

UFRGS - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

IGEO - INSTITUTO DE GEOCIENCIAS

DEPARTAMENTO DE GEODÉSIA

APOSTILA DE

FUNDAMENTOS DE GEODÉSIA

PARTE 1

(1ª. Edição)

Prof. Gilberto Gagg

Fev/2023

PREFÁCIO

Este material consiste numa apostila em que foram elaborados, compilados e adaptados vários conteúdos de diversos autores sobre assuntos que compõem os Fundamentos da Geodésia, tratando de conceitos, metodologias, aplicações, modelos matemáticos, avanços tecnológicos, exercícios propostos, etc.

Esta apostila não pretende esgotar o assunto, sujeito a avanços no emprego de novas tecnologias e equipamentos, bem como novas definições oficiais por parte de órgãos governamentais vinculados ao escopo geodésico e de mapeamento mundiais, novas normativas, e consiste numa versão preliminar. O nível de profundidade com que os assuntos são abordados visa atender a proposta da disciplina. Há conteúdos apresentados de forma mais sintética, quando já abordados em parte por outras disciplinas.

Para facilitar o estudo dos conteúdos, a bibliografia consta no final de cada capítulo.

Agradecem-se desde já comentários, considerações e a comunicação de quaisquer erros que possam ser encontrados.

FUNDAMENTOS DE GEODÉSIA – NOÇÕES GERAIS

SUMÁRIO - PARTE 01

1. Introdução, Histórico e Conceitos Preliminares	01
1.1. Definição, Objetivos, Divisão da Geodésia	01
1.1.1. Objetivos	02
1.1.2. Divisão da Geodésia	03
1.2. Formas da Terra: Desenvolvimento histórico	04
1.2.1. Fase Plana	05
1.2.2. Fase Esférica	05
1.2.3. Fase Elipsoidal	08
1.2.4. Fase Geoidal	09
1.3. Conceitos Preliminares	10
1.3.1. Superfícies de Referência	11
1.3.2. Coordenadas Astronômicas e Geodésicas	12
1.3.3. Altitudes	13
1.3.4. Desvio da Vertical	15
1.3.5. Sistema Geodésico de Referência	17
1.3.6. Noções de Trigonometria Esférica	18
1.3.6.1. Conceitos Básicos	18
1.3.6.1.1 Unidades de medidas de arcos e ângulos e conversões	18
1.3.6.1.2 Propriedades dos arcos e ângulos	18
1.3.6.2. Triângulo Esférico. Excesso Esférico	19
1.3.6.2.1 Triângulo Esférico	19
1.3.6.2.2 Excesso Esférico e Área de um triângulo esférico	21
1.3.6.3. Fórmulas fundamentais	21
1.3.6.3.1 Analogia dos senos	22
1.3.6.3.2 Fórmula dos 4 elementos	22
1.3.6.4. Fórmula das Cotangentes. Fórmula dos 5 elementos	23
1.3.6.5. Fórmulas de Borda	24
1.3.6.6. Analogias de Delambre e de Nepper	24
1.3.6.7. Triângulo esférico retângulo. Regra de Mauduit	25
1.3.6.8. Exercícios	29
1.4. Aplicações da Geodésia	29
2. Geometria do Elipsoide	32
2.1. Considerações Iniciais	32
2.2. Elipsoides	34
2.3. Elipsoide de Revolução: definição e equação	35
2.4. Parâmetros	36
2.4.1. Achatamento	36
2.4.2. Excentricidade	37
2.5. Definição da Grande Normal (N) ou (ν) e da Pequena Normal (N') ou (ν')	38
2.6. Curvatura das Seções Normais do Elipsoide de Revolução	41
2.6.1. Raio de Curvatura da Seção Meridiana (M)	42
2.6.2. Raio de Curvatura da Seção 1°. Vertical (N)	42
2.6.3. Raio de Curvatura de uma Seção Normal Qualquer	43

