UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

Nível: MESTRADO

Área: ENSINO E CURRÍCULO

ANÁLISE DE ERROS EM DEMONSTRAÇÕES DE GEOMETRIA PLANA: UM ESTUDO COM ALUNOS DE 3º GRAU

HELENA NORONHA CURY

Dissertação apresentada como
exigência para obtenção do
grau de Mestre em Educação

Professor Orientador: CARMEN LINS BAÍA DE SOLARI

Porto Alegre, novembro de 1988

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

C982a Cury, Helena Noronha.
Análise de erros em demonstrações de geometria plana : um estudo com alunos de 3º grau / Helena Noronha Cury. - Porto Alegre : Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Educação, 1988.
f.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

CDU: 514.112.001:378.18
378.18:574.112.001
378.147.218-057.875:574.112
514.112:378.147.218-057.875

ÍNDICES ALFABÉTICOS PARA O CATÁLOGO SISTEMÁTICO

Geometria Plana: Análise: Universitários
514.112.001:378.18

Análise: Geometria Plana: Universitários
514.112.001:378.18

Universitários: Geometria Plana: Análise
378.18:574.112.001

Ensino Superior: Análise de erros: Alunos: Geometria Plana
378.147.218-057.875:574.112

Análise de erros: Alunos: Ensino superior: Geometria Plana
378.147.218-057.875:514.112

Alunos: Ensino Superior: Análise de erros: Geometria Plana
378.147.218-057.875:574.112

Geometria Plana: Ensino Superior: Análise de erros: Alunos
514.112:378.147.218-057.875

Bibliotecária responsável:

Iara Ferreira de Macedo, CRB-10/430

Professora Orientadora:
CARMEN LINS BAÍA DE SOLARI

Ph.D.pela Universidade de Stanford
Pós-Doutorado em Planejamento da Educação pela Universidade de Londres
Professora Adjunta do Departamento de Estudos Básicos da Faculdade de Educação da UFRGS
Pesquisador Bolsista do CNPq

AGRADECIMENTOS

Durante vários anos este trabalho vem sendo amadurecido, partindo de uma idéia-semente que brotou da minha vivência pedagógica e foi regada pelas minhas reflexões e pelas dos colegas, em reuniões, encontros e cursos de que juntos participamos. Desta forma, a idéia é fruto das contribuições de tantas pessoas que seria impossível nomeá-las. Citarei, no entanto, aquelas a quem mais diretamente devo o estímulo para fazer esta pesquisa e o auxílio nas suas diversas etapas.

Agradeço, portanto:

- à Carmen Lins Baía de Solari, orientadora e amiga, pela confiança depositada, pelo respeito às minhas convicções e pelo incentivo nos momentos de insegurança e desânimo;

- aos professores do Curso de Pós-Graduação em Educação da UFRGS, pela postura crítica face aos problemas da realidade educacional, motivadora de muitos percursos em busca de melhores respostas;

- à Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da PUCRS, pelo auxílio na etapa de coleta de dados;

- à Direção do Instituto de Matemática da PUCRS, pelas condições propiciadas para a realização da pesquisa com os alunos;

- aos colegas do Instituto de Matemática da PUCRS, pelo auxílio no período em que cursei as disciplinas do Mestrado e, especialmente, na fase de pesquisa propriamente dita;

- a todos os colegas de Porto Alegre, de outros Estados e mesmo de outros países, pelas sugestões e envio de material bibliográfico, possibilitando o acesso a certos textos e artigos sobre os assuntos desenvolvidos;

- à amiga Marcia Lapp, de Santa Cruz, Califórnia, pelos artigos enviados, não encontrados em bibliotecas brasileiras ligadas ao COMUT;

- à amiga e professora Marlene Grillo, da Faculdade de Educação da PUCRS, pela sugestão em aproveitar a idéia-semente como tema desta dissertação;

- à Maria Judith Sperb Ribeiro, amiga e colega de vários anos, pelo apoio em todas as etapas do trabalho, pelas sugestões bibliográficas, por partilhar dúvidas e inquietações, criticando construtivamente as várias etapas do trabalho e estimulando a continuidade nos momentos difíceis;

- aos participantes desta pesquisa, alunos do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da PUCRS, pela disponibilidade e dedicação de seu tempo de estudo ou de lazer para auxiliar-me na pesquisa dos erros em demonstrações de teoremas.

S U M Á R I O

R E S U M O

O presente trabalho busca analisar e classificar erros cometidos por alunos universitários ao realizar demonstrações em Geometria.

Os participantes da pesquisa, alunos de um curso de Licenciatura Plena em Matemática, realizaram demonstrações de proposições de Geometria Plana e suas soluções, tanto orais como escritas, foram analisadas com o objetivo de classificar os erros detectados e tentar descobrir as suas causas subjacentes.

As conclusões sobre as causas dos erros envolvem aspectos do processo ensino-aprendizagem de Matemática, conceituações sobre demonstração de teoremas e, também, considerações sobre a influência da filosofia da Matemática que norteia a prática docente e a elaboração dos currículos de cursos de Matemática.

A B S T R A C T

The object of this paper is to analyse and classify errors made by college students as to demonstration in Geometry.

The subjects, students of undergraduate school in a Mathematics course,demonstrated propositions in Plane Geometry; their solutions, both in oral and written form,were analysed, the errors were classified and their possible causes discussed.

The conclusions about the causes of the errors are related to the teaching-learning process in Mathematics, as well as to the concepts about proofs of theorems.

Finally, considerations are made about the phylosophical aspects of Mathematics that may influence the teaching activity and the elaboration of curricula for the courses of Mathematics.

1. INTRODUÇÃO

Há muito tempo leciono em cursos de Licenciatura,em Ciências e Matemática, e, ao longos dos anos, fui preocupando-me cada vez mais com as dificuldades encontradas pelos alunos ao demonstrar teoremas.

De leitura em leitura, de conversa em conversa, de reunião em reunião, fui me convencendo de que esta preocupação não é original. A maioria dos colegas se queixa de problemas deste tipo; os colegas de outras universidades também se manifestam no mesmo sentido; as atas de reuniões e congressos de Matemática evidenciam estas preocupações nos participantes;os artigos em publicações sobre Educação Matemática relatam pesquisas e apresentam sugestões para solucionar o problema.

Nos últimos anos, coletei empiricamente as respostas dadas por meus alunos a questões escritas que envolviam demonstrações de teoremas e notei que certos tipos de erros se repetiam metodicamente, tais como: a introdução na demonstração de afirmativas provenientes, apenas, da percepção visual da figura, o uso da tese como um elemento da hipótese, o mau uso da linguagem matemática, entre outros de menor incidência.

Proponho-me, agora, de uma forma sistemática, a analisar e classificar os erros cometidos nas demonstrações de teoremas de Geometria, com o objetivo de detectar as suas possíveis causas, e poder, desta forma, reformular a minha prática e contribuir para a reflexão sobre o ensino de Matemática de uma forma geral.

Os onze alunos participantes com os quais se realizou a pesquisa cursam a Licenciatura Plena em Matemática na PUCRS, universidade onde trabalho. A cada aluno foi proposta a demonstração de três proposições de Geometria Plana; o aluno deveria explicar seu raciocínio ao procurar resolver o problema e, após, escrever a demonstração. Suas verbalizações foram gravadas e transcritas para posterior análise. Na entrevista seguinte, os erros cometidos foram discutidos com o aluno, com vistas a detectar as causas subjacentes.

Esta investigação parte do pressuposto de que os erros cometidos pelos alunos nas demonstrações de teoremas estão relacionados com o processo de ensino-aprendizagem, em qualquer um dos níveis; com o abandono do ensino de Geometria Dedutiva no 1º e 2º graus; com o excesso de rigor e formalismo que exigimos nas demonstrações desde o início do Curso de Matemática e com a falta de explicitação de uma filosofia da Matemática que norteie a prática docente.

2. UMA VISÃO GERAL DO ASSUNTO

2.1. Uma Visão Histórica

No decorrer da década de sessenta, o Brasil foi palco de uma série de acontecimentos que, de uma forma ou de outra, continuam a influenciar a vida do País. Em termos de educação, as mudanças foram profundas, em todos os níveis, com a aplicação das Leis 4024/61 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), 5540/68 (Lei da Reforma Universitária) e 5692/71 (Diretrizes e Bases do Ensino de 1º e 2º Graus).

Quanto à Educação Matemática, os problemas decorrentes das mudanças educacionais citadas uniram-se àqueles originados pela reforma da Matemática Moderna.

No início da década de cinqüenta, eclodiu nos Estados Unidos e também na Europa um movimento que ficou conhecido como a reforma da Matemática Moderna, cujas raízes eram a chamada "Crise dos Fundamentos" e as modificações introduzidas na Matemática pelo desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos.

Nos Estados Unidos, desde o início do século, foram feitas pesquisas com o objetivo de modificar os currículos de Matemática. A 2ª Guerra Mundial propiciou o desenvolvimento da

Matemática Aplicada e a introdução de alguns tópicos como Estatística e Programação Linear nos currículos universitários. É, porém, aceito que o lançamento do satélite soviético Sputnik, em 1957, foi o estopim de que necessitavam os reformistas para conseguir recursos a seus projetos de modificações nos currículos de Matemática, o que, segundo eles, permitiria aos americanos voltarem a ter a superioridade em Ciências e Tecnologia.

No Brasil, considera Rodrigues (1978) que o ponto de partida para o movimento da reforma foi o 1º Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática, realizado em 1955, em Salvador. Nas conclusões do plenário, foi sugerida a organização de novos programas para o ensino de Matemática em nível secundário. Em 1957, em Porto Alegre, realizou-se o 2º Congresso, no qual a professora Odila Barros Xavier, do Instituto de Educação General Flores da Cunha, propôs um programa de Matemática para o curso normal que incluía teoria dos conjuntos, correspondência biunívoca e diferentes sistemas de numeração. Outros professores propuseram modificações, como Ubiratan D'Ambrósio, que sugeria, para o curso secundário, o estudo de conjuntos e estruturas algébricas, bem como de transformações geométricas.

Já no 3º Congresso, realizado no Rio de Janeiro em 1959, foi sugerido que algumas escolas fizessem experiências com a introdução da Matemática Moderna. Em 1961 fundou-se em São Paulo o GEEM (Grupo de Estudos do Ensino da Matemática), baseado no SMSG (School Mathematics Study Group, da Yale University). Este grupo, no 4º Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática, em 1962, em Belém do Pará, apresentou um projeto de incor poração da Matemática Moderna aos currículos dos cursos primário e secundário.

Conforme Rodrigues, a introdução da Matemática Moderna, sem a devida preparação do corpo docente, trouxe desalentadoras conseqüências para o ensino da Matemática,constatadas nos primeiros semestres dos cursos universitários.

> "Por não se darem conta de que a maior parte do professorado secundário brasileiro não tinha formação adequada, devido a seu recrutamento em outras áreas profissionais, acabaram por estimular o emprego abusivo das noções elementares destas teorias e provocar o abandono de técnicas importantes como o cálculo aritmético e algébrico, a resolução sistemática de problemas e, em muitos casos, como vem ocorrendo no Rio Grande do Sul, desleixaram o tratamento dedutivo da Geometria Euclideana,reduzindo-o a simples aplicações de teoremas não demonstrados." (RODRIGUES, 1978, p. 16)

Beatriz D'Ambrósio também considera que a Geometria Euclideana foi vítima das modificações do currículo,ao ser abordada de uma nova forma:

> "Esta nova abordagem, para ser feita de acordo com os princípios da Matemática Moderna, desenvolveu a Geometria através do uso de vetores e transformações, baseada na proposta francesa. (...) As mudanças eram baseadas na Álgebra Linear e, devido ao rigor e ao formalismo, estavam aquém do entendimento de muitos professores e alunos. COnseqüentemente, este tópico era geralmente relegado ao último mês do ano escolar e raramente trabalhado apropriadamente." (D'AMBRÓSIO, 1987, p. 211)*

Realmente, os professores não tiveram tempo para estudar os conteúdos de Matemática Moderna e passaram a lecioná-los com base nos livros didáticos que tinham que adotar,muitas ve

---

*O texto original está escrito em inglês e a tradução foi minha, assim como de todos os outros textos em língua estrangeira citados neste trabalho.

zes memorizando conteúdos e até metodologia.

Ainda de acordo com Beatriz D'Ambrósio, o movimento brasileiro utilizou o americano como modelo, mas teve, ainda, a influência de outros educadores europeus,como Dienes,Papy,Lucienne Félix, Dieudonné e Gattegno. Os programas estrangeiros baseavam-se em premissas diferentes e, ao combiná-los sem uma análise crítica, os brasileiros criaram um currículo inconsistente. Nos Estados Unidos, a reforma teve como foco a preparação de cientistas e matemáticos; na Europa,a preocupação foi com a melhoria dos programas para os estudantes destacados. O Brasil, na época, tentava expandir quantitativamente o sistema de ensino para oferecer oportunidades educacionais para todos. Assim, os objetivos estrangeiros não eram adequados ao nosso ensino.

A ênfase no rigor, na axiomatização, no conceito de estrutura e na unificação da Matemática através da Teoria dos Conjuntos, apresentadas desde o 1º até o 3º grau , muitas vezes sem a preocupação com a adequação dos conteúdos ao nível de desenvolvimento cognitivo dos alunos, gerou, nos anos em que o movimento teve maior influência, grandes distorções no ensino de Matemática no Brasil.

Assim, apesar dos esforços de alguns grupos de estudo, com a finalidade de modificar a situação em nível de 1º e 2º graus, parece-me que ainda conviveremos por muito tempo com as conseqüências desastrosas da implantação da Matemática Moderna.

2.2. As Correntes Filosóficas da Matemática

O pano de fundo para a situação em que se encontram os alunos e professores de Matemática foi apresentado no ítem anterior. Com poucas exceções, os professores de 1º, 2º e 3º graus foram formados dentro de uma universidade sofrendo as conseqüências da Reforma de 1968 e tiveram que lecionar Matemática Moderna sem realizar seu estudo aprofundado. Assim, os alunos que chegam ao curso de Matemática, salvo exceções, têm algumas noções de Geometria Plana, apresentadas de forma rápida, sem o tratamento dedutivo que daria uma base para um estudo axiomático nos cursos universitários.

Ao ingressar em um curso de Matemática, a maioria dos alunos reclama muito do rigor e do formalismo exigidos nas demonstrações de teoremas, cuja razão de ser não podem perceber.

Qualquer professor terá ouvido, muitas e muitas vezes, a pergunta: "Mas para que demonstrar se eu já sei que é verdade?" ou, o que é pior, a interrogação: "Já terminou a demonstração?" Será que o professor sabe dar uma resposta à primeira pergunta? Como terá pensado o aluno durante a demonstração, quando faz a segunda pergunta? Estas interrogações não têm uma resposta simples nem única, porque dependem de inúmeras variáveis, inclusive da filosofia da Matemática esposada pelo professor, que está por trás da apresentação dos conteúdos e que muitas vezes sequer é percebida por ele.

Cabe, em rápidas pinceladas, salientar as principais correntes de filosofia da Matemática, de forma que se possa entender as implicações das suas idéias na prática dos professores.

Para Platão, os entes matemáticos existem independentemente da consciência dos indivíduos, em alguma região ideal, em um "mundo das idéias"; a Matemática consistiria, portanto, na descoberta destes entes, suas relações e propriedades.

Aristóteles também desenvolveu uma filosofia da Matemática, em alguns aspectos oposta a de Platão. Conforme Körner, ele "... distingue nitidamente entre a possibilidade de se abstrair (...) unidade, circularidade e outras características matemáticas de objetos e a existência independente destas características ou suas instâncias, isto é, unidades e círculos." (KÖRNER, 1985, p. 20). Nesta perspectiva, a Matemática consistiria no estudo das abstrações matemáticas a partir dos objetos do mundo perceptível.

No início deste século, ocorreu a chamada "Crise dos Fundamentos", em que três escolas expunham seus pontos de vista sobre a Matemática: a Logicista, a Intuicionista e a Formalista.

Os Logicistas, cujo expoente máximo é Russell, acreditam que a Matemática reduz-se à Lógica, que os conceitos matemáticos são definíveis em termos de conceitos lógicos e os enunciados matemáticos verdadeiros podem ser demonstrados a partir de princípios lógicos.

O Intuicionismo, escola chefiada pelo holandês Brower, assevera que as entidades matemáticas são criadas pela inteligência humana, que a Matemática é o estudo dos processos de construção efetuados pelos matemáticos, com base na intuição.* (COSTA, 1962)

O Formalismo tem suas raízes no método axiomático, praticado já por Euclides. Numa teoria axiomatizada, escolhe-se um certo número de conceitos e proposições primitivas e sobre eles edifica-se a teoria, aceitando novos conceitos somente quando definidos a partir dos primitivos e novas proposições somente quando demonstradas a partir das anteriores.

O Formalismo, criado por Hilbert, pretende transformar o método axiomático na própria essência da Matemática; esta seria um jogo, respeitando certas regras previamente fixadas e tendo o cuidado de não chegar a contradições.

Tal concepção a respeito da natureza da Matemática está na base da obra de Bourbaki e influenciou sobremaneira a Matemática Moderna; a ênfase na axiomatização, no rigor, no simbolismo, muitas vezes degenerou em um ensino na base da memorização, sem raízes no real, no concreto, no histórico.

Os resultados publicados por Gödel em 1931 abalaram o Formalismo, estabelecendo que a consistência é incompatível com a completude. Há consistência em uma axiomática se não for possível demonstrar uma proposição e, simultaneamente, a sua negação; há completude quando todo enunciado ou é demonstrável ou sua negação o é.

Como nenhuma das escolas resolveu a Crise dos Fundamen-

* O Intuicionismo é, portanto, um Construtivismo, como foi o Finitismo de Kronecker: "Deus criou os números naturais, o resto é obra dos homens".

tos, a par de novas formulações para as concepções logicistas, intuicionistas e formalistas, temos outras influências na filosofia e no ensino da Matemática, como, por exemplo, as idéias de Polya e de Lakatos. Polya acredita na arte da descoberta e na força do raciocínio plausível, que sustenta as conjeturas feitas na descoberta de novas verdades.

Partindo de um exemplo de Polya, Lakatos, em sua tese doutoral, "Poofs and Refutations", apresenta um diálogo entre um professor e seus alunos, no qual, a partir de um problema e de uma conjetura, a Matemática é vista como processo em desenvolvimento e não como produto acabado.

O Falibilismo, concepção fundamentada nas idéias de Lakatos de que a Matemática é falível e corrigível, de que ela cresce por meio de críticas e correções, descreve o que a Matemática é e não o que deve ser.

Davis e Hersh são os defensores atuais destas idéias; nesta concepção, a Matemática é vista como parte da nossa herança cultural, com raízes históricas e sociais, cujo desenvolvimento é impulsionado pelos problemas e necessidades de cada época e de cada cultura.

O Falibilismo não abandona o simbolismo, as demonstrações, o rigor; simplesmente mostra que uma demonstração pode ser reformulada várias vezes, conforme os critérios de rigor e precisão aceitáveis pela comunidade matemática de cada época.

Ao que tudo indica, os professores de Matemática, de uma maneira geral, nutrem-se com um pouco de cada uma destas concepções filosóficas; não param para pensar no que acreditam realmente, misturando as idéias numa salada "indigesta" para os alunos.

Desta forma, as demonstrações que o professor apresenta vêm imbuídas desta concepção eclética de Matemática, aparecendo geralmente temperadas com pitadas de Logicismo e Formalismo.

2.3. Considerações sobre Lógica, Pensamento Lógico e Demonstrações

Para entender os erros nas demonstrações de teoremas, é necessário elucidar o que se entende por demonstração do ponto de vista da Lógica. Cabe, no entanto, primeiramente, esclarecer com que Lógica se trabalha e qual a relação entre Lógica e pensamento lógico.

É difícil definir o que é Lógica. Muitos autores esquivam-se da questão; Mates (1967), por exemplo, sugere que, assim como a melhor resposta às perguntas "O que é Matemática?", "O que é Física?" seja, talvez, "Você poderá decidir depois de saber o que fazem os matemáticos ou os físicos", também em relação à Lógica deve-se entender do que ela trata e como o faz.

Define Stanley-Jevons que:

> "... a Lógica é a ciência do raciocínio, que ensina a distinguir entre o raciocinar bem que conduz à verdade e o raciocinar mal, que todos os dias é causa de erros e desastres." (JEVONS, 1925, p.9)

Para Irving Copi, o termo "lógico" é utilizado na linguagem corrente como sinônimo de "razoável"; assim, o estudo da Lógica seria "... o estudo dos métodos e princípios utilizados para distinguir o raciocínio correto do incorreto." (COPI, 1973, p. 17)

A Lógica tem sido definida como a ciência das leis do pensamento, mas esta definição não é exata, pois quando se recorda algo, quando se imagina uma situação, quando se deixa o pen samento vagar seguindo associações livres, não se está desenvolvendo uma atividade planejada e sistemática, não se está desenvolvendo um raciocínio.

Também não é adequada a definição de Lógica como ciência do raciocínio, pois, sendo o raciocínio um tipo especial de pensamento, também é estudado pelos psicólogos que, no entanto, estão interessados no percurso através do qual a mente chega às suas conclusões, enquanto que os lógicos só se interessam pela correção do processo, uma vez concluído.

Dewey afirma que a melhor maneira de pensar é o emprego do pensamento reflexivo, que consiste em "...examinar mentalmente o assunto e dar-lhe consideração séria e consecutiva." (DEWEY, 1959, p. 13). Ainda segundo o mesmo autor, o pensamento pode ser considerado sob dois pontos de vista diferentes , que ele denominou "processo" e "produto". O processo é o pensamento real que ele também denomina de psicológico.Consiste em todo o caminho percorrido em busca de uma conclusão; o produto é a conclusão pronta, a forma lógica sob a qual se reveste o resultado do processo sistemático de obtenção da conclusão.

É claro que ao demonstrar um teorema, o aluno deverá utilizar o pensamento reflexivo para chegar ao produto, que é a demonstração pronta, acabada, com todos os seus passos justificados. Seria interessante analisar os processos mentais, o caminho percorrido pela mente do aluno, o ir-e-vir na busca de uma solução. Esta, no entanto, é uma tarefa demasiado ambiciosa, que está além dos limites da presente pesquisa. Contentar-me-ei em analisar aquilo que foi verbalizado ou escrito durante a realização do trabalho proposto, objetivando detectar os erros e suas possíveis causas dentro do processo de ensino-aprendizagem.

Voltando a Copi, a Lógica só se interessa em saber se a conclusão a que se chegou deriva das premissas utilizadas:

> "Se a conclusão se depreende das premissas, isto é, se as premissas constituem um fundamento ou uma boa evidência da conclusão, de modo que afirmar a verdade das premissas garante a afirmação de que também a conclusão é verdadeira, então o raciocínio é correto. Em caso contrário, é incorreto. A distinção entre o raciocínio correto e o incorreto é o problema central de que trata a Lógica." (COPI, 1972, p. 19-20).

Para que se tenha alguns elementos que possibilitem a discussão sobre o raciocínio lógico e as deduções, precisa-se inicialmente da definição de alguns termos que serão utilizados.

Uma proposição é o significado de uma oração declarativa; pode ser verdadeira ou falsa. As proposições são indicadas por letras minúsculas, "p", "q", "r", etc.; a partir das proposições dadas podem ser construídas outras, por meio dos conetivos "não" ($\sim$), "e" ($\wedge$), "ou" ($\vee$), "se ... então" ($\rightarrow$), "se e somente se" ($\leftrightarrow$). O valor de uma proposição composta vai depender dos valores das proposições simples que a compõem.

Algumas proposições têm na sua tabela-verdade somente o valor V; são as tautologias, como por exemplo "$p \vee \sim p$". Outras, têm somente o valor F, são as contradições, como é o caso de "$p \wedge \sim p$". Diz-se que uma proposição é equivalente à outra se e somente se o bicondicional entre elas é uma tautologia. Por exemplo, a proposição condicional "$p \rightarrow q$" equivale à sua contra-positiva "$\sim q \rightarrow \sim p$", pois $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

é uma tautologia.

Uma inferência consiste na afirmação de certa proposição (a conclusão) com base em outras proposições (as premissas) dadas como verdadeiras, ou tratadas como se o fossem. A cada inferência corresponde um argumento, que é definido como qualquer grupo de proposições do qual se afirma que uma delas (a conclusão) decorre das demais (premissas), fornecendo estas a evidência para a verdade daquela. (HEGENBERG, 1966).

A palavra "raciocínio" se usa muitas vezes para indicar o processo, porém em Lógica ela é considerada sinônimo de argumento. No meu estudo, portanto, estarei interessada no raciocínio como processo e também como argumentação, pois quero saber como o aluno raciocina (ou seja, procede) quando faz um raciocínio (isto é, argumenta).

Um argumento é válido quando as premissas e a conclusão estão de tal modo relacionadas que é impossível serem as premissas verdadeiras sem que a conclusão também o seja. A teoria da dedução trata do estabelecimento de técnicas para separação de argumentações válidas das que não o são.

Não se deve confundir a validade de um argumento com a verdade das proposições que o compõem. Podem-se ter argumentos válidos com proposições verdadeiras:

Todos os retângulos são paralelogramos
Todos os paralelogramos têm lados opostos congruentes
Logo, todos os retângulos têm lados opostos congruentes.

Podem-se ter, também, argumentos válidos com proposições falsas:

Todos os triângulos retângulos são isósceles

Todos os triângulos isósceles são equiláteros

Logo, todos os triângulos retângulos são equiláteros.

Podem-se ainda, ter argumentos inválidos com proposições verdadeiras:

"Se eu fosse o Presidente eu seria famoso

Eu não sou o Presidente

Logo, eu não sou famoso" (HEGENBERG, 1966, p. 41).

Portanto, a verdade ou a falsidade da conclusão não determina a validade ou invalidade de um argumento, nem a validade de um argumento garante a verdade da conclusão.

O tratamento clássico, aristotélico, da dedução, centrava-se em argumentos que continham proposições especiais chamadas "categóricas" e que podem ser breve e formalmente apresentadas:

Proposição universal afirmativa: Todo A é B;

proposição universal negativa: Nenhum A é B;

proposição particular afirmativa: Algum A é B;

proposição particular negativa: Algum A é não B.

Com uma única premissa, pouco se pode fazer; pode-se,por exemplo, inferir que "algum A é B" a partir de "todo A é B".Ao se fazer um argumento com duas premissas e uma conclusão, todas as três proposições categóricas, de tal forma que exista um termo comum a ambas as premissas, tem-se o silogismo.

Provavelmente o exemplo mais citado de silogismo seja:

Todos os homens são mortais

Sócrates é homem

Logo, Sócrates é mortal.

Se os termos das premissas de um silogismo são indicados por S, M e P, sendo M o termo médio (comum), os pares M, P e M,S podem ser ordenados de quatro maneiras diferentes,que são chamadas as figuras do silogismo. Como uma proposição pode ser de um dos quatro tipos antes indicados, cada figura permite diversas combinações, que formam os modos do silogismo,alguns válidos, outros não. Dos válidos, retirados aqueles que são considerados "conclusões fracas", restam dezenove silogismos (ou dezoito, segundo alguns autores), que, desde a Idade Média, recebem nomes especiais; Barbara, Celarent, Darii, etc.. O exemplo citado acima é um silogismo de primeira figura, chamado Barbara, esquematizado por:

$$\begin{array}{c} M - P \\ \underline{S - M} \\ \therefore S - P \end{array}$$

Este é, portanto, o campo da Lógica Formal, uma vez que os silogismos não comportam termos concretos mas lugares vazios, designados por letras a serem substituídas por termos concretos.

Para apresentar os conceitos de uma forma simbólica, pode-se dizer que um argumento é um conjunto de n + 1 proposições, onde uma delas, a conclusão, é conseqüência das demais, as premissas. Costuma-se indicar um argumento de premissas,A1, A2, A3,..., An e conclusão B por A1, A2, A3,..., An $\vdash$B, onde o símbolo "$\vdash$ " pode ser lido como " acarreta". O argumento é válido se e somente se $A1 \land A2 \land A3 \land \ldots \land An \rightarrow B$ é uma tautologia.

Pode-se trabalhar com argumentos simbólicos ou com argumentos formulados em linguagem corrente, simbolizando-os quando se utilizam as tabelas-verdade para provar sua validade.

Quando se consideram argumentos com mais de três proposições, é trabalhoso o emprego de quadros de valores para constatar a validade. Pode-se então, deduzir a conclusão usando argumentos mais simples, cuja validade já foi provada, como o modus ponens $(p, p \rightarrow q, \vdash q)$, o modus tollens $(p \rightarrow q, \sim q \vdash \sim p)$, o silogismo hipotético $(p \vee q,\ q \vee r \vdash p \vee r)$ e o silogismo disjuntivo $(p \vee q, \sim p \vdash q)$.

Dado um argumento $A1, A2, A3, \ldots, An \vdash B$, diz-se que uma seqüência finita de proposições $C1, C2, C3, \ldots, Ck$ é uma demonstração ou dedução de B a partir das premissas $A1, A2, A3, \ldots, An$, se e somente se cada Ci, $i \in \{1, 2, \ldots k\}$, for uma das premissas ou provir das proposições precedentes pelo uso de um argumento válido.

O processo das tabelas-verdade é mecânico, enquanto que na dedução é preciso construir os passos, ou seja, descobrir os argumentos válidos já conhecidos, através dos quais se pode obter a conclusão.

Até agora, estive falando do cálculo proposicional, porém precisa-se de outros elementos para trabalhar com proposições do tipo "todo A é B", onde B é o predicado de A; neste caso, é necessário introduzirem-se as noções de função proposicional, de quantificadores, etc.. No entanto, a dedução de uma conclu são de certas premissas vai ter um procedimento análogo ao que tem no cálculo proposicional.

Vê-se assim que, para fazer uma demonstração de um teorema, em um ramo qualquer da Matemática, precisa-se, primeiramente, do conhecimento do que seja uma demonstração e de uma série de argumentos cuja validade já foi provada. Além disso, há a necessidade de um corpo de conhecimentos, por menor que seja, para ter um ponto de partida. Ao se estudar a Geometria (ou qualquer outra disciplina matemática) pelo chamado método axiomático, precisa-se estabelecer termos primitivos (ou indefinidos) e proposições aceitas como verdadeiras (os axiomas). A partir dos termos primitivos, definem-se novos termos e, juntamente com os axiomas, demonstram-se novas proposições.

Com esta Lógica trabalha-se e sabe-se, portanto, formalmente, o que é uma demonstração.

2.4. A Escolha da Geometria Como Fonte de Análise dos Erros

Inúmeros autores destacam a importância da Geometria no desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno. Pogorélov, no prefácio de sua excelente "Geometria Elementar", diz que:

> "A Geometria se distingue pela clareza e pela simplicidade tanto no enunciado do resultado como no estabelecimento dos axiomas a partir dos quais deve obter-se este resultado. Assim, a Geometria nos brinda as melhores oportunidades para desenvolver o pensamento lógico na escola." (POGORÉLOV, 1974, p. 9)

Thom, quando ataca a reforma da Matemática Moderna, reclama que:

> "(...) os reformistas (pelo menos aqueles da Europa Continental) foram induzidos, pela sua tendência filosófica, por um lado a abandonar aquele terreno que é uma aprendizagem ideal para a investigação, aquela mina inexaurível de exercícios, a Geometria Euclideana, e por outro lado, a substituí-la pelas generalidades da lógica e da teoria dos conjuntos, isto é, material que é pobre, vazio e desencorajador para a intuição." (THOM, 1973, pl 197)

Rodrigues critica a redução da Geometria a meras aplicações de fórmulas e defende o papel formativo da Geometria Euclideana:

> "A Geometria Euclideana oferece um vasto campo de idéias e métodos de muito valor quando se trata do desenvolvimento intelectual do aluno, de seu raciocínio lógico e da passagem da intuição e de dados concretos e experimentais para os processos de abstração e generalização." (RODRIGUES, 1978, p. 18)

Quando planejei a disciplina "Geometria Plana" para o Curso de Licenciatura em Matemática da PUCRS, em conjunto com os professores da área, fui tentada a apresentá-la de uma forma axiomática. Afinal, desde Euclides é este o método tradicional de estudar Geometria. Porém, os resultados iniciais levaram a concluir que nem sempre o aluno que ingressa no 3º grau tem condições de fazer um estudo axiomático.

A disciplina é lecionada no primeiro semestre do curso e os alunos chegam, às vezes, apenas com "notícias" de Geometria, tendo recebido no 1º e 2º graus um conjunto de fórmulas prontas para aplicar em exercícios. No momento em que lhes são solicitadas as primeiras demonstrações de teoremas, sente-se a dificuldade que os alunos têm em fazer conjeturas, em analisá-las, em justificar os passos de seu raciocínio, em escrever a demonstração em linguagem matemática.

Cada corpo de conhecimentos pode ser representado de três maneiras diferentes: por um conjunto de ações que o sujeito executa com o objetivo de alcançar um determinado resultado (representação ativa); por um conjunto de imagens, diagramas, figuras, que organizam a percepção do sujeito de uma forma concreta (representação icônica); por um conjunto de sentenças lógicas, regidas por leis bem definidas de formação, transformação, indução e implicação (representação simbólica). (BRUNER, 1966, 1976; BORDAS, 1985).

Portanto, alguns dos alunos necessitam passar pelo manuseio e pela ação (fase ativa), para depois organizarem a sua percepção em torno de imagens (fase icônica) e chegarem, finalmente ao trabalho com as idéias, à fase simbólica, na qual estarão aptos a fazerem deduções.

Assim, o estudo de Geometria no curso de Matemática da PUCRS é realizado axiomaticamente, mas com apelos à intuição, à visualização, ao concreto, exatamente para adequá-lo às etapas do raciocínio do aluno.

Durante os doze anos em que lecionei esta disciplina, tanto nos cursos de Ciências como no de Matemática, notei, nas demonstrações feitas em aula e/ou nas verificações, certos tipos de erros que se repetiam sistematicamente. Comecei a coletar empiricamente as respostas e vi que, de uma forma geral, os erros envolviam introdução de afirmativas tiradas do desenho, sem nenhuma justificativa lógica, utilização da tese como elemento da hipótese, mau uso da linguagem matemática, entre outros erros de menor ocorrência.

Muitas vezes tive o cuidado de reformular a apresentação dos conteúdos, replanejar o ensino de tópicos nos quais os alunos apresentavam um maior número de erros e, ao voltar a coletar as respostas, notei, desanimadoramente, que os erros continuavam a se repetir. Por quê? Onde estava a sua origem? Será que o problema estava nos conteúdos de Geometria especificamente ou seria comum a todas as disciplinas do curso?

Nas reuniões de professores do curso, eu notava que estas preocupações eram comuns à maioria dos docentes. Estariam os professores de Matemática falhando em empregar estratégias de ensino que objetivassem a aquisição da habilidade de demonstrar teoremas, tais como organizar conjeturas para refutações, identificar hipóteses e conclusão, conectá-las logicamente, fazer exaustivas verificações empíricas (estratégias estas citadas por Bell (1976) em sua tese doutoral)?

Na tentativa de encontrar respostas para estas questões, propus-me a pesquisar, agora de uma forma sistemática, os erros cometidos pelos alunos em demonstrações de Geometria. Porém, como fazer isto? Resolvi, primeiramente, realizar uma revisão das pesquisas sobre erros, para descobrir o que já havia sido feito nesta área: quais os seus pressupostos, de que modo haviam sido trabalhados e quais os resultados obtidos.

2.5. Os Estudos Sobre Análise de Erros

2.5.1. O que é considerado erro

Já coloquei as minhas preocupações a respeito dos erros cometidos pelos alunos em demonstrações de teoremas e me propus a pesquisar suas causas; porém, neste momento, cabe perguntar quando se deve considerar que uma afirmação feita pelo aluno, ao demonstrar um teorema, está errada.

Donaldson diz que "do ponto de vista do senso comum, os erros são acontecimentos desastrados, que seria melhor evitar completamente, se possível." (DONALDSON, 1977, p. 181) Porém, segundo o mesmo autor, este é um ponto de vista errôneo, porque os erros podem ter um papel extremamente fecundo na atividade intelectual.

Uma outra forma de abordar o problema do erro é aliá-lo às condições finais de uma tarefa proposta: sucesso ou insucesso. Bruner (1966) considera que, ao tentar aprender algum conteúdo ou resolver um problema, há duas condições finais que devem ser separadas: o sucesso ou insucesso de um lado e a recompensa ou a punição de outro.

O sucesso e o insucesso vão depender de algum critério previamente estabelecido e são inerentes à tarefa, enquanto que a recompensa e a punição são controladas por agentes externos (professores, pais, etc.). Não há (ou não deveria haver) obrigatoriedade de associar sucesso com recompensa e insucesso com punição.

Cabe salientar que, quando o insucesso do aluno é punido pelo professor, reduz-se a possibilidade de aproveitar o erro como fonte de informação sobre os processos mentais ou como instrumento para explorar o conhecimento. O erro, desta forma, deixa de exercer o papel fecundo na atividade intelectual.

