations (2) and (10)–(12), the 1D particle number density is

$$\rho(x) = A \left(\frac{m}{\beta} \right)^{1/2} \exp \left[-\beta \left(V(x) + g \rho(x) \right) \right]. \quad (13)$$

The axial local density appears in both sides of Equation (13). Nevertheless, in this example the determining equation can be easily disentangled according to

$$\rho(x) = \frac{1}{\beta g} W \left(g A \sqrt{\beta m} \exp(-\beta V(x)) \right), \quad (14)$$

where the Lambert W function or product log function is defined [30] as the solution of $W(s) \exp[W(s)] = s$, in the domain $s \geq -1/e$. By construction, the solution is analytically exact. The exact total potential (11) is also entirely available. For simplicity, a repulsive interaction ($g > 0$) is assumed, so that $\rho(x)$ in Equation (14) is automatically a real, positive definite quantity.

The last step concerns the determination of the normalization constant A . For instance, for the harmonic potential in Equation (5), it is convenient to introduce the rescaled variables

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{g} = \frac{N \beta g}{L}, \quad \bar{A} = \frac{A}{N \beta \omega}, \quad (15)$$

in terms of the characteristic length $L = 1/(\sqrt{\beta m} \omega)$. The normalization condition (4) yields

$$\bar{g} = \int d\bar{x} W \left[\bar{g} \bar{A} \exp \left(-\frac{\bar{x}^2}{2} \right) \right], \quad (16)$$

which cannot be analytically solved for \bar{A} . Nevertheless, given the rescaled coupling constant \bar{g} one can readily numerically obtain \bar{A} , as shown in Figure 1. It should be remarked that \bar{g} has very small values in today’s experiments [12,31], which allows to approximate $W(s) \simeq s$ for a generic argument $s \ll 1$ in Equation (16), yielding $\bar{A} = 1/\sqrt{2\pi} = 0.40$ in this approximation. For instance, with $N = 100$, $g = 5 \times 10^{-41} \text{ kg m}^3 \text{ s}^{-2}$, $m = 9 \times 10^{-27} \text{ kg}$ (Li atom) as in [12] together with typical values $\omega = 700 \text{ rad/s}$, $\beta = 10^{28} \text{ J}^{-1}$ [32,33] one has $L = 0.15 \text{ mm}$, $\bar{g} = 3.32 \times 10^{-7}$. The validity conditions (7) and (8) are safely met for these parameters. Moreover, from Equation (6) one would need an energy of transverse confinement $\hbar\omega_{\perp}$ with $\omega_{\perp} \gg 10^6 \text{ rad/s}$.

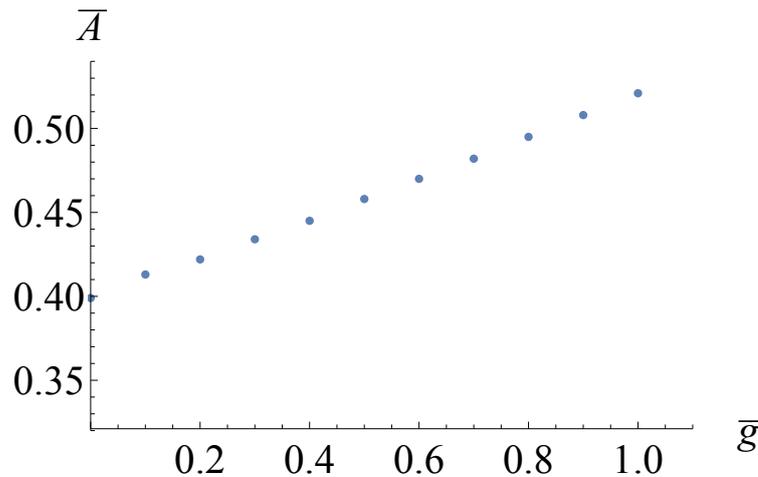


Figure 1. Numerical solution of Equation (16) for $0 \leq \bar{g} \leq 1$, where the interaction strength \bar{g} and the normalization constant \bar{A} are given in Equation (15).