2.7. Raio Médio de Curvatura	43
2.8. Raio de Curvatura de um Paralelo	43
2.9. Comprimento de um arco de Meridiano e de um arco de Paralelo	44
2.10. Área de uma Zona Elipsóidica.	46
2.11. Área do Quadrilátero Elipsóidico	46
2.12. Latitudes Geocêntrica ψ e Reduzida μ	47
2.13. Exemplos de alguns elipsoides e seus parâmetros	49
2.14. Distância do centro do elipsoide ao cruzamento da normal com eixo 2b	49
2.15. Linha Geodésica	50
2.16. Coordenadas Elipsoidais (Geodésicas) Cartesianas	55
3. Sistemas de Referência em Geodésia	57
3.1. Considerações Iniciais	57
3.1.1. Sistema de referência	57
3.1.2. Etapas do estabelecimento de um sistema de referência	58
3.1.3. Classificação dos sistemas de referência.	60
3.1.4. Referenciais cartesianos	60
3.2. Referenciais Celeste (RC) e Terrestre (RT)	61
3.2.1. Referencial Celeste (RC)	61
3.2.2. Referencial Terrestre (RT).	63
3.2.3. Orbital Reference System (ORS)	65
3.3. Referenciais Elipsoidais	65
3.3.1. Geodetic Reference System 1967 (GRS67)	66
3.3.2. Geodetic Reference System 1980 (GRS80)	66
3.3.3. World Geodetic System 1984 (WGS84).	67
3.4. <i>Datum</i> Geodésico	70
3.4.1. Sistemas de referência: clássico x moderno	70
3.4.2. Breve histórico de <i>Data</i> usados no Brasil	72
3.4.2.1. Córrego Alegre	72
3.4.2.2. PSAD-56 (Provisional South American Datum of 1956).	72
3.4.2.3. Astro <i>Datum</i> Chuá	72
3.4.2.4. SAD-69	73
3.4.3. <i>Datum</i> Geocêntrico – SIRGAS2000	75
3.4.4. <i>Datum</i> Altimétrico	79
3.5. Sistema Geodésico Brasileiro.	81
3.5.1. Rede Planimétrica	81
3.5.2. Rede Altimétrica	82
3.5.3. Rede Gravimétrica, modelo MAPGEO2015 e modelo hgeoHNOR2020	82
3.6. Transformação de Sistemas Geodésicos.	84
3.7. Transformação de Coordenadas.	86
3.8. Fórmula dos Sete Parâmetros.	90
3.8.1. Introdução	90
3.8.2. Os sete parâmetros de transformação	91
3.8.3. A transformação Bursa-Wolf.	91
3.8.4. A transformação Molodensky-Badekas	92
3.8.5. Determinação dos 7 parâmetros de transformação	93
3.9. Variação temporal das coordenadas	95

1. INTRODUÇÃO

O homem sempre procura conhecer melhor o planeta em que vive. Este conhecimento traduz-se na definição da forma do planeta Terra, suas dimensões, comportamento dinâmico, localização etc. Estas informações servem de apoio às atividades de mapeamento cartográfico para representação da Terra, as quais utilizam medições efetuadas na superfície terrestre, para posterior obtenção das coordenadas de pontos de interesse. Atualmente, diz-se que a Geodésia é a espinha dorsal da Cartografia.

Do ponto de vista geodésico, a coleta dos dados de campo, as medições, o processamento dos dados para obtenção das coordenadas dos pontos de apoio, devem ser feitas com alta precisão, principalmente para ser suporte à outras ciências. Desta forma, no desenvolvimento das atividades geodésicas, é preciso estabelecer um sistema geodésico de referência para o posicionamento.

Com a evolução científico-tecnológica vivenciada nas últimas décadas, algumas ciências tiveram de se adequar a esta nova realidade, entre elas a Geodésia. Sua definição inicial dada por Helmert (1880) referia-se à determinação da forma e dimensões da Terra.

Na década de 50 do século XX, foram lançados os primeiros satélites artificiais, os quais fornecem grande variedade de dados. Com os avanços na área da informática e a conseqüente agilidade no processamento dos dados obtidos, foi possível incluir na definição da Geodésia, o estudo dos parâmetros definidores do campo da gravidade.

Entretanto, a definição estava incompleta, pois não abrangia as variações temporais de posicionamento e do campo de gravidade. Com o surgimento de equipamentos cada vez mais sofisticados, propiciando medidas cada vez mais precisas, pode-se considerar a elasticidade do planeta, e os aspectos temporais das medidas.

1.1 DEFINIÇÃO, OBJETIVOS, DIVISÃO DA GEODÉSIA

Conforme o dicionário cartográfico, Geodésia é a “ciência que trata da determinação do tamanho e figura da Terra e da intensidade do seu campo gravitacional. Em seu aspecto prático conduz às medições e cálculos necessários à determinação das coordenadas astronômicas e geodésicas de pontos fixos, com a finalidade de proporcionar o apoio para levantamentos de ordem inferior tendente à construção da carta precisa da superfície da Terra” (OLIVEIRA, 1987).

“Geodésia é a ciência que se ocupa da determinação da forma, das dimensões e do campo de gravidade da Terra. Na prática, a atuação do IBGE, instituição responsável no País por essas atividades, caracteriza-se pela implantação e manutenção do Sistema Geodésico Brasileiro (SGB), formado pelo conjunto de estações materializadas no terreno, cuja posição serve como referência precisa a diversos projetos de engenharia (construção de estradas, pontes, barragens), mapeamento, geofísica, pesquisas científicas, dentre outros” (IBGE, 2007).

O termo **Geodésia** foi usado pela primeira vez, por Aristóteles (384-322 a.C). A palavra Geodésia tem origem grega e significa “particionando a Terra” ($\gamma\eta$ - Terra, $\delta\alpha\omega$ - dividido). (BLITZKOW & LEICK, 1992).

Geodésia é a ciência que estuda a forma, as dimensões, o campo de gravidade da Terra e suas variações temporais.

A Geodésia é, ao mesmo tempo, um ramo das Geociências e uma Engenharia, que envolve

o levantamento e a representação da forma terrestre, global ou parcialmente.