Raffaella Borasi (1988) considera que, nos últimos anos, modificou-se a atitude dos educadores matemáticos em relação aos erros dos estudantes, passando de uma perspectiva behaviorista que sugeria que os erros eram obstáculos ao processo de aprendizagem, devendo ser evitados e eliminados, para uma nova perspectiva sob a qual é reconhecido o valor dos erros como instrumentos de identificação das causas dos problemas de aprendizagem e das estratégias para superá-los.

Nem sempre é fácil resolver o que está errado em uma demonstração. Pode-se, por exemplo, considerar errado aquilo que não está de acordo com o que se pensa; desta forma, está-se aprisionando o pensamento do aluno com os grilhões dos conceitos de verdade, conceitos muitas vezes particulares, subjetivos, dependentes até do momento vivido.

Pode-se, ainda, considerar errado aquilo que não está de acordo com as regras, com as convenções, com a seqüência de axiomas que a teoria apresenta; novamente trata-se de uma atitude rígida. Deve-se analisar, cuidadosamente, os objetivos pretendidos quando é proposta uma demonstração ao aluno. Se, realmente, o propósito é verificar se ele sabe a seqüência de axiomas que deve utilizar, então a não utilização da mesma é um erro. Se o objetivo é verificar se o aluno conhece as convenções da escrita matemática e ele mostra não as conhecer, então estará errando. Porém, se o objetivo é verificar se o aluno sabe encadear os passos de um raciocínio, utilizando argumentos válidos e definições e teoremas conhecidos, então haverá erro quando o aluno não fizer este encadeamento, quando utilizar definições incorretas ou quando empregar mal um teorema.

Levando em conta tais critérios, revisei as pesquisas realizadas em Educação Matemática, no que tange a erros.

2.5.2. As pesquisas sobre erros

Hendrik Radatz, em artigos já clássicos na área (1979, 1980) faz um apanhado da análise de erros na Educação Matemática, especialmente nos Estados Unidos e na Alemanha. De acordo com o autor, a análise de erros vem se desenvolvendo desde o início do século, com abordagens e interesses diferentes.

Nos Estados Unidos, as pesquisas eram orientadas pelo behaviorismo, enquanto que na Alemanha eram influenciadas pela Gestalt, pela psicanálise e pelas idéias do escolanovismo. Na União Soviética, as mudanças fundamentais na estrutura escolar e as reformas curriculares no início da década de sessenta levaram a uma série de pesquisas, entre as quais as que analisavam erros foram das modalidades mais utilizadas.

Radatz acredita que estas diferenças apontadas entre as pesquisas dos diversos países podem ser uma razão para o fato de não haver troca de idéias entre os pesquisadores da Europa e dos Estados Unidos.

Radatz cita a classificação de erros de um pesquisador alemão, de um soviético e propõe a sua própria classificação. Weimer, na Alemanha, com pesquisas datadas já de 1922, tinha como objetivo estabelecer um padrão de erro para explicar os equívocos individuais. Agrupou-os em cinco categorias: erros de familiaridade, erros de perseverança, erros de similaridade, erros mistos e erros devido à emoção e vontade.

Menchiskaya, na União Soviética, enfatizou o caráter regular dos erros cometidos pelos estudantes de Matemática e a complexidade do processo de determinação das causas dos erros. Mesmo assim, apresentou uma tipologia dos erros de acordo com as causas: erros devido à incorreta implementação de uma operação; erros devido à qualidade insuficiente da compreensão do conceito; erros mecânicos devido à falta de interesse ou digressão; e erros devido à aplicação de regras ou algoritmos inapropriados.

Radatz não explica cada categoria criada pelos pesquisadores e propõe a seguinte classificação de erros de acordo com um modelo baseado nos mecanismos do processamento de informação:

a) Erros devido a dificuldade de linguagem; a aprendizagem do vocabulário matemático e do simbolismo, para muitos alunos, é como se fosse a aprendizagem de uma língua estrangeira, com todos os problemas relacionados;

b) Erros devido à dificuldade em obter informação espacial; o emprego cada vez maior de diagramas, figuras, "instruções icônicas" nos livros-texto, leva alguns alunos, que não têm capacidade de visualização, a cometerem erros;

c) Erros devido ao domínio deficiente de conteúdos, fatos e habilidades consideradas como pré-requisitos; deficiências que o aluno apresenta em termos de aprendizagem anterior motivam erros deste tipo;

d) Erros devido a associações incorretas ou rigidez de pensamento; várias pesquisas em relação à solução de problemas mostram que alguns alunos adquirem um método de solução de um determinado tipo de problema e não o modificam mesmo quando as condições do problema mudam;

e) Erros devido a aplicações de regras ou estratégias irrelevantes; o uso inadequado de estratégias de solução foi detectado, também, pelas pesquisas sobre solução de problemas como causador de erros.

Apesar de propor o seu modelo de classificação, Radatz considera que:

> "... é difícil fazer uma separação entre as possíveis causas de um dado erro, porque há uma estreita interação entre as causas. O mesmo problema pode originar erros de diferentes origens e o mesmo erro pode ser proveniente de diferentes processos de solução de problemas. Uma classificação e hierarquia precisa das causas dos erros parece impossível de ser realizada." (RADATZ, 1979, p. 170-1)

Em revistas americanas e inglesas, encontrei artigos mais recentes sobre pesquisas em análise de erros, nos quais os autores também apresentam categorias. Entre elas cabe salientar a classificação proposta por Newman e modificada por Casey (CLEMENS, 1980). Newman propôs um modelo para a seqüência de passos realizados por um aluno na solução de um problema de Matemática que apresenta uma só dificuldade. De acordo com

Newman, as etapas são as seguintes:

a) leitura;

b) compreensão;

c) transformação;

d) execução das habilidades necessárias ao processo;

e) codificação.

Uma falha em qualquer nível desta hierarquia impede a correta resolução do problema. Assim, haverá uma classificação das causas dos erros de acordo com a etapa do processo na qual o erro foi cometido.

Além das cinco categorias, Newman considera que há outros três tipos de causas que podem ocasionar erros em qualquer estágio do processo de solução de um problema: a motivação, a desatenção e a formulação da questão.

Casey modificou e extendeu a classificação de Newman, tornando-a aplicável à análise de erros em problemas com mais de uma dificuldade. Ele considera que, ao tentar solucionar o problema, o aluno não realiza os passos na seqüência rígida indicada por Newman; muitas vezes ele precisa voltar às etapas iniciais, como por exemplo, reler o problema para captar algum dado adicional.

Além disso, pensa que a formulação da questão é o primeiro ponto de interação entre aquele que elabora a questão e o que a resolve.

Sua classificação para as causas dos erros é a seguinte:

a) formulação da questão;

b) leitura;

c) compreensão;

d) seleção de estratégias;

e) seleção das habilidades requeridas;

f) manipulação das habilidades;

g) apresentação da solução.

Os erros que escapam a esta classificação foram agrupados em duas categorias que Casey chamou de "bloco conhecido" e "bloco desconhecido".

As classificações de Newman e Casey lembram as fases da resolução de um problema propostas por Polya: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. Polya também acredita que um aluno pode saltar por sobre as fases iniciais e dar impulsivamente a solução, enquanto outro pode (e deve) voltar às etapas iniciais para reconsiderar o trabalho já feito.

Polya não fez análise de erros, ele fez sugestões para acertos, "... naturais, simples, óbvias, apenas o bom senso comum" (POLYA, 1978, p.2).

Newman pesquisou alunos de 9 a 11 anos; depois que foram dadas por escrito as respostas aos testes propostos, os alunos com mais baixo rendimento foram entrevistados, sendo utilizadas entrevistas estruturadas.

Casey pesquisou alunos de 10 a 12 anos, com um teste contendo questões com mais de uma dificuldade e também entrevistou os alunos. Neste caso, o pesquisador informava o aluno sobre o erro que estava cometendo e auxiliava-o na etapa em ques tão.

Clemens (1980), utilizando a classificação de Newman,pesquisou alunos de 9 a 14 anos, também com um teste escrito,tendo entrevistado os que demonstraram rendimento baixo ou médio.

Todas estas são, portanto, pesquisas com alunos de faixas etárias diversas da que proponho a pesquisar. Mais próximo deste trabalho situa-se o estudo feito por Movshovitz-Hadar, Zaslavski e Inbar (1986, 1987), professores israelenses que pesquisaram as respostas dadas por alunos de mais ou menos dezessete anos, submetidos ao exame anual de Matemática que é aplicado em todo o país ao final do segundo grau.

Estes autores não consideraram a tipologia de Radatz adequada ao seu trabalho e propuseram uma nova classificação, a partir dos dados coletados durante dois anos, em uma amostra de respostas às questões escritas do exame.

Rejeitada a classificação inicial, o sistema foi revisado e reaplicado em novo exame, de forma a atingir finalmente um modelo de classificação que apresenta seis categorias:

a) uso errado dos dados;
b) linguagem mal interpretada;
c) inferência logicamente inválida;
d) definição ou teorema distorcido;
e) solução não comprovada;
f) erros técnicos.

A classificação foi feita apenas com base nas questões escritas; não houve posterior entrevista para análise dos erros. Os autores verificaram que estes ocorreram mais freqüentemente na categoria de definições e teoremas distorcidos;32% dos erros detectados foram desta classe, seguidos dos erros técnicos (27%), dos erros por mau uso dos dados (20%),dos erros pela má interpretação da linguagem (18%), das soluções não comprovadas (2%), e das inferências logicamente inválidas (1%).

Da categoria de maior incidência de erros,os autores destacam dois tipos gerais de distorções de teoremas:

a) distorção do antecedente: quando o aluno aplica um teorema utilizando a tese, mas distorcendo a hipótese. Se, por exemplo, um aluno utiliza, em relação a quaisquer duas medianas de um triângulo isósceles, a proposição que diz que as medianas em relação aos lados congruentes de um triângulo isósceles são congruentes, ele estará distorcendo o antecedente.

b) distorção do conseqüente: quando o aluno conserva a hipótese do teorema utilizado, mas inventa uma nova tese, distorcendo a original. Se, por exemplo, um aluno lembra algo sobre o teorema do ângulo externo, que diz que um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um de seus internos não adjacentes, ele poderá conservar a condição inicial,ou seja, poderá utilizar um ângulo externo, mas modificará a conclusão do teorema, afirmando que o externo é maior que a soma dos internos não adjacentes.

Movshovitz-Hadar e colaboradores acreditam que, se o professor auxiliar o aluno, advertindo-o quanto à distorção feita no teorema, é provável que ele o recorde apropriadamente e o aplique corretamente em outra oportunidade. Não acredito nesta afirmativa, pelo menos de uma forma geral, pois esta parece ser a primeira idéia que os professores têm ao detectar um tipo de erro e minhas experiências em alertar os estudantes não provou ser esta atitude eficaz para prevenir os erros.

Certos erros são persistentes e a modificação do comportamento do aluno só se dará por uma tomada de consciência, por uma reflexão sobre sua própria reflexão, pela compreensão das conseqüências de sua afirmativa errada. Se o aluno, no exemplo citado anteriormente, do ângulo externo de um triângulo, tiver condições de comprovar, por medições ou por um encadeamento de raciocínios, que o ângulo externo é exatamente igual à soma dos seus internos não adjacentes, e que não pode ser maior que a soma porque chegaria ao absurdo de mostrar que o ângulo é menor que ele mesmo (já que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180º), estão este aluno não repetirá o erro, pois já construiu o seu próprio conhecimento sobre a propriedade em questão. Não terá sido a autoridade do professor (ou do livro) que o impedirá de repetir o erro, mas a <u>sua</u> própria autoridade baseada no <u>seu</u> conhecimento.

Ainda quanto aos textos sobre análise de erros, alguns autores também se referiram aos objetivos das pesquisas sobre erros. Radatz (1980), em sua revisão dos trabalhos feitos desde o início do século, considera que o interesse das pesquisas está localizado em:

1) listar todas as técnicas potenciais de erros;

2) determinar as distribuições de freqüência destas técnicas de erros através das faixas etárias;

3) analisar dificuldades específicas, encontradas na prática ao fazer divisões escritas e operações com zero;

4) determinar a persistência das técnicas individuais de erros;

5) tentar classificar e agrupar erros.

O autor não explica, porém, o que significa exatamente cada um dos objetivos citados.

Raffaella Borasi propõe um esquema de categorização dos usos dos erros para o ensino, de acordo com o objetivo com o qual o erro é estudado e com o foco sob o qual o erro é examinado. Seu esquema é o seguinte:

FOCO / OBJETIVO	considerando o conteúdo técnico do erro	considerando, através dos erros, a natureza de um assunto	considerando através dos erros, o processo de aprendizagem
DIAGNÓSTICO e PREVENÇÃO	Erros como sinais de que o processo de aprendizagem falhou. Suas causas são diagnosticadas no esforço para eliminá-los. 1	Erros como projeções dos equívocos básicos do aluno sobre a natureza do assunto. O professor tenta identificá-los e planejar recuperação. 2	Erros como meios de identificar dificuldades potenciais e armadilhas no processo de aprendizagem de um tópico e conseqüentemente aperfeiçoar o currículo a fim de evitá-las no futuro 3
INVESTIGAÇÃO	Erros como motivação de ponto de partida para exploração de tópicos de Matemática. 4	Erros como meios de investigar as forças, limitações e metodologias de uma disciplina. 5	Erros como meios de investigar a forma da mente trabalhar. 6

Fonte: Borasi, 1987, p.5

Dentro deste esquema, esta pesquisa pode ser situada nos quadros um, dois e três, pois tem como objetivo a análise e classificação dos erros e o diagnóstico das dificuldades de aprendizagem que os causaram. Os focos da análise serão: o conteúdo técnico do erro; as concepções errôneas sobre um determinado assunto, que levam o aluno a cometer o erro e o processo de ensino-aprendizagem daquele conteúdo.

Especificamente em relação à Geometria, encontrei o trabalho de Rolland Smith, "Three major difficulties in the learning of demonstrative geometry" (1940), que, realmente é uma pesquisa muito interessante, pois o autor acompanhou os erros cometidos por alunos de aproximadamente 16 anos, em um curso de Geometria, no decorrer do outono de 1932, propondo, quase diariamente, uma série de testes que visavam a verificar as dificuldades na aprendizagem de demonstrações.

No final do trabalho, o autor considerou que os erros podiam ser classificados em três categorias:

a) erros devido ao pouco conhecimento das figuras geométricas;

b) erros devido à imcompreensão do significado da relação lógica de implicação;

c) erros devido à escassa compreensão do significado de uma demonstração.

Os testes envolviam gradativas dificuldades: construção de um elemento; construção de uma figura de acordo com as condições de uma sentença do tipo "se-então"; verificação da validade de uma argumentação; obtenção de uma conclusão a partir de premissas dadas; e, finalmente, demonstrações de teoremas, dadas a hipótese e a tese.

Sharon Shenk (1985) comenta o pequeno número de pesquisas relacionadas com erros em demonstrações, citando a de Smith, e apresenta uma pesquisa feita nos Estados Unidos, em 1981, com 2699 estudantes de um curso de Geometria, na faixa etária de 15 a 17 anos. Em seu trabalho, porém, não analisa cada erro especificamente, mas avalia o resultado final da demonstração e atribui escores de zero a quatro. É, assim, uma pesquisa cujos objetivos e conclusões são muito particulares,porque específicos para o tipo de questões que colocou e para a forma como foram avaliadas.

Em revistas brasileiras, tanto de Matemática como de Educação, não encontrei referências específicas a trabalhos sobre análise de erros ou sobre erros em demonstrações de teoremas.

Revisados os aspectos considerados fundamentais a esta pesquisa, passo a apresentação da escolha das questões e da metodologia.

3. A PESQUISA EM SI

3.1. A Escolha das Questões e da Metodologia

O Curso de Licenciatura Plena em Matemática da PUCRS oferece no 1º semestre três disciplinas do Instituto de Matemática: Cálculo Diferencial na Reta, Fundamentos de Matemática I e Geometria I. O aluno inicia a aprendizagem das técnicas de demonstração e, em Geometria I, Geometria Euclideana Plana, desenvolve esta habilidade demonstrando teoremas sobre Geometria.

Inicialmente, pensei em trabalhar com alunos que já tivessem sido aprovados em Geometria I e Fundamentos de Matemática I, pois isto permitiria verificar como o aluno demonstra teoremas, depois que teve noções de Lógica em Fundamentos de Matemática e aprendeu técnicas de demonstração nas disciplinas do primeiro semestre.

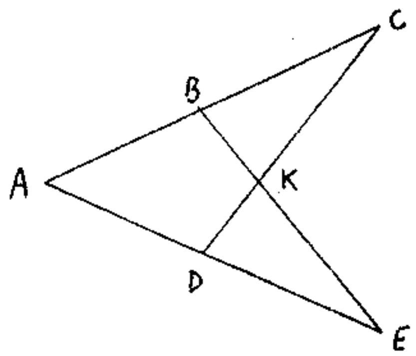
Para uma primeira etapa do trabalho, na qual faria a validação dos instrumentos de pesquisa, convidei quatro alunos que já tinham cursado as disciplinas mencionadas; queria verificar como o trabalho se desenvolveria e quais as modificações que deveria fazer em termos de questões e/ou de metodologia antes da pesquisa propriamente dita.

Propus, em primeiro lugar, uma afirmativa do tipo "se-então" para que o aluno verificasse se era verdadeira ou falsa e justificasse a sua resposta; após, solicitei a demonstração de duas proposições, envolvendo conteúdos de Geometria Plana. Apresentei, também, as questões a quatro professores do curso, para que opinassem sobre a correção das mesmas.

Pelas respostas obtidas, tanto dos alunos como dos professores, resolvi substituir a primeira questão, pois não estava de acordo com os objetivos do trabalho, já que a justificativa, no caso, não era uma demonstração.

Após a substituição, assim ficaram as questões:

1ª) Demonstre:

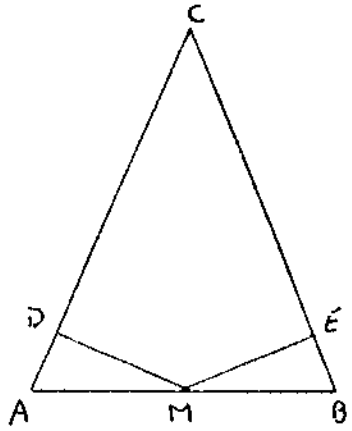


Hipótese $\begin{cases} AB = AD \\ BC = DE \end{cases}$

Tese $\left\{ \hat{C} = \hat{E} \right.$

Esta questão foi uma das utilizadas por Smith em seu estudo pioneiro; a figura é o que chamou de "complexa". Já que os pontos A, C e E formam um triângulo isósceles de base $\overline{CE}$ e vértice A, para colocá-lo na posição em que geralmente se vê o triângulo isósceles, desenhado em livros-texto, o ponto A deveria sofrer um giro de 90 graus no sentido horário. Além desta dificuldade de visualização para o aluno, a figura apresenta triângulos superpostos, o que, em geral, confunde alguns alunos que têm dificuldade em separá-los para analisar as informações.

2ª) Demonstre:

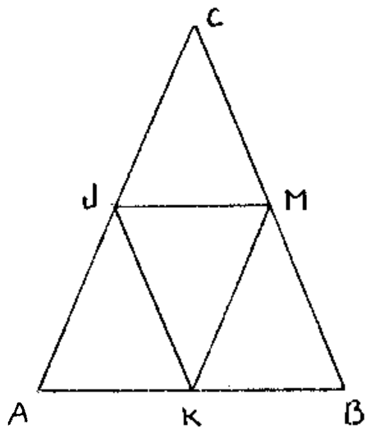


Hipótese
- M é ponto médio de $\overline{AB}$
- $\overline{MD} \perp \overline{AC}$
- $\overline{ME} \perp \overline{BC}$
- MD = ME

Tese
- ABC é um triângulo isósceles

Esta questão envolve os conceitos de perpendicularismo, de ponto médio, de triângulo isósceles e a congruência de triângulos retângulos. Como os triângulos AMD e BME são claramente identificáveis, as dificuldades da questão baseiam-se exatamente na utilização dos conceitos citados.

3ª) Demonstre:



Hipótese
- AKMJ e BKJM são paralelogramos
- KJ = KM

Tese
- ABC é um triângulo isósceles

Esta questão permite a abordagem de várias formas. Pensando na propriedade que diz que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes, este fato aplicado a cada paralelogramo, juntamente com a hipótese de que KJ é igual a KM, permite concluir que os dois triângulos, AKJ e BKM, são congruentes por LLL e, conseqüentemente, o ângulo $\hat{A}$ é congruente ao ângulo $\hat{B}$, o que possibilita deduzir que o triângulo ABC é isósceles.

Ainda, utilizando a propriedade que diz que em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes, pode-se obter, de Kj=KM, que $K\hat{J}M$ é congruente a $K\hat{M}J$; como os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes, chega-se à conclusão de que o ângulo $\hat{A}$ é congruente ao ângulo $\hat{B}$, e novamente se deduz que o triângulo ABC é isósceles. Estas são, talvez, as idéias mais imediatas que ocorrem, mas ainda se pode pensar em ângulos alternos internos, em semelhanças de triângulos, etc. A questão envolve conceitos e propriedades de paralelogramos e de triângulos isósceles.

Além da escolha das questões, a primeira etapa da pesquisa permitiu verificar a possibilidade de gravar as verbalizações do aluno enquanto resolvia o problema.

Nos estudos sobre análise de erros, sempre houve a preocupação em ouvir o aluno ou anotar as suas verbalizações enquanto resolvia um problema.

Lyndal Hutcherson (1975), em uma pesquisa realizada nos Estados Unidos, repetiu um estudo feito em 1927 por Lenore John, no qual a técnica de "pensar em voz alta" já tinha sido utili zada.

Hutcherson assinala o fato de que seu antecessor acredita que este método dá informações a respeito do raciocínio do sujeito que não poderiam ser obtidas de outra forma. Para eles tal método também apresenta limitações como: a impossibilidade de o sujeito dizer tudo o que lhe passa pela mente; o aumento do tempo de resolução do problema, já que a fala é extremamente lenta se comparada com o pensamento, causando o esquecimento de parte do raciocínio; a dificuldade que representa para o pesquisador anotar rapidamente tudo o que é dito pelo aluno.

Naturalmente, esta última limitação é de fácil solução pelo uso do gravador, porém corre-se o risco, neste caso, de introduzir um elemento que pode atrapalhar o aluno.

Watson (1980) cita pesquisas mais antigas e outras atuais que utilizaram entrevistas para descobrir as causas dos erros. Newman e Clemens entrevistaram os alunos pesquisados depois de ter as respostas escritas. Minha idéia de ouvir o aluno durante a resolução da questão baseia-se, principalmente, no trabalho de Newell e Simon, "Human Problem Solving" (1972). Estes dois pesquisadores tinham objetivos bem diferentes dos meus, porém utilizaram, entre outras tarefas, problemas de Lógica Simbólica.

Os indivíduos pesquisados por Newell e Simon recebiam uma proposição lógica e um conjunto de regras e deveriam demonstrar a proposição de acordo com aquelas regras, sempre dizendo ao experimentador, em voz alta, o que pensavam. A seguir, eram analisados os protocolos verbais.

Concordo com a utilização dos protocolos verbais na análise da tarefa proposta, porque a experiência docente na correção de demonstrações comprova que, se o aluno não diz o que fez e porque o fez no momento em que está resolvendo a questão, mais tarde não se lembrará do que pensou e não auxiliará na descoberta das causas dos erros.

Resolvi, então, utilizar esta técnica de pensar em voz alta e testei-a na primeira etapa da pesquisa, com os quatro alunos já mencionados. Quanto ao uso do gravador, uma das alunas me disse na segunda entrevista:

> "Eu estava tão nervosa, por causa do gravador. Eu olhava para ele e parecia um bicho-papão, que coisa horrorosa! Quando cheguei em casa, foi a primeira coisa que eu comentei: 'Enfrentar a Helena tudo bem, mas eu olhava o gravador e parecia que ele sabia mais do que eu'."

Considerei que o problema dela não estava ligado especificamente ao gravador, pois ela usava a expressão " enfrentar a Helena" colocando em mim uma autoridade demasiada que depois transpunha, também, para o gravador.

Assim, embora correndo o risco de inibir alguns alunos com o uso do gravador, optei por utilizá-lo, pois realmente seria impossível captar, só escrevendo, todas as nuances, todos os ir-e-vir das verbalizações do aluno.

Ainda na primeira etapa da pesquisa, após a aplicação do teste para os quatro alunos, estabeleci que o tempo previsto para cada questão seria de aproximadamente quinze minutos.

3.2. A Escolha dos Alunos Participantes da Pesquisa

Escolhidas as questões e a metodologia, restava definir os participantes da pesquisa. Inicialmente, convidei os vinte e três alunos que, naquele 1º semestre de 1988, cursavam o 2º semestre do curso de Matemática da PUCRS e satisfaziam as exigências de aprovação nas disciplinas já mencionadas. Porém, como se aproximava a época de exames, a maioria dos alunos declinou do convite.

Resolvi, então, esperar o início do 2º semestre de 1988, para que os alunos pudessem trabalhar com mais calma, sem a preocupação com as provas.

Divulguei o convite, já agora aberto a todos os alunos do curso que tivessem concluído as disciplinas de 1º semestre, inclusive através de um cartaz no mural, destinado a avisos relativos ao curso de Matemática. Tive, no entanto, muita dificuldade em contar com candidatos. Somente com convites pessoais ou por indicação de outros professores, que me auxiliaram na tarefa de sensibilizar os alunos, é que consegui reunir onze estudantes dispostos a participarem da pesquisa.

Por comentários que eles fizeram, durante ou após as entrevistas, fiquei com a impressão de que o medo de errar, o medo de se sujeitar a um teste para o qual eles não estudaram, foi o fator preponderante das recusas. Como eu lhes esclarecia, não se prepararem para o teste era uma condição fundamental para o trabalho, pois o propósito era exatamente verificar o que o aluno tinha construído como <u>seu</u> conhecimento, em termos de conteúdos de Geometria e de técnicas de demonstração.

Para resguardar o sigilo da pesquisa, assegurado aos alunos no início da primeira entrevista, aproveitei a idéia de Lakatos (1978) que, em sua tese doutoral, descreveu um diálogo imaginário com vários alunos, cujos nomes são os das letras do alfabeto grego.

Assim, os alunos participantes da pesquisa serão identificados por: Alfa, Beta, Gama, Delta, Épsilon, Zeta, Kapa, Lambda, Rõ, Sigma e Ômega.

3.3. A Sistemática de Aplicação do Teste e da Entrevista Posterior

Todas as entrevistas, iniciais e finais, foram realizadas no Instituto de Matemática da PUCRS, em uma sala destinada a aulas especiais ou a atendimento de alunos, com poucas classes, de forma que o aluno ficava sentado à minha frente e na mesa ao lado ficava o gravador.

A primeira parte do trabalho com cada aluno consistiu em uma sessão,de aproximadamente uma hora, em que foram propostas as três demonstrações a serem realizadas.

Quando o aluno entrava na sala para a primeira sessão, era convidado a sentar-se e eu lhe dava as explicações necessárias sobre os objetivos da pesquisa, sobre a técnica utilizada, sobre o tempo estipulado para cada questão e sobre o sigilo dos resultados. Já que não interessava verificar a capacidade de memória do aluno, eu lhe apresentava, também,um texto com as definições e teoremas que poderiam ser necessários à demonstração. Este texto será citado daqui por diante com a expressão "folha auxiliar".

Ao entregar as questões ao aluno, ligava o gravador e marcava o horário de início de trabalho. A partir deste momento, tudo o que fosse falado, pelo aluno ou por mim, estaria sendo gravado e seria transcrito depois, palavra por palavra.

Ao mesmo tempo em que eram gravadas as verbalizações, eu registrava em folha à parte as observações sobre os elementos que o aluno citava, para poder, posteriormente, entender o que fora colocado por ele.

No final de todo o trabalho, eu entregava ao aluno um questionário que ele deveria trazer preenchido na próxima entrevista, no qual eram solicitadas informações sobre as escolas onde o aluno havia freqüentado o 1º e 2º graus e um histórico das disciplinas realizadas até ali no curso de Matemática. O modelo deste questionário encontra-se em anexo.

Ao ler a transcrição de cada entrevista, analisei tudo o que foi dito, detectando os erros e fazendo algumas suposições sobre as causas. A transcrição foi, então, reescrita e foram intercaladas, entre os trechos do diálogo, as observações pertinentes, para depois confirmá-las ou descartá-las.

Na segunda entrevista, realizada em geral uma semana depois, eu lia para o aluno o texto datilografado com a transcrição da entrevista inicial, enquanto ele acompanhava pela sua folha de trabalho. O procedimento funcionava com um replay da entrevista inicial, pois eu estava lendo as palavras que ele havia dito e também as observações que eu lhe havia feito na ocasião. Assim, ele relembrava melhor os passos de seu raciocínio, o que eu comprovei muitas vezes, quando o aluno fazia observações do tipo: "Eu estou me lembrando bem do que estava pensando quando disse isto".

Durante a leitura da transcrição, discutia com o aluno todos os comentários feitos, procurando saber a sua opinião a respeito dos erros por ele cometidos. Após esta análise, conversávamos a respeito do ensino de Matemática que o aluno havia recebido no 1º e 2º graus e sobre o seu conceito de demonstração de teoremas.

Sem necessariamente ser nesta ordem nem com estas palavras, eu perguntava sobre o ensino de Matemática que o aluno tivera no 1º e 2º graus, sobre a aprendizagem de Geometria, sobre a realização de demonstrações de teoremas em níveis anteriores e sobre sua opinião a respeito da necessidade de demonstrar teoremas.

Como não havia um roteiro rígido, muitas vezes o aluno narrava as situações de aprendizagem que mais lhe haviam chamado a atenção; falava sobre os seus sentimentos em relação aos professores de 1º e 2º graus e colocava suas opiniões sobre o ensino de Matemática, inclusive em nível de 3º grau.

Desta segunda entrevista, que não transcrevi palavra por palavra, eu destaquei as respostas às minhas perguntas sobre os seus erros e, também, o conceito de demonstração. Em alguns casos, quando o aluno lembrava fatos ocorridos relativos ao 1º e 2º graus, registrei as suas considerações.

Ao falar, os alunos usaram muito as expressões "este lado", "este ângulo", porque estavam apontando para o desenho e eu estava vendo o que faziam; nas notas que tomei, estes elementos na maior parte das vezes foram identificados. Na transcrição da entrevista, coloquei entre parênteses a identificação de tais elementos, assim como as observações que elucidam o texto. Desta forma, quando forem citados trechos da verbalização, será possível acompanhar o raciocínio do aluno na figura correspondente.

3.4. Os Erros Encontrados

3.4.1. Introdução

Após a segunda entrevista, escrevi mais uma vez a transcrição da inicial, agora colocando, junto com as observações, as justificativas que o aluno dera para os seus erros e as observações que fizera sobre o assunto.

Iniciou-se, então, a fase de análise destes textos, para tentar classificar os erros encontrados. Após uma primeira análise, em que encontrei vinte e quatro tipos de erros, reli os trabalhos sobre análise de erros já citados anteriormente e concluí que as minhas categorias não eram mutuamente exclusivas. Fiz, então, uma segunda análise, agrupando os erros em dez classes. Ao analisar as causas dos erros encontrados, novamente verifiquei que havia uma intersecção não nula das classes, e resolvi, finalmente, apresentar oito categorias.

Não afirmo que tenha chegado a uma classificação ótima e penso que outros professores poderiam ler o material e encontrar categorias diversas. Porém, cada classificação obedece aos critérios escolhidos por aquele que classifica e não vejo, pelo menos por enquanto, possibilidade de modificar o que apresentei, sob pena de englobar, em uma mesma categoria, erros cuja única característica comum é o fato de serem erros.

Assim, descreverei daqui por diante cada um dos tipos de erros, exemplificando, em cada caso, com algumas ocorrências e com as respectivas observações dos alunos.

Para facilitar a leitura, já que estarei a todo momento fazendo referência aos elementos das questões propostas, colocarei à direita de cada folha as três figuras correspondentes às mesmas.

3.4.2. Os erros do tipo I

A Matemática é uma linguagem, com alguns símbolos universalmente aceitos: além destes, cada autor pode,se necessário, introduzir outros símbolos, desde que indique o seu significado previamente.

Na disciplina de Geometria Plana do curso de Matemática da PUCRS, seguindo a orientação dos autores dos livros-texto com os quais se trabalha, utilizam-se as seguintes notações e convenções:

I) Para segmentos, semi-retas e retas:

a) utiliza-se uma barra horizontal sobre duas letras para indicar um segmento cujas extremidades são os pontos representados por aquelas letras. Ex.: $\overline{AB}$ representa o segmento cujas extremidades são os pontos A e B.

b) utiliza-se uma flecha da esquerda para a direita sobre duas letras para indicar uma semi-reta cuja origem é o ponto representado pela letra à esquerda e que passa pelo ponto representado pela letra à direita. Ex.: $\overrightarrow{AB}$ representa a semi-reta com origem em A e passando por B.

c) utiliza-se uma flecha dupla sobre duas letras para indicar a reta determinada pelos pontos representados por aquelas letras. Ex.: $\overleftrightarrow{AB}$ é a reta determinada pelos pontos A e B.

d) utilizam-se duas letras para indicar a distância entre os pontos representados por aquelas letras. Ex.:AB representa a distância de A até B.

II) Para ângulos e triângulos:

a) representa-se um ângulo por três letras, de forma que a do meio representa o ponto que é vértice do ângulo e as outras duas representam, respectivamente, pontos de cada lado do ângulo. Utiliza-se, ainda, um outros sinal, $\sphericalangle$, colocado na frente das três letras, ou um acento circunflexo colocado sobre a letra que indica o vértice. Ex.: $A\hat{B}C$ é o ângulo de vértice em B e cujos lados são $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$. Quando não há outros ângulos na figura com o mesmo vértice B, pode-se, simplesmente, representá-lo por $\hat{B}$.

b) representa-se um triângulo de vértices A,B e C, por Δ ABC.

III) Para a relação de congruência:

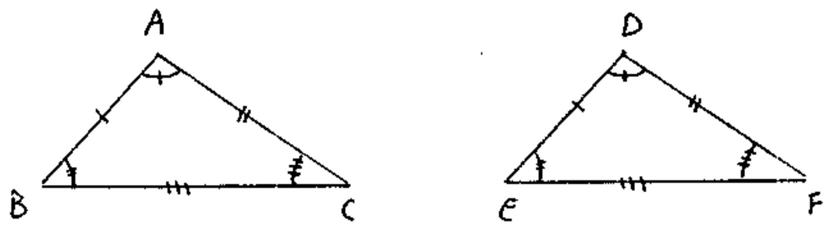
A congruência entre segmentos, ângulos ou triângulos é indicada pelos símbolos " $\cong$ " ou " $\equiv$ ".

Pela definição de congruência de segmentos, sabe-se que dois segmentos são congruentes se e só se têm a mesma medida; assim, pode-se indicar nas demonstrações, indiferentemente, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ou AB=CD, conforme indique a relação de congruência entre segmentos ou a relação de igualdade entre as medidas dos mesmos.

Da mesma forma para os ângulos, pode-se escrever $\hat{A} \cong \hat{B}$ ou $m\hat{A} = m\hat{B}$, onde $m\hat{A}$ indica a medida do ângulo $\hat{A}$.

Quanto à congruência de triângulos, costuma-se indicá-la apresentando as três letras em uma certa ordem que indica os vértices correspondentes em cada triângulo. Assim, por exemplo, se os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são congruentes, existe uma correspondência bijetora entre os vértices, de forma que A corresponde a D, B corresponde a E e C corresponde a F. Logo, escreve-se $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Ainda quanto a convenções, neste caso aplicáveis à figura com a qual se trabalha, existem as marcas ou riscos que se faz para indicar congruências de lados ou de ângulos. Por exemplo, ao marcar os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ como representado abaixo, indica-se que $AB=DE$, $AC=DF$, $BC=EF$, $m\hat{A}=m\hat{D}$, $m\hat{B}=m\hat{E}$, $m\hat{C}=m\hat{F}$.



Alguns autores mencionam explicitamente a função das marcas (Moise & Downs, 1971, por exemplo), outros apenas utilizam sem comentar (Hariki & Onaga, 1979, por exemplo), outros, ainda, não utilizam (Pogorélov, 1974; Barbosa, 1985).

É óbvio que não há necessidade de fazer as marcas, é um recurso auxiliar para o raciocínio, e notei que nem todos os alunos entrevistados se socorrem desta marcação; alguns, entretanto, ao marcar de uma forma inadequada, provocam outros erros.