It is interesting to rewrite the validity condition (7) using the approximations $\bar{g} \ll 1$ and $\bar{A} \simeq 1/\sqrt{2\pi}$ so that $A \simeq N\beta\omega/\sqrt{2\pi}$. From Equation (13), one has the estimate $\rho \sim N\omega\sqrt{\beta m/(2\pi)}$. Together with $\langle p^2 \rangle / (2m) \sim 1/\beta$, one has that Equation (7) becomes

$$\frac{1}{\bar{\beta}} \gg N \hbar \omega, \tag{17}$$

which has an evident thermodynamic meaning. Under the same approximation, the Lambert function in Equation (14) can be safely replaced by $W(s) \simeq s$ so that the number density assumes the Maxwellian form

$$\rho(x) = N \omega \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{1/2} \exp(-\beta V(x)). \tag{18}$$

To summarize and without any approximation within the Landau–Vlasov model, for the Maxwell–Boltzmann distribution (12) one has the exact number density (14), subject to $N = \int dx \rho(x)$ which determines the normalization constant A given an arbitrary external potential $V(x)$.

3.2. Water Bag Distribution

In a non-equilibrium situation we are free to have any function of the total energy as a suitable particle distribution function. A second example is provided by a completely degenerate Fermi–Dirac-like distribution

$$f(H) = A \Theta(E_F - H), \tag{19}$$

where Θ is the step function, A is a normalization constant, and $E_F > 0$ is a energy parameter which would be the Fermi energy in a Fermi gas. Moreover, we assume $E_F \geq U(x)$; otherwise, some quantities become complex valued in the following. However, in the context of a bosonic gas, E_F is just a measure of the energy spread, precisely as in the water bag model for plasmas [34]. By construction, Equation (19) shows an exact stationary solution of the Landau–Vlasov equation.

Integration in momentum space implicitly gives the 1D number density

$$\rho(x) = 2 A \sqrt{2m} (E_F - U(x))^{1/2}. \tag{20}$$

Note for real ρ one has $E_F \geq U(x)$ and hence automatically $E_F \geq V(x)$, supposing $g > 0$ (repulsive interaction). The always non-negative solution of Equation (20) is

$$\rho(x) = 4 m A^2 \left[-g + \left(g^2 + \frac{1}{2m A^2} (E_F - V(x)) \right)^{1/2} \right]. \tag{21}$$

The exact total potential (11) is also immediately available, for arbitrary external potential.

The last step is the determination of the normalization constant A , once a specific external potential is chosen. For the harmonic potential (5), it is convenient to introduce the rescaling

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{g} = \frac{Ng}{E_FL}, \quad \bar{A} = \frac{E_FA}{N\omega}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{N/L}, \tag{22}$$

in terms of the characteristic length $L = \sqrt{E_F/m}/\omega$. The dimensionless 1D number density becomes

$$\bar{\rho} = 4\bar{A}^2 \left[-\bar{g} + \left(\bar{g}^2 + \frac{1}{2\bar{A}^2} \left(1 - \frac{\bar{x}^2}{2} \right) \right)^{1/2} \right], \tag{23}$$

and the normalization condition $\int dx \rho(x) = N$ yields

$$\frac{1}{4\bar{A}^2} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} d\bar{x} \left[-\bar{g} + \left(\bar{g}^2 + \frac{1}{2\bar{A}^2} \left(1 - \frac{\bar{x}^2}{2} \right) \right)^{1/2} \right], \tag{24}$$

where $E_F \geq V(x)$ yields $\bar{x}^2 \leq 2$ in dimensionless variables. The integral in Equation (24) can be analytically done, but in terms of transcendental functions which are not useful to show here. For specific values of \bar{g} , one can numerically determine \bar{A} and hence the necessary normalization, as depicted in Figure 2. In the limit of very small \bar{g} one has $\bar{A} = 1/(2\pi) = 0.16$. The resulting dimensionless 1D number density is shown in Figure 3.

Similarly to the Maxwellian case, it is possible to rewrite the validity condition (7) using the approximations $\bar{g} \ll 1$ and $\bar{A} \simeq 1/(2\pi)$. From Equation (20) one has the estimate $\rho \sim 2A\sqrt{2mE_F}$. Together with $\langle p^2 \rangle / (2m) \sim E_F$ yields

$$E_F \gg N\hbar\omega, \tag{25}$$

with an evident thermodynamic meaning.