Helmert (citado por Vanicek & Krakiwsky, 1986), define Geodésia como “a ciência que mede e representa a superfície da Terra”. Já em Bomford (1980), encontramos que “o significado literal de Geodésia é dividir a Terra, e seu primeiro propósito é fornecer uma estrutura geométrica exata para o controle dos levantamentos topográficos e outros”. Larson (1996) afirma que “Geodésia é a disciplina dedicada a medir a forma da Terra e seu campo da gravidade no espaço tridimensional e no tempo”.

“Geodésia é uma ciência interdisciplinar a qual usa medidas terrestres, espaciais e aéreas para estudar a forma e a dimensão da Terra, dos planetas e seus satélites, e suas variações; para determinar precisamente a posição e velocidade de pontos ou objetos da superfície terrestre ou orbitando a mesma, dentro de um sistema de referência terrestre realizado, e aplicar esses conhecimentos numa variedade de aplicações científica e de engenharia, usando matemática, física, astronomia e ciências da computação” (OSU-Ohio State University home page, 2017).

Com a capacitação atual a Geodésia é capaz de monitorar com alta acurácia a Terra sólida (movimentos da crosta causados ou não por terremotos), a atmosfera (composição de partículas e gases) e a hidrosfera (distribuição da água no planeta em seu estado sólido, líquido ou gasoso), tornando-se a ciência de medição e análise dos fenômenos físicos que afetam o planeta. Desta forma, a Geodésia hoje contribui significativamente para o estudo dos processos geodinâmicos e as mudanças climáticas globais, a partir da inclusão da componente temporal em seus estudos. (FORTES, 2017).

A Geodésia está relacionada com "Surveying", sendo que em alguns idiomas, este é o termo usado como equivalente. Alguns consideram “Surveying” como a prática do posicionamento, e Geodésia seria a base teórica do “Surveying”.

A Geodésia envolve a prática profissional e requer uma organização internacional: a IAG (*International Association of Geodesy*), com o site (<https://www.iag-aig.org>). A IAG é a organização responsável por coordenar as atividades geodésicas, conforme estabelecido pela *International Union of Geodesy and Geophysics* (IUGG), em 1978. Está dividida em comissões, grupos de estudo, centros (IGS, IERS, IGFS, ILRS, etc), estabelecidos para tratar problemas atuais.

1.1.1 Objetivos

A Geodésia busca propiciar a referência geométrica para as demais geociências, e dar suporte aos chamados Sistemas de Informações Territoriais, às atividades de cadastro e planejamento, à navegação quer seja aérea, marítima ou terrestre e, inclusive para aplicações militares e programas espaciais. Sendo assim, a Geodésia tem como objetivos principais o posicionamento de pontos e a representação do campo de gravidade da Terra, incluindo as suas variações temporais (VANÍCEK & KRAKIWSKY, 1986).

Devido à complexidade da geometria e da distribuição da massa terrestre, recorre-se ao uso de dois modelos: o elipsoidal e o geoidal. Isto significa que a determinação das coordenadas dos pontos na superfície terrestre e a descrição do campo de gravidade envolvem três superfícies: a superfície física da Terra, a superfície geoidal e a superfície elipsoidal, estudadas mais adiante.

O *Committee on Geodesy* (1978) tem funcionalizado a Geodésia com os seguintes objetivos, que são estendidos para a lua, oceanos e outros planetas:

a) estabelecimento e manutenção de redes globais tridimensionais de controle geodésico no terreno, reconhecendo os aspectos da variante tempo destas redes;

b) medida e representação do fenômeno geodinâmico (movimento polar, marés terrestres e movimento da crosta);

c) determinação do campo da gravidade da Terra, incluindo variações temporais.

Alcançar o objetivo do ponto de vista científico e prático da Geodésia significa localizar precisamente um ponto sobre a superfície física da Terra e chegar ao conhecimento detalhado do seu campo de gravidade. Os pontos de interesse podem ser posicionados individualmente ou como parte de redes que contemplam vários pontos. Estas possibilidades apontam para um posicionamento absoluto (no qual a posição define-se a partir de um sistema de coordenadas) ou a um posicionamento relativo (a posição é definida a partir de outros pontos da rede). Pelo fato do posicionamento necessitar do conhecimento da geometria do campo de gravidade para a redução das observações geodésicas que foram medidas na superfície física da Terra (espaço físico), ao sistema de referência sobre o qual as posições são definidas (espaço geométrico), o conhecimento do campo de gravidade é imprescindível para a Geodésia (SÁ,2000). No que se refere às variações temporais, as deformações são relacionadas às marés terrestres, cargas crustais, forças tectônicas e outras. A Geodésia considera a geometria das deformações, ao passo que a Geofísica estuda suas causas e implicações para conhecer a estrutura e propriedades físicas da Terra. O geodesta lida com aspectos variantes no tempo de feições superficiais e subsuperficiais, ao passo que o geofísico que aprender mais sobre o comportamento dinâmico da Terra para interpretar os dados geodésicos.

1.1.2 Divisão da Geodésia

Embora não seja consenso entre os autores, pode ser dividida em: Geodésia Geométrica, Geodésia Física, e Geodésia Celeste, que é proposto por Gemael, 1987. Neste caso, as observações angulares e lineares, juntamente com as astronômicas, e o estudo do elipsoide são tratadas pela Geodésia Geométrica. A Geodésia Física trata do conhecimento detalhado do campo da gravidade. Já as medidas realizadas envolvendo satélites artificiais são da Geodésia Celeste. Para Seeber, 1993, a Geodésia classifica-se em Geodésia Física, Geodésia Astronômica, Geodésia por Satélite e Geodésia Matemática. Outros consideram a Geodésia Dinâmica como mais uma divisão.