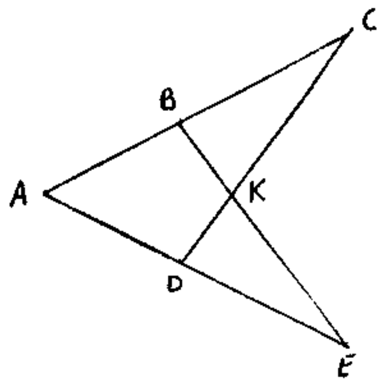
O erro do tipo I é o que envolve a linguagem matemática. Pode relacionar-se com os símbolos e convenções da linguagem escrita ou pode envolver a linguagem oral, o uso das palavras que designam entes matemáticos, a interferência de significados diversos, a falta de clareza e precisão.

Os erros relacionados com os símbolos e convenções, detectados nas demonstrações escritas, foram os mais freqüentes. Os exemplos mais comuns foram:

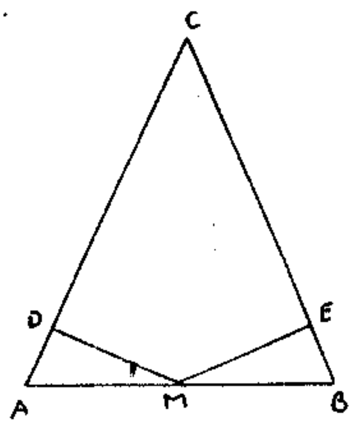
a) Indicação de ângulos somente com a letra do vértice quando havia outros ângulos com o mesmo vértice na figura. Na 1ª questão, os ângulos $\widehat{ABE}$ e $\widehat{ADC}$ indicados apenas com as letras B e D, respectivamente; na 2ª questão, os ângulos retos $\widehat{ADM}$ e $\widehat{BEM}$ indicados apenas por $\widehat{D}$ e $\widehat{E}$, respectivamente; na 3ª questão, os ângulos $\widehat{AKJ}$, $\widehat{BKM}$, $\widehat{AJK}$, $\widehat{BMK}$, $\widehat{KJM}$, $\widehat{KMJ}$, citados somente através das letras que indicam os vértices.

b) Além de indicar o ângulo com uma única letra, às vezes al-

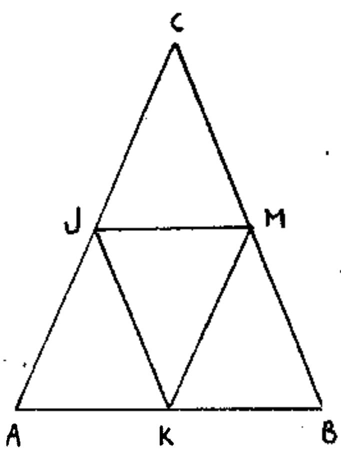
1.



2.



3.



guns alunos ainda representam-no sem o acento circunflexo, o que indica, então, um ponto.

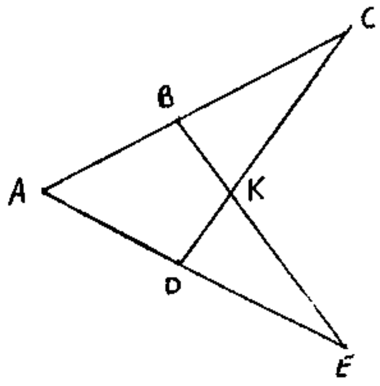
c) Indicação do ângulo com três letras, porém sem o acento circunflexo ou o sinal " $\sphericalangle$ "; da mesma forma, indicação de um triângulo com três letras sem o sinal "Δ". Assim, causava dúvidas para a interpretação da resposta, pois não permitia saber se o aluno se referira ao ângulo ou ao triângulo.

d) Indicação de congruência de segmentos colocando a barra horizontal sobre as letras, mas usando o sinal de igualdade entre eles. Ex.: $\overline{AB}=\overline{AD}$. Da mesma forma, indicação da congruência de segmentos colocando o sinal de congruência entre os pares de letras que indicam comprimento dos mesmos. Ex.: $AB \cong AD$.

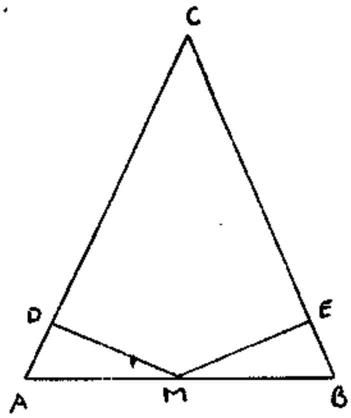
e) Indicação de congruência de triângulos utilizando o sinal de igualdade entre eles.
Ex.: $\Delta ABE = \Delta ADC$.

f) Indicação de congruência de triângulos com as letras trocadas. Ex.: Na 1ª questão, em lugar de escrever $\Delta ABE \cong \Delta ADC$, indicar

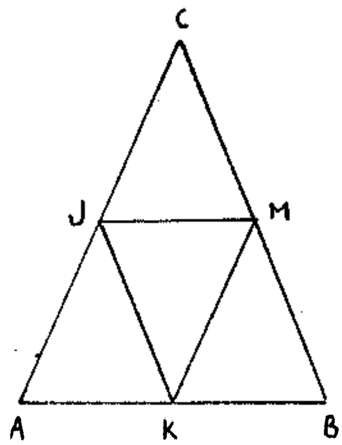
1.



2.



3.



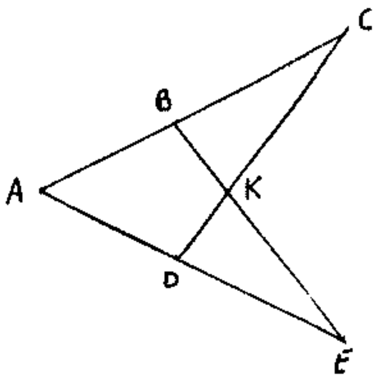
por $\Delta ABE \cong \Delta CDA$.

Este tipo de erro não é realmente algo que impeça o aluno de fazer uma demonstração; é como se, ao escrever em um idioma estrangeiro, fossem cometidos erros, esquecendo ou trocando letras, não obedecendo à concordência verbal ou nominal, etc.. O texto escrito ficaria incorreto, talvez até difícil de ler, mas provavelmente não impediria a compreensão do mesmo.

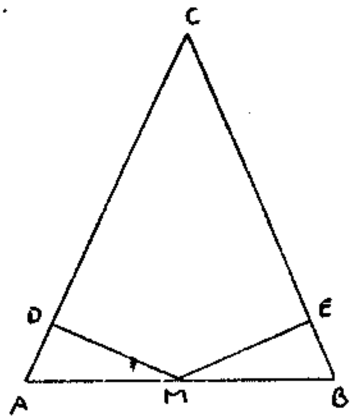
Comento os erros e indico-os porque escrever corretamente em Matemática é um dos objetivos a serem alcançados por qualquer pessoa que se disponha a ser professor de Matemática. Não insistirei sobre a causa destes erros relacionados com simbologia por que não configuram o cerne do problema da demonstração.

Somente em um caso, da aluna Lambda, as notações por ela utilizadas ao escrever a demonstração fizeram muitas vezes com que o texto escrito fosse absurdo.

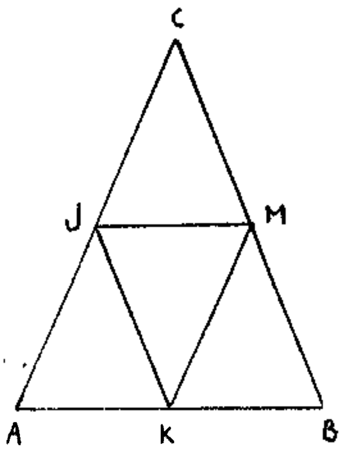
1.



2.



3.



Na 2ª questão, ela escreveu a demonstração (que nem pode receber este nome) da seguinte maneira:

"MEB = MDA

$\hat{M} = M -$

$\hat{D}$ e $\hat{E} \perp \to 90$

A = B - A

$\overline{AM} = \overline{MB}$

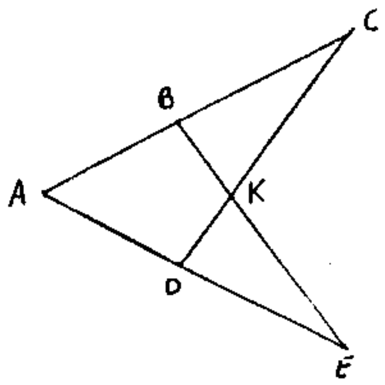
Lado ângulo lado

$\hat{A} = \hat{B} \to$ AC = AB e C ponto de intersecção entre as retas AC e BC e o ângulo C o complemento dos 180º graus internos."

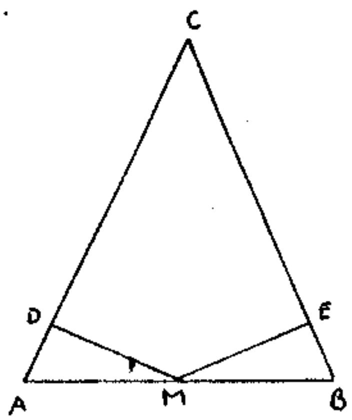
Em primeiro lugar, há uma igualdade entre dois grupos de letras que não se sabe se indicam ângulos ou triângulos. Em segundo lugar, o que significa "M = M -"? De um lado um ângulo, de outro lado uma diferença sem subtraendo, onde o minuendo é um ponto. Em terceiro lugar, da equação "A = B - A" chego a " B = 2A". Mas o que é isto? O que são A e B? Pontos? Ângulos?

Na segunda entrevista, quando lhe fiz ver o absurdo do que tinha escrito, ela justificou-me que, em ambos os casos, não era um sinal de

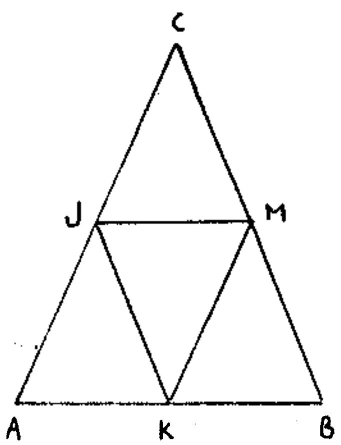
1.



2.

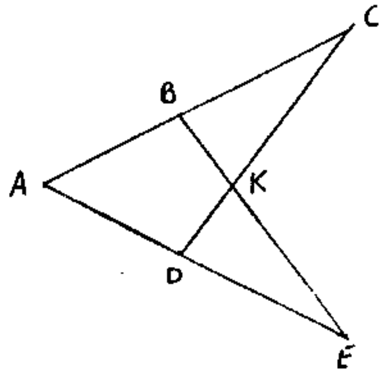


3.



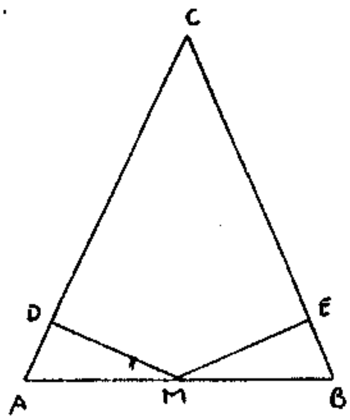
menos, era um risco que ela usa para separar os elementos que vai citando. Portanto, a aluna criou um novo significado para o símbolo, mas, utilizando-o em um texto matemático, fere a exigência de unicidade: cada símbolo deve ter um único significado.

1.



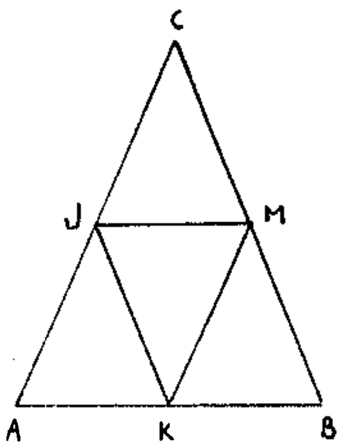
Além dos erros já citados, ainda se tem retas indicadas sem a dupla flecha e os graus estranhamente indicados, pois ela escreve "180º graus" e dessa forma lê-se "centésimo octagésimo graus".

2.



Ilustrei a apresentação dos erros relacionados com simbologia matemática com este exemplo, porque foi o caso em que o mau uso dos símbolos impediu a compreensão do que fora escrito.

3.



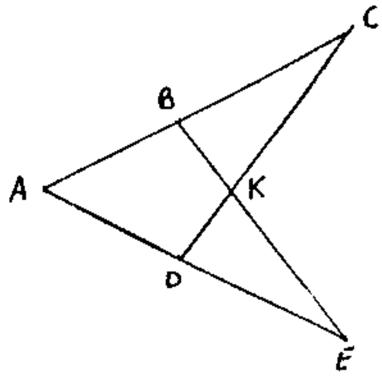
Quanto às marcações na figura, para indicar segmentos ou ângulos congruentes, a sua falta ou utilização diferente da usual não pode ser considerada erro, pois cada um pode criar a sua própria convenção, já que é um recurso auxiliar. Somente quando a marcação errada provocar um erro de outro tipo é que assinalarei o fato.

Mais graves que os erros que envolvem símbolos e convenções, são os relacionados com a maneira incorreta de utilizar os termos matemáticos, a interferência de significados matemáticos diferentes, a intersecção de significados não matemáticos, a verbalização incorreta de relações matemáticas, a falta de clareza e precisão. Alguns exemplos serão indicados a seguir.

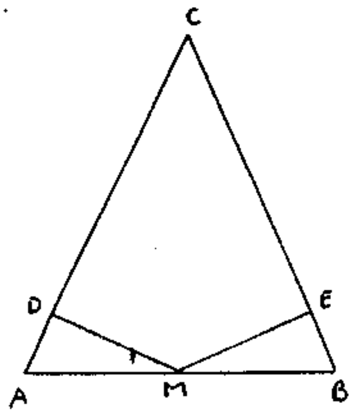
O aluno Alfa, na 1º questão, em certo momento afirmou: "Eu tenho este K em comum, tenho este ângulo de 90 em comum."

Realmente, K é o vértice comum aos triângulos Δ DKE e Δ BKE; neste caso, usou corretamente a expressão "em comum". Mas logo em seguida falou em ângulo de 90 "em comum". Os ângulos que ele considerava como retos, $\hat{ABK}$ e $\hat{ADK}$, não eram comuns a dois triângulos. Quando perguntei-lhe, na segunda entrevista, o que significava para ele a palavra "comum", respondeu que os ân

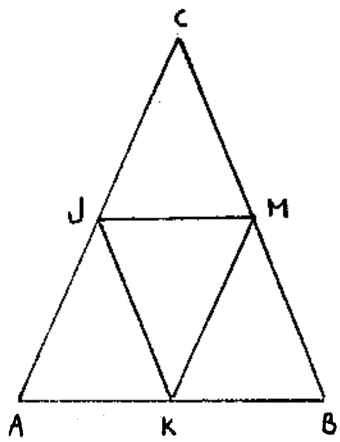
1.



2.



3.



gulos seriam iguais.

Então, ele está usando a palavra incorretamente , como sinônimo de igual, de congruente.

O aluno Épsilon, na 1ª questão, também usou de forma errada a palavra "comum". Havia uma dúvida quanto ao caso de congruência a ser aplicado e ele disse:

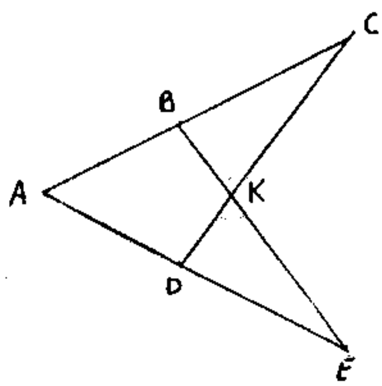
> "Eu tenho um lado comum, um ângulo comum e um ângulo oposto também comum."

Além de um erro quanto ao caso de congruência, que será analisado mais adiante, ele estava usando a expressão "lado comum" no sentido de "lados correspondentes congruentes" e da mesma forma quanto aos ângulos citados.

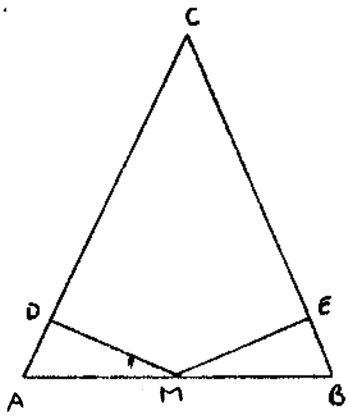
A aluna Lambda também fez um mau uso da palavra "comum" quando, na 3ª questão, ela escreveu:"... lados comuns→3 paralelogramos são iguais".

Provavelmente queria dizer "lados congruentes",para que a conclusão fosse esta.

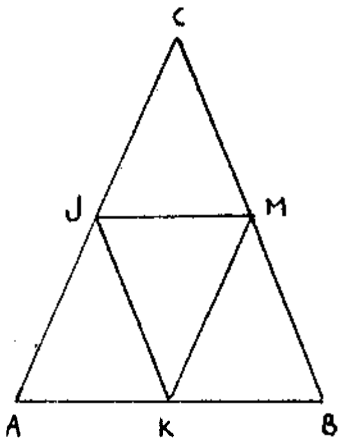
1.



2.



3.



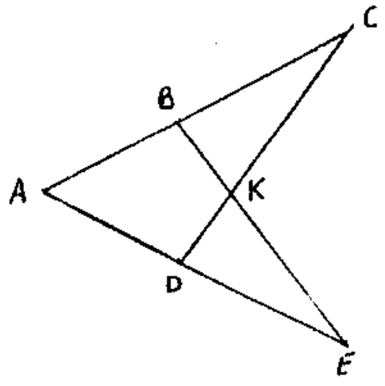
A aluna Delta, na demonstração escrita na 1ª questão, escreveu que "K forma 2 triângulos, △BCK e △DEK". Mas não é K que forma os triângulos, eles são formados por segmentos, K é um vértice comum. Quando perguntei-lhe a razão pela qual escrevera desta forma, ela justificou dizendo que não volta atrás para reler o que escreve, porque se não perde muito tempo.

Ainda a aluna Delta, na demonstração escrita na 2ª questão, escreveu que "... o segmento $\overline{CD} = \overline{CE}$ pela perpendicularidade de AD e EB".

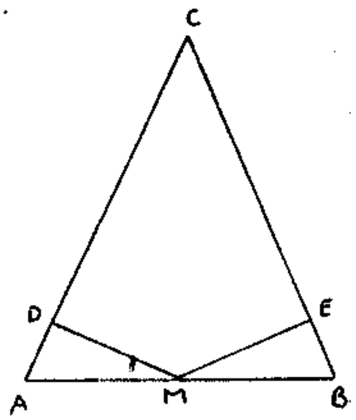
Há erros de outros tipos, como por exemplo concluir a congruência de segmentos através do perpendicularismo, pois nada permite fazê-lo. Este erro será classificado e analisado adiante. O que interessa, no momento, é o mau uso da palavra perpendicularidade, pois $\overline{AD}$ e $\overline{EB}$ não são perpendiculares entre si, eles são segmentos perpendiculares, respectivamente, a $\overline{MD}$ e $\overline{ME}$.

Há, ainda, um 3º erro da mesma aluna na 3ª questão, quando ela

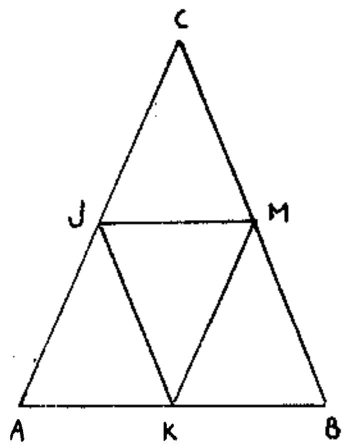
1.



2.

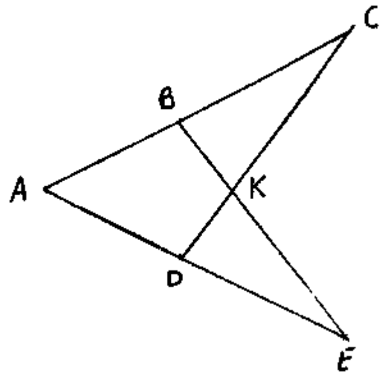


3.



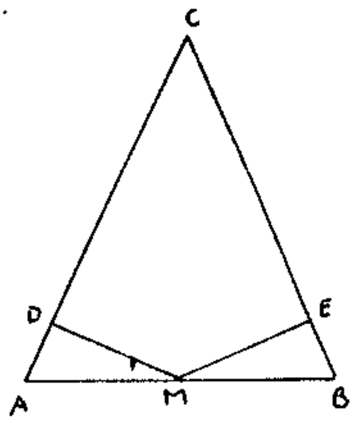
disse no final da demonstração: "Daí eu provo este triângulo aqui" (ΔJMC). Mas um triângulo não se prova! Um triângulo pode ser desenhado, pode ser apresentado, pode ser definido, mas o que se prova é alguma propriedade do triângulo.

1.



A aluna Zeta, na 1ª questão, tentava resolvê-la através de uma construção, traçando o segmento $\overline{CE}$. Porém, ela disse: "Tá, se eu passar uma reta aqui, fica um triângulo isósceles". (Δ ACE).

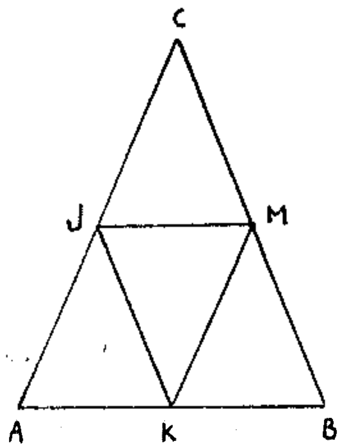
2.



É claro que poderia traçar uma reta passando por C e E, mas não o fez, traçou exatamente um segmento; portanto, faltou precisão de linguagem.

A aluna Lambda cometeu vários erros relacionados com linguagem matemática.

3.



Na 1ª questão, ela disse, de repente:

> "Ah, tá, já enxerguei! São triângulos semelhantes e este triângulo aqui (Δ ADC) é semelhante a este aqui" (Δ ABE).

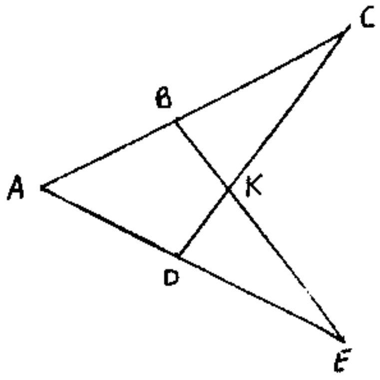
Sem saber se ela citava a relação de congruência ou de semelhança, perguntei-lhe, na segunda entrevista, e ela disse:

> "Eu confundo semelhança com congruência. Semelhante eu sei que não é igual, mas eu não consegui assimilar que o congruente é igual."

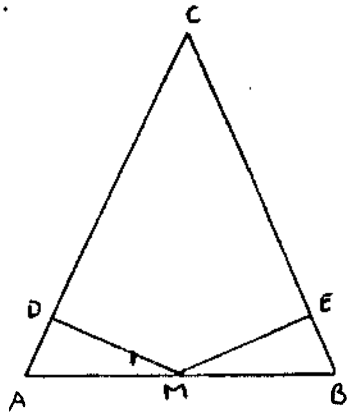
Na 2ª questão, em dois momentos ela usou a palavra"praticamente"; quando se referiu ao ângulo $\hat{C}$, disse que era "praticamente oposto" e quando se referiu ao ângulo $A\hat{C}M$, usou a expressão "praticamente a metade". No primeiro caso,ela queria dizer que o ângulo $\hat{C}$ é o oposto ao lado $\overline{AB}$ e no segundo caso, queria dizer que,traçando uma bissetriz $\overline{CM}$ (o que é outro problema a ser analisado mais adiante) , teria o ângulo $\hat{C}$ dividido em dois ângulos congruentes, sendo $A\hat{C}M$ a"metade" de $\hat{C}$.

Mas o que significa "praticamente" neste contexto? Quando lhe perguntei, respondeu-me que seria "igual à metade". É uma interferência de significado não matemático.

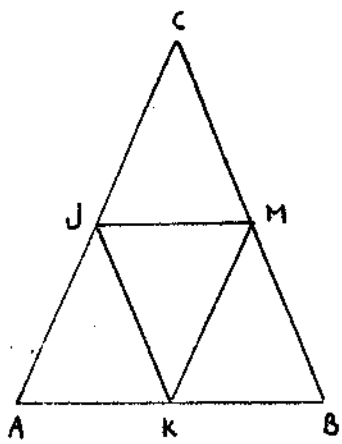
1.



2.

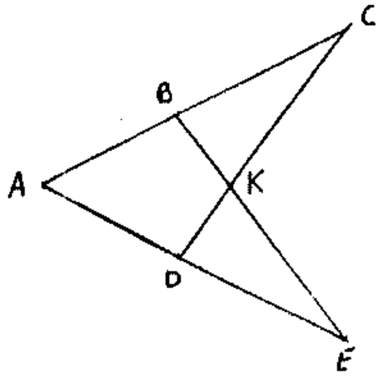


3.



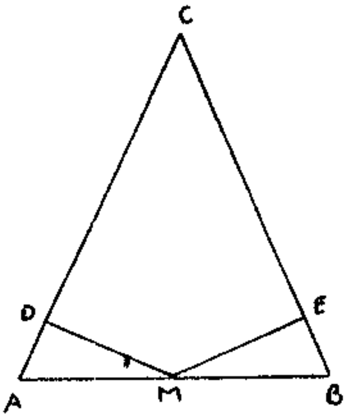
A mesma aluna, ainda na 2ª questão, escreveu "$\hat{D}$ e $\hat{E} \perp \rightarrow 90°$"; além dos erros de notação, que já mencionei, existe outro resultante da interferência de significados matemáticos diferentes, pois ângulos não são perpendiculares, a relação de perpendicularismo se dá entre segmentos.

1.



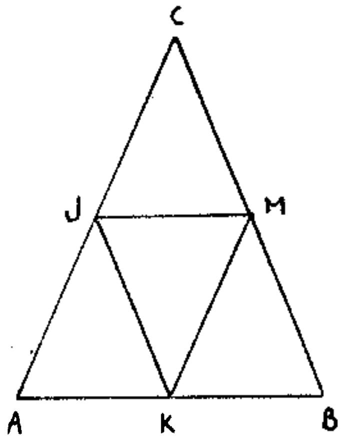
Ainda na 2ª questão, Lambda escreveu que "o ângulo $\hat{C}$ é o complemento dos 180 graus internos"; ela queria dizer que, em um triângulo qualquer, a soma dos ângulos internos vale 180° e, considerando os três ângulos, $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, do triângulo $\triangle ABC$, $\hat{C}$ deve valer "o que falta para completar 180°", o que é diferente de "complemento dos 180 graus", pois diz-se que um ângulo é o complemento de outro quando a soma de suas medidas vale 90°.

2.



Na 1ª questão, a aluna Rô fez um erro causado pela interferência de significado matemático diferente, quando disse: "Eu posso supor que $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$ são mediatrizes de um ângulo?".

3.

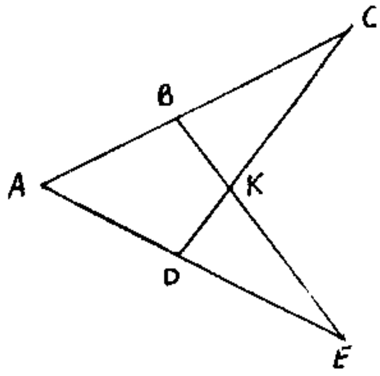


Em primeiro lugar, "mediatriz" é uma palavra que se aplica a segmento. Diz-se que uma reta é mediatriz de um segmento quando é perpendicular a ele pelo seu ponto médio. Se citava segmentos de um triângulo, provavelmente queria dizer "mediana", o que ela confirmou na segunda entrevista, quando disse que tinha uma vaga idéia do nome a ser usado.

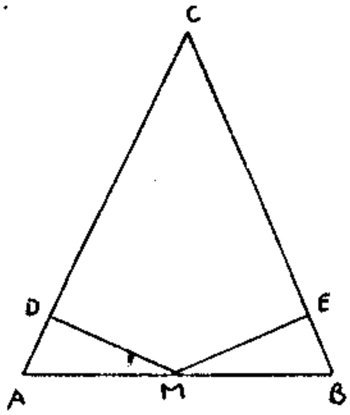
O aluno Sigma também fez um erro causado por interferência de significados matemáticos diferentes, quando marcou, na 1ª questão, os ângulos opostos pelo vértice mas chamou-os de "alternos internos". Na entrevista, confirmou que fazia confusão entre os nomes dos ângulos, pois sabia exatamente o que eram os opostos pelo vértive e o que eram os alternos internos, quando lhe pedi que marcasse, em uma figura, ângulos de cada um dos dois tipos.

Um outro erro de linguagem bastante interessante, também cometido por Sigma, na 3ª questão, relaciona-se com o uso que ele faz da

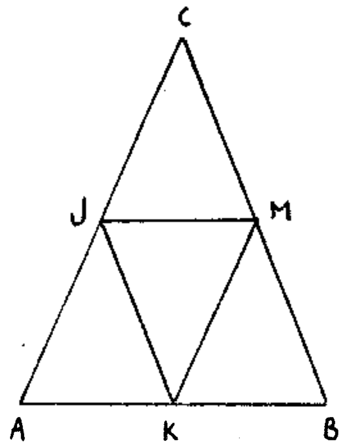
1.



2.



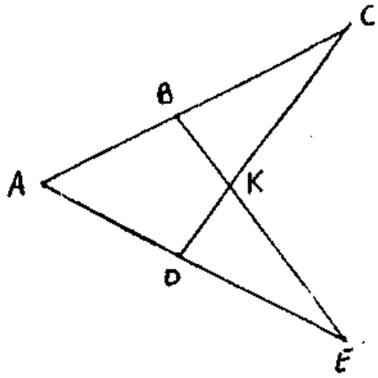
3.



palavra "porque". Vejamos a frase completa:

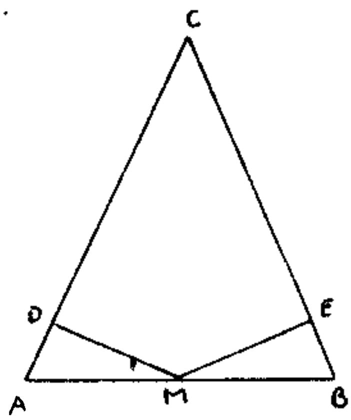
> "Ah,se este lado é igual a este (KJ,KM) é porque este ângulo é igual a este (Â,B̂) e se estes dois ângulos são iguais é porque este lado é igual a este (AC,BC) e se tem dois lados iguais, é isósceles."

1.

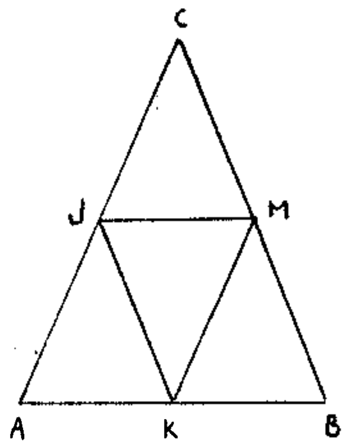


Depois analisarei a primeira parte da frase, que comporta outro tipo de erro; porém, de qualquer forma, vê-se que ele usa "é porque" como se dissesse "então". É uma troca de antecedente por consequente, pois quando se diz "os ângulos da base são congruentes porque o triângulo é isósceles", "o triângulo é isósceles" é a causa para a congruência dos ângulos da base, ou seja, é o antecedente de uma proposição do tipo "se p então que". Na sua formulação, ele está considerando que a congruência dos lados é causada pela congruência dos ângulos da base, só que diz isto através desta expressão "é porque".

2.

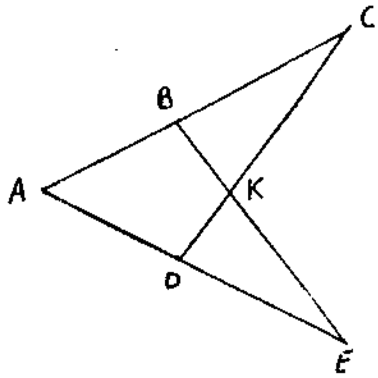


3.



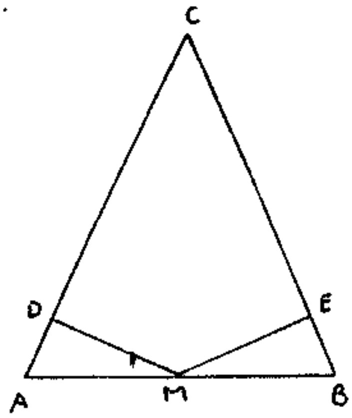
Ainda como interferência de significados matemáticos diferentes, considero o fato de trocar de finição por propriedade e vice-versa. Nem sempre esta troca configura um erro, depende das definições utilizadas por cada autor ao estudar axiomaticamente uma disciplina. No estudo de Geometria Plana que é feito no curso, define-se o paralelogramo como o quadrilátero que tem lados opostos paralelos e prova-se que, em um paralelogramo, os lados opostos são congruentes.

1.



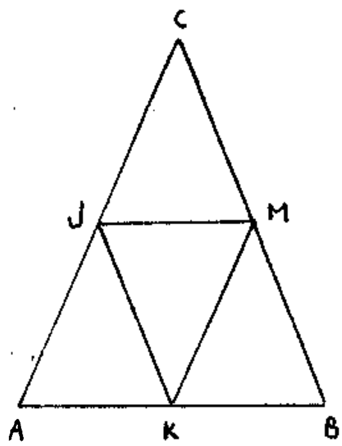
Nesta pesquisa, a troca surgiu exatamente quanto ao paralelogramo, pois três alunos consideraram que ter os lados opostos congruentes é a definição de paralelogramo.

2.



O único destaque interessante quanto a isto foi a atitude da aluna Zeta. Na 3ª demonstração, ela escreveu: "Como AKMJ é um paralelogramo, pela definição..." e parou, olhando a folha auxiliar. Apesar de ter lido que um quadrilátero é um paralelogramo se e só se os lados opostos são paralelos, voltou à sua folha de trabalho e confirmou: "...pela definição de paralelogramo AK=JM e AJ=KM". Portanto,

3.



novamente aparece aquele conceito já adquirido, que não se modifica nem mesmo quando confere o que a "autoridade" (no caso a folha auxiliar) afirma.

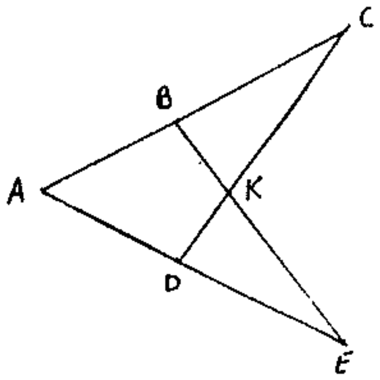
3.4.3. O erro do tipo II

O erro do tipo II é o erro produzido pela figura, pela disposição dos elementos na figura ou pelas marcações que se faz na mesma. Influenciado pelo desenho, o aluno emite uma afirmativa que é apenas visual, não tem justificativa lógica, não apresenta uma seqüência de passos que garanta a conclusão.

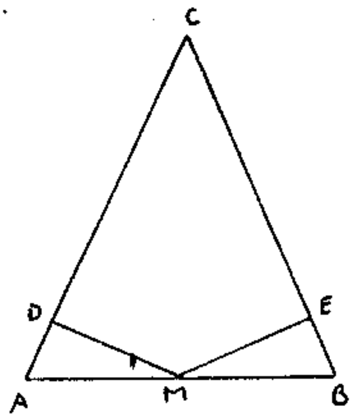
Na 1ª questão, em relação aos ângulos $\widehat{ABK}$ e $\widehat{ADK}$, sete alunos consideraram que seriam ângulos retos, algumas vezes simplesmente apresentando o fato, sem nenhuma dúvida a respeito, outras vezes com alguma preocupação sobre a maneira de justificar o que acreditavam ser verdadeiro.

O aluno Beta, por exemplo, perguntou: "Como é que eu posso dizer que isto aqui tem 90 graus?"

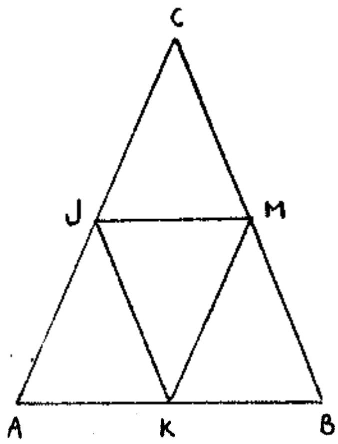
1.



2.



3.



O aluno Épsilon disse: " Para provar que isto é 90 graus, eu teria que afirmar que é altura"

O erro ao considerar o ângulo como reto, Épsilon conservou até o final; a sua dúvida era sobre como justificar que $\overline{CD}$ era altura do $\triangle$ ADC, pois depois acrescentou:

> "Eu penso sempre como aprendi, que olhando num triângulo retângulo, tem que fazer em direção à hipotenusa."

Portanto, para ele, os triângulos $\triangle$ ADC e $\triangle$ ABE eram retângulos!