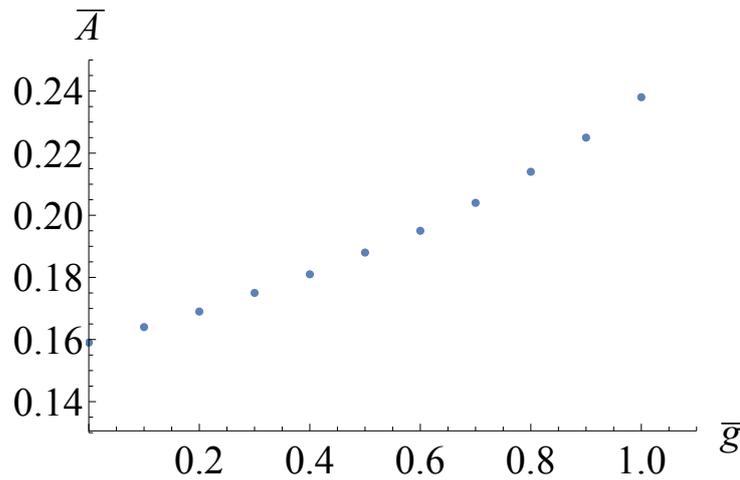


Figure 2. Numerical solution of Equation (24) for $0 \leq \bar{g} \leq 1$, where the interaction strength \bar{g} and the normalization constant \bar{A} are given in Equation (22).

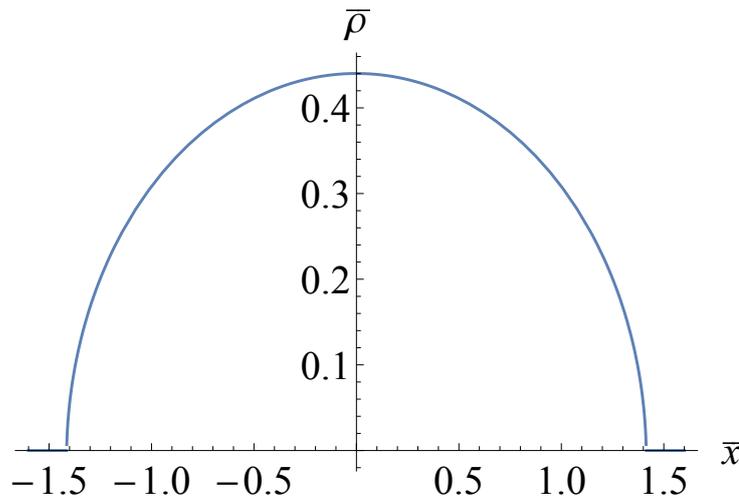


Figure 3. Dimensionless 1D number density $\bar{\rho}$ from Equation (23), for interaction strength $\bar{g} = 10^{-2}$ and normalization constant $\bar{A} = 1/(2\pi)$.

To summarize and without any approximation within the Landau–Vlasov model, for the water bag, completely degenerate Fermi–Dirac-like distribution (19) one has the exact number density (21), subject to $N = \int dx \rho(x)$ which determines the normalization constant A given an arbitrary external potential $V(x)$. For the sake of introducing the next section, notice the correspondence between the Van Kampen mode decomposition and the water bag distribution which is shown to be granted in the limit of an infinite number of bags [35].

4. Case–Van Kampen Modes

The Case–Van Kampen modes are the normal modes in a plasma [21,22]. For the Landau–Vlasov equation, Case–Van Kampen modes can be derived starting from the assumption $V = 0$. Experimentally, a 1D configuration of ultracold atoms free of external confinement can be produced by means of a 1D ring geometry with large radius [11] or considering two high barriers at the edges of a straight axial arrangement [36]. In both cases, spatial periodic conditions can be assumed. The 1D Landau–Vlasov equation reduces to

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} - g \int dp' \frac{\partial f(x, p', t)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p} \right) f(x, p, t) = 0, \tag{26}$$

To proceed, we set

$$f(x, p, t) = f_0(p) + \delta f(x, p, t), \tag{27}$$

where $f_0(p)$ is the equilibrium distribution subject to

$$\int dp f_0(p) = n_0 \tag{28}$$

where n_0 is the equilibrium 1D number density and $\delta f(x, p, t)$ is a first-order perturbation. Due to the periodic boundary conditions, it is meaningful to Fourier transform according to

$$\delta f(x, p, t) = \sum_k f_k(p, t) e^{ikx}, \tag{29}$$

where k is a multiple of a fundamental wavenumber. Linearizing the Landau–Vlasov Equation (26) the result is

$$\frac{\partial f_k(p, t)}{\partial t} + \frac{ikp}{m} f_k(p, t) - igk \frac{\partial f_0(p)}{\partial p} \int dp' f_k(p', t) = 0. \tag{30}$$

Complementary to the Landau approach where the linearized Landau–Vlasov equation is taken as an initial value problem analyzed by Laplace transform methods, the Case–Van Kampen approach assumes

$$f_k(p, t) = f_v(p) e^{-i\omega t}, \quad v = \frac{\omega}{k}, \tag{31}$$

where ω is a real, arbitrary constant and v is the phase speed. Inserting from Equation (31) into Equation (30) gives the eigenvalue problem

$$(p - mv) f_v(p) = gm \frac{\partial f_0(p)}{\partial p} \int dp' f_v(p'). \tag{32}$$