Muitos autores denominam a Geodésia Celeste ou por Satélites como Geodésia Espacial.

Podem ser identificados três objetos distintos da Geodésia (BLITZKOW et al, 2011):

- a) geometria e as deformações da Terra;
- b) os parâmetros de orientação do planeta no espaço;
- c) o campo de gravidade envolvendo o geoide.

A IAG (*International Association of Geodesy*) criou recentemente o GGOS (*Global Geodetic Observing System*) para integrar as três áreas fundamentais da Geodésia, visando monitorar os parâmetros geodésicos e sua variação com o tempo, em um referencial global com acurácia relativa da ordem de 10^{-09} , ou melhor. As três áreas, também denominadas de pilares da Geodésia, tratam com a determinação e evolução da Geometria da Terra (topografia, batimetria, gelo, nível dos mares) a rotação e orientação da Terra no espaço (movimento do pólo, variação da rotação, nutação, etc.) e o campo de gravidade da Terra (gravidade, geoide). Desta forma, numa visão contemporânea, a Geodésia trata das posições 3D de pontos obtidas com precisão para estabelecer o controle geodésico, o campo da gravidade e modelagem e determinação de fenômenos geodinâmicos (movimento do polo, deformação da crosta e rotação da Terra).

Na figura 1.1 podem ser visualizados os **3 pilares da Geodésia**, integrados a estruturas

geodésicas de referência (IAG-GGOS, 2020).

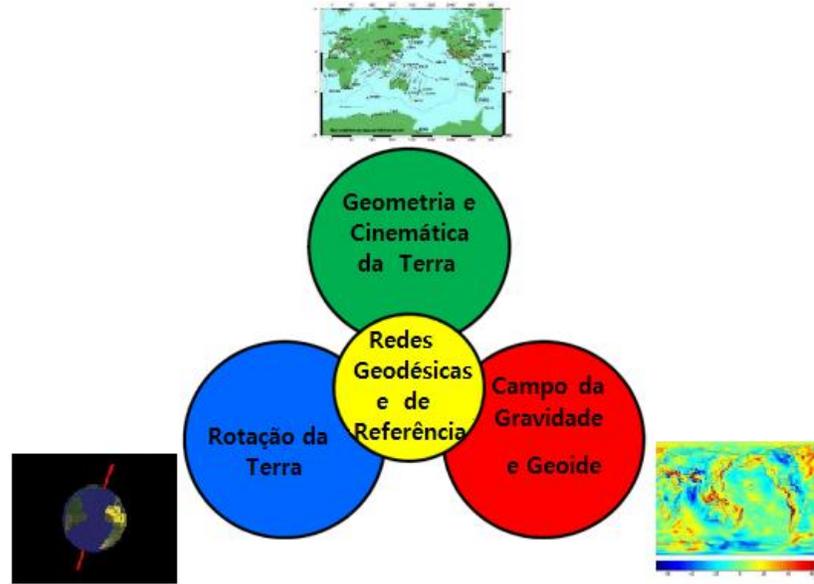


Figura 1.1 – Os 3 pilares da Geodésia

Fonte: Adaptado de <http://iag-ggos.org>; H.P. Plag & M. Pearlman, 2009, apud DALAZOANA, 2016

Considerando a interação da Geodésia com outras ciências, tem-se a figura ilustrativa de Vanicek (1986).

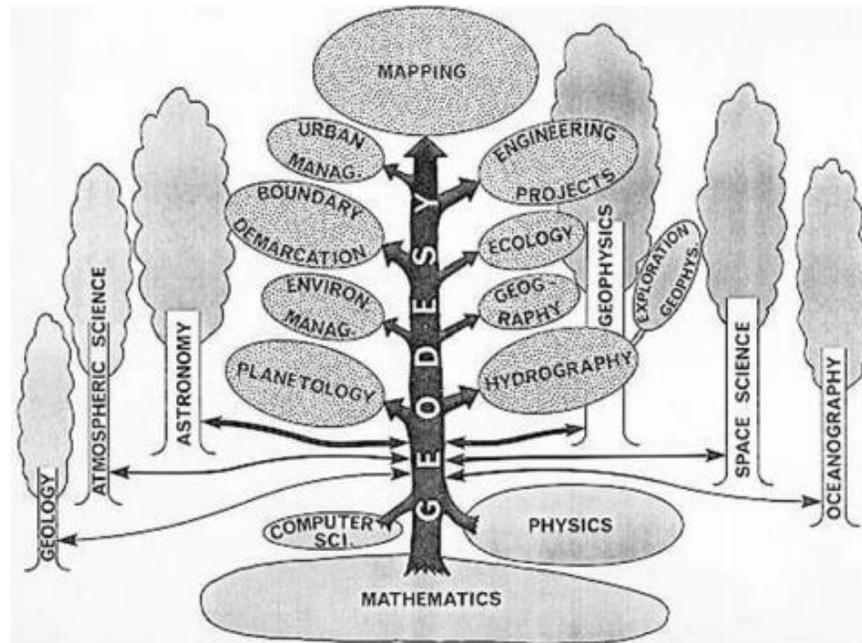


Figura 1.2 – A Geodésia e outras disciplinas. Fonte (VANICEK, 1986). Disponível em: https://www2.unb.ca/gge/Personnel/Vanicek/Geodesy_chapter.pdf

1.2 FORMAS DA TERRA: DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO

A Geodésia nasceu motivada pelo medo e curiosidade em prever acontecimentos naturais e compreensão de sua ocorrência.