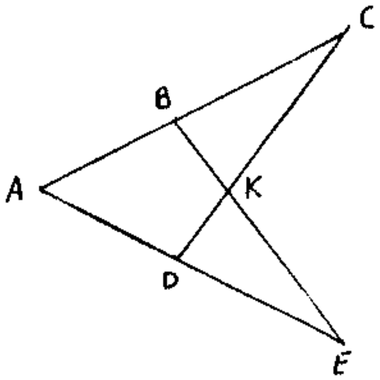
A aluna Rô perguntou-me:

> "Isto aqui dá para supor, Helena, que AB̂E equivale a um ângulo de 90 graus? Agora porquê eu não sei, eu enxergo."

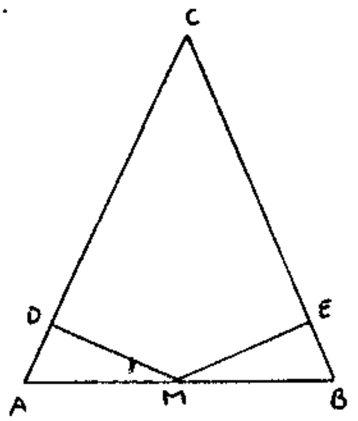
Quando lhe perguntei, na segunda entrevista, a razão de sua dúvida, ela disse:

> "O ângulo de 90 tu consegues discernir, porque são iguais, se fosse menor ou maior ... Como eu não tinha prova suficiente, eu não consegui definir com um teorema, eu queria supor ao menos visualmente."

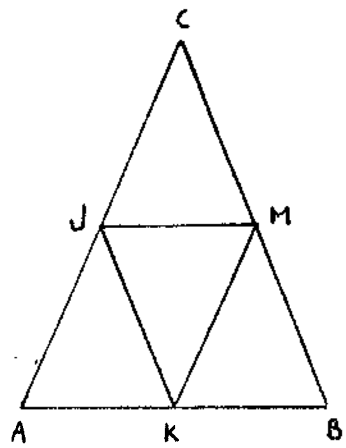
1.



2.



3.



Na explicação, vê-se que o fato de os ângulos $A\hat{B}E$ e $E\hat{B}C$ (e também $A\hat{D}C$ e $C\hat{D}E$) terem sido desenhados de uma forma que levava o aluno a considerá-los congruentes, influenciou a sua decisão.

Outra justificativa para considerar os ângulos citados como sendo retos foi dada pela aluna Zeta: "Eu coloquei uma reta aqui e imaginei que fosse altura." ($\overleftrightarrow{CD}$)

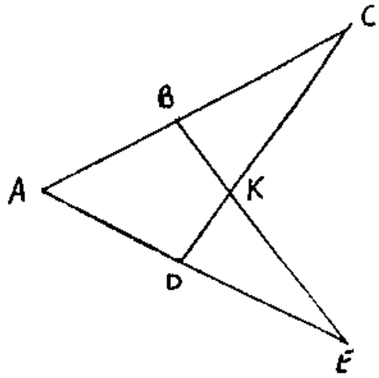
O impacto visual é tão forte que alguns alunos não se convenceram de que não fossem ângulos retos, mesmo quando eu expliquei que poderia ter feito o mesmo desenho (e proposto a mesma demonstração) com ângulos diversos, bastando mudar a posição dos pontos B e D.

A aluna Lambda, por exemplo, retrucou:

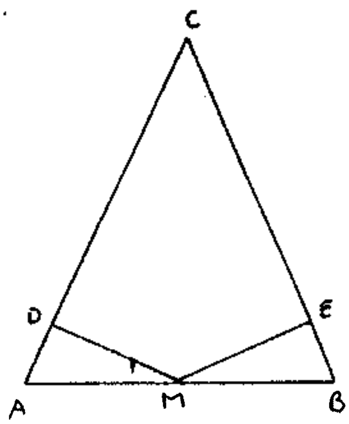
> "Se eu tivesse partido realmente do triângulo traçando as medianas, seria 90 graus."

Nesta resposta, nota-se um acúmulo de erros deste tipo II, pois ela estava, então, considerando que

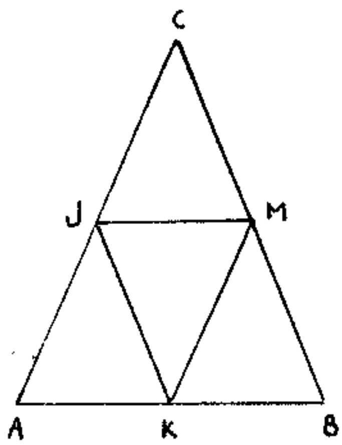
1.



2.



3.

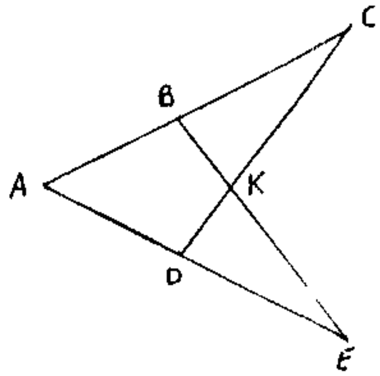


B e D eram, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AE}$ e, também, que o triângulo Δ ACE era um triângulo isósceles (quem sabe equilátero) para que a mediana coincidisse com a altura.

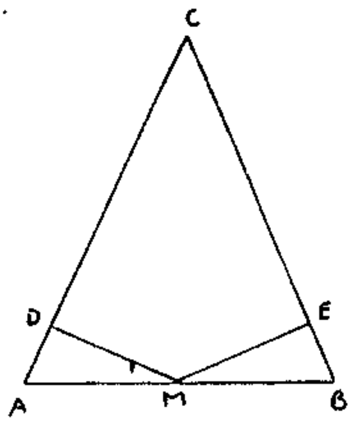
A aluna Zeta, que concluiu a 1ª questão corretamente, ao fazer suposições sobre o desenho, primeiramente afirmou que $\overline{CD}$ era uma altura; foi então testar, colocando o lápis perpendicularmente à $\overline{AE}$ e concluiu que não era. Supôs, então, que fosse mediana, olhou bem de perto e também disse que não era. Finalmente, disse que $\overline{CD}$ seria uma bissetriz, só que logo acrescentou: "Agora eu tenho que provar isto."

Portanto, ela sabia que deveria provar o que afirmara, aliás só fez a demonstração escrita quando teve certeza de que provara a tese e fê-la corretamente. É claro que ela precisa fazer conjeturas para chegar à demonstração e são válidas as suas tentativas de esclarecer que elemento seria o $\overline{CD}$. Destaco, no caso, o fato de que os

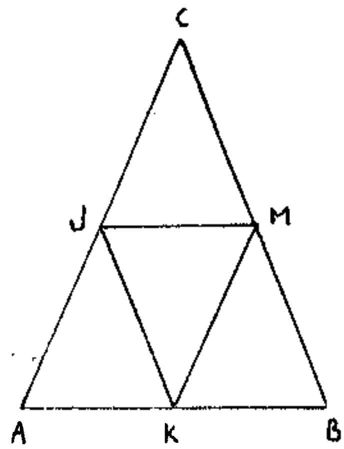
1.



2.

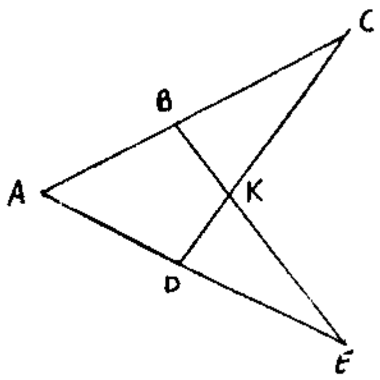


3.



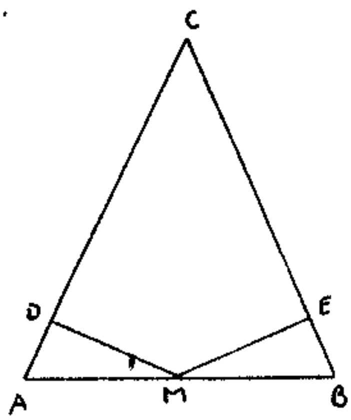
apelos visuais foram os primeiros a comandar as conjeturas, não foram as informações da hipótese que guiaram o seu pensamento. Aliás, Zeta só conseguiu desenvolver a demonstração corretamente quando lhe sugeri que desenhasse separadamente os triângulos que visualizava.

1.



Na 1ª questão, outros alunos consideraram B e D como pontos médios, respectivamente, dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AE}$.

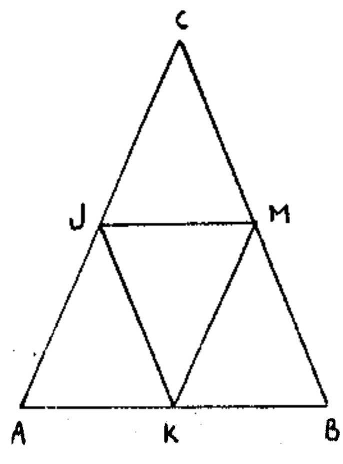
2.



A aluna Gama considerou que, sendo $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ dois segmentos congruentes e $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$ também congruentes, os pontos B e D deveriam estar "na metade".

A aluna Delta, que fez o mesmo erro, justificou-o dizendo: "Eu acho que influencia muito a figura em si".

3.



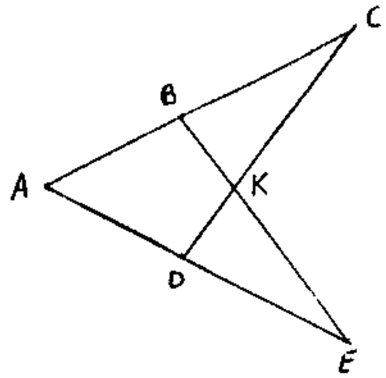
Outro erro visual foi cometido pela aluna Rô, na 1ª questão, quando traçou o segmento $\overline{CE}$ e disse: "Dá para fazer um triângulo equilátero". Depois ela abandonou esta idéia e foi tentar a demonstração por outros caminhos, mas o impacto visual esteve presente,pois nada poderia garantir que o segmento traçado, $\overline{CE}$, fosse congruente a $\overline{AC}$ e $\overline{AE}$.

Outro erro, também influenciado pelo desenho, apareceu quando alguns alunos consideraram que os ângulos $A\hat{M}D$ e $B\hat{M}E$ seriam opostos pelo vértice, na 2ª questão,e com esta afirmativa justificaram a congruência deles.

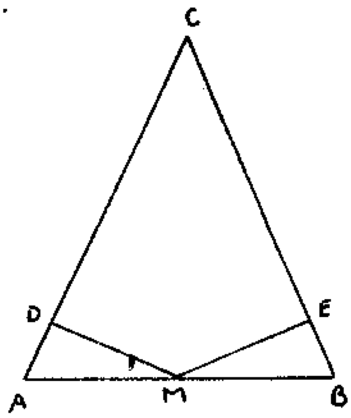
Este é um erro que eu já tinha visto inúmeras vezes no decorrer dos anos em que lecionei Geometria Plana; é interessante que os alunos sabem o que são opostos pelo vértice e reconhecem quando o são efetivamente, porém,ao enxergar ângulos que tenham um vértice comum e dois dos lados formados por semi-retas opostas ($\overrightarrow{MA}$ e $\overrightarrow{MB}$, no caso),já "enxergam" opostos pelo vértice, não notando que as outras duas semi-retas ($\overrightarrow{MD}$ e $\overrightarrow{ME}$, no exemplo citado) não são opostas.

A aluna Zeta, por exemplo,afirmou que eram ângulos opostos pelo

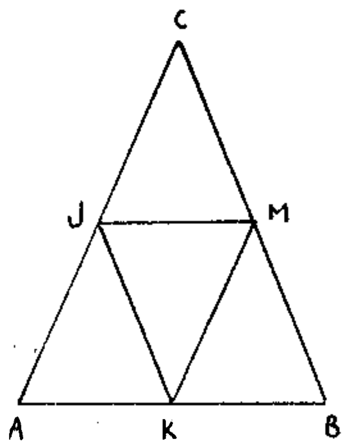
1.



2.

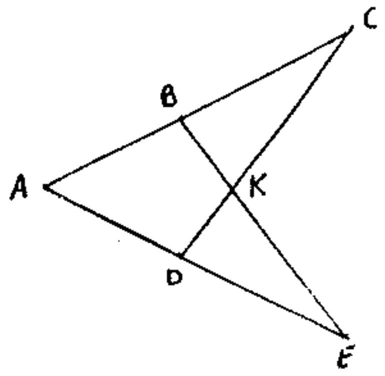


3.



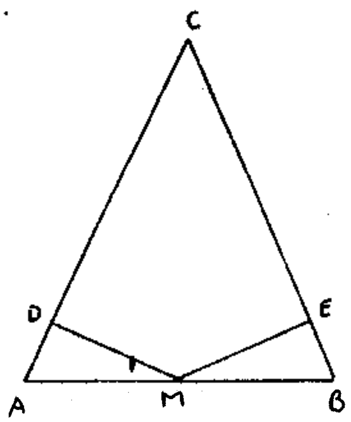
vértice, depois indicou com o dedo as semi-retas $\overrightarrow{EM}$ e $\overrightarrow{DM}$ e notou que não eram, mas o impacto visual, novamente, foi o primeiro.

1.



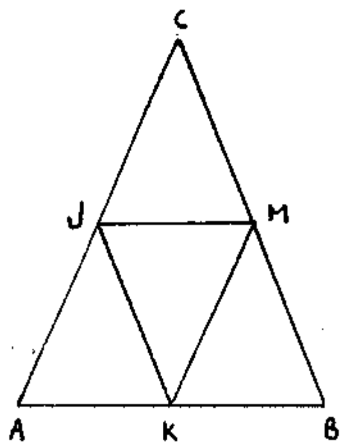
A aluna Ômega cometeu este erro na 2ª e na 3ª questão, nesta última em relação aos ângulos $\widehat{AKJ}$ e $\widehat{BKM}$. Aliás, foi interessante seu comportamento, pois ela afirmou, na 2ª questão, que $\widehat{AMD}$ e $\widehat{BME}$ eram congruentes porque eram opostos pelo vértice. Na 3ª questão, quando procurava elementos para encaixar em algum caso de congruência de triângulos, ela disse, de repente:

2.



> "Ah, já descobri! Estes dois lados são iguais (KJ,KM), este aqui (AK) também é igual a este (BK), estes ângulos são opostos pelo vértice .... ou não são?"

3.



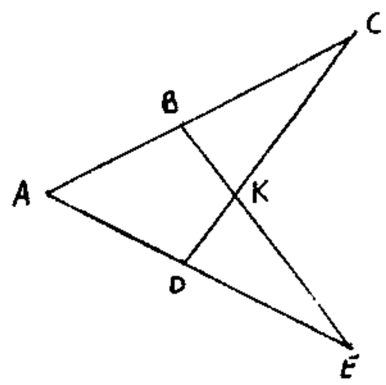
Olhou com mais atenção e exclamou: "Não são! Está faltando um pedaço do ângulo!". No entanto, como recolheceu que os ângulos apresentavam-se da mesma forma que na 2ª questão, ela acrescentou: "São, não são? Deixa eu 'colar' da minha outra demonstração." E como tinha errado antes, "colou" o erro e continuou com ele até o final.

Outra variante do erro influenciado pelo desenho é a afirmativa, verdadeira, tirada somente do desenho, isto é, o aluno afirma que determinados elementos são congruentes sem que nenhuma cadeia de raciocínio tenha levado a esta conclusão. Em geral, são afirmativas feitas no início da demonstração, quando o aluno vê o desenho e, até o final, ele conserva a afirmativa, sem justificá-la logicamente.

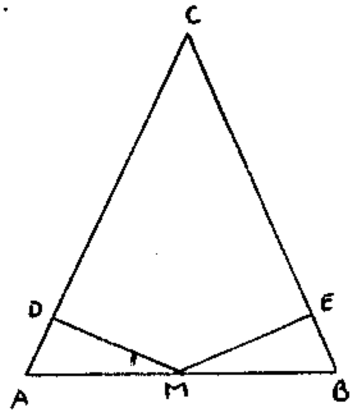
Este erro apareceu na 1ª questão, quando alguns alunos consideraram congruências de segmentos ou de ângulos somente porque visualizavam-nos com esta relação. Por exemplo, BK = DK, BE = CD, KC = KE, .. EK = CK, $K\hat{B}C = K\hat{D}E$. Nesta última afirmativa, feita pelo aluno Sigma, ele não considerou os ângulos congruentes por serem retos, como muitos fizeram, mas simplesmente porque os enxergava assim: "Tá bem desenhado, a gente enxerga, este é que é o problema."

Noto que alguns alunos acredi

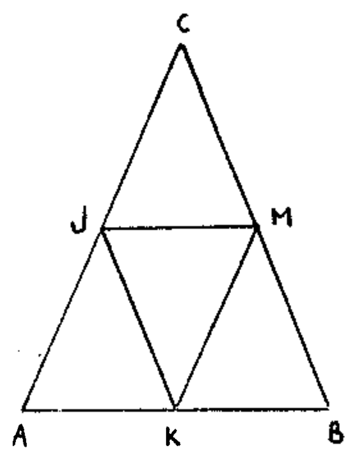
1.



2.



3.



tam muito no que vêem, não entendem a demonstração como uma justificativa lógica, exatamente daquilo que os sentidos detectaram.

A aluna Lambda, por exemplo, na 1ª questão, após olhar a figura e entender o que deveria demonstrar, disse:

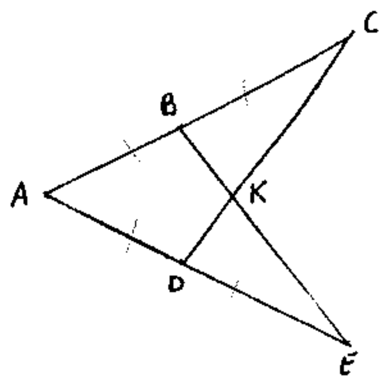
> "Agora, como é que eu vou fazer a demonstração é que eu não sei. A olho nú eu vejo que estes dois ângulos são iguais ($\hat{C}$,$\hat{E}$).

Uma outra variante do erro causado pelo desenho é o erro proveniente de uma construção ou de uma marcação errada que o próprio aluno fez.

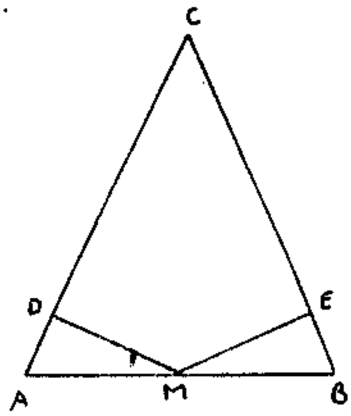
Na 1ª questão, o aluno Beta, ao ler a hipótese, foi marcando no desenho as congruências dadas, só que marcou com um só traço cada um dos quatro segmentos mencionados.

Desta forma, ao olhar novamente a figura, ele disse: "Eu estou pensando agora se o ponto médio vai me servir". Realmente, ao marcar com um só traço os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ (e também $\overline{AD}$ e $\overline{DE}$), ele estava

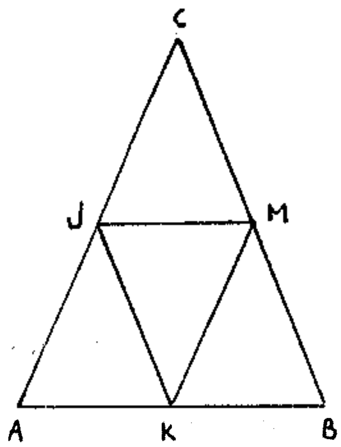
1.



2.



3.



indicando uma congruência entre eles; se assim fosse, B e D seriam, respectivamente, os pontos médios de $\overline{AC}$ e $\overline{AE}$. Portanto, o erro ao considerá-los como pontos médios não foi causado pelo impacto visual inicial, como em outros casos que já citei, mas pelo desenho que o aluno fez.

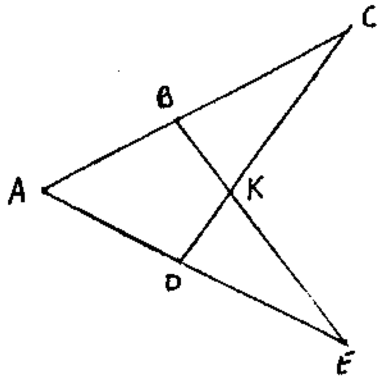
Mais adiante, ao tentar encaixar os elementos em um caso de congruência, o aluno se deu conta do seu erro, voltou ao desenho e marcou com dois traços cada um dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$.

Também na 1ª questão, o aluno Beta, ao ler a questão, marcou no desenho os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{E}$. Afirmou, mais adiante, que $\hat{C}$ e $\hat{E}$ eram iguais, mas depois se deu conta de que utilizara uma informação visual:

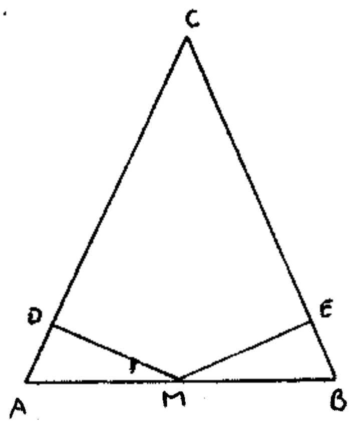
> "Eu falei uma coisa errada, este $\hat{C}$ não pode ser contado, tem que chegar neste ângulo."

Outro aluno, Épsilon, também na 1ª questão, fez o mesmo tipo de erro; marcou cada segmento citado na hipótese com um só traço e con-

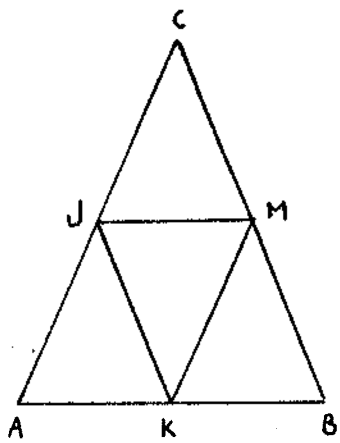
1.



2.



3.



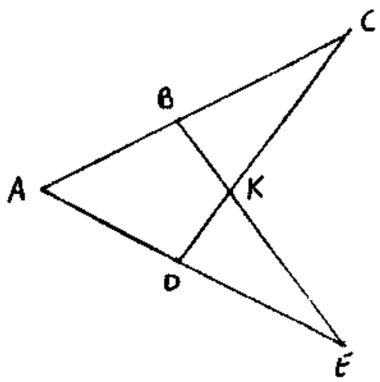
siderou que B e D seriam pontos médios, mas também se deu conta do erro: "Por um erro anterior, eu já vou tentando afirmar outra coisa."

Épsilon fez este tipo de erro, novamente, na 3ª questão. Ao relembrar a propriedade que diz que os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes, ele marcou com o mesmo sinal os ângulos $\hat{A}$ e $K\hat{M}J$ no paralelogramo AKMJ e os ângulos $\hat{B}$ e $K\hat{J}M$ no paralelogramo BKJM.

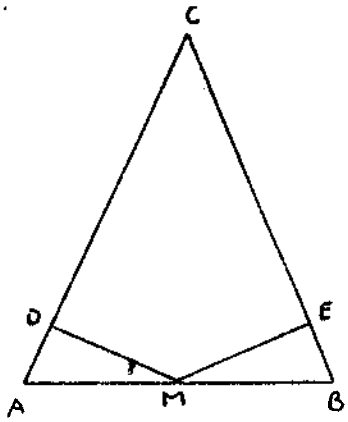
Não usou a informação de que KJ é igual a KM e foi logo concluindo que o ângulo $\hat{A}$ é congruente ao ângulo $\hat{B}$, simplesmente porque as suas marcações eram todas iguais. É verdade que $\hat{A}$ é congruente a $\hat{B}$, porém a justificativa lógica envolve a congruência de $K\hat{J}M$ e $K\hat{M}J$ ou a congruência dos triângulos Δ AKJ e Δ BKM, o que ele não fez.

Ainda na 3ª questão, esta mesma marcação incorreta levou-o a afirmar, na demonstração escrita, que os triângulos Δ AKJ e Δ BKM são congruentes pelo caso ALA, simplesmente porque enxergou os ângulos $A\hat{K}J$

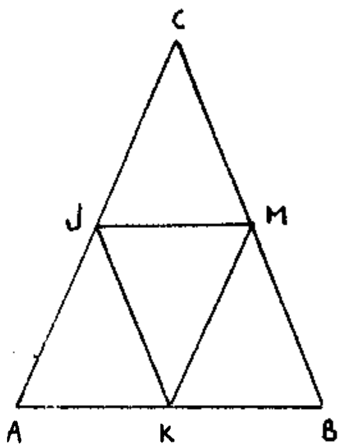
1.



2.

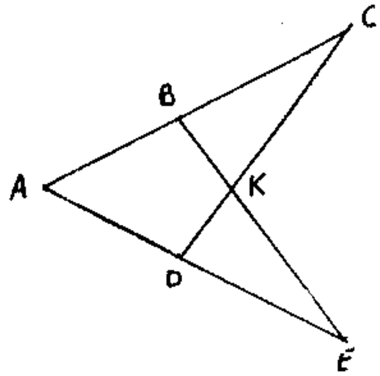


3.



e BKM congruentes, já que estavam marcados com o mesmo sinal.

1.



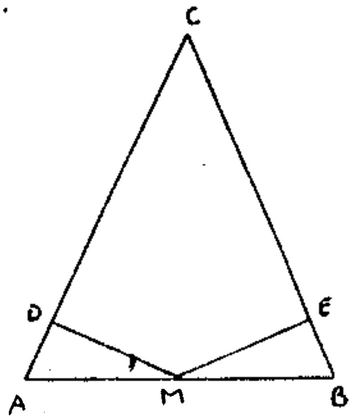
3.4.4. O erro do tipo III

Considero que o aluno comete um erro do tipo III quando tem um conceito errado sobre algum ente matemático.

A aluna Lambda, na 2ª questão, estava com dificuldades para expressar o que pensava e perguntei-lhe o que precisava para chegar ao que queria provar. Ela respondeu:

> "Provar que os dois lados são iguais. Eu sei que é isósceles. Isósceles é os dois lados iguais e este aqui desigual, a base diferente."

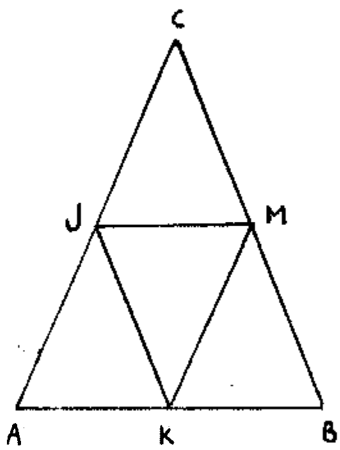
2.



Então ela só aceitava como isósceles aquele que tivesse a base "diferente". Na entrevista, ela me disse:

> "Eu acho que já vem de antes, eu acho que na escola...De tanto falar que o equilátero tem três lados iguais, a gente cria que o isósceles tem que ter a base diferente."

3.



Então o que ela havia visto

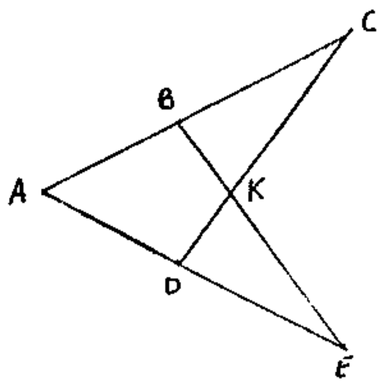
nas disciplinas de Geometria do curso de Matemática não modificara o conceito que ela trazia. São os erros persistentes, que não são eliminados apenas com a informação obtida do livro-texto ou do professor.

Na 3ª questão, vi que o erro de Lambda é mais grave do que supus, pois novamente falando sobre o triângulo isósceles, ela disse: "Isósceles é o que tem a base sempre menor que os dois lados".

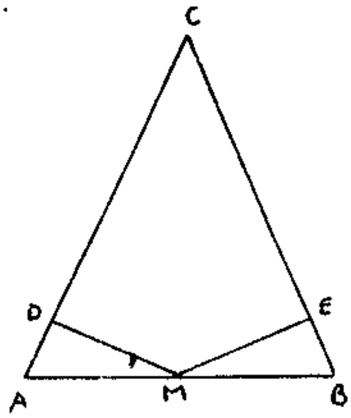
Então, ela exige não só que a base seja diferente, como ainda que seja menor que cada um dos lados congruentes. Quando justificou, na segunda entrevista, ela acrescentou ao que já havia dito antes: "Por hábito, desenha-se sempre o triângulo assim".

A aluna Gama também tem este mesmo conceito sobre o triângulo isósceles. Na 2ª questão, como havia feito a demonstração correta e já tinha concluido que $\hat{A}$ é congruente a $\hat{B}$, estranhei quando ela traçou o segmento $\overline{CM}$ e foi trabalhar

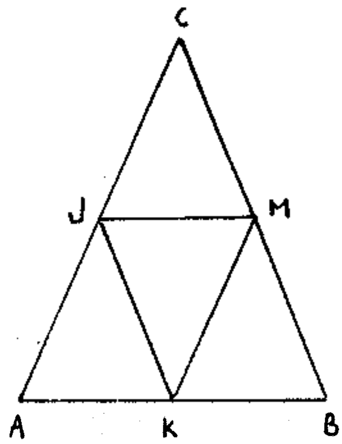
1.



2.



3.



com os triângulos Δ DMC e Δ EMC. Perguntei-lhe o que estava procurando e ela disse:

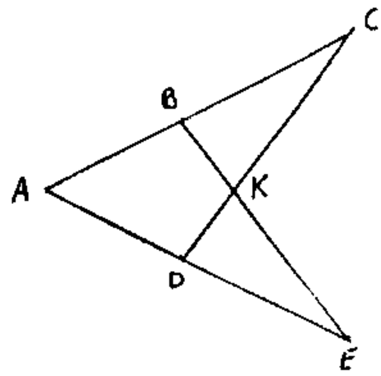
> "Agora eu tenho que encontrar que os ângulos são diferentes,não é?Que o ângulo $\hat{A}$ é igual ao $\hat{B}$ e que o $\hat{C}$ é diferente para ele ser isósceles".

Pedi-lhe, então, que definisse triângulo isósceles e ela disse: "Dois lados iguais e um diferente". É interessante a persistência do conceito errado,pois, apesar de ela ter lido na folha auxiliar a definição de isósceles como o triângulo que tem dois lados congruentes, ela continuou com a sua afirmativa. Na 2ª entrevista, ela disse que achou "fraca" a definição, porque continuava com a idéia de que o isósceles deveria ter um lado diferente.

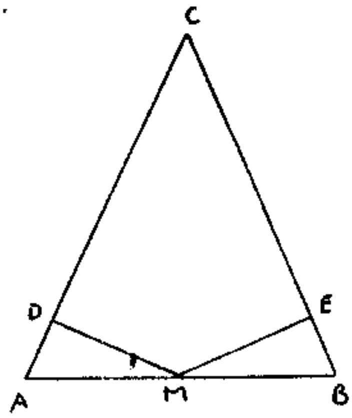
Portanto, os conceitos adquiridos não são questionados, a aluna considerou que o erro estava na definição que eu lhe apresentava na folha auxiliar.

O aluno Alfa também tem dificuldades com o conceito de triângu

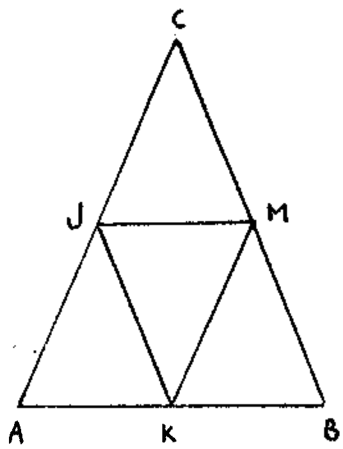
1.



2.



3.



lo isósceles. Na 3ª questão,quando analisava o triângulo ΔJMC, ele disse: "Ah, sim, isósceles porque este lado é menor" ($\overline{JM}$).Quando lhe perguntei, na segunda entrevista,o seu conceito de isósceles , ele respondeu:

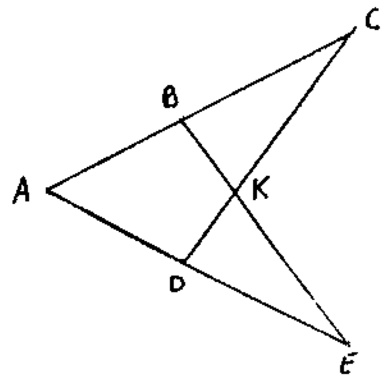
> "Normalmente no triângulo isósceles que a gente conhece desde pequeno, seriam os dois lados iguais maiores que a base."

A aluna Delta, na 3ª questão, mostrou um conceito errado de ponto médio. Em certo momento,ela disse:

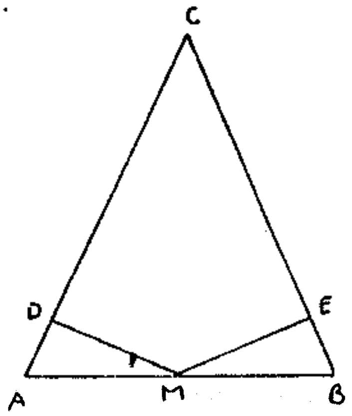
> "Aqui eu estou enxergando que K é o ponto médio de $\overline{AB}$;daí eu já estou provando que AK é igual a KB".

Como a seqüência do raciocínio seria ao contrário, ou seja, a partir da propriedade dos lados opostos de um paralelogramo ela poderia chegar a AK = KB e concluir que K é o ponto médio de $\overline{AB}$, perguntei-lhe, na segunda entrevista, como "enxergava" que K é ponto médio de $\overline{AB}$ e ela respondeu-me:"Porque K era comum nos dois, daí se-

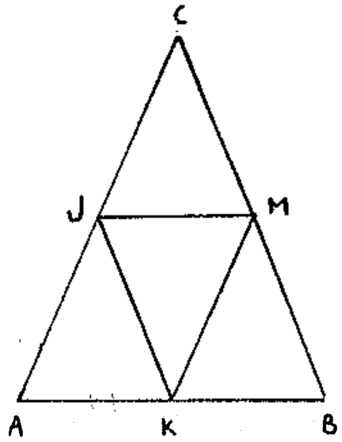
1.



2.



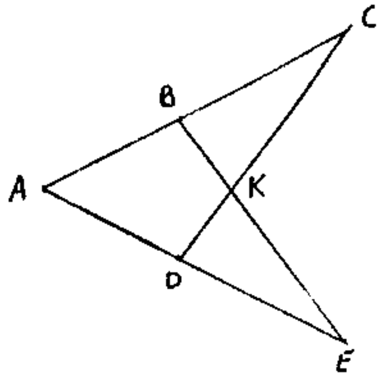
3.



ria ponto médio".

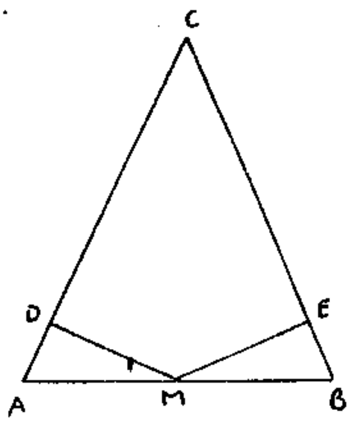
Então ela define ponto médio como o ponto comum a dois segmentos adjacentes, o que, obviamente, é totalmente errado. Bastaria que ela fizesse um contra-exemplo para ver como o seu conceito não se sustenta ,mas, novamente, parece que o conceito adquirido não é questionado.

1.



A aluna Lambda, na 3ª questão, voltou a cometer um erro deste tipo, pois, em certo momento, referiu-se aos segmentos $\overline{KJ}$, $\overline{KM}$ e $\overline{JM}$ como medianas do triângulo Δ ABC;assim, mediana, para ela,é o segmento que une dois pontos médios.

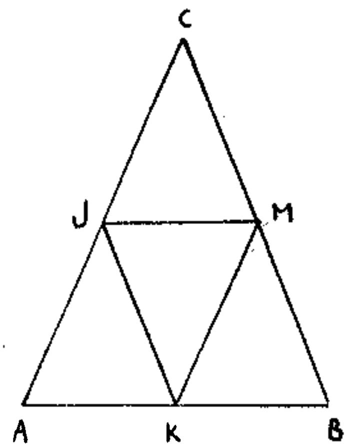
2.



3.4.5. O erro do tipo IV

Muitas vezes os alunos chegam a conclusões a partir de elementos que não permitem fazê-lo. Vi exemplos nos quais o aluno tinha feito uma cadeia de raciocínios válidos, mas não os verbalizou nem escreveu, só justificando-os na segunda entrevista. No entanto, em certos casos, o aluno coloca alguma afirma-

3.



tiva para justificar a sua conclusão, sem que se possa de forma nenhuma aceitar o raciocínio como válido.

Os erros do tipo IV são, portanto, conclusões cujas razões são inaceitáveis.