Following [21,22], it is convenient to assume the normalization

$$\int dp f_v(p) = \text{cte.} = n_0, \tag{33}$$

So that the integral Equation (32) simplifies to

$$(p - m v) f_v(p) = g m n_0 \frac{\partial f_0(p)}{\partial p}. \tag{34}$$

In a distributional sense, the solution for Equation (34) is

$$f_v(p) = g m n_0 \wp \left(\frac{\partial f_0(p)}{\partial p} \frac{1}{p - m v} \right) + \lambda(v) \delta(p - m v), \tag{35}$$

where \wp denotes the Cauchy principal value symbol, $\lambda(v)$ is a function to be determined and where δ is the Dirac delta.

As can be readily verified, the naive solution (without principal value and with $\lambda(v) = 0$) can not be made compatible with the normalization (33). Indeed, to comply with the normalization one needs

$$\lambda(v) = n_0 - g m n_0 \wp \int dp \frac{\partial f_0(p)}{\partial p} \frac{1}{p - m v}, \tag{36}$$

where the integral is taken in the principal value sense. The final result is

$$\begin{aligned} f_v(p) = & g m n_0 \wp \left(\frac{\partial f_0(p)}{\partial p} \frac{1}{p - m v} \right) + \\ & + \left(n_0 - g m n_0 \wp \int dp' \frac{\partial f_0(p')}{\partial p'} \frac{1}{p' - m v} \right) \delta(p - m v). \end{aligned} \tag{37}$$

As apparent, these Case–Van Kampen modes are not damped (they are stationary waves) and have a singular character. Following Case, by means of the introduction of adequate adjoint solutions, it is possible to demonstrate that the Equation (37) provides a complete set, in the sense that all solutions to the linearized Landau–Vlasov equation can be expressible as a linear combination of these modes. More precisely, for simplicity we have discussed only the class 1a among the four classes of eigenfunctions in Case’s terminology, as detailed in the original article [22] and textbooks [37]. To demonstrate the completeness of the full set of Case–Van Kampen eigenfunctions makes necessary to introduce an auxiliary (or adjoint) equation with a different set of eigenfunctions, orthogonal to those in the original set, except when the eigenvalues coincide. The complete analysis is not trivial but entirely similar to the Vlasov–Poisson case, shown in [22,37], for instance.

Note that in spite of the singular character of the Case–Van Kampen modes, they can be used to compute well behaved physical quantities. For instance, we can consider the 1D number density perturbation

$$\delta n(x, t) = \int dp dw c(\omega) \delta f(x, p, t), \tag{38}$$

where $c(\omega)$ is an arbitrary weight function. Allowing a superposition law taking into account a frequency spread is valid in the context of the linearized Landau–Vlasov equation. Restricting to the k -th Fourier component, applying Equations (31) and (37), we have the well behaved function

$$\delta n(x, t) = \frac{n_0 k}{m} \int dp c \left(\omega = \frac{k p}{m} \right) e^{i k (x - \frac{p t}{m})}, \tag{39}$$

after using the property $\delta(p - m \omega/k) = (k/m) \delta(\omega - k p/m)$. In this case, the first and last terms of Equation (37) cancel upon integration (the same occurs for Vlasov–Poisson plasmas [37]).

As a simple illustration, the Gaussian weight function

$$c(\omega) = \frac{\delta n_0}{\sqrt{2\pi} \Omega n_0} \exp \left(- \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2 \Omega^2} \right) \tag{40}$$

produces from integration of Equation (39) the density perturbation

$$\delta n(x, t) = \delta n_0 \exp\left(i(kx - \omega_0 t) - \frac{\Omega^2 t^2}{2}\right). \quad (41)$$

This is an example of the well known fact that although the isolated Case–Van Kampen eigenmodes are stationary waves, they can produce damped macroscopic objects, taking into account phase mixing. Consistently, the monochromatic limit $\Omega \rightarrow 0$ is not damped.

5. Conclusions

In the context of mean-field collisionless theory for 1D ultracold dilute Bose gases, non-decaying nor growing in time structures have been analyzed. For this purpose, traditional methods from plasma theory have been adapted to the Landau–Vlasov equation. Nonlinear stationary solutions have been derived in analogy with the BGK modes of the Vlasov–Poisson system in plasmas. Specific kinetic equilibria have been worked out in detail, together with the associated validity conditions in real ultracold bosonic gases. Linear, normal modes have been also derived, in analogy with the plasma Case–Van Kampen stationary wave modes. These results are a necessary complementary development to the analysis of Landau damping and instabilities for the 1D Landau–Vlasov equation [12]. The stability of the BGK modes for the Landau–Vlasov equation is an important point to be addressed in future works.