Por muitos séculos, o estudo da geometria terrestre baseou-se em observações ao Sol, Lua, estrelas, planetas, ou seja, as primeiras descobertas geodésicas apoiaram-se em observações astronômicas. Na era grega foram feitos os primeiros registros históricos da Geodésia.

Nos trabalhos de rotina, a Geodésia adota sistematicamente o elipsoide de revolução como modelo de representação da Terra. Para chegar a esta solução, houve várias iniciativas.

Desde a origem da humanidade, há especulações sobre a forma da Terra. Na observação curiosa de alguns fenômenos, surgiram várias superstições, ritos e cultos. Inicialmente, foram usadas apenas observações astronômicas no estudo da geometria terrestre. Essas observações, e consequentes descobertas, permitiram uma melhor compreensão dos eventos, e delas resultaram várias culturas e civilizações. Esses fenômenos naturais frequentemente estão relacionados com a forma, as dimensões, o campo de gravidade da Terra e suas variações temporais.



Figura 1.3 – Observações astronômicas

A seguir é apresentado um resumo histórico dos fatos e descobertas mais relevantes.

1.2.1 Fase Plana

Aproximadamente até o século IV AC, os sábios da época acreditavam que a Terra era plana, com forma retangular, circundada pelos mares. No limite das águas com o espaço, havia seres mitológicos, o que inibia as aventuras marítimas.

Anaxímenes defendia que a Terra era retangular, que flutuava sobre um oceano infinito, o qual era mantido no espaço por um colchão de ar. Homero considerava a Terra plana, e afirma num de seus poemas que a mesma seria sustentada por quatro elefantes no dorso de uma tartaruga.

1.2.2 Fase Esférica

Observando o comportamento das embarcações que partiam dos portos da antiguidade, o homem notou que, conforme se afastavam de um porto, os barcos desapareciam gradualmente: primeiro o casco, e por último as velas. Este fato despertou os primeiros questionamentos sobre a real forma da Terra, a qual poderia assemelhar-se a uma laranja, ou seja, esférica. Assim, surgem os primeiros a defender a ideia da esfericidade terrestre, entre eles:

a) Homero: nos seus poemas, apresenta a Terra como sendo um grande disco que flutuava sobre o oceano, e o Sol como o coche no qual os deuses faziam seu passeio diário.

b) Aristarco de Samos: foi um matemático e astrônomo grego do sec. III a.C, e que foi acusado de perturbar o descanso dos deuses por sua afirmação, a primeira da História, sobre a existência de movimentos de translação e rotação da Terra.

c) Tales de Mileto (625-547 a.C): foi o primeiro defensor da esfericidade terrestre, afirmando também que a mesma girava em torno do sol. Introduziu o conceito de esfera celeste empregado na Astronomia e foi fundador da Trigonometria.

d) Pitágoras de Samos (580-500 a.C): filósofo e matemático grego, fundador da escola de Crotona, introduziu a ideia da Terra esférica. A observação do comportamento dos astros sugeriu-lhe que uma “ordem” dominava o universo, e que o mundo poderia ser denominado de “cosmos”.

e) Aristóteles (384-322 a.C): filósofo e matemático, admitia a esfericidade da Terra, considerando-a imóvel. Introduziu os primeiros conceitos referentes à força de gravidade terrestre, e trouxe argumentos positivos sobre a esfericidade terrestre, entre eles:

- 1) o contorno circular da sombra projetada pela Terra nos eclipses da Lua;
- 2) a variação do aspecto do céu estrelado com a latitude;
- 3) a diferença no horário de observação de um mesmo eclipse para observadores situados em diferentes meridianos.



Figura 1.4 – Argumentos para esfericidade terrestre – Fonte: <https://astronomiareal.wordpress.com/>

f) Arquimedes de Siracusa (287 – 212 a.C): considerado o maior matemático da antiguidade, concebia o universo na forma de uma enorme esfera, com centro na Terra (imóvel) e o raio igual à distância da Terra ao Sol. Afirmava que o diâmetro da lua <diâmetro da Terra < diâmetro do Sol.