A aluna Gama, na 1ª questão, escreveu na demonstração:

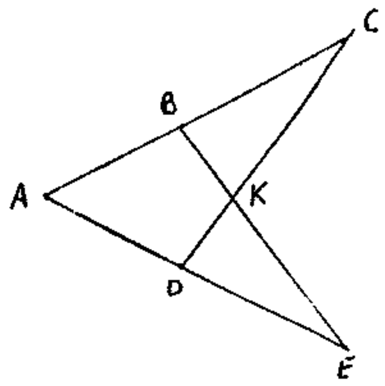
> "Sendo $\hat{A}$ o ângulo formado pelos segmentos AE e AC e como BE = CD, pode-se concluir que $\hat{C}=\hat{E}$".

Já "BE = CD" havia sido uma afirmativa tirada só do desenho, conforme já analisei antes; o erro, agora, é "concluir" que $\hat{C} \cong \hat{E}$ sem que as proposições anteriores, "$\hat{A}$ é o ângulo formado por AE e AC" e "BE=CD", sejam razões aceitáveis.

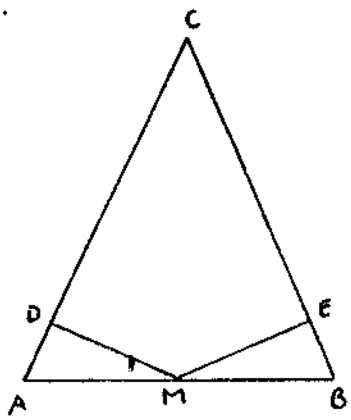
A aluna Lambda, na 1ª questão, escreveu: "Se $\hat{A}$ é comum aos 2 triângulos, então $\hat{C} = \hat{E}$". Novamente o mesmo erro, sem nenhuma justificativa lógica.

O aluno Sigma, ao escrever a 1ª demonstração, também cometeu este tipo de erro:

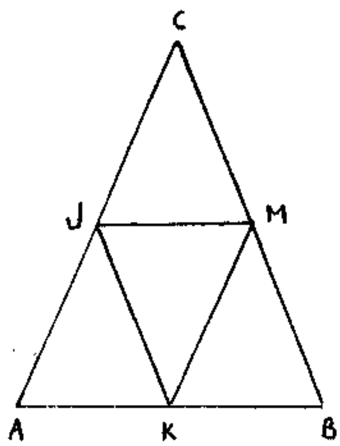
1.



2.



3.



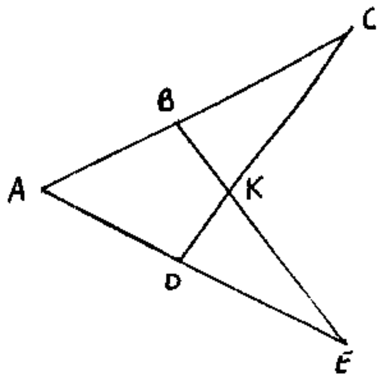
> "Rebatendo o △DKE sobre o △BKC, veria que o ângulo $\hat{B}=\hat{D}$, pois tenho que BC = DE".

Em primeiro lugar, "ver" não é demonstrar e ele efetivamente não tinha "visto" pois só imaginara o rebatimento. Assim, não se pode concluir que $\hat{B}$ é congruente a $\hat{D}$ por este suposto movimento de rebater. Além disso, quando escreve "pois BC =DE" dá a idéia de que BC=DE fosse a causa da congruência dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ ou da possibilidade de rebatimento, o que também não é aceitável, pois pode-se ter dois segmentos congruentes sem que, ao rebater um triângulo sobre o outro, haja a superposição perfeita.

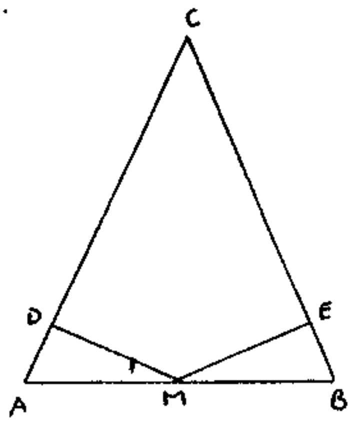
A aluna Ômega, na demonstração da 1ª questão, colocou a conclusão "portanto $\hat{C} = \hat{E}$" sem que as afirmativas que fizera antes pudessem justificar o fato, pois só "jogou" congruências, tanto de lados como de ângulos, sem que aparecesse o encadeamento para as afirmativas.

A aluna Lambda, na demonstração da 2ª questão, escreveu:

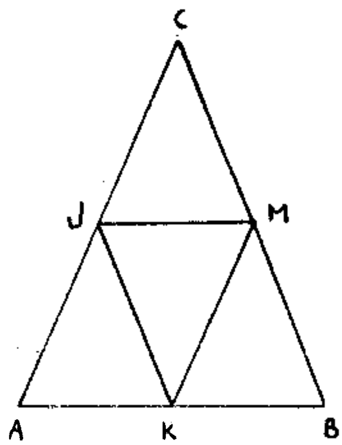
1.



2.



3.



"$\hat{A} = \hat{B} \rightarrow AC = AB$". Mas ela não havia provado que $\hat{A} \cong \hat{B}$, aliás esta seria a proposição a que deveria chegar, portanto não há justificativa para afirmar que AC = AB.

Na 3ª questão, ela novamente apresentou duas afirmativas, JM=MK e MB = BK, totalmente erradas, sem justificativa possível, acrescentou "KM comum" e concluiu "então $K\hat{M}B$ = equilátero". Além dos erros de notação, vemos que é uma conclusão totalmente inaceitável.

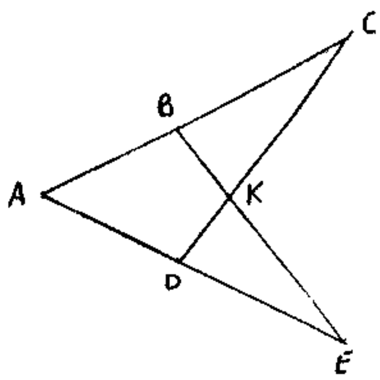
A aluna Delta, na 2ª questão, cometeu este tipo de erros duas vezes quando escreveu:

> "...então o segmento $\overline{CD} = \overline{CE}$ pela perpendicularidade de AD e EB, logo o Δ ABC é isósceles".

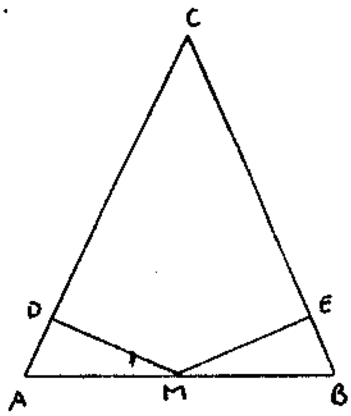
EM primeiro lugar, o perpendicularismo não é razão para a congruência, pelo menos neste caso; a razão para a congruência dos segmentos só poderá vir a partir de uma congruência de triângulo.

Em segundo lugar, nenhuma das afirmativas feitas justifica o fato de o triângulo Δ ABC ser isósce

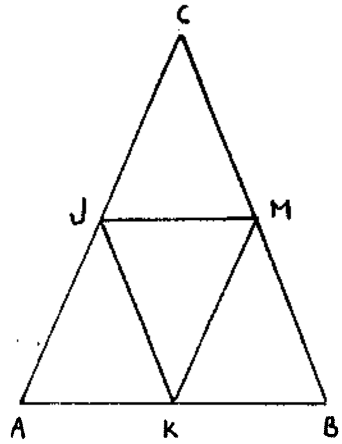
1.



2.



3.



les.

O aluno Alfa,na 3ª questão,ao considerar os quatro triângulos interiores ao triângulo Δ ABC,disse:

> "Se todos os quatro triângulos são iguais,tenho um triângulo equilátero. Puxa, vou pensar como é que eu vou escrever isto..."

Realmente,os quatro triângulos interiores são congruentes,mas não há razão aceitável para dizer que o triângulo Δ ABC seria equilátero. Nota-se,pela segunda frase, que ele mesmo estava achando difícil justificar o fato.

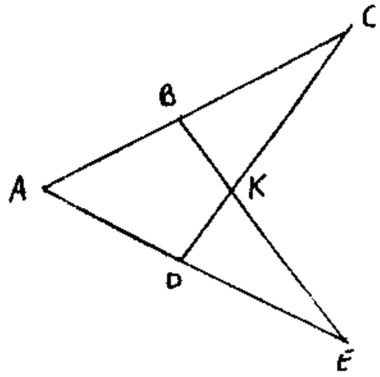
A aluna Gama, no final da demonstração da 3ª questão,escreveu:

> "Seja L o ponto onde as diagonais dos paralelogramos se encontram,então pode-se dizer que AC = BC e daí Δ ABC é isósceles".

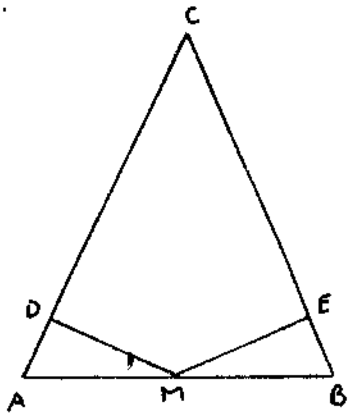
Nada justifica a conclusão "AC = BC" pelo fato de as diagonais (que ela desenhou nos paralelogramos) se cruzarem em um ponto L; é totalmente inaceitável.

Um caso particular de erro por

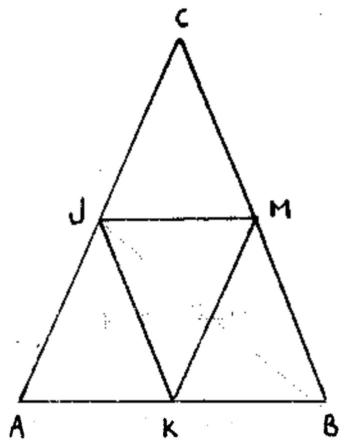
1.



2.



3.



justificativa inaceitável é o que consiste em fazer construções indevidas. Na pesquisa de Smith (1940), quando ele propôs demonstrações de teoremas dando a hipótese e a tese, as construções indevidas apareceram em algumas demonstrações, se bem que numa percentagem pequena.

Na minha pesquisa, somente uma aluna fez um erro deste tipo. Na 1ª questão, Delta, em certo momento, disse:

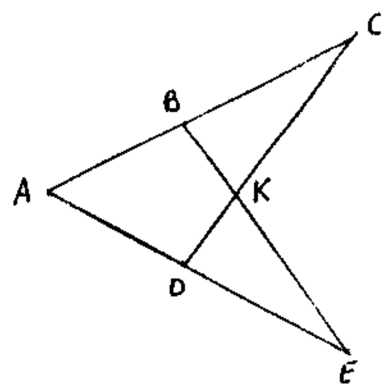
> "Mas se eu estou passando a minha bissetriz por aqui, é claro que ele vai passar no meio"

Ela indicava que a bissetriz do ângulo $\hat{A}$ passa por K e corta, também, o ângulo $C\hat{K}E$ ao meio. Delta ainda acrescentou:

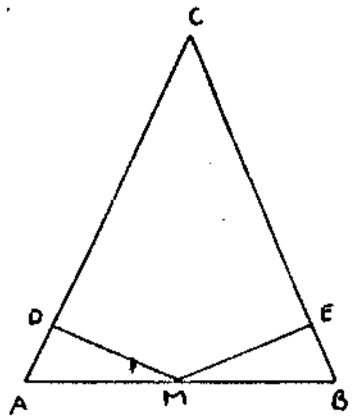
> "Eu estou imaginando uma bissetriz aqui, então é lógico que este lado vai ser igual a este, (KC KE) pois ele estará cortando, passando no meio aqui".

Nada garante que a bissetriz do ângulo $\hat{A}$ passe por K e seja, também, bissetriz do ângulo $C\hat{K}E$. Não há argumentos lógicos para a sua afirmativa e, quando ela diz que

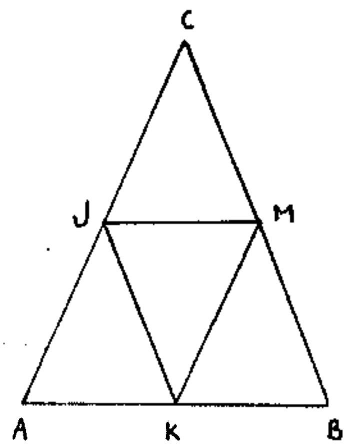
1.



2.



3.



KC é igual a KE por esta construção feita, esta fazendo uma afirmativa sem justificação plausível.No entanto, na segunda entrevista, quando lhe perguntei qual a razão para o que dissera, ela respondeu:

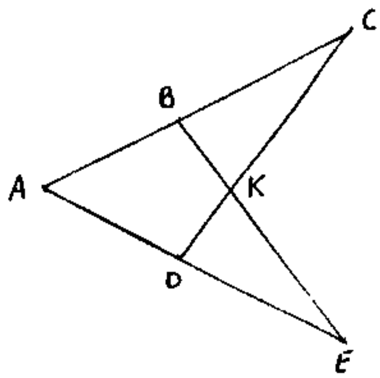
> "Até podes ver que eu fiz um risco, imaginei um risco no $\overline{CE}$, daí dava ângulo de 90 e daí é lógico que passava no meio."

Ela considerava, portanto, AC igual a AE, o que é verdade, e ela já tinha concluido, da hipótese; traçava $\overline{CE}$ e ficava com o triângulo Δ ACE, isósceles. Daí, ao traçar a bissetriz do ângulo $\hat{A}$, esta seria também mediana e altura, portanto surgia o tal "ângulo de 90". Mesmo assim, não é aceitável, porque há muita coisa a ser provada para que ela chegue à conclusão de que a bissetriz de $\hat{A}$ passa por K e é bissetriz de $\widehat{CKE}$.

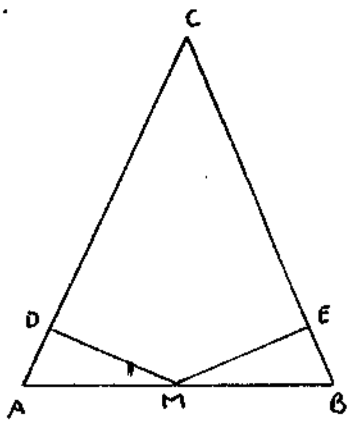
3.4.6. O erro do tipo V

Quando existe um teorema que pode ser utilizado em uma argumentação e já se tem as condições da hipótese do mesmo, é fácil concluir

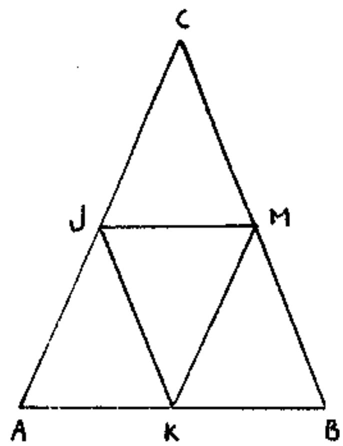
1.



2.

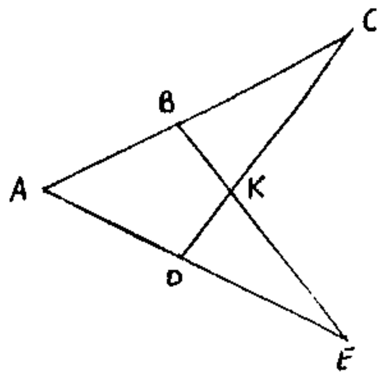


3.



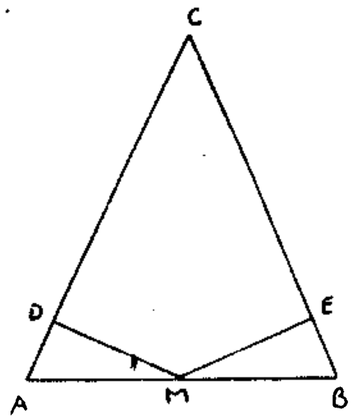
uma demonstração; no entanto, muitos alunos, mesmo tendo os teoremas referentes aos casos de congruência citados na folha auxiliar, não souberam verificar se os dados de que dispunham estavam de acordo com as hipóteses do teorema a ser utilizado.

1.



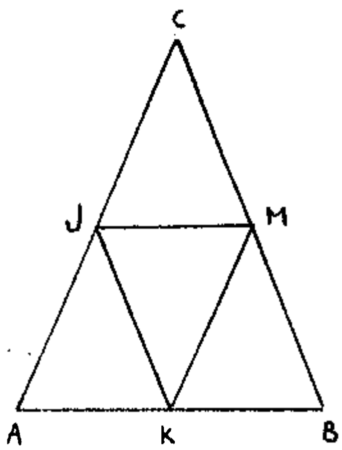
Assim, o erro do tipo V surge quando o aluno não reconhece um teorema a ser utilizado, mesmo tendo feito as deduções anteriores e disposto de todos os elementos da hipótese do mesmo teorema.

2.



O aluno Épsilon, na 1ª questão, já tinha feito um erro ao supor que os ângulos $A\hat{B}E$ e $A\hat{D}C$ fossem retos; no entanto, aceitando que fosse verdade, ele, com os outros dados de que dispunha, poderia encaixá-los no caso de congruência do triângulo retângulo. Mas, neste momento, ele disse:

3.



> "Posso dizer que o $\hat{C}$ é congruente ao $\hat{E}$ por aquele caso de congruência de triângulos retângulos, se não me engano, que é lado, ângulo, ângulo oposto ao lado."

Na 2ª questão, ele fez novamente o mesmo erro; neste caso, os triângulos eram, realmente, retângulos e eu sugerí-lhe, então, que procurasse na folha auxiliar, já que eu notava que alguma coisa estava errada, pela confusão que ele fazia ao citar o caso de congruência de triângulos retângulos e dizer a sigla LAAo.

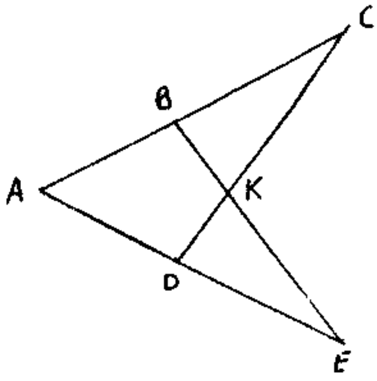
Até este momento, eu pensava que o aluno tinha só uma dificuldade de linguagem matemática, já que confundia os casos. No entanto, ao procurar na folha auxiliar, ele leu todos os casos e continuou a afirmar que a congruência era LAAo. Assim, não notava que as suas hipóteses não encaixavam no caso em questão.

Na entrevista, ele me disse:

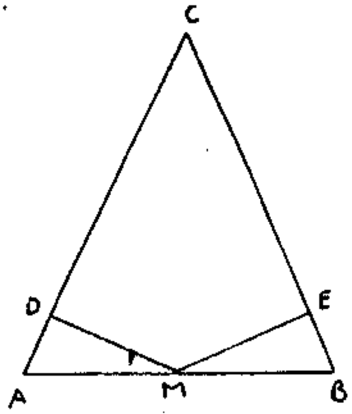
> "... É interessante que eu sempre diferenciei bem os três casos, mas quando chegava no triângulo retângulo, eu sempre pensava que era lado, ângulo, ângulo oposto."

Como ele mesmo diz, é interessante que os três primeiros casos de congruência, que são aceitos co

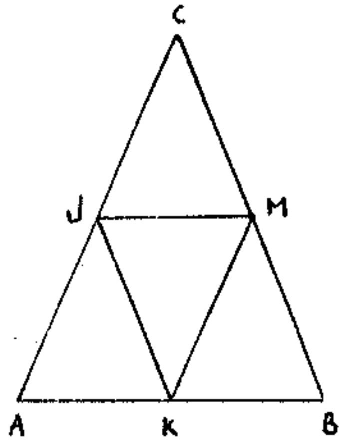
1.



2.



3.



mo axiomas (na apresentação da disciplina), ele sabia reconhecer, mas os que foram demonstrados, ele confundia.

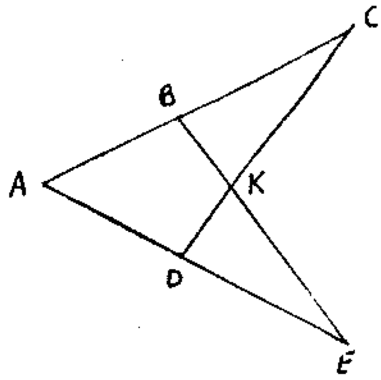
A aluna Delta também teve dificuldades em encaixar os elementos em um caso de congruência de triângulos. Na 1ª questão, ela afirmou:

> "Pois é, daí eu tenho ângulos opostos ($D\hat{R}E$, $B\hat{R}C$) ...provaria que este lado aqui ($\overline{KC}$) seria o mesmo deste aqui ($\overline{KE}$). Daí eu provaria por lado, ângulo, lado."

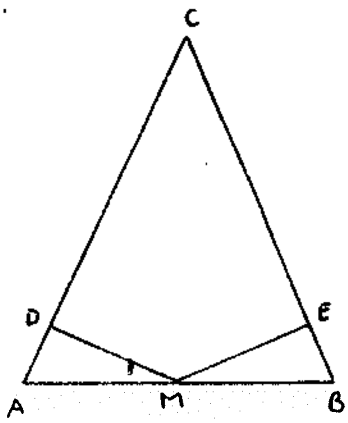
Mesmo que houvesse a possibilidade de garantir que KC=KE, não poderia usar casos de congruência de triângulos, pois não tinha elementos suficientes. No momento em que escreveu a demonstração, ela colocou: "Se BC = DE e K ângulos opostos, então os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{E}$ são congruentes pelo teorema LAAo."

Junto com outros erros já analisados ou por analisar, novamente há o erro na aplicação de um caso de congruência, pois sequer citou três congruências para poder justi

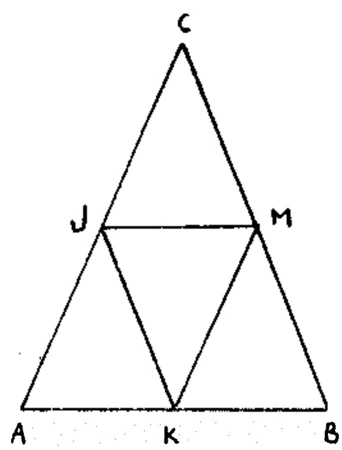
1.



2.

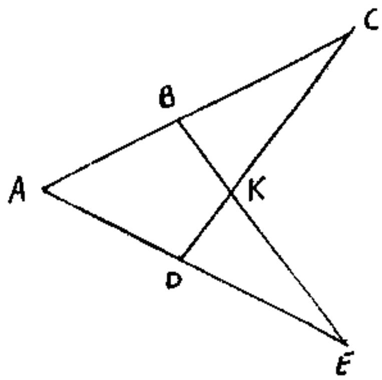


3.



ficar a aplicação de um caso de congruência.

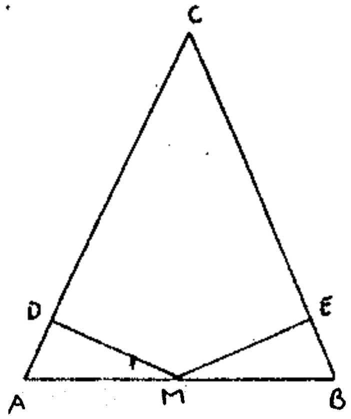
1.



Na 2ª questão, novamente aparece este erro quando a mesma aluna cita as congruências tiradas da hipótese, AM = MB, MD=ME, $A\hat{D}M = B\hat{E}M$, mas escreve que os triângulos são congruentes por LAL, ou seja, não sabe aplicar os dados de que dispõe.

O aluno Sigma, na 2ª questão, citou também as mesmas congruências citadas no exemplo acima e escreveu: "com isso posso dizer, pelo caso LLA, que o $\hat{A} = \hat{B}$".

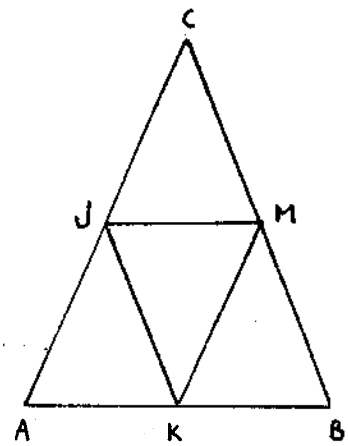
2.



Mas nem existe esta sigla! Na entrevista, ele disse:

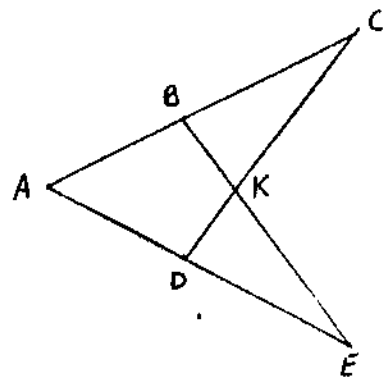
> "Só porque eu vi dois lados iguais e um ângulo, disse lado, lado, ângulo."

3.



O aluno Alfa também cometeu este tipo de erro, na 2ª questão, em três oportunidades. Citou as congruências tiradas da hipótese e concluiu: "então fica lado, ângulo, ângulo oposto a congruência destes dois triângulos" (Δ AMD, Δ BME). Depois, quando resolveu traçar $\overline{CM}$ e trabalhar com os triângulos $\triangle CMD$ e $\triangle CME$, citou o lado comum $\overline{CM}$, os ângulos retos que obtinha da informação sobre perpendicularismo e a congruência dos ângulos $D\hat{C}M$ e $E\hat{C}M$ (erro de que falarei depois). Concluiu, então:

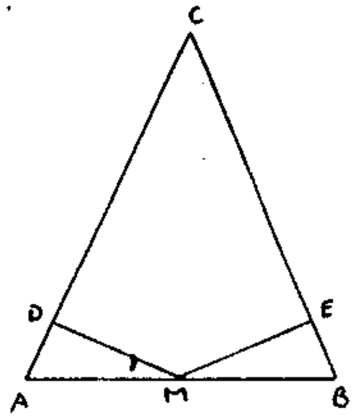
1.



> "Posso provar por lado, ângulo, ângulo oposto também (...) Tem um monte de jeito de fazer"

Aceitando $D\hat{C}M \cong E\hat{C}M$, poderia, realmente, aplicar LAAo, mas não o caso LAL, pois faltaria um lado ou um ângulo conforme a ordem em que tomasse os elementos.

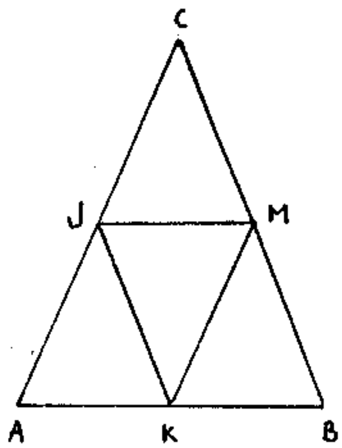
2.



3.4.7. O erro do tipo VI

O erro do tipo VI consiste em utilizar a tese como um dos elementos da hipótese.

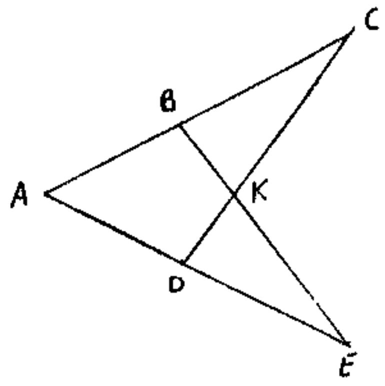
3.



Nas respostas às questões de Geometria, em aula ou em provas, este era um dos erros mais freqüentes; na pesquisa, apareceu somente quatro vezes.

O aluno Épsilon, na 1ª questão, ao tentar achar um caso de congruência, tomou como congruentes os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{E}$ e citou-os como ângulos opostos aos lados $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, para usar o caso LAAo; depois se deu conta do erro.

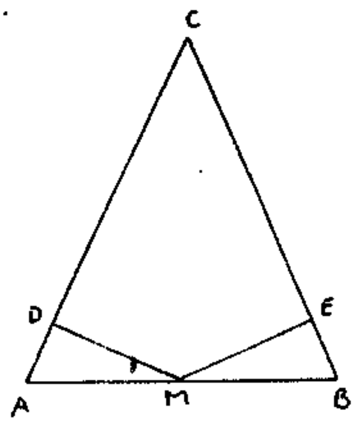
1.



A aluna Gama, na 2ª questão, ao traçar o segmento $\overline{CM}$, escreveu: "Seja $\overleftrightarrow{CM}$ a altura do Δ ABC".Na segunda entrevista,quando lhe perguntei porque afirmava isto, ela respondeu:

> "Se Δ ABC fosse um triângulo isósceles e M fosse o ponto médio, poderia traçar altura,porque num triângulo isósceles a mediana é igual à altura."

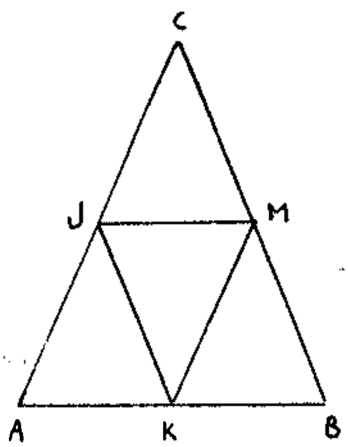
2.



Então, ela estava usando a tese (Δ ABC é isósceles) como se fosse um dado conhecido, como se fosse uma hipótese.

O aluno Alfa fez exatamente o mesmo erro na 2ª questão, duas vezes,pois considerou primeiramente que $\overleftrightarrow{CM}$ seria altura e, depois, que $\overline{CM}$ seria bissetriz. A sua justificativa foi a mesma que Gama apresentou, pois lembrava-se também do teorema que diz que, em um triângulo isósceles, a mediana,a bissetriz e a altura a partir do vértice são

3.



coincidentes.

3.4.8. O erro do tipo VII

Ao falar, ao escrever,ao ler, por motivos que nem sempre se pode entender, as pessoas cometem erros que chamamos "lapsos". Também nesta pesquisa eles aparecerem, em oito ocasiões.

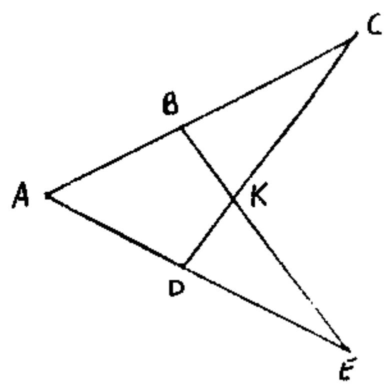
A aluna Delta, na 1ª questão, em certo momento, referindo-se ao que fazer com os dados da hipótese, disse: "Aproveitava-se os lados, não é? ...aqui no caso A igual a B".

Mas A e B são pontos, não são lados! Ela justificou o lapso dizendo que fica muito ansiosa em situações de prova,principalmente pela falta de tempo para fazer a questão.

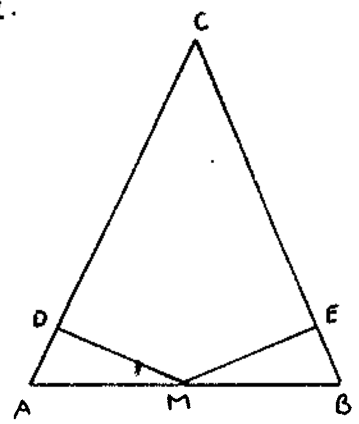
A aluna Zeta, ao explicar de uma maneira clara e precisa como demonstraria a 3ª questão, completou com a seguinte frase:

> "Aqui já dá para ver que estes triângulos são iguais,ou seja, este ângulo aqui é congruente a este aqui ($\hat{A}$,$\hat{B}$) e pelo mesmo teorema anterior, os ângulos opostos são con-

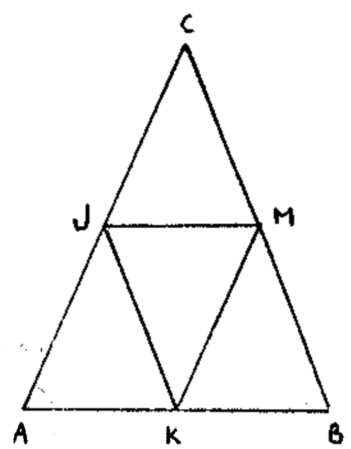
1.



2.



3.



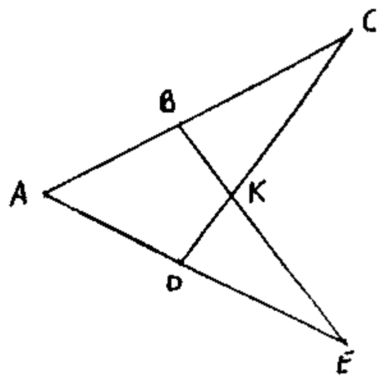
gruentes."

O teorema anterior a que ela se referia é o que diz que, se um triângulo tem dois ângulos congruentes, os lados opostos a eles também são congruentes. Parece-me que, ao lembrar do enunciado do teorema, que menciona a palavra "ângulos ", ela trocou os termos, pois sabia perfeitamente o que fazer, como mostrou na demonstração escrita.

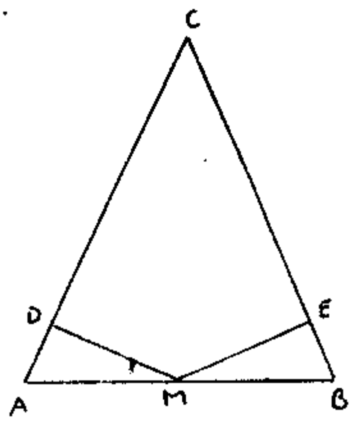
A aluna Lambda cometeu um lapso na 2ª questão, quando disse, referindo-se aos ângulos retos dos triângulos Δ AMD e Δ BME: "Aqui eu enxerguei, porque aqui tem oitenta, aqui tem oitenta". Ela pretendia, naquele momento, utilizar a soma dos ângulos internos de um triângulo, que vale 180 graus, porisso, parece-me que disse "oitenta" quando deveria dizer "noventa", referindo-se aos ângulos retos.

Na 3ª questão, ela também cometeu um lapso quando falou em "ângulos isósceles", mas neste caso, não consigo fazer uma suposição sobre o uso da palavra "ângulo" em

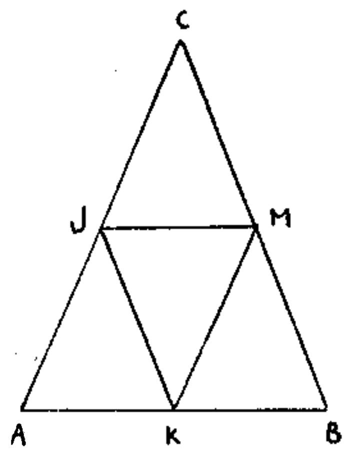
1.



2.



3.



vez de "triângulo".

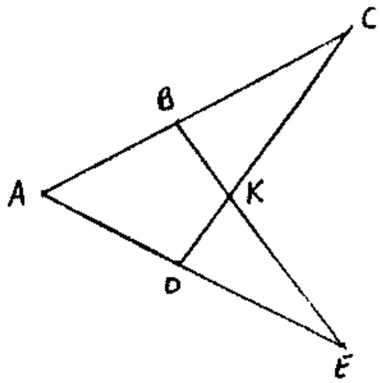
O lapso de escrita aparece na 3ª questão, quando a aluna Rô escreve: "...e como KJ = KM → KB=AJ" Já que havia, oralmente, dito que MB é igual a AJ, sabia quais os segmentos congruentes e quais as conclusões a chegar.

Também na 3ª questão, o aluno Sigma escreveu: "Tenho por hipótese que KJ = KM e com isso chego que os ângulos $\hat{J}$ e $\hat{K}$ são congruentes". Como oralmente e no desenho tinha indicado corretamente $K\hat{J}M$ congruente a $K\hat{M}J$, acredito que configura-se um lapso de escrita. O erro de convenção, ao utilizar uma só letra para indicar estes ângulos já foi analisado antes.

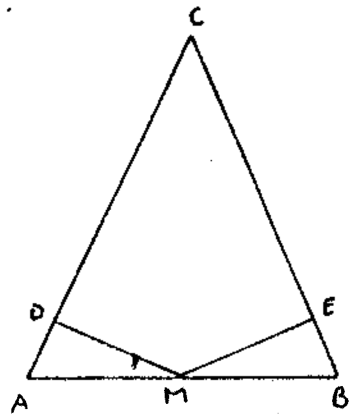
O lapso na leitura apareceu só duas vezes, de forma irrelevante porque foi logo eliminado, mas pode servir como um alerta para o professor no momento de apresentar uma questão escrita.