Author Contributions: Investigation, Supervision, Writing—original, F.H.; Investigation, Writing—review and editing, R.V. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Funding: F.H. acknowledges the support by Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Institutional Review Board Statement: Not applicable.

Informed Consent Statement: Not applicable.

Data Availability Statement: Not applicable.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

References

- Landau, L.; Lifshitz, L. *Statistical Physics—Part 2*. In *Course in Theoretical Physics*; Pergamon: New York, NY, USA, 1959; Volume 9.
- Pines, D.; Nozières, P. *Normal Fermi Liquids*. In *The Theory of Quantum Liquids*; Benjamin: New York, NY, USA, 1966; Volume 1.
- Kadanoff, L.P.; Baym, G. *Quantum Statistical Mechanics*; Benjamin: New York, NY, USA, 1962.
- Zaremba, E.; Nikuni, T.; Griffin, A. Dynamics of trapped Bose gases at finite temperatures. *J. Low Temp. Phys.* **1999**, *116*, 277–345. [[CrossRef](#)]
- Capuzzi, P.; Vignolo, P.; Federici, F.; Tosi, M.P. Sound wave propagation in strongly elongated fermion clouds at finite collisionality. *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **2006**, *39*, S25–S36. [[CrossRef](#)]
- Dalfovo, F.; Giorgini, S.; Pitaevskii, L.P.; Stringari, S. Theory of Bose–Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.* **1999**, *71*, 463–512. [[CrossRef](#)]
- Adhikari, S.K.; Salasnich, L. Effective nonlinear Schrödinger equations for cigar-shaped and disc-shaped Fermi superfluids at unitarity. *New J. Phys.* **2009**, *11*, 023011. [[CrossRef](#)]
- Giorgini, S.; Pitaevskii, L.P.; Stringari, S. Theory of ultracold atomic Fermi gases. *Rev. Mod. Phys.* **2008**, *80*, 1215–1274. [[CrossRef](#)]
- Langen, T. *Non-Equilibrium Dynamics of One-Dimensional Bose Gases*; Springer: New York, NY, USA, 2015.
- Guery-Odelin, D. Mean-field effects in a trapped gas. *Phys. Rev. A* **2002**, *66*, 033613. [[CrossRef](#)]
- Kinoshita, T.; Wenger, T.R.; Weiss, D.S. A quantum Newton’s cradle. *Nature* **2006**, *440*, 900–903. [[CrossRef](#)]
- Baldovin, F.; Cappellaro, A.; Orlandini, E.; Salasnich, L. Nonequilibrium kinetics of one-dimensional Bose gases. *J. Stat. Mech.* **2016**, *2016*, 063303. [[CrossRef](#)]
- Bernstein, I.B.; Greene, J.M.; Kruskal, M.D. Exact nonlinear plasma oscillations. *Phys. Rev.* **1957**, *108*, 546–550. [[CrossRef](#)]
- Schamel, H. Particle trapping: A key requisite of structure formation and stability of Vlasov–Poisson plasmas. *Phys. Plasmas* **2015**, *22*, 042301. [[CrossRef](#)]
- Hutchison, I.H. Electron holes in phase space: What they are and why they matter. *Phys. Plasmas* **2017**, *24*, 055601. [[CrossRef](#)]
- Ghizzo, A.; Izrar, B.; Bertrand, P.; Feix, M.R.; Fijalkow, E.; Shoucri, M. BGK structures as quasi-particles. *Phys. Lett. A* **1987**, *120*, 191. [[CrossRef](#)]
- Manfredi, G.; Bertrand, P. Stability of Bernstein–Greene–Kruskal modes. *Phys Plasmas* **2000**, *7*, 2425. [[CrossRef](#)]