g) Eratóstenes (276 - 175 a.C): matemático, astrônomo e geógrafo grego, foi Diretor da biblioteca de Alexandria. Determinou a inclinação da eclíptica (projeção sobre a esfera celeste da trajetória aparente do Sol, observada a partir da Terra), investigou as medidas da Terra e calculou o meridiano terrestre. Sabe-se que os egípcios eram grandes medidores de terras, sendo que as medições ao longo do Rio Nilo serviram de base para o experimento de Eratóstenes, considerado o fundador da Geodésia. Eratóstenes provou a esfericidade da Terra, calculando sua circunferência a partir da diferença de latitudes entre 2 cidades egípcias: Alexandria e Syene (atual Assuan ou Aswan, situada às margens do Rio Nilo, suposta situar-se sobre o Trópico de Câncer, já que a tradição preconizava que “no dia de solstício de verão, os raios de luz do astro-rei iluminavam o fundo de um poço”), estando no zênite do lugar neste momento. Se um corpo celeste está no zênite do lugar, a linha que une este corpo celeste e o observador, passa pelo centro da Terra. Ao mesmo tempo, não estava a pique em Alexandria, fazendo surgir a projeção de uma sombra que fazia um ângulo de $7^{\circ}12'$ com a vertical. Ele usou um gnômon (vara), obtendo para a distância zenital meridiana do Sol (no solstício de verão), na cidade de Alexandria, o valor de $1/50$ da circunferência ($7^{\circ}12'$).

Eratóstenes considerou que as duas cidades estavam situadas num mesmo meridiano, e obteve para o comprimento do arco de 1° , o valor de 694,4 estádios, que corresponde para a circunferência equatorial, a 250.000 estádios ou 39.375 km. Foi o primeiro matemático da antiguidade que encontrou um valor tão próximo do real (40.074,15 km), e que perdurou por muitos séculos. Hoje se sabe que Syene está a 3° a leste de Alexandria.

O ângulo θ mede $7^{\circ}12'$. Na figura 1.5, as retas r e s são paralelas. Como a reta t as

intercepta, tem-se que os ângulos θ e β são alternos internos (congruentes). O arco compreendido entre Siene e Alexandria (SA), determinado pelo ângulo β , também vale $7^{\circ}12'$. Assim, tem-se:

$$\frac{7^{\circ}12'}{360^{\circ}} + \frac{7 \times 60' + 12'}{360^{\circ} \times 60'} = \frac{432'}{21600'} = 1/50. \text{ fazendo } 50 \times 787,5 = 39.375 \text{ km}$$

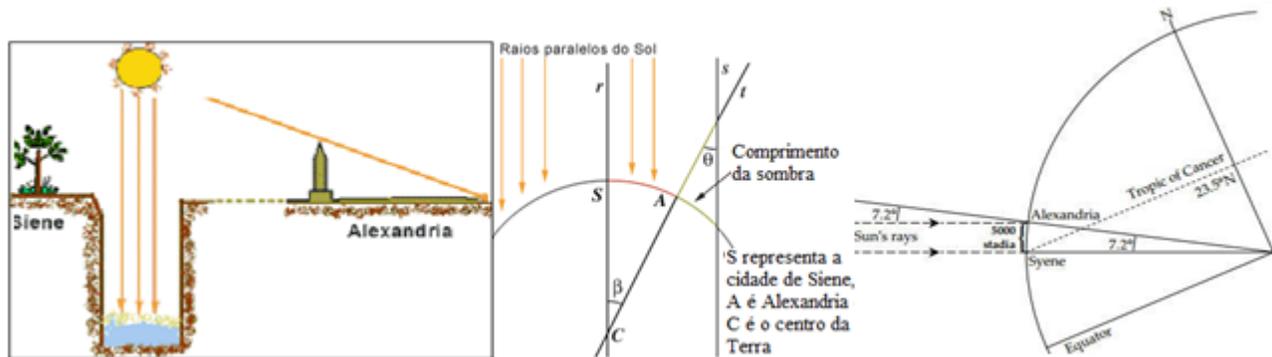


Figura 1.5 - Experimento de Eratóstenes. Fonte: www.moderna.com.br/moderna/didaticos/ef2/matematica/erato/

Para prosseguir no experimento, era preciso conhecer a distância Alexandria-Syene, o que não era difícil, face aos trabalhos de agrimensura dos egípcios no vale do Rio Nilo, e que era de 5000 estádias (300 milhas ou cerca de 787,5 km).