Os alunos Lambda e Sigma, na 2ª questão, fizeram uma confusão na

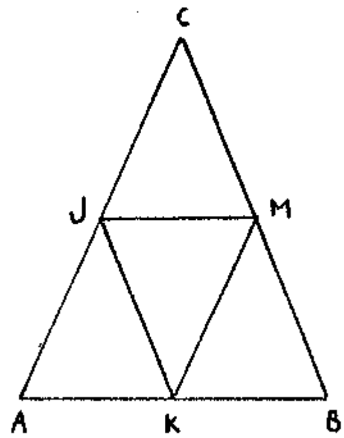
1.



2.



3.



leitura da última afirmativa da hipótese, MD = ME Lambda leu-a como tese, pois, em certo momento, disse: "Eu tenho que chegar a MD igual a ME, não é?" Depois ela justificou, dizendo que a hipótese era muito longa. Sigma não leu a afirmação e só o fez quando chamei a atenção para o fato, pois vi que ele, em voz baixa, lia as proposições da hipótese, com excessão da última. Quando lhe perguntei porque não havia lido, ele disse:

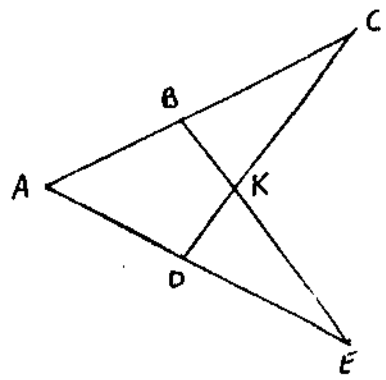
> "A gente fica fixado em achar o final e não se dá conta, perde muita coisa".

Portanto, parece-me que a disposição dos dados da questão, no caso os dados da hipótese, tornando-a muito longa comparativamente à tese, pode ser um fator causador de erros em provas de verificação.

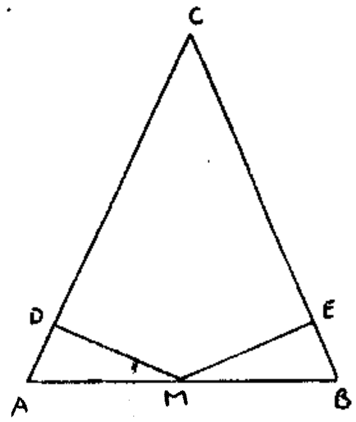
3.4.9. O erro do tipo VIII

Outro tipo de erro detectado na pesquisa foi o erro em língua portuguesa. Não considero que a ocorrência de erros no que tange à utilização da chamada "norma culta"

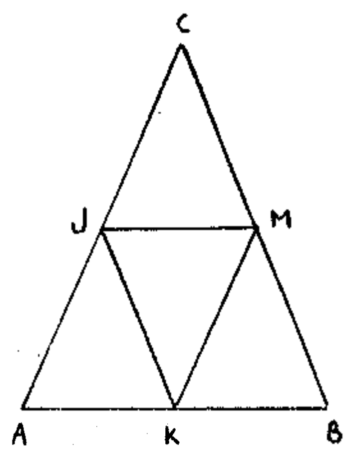
1.



2.



3.



prejudique a análise de uma demonstração, pois o aluno pode apresentar argumentos válidos e demonstrar corretamente sem se expressar com correção. Acredito, não obstante, que um futuro professor deva ter cuidado com a linguagem escrita, quer a matemática quer a natural.

De uma forma geral, os erros em português foram relacionados com ortografia, concordância nominal ou verbal, acentuação e pontuação. Em alguns casos, a falta de vírgulas em todo o texto da demonstração dificultou a leitura.

3.4.10. Observações finais sobre a análise inicial

Em alguns casos (43, para ser exata), foram detectados erros na primeira análise que com o trabalho posterior acabei por não considerar. Refiro-me às situações em que o aluno concluiu a demonstração corretamente, justificando os passos de seu raciocínio, mas omitiu justificativas que lhe pareceram óbvias. São casos como a não justificação da implicação "$\hat{A}=\hat{B} \rightarrow \triangle ABC$ isósceles" através do teorema que diz que, se dois ângulos de um triângulo são congruentes, então os lados opostos também o são. Outro exemplo é, ao colocar que "$\triangle ADC \cong \triangle ABE \rightarrow \hat{C} = \hat{E}$", na 1ª questão, omitir a justificativa da definição de congruência de triângulos.

Quando comentei tais omissões com os alunos, suas respostas me fizeram pensar um pouco mais no assunto. Muitos deles lembravam a propriedade ou definição acima citados, mas disseram não achar importante mencioná-la, pois seria uma perda de tempo, etc.

Lembrei-me de que, em textos de Matemática, nem sempre todos os detalhes são elucidados. Quantas vezes, nos cursos de graduação, os alunos reclamam da típica expressão: "Facilmente conclui-se que...", alegando que para descobrir o que o autor acha fácil é preciso estudar algumas horas.

Será que, no nível considerado por esta pesquisa, é correto exigir detalhes tão óbvios como este de citar a definição de congruência, quando o aluno já chegou à conclusão correta e pode-se notar pela relação escrita, que sabia esta definição?

Acredito que, se considerasse isto como erro, estaria sendo incoerente, pois reproduziria uma atitude que condeno: a de aprisionar o pensamento do aluno nas firmes cadeias do rigor.

Apesar das observações de alguns alunos, durante a pesquisa ou em situações de sala de aula, manifestando-se contrários às exigências de correção de linguagem simbólica, continuo considerando importante a detecção dos erros do tipo I, pois em um curso de Licenciatura em Matemática se formam futuros professores desta disciplina e não se pode aceitar que eles não saibam falar ou escrever na linguagem com a qual trabalham, mesmo que raciocinem logicamente.

Isto pode ser comparado a um curso de Letras que forme professores de português que sabem analisar corretamente os enunciados, mas que, ao escrever as sentenças analisadas, cometam erros de ortografia.

Portanto, há uma diferença entre considerar como erros aqueles que se referem à linguagem simbólica e os que são apenas omissões dos detalhes óbvios e maçantes de uma demonstração.

3.4.11. Síntese da análise inicial

Concluída a análise, com os erros classificados e exemplificados, obteve-se,portanto, as seguintes categorias:

1) Erros do tipo I - São os erros ligados à linguagem matemática. Podem relacionar-se com o uso dos símbolos e convenções da linguagem escrita; com o uso das palavras que designam entes matemáticos; com a interferência de significados diversos; com a verbalização incorreta de relações matemáticas; com a falta de clareza e precisão.

2) Erros do tipo II - São os erros produzidos pela figura. Podem relacionar-se com a disposição dos elementos na figura; com as marcações que são feitas na mesma; com as afirmativas retiradas do desenho por simples visualização, sem justificativa.

3) Erros do tipo III - São os erros relacionados com os conceitos matemáticos. Surgem quando o aluno tem um conceito errado de um ente ou de uma relação matemática.

4) Erros do tipo IV - São os erros relacionados com conclusões inaceitáveis. Surgem quando o aluno conclui uma determinada proposição a partir de outras, sem que a conclusão se depreenda das premissas utilizadas.

5) Erros do tipo V - São os erros relacionados com a não utilização de axiomas e teoremas existentes na teoria. Surgem quando o aluno, mesmo dispondo de todos os elementos da hipótese de um determinado teorema, não o reconhece e não sabe ve

rificar que os dados de que dispõe estão de acordo com o teorema conhecido.

6) Erros do tipo VI - São os erros relacionados com o uso da tese como um dos elementos da hipótese. Surgem quando o aluno supõe já verdadeiras as afirmativas que são a tese do teorema e prova-o com base nestas afirmativas.

7) Erros do tipo VII - São os erros relacionados com lapsos, orais, de escrita e de leitura.

8) Erros do tipo VIII - São os erros em língua portuguesa, relacionados com ortografia, concordância nominal ou verbal, acentuação e pontuação.

O número de ocorrências de cada tipo de erro em cada questão é apresentado na Tabela I, onde as linhas indicam os tipos de erro e as colunas indicam as questões. Pode-se, assim, ter uma visão geral das ocorrências.

TABELA I

Número de erros de cada tipo em cada questão.

Tipo de erro \ Questão	1ª	2ª	3ª	TOTAL	
I	16	20	20	56	43%
II	20	3	4	27	[illegible]
III	1	2	3	6	4,6%
IV	6	3	4	13	[illegible]
V	3	5	0	8	[illegible]
VI	1	3	0	4	[illegible]
VII	1	3	4	8	[illegible]
VIII	2	2	3	7	5,4%
TOTAL	50	41	38	129	

Vê-se que os erros ocorridos com maior freqüência são os erros do tipo I, relacionados com a linguagem matemática. Os erros deste tipo representam 43,4% do total, uma percentagem bastante alta, tendo em vista o número pequeno de alunos, confrontados com apenas três questões.

Seguem-se em número de ocorrências os erros do tipo II, produzidos pelo desenho, representando 21% do total e os erros do tipo IV, relacionados com conclusões inaceitáveis, representado 10,1% do total. Os outros tipos de erros têm incidência bem menor: os erros do tipo V (não utilização de teoremas já existentes) e do tipo VII (lapsos) representam, cada um, 6,2% do total. Os erros do tipo VIII (erros em língua portuguesa) representam 5,4% do total. Os erros do tipo III (concei tos errados) representam 4,6% do total. Finalmente, os erros do tipo VI (uso da tese como hipótese) representam 3,1% do total.

Somados os erros dos tipos IV, V e VI, cujas causas parecem ser as mesmas, uma vez que tais erros se relacionam com o raciocínio propriamente dito, com a argumentação utilizada na demonstração, tem-se 19,4% do total. Desta forma, ainda predominam os erros dos tipos I e II. As causas subjacentes a cada tipo de erro serão analisadas mais adiante.

Quanto às questões, vê-se que na primeira ocorreu maior número de erros, sendo que estes representam 38,8% do total;a seguir tem-se a 2ª questão, representando 31,8% do total,e a 3ª,representando 29,4% do total.

Considero que as razões para a ocorrência de um maior número de erros na 1ª questão são de dois tipos:

a) Razões psicológicas - o receio dos alunos, que chegavam, em geral, atemorizados com o teste, sem saber com o que se iam deparar. Mesmo tendo conhecimento de que não era uma prova de avaliação, de que o sigilo seria mantido, etc..,eles receavam pela sua imagem perante um professor do curso e frente a si mesmos. Assim, era necessário um tempo até que o aluno se acalmasse e este tempo, em geral, era maior do que o destinado à resolução da 1ª questão.

O tempo atribuido a cada questão era de,aproximadamente, quinze minutos e o tempo médio de resolução da 1ª questão foi de 15 minutos e 16 segundos. Parece, portanto, que, em geral , não correspondeu ao necessário para que o aluno se tranquili zasse e, assim, a 1ª questão foi respondida sob pressão.

b) Razões relacionadas com a figura - as dificuldades relacionadas com a superposição dos triângulos, a posição dos postos A, C e E, formando um triângulo isósceles em posição não usual e a visualização dos pontos B e D como sendo pontos médios de $\overline{AC}$ e $\overline{AE}$, respectivamente, ocasionaram erros de vários tipos, segundo a análise realizada.

A segunda questão, mesmo tendo sido considerada a mais fácil pelos alunos e resolvida no menor tempo médio, (10 minutos e 38 segundos), apresentou como maior dificuldade o caso de congruência de triângulos retângulos, que, como já foi comentado anteriormente, é o menos compreendido pelos alunos. Aliás, a esse respeito, um dos alunos que resolveu as questões na primeira fase da pesquisa, quando da validação dos instrumentos comentou:

> "Eu nunca gostei de usar este teorema, não gostei muito dele, não sei por que, antipatia. Eu não suporto mesmo. Tem alguma coisa quanto ao ângulo reto que eu não consigo engolir bem".

Quando os alunos já estavam mais calmos, envolvidos com o trabalho e tinham relembrado os casos de congruência, uma vez que os tinham utilizado pelo menos na 2ª questão, iniciavam a 3ª questão com mais desenvoltura e erravam menos. Porém, as dificuldades relacionadas com os conceitos e propriedades dos paralelogramos e os conceitos e propriedades dos triângulos isósceles retardavam as conclusões. O tempo médio de resolução desta questão foi de 18 minutos e 11 segundos.

A análise mais profunda dos resultados obtidos exige ainda, considerações sobre os alunos, o que passo a fazer.

3.5. A Descrição dos Alunos Participantes

3.5.1. Introdução

Ao definir cada tipo de erro encontrado na pesquisa, foram colocadas as causas imediatas do erro, aquelas que são detectáveis através das verbalizações ou das resoluções escritas.

Para tentar descobrir as causas subjacentes e entender as dificuldades no processo de ensino-aprendizagem, é preciso levar em consideração cada aluno: sua maneira de enfrentar as questões propostas; suas dificuldades; suas dúvidas; suas recordações e comentários sobre as situações de ensino-aprendizagem vivenciadas.

Além das observações registradas no decorrer das entrevistas, são, também, indicados alguns dados referentes a sexo, idade, tipos de escolas que freqüentou e situação acadêmica.

É apresentada, também, uma tabela denominada "matriz de erros", registrando o número de erros de cada tipo cometidos em cada questão. Esta matriz é indicada com a letra grega correspondente ao nome pelo qual o aluno é identificado. Cada matriz tem oito linhas e três colunas: os elementos da primeira linha correspondem aos erros do tipo I, os da segunda linha correspondem aos erros do tipo II e assim sucessivamente. Quanto às colunas, os elementos colocados na primeira coluna indicam os erros cometidos na 1ª questão, os da segunda coluna referem-se aos cometidos na 2ª e os da terceira coluna, aos da 3ª questão.

O maior ou menor número total de erros em cada matriz não corresponde , necessariamente ao melhor ou pior desempenho do aluno na resolução das questões propostas. Às vezes, um só erro, desde que fundamental para a correção da demonstração, pode torná-la completamente absurda, enquanto que, em outro caso, um grande número de erros pode ser aceitável, desde que não comprometa a argumentação do aluno.

Não houve interesse em atribuir notas ou conceitos a cada teste; a matriz só tem como finalidade verificar, de uma maneira rápida, em que categoria ocorreu a maior incidência de erros, para cada aluno. Quando não houve necessidade, porque o aluno não cometeu erros ou cometeu apenas um tipo, não foi utilizado este recurso.

3.5.2. O aluno Alfa

Alfa é um jovem de 18 anos, que cursou o 1º grau em uma escola particular fora do estado do Rio Grande do Sul. Completou o 1º e 2º graus através de curso supletivo particular, em Porto Alegre. Ingressou no curso de Matemática da PUCRS no primeiro semestre de 1987 e cursa, atualmente (2º semestre de 1988, quando foi feita a pesquisa) disciplinas do 1º e 2º semestres do curso.

Alfa não demonstrou ter dificuldades quanto ao gravador, pois falava rapidamente, como se expressa habitualmente.

Aliás, a transcrição de suas verbalizações foi a mais longa de todas, pois, muitas vezes, ele começava uma frase e não a terminava, recomeçando-a novamente e assim sucessivamente, como se cortasse o fluxo das idéias. Ele mesmo explicou esta sua maneira de falar: "Eu raciocino rápido demais e na hora de escrever ou falar, eu corto, eu não organizo."

Ao escrever, parece meticuloso, escreve algo e considera errado, apaga para escrever novamente, da mesma forma entrecortada com que se expressa verbalmente. Quando lhe perguntei porque fazia isto, respondeu:

> "É a pressa... Não consigo, raciocino mais rápido que a minha mão, não consigo escrever, começo a pensar rápido demais e minha mão não acompanha, de vez em quando chego a esquecer de escrever uma palavra...".

Queixou-se, também, de que não gosta de questão teórica, porque é um suplício escrever, "ficar enrolando".

Na resolução das questões, depende muito do que vê. Às vezes girava a figura, tapava uma parte com a mão, procurando obter informações do desenho. Ele mesmo concordou com isso, pois me disse: "Eu acho que a minha demonstração é muito visual".

Viu conteúdos de Geometria no 1º grau, em uma disciplina de Desenho Técnico que era "bastante puxada"; atribuiu a isto o fato de entender os conteúdos de Geometria quando associados ao Desenho. Ele considera que "a Geometria é o início do Desenho". Afirmou que só tomou contato com demonstrações de teoremas na faculdade.

Sua matriz de erros é indicada abaixo:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.5.3. O aluno Beta

Beta é um jovem de 18 anos, que cursou as três primeiras séries do 1º grau em escola particular. Da 4ª série até o final do 2º grau freqüentou escola pública, sempre na mesma cidade do interior do Rio Grande do Sul.

Ingressou no curso de Matemática no 2º semestre de 1987 e cursa atualmente as disciplinas do 3º semestre do curso.

Desde que entrou na sala para fazer a primeira entrevista, Beta mostrou-se nervoso; suas mãos estavam vermelhas, apertava-as uma contra a outra. Durante o trabalho, ele procurava confirmar se estava certo o que fazia perguntando "não é?" a cada afirmativa.

Beta é muito detalhista; quando foi escrever "por congruência de triângulos retângulos", perguntou-me: "Só 'por congruência de triângulos' ou preciso botar 'por teorema de congruência'?".

Também quanto aos símbolos, usou-os corretamente, mas sem confiança no que colocava, precisava perguntar se era mesmo daquela forma. No que tange à língua portuguesa, também demonstrou preocupação. Em certo momento escreveu "daí" e interrompeu o que fazia, dizendo: "Hi, tem um monte de 'daí'". Trocou, então o "daí" por "portanto" e acrescentou: "...com estes probleminhas assim é que o tempo voa nas provas".

Notei que ele se preocupava muito com o tempo, pois também disse, em outro momento: "Quando eu tenho pouco tempo para explicar um negócio, vem tudo na minha cabeça e uma coisa atropela a outra".

Quando releu a 3ª demonstração, achou que não estava bem, que faltava alguma coisa e disse: "Eu penso sempre em fazer o teorema o mais fácil possível, para não deixar dúvidas". Não gosta muito de escrever, talvez porque se preocupe demais com os detalhes:

> "É, para mim o chato é escrever... é um pouquinho xarope...repetir as palavras e tudo...e prestar atenção...Num teorema de (X)*,por causa de uma palavrinha que eu escrevi não ficou totalmente certo o teorema."

Beta viu Geometria Plana na 7ª série,rapidamente. Só se lembra de que estudou ângulos e a nomenclatura das figuras planas. A Geometria Espacial, só foi vista no curso pré-vestibular. Já tinha tomado contato com demonstrações no 2º grau e lembrava-se de algumas fórmulas que haviam sido deduzidas.Até acrescentou: "Numa prova eu me lembrava da demonstração e não lembrava da fórmula, então fui fazendo a demonstração até chegar na fórmula".

Beta só cometeu três erros do tipo II, na 2ª questão.

3.5.4. A aluna Gama

Gama é uma jovem de 19 anos que fez o 1º e o 2º graus em escolas públicas do interior do Rio Grande do Sul. Ingressou no curso de Matemática no 2º semestre de 1986. Está cursando as disciplinas do 5º semestre do curso e uma do 6º semestre.

---

* As referências às disciplinas do curso serão apresentadas desta forma, para evitar sua identificação.

Gama é uma pessoa quieta, muito gentil ao responder as perguntas, mas pouco expansiva. Somente no final da segunda entrevista, talvez se sentindo mais tranqüila, porque tinha terminado o trabalho, ela conversou um pouco, relembrando fatos do 1º e 2º graus. Achei-a um pouco tensa no início do trabalho, o que ela confirmou posteriormente.

É organizada e rápida para resolver as questões;desde o início vai colocando as informações da hipótese do teorema. Quando perguntei se fazia sempre assim, respondeu: "Eu olho, vejo alguma coisa e tenho que escrever, porque senão eu me esqueço, me perco".

O fato interessante de que se lembrava, relativo ao 1º grau, refere-se ao uso de material concreto:

> "Eu me lembro pouca coisa, eu me lembro na 1ª série a professora usava palitinhos de picolé, dentro de uns envelopes brancos e ela fazia a gente contar,amarrava com borrachinhas."

Do 2º grau, também contou um fato interessante,mostrando que usar certos recursos didáticos tais como jogos, deve ser uma atividade planejada, de forma a que o aluno construa algum conceito e saiba qual a relação com aquele material:

> "Eu me lembro que no 1º ano o professor dava para a gente 'batalha naval' para jogar na aula.Eu não sei qual era a moral,sempre no final ele dava dez minutinhos para a gente jogar batalha naval, ele entregava os papeizinhos... mas ele nunca falou porque ele dava batalha naval para a gente jogar."

Gama viu pouca coisa de Geometria no 1º grau,porque sempre a Geometria ficava para o final do ano. No 2º grau, estudou Geometria Espacial. Quando lhe perguntei se já tinha realizado demonstrações de teoremas, no 1º ou no 2º graus, ela respondeu que não se lembrava, mas quando perguntei se as fórmulas não eram deduzidas, ela disse: "Ah, claro, dedução! A gente falava 'dedução de fórmulas'." É uma observação interessante, pois evidencia que a demonstração de um teorema na faculdade e a dedução de uma fórmula no 2º grau lhe parecem atividades diferentes.

Seus erros estão distribuídos por vários tipos; não há uma predominância que permita corroborar observações anteriores.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.5.5. A aluna Delta

Delta tem 33 anos, fez o 1º grau em escolas particulares e públicas e o 2º grau em escola particular, sempre do interior do Rio Grande do Sul.

Esteve vários anos sem estudar, iniciou outro curso universitário, em outra universidade e ingressou no curso de Matemática da PUCRS no 2º semestre de 1987. Está cursando, atualmente, disciplinas do 2º e do 3º semestres do curso.

Um pouco depois que começou a pensar na 1ª questão, notei que a mão de Delta estava trêmula quando apontava para a figura; posteriormente, confirmou que estava nervosa.

Parecia querer livrar-se logo da tarefa; quando terminou a 1ª questão, virou logo a folha e disse: "Meu mal é que eu fico muito nervosa". Na 2ª entrevista, justificou-se dizendo que ficava nervosa em provas desde pequena, todas as vezes em que é algo relacionado com Matemática, Física, Química ou Biologia, que são as disciplinas que ela considera importantes, de que gosta. Disse que não se preocupava em provas de outras disciplinas.

Outra característica sua interessante é a preocupação em não esquecer o que lhe passa pela mente; ela diz que tem muita dificuldade de memória, que, quando está assistindo a uma aula, "enxerga lá adiante", mas quando sai já esqueceu. Não se lembrou se tinha estudado Geometria no 1º e 2º graus; disse que fazia muito tempo. Quanto a demonstrações de teoremas, assegurou que só tinha tomado contato na faculdade.

Na sua matriz de erros, pode-se observar que a predominância dos erros do tipo I está de acordo com as suas preocupações, pois ela comete erros de linguagem, de notação, na sua pressa em escrever o que lhe vem à mente antes que esqueça.

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.5.6. O aluno Épsilon

Épsilon é um jovem de 19 anos que fez o 1º grau em escola particular e o 2º grau em escola pública, ambas no interior do Rio Grande do Sul. Ingressou no curso de Matemática no 2º semestre de 1987 e está cursando o 3º semestre do curso.

Épsilon é desinibido, comunicativo, fala bastante e não demonstrou nervosismo durante o trabalho.

Apesar de não ter completado as duas primeiras demonstrações porque não conseguiu resolver qual o caso de congruência de triângulos que deveria usar, Épsilon evidenciou saber desenvolver uma argumentação, procurando justificar as afirmativas que colocava.

Quanto ao ensino que teve no 1º grau, considerou que:

> "No 1º grau o nível era bom, bem puxado, foi quando se iniciou o estudo de Álgebra. As aulas eram só teóricas e exercícios, muita gente reclamava que tinha que decorar a fórmula, exatamente porque não existe este trabalho com o concreto, de experimentação".

Épsilon acha que viu uma iniciação à Geometria no 1º grau e não lembrava de ter visto Geometria Espacial no 2º grau, com esta ele só tomou contato no curso pré-vestibular, e apenas como fórmulas para resolver exercícios.

Afirmou que, antes de entrar na faculdade, nunca tinha realizado uma demonstração de teorema. Quando perguntei sobre as deduções de fórmulas de trigonometria, às quais ele tinha se referido, ele frisou: "Mas demonstração de um <u>teorema</u> eu nunca vi".

Noto, novamente, a dissociação que o aluno faz entre a atividade de deduzir uma fórmula e a de demonstrar um teorema.

Sua matriz de erros mostrou a predominância dos erros do tipo I, devidos, principalmente, ao fato de considerar que um teorema é definição ou vice-versa. As observações tiradas do desenho lhe causaram problemas no momento da adequação dos dados a um caso de congruência. Sua matriz de erros é a seguinte:

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.5.7. A aluna Zeta

Zeta tem 19 anos, fez o 1º e o 2º graus na mesma escola, pública, em Porto Alegre; ingressou no curso de Matemática no 1º semestre de 1986 e está cursando o 6º semestre do curso.

Zeta tem realizado o curso com muita facilidade, desde o início. É muito expansiva, gosta de conversar, participa das atividades do Instituto de Matemática e já está pensando em fazer pós-graduação em Matemática, quando concluir o curso.

Na época da pesquisa, Zeta estava enfrentando dificuldades com uma disciplina (talvez pela primeira vez no curso) e estava revoltada, especialmente com as demonstrações de teoremas que precisava fazer. Fez observações que me mostraram que ela depende muito do professor para desenvolver-se em uma disciplina. Se a atuação do professor lhe desagrada, esforça-se mais no estudo, para mostrar que pode fazê-lo sem ajuda; se gosta do professor, esforça-se porque quer mostrar-se à altura do mestre.

Sobre o 2º grau, comentou alguma coisa relacionada à atitude de uma professora: "Para mim foi bom o 2º grau,porque a gente fez o nosso currículo, a professora era ótima e a gente deu as prioridades, primeiro a gente quer isto...".

Zeta viu Geometria no 1º e 2º graus; não considera que tenha visto demonstrações, apesar de afirmar que a professora "não era de dar fórmulas prontas", mas institiu em que não era "como na faculdade".

Zeta fez apenas seis erros e suas demonstrações ficaram muito completas, com todas as justificativas. Sua matriz de erros é a seguinte:

$$\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.5.8. O aluno Kapa

Kapa tem 18 anos, cursou o 1º e o 2º graus em colégios particulares de Porto Alegre. Ingressou no curso de Matemática no 2º semestre de 1987. Está cursando as disciplinas do 3º semestre do curso e uma do 5º semestre.

Ao entrar na sala para fazer o teste, Kapa queixou-se de que estava com muita dor de cabeça. Talvez estivesse um pouco tenso, porque, mais adiante, quando lhe perguntei como estava, respondeu que a dor havia passado durante a resolução das questões.

Fez as duas primeiras demonstrações tão completas,com todas as justificativas válidas, que até brinquei com ele,comen tando: "Imagina se tu não estivesses com dor de cabeça!". Ele riu, um pouco contrafeito, e respondeu: "Sabe o que é, Helena, é que eu estou sem prática de demonstrar este tipo de teorema, de Geometria, daí eu tenho que estar escrevendo".

Não entendendo bem o que ele queria dizer, perguntei-lhe e ele respondeu que achava que a sua demonstração deveria ser mais concisa; aliás, ele mesmo colocou: "Eu me acho muito minucioso".

Esta é, efetivamente, a sua característica mais marcante. Suas demonstrações têm todos os detalhes que possam elucidar a questão, todas as argumentações são válidas e o próprio texto é muito bem escrito. Aliás, a matriz de erros de Kapa é nula, ele não cometeu erros, apenas teve dificuldade em completar a 3ª demonstração, porque fez um caminho muito longo para provar que o triângulo era isósceles e, como tinha compromissos de aula logo a seguir, não pudemos ultrapassar o tempo previsto para o teste.

Ainda quanto à sua maneira de demonstrar teoremas, vou transcrever um trecho de nosso diálogo que me parece elucidar perfeitamente o assunto:

"Kapa - Eu acho que eu tenho um problema, eu pego a hipótese e vou desenvolvendo sem muito ver o que eu quero provar.

H - Esta sua maneira de pensar é uma coisa que adquiristes ao longo do estudo ou é uma maneira própria de ser?

Kapa - Eu acho que é uma coisa adquirida, porque não é só nos teoremas de Geometria, é em qualquer problema. Às vezes os professores dizem que a gente tem que ver antes o que o teorema significa, mas eu pego uma determinada forma de desenvol ver, uma determinada linha, e vou desenvolvendo.

H - Mas tu chegas no final?

Kapa - Eu chego,proque tem um momento em que tu tens que parar e ver onde tu queres chegar,não adianta,mas mesmo vendo onde eu quero chegar, eu pego a tese e vou fazendo o caminho contrário,entende?"

Kapa considera que adquiriu esta maneira de trabalhar em Matemática desde o 2º grau:

> "Eu tive as mais variadas formas de professores,mas comecei a me envolver com Matemática no 1º ano do 2º grau (...)eu peguei uma professora recém-formada e ela era muito minuciosa também, quando ia entrar em logarítmo dava as definições todas,direitinho, com os 'se e só se',com o caderninho. Então era minuciosa e eu comecei a me dar bem,me encaixar naquele jeito dela."

Ainda acrescentou uma observação sobre as demonstrações que aprendera no 2º grau:

> "Os professores,por exemplo em Geometria, deduziam as fórmulas; a maioria dos alunos não se interessava,porque diziam que não precisa saber,não vai cair na prova,mas eu gostava de acompanhar o raciocínio deles no sentido do desenvolvimento das fórmulas,o como,de onde tiravam, e isto sempre teve comigo, este interesse de saber de onde saiu."

Portanto,ele tem a curiosidade de saber o porquê,não aceita fórmulas prontas.

Kapa viu Geometria no 1º grau muito rapidamente, no final da 8ª série; no 2º grau viu Geometria Espacial.

3.5.9. A aluna Lambda

Lambda tem 39 anos, fez os antigos cursos ginasial e científico em escolas públicas de Porto legre; ficou dezenove anos sem estudar e ingressou no curso de Matemática no 1º semestre de 1987. Atualmente, está cursando disciplinas do 2º semestre do curso.

Lambda foi a única aluna que me procurou espontaneamente para trabalhar na pesquisa, quando soube de sua existência através de uma colega. Ela esperava que a pesquisa lhe auxiliasse a descobrir as causas dos seus erros, porque ela está com dificuldades no curso.

Quanto à Geometria, Lambda considera ser o que viu na disciplina de Desenho Geométrico que a auxilia, pois ela "enxerga" o que se pede para demonstrar. Ela gosta de medir para comprovar, conforme suas palavras, "se eu tivesse um compasso eu já estava medindo para ver".

Aliás, na segunda entrevista, ela fez uma observação pitoresca sobre o mesmo assunto: "Eu não confio muito em esquadro, régua, estas coisas, mas com compasso a gente transpõe as medidas".

Na 2ª questão, quando leu na hipótese que $\overline{MD}$ é perpendicular a $\overline{AC}$, disse: "Bom, só se fosse no espaço, porque não vejo eles serem perpendiculares". Depois notou que estava olhando mal, olhava para os ângulos formados pelos segmentos $\overline{MD}$ e $\overline{AB}$. Daí concluiu:

> "Eu acho que o erro maior da gente é que a gente não pega o desenho e não vira para outros lados para ver se enxerga outra coisa. A gente se habitua tanto com aquela posição fixa que não enxerga os detalhes."

Ela reconhece suas dificuldades em demonstrar teoremas, o que colocou em frases entrecortadas:

> "Eu não olho para a hipótese, este é o meu problema... eu não sei partir da hipótese, eu quero enxergar no desenho...usar o que está na hipótese e na tese, só em pensar isto aí me dá um...eu me lembro lá das provas, fico bem perdida."

Portanto, entra aqui um componente emocional, pois só de lembrar uma situação de prova, ela já se perturba. Ela afirma que seu problema é com a linguagem matemática:

> "Eu me confundo toda, a linguagem Matemática para mim é difícil. Em Português eu tenho uma facilidade incrível, mas eu terminei o 2º grau em 1968, não tinha nada desta parte da Matemática Moderna, que desenvolve mais a linguagem matemática."

É interessante que, em relação à convenção das marcas na figura, para indicar as congruências, ela não só não as utiliza como também não entendeu a razão pela qual os professores (ou os livros-texto) utilizam aqueles sinais: "Eu não consegui pegar, eu achava a coisa mais estranha, achava que enfeiava o desenho".

Suas recordações das aulas de Matemática no ginásio não são muito boas:

> "Não motivavam a gente a descobrir de onde vem isto, de onde vem aquilo, não despertavam a curiosidade matemática. Em Desenho Geométrico não, eu tive um professor na 4ª série ginasial que fazia a gente descobrir mais coisas do que com a Matemática."

Contrariamente ao aluno Kapa que considera ter adquirido o gosto por descobrir o porquê das coisas no decorrer da vida escolar, Lambda critica seus professores de Matemática por não terem despertado nela a curiosidade matemática.

Lambda diz que viu pouca coisa de Geometria no ginásio e científico e lembra que decorava as fórmulas de Geometria Espacial. Não se recorda de ter visto demonstrações.

Sua matriz de erros mostra a predominância de erros do tipo I, confirmando-se as suas observações quanto às dificuldades com a linguagem matemática.

$$\lambda = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.5.10. A aluna Rô

A aluna Rô é uma jovem de 21 anos, que cursou o 1º e o 2º graus na mesma escola, no interior do Rio Grande do Sul. Ingressou no curso de Matemática no 2º semestre de 1986 e está cursando disciplinas do 4º e 5º semestres e uma do 6º semestre.

Rô estava muito nervosa durante a realização das questões. Notei que suas mãos tremiam e ela falava de uma forma entrecortada, como se lhe faltasse o ar. Mais tarde, acalmou-se um pouco e, na segunda entrevista, confirmou o nervosismo, comentando que o gravador lhe atrapalhou:

> "Eu achei bom fazer isto aí, apesar de que eu tive um pouquinho de receio, porque é quase como se fosse uma auto-análise, para ver como a gente está situada em torno da Matemática."

Parece-me que os fatores emocionais atrapalharam o seu desempenho nas primeiras questões, pois a terceira, quando já estava mais calma, foi feita com correção e rapidez.

Seu problema principal, na 1ª questão, foi considerar erradamente os ângulos $\widehat{ABE}$ e $\widehat{ADC}$ como retos, o que invalidou o restante da demonstração.

Na 2ª questão, ela não conseguiu descobrir o caso de congruência a ser aplicado: mesmo quando eu lhe sugeri que procurasse na folha auxiliar, ela não soube se movimentar em relação aos teoremas ali apresentados, não lembrava sequer a expressão "casos de congruência", só dizia "definições".

Na segunda entrevista, quando comentei sua dificuldade em procurar na folha auxiliar, ela justificou-se dizendo:

> "Se eu ia ler atentamente aquela folha que a senhora tinha me dado, de repente eu ia conseguir mas eu tinha que ler atentamente, com mais tempo, com mais atenção."

Rô diz que cursa Matemática porque gosta*, influenciada por seu professor de Matemática, único desde a 6ª série até o final do 3º grau.

Rô viu pouca coisa de Geometria no 1º grau. Lembra que os conteúdos foram apresentados em um semestre em que houve uma greve e não foi possível abordá-los todos, como estava previsto.

---

*Cursar Matemática porque gosta não é o mais freqüente entre os alunos do curso; muitos deles, não especificamente os que participaram da pesquisa, mas os que são entrevistados habitualmente quando ingressam no curso, dizem que estão fazendo Matemática enquanto não passam no vestibular para o curso que realmente desejam.

No 2º grau, Rô viu Geometria Espacial. Afirma que não viu demonstrações, que seu professor só explicava as fórmulas. Novamente, suponho que haja a distinção entre as demonstrações que vê na faculdade e as deduções que o professor possa ter feito ao "explicar as fórmulas".

Sua matriz de erros indica dificuldades com a linguagem matemática, pois nas demonstrações escritas a aluna cometeu erros no uso de símbolos e convenções.

$$\rho = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.5.11. O aluno Sigma

Sigma tem 23 anos, cursou o 1º e o 2º graus em escolas públicas do interior do Rio Grande do Sul. Iniciou o curso de Matemática no 1º semestre de 1986 e está cursando as disciplinas do 4º e uma do 5º semestre do curso.

Pelo que eu lembrava do aluno, ele pareceu-me um pouco nervoso, pois falava sem muita clareza, entrecortando as frases. Sabia o que tinha que fazer para resolver as questões, mas confundiu-se com detalhes visuais e, às vezes, dava a impressão de ir e vir pelos mesmos caminhos, de não organizar o fluxo de idéias que lhe passava pela mente.

Sua 1ª questão ficou invalidada pela idéia de que rebater um triângulo sobre o outro seria a mesma coisa que demonstrar a congruência (erro já citado antes).

Sigma viu pouca coisa de Geometria no 1º grau e não teve Geometria Espacial no 2º grau; o que sabe, estudou sozinho, para fazer alguns concursos. Nunca fez demonstrações antes da faculdade e assevera que os professores davam as fórmulas prontas, para serem utilizadas nos exercícios.