18. Haas, F. Bernstein-Greene-Kruskal approach for the quantum Vlasov equation. *Europhys. Lett.* **2020**, *132*, 20006. [[CrossRef](#)]
19. Dawson, J. On Landau damping. *Phys. Fluids* **1961**, *4*, 869–874. [[CrossRef](#)]
20. Mouhot, C.; Villani, C. On Landau damping. *Acta Math.* **2011**, *207*, 29–201. [[CrossRef](#)]
21. Van Kampen, N. On the theory of stationary waves in plasmas. *Physica* **1955**, *21*, 949–963. [[CrossRef](#)]
22. Case, K. Plasma oscillations. *Ann. Phys.* **1959**, *7*, 349–364. [[CrossRef](#)]
23. Bateman, G.; Kruskal, M.D. Linear time-dependent Vlasov equation; Case-Van Kampen modes. *Phys. Fluids* **1972**, *15*, 277–283. [[CrossRef](#)]
24. Tracy, E.R.; Brizard, A.J.; Kaufman, A.N. Generalized Case-Van Kampen modes in a multidimensional non-uniform plasma with application to gyroresonance heating. *J. Plasma Phys.* **1996**, *55*, 449–486. [[CrossRef](#)]
25. Best, R.W.B. Nonlinear plasma oscillations in terms of Van Kampen modes. *Physica* **1973**, *64*, 387–402. [[CrossRef](#)]
26. Nemes, M.C.; Piza, A.T.; Providência, A.F.R. Van Kampen waves in extended Fermi systems and the random phase approximation. *Physica A* **1987**, *146*, 282–294. [[CrossRef](#)]
27. Ignatov, A.M. Electromagnetic Van Kampen waves. *Plasma Phys. Rep.* **2017**, *43*, 29–36. [[CrossRef](#)]
28. Timofeev, A.V. Effect of collisions on Van Kampen waves. *Plasma Phys. Rep.* **2017**, *43*, 594–597. [[CrossRef](#)]
29. Steffen, W.; Kull, H.-J. Relaxation of plasma waves in Fermi-degenerate quantum plasmas. *Phys. Rev E* **2016**, *93*, 033207. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
30. Corless, R.M.; Gonnet, G.H.; Hare, D.E.G.; Jeffrey, D.J.; Knuth, D.E. On the Lambert W function. *Adv. Comput. Math.* **1996**, *5*, 329–359. [[CrossRef](#)]
31. Ville, J.L.; Saint-Jalm, R.; Le Cerf, É.; Aidelsburger, M.; Nascimbène, S.; Dalibard, J.; Beugnon, J. Sound propagation in a uniform superfluid two-dimensional Bose gas. *Phys. Rev. Lett.* **2018**, *121*, 145301. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
32. Townsend, C.G.; Edwards, N.H.; Cooper, C.J.; Zetie, K.P.; Foot, C.J.; Steane, A.M.; Szriftgiser, P.; Perrin, H.; Dalibard, J. Phase-space density in the magneto-optical trap. *Phys. Rev. A* **1995**, *52*, 1423–1440. [[CrossRef](#)]
33. Arnold, A.S.; Manson, P.J. Atomic density and temperature distributions in magneto-optical traps. *J. Opt. Soc. Am. B* **2000**, *17*, 497–506. [[CrossRef](#)]
34. Bertrand, P.; Feix, M.R. Non linear electron plasma oscillation: The “water bag model”. *Phys. Lett. A* **1968**, *28*, 68–69. [[CrossRef](#)]
35. Bertrand, P.; Del Sarto, D.; Ghizzo, A. *The Vlasov Equation I. History and General Properties*; ISTE-Wiley: London, UK, 2019.
36. Strecker, K.E.; Partridge, G.B.; Truscott, A.G.; Hulet, R.G. Formation and propagation of matter-wave soliton trains. *Nature* **2002**, *417*, 150–153. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
37. Montgomery, D.C.; Tidman, D.A. *Plasma Kinetic Theory*; McGraw-Hill: New York, NY, USA, 1964.

Capítulo 9

Conclusão

Neste trabalho, iniciamos fazendo uma breve introdução sobre a equação de transporte de Boltzmann. Depois, descrevemos os modos BGK e os modos de Case-van Kampen para o sistema de Vlasov-Poisson para plasmas. A partir da equação de transporte de Boltzmann, obtemos a equação de Boltzmann-Vlasov, que descreve sistemas de gases quânticos com colisão entre as partículas. Finalmente, obtemos a equação de Landau-Vlasov, que, diferente das equações anteriores, não possui o termo que representa as colisões entre os átomos. Aplicamos esta equação no sistema físico unidimensional.