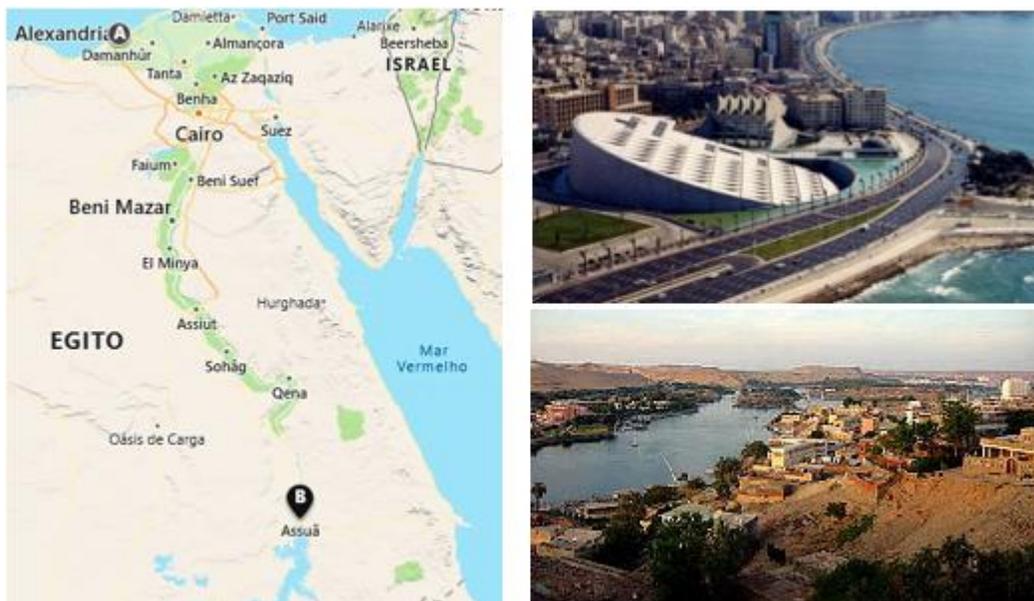


Figura 1.6 – Cidades de Alexandria e Assuã. Fonte: <https://www.tripsinegypt.com> e <https://images.memphistours.com/>

- h) Posidônio (130-50 a.C): fez experimento semelhante a Eratóstenes, usando a estrela Canopus como visada.
- i) Ptolomeu (sec II): foi autor do sistema geocêntrico, que perdurou até Copérnico.
- j) Árabes: cabe aos árabes a única tentativa conhecida com objetivo de obter as dimensões terrestres no primeiro milênio da era cristã.

k) João Picard (1620 - 1682): foi um astrônomo francês que introduziu várias melhorias no instrumental de medidas angulares, e que mediu o arco de meridiano de Paris e Amiens, em função do qual, calculou o raio da Terra, obtendo 6275 km. Foi quem realizou a primeira medida da era moderna para dimensões da Terra, 19 séculos depois de Eratóstenes.

l) Snellius (1591-1626): geodesta que introduziu um método de medida de distâncias através das medidas angulares de triângulos chamado método das triangulações. Ele efetuou o trabalho prático de medida de um arco de meridiano para determinar a forma da Terra.

1.2.3 Fase Elipsoidal

Pode-se considerar que a era esférica da Geodésia compreende o período entre Eratóstenes e Picard, sendo que a determinação das dimensões da Terra esférica consistia na determinação do seu raio a partir das observações. A fase elipsoidal inicia com as investigações teóricas de Newton.

a) Sir Issac Newton (1642 - 1727); foi um físico e matemático inglês, cujas especulações não admitiam harmonização entre o movimento de rotação e a forma perfeitamente esférica do planeta. Outrossim, considerava, como consequência da força centrífuga, um eixo polar mais curto, abrindo perspectivas para a era elipsoidal.

b) Cassini (1625 - 1712): foi um astrônomo francês, diretor do Observatório de Paris, que ao prosseguir os trabalhos de triangulações iniciados por Picard, concluiu que o comprimento de um arco de meridiano decresce com o aumento da latitude, resultando para a Terra um achatamento equatorial, e alongamento nos polos.

A contradição entre a teoria de Newton (apoiado por Huygens e Richer) e as conclusões de Cassini originou uma polêmica entre as duas escolas europeias: os adeptos de uma Terra achatada e os adeptos de uma Terra alongada, controvérsia esta fundamental para o início da Geodésia Moderna.

Para esclarecer a dúvida, a Academia de Ciências de Paris patrocinou a medição de dois arcos de meridiano em latitudes diferentes: um próximo do equador e outro próximo do pólo ártico. A expedição equatorial (1735-1744), formada por Bouguer, Godin, La Condamine e dois jovens oficiais espanhóis, foi enviada para o Peru, hoje Equador, (latitude = $1^{\circ}30'S$). Foram medidos dois arcos de meridiano com cerca de 3° de amplitude e obteve num deles, para o arco de 1° , o comprimento de 110.614 m.

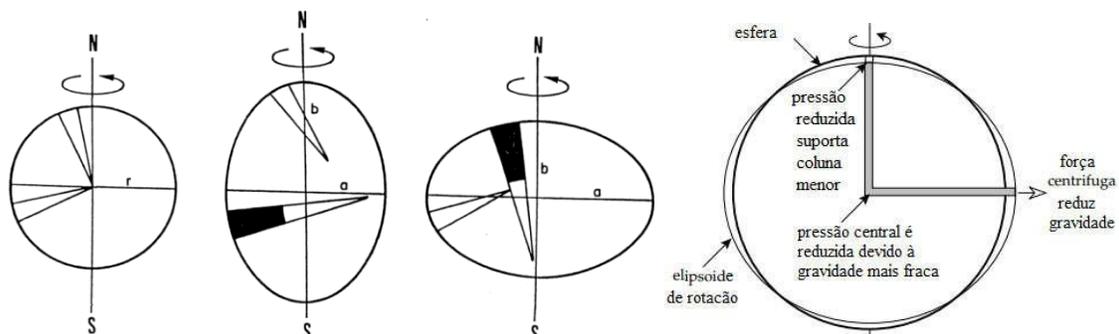


Figura 1.7 – A polêmica entre Newton e Cassini Fonte: Lowrie, W.2007 Cambridge Books Online
<http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511807107.003>

A expedição polar (1736-1737), formada por Maupertius, Camus, Celsius e depois Clairaut, foi enviada para a Lapônia (latitude = $66^{\circ} 20'N$), e obteve para o arco de 1° , o

comprimento de 111.948 m, o que confirmava a teoria newtoniana sobre a Terra achatada. Conclui-se então que a Terra tem a forma de uma esfera achatada por causa de sua rotação, sendo que o raio é maior no Equador devido a maior força centrífuga, com a tendência de acelerar a massa central para fora.