Sua matriz de erros mostra dificuldades de linguagem, conforme já se observou nas análises anteriores de cada tipo de erro.

$$\sigma = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.5.12. A aluna Ômega

Ômega tem 19 anos, cursou o 1º grau em escolas públicas do interior e da capital e o 2º grau em escolas públicas da capital. Ingressou no curso de Matemática no 2º semestre de 1986 e está cursando as disciplinas do 5º semestre.

Desde o início do trabalho, fiquei com a impressão de que Ômega não queria participar da pesquisa, que tinha aceito o convite mas arrependera-se depois. Houve um problema com o gravador e não pude atendê-la na data marcada para a primeira entrevista; quando ela veio, na semana seguinte, parecia estar fazendo o teste de má vontade, como se quisesse livrar-se logo do compromisso. Depois que fez a 1ª questão, relaxou um pouco e ficou mais comunicativa.

Mesmo assim, pouco deixou entrever de suas dificuldades, só falava sobre os elementos da figura ou sobre as suposições que fazia. O que, porém, ficou bem claro, porque foi algo comentado por ela algumas vezes, foi a sua dificuldade em enxergar os elementos (triângulos, paralelogramos) separadamente. Na 1ª questão, por exemplo, só trabalhou com os triângulos Δ EDK e Δ CBK e sua demonstração estava errada.

Quando lhe perguntei, na segunda entrevista, a razão pela qual ela não usara os triângulos Δ ADC e Δ ABE, ela disse:

> "Na hora eu não consegui enxergar isto como um triângulo e outro triângulo(...) o meu problema é este, eu tenho que desenhar ao lado os dois separados, na hora eu não enxergo como dois triângulos."

Na 2ª questão, ao se referir aos ângulos $A\hat{D}M$ e $B\hat{E}M$ na demonstração escrita, escreveu: "... e os $\sphericalangle$ $\hat{D}$ e E são $\sphericalangle$ retos (únicos do triângulo)".

Não entendi o significado da palavra "únicos", pois é evidente que um triângulo só pode ter um ângulo reto. Na entrevista, ela me esclareceu que, com isto, queria dizer que, tendo cada triângulo somente um ângulo reto, ela sabia que eles eram correspondentes, porque não haveria outro ângulo reto para confundí-la.

Na 3ª questão, ela novamente se confundiu com a disposição dos paralelogramos e teve dificuldades em enxergar os ângulos que seriam correspondentes nos triângulos vistos. Sua demonstração ficou correta, e eu não entendia a razão pela qual, depois de ter provado a congruência dos triângulos por LLL, ela precisava falar nos ângulos $B\hat{K}M$ e $A\hat{K}J$. Na segunda entrevista, ela novamente mostrou o problema, quando me explicou: "Por que eu posso dizer que o $\hat{A}$ é igual ao $\hat{B}$? Não podia ser o $\hat{B}$ igual ao $\hat{J}$?" ($A\hat{J}K$).

Mais adiante, acrescentou que usara os ângulos para se localizar, vendo quais os lados que formavam cada um dos ângulos. Ômega diz que viu muito superficialmente Geometria, porque trocou de colégio várias vezes e os currículos de Matemática não coincidiam. Quando ia se iniciar o estudo de Geometria em um colégio, trocava para outro onde a Geometria já tinha sido ensinada.

Também não estudou Geometria Espacial. Quanto às demonstrações, diz que nunca as fez no 1º e 2º graus. Pareceu-me que não quis falar sobre o 1º e 2º graus, pois disse não lembrar como tinham sido as aulas de Matemática e não fez outras observações.

Só destaco, ainda, uma observação feita no final da 2ª demonstração, porque me parece interessante para entender como a aluna vê a atividade de demonstrar um teorema. Ela escreveu a 2ª demonstração sem cuidado, apenas "jogando" as afirmativas, sem justificá-las; no final, perguntou-me: "Tem que colocar mais alguma coisa para explicar?". Eu respondi que ela é que resolveria se o que escrevera já era suficiente. Ela, então, retrucou: "É que a senhora está olhando, não é, estou fazendo aqui...Quando a gente vai fazer prova, tem que explicar um monte de coisas".

Portanto, não compreende a necessidade de justificar os passos de um raciocínio. Para ela, justificar os passos é algo que se faz em provas, porque o professor exige.

Sua matriz de erros indica a predominância de problemas visuais, como já se observou nos comentários.

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. A ANÁLISE FINAL: AS CONSIDERAÇÕES SOBRE OS ERROS

4.1. Introdução

Ao me propor a analisar os erros em demonstrações de teoremas de Geometria, li várias obras e estudei vários conteúdos de alguma forma relacionados com o assunto.

Como se segurasse na mão o tema da pesquisa, joguei uma rede em um mar de teorias, de forma a abranger todos os aspectos possíveis do tema em questão.

Procurei entender as mudanças educacionais e a reforma da Matemática Moderna, revisei os conceitos de Lógica relacionados com deduções, as correntes filosóficas da Matemática e as pesquisas sobre análise de erros.

Concluída a fase de aplicação dos instrumentos de pesquisa, tive em mãos um conjunto de dados para cotejar com o que estudara. Detectei os erros; classifiquei-os e exemplifiquei-os; transcrevi as justificativas dos alunos, suas observações sobre o ensino de Matemática recebido, sua visão dos conteúdos de Geometria aprendidos antes do ingresso no curso de Matemática, suas concepções a respeito de demonstração e suas opiniões quanto à necessidade de demonstrar um teorema.

Chegou, então, o momento de puxar a rede, trazendo juntas a teoria e a prática: o que li, pensei, estudei, os erros que detectei e as observações que ouvi.

Houve, então, a necessidade de selecionar entre todo este material aqueles elementos que permitiam uma análise final dos erros, na qual procurei descobrir as causas mais profundas, aquelas que estão imbricadas no processo de ensino-aprendizagem*.

Como o tema da pesquisa é o erro, é sobre ele que recai a atenção, de forma a propiciar o entendimento das causas subjacentes a cada tipo de erro detectado.

* Estou consciente de que existem causas profundas de caráter psicológico, social, político, etc., mas estas não são consideradas, porque estão além dos limites da pesquisa.

4.2. As Causas dos Erros do Tipo I

Os erros do tipo I são relacionados ao emprego da linguagem matemática e se caracterizam pelo mau uso dos símbolos e convenções da linguagem escrita, pelo uso inadequado das palavras que designam os entes matemáticos, pela interferência de significados diversos, pela falta de clareza e de precisão.

Bell (1976) acredita que o ato de representar uma situação por símbolos ou diagramas está ligado à abstração, porém os símbolos utilizados em Geometria são um pouco diferentes dos utilizados na aritmética. Quando se escreve "1", é claro que este símbolo está relacionado ao conceito de número um. Porém, quando se desenha um triângulo isósceles, o desenho pode ser considerado como um símbolo do ente "triângulo" ou como o próprio objeto em consideração?

Segundo Bell, o desenho "é, de fato, a representação de um triângulo isósceles genérico, mas, se cuidadosamente desenhado, pode ser medido ou dobrado para verificar a igualdade dos ângulos ou lados; assim, é uma representação mais completa do que um símbolo. Pode ser chamado um ícone". (BELL, 1976, p. 3.11)

A linguagem matemática inclui o vocabulário que indica os entes, os símbolos que representam estes entes e as operações entre eles, os significados atribuídos às sentenças matemáticas e as convenções que são utilizadas para escrever um texto matemático ou para representar relações em uma figura.

Ghosh & Giri (1987) relatam uma pesquisa feita na Índia para entender os erros relacionados à linguagem matemática.

Eles classificaram as dificuldades linguísticas em doze categorias, algumas das quais não interessam a esta pesquisa por se relacionarem ao fato de ensinar Matemática na segunda língua do aluno (no caso, ensinar em inglês para alunos que falavam bengali). Em comum com sua pesquisa, detectei a interferência de significados matemáticos e não matemáticos diversos, o uso impróprio dos símbolos e a falta de clareza e precisão.

Os autores acreditam que, na aquisição da linguagem matemática, estão envolvidos vários fatores e cada um deles contribui para a ocorrência dos erros: o professor, os alunos, os livros, os métodos e técnicas utilizados.

Penso que, na realidade brasileira, os livros-texto têm grande influência nos problemas de simbolização. D'Ambrosio (1987) relata que, entre os professores por ela entrevistados, houve uma concordância geral quanto ao fato de que os livros-texto foram os determinantes da elaboração dos novos currículos de Matemática. O sistema educacional, na década de sessenta, era altamente centralizado e os livros-texto adotados em escolas públicas eram aprovados pelas Secretarias de Educação. As editoras pressionavam os autores no sentido de colocarem conteúdos de Matemática Moderna para que os livros fossem mais vendidos.

As obras tradicionais recebiam uma nova "roupagem". Os professores, na maior parte das vezem sem oportunidade de adequarem-se às mudanças, aprendiam os conceitos e simbologias através do livro-texto que adotavam, mas conservavam muitos termos a que estavam acostumados.

Assim, as diferenças entre a nova linguagem e a antiga eram transmitidas aos alunos, em todos os níveis, por professores e pelos livros-textos, e estes alunos, quando formados, iriam repetir o que receberam, acrescido de mais algumas palavras ou símbolos novos.

A aluna Lambda, por exemplo, que não teve Matemática Moderna no ginásio, sente dificuldade em aceitar a expressão "triângulos congruentes"; na época em que estudou, dizia-se "triângulos iguais" e ela hoje comenta: "Não consegui assimilar que congruente é igual".

Além disso, os livros propunham exercícios padronizados e os professores seguiam aqueles modelos. D'Ambrosio (1987)cita que:

> "Muito freqüentemente, nos livros texto para o 1º grau, solicitavam às crianças fazer exatamente o que estava feito no problema modelo. Isto, sem dúvida, limita o significado da compreensão e do pensamento e desenvolve, ao invés, habilidades de imitação. Esta prática leva as crianças a acreditarem que Matemática é, exclusivamente, manipulação de símbolos."
> (D'AMBRÓSIO, 1987, p. 192)

O aluno Alfa recorda-se das aulas do 1º e 2º graus:

> "As aulas eram boas, mas seguiam muito o livro, faziam exercícios pelos modelos, modelo um, modelo dois, nunca misturavam, e eu sempre passava a perna na professora porque ela seguia o livro."

Parece-me também que, apesar das excessões, como é o caso de Alfa, que contesta os professores, resolvendo os exercícios por um modelo diferente, os alunos acreditam demais na autoridade do professor e do livro didático, porque eles rece bem as coisas prontas.

Deveria ser seguida a sugestão de Bruner:

> "Nós ensinamos um conteúdo não para produzir pequenas bibliotecas ambulantes sobre aquele assunto, mas para levar o estudante a pensar matematicamente por si mesmo,(...) a tomar parte no processo de aquisição do conhecimento. Conhecer é um processo, não um produto."
> (BRUNER, apud BELL, 1976, p.1.4)

Marlene Grillo (1979) comenta que:

> "Em muitos casos, os professores confundem processo com produto e,embora desejem ensinar o aluno a pensar, o que realmente ocorre é que ensinam o produto do pensamento de alguém, ensinam ao aluno o que pensar."
> (GRILLO, 1979, p. 105)

Não se acostumando a criticar o conhecimento recebido, o aluno, as vezes, adquire uma idéia errada e aquilo passa a ter a mesma autoridade que ele colocou no professor ou no livro; ele não pára, não reflete sobre a existência de "ruídos" na comunicação e, mesmo relendo a definição correta em um livro, conserva a anterior, pois não pensou sobre ela,recebeu-a pronta.

Portanto, como causas dos erros relacionados com a linguagem matemática, aponto os problemas decorrentes da adoção precipitada de novos termos e símbolos, quando da reforma da Matemática Moderna, e o fato de o aluno, muitas vezes,receber os conteúdos prontos e não questionar as informações recebidas com vistas à elaboração do seu próprio conceito.

4.3. As Causas dos Erros do Tipo II

Os erros do tipo II são relacionados ao desenho e se caracterizam pela introdução de informações erradas, provenientes da disposição dos elementos na figura e das marcações ali realizadas, bem como pela inserção de informações corretas,mas apenas visualizadas.

Revendo as observações quanto aos erros relacionados ao desenho, destacam-se as percepções (certas ou erradas) que alguns alunos têm sobre uma certa relação entre os elementos da figura, percepções estas que, algumas vezes, são modificadas com o auxílio de medições, construções ou argumentações.

A aluna Lambda, ao declarar que viu "a olho nú" a conclusão a que deveria chegar, mostrou ter uma percepção imediata; porém só isto não basta e a aluna evidenciou,pelo restante do trabalho, que não sabe justificar o que foi pressentido. Ela <u>intuiu</u> a verdade da proposição dada, mas não a sua prova.

Na construção do saber matemático, antes de demonstrar uma proposição, o matemático percebe-a intuitivamente. Mesmo que, de início, ele não tenha idéia de como demonstrá-la, sua mente vai aos poucos rearranjando detalhes, em um padrão coerente. Como diz Goodman:

> "...a intuição matemática é um caso especial da habilidade geral do homem em reconhecer padrões ou,mais especificamente, de sintetizar estruturas complexas a partir de sugestões dispersas." (GOODMAN, 1979, p. 547)

Kapadia (1979), em um breve artigo sobre intuição,usa como sinônimos as palavras "intuition" e "insight". No Webster's, entre outros significados, intuição é definida como o ato ou processo de ir direto ao conhecimento ou à certeza, sem raciocinar ou inferir. No mesmo dicionário, "insight",entre outros significados, é conceituado como o ato ou fato de aprender a natureza interna das coisas ou de ver intuitivamente. Nestas acepções, os dois termos parecem realmente sinônimos.

Em textos em língua portuguesa, a palavra "insight" costuma aparecer no original. O dicionário Aurélio define da seguinte forma a palavra "intuição": "1. Ato de ver, perceber, discernir; percepção clara ou imediata; discernimento. 2. Ato ou capacidade de pressentir, pressentimento".

Vários autores falam sobre intuição e defendem o uso desta capacidade em oposição ao formalismo. Davis e Hersh relacionam vários significados para "intuitivo": é o oposto de rigoroso; é aquilo que é deficiente em rigor; que é visual; que é plausível ou convincente na ausência de demonstração; que é incompleto; que se apoia sobre modelos físicos; que é unificado ou integrado em oposição a detalhado ou analítico. (DAVIS & HERSH, 1985)

Bruner diz que "a intuição implica o ato de captar o sentido, o alcance ou a estrutura de um problema ou situação,sem dependência explícita do aparato analítico do ofício de quem o faz". (BRUNER, 1968, p. 55)

O mesmo autor distingue o pensamento intuitivo do analítico. O pensamento intuitivo é menos rigoroso em relação às demonstrações, é mais visual ou icônico, direcionado no sentido de captar o todo; o pensamento analítico se caracteriza por apresentar uma seqüência de passos, que podem ser relatados a outra pessoa, porque se processa com consciência das informações e operações utilizadas.

Portanto, para iniciar uma demonstração,é necessário que o aluno capte o todo, tenha um "insight" do problema, para depois analisar cada passo da dedução. Mas os alunos nem sempre têm a possibilidade de fazer isto, porque não lhes foram oportunizadas ocasiões de trabalhar com os conceitos matemáticos em níveis concretos, com vistas a sintetizar as informações em um padrão coerente, pensando intuitiva e analiticamente.

Revisando as informações dos alunos sobre o ensino de Geometria no 1º e 2º graus, vejo que a maioria (oito alunos) teve apenas algumas noções de Geometria no 1º grau, dadas em final de ano, de uma forma rápida e superficial. Só dois alunos consideraram ter estudado Geometria, mas, mesmo assim, um deles declarou que teve "puxado para o Desenho"; um aluno não soube informar.

Quanto à Geometria Espacial, no 2º grau, a situação não é muito melhor, pois só quatro alunos declararam ter estudado estes conteúdos; dois informaram ter visto muito pouco e cinco alunos não chegaram a trabalhar com Geometria Espacial. Os que estudaram, em geral, só recordavam ter recebido fórmulas prontas.

E por que terá sido a Geometria apresentada de forma tão rápida, superficial, sem o apelo à intuição e sem sequer ter sido realizada a dedução de fórmulas?

Um dos motivos foi o já apontado por Rodrigues (1978) e

D'Ambrósio (1987), entre outros: a introdução da Matemática Moderna no Brasil, trazendo a idéia de algebrização da Geometria, encontrou professores despreparados para o seu ensino. Desta forma, o professor preferia evitar os conteúdos ou deixava-os para o final do ano, onde os apresentava como informações soltas, que o aluno deveria, em geral, memorizar através de associações.

Por exemplo, ao desenhar um triângulo no quadro-negro e "recitar" os casos de congruência, o professor está, no máximo, levando o aluno a fazer associações do tipo "congruência de triângulos-lados e ângulos congruentes".

O aluno Sigma, por exemplo, mostrou claramente este tipo de associação quando, na 2ª questão, concluiu que os triângulos eram congruentes pelo caso "lado, lado, ângulo", sem nenhum cuidado em adequar os elementos que tinha à hipótese de um determinado caso de congruência.

Assim, no ensino de 1º e 2º graus, falta, em geral, um trabalho de construção do conhecimento, de passagem pelo estágio ativo, onde o aluno manuseia e age sobre os elementos e pelo estágio icônico, onde a organização perceptual se dá em torno de imagens.

Todos os alunos que, por exemplo, simplesmente olharam para a figura e "enxergaram" as respectivas congruências de lados e ângulos mostraram ter ficado apenas no estágio icônico, não tendo examinado as possibilidades de alternativas, não tendo trabalhado os conceitos anteriormente para chegar, ao final, no estágio simbólico, pelos menos nesta disciplina.

Bruner (1966) considera que, quando o aluno está começando a aprendizagem de um corpo de conhecimentos, desde o seu início,(como é o caso da Geometria Plana), é tarefa do professor (ou do sistema educacional) planejar seqüências de aprendizagem que otimizem o desenvolvimento equilibrado dos três sistemas de representação daquele conhecimento (ativo, icônico e simbólico).

Ainda segundo Bruner (1968), se a estratégia para o ensino de Geometria nos primeiros anos fosse no sentido de apresentá-la de forma intuitiva, seria muito mais fácil para o aluno entender mais adiante o significado dos teoremas.

A Geometria, nos currículos de 1º e 2º graus, não está lá "por acidente", apenas como uma obrigação de que o professor tem que se livrar. Aliás, a este respeito, inúmeros autores destacam sua importância no desenvolvimento do raciocínio lógico.

Novamente citando Rodrigues, a Geometria, especialmente, permite "...a passagem da intuição e de dados concretos e experimentais para os processos de abstração e generalização". (RODRIGUES, 1978, p.18)

Bell (1976) considera que se podem distinguir três tipos de abstração em Matemática. O primeiro tipo é o reconhecimento de um conceito, quando este é identificado em nova situação. O segundo tipo é a extensão de um conceito e ocorre quando um novo significado é adotado para um conceito que inclui o antigo como um caso especial. O terceito tipo é a criação de um conceito, ocorrendo quando se passa da consideração de um único elemento para a criação de uma nova classe à qual o elemento em questão pertence.

Davis e Hersh (1985) consideram que generalização e abstração são freqüentemente usadas como equivalentes. Apresentam o conceito de abstração com os significados de idealização (quando, por exemplo, a partir de uma reta, traçada com uma régua, abstrai-se a noção de reta) e de extração (quando, por exemplo, uma criança, a partir de objetos que pode contar, extrai a noção de número), enquanto que a generalização pode ser compreendida como um processo em que uma proposição que vale para um caso particular é afirmada para um caso mais geral, que engloba aquele.

De qualquer forma, mesmo que haja certas diferenças de conceitos, estas atividades devem ser desenvolvidas pelo aluno, devendo os professores planejar estratégias com este objetivo.

Bell (1976) cita várias estratégias para chegar à abstração, como por exemplo descrever, classificar, representar, variar a representação do elemento em questão. Para a generalização, o mesmo autor cita estratégias relevantes como, por exemplo, reconhecer relações, fazer conjeturas, gerar exemplos para testar conjeturas e organizar sistematicamente os dados.

A aluna Gama, por exemplo, mostrou que tenta utilizar estas estratégias ao fazer um comentário referente a uma das disciplinas do curso:

> "Em (X) eu não consigo captar muito bem, porque falta exemplos daquilo que está sendo demonstrado. Eu substituo aqueles 'negocinhos' que ele dá por números para ver como é que ele

> faz, porque ele está falando que isto é aquilo que ele está demonstrando."

Portanto, não defendo a apresentação da Geometria Plana apenas através do apelo à intuição, ao visual. Também não concordo com o abandono das capacidades de abstração, generalização e dedução. Proponho, antes, uma mistura bem dosada entre estas tendências. Como diz Bruner,

> "Só um pedagogo romântico poderia dizer que o principal objetivo da instrução é preservar o talento intuitivo da criança. E só um tolo diria que o principal objetivo é levar o aluno para além de qualquer acesso à intuição, é fazer dele uma precisa máquina analítica." (BRUNER, 1971, p. 83)

Morris Kline considera que a compreensão se consegue intuitivamente e a apresentação lógica é o suplemento da aprendizagem. Ele cita uma curiosa frase, proferida por Max Shiffer: "Jamais ponha carroças lógicas adiante de cavalos heurísticos." (Apud KLINE, 1976, p. 193)

Considerando,então,os erros relacionados à figura,acredito que as causas deste tipo de erro estão ligadas ao abandono da Geometria no 1º e 2º graus, o que impede o aluno de fazer a passagem pelo concreto e de adquirir um corpo de conhecimentos que sirva como base para a compreensão intuitiva e a formalização subseqüente. Mesmo quando são apresentados conteúdos de Geometria, em geral não há um planejamento de estratégias que desenvolvam a abstração e a generalização.

4.4. As Causas dos Erros do Tipo III

Os erros do tipo III se caracterizam pela utilização de conceitos matemáticos errados.

Atividades tais como a observação (de figuras geométricas, por exemplo, para descobrir propriedades), a classificação (de triângulos, por exemplo, para formar os conceitos de isósceles, equilátero e escaleno), a comparação (de definições diferentes de um mesmo ente, por exemplo, para descobrir erros em uma delas),a crítica (de uma propriedade apresentada, para decidir se é verdadeira ou falsa) permitem ao aluno engajar-se no processo de ensino-aprendizagem, construindo o seu conhecimento, ao invés de decorar frases soltas facilmente esquecidas ou embaralhadas.

Quanto às definições erradas de triângulos isósceles, notei pelas observações dos alunos (Alfa, Gama, Lambda),que eles estavam acostumados a um tipo de representação do triângulo isósceles, aquela em que este é desenhado com a base menor do que cada um dos lados congruentes. Realmente, esta é uma tendência do professor, pois quando vai chamar a atenção para alguma propriedade do triângulo isósceles, quer deixar claro o tipo de triângulo considerado e o distingue do equilátero desenhando a base menor.

Se, porém, o aluno tivesse adquirido o conceito de triângulo isósceles a partir de um trabalho próprio sobre vários exemplos, se tivesse feito conjeturas sobre a propriedade em questão em vários tipos de triângulos, ele não teria, talvez, "enquistado" esta idéia de que o isósceles deve ter a base menor que cada um dos lados congruentes.

Em relação à definição errada de ponto médio,apresentada por Delta como sendo o ponto comum a dois segmentos adjacentes, acredito que possa ter havido a influência da definição da relação de "estar entre". Diz-se que um ponto B está entre os pontos A e C se e só se A, B e C são colineares e AB+BC=AC; diz-se que um ponto B é ponto médio de um segmento $\overline{AC}$ se e só se B está entre A e C e AB=BC.

Quando simplesmente são apresentadas as definições de "estar entre" e de "ponto médio", sem dar um tempo ao aluno para compará-las, criticá-las e testá-las com vistas ao conhecimento exato do que significa uma e outra expressão, este aluno poderá confundi-las posteriormente.

Quanto ao erro de Lambda, considerando que uma mediana de um triângulo é o segmento que une dois pontos médios, ao invés de ser o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto, acredito ter a aluna simplesmente decorado a definição de mediana. No momento em que precisou, só lembrou a expressão "extremidade do segmento no ponto médio de um dos lados" e estendeu-a, englobando dois pontos médios de cada vez.

Quando analisei as causas dos erros do tipo II, já salientei que alguns professores ensinam o produto acabado e não desenvolvem estratégias para que o aluno forme os seus próprios conceitos e descubra as propriedades. Esta me parece ser a causa dos erros relacionados com os conceitos errados.

4.5. As Causas dos Erros dos Tipos IV, V e VI

Os erros do tipo IV são relacionados a conclusões inaceitáveis. Os erros do tipo V são relacionados a não utilização de teoremas já existentes, apesar de o aluno ter todos os elementos da hipótese. Os erros do tipo VI surgem quando o aluno usa a tese como um dos elementos da hipótese. Parece-me que as causas destes três tipos de erro são as mesmas, pois eles relacionam-se diretamente com o processo de dedução.

Já foi visto, por exemplo, que o aluno Sigma rebateu um triângulo sobre o outro (mentalmente) e disse ter "visto" que os ângulos eram congruentes. Delta concluiu congruência de lados nos triângulos da 1ª questão, porque "construiu" uma bissetriz do ângulo $\hat{A}$ que passa por K. Épsilon, na 2ª questão, mesmo tendo todos os elementos para concluir a congruência dos triângulos pelo caso da congruência dos triângulos retângulos, insistiu erradamente em concluí-la por LAAo. Gama, na 2ª questão, concluiu congruência a partir da construção de uma altura $\overline{CM}$, porque usou o fato do triângulo ABC ser isósceles.

Todos estes são exemplos de que não houve a compreensão da demonstração como uma seqüência de passos logicamente justificáveis.

É claro que os alunos poderiam (e deveriam) ter feito conjeturas a respeito dos elementos de que dispunham. É exatamente desta forma que se processa o ir-e-vir entre o pensamento intuitivo e o analítico, na procura da solução do problema. No entanto, se o aluno não adquiriu esta habilidade, insiste em uma determinada afirmativa e passa a aceitá-la como verdadeira, sem se preocupar em testar a conjetura.

Bell (1976) revisou algumas pesquisas sobre erros de lógica nas demonstrações de teoremas e cita alguns deles: confundir a verdade da conclusão com a validade do raciocínio; omitir uma premissa ou assumir outra não existente; confundir o significado de uma premissa.

As conclusões de uma das pesquisas citadas por Bell vem ao encontro dos resultados aqui encontrados. Reproduzindo o trecho de Bell:

> "Wason (1968) mostra como mesmo sujeitos inteligentes tendem a aderir com tenacidade às suas hipóteses, se encontram evidências que as confirmem, e falham em considerar hipóteses alternativas." (BELL, 1979, p.6.4)

É o que acontece com os alunos que confirmam visualmente alguma congruência e não abandonam esta afirmativa,mesmo não encontrando justificativas provenientes da hipótese dada.

Porém, de onde terá se originado esta atitude? Como são demonstrados os teoremas no 1º e 2º graus? Que atividades são planejadas para que o aluno inicie este aprendizado?

Voltando às informações dadas pelos alunos, noto que eles não estão seguros de terem realizado demonstrações no 1º ou 2º graus. Em relação ao 1º grau, foi quase unânime a resposta negativa, porém em relação ao 2º grau, dois alunos declararam, com convicção, terem feito demonstrações, três consideraram terem visto alguma coisa e seis não se lembraram de terem realizado esta atividade.

Aliás, a expressão empregada por eles, "ver uma demonstração", já indica como o assunto é apresentado. Realmente, o aluno vê o professor escrever no quadro-negro uma seqüência de frases e símbolos que representa a cadeia de raciocínio do professor, ou do autor do livro-texto no qual o professor se baseou.

Kline refere-se às queixas dos professores quanto à preguiça mental dos alunos e critica duramente os primeiros:

> "Outra razão importante da popularidade da abordagem dedutiva de propriedades está em ser mais fácil para apresentar. O corpo todo do material é traçado numa seqüência clara e nítida e tudo o que o professor tem a fazer é repeti-la. (...) Mas os professores que apresentam a formulação lógica porquanto ela evita tais dificuldades como ensinar descobertas (...) são mais dignos de censura que os estudantes que desejam evitar a idéia de pensar e preferem repetir mecanicamente os processos aprendidos." (KLINE, 1976, p. 172)

Para desenvolver a habilidade de demonstrar teoremas, Bell (1976) sugere várias estratégias de ensino:

a) identificar dados e conclusões;

b) conectar dados e conclusões logicamente;

c) fazer exaustivas verificações empíricas da propriedade proposta;

d) construir classes que satisfaçam uma parte do problema;

e) expor conjeturas para discutir com os colegas e refutá-las;

f) encaixar os dados no conhecimento já existente;

g) reconhecer arbitrariedades dos termos não definidos e das suposições.

Vários destes procedimentos fazem lembrar o trabalho de Polya, que propôs estratégias para resolução de problemas em Matemática. Este autor considera que ter um problema significa "buscar conscientemente alguma ação apropriada para conseguir um propósito claramente concebido mas não imediatamente alcançável". (POLYA, 1975, p. 4)

No mesmo artigo, Polya estabelece a distinção entre dois tipos de problema que ele chama de "problema de encontrar" e "problema de provar". O objetivo de um problema de encontrar é descobrir a incógnita do mesmo; o objetivo do problema de provar é decidir se certa proposição é verdadeira ou falsa, prová-la ou refutá-la.

Desta forma, demonstrar um teorema é um problema e para a sua solução podem-se destacar as quatro fases indicadas por Polya: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. Para cada fase, o autor sugere estratégias de trabalho. (POLYA, 1978)

Parece-me, portanto, que há algo mais relacionado aos erros referidos. Já foi relatado que a maior parte dos alunos pesquisados não fez demonstrações de teoremas no 1º e/ou 2º graus e que, portanto, não desenvolveu esta habilidade a partir de estratégias de ensino planejadas pelo professor. Mas o que acontece quando o aluno entra no curso de Matemática? Por acaso, procura-se saber se ele está apto a fazer demonstrações?

Na maior parte das vezes, a resposta é não. Em algumas disciplinas, de início se lhes informa que será feito um estu do axiomático e "joga-se" sobre eles um corpo de definições e axiomas, supondo que eles irão compreender os teoremas demonstrados.

O autoritarismo da proposta é tão grande que, raras vezes, algum aluno se sente encorajado a perguntar "Por quê?".Se o fizer, certamente não receberá resposta, ou, talvez sejam utilizados os costumeiros chavões como "porque esta é a maneira de estudar Matemática" ou "porque assim se disciplina o pensamento, se ensina a pensar".

Mas desde quando se produz Matemática desta maneira, sem contato com o real, como um jogo em que só se conhecem as regras, mas não se sabe para que jogar? Além disso, o que é "ensinar a pensar"? Por acaso o aluno não pensou até aquele momento? Por que a Matemática seria a ciência privilegiada, proprietária do pensamento? Não se pensa quando se estuda qualquer outra ciência, humana ou exata?

Por uma espécie de doutrinação sutil, costuma-se acreditar que a Matemática só é Matemática quando as verdades são demonstradas. "Torce-se o nariz" para a Matemática Aplicada, como se existisse uma oposição entre a Matemática Pura e a Aplicada, como se uma pudesse existir sem a outra, e privilegia-se o rigor e o formalismo em detrimento da intuição.

De onde vêm estas idéias? Novamente os pressupostos que orientam a Matemática Moderna tem sua parte de responsabilidade. Davis e Hersh asseveram que:

> "O estilo formalista penetrou gradualmente o ensino da Matemática em níveis mais elementares e finalmente, sob o nome de "matemática moderna" invadiu até o jardim de infância."

(DAVIS & HERSH, 1985, p. 385)

Segundo os mesmos autores, "formalização é o processo de adaptar a matemática ao processamento mecânico" (DAVIS & HERSH 1985, p. 167) e as linguagens formais foram introduzidas no final do século passado, com o objetivo de tornar as demonstrações mais rigorosas.

Muitos autores matemáticos concordam com que a noção de rigor mudou de época para época, pois argumentos que pareciam rigorosos há alguns séculos hoje são considerados inadequados.

A Matemática, por volta de 1800, apresentava um crescimento prodigioso, mas com alicerces pouco firmes. O trabalho de Cauchy, introduzindo o rigor no estudo das funções elementares e no estudo das séries, aplacou os escrúpulos de seus contemporâneos e antecessores. (REVUZ, 1967). Mas o que é, afinal, um raciocínio rigoroso? É aquele que explicita todas as suas justificações, que não aceita resultados parciais sem demonstração.

Goodman (1979) argumenta que a mudança diz respeito ao padrão de rigorismo de uma demonstração, pois um argumento rigoroso é sempre aquele que é suficiente para estabelecer a verdade de suas conclusões. Thom cita o ponto de vista formal: "Em um sistema formal S, uma proposição P é verdadeira se pode ser deduzida dos axiomas de S através de um número finito de passos permitidos no interior do sistema S" (THOM, 1971, p. 696); no entanto, assevera que "não há uma definição rigorosa de rigor" (THOM, 1971, p. 697), afirmando que uma prova é rigorosa se ganha a aceitação dos leitores adequadamente educados e preparados para compreendê-la.

Kline também critica veementemente o rigor exagerado, especialmente na Geometria Euclideana, que é dedutiva mas não rigorosa. Acrescenta ele, mais adiante, que:

> "Alguns professores, conhecendo as provas rigorosas, sentem-se inquietos com a apresentação tão somente de um argumento convincente que eles, pelo menos, sabem ser incompleto. Mas não é o professor que deve ser satisfeito, é o estudante." (KLINE, 1976, p. 171)

Moles (1981) acha que a preocupação com o rigor faz o matemático achar cada vez mais evidentes os fatos que aceitava antes e exigir, cada vez demonstrações mais rigorosas.

É como se sente a aluna Zeta, referindo-se à sua maneira de demonstrar teoremas:

> "Agora eu complico tudo. Logo que eu entrei na faculdade, para mim era tudo barbada, eu achava tudo fácil. Agora não, faço um bicho de sete cabeças de uma coisinha banal. Quando eu entrei em (X), tinha umas coisas que estavam na cara eu me sentia como se tivesse que desaprender para fazer. Aquilo lá tu não pode, aquilo tu ainda não aprendeu, não pode colocar como justificativa. Agora, num teorema, eu sei uma coisa e penso: 'Será que isto na faculdade eu já aprendi, já posso usar como definição?"

O aluno Kapa também relatou a mesma situação:

> "As próprias demonstrações são muito compartimentadas, porque cada ramo da Matemática parte de determinados pressupostos e partindo daqueles, tu tens que usar aquilo e então outros pressupostos não interessam. Por exemplo, eu estou demonstrando um teorema, de repente ponho uma coisa ali e a professora chega e diz: 'não, isto é verdadeiro, mas tu não podes usar porque nós estamos noutra teoria'. Tá, daí tem que apagar e procurar algo naquela teoria."

Tristemente, eles espelham uma maneira de enxergar a Matemática: cada disciplina em sua "torre de marfim", compartimentando o conhecimento como se houvesse gavetas mentais, onde a cada disciplina o aluno fosse buscar uma maneira diferente de pensar.

O aluno Alfa, por exemplo, mostrou que não formou um conceito de demonstração e que, para ele, há esta separação entre as disciplinas matemáticas; em certo momento do teste, perguntou qual o tipo de demonstração que deveria fazer, o que utiliza na disciplina (X) ou o que utiliza na disciplina (Y) ou, ainda, o que utiliza na disciplina (Z).

Assim, parece que os erros relacionados com o processo de demonstração em si têm como causas a não utilização de estratégias, no 1º e 2º graus, que capacitem o aluno a demonstrar teoremas e a apresentação rigorosa e formalizada dos conteúdos no curso de Matemática, impedindo o aluno, em qualquer um dos níveis, de fazer o verdadeiro trabalho matemático, que persegue a verdade através de conjeturas, usando a intuição e a imaginação, para, somente no final, formalizar os resultados através de uma demonstração.

O depoimento dos alunos são uma crítica velada a uma determinada maneira de ensinar Matemática, a um tipo de demonstração exigida, que não dá lugar à intuição, à criatividade, à utilização de conhecimentos anteriores, cerceando o pensamento do aluno.

Ao mesmo tempo, as reclamações dos alunos despertam novas idéias, abrindo possibilidades para a adoção de um outro tipo de ensino, baseado em outra filosofia. Neste sentido, o Falibilismo daria o suporte, através dos pressupostos de que a Matemática é falível e corrigível, de que cresce por meio de críticas e correções e de que os produtos do trabalho matemático, inclusive as demonstrações de teoremas, não podem ser considerados acabados e perfeitos. O Falibilismo aceita a natureza relativa de uma demonstração. Da mesma forma, a Educação Matemática baseada nesta filosofia aceita que as maneiras de justificar uma determinada conclusão vão desde a verificação intuitiva até a prova rigorosa, obedecendo ao estágio de desenvolvimento cognitivo do aluno.