No contexto da teoria de campo médio sem colisão para gases de bósons diluídos unidimensionais, estruturas que não decaem nem crescem no tempo foram analisadas. Para tanto, métodos tradicionais da teoria de plasmas foram adaptados à equação de Landau-Vlasov. Soluções estacionárias não lineares foram derivadas em analogia com os modos BGK do sistema de Vlasov-Poisson em plasmas. Equilíbrios cinéticos específicos foram estudados em detalhes, juntamente com as condições de validade associadas. Os modos lineares normais também foram derivados, em analogia com os modos de onda estacionária de plasmas de Case-Van Kampen. Estes resultados são um desenvolvimento complementar necessário para a análise do amortecimento de Landau e de instabilidades para a equação de Landau-Vlasov 1D. A estabilidade dos modos BGK para a equação de Landau-Vlasov é um ponto importante a ser abordado em trabalhos futuros.

Os modos BGK para bósons foram obtidos. Foi proposto uma solução tipo Maxwell-Boltzmann para a densidade de partículas. Foi obtido uma densidade independente do tempo. Na aproximação $\bar{g} \ll 1$ e $\bar{A} \approx 1/\sqrt{2\pi}$ obtemos $1/\beta \gg N\hbar\omega$. Também foi

proposto uma solução do tipo Fermi-Dirac para a função distribuição. Como no caso anterior, também foi obtido uma função densidade independente do tempo como resposta ao problemas. Dentro das aproximações $\bar{g} \ll 1$ e $\bar{A} \approx 1/2\pi$, obtemos $E_f \gg N\hbar\omega$.

Também foram obtidos os modos de Case-van Kampen para o sistema de bósons onde o principal resultado foi a obtenção da perturbação de densidade que é amortecida no tempo. O limite monocromático $\Omega \rightarrow 0$ não é amortecido.

Referências Bibliográficas

- [1] LANDAU, L. and LIFSHITZ, L. *Course in theoretical physics (Statistical Physics—Part 2 vol. 9)*. New York: Pergamon, 1959.
- [2] PINES, D. and NOZIÈRES, P. *Normal Fermi liquids*. New York: Benjamin, 1966.
- [3] KADANOFF L. P.P.; BAYM G. *Quantum statistical mechanics*. New York: Benjamin, 1962.
- [4] ZAREMBA E.; NIKUNI T.; GRIFFIN A. *Dynamics of trapped Bose gases at finite temperatures*. Journal of Low Temperature Physics, v. 116, p. 277-345, 1999.
- [5] CAPUZZI P.; VIGNOLO P.; F. FEDERICI F.; TOSI M. P. *Sound wave propagation in strongly elongated fermion clouds at finite collisionality*. Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, v. 39, p. S25-S35, 2006.
- [6] DALFOVO F.; STEFANO G.; PITAEVSKII L. P.; STRINGARI S. *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*. Reviews of Modern Physics, v. 71, p. 463-512, 1999.
- [7] LANGEN T. *Non-equilibrium dynamics of one-dimensional Bose gases*. New York: Springer, 2015.
- [8] KINOSHITA T.; WENGER T.; WEISS D. *A quantum Newton's cradle*. Nature, v. 440, p. 900-903, 2006.
- [9] KINOSHITA T.; WENGER T.; WEISS D. *Observation of a one-dimensional Tonks-Girardeau gas*. Science, v. 305, p. 1125-1128, 2004.
- [10] GUÉRY-ODELIN D. *Mean-field effects in a trapped gas*. Physical Review A, v. 66, p. 033613 (4 páginas), 2002.

- [11] BALDOVIN F.; CAPPELLARO A.; ORLANDINI E.; SALASNICH L. *Nonequilibrium statistical mechanics in one-dimensional Bose gases*. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, p. 063303 (18 páginas), 2016.
- [12] BERNSTEIN I. B.; GREENE J. M.; KRUSKAL M. D. *Exact nonlinear plasma oscillations*. Physical Review, v. 108, p. 546-550, 1957.
- [13] SCHAMEL H. *Particle trapping: A key requisite of structure formation and stability of Vlasov–Poisson plasmas*. Physics of Plasmas, v. 22, p. 042301 (9 páginas), 2015.
- [14] HUTCHINSON I. H. *Electron holes in phase space: What they are and why they matter*. Physics of Plasmas, v. 24, p. 055601 (13 páginas), 2017.
- [15] HAAS F. *Bernstein-Greene-Kruskal approach for the quantum Vlasov equation*, Europhysics Letters, v. 132, p. 20006 (17 páginas), 2020.
- [16] DAWSON J. *On Landau damping*, Physics of Fluids, v. 4, p. 869-874, 1961.
- [17] MOUHOT C.; VILLANI C. *On Landau damping*, Acta Mathematica, v. 207, p. 29-201, 2011.
- [18] KAMPEN N. G. *On the theory of stationary waves in plasmas*, Physica, v. 21, p. 949-963, 1955.
- [19] CASE K. *Plasma oscillations*, Ann. Phys, v.7, p. 349-364, 1959.
- [20] BATEMAN G. *Damping of electron plasma oscillations in a uniform electric field*, Physics of Fluids, v. 15, p. 2295-2298, 1972.
- [21] TRACY E. R.; BRIZARD A. J.; KAUFMAN A. N. *Generalized Case—van Kampen modes in a multidimensional non-uniform plasma with application to gyroresonance heating*, Journal of Plasma Physics, v. 55, p. 449-486, 1996.
- [22] BEST R. W. B. *Nonlinear plasma oscillations in terms of Van Kampen modes*, Physica (Utrecht), v. 64, p. 387-402, 1973.
- [23] IGNATOV A. M. *Electromagnetic Van Kampen waves*, Plasma Physics Reports, v. 43, p. 29-36, 2017.