Uma importante contribuição do Falibilismo, se aplicado à Educação Matemática, seria a maneira de considerar o erro. Aceitando que a Matemática é falível e corrigível, o erro seria tratado de uma forma diferente, pois o aluno poderia utilizá-lo como instrumento para a realização de novas descobertas. Ao resolver um problema, o aluno faz várias conjeturas e, ao testá-las, descobre novos conceitos e propriedades sobre os conteúdos em questão. Os erros, deste ponto de vista, podem ser compreendidos como "trampolins para a investigação", na expressão de Borasi (1988) e este potencial educacional pode ser utilizado em qualquer nível de ensino.

Outra contribuição importante do Falibilismo no ensino da Matemática é sua ênfase ao estudo das aplicações da Matemática às diversas áreas do conhecimento humano. Em decorrência disso, o ensino deve se basear nas necessidades de uma determinada época e nos problemas que exigem solução. A motivação proporcionada por esta perspectiva é muito maior do que a de "estudar para aprender a pensar", como alguns professores de Matemática ainda insistem em enfatizar.

Com base no Falibilismo, poder-se-ia fazer um trabalho matemático que não fosse dissociado da realidade, mas que tivesse suas origens nos problemas da realidade e a ela voltasse para propor soluções, pois, sendo a Matemática uma atividade humana, não pode ser vista isoladamente, sem estar relacionada à História, à Antropologia, à Sociologia, à Política e às demais ciências de uma determinada época.

4.6. As Causas dos Erros do Tipo VII

Os erros do tipo VII são os lapsos, orais, de escrita ou de leitura. As causas destes erros são da competência dos psicólogos. A psicanálise se ocupa dos "lapsus linguae" e dos "lapsus calamii", mas cada ocorrência é analisada separadamente. Já arrisquei alguns palpites sobre os lapsos feitos pelos alunos desta pesquisa e detenho-me neste ponto, pois não tenho condições para analisá-los.

Acredito, porém, que é importante levar em conta estes erros, quando se vai avaliar uma prova, pois, como já foi referido nas citações dos lapsos de leitura dos alunos Sigma e Lambda, pode-se invalidar uma questão simplesmente por um lapso que o aluno cometeu, cuja causa não está relacionada ao conhecimento que ele tem do assunto ou à sua argumentação.
Assim, cabe uma alerta no sentido de verificar se um determinado erro não é apenas um lapso, que pode ser desconsiderado na avaliação final.

4.7. As Causas dos Erros do Tipo VIII

Os erros do tipo VIII são os erros em língua portuguesa, relacionados com ortografia, pontuação, concordância nominal e verbal. Não me compete discutir as causas destes erros, pois, estando relacionados ao processo de ensino-aprendizagem de português, fogem ao tema desta pesquisa. Destaquei-os, como já esclareci antes, porque considero que o futuro professor de Matemática deve se expressar corretamente, em Português e em Matemática.

Aliás, Bruner enfatiza este aspecto, quando diz:

> "Eu não posso imaginar um homem culto daqui há um século que não vá ser largamente bilingüe neste sentido especial - conciso e perito em ambas as linguagens, a natural e a matemática." (BRUNER, 1969, p. 352)

Acredito que possa haver uma relação entre os erros em linguagem matemática e os erros em língua portuguesa, mas tal crença tem um caráter apenas intuitivo. Poderia ser tema de outra pesquisa, da qual fariam parte professores da área de ensino de português, de lingüística, etc.

4.8. A Influência do Professor

Considerei as causas dos erros no âmbito do processo de ensino-aprendizagem, mas ainda não me referi ao aluno e ao professor como pessoas, à influência da relação professor - aluno neste contexto.

As observações feitas pelos alunos a respeito dos seus sentimentos em relação aos professores, de como se relacionavam com eles, surgiram no decorrer da segunda entrevista, quando, informalmente, procurei saber como tinha sido o ensino de 1º e 2º graus em Matemática. Assim, não houve um planejamento de instrumentos de pesquisa para descobrir causas relacionadas com a relação professor-aluno, especialmente porque, não tenho conhecimentos de psicologia que me possibilitem trabalhar com estes conteúdos, preferi ater-me aos aspectos relacionados ao processo de ensino-aprendizagem propriamente dito.

Porém, não posso deixar de registrar algumas destas observações que, em certos casos, perturbaram-me momentaneamente, quando ouvi, relatados por algum aluno, sentimentos e situações por mim já experimentados.

Alfa, por exemplo, disse que grava mais os conteúdos quando tem afinidade com o professor.

Beta se preocupou em não errar para não magoar o professor que lhe ensinou aquele conteúdo. Referindo-se à 1ª questão do teste, ele disse:

> "Como foi a Sra. que deu a matéria, eu estava pensando assim: 'Se eu fizer errado, vai ficar xarope para mim e para a professora, porque foi ela que lecionou'."

Zeta narrou um episódio acontecido no 1º grau e ilustrou bem a sua maneira de relacionar-se com os professores. Apesar de longa, vou transcrever toda a observação, porque a considero sumamente importante.

> "O que mais me marcou foi na 8ª série, que um professor não explicava nada. Eu sempre fui apaixonada por Matemática, desde pequena eu queria ser professora de Matemática e sempre fui daquelas alunas chatas, que queriam saber tudo, o porquê das coisas, e este professor não explicava nada, chegava na aula e dizia: 'Da página tal a tal, estudem sozinhos'. Eu pegava o meu livro e a cadeira, sentava ao lado dele e fazia ele explicar tudo. Um dia em que eu não estava me sentindo bem, foi a primeira aula em que ele explicou e foi Geometria Plana. Eu estava dormindo na aula, daí ele parou a aula e pediu que eu explicasse o que ele tinha explicado. Eu disse que não estava me sentindo bem e não ia explicar e ele me deu um alto sermão, me xingou um monte porque eu vivia enchendo o saco dele para ele explicar e no dia em que ele estava explicando, eu não estava prestando atenção na aula. Me ralei na prova, depois daquela vez ele se recusou a me explicar a matéria. Peguei recuperação em Matemática, estudei um monte e passei. O que mais me marcou em Matemática foi isto, desde lá eu me interessei por Geometria Plana, eu fiquei com tanto ódio que eu queria só saber de Geometria Plana, para esfregar na cara dele."

O aluno Kapa identificou-se com uma professora que era minuciosa e acredita que começou a gostar de Matemática quando se "encaixou" no jeito dela. Rô considera que gosta de Matemática porque teve, por muitos anos, a influência de um mesmo professor, "que mais que um professor foi um amigo". São palavras suas:

> "Eu sempre tive um professor só, desde a 6ª série e ele me acompanhou até o 3º ano do 2º grau. Ele era um professor que sabia lecionar, inclusive era um dos professores melhores da minha cidade, então eu tive uma facilidade muito grande; no 2º grau as minhas notas basicamente foram só dez. Eu gostava de Matemática influen

> ciada pelo professor, eu ia até o colégio, dava aula para o pessoal de recuperação, me entrosava, e quando tu precisa ensinar alguém, tem que estar mais 'por dentro', porque as dúvidas aparecem, então tem que responder 'não sei' e o 'não sei' a gente não gosta de responder."

A importância do professor como um modelo para o aluno é, assim, um fator a ser levado em consideração. Seria interessante analisar, por exemplo, os erros diretamente relacionados à prática de cada professor, para descobrir como a relação professor-aluno está imbricada neste contexto.

4.9. Os Conceitos de Demonstração Apresentados pelos Alunos e Outras Definições de Demonstração

Na segunda entrevista, conversei com os alunos sobre o ensino de 1º, 2º e 3º graus. Uma das perguntas que fiz a cada aluno, foi a relativa ao conceito de demonstração e à necessidade de fazê-la. Nem sempre as respostas foram originais; vários alunos repetiram chavões tais como "demonstrar é partir da hipótese e chegar à tese", "demonstrar é provar que algo é verdade".

Assim, menciono somente aquelas conceituações que mostram que o aluno tentou colocar sua própria idéia.

Relendo as conceituações apresentadas pelos alunos e revisando outros artigos onde diversas opiniões são emitidas, vejo que, como pano de fundo de todo este trabalho, está a explicitação do tipo de atividade em que consiste a demonstração de teoremas, não só do ponto de vista da lógica formal ou de escolas filosóficas como o Logicismo e o Formalismo, como também do ponto de vista da Matemática real, considerada como um produto social, mais de acordo com as idéias do Falibilismo.

Conforme Abraham Moles,

> "Demonstrar um fato é construir um sentimento de evidência deste em um indivíduo receptor, comunicando-lhe uma mensagem cujos elementos formam uma série de evidências elementares." (MOLES, 1981, p. 37)

A demonstração de um teorema é uma mensagem. Não tem uma existência independente, vai depender do sujeito que faz a de monstração e dos que a recebem.

Se um matemático cria uma demonstração, ele logo quer divulgá-la entre os colegas. Num primeiro estágio, verbal, ele explica o que fez; se conseguir interessá-los, ele mostrará a prova escrita e, finalmente, se esta tiver a aprovação da comunidade matemática, será publicada, para que a mensagem alcance o maior número de pessoas. (DE MILLO et alii, 1979)

Bell (1976) considera que, sendo a demonstração uma atividade essencialmente pública, o aluno só apreciará a necessidade de fazê-la quando se conscientizar do papel público daquele conhecimento.

O aluno Sigma já chegou a esta constatação, pois respondeu à questão sobre a necessidade da demonstração da seguinte maneira:

> "Eu estou vendo que há necessidade agora, porque eu estou lecionando, 5ª e 6ª séries; eu acho ridículo chegar lá para os alunos e ensinar uma equação e dizer 'tu passas de um lado para o outro e troca de sinal'. Eu sei que eles estão acreditando, mas é uma coisa que eu sei que não é bem assim. É uma coisa que eu não tive, daí eu achei necessidade de mostrar, pois de repente ele esquece da regra mas sabe como é que se faz."

Sigma detacou que sempre foi "péssimo em Matemática",que precisava de aulas particulares no 1º grau para ser aprovado. No entanto, no 2º grau, ele começou a gostar de Matemática,porque os professores explicavam o porquê das coisas, não davam, apenas, fórmulas. Assim, ele desenvolveu-se de tal forma que ingressou no curso de Matemática e já está lecionando.Nas suas primeiras experiências como professor, já pretende oferecer aos alunos um antídoto ao ensino mecânico, ensinando-lhes a resolução de equações como gostaria que estas lhe tivessem sido explicadas no 1º grau.

Davis e Hersh acreditam que, no mundo real da Matemática, as demonstrações escritas servem para provar que o autor convenceu, a si próprio e aos seus amigos, de que um determinado resultado a que chegou é verdadeiro. (DAVIS & HERSH, 1988)

Mas em que constitui, afinal, uma prova matemática reconhecida como tal? Novamente Davis e Hersh respondem:

> "Por mais chocante e perturbadora que possa ser, a verdade é que nenhuma resposta explícita pode ser dada. Pode-se apenas identificar o que realmente é realizado em cada ramo da Matemática." (DAVIS & HERSH, 1988, p. 71)

Algumas vezes, demonstra-se um teorema sem ter a mínima idéia da interpretação geométrica, física, etc., que ele possa ter; simplesmente, usam-se as definições e propriedades já demonstradas e a Lógica. Mas, desta forma, não se está fazendo Matemática. Apenas se joga com símbolos, pois, no momento em que tiver que ser explicado aquele resultado, notar-se-á que não se sabe fazê-lo, porque não foi internalizado.

A internalização de um conceito não é feita da mesma forma para diferentes pessoas. Cada uma tem o seu quadro de referências, a sua história em termos de conhecimentos adquiridos e dá a sua própria interpretação.

Cada matemático, então, pode refinar uma demonstração, no sentido de acrescentar-lhe novos passos e suprimir outros, utilizando a propriedade em novos trabalhos e o conhecimento inicial será socializado.

A Matemática é,portanto, um produto social, criado e desenvolvido pelas interações de muitas mentes. (GOODMAN, 1979) As propriedades dos entes matemáticos são idéias compartilhadas, verificadas por vários tipos de raciocínios válidos que diferem de um ramo da Matemática para outro e de uma época para outra. (HERSH, 1979)

Porém, provavelmente, não é este o conceito que se passa aos alunos, pois nas conceituações transparecem, algumas vezes, a doutrinação, outras vezes, a revolta.

Delta parece aceitar a idéia de que se deve justificar passo a passo tudo o que é feito em uma demonstração, ao dizer:

> "Por exemplo, citando um problema do dia a dia, seria citar cada coisa que fizeste no teu dia, o que fizeste de manhã, passo a passo ... seria mais ou menos isto. É uma coisa lógica, que tu tens que explicar realmente o que está acontecendo ali, tudo o que tu vês."

Depois destas observações, ainda reforçou a idéia, enumerando em seqüência as ações: "...escovar os dentes, lavar o rosto, pentear o cabelo...".

Colocada desta forma, uma demonstração é algo rotineiro, enfadonho, metódico, que não exige criatividade. Suas palavras lembram outras de Kline: "...pedir ao estudante que cite axiomas nas operações com números é como pedir a um adulto que justifique cada ato que faz depois que se levanta de manhã". (KLINE, 1976, p. 65)

Zeta mostrou como estava se sentindo revoltada em relação às demonstrações, quando tentou explicar o seu conceito:

> " Tem que explicar o porquê, mas tudo o que tu sabe, tu não sabe. Tu tens uma hipótese e uma tese, então parte da hipótese e tem que chegar na tese, tudo em passos que tu já tenhas a definição, tu não pode usar nada mais que aquilo, tu não pode usar o que tu já sabe, tem que sempre aplicar as definições certas.Tu tem que usar as que vêm antes, as que tu já sabe que vão vir depois, esquece, mesmo que facilite."

Fazer Matemática desta forma não é um prazer, é um sacrifício! A aluna está manietada, presa a uma camisa de força,representada pelos axiomas e teoremas de uma determinada teoria, em uma determinada ordem e não pode, sequer, utilizar conhecimentos anteriormente acumulados. Não há criatividade, a demonstração é apresentada como se tivesse sido feita por uma máquina, por um computador que "checasse" cada passo apresentado. Aliás, esta idéia não é nova, alguns autores já criaram programas de computador que demonstram teoremas. (NEWELL & SIMON, 1958)

Mas como diz Hersh (1979), quem está acostumado a encontrar erros em programas de computador (debugging) sabe que a tarefa não é fácil e que não se pode garantir a perfeição de uma prova feita por uma máquina, já que esta faz o que o programador, falível, estabelece.

Podem ser considerados dois momentos na demonstração de um teorema. Numa primeira instância, o matemático cria a demonstração, estabelecendo os seus passos principais, de maneira informal, despreocupando-se dos detalhes que ele sabe que poderá provar depois. Num segundo momento, se deseja apresentar a demonstração à comunidade matemática, ele o faz de uma maneira formal e rigorosa, para que a prova seja válida.

Querer que o aluno, iniciante no aprendizado de demonstrações, já as realize com todo o rigor e formalismo, é podar-lhe a criatividade e inutilizá-lo para o trabalho matemático produtivo.

Também, como contestação quanto às exigências dos professores, apareceu a observação do aluno Alfa:

> "Se o professor dá, a gente aceita como verdade. Nos colégios de 1º grau, impõem as coisas, a gente está acostumado a aceitar como o professor disse, como verdade, muitos poucos se animam a perguntar 'por que?'. De vez em quando a gente pergunta, daí eles dizem ' isto se demonstra' e a gente entende, mas em geral dizem que é verdade porque o professor falou que é."

Portanto, Alfa acha que a demonstração deve ser feita exatamente para que as coisas não sejam dadas prontas, como um desafio que o aluno impõe ao professor que não quer lhe dar a oportunidade de descobrir por si. Já que o professor impõe a verdade, o aluno lhe desafia a que a prove, a que <u>pelo menos</u> a prove, já que terá que aceitá-la dali por diante, sem tê-la descoberto.

O aluno Kapa, coerente com o que já havia criticado no curso, respondeu às perguntas sobre demonstração com uma longa explicação que transcrevo na íntegra, pelas idéias importantes que levanta:

> "É uma pergunta que eu tenho me feito ultimamente e talvez eu tenha procurado uma resposta para justificar, não que esta resposta seja realmente a minha. As pessoas dizem que desenvolve o grau de raciocínio. Eu acho que desenvolve o grau de raciocínio mas, devido à minha maneira de demonstrar, eu acho que desenvolve muito mais o grau de abstração...também, não é? Não sei se são iguais. Por exemplo, os professores de (X) dizem que tu precisas de (X) para saber raciocinar e planejar uma aula,é como justificam a cadeira para nós. Agora,eu acho que certas demonstrações de certos teoremas não têm por que existir no curso; tem muita coisa que é justamente aquilo que justifica as outras matérias que nós vamos lecionar no 1º e no 2º graus, que são importantes a gente saber. Mas teria que analisar muito bem, porque nesta história de de repente ter que demonstrar para aprender a raciocinar, as pessas se perdem ... ou o currículo...não sei de quem é a culpa."

Em suas observações estão presentes inquietações com o curso e com as razões que determinam a escolha de determinados conteúdos, demonstrando que o velho chavão "a Matemática ensina a pensar", já não se sustenta mais.

Épsilon, opinando sobre a utilidade da Matemática,disse: "Até os professores dizem que utilidade na vida prática não tem, mas serve para desenvolver o raciocínio". Mesmo assim, mostra que não aceitou o chavão, pois opinou sobre o trabalho que deveria ser feito no sentido de mostrar aos jovens a utilidade da Matemática na solução de problemas da vida prática:

> "Deveria começar este trabalho quando entra na faculdade de Matemática,porque isto desestimula muito o pessoal, dá para ver pelo número que continua, a maioria pede transferência, reopção, porque vê que aquilo ali está muito abstrato, não está ligado com o fato concreto."

Pelas respostas dos alunos, parece-me que há uma mudança quanto à concepção de demonstração e uma revolta quanto às exigências formalistas que, por vários anos, alguns professores (e autores de livros-texto) tentaram impor aos alunos. Vivendo em um mundo em constantes transformações e em uma sociedade que procura criticar e contestar valores estabelecidos, os jovens se posicionam frente ao ensino que recebem e questionam a validade de certos conteúdos e a forma de apresentá-los. Seus posicionamentos evidenciam a revolta contra as regras pré-estabelecidas que impedem o desabrochar da criatividade, contra a falta de consistência de certas justificativas dadas pelos professores e salientam, também, o desejo de estudar uma Matemática mais voltada para os problemas de sua época.

Os pressupostos do Falibilismo, no que tange a um ensino baseado na história dos conceitos matemáticos, nas necessidades de uma época, nas aplicações daqueles conceitos a problemas reais da vida atual, estariam mais próximos dos anseios dos alunos e seriam justificativas bem mais convincentes no planejamento de uma disciplina de um curso de Matemática, já que substituiriam os lugares-comuns tantas vezes utilizados pelos professores na justificativa.

Ao responder sobre a necessidade de fazer uma demonstração, algumas vezes apareceram embutidas as frases feitas, os conceitos estereotipados do que seja a Matemática.

Respondendo à pergunta "é necessário fazer demonstrações?" Rô emitiu um conceito rígido de Matemática:

> "Eu acho que sim, eu acho que é muito importante porque tu estás tendo o fato concreto

> na tua frente, tu estás comprovando com itens ... e a Matemática é uma coisa exata, é ou não é,... Eu acho que é importante, apesar de que eu não gosto de demonstração."

Como diz Bruner, se a criança aprende a aplicar certas receitas, sem compreender seu significado, ela é "levada a crer que a coisa mais importante para ela é ser exata - embora a exatidão tenha menos a ver com a matemática do que com o cálculo". (BRUNER, 1968, p. 36) Talvez, por enxergar a Matemática desta maneira, Rô não goste de demonstrar teoremas.

Outra resposta curiosa para a necessidade de demonstração foi a do aluno Beta:

> "Talvez seja para não deixar dúvidas, para dizer que funciona mesmo, porque na Matemática as coisas são meio assim por cima, meio avoadas, tem que imaginar bastante... Eu demonstraria para dizer que uma coisa é lógica, que eles não precisariam gravar por fórmulas, é só pensar um pouco."

Apesar de não entender bem o que significa "assim por cima, meio avoadas", fica evidente que o aluno se refere à abstração. Reitera-se a afirmação de que a Matemática é "o reino das abstrações".

Mas o abstrato não está em um nível superior ao concreto, ambos têm suas raízes na mesma realidade e são duas instâncias interligadas da investigação organizada desta realidade, "... para descobrir a essência dos seres e dos fenômenos e as leis que os regem com o fim de aproveitar as propriedades das coisas e dos processos naturais em benefício do homem." (PINTO, 1979, p. 30)

Voltando ao aluno Beta, em outro momento da entrevista, ele havia dito:

> "Foi no fim da 7ª série que eu aprendi que não precisava decorar regras, a única regra que talvez precisasse decorar era a do vezes e a do dividir, que aquilo lá eu ainda não parei para pensar por que acontece, porque as outras eram lógicas."

Vê-se, então, que a sua noção de regra "lógica" comporta contradições, pois ele considera que a demonstração serve para "dizer que uma coisa é lógica" e, no entanto, não acredita que as regras de sinal para a multiplicação e a divisão sejam lógicas, pois estas ele precisou decorar. E por que ele as decorou? Por que ainda não "parou para pensar"? Talvez porque sua visão da disciplina seja compartimentada; para ele a Matemática é um conjunto de regras e fórmulas, umas para serem decoradas, outras para serem pensadas e todas para que possam praticar exercícios e resolvê-los corretamente nas provas. Parece-me que esta é sua preocupação maior, pois colocou em outro momento: "Tu pode até saber, mas se tu não pratica tu não vai te lembrar. E é na hora da prova que é importante".

Assim, o ensino de um conhecimento compartimentado, dissociado da realidade, não apresentando soluções para os problemas que ela comporta, produz, no aluno, uma visão estreita, onde a preocupação não é com o saber, com a investigação da essência das coisas, mas com as provas de verificação.

Outra característica da Matemática é o trabalho com generalizações. Esta idéia está por trás da resposta de Lambda à questão sobre a necessidade de fazer demonstrações:

> "Eu acho que tem necessidade da demonstração para mostrar que aquilo é exato, que aqui-

> lo ali não funciona num caso só, ele vai funcionar sempre."

Lambda, nesta medida, captou um dos conceitos mais importantes da Matemática: o de generalização. Usando a generalização se faz a investigação metódica da realidade, partindo de casos particulares e descobrindo as leis que regem um determinado fenômeno.

Parece-me, portanto, que as causas dos erros cometidos em demonstrações têm componentes mais profundos. Os conceitos estereotipados e compartimentados da Matemática e a visão rígida e formalista das demonstrações são transmitidas aos alunos em qualquer dos níveis de ensino, dificultando-lhes a compreensão de que o trabalho matemático é uma das tarefas humanas em uma determinada sociedade e época, com o objetivo de entender as dificuldades desta mesma sociedade e propor soluções para a resolução de seus problemas.

Assim, reconhecendo a importância do diagnóstico das causas dos erros, parece-me que sua correção envolve, também, fatores anteriores ao processo de ensino-aprendizagem, localizados nos pressupostos teórico-filosóficos que embasam os currículos e as práticas docentes em um curso de Matemática.

4.10. Considerações Finais

Encerrada a análise e apresentadas as conclusões, venho ainda fazer algumas observações que, se colocadas no final, não são por isso menos importantes para o trabalho como um todo.

Trabalhei com onze alunos; propus-me a fazer um estudo particular, para analisar e classificar os erros cometidos em demonstrações de Geometria Plana, com o objetivo de detectar suas possíveis causas. As conclusões a que cheguei são, portanto, válidas para esta disciplina, para estes alunos, para este curso, para esta situação e momento e com estes personagens.

Os resultados que obtive poderão servir como sementes de novas idéias, de novas indagações, de novas hipóteses a serem testadas em outros grupos de alunos, em outras disciplinas e em outros cursos.

Concluído o trabalho, jogo novamente a minha rede, agora em direção ao nosso mar particular, aos professores e alunos do curso de Licenciatura Plena em Matemática da PUCRS, para que as descobertas feitas possam auxiliar no trabalho com a nossa realidade e a ela adequar a prática, docente e discente.

Se outros colegas e pesquisadores validarem a pesquisa, os seus resultados poderão ser aproveitados e utilizados como ponto de partida para novos trabalhos ou para o desenvolvimento de novas idéias. Por outro lado, a satisfação de uma etapa concluída já me impulsiona a jogar outras redes em outros mares e a tentar novas experiências nestas águas ainda pouco exploradas da análise de erros.

5. A N E X O

5.1. QUESTIONÁRIO

Prezado Aluno (a):

Para apresentação dos resultados da pesquisa que estou realizando, preciso, também, de alguns dados a seu respeito. Pediria, portanto, que preenchesse este questionário.

Obrigado!

1. Nome: .... 2. Idade: ....

3. Escola(s) onde cursou o 1º grau (indique, também, se é pública ou particular) e local:

   Escola(s):..

   Cidade(s):..

4. Escola(s) onde cursou o 2º grau (indique, também, se é pública ou particular) e local:

   Escola(s):..

   Cidade(s):..

5. Ano e semestre de ingresso no Curso de Licenciatura em Matemática da PUCRS: ....

6. Das disciplinas listadas a seguir, indique as que cursou, assinalando com um X sua situação em relação a cada disciplina:

Disciplinas \ Situação	Aprovado	Reprovado, repentindo neste sem.	Reprovado, ainda não repetiu	Cursando pela 1ª vez
Desenho Geom.e Geom. Descritiva				
Geometria I				
Fundamentos de Mat.I				
Cálculo Dif.na Reta				
Geometria II				
Geometria Analítica				
Cálculo Int.na Reta				
Álgebra A				
Álgebra B				
Cálculo Dif.e Int.III				
Cálculo Dif.e Int.IV				
Álgebra C				
Mat.Financeira I				
Conteúdos e Metod. p/Ensino de Mat. I				
Álgebra D				
Álgebra Linear				
Conteúdos e Metod. p/Ensino de Mat.II				
Matem. Aplicada A				
Fundamentos Mat. II				
Análise Matem. A				
Conteúdos e Metod. p/Ensino de Mat.III				
Prática Ensino Mat.				
Matemática Aplic. B				
Análise Matem. B				
Probabilid.e Estat.M				

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1 - BARBOSA, João Lucas M. Geometria euclideana plana. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1985. 190 p.

2 - BELL, Alan W. The learning of general mathematical strategies. Nottingham, University of Nottingham, 1976. Tese dout.

3 - BORASI, Raffaella. Alternative perspectives on the educational uses of errors. Sherbrooke, 1987. 12 p. Trabalho apresentado no 3º CIEAEM, realizado em julho de 1987, em Sherbrooke, Canadá.

4 - BORASI, Raffaella. Beyond diagnosis and remediation. Budapest, 1988. 6 p. Trabalho apresentado no 6º ICME, realizado de 27 de julho a 3 de agosto de 1988, em Budapest, Hungria.

5 - BORDAS, Merion Campos. Desenvolvimento cognitivo e organização do ensino na perspectiva de J. S. Bruner. In: MOREIRA, M. A. et alii. Aprendizagem: perspectivas teóricas. Porto Alegre, Ed. da UFRGS, 1985. p. 77-115.

6 - BRUNER, Jerome S. Theorems for a theory of instruction. In: BRUNER, Jerome S., ed. Learning about learning: a conference report. Washington, U.S., Department of Health Education and Welfare, 1966. p. 196-211.

7 - BRUNER, Jerome S. O processo da educação. São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1968. 87 p.

8 - BRUNER, Jerome S. After John Dewey, what? In: O'NEILL, William F. Selected educational heresies. Glenview, Scott, Foresman and Company, 1969. p. 346-54.

9 - BRUNER, Jerome S. Toward a disciplined intuition. In: BRUNER, Jerome S., ed. The relevance of education. New York, W. W. Norton & Company, 1971. p. 82-97.

10 - BRUNER, Jerome S. Uma nova teoria de aprendizagem. Rio de

Janeiro, Bloch Editores, 1976. 162 p.

11 - BRUYNE, Paul et alii. Dinâmica da pesquisa em ciências sociais. Rio de Janeiro, Francisco Alves, 1982. 252 p.

12 - CASTRUCCI, Benedito. Introdução à lógica matemática. São Paulo, Nobel, 1973. 222 p.

13 - CLARKSON, Philip. Types of errors made by Papua New Guinean students. Educational Studies in Mathematics, Dordrecht, 14(4): 355-67, Nov. 1983.

14 - CLEMENTS, M. A. Analyzing children's errors on written mathematical tasks. Educational Studies in Mathematics, Dordrecht, 11:1-21, 1980.

15 - COPI, Irving. Introducción a la lógica. Buenos Aires, Eudeba, 1973. 455 p.

16 - COSTA, Newton C. A. Introdução aos fundamentos da matemática. Porto Alegre, Globo, 1962. 63 p.

17 - D'AMBRÓSIO, Beatriz S. The dynamics and consequences of the modern mathematics reform movement for brazilian mathematics education. Indiana, Indiana University, 1987. 257 p. Tese dout.

18 - DAVIS, Philip J. Fidelity in mathematical discourse: is one and one really two? American Mathematical Monthly, Washington, 79(3):252-63, Mar. 1972.

19 - DAVIS, Philip J. & HERSH, Reuben A. A experiência matemática. Rio de Janeiro, Francisco Alves, 1985. 481 p.

20 - DAVIS, Philip J. & HERSH, Reuben A. O sonho de Descartes: o mundo de acordo com a matemática. Rio de Janeiro, Francisco Alves, 1988. 335 p.

21 - DE MILLO, Richard A. et alii. Social processes and proofs of theorems and programs. Communications of the ACM, New York, 28 (5):271-80, May 1979.

22 - DEWEY, John. Como pensamos. São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1959. 292 p.

23 - DONALDSON, Margaret. L'erreur et la prise de conscience de l'erreur. Bulletin de Psychologie, Paris, 30 (327): 181-6, jan./fév. 1977.

24 - ECO, Humberto. Como se faz uma tese em ciências humanas. Lisboa, Editorial Presença, 1984. 231 p.

25 - ERNEST, Paul. The philosophy of mathematics and mathematics education. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, London, 16(5):603-12, 1985.

26 - FREITAG, Bárbara. Escola, estado e sociedade. São Paulo, Mo

raes, 1980. 138 p.

27 - GHOSH, Santi & GIRI, Satyendranath. Understanding secondary mathematics: analysis of linguistic difficulties vis-a-vis errors. International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology, London, 18 (4):573-9, 1987.

28 - GOODMAN, Nicolas D. Mathematics as an objetive science. American Mathematical Monthly, Washington, 86(7)570-51, Aug./Sept. 1979.

29 - GRILLO, Marlene. Dimensão cognitiva do ensino: ensinando e aprendendo a pensar. In: SANT'ANNA, Flávia M. et alii. Dimensões básicas do ensino. Rio de Janeiro,Livros Técnicos e Científicos, 1979, p. 99-106.

30 - HAMMING, R. W. The unreasonable effectiveness of mathematics. American Mathematical Montly, Washington, 87(2): 81-90, Feb. 1980.

31 - HARIKI, Seiji & ONAGA, Dulce S. Curso de matemática: 2º grau. São Paulo, Harbra, 1979, v.1.

32 - HEGENBERG, Leônidas. Lógica simbólica. São Paulo,Herder; Ed. da USP, 1966, 376 p.

33 - HERSH, Reuben A. Some proposals for reviving the philosophy of mathematics. Advances in Mathematics, 31:31-50, 1979.

34 - HOFFER, Alan. Geometry is more than proof. Mathematics Teacher, Reston, 74:11-8, Jan. 1981.

35 - HUTCHERSON, Lyndal R. Errors in problem solving in sixth-grade mathematics. Austin, The University of Texas at Austin, 1975. 117 p. Tese dout.

36 - JEVONS, William Stanley. Lógica. Lisboa, Livraria Clássica Editora, 1925. 224 p.

37 - KAPADIA, Ramesh. Insight and intuititon. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, London, 10(1):17-9, 1979.

38 - KENT, David. Some processes through which mathematics is lost. Educational Research, Windsor, 21(1):27-35, Nov. 1978.

39 - KLINE, Morris. O fracasso da matemática moderna. São Paulo, Ibrasa, 1976. 211 p.

40 - KÖRNER, Stephan. Uma introdução à filosofia da matemática. Rio de Janeiro, Zahar, 1985. 201 p.

41 - KRUTETSKII, Vadim A. The psychology of mathematical abilities in schoolchildren. Chicago, The University of Chicago Press, 1976. 417 p.

42 - LAKATOS, Imre. A lógica do descobrimento matemático: provas e refutações. Rio de Janeiro, Zahar, 1978, 212 p.

43 - LÜDKE, Menga & ANDRÉ, Marli D. A. Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. São Paulo, EPU, 1986, 99 p.

44 - MACHADO, Nílson J. Matemática e realidade. São Paulo, Cortez; Autores Associados, 1987. 103 p.

45 - MAYER, Richard. El futuro de la psicologia cognitiva. Madrid, Alianza Editorial, 1981.

46 - MATES, Benson. Lógica elementar. São Paulo. Ed.Nacional; Ed. da USP, 1967. 298 p.

47 - MOISE, Edwin E. & DOWNS, Floyd L. Geometria moderna. São Paulo, Editora Edgard Blücher, 1971. 2 v.

48 - MOLES, Abraham. A criação científica. São Paulo, Perspectiva, 1981. 292 p.

49 - MORENO, Alberto. Lógica matemática: antecedentes y fundamentos. Buenos Aires, Eudeba, 1969. 143 p.

50 - MOVSHOVITZ-HADAR, Nitsa et alii. Student's distortions of theorems. Focus on Learning Problems in Mathematics, 8 (1):49-57, 1986.

51 - MOVSHOVITZ-HADAR, Nitsa et alii. An empirical classification model for errors in high school mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, Reston, 18 (1):3-14, 1987.

52 - NEWELL, Allen & SIMON, Herbert. Elements of a theory of human problem solving. Psychological Review,Princeton, 65(3):151-66, 1958.

53 - NEWELL, Allen & SIMON, Herbert. Human problem solving.Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1972. 920 p.

54 - PATTON, Michael Q. Qualitative evaluation methods. Beverly Hills, Sage, 1986. 370 p.

55 - PINTO, Alvaro V. A evolução do conhecimento. Os caracteres do conhecimento científico. In:———. Ciência e existência. Rio de Janeiro, Paz e Terra, 1979. cap. 2, p.13-59.

56 - POGORÉLOV, A. V. Geometria elemental. Moscú, Editorial Mir, 1974. 224 p.

57 - POLYA, George. Induction and analogy in mathematics.Princeton, Princeton University, 1954. 280 p.

58 - POLYA, George. Problemas. Conceptos de Matemática,Buenos Aires, (35):4-10, jul/sep. 1975.

59 - POLYA, George. A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro, Interciência, 1978. 179 p.

60 - RADATZ, Hendrik. Error analysis in mathematics education. Journal for Research in Mathematics Education, Reston, 10(3):163-72, 1979.

61 - RADATZ, Hendrik. Student's errors in the mathematical learning process: a survey. For the Learning of Mathematics, Montreal, 1(1):16-20, July 1980.

62 - RATHS, Louis E. et alii. Ensinar a pensar. São Paulo, Herder; Ed. da USP, 1972, 441 p.

63 - REVUZ, André. Matemática moderna, matemática viva. Rio de Janeiro, Ed. Fundo de Cultura, 1967. 91 p.

64 - RODRIGUES, Antonio. Modelos didáticos de geometria euclideana. Porto Alegre, Ed. da UFRGS, 1978. 68 p.

65 - SAVIANI, Dermeval. Política e educação no Brasil: o papel do Congresso Nacional na legislação do ensino. São Paulo, Cortez; Autores Associados, 1987. 158 p.

66 - SENK, Sharon. How well do students write geometry proofs? Mathematics Teacher, Reston, 78(6):448-56, Sept. 1985.

67 - SHAUGHNESSY, Michael J. & BURGER, Willian F. Spadework prior to deduction in geometry. Mathematics Teacher, Reston, 78(6):419-28, Sept. 1985.

68 - SMITH; Rolland. Three major difficulties in the learning of demonstrative geometry. Part I: Analysis of errors. Mathematics Teacher, New York, 33(3)99-134, Mar. 1940.

69 - SMITH, Rolland. Three major difficulties in the learning of demonstrative geometry. Part II: Discription and evaluation of methods used to remedy errors. Mathematics Teacher, Nee York, 33(4):150-78, Apr. 1940.

70 - TAYLOR, Steve J. & BOGDAN, Robert. Introducción a los métodos cualitativos de investigación. Buenos Aires, Editorial Paidós, 1986. 343 p.

71 - THOM, René. "Modern" Mathematics: an educational and philosophic error? American Scientist, 59:695-9, Nov. 1971.

72 - THOM; René. Modern mathematics: does it exist? In: HOWSON, A.G., ed. Developments in mathematical education: proceedings of the second international congress on mathematical education. Cambridge, Cambridge University Press, 1973. p. 194-209.

73 - TRIVIÑOS, Augusto N.S. Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo, Atlas, 1987. 175 p.

74 - WATSON, Ivan. Investigating errors of beginning mathematicians. Educational Studies in Mathematics. Dordrecht, 11:319-29, 1980.