- [24] TIMOFEEV A. V. *Effect of collisions on Van Kampen waves*, Plasma Physics Reports, v. 43, p. 594-597, 2017.
- [25] STEFFEN W.; KULL H.-J. *Relaxation of plasma waves in Fermi-degenerate quantum plasmas*, Physical Review E, v. 93, p. 033207 (14 páginas) 2016.
- [26] ANDERSON, M. H., ENSHER, J. R., MATTHEWS, M. R., WIEMAN, C. E., and CORNELL, E. A. *Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor*, Science, Vol. 269, p. 198-201, 1995.
- [27] DEMARCO, B. and JIN, D. S. *Onset of Fermi degeneracy in a trapped atomic gas*, Science, Vol. 285, p. 1703-1706, 1999.
- [28] PETHICK C. J.; SMITH H. *Bose-Einstein condensation in dilute gases*. Springer, 2011.
- [29] NICHOLSON, D. R. *Introduction to plasma theory*, New York: Wiley, 1983.
- [30] BEARZOTI, P. N. *Modos de Case-van Kampen em plasmas quânticos descritos pelo sistema de Wigner-Poisson*. Dissertação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, p. 51. 2021.
- [31] MONTGOMERY, D. C. and TIDMAN, D. A. *Plasma kinetic theory*, New York: McGraww-Hill, 1964.
- [32] LANDAU, L. D. *On the vibration of the electronic plasma*, Journal of Physics (URSS), Vol. 10, p. 25-34, 1965.
- [33] PEDRI, P.; GUÉRY-ODELIN, D. and STRINGARI, S. *Dynamics of a classical gas including dissipative and mean-field effects*, Physical Review A, v. 68, p. 043608 (4 páginas), 2003.
- [34] HUANG, K. *Statistical mechanics*. New York: Wiley, 1984.
- [35] ARAHATA, E. and NIKUNI, T. *Dynamical simulation of sound propagation in a highly elongated trapped Bose gas at finite temperatures*, Journal of Low Temperature Physics, v. 171, p. 369-375, 2013

- [36] SALASNICH, L. and TOIGO *Shell effects in the first sound velocity of an ultracold Fermi gas*, Journal of Low Temperature Physics, v. 150, p. 643-648, 2008
- [37] HAAS, F. and VIDMAR, R. *Bernstein–Greene–Kruskal and Case–Van Kampen Modes for the Landau–Vlasov Equation*, Atoms, v. 10, p. 28, 2022.
- [38] CORLESS, R. M.; GONNET, G. H.; HARE, D. E. G.; JEFFREY, D. J. and KNUTH, D. E. *On the Lambert W function*, Advances in Computational Mathematics, v. 5, p. 329-359, 1996.
- [39] VILLE, J.L.; SAINT-JALM, R.; LE CERF, É.; AIDELSBURGER, M.; NASCIBÈNE, S.; DALIBARD, J. and BEUGNON, J. *Sound propagation in a uniform superfluid two-dimensional Bose gas*, Physical Review Letters, v. 121, p. 145301 (5 páginas), 2018.
- [40] ARNOLD, A. S. and MANSON, P. J. *Atomic density and temperature distributions in magneto-optical traps*, Journal of the Optical Society of America B, v. 17, p. 497-506, 2000.
- [41] BERTRAND, P. and FEIX, M. R. *Non Linear electron plasma oscillation: the “water bag model”*, Phys. Lett., v. 28, p. 68-69, 1968.
- [42] STRECKER, K. E.; PARTRIDGE, G. B.; TRUSCOTT, A. G. and HULET, R. G. *Formation and propagation of matter-wave soliton trains*, Nature, v. 417, p. 150-153, 2002.