Durante os séculos XVI e XVII, a Geodésia teve grandes avanços com os cientistas Tycho Brahe (1546- 1601), Galilei Galileo (1564-1642), Kepler (1571-1630), Snell (1591- 1626), e com o surgimento do telescópio, tábua de logaritmos e métodos de triangulação.

1.2.2 Fase Geoidal

No início do século XIX, cientistas de renome lançaram as bases de uma nova teoria que atribui à Terra uma forma mais irregular e complexa do que a do modelo elipsoidal.

a) Clairaut (1713-1765); Laplace (1749-1827): surge a noção de superfícies equipotenciais.

b) Listing (1872), surge a superfície equipotencial de nível zero (origem das altitudes), denominada de superfície geoidal.

c) J.K.F. Gauss (1777-1855): definiu a forma geoidal e elaborou juntamente com Legendre, o Método dos Mínimos Quadrados, empregado na teoria do Ajustamento de Observações. Muitos o consideram o “pai da Geodésia”.

d) Cavendish (1798): efetua a primeira medida do peso da Terra.

e) Bessel (1784-1846): determinou com precisão a forma da Terra, considerando e medindo seu achatamento (há um elipsoide que leva seu nome).

f) Michelson (1852-1931): aplica a teoria da propagação de ondas eletromagnéticas na medição de distâncias (EDM).

g) Stokes (1819-1903): desenvolveu os fundamentos teóricos para a representação do geoide no seu famoso trabalho “*On the variation of gravity and the surface of the Earth*”, no qual faz uso das anomalias gravimétricas para o cálculo das alturas geoidais ou ondulações geoidais N.

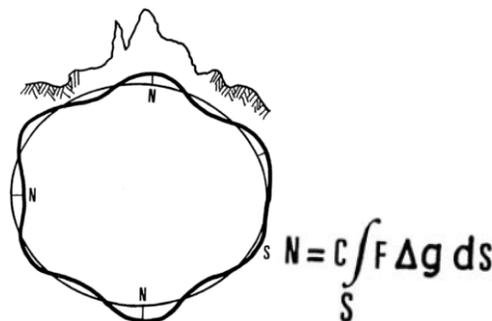


Figura 1.8 – Ondulação geoidal (N) - Fonte: Sá, 2000

h) Bruns (1878): seu trabalho chamado “*The Earth’s figure*”, é direcionado na integração de medidas geodésicas visando o posicionamento e a representação do campo de gravidade. Já Helmert (1843 - 1917) ocupava-se com a representação formal dos fundamentos matemáticos e físicos da Geodésia publicadas em seu livro “*Mathematical and Physical Theory of Geodesy*”.

i) Vening Meinesz (1927) publicou as fórmulas de cálculo das componentes do desvio vertical (i) a partir de anomalias gravimétricas.

j) Molodenskii, geodesta soviético que em 1945 apresenta o trabalho denominado “*Basic Problems of Geodetic Gravimetry*”, estabelecendo um novo meio de referência: o quase-geoide.

Outros estudiosos contribuíram para a Geodésia como ciência: Lagrange (1736-1813), Laplace (1749-1827), Fourier (1768- 1830), Coriolis (1792-1843), Einsten (1879-1955), etc.

A Geodésia da era Moderna foi e tem sido contemplada com vários avanços em diversas áreas, entre elas: o desenvolvimento da rádio-detecção e sistemas de medição, surgimento dos computadores que permitiram cálculos mais simples e mais rápidos, o aparecimento dos EDM propiciaram maior precisão e rapidez nas medidas, a rádio-astronomia e rádio-interferometria conduzem ao desenvolvimento de métodos geodésicos espaciais, o lançamento do primeiro satélite artificial, posicionamento de pontos com uso de objetos extraterrestres, uso de satélites para estudo do campo gravitacional terrestre, tecnologia GNSS (*Global Navigation Satellite System*), etc.

1.3. CONCEITOS PRELIMINARES

Alguns conceitos são importantes na abordagem da Trigonometria esférica, entre eles:

Esfera ou superfície esférica: superfície cujos pontos distam igualmente em relação ao ponto fixo chamado centro. Esta distância é o raio da esfera. Lugar geométrico dos pontos do espaço que equidistam de um ponto interior chamado centro. Toda seção plana de uma esfera é um círculo.

Círculo máximo da esfera: resulta da interseção por um plano que passa pelo centro da esfera. O raio do círculo máximo é igual ao raio da esfera. Se o plano que “corta” a esfera não contém o centro da esfera, tem-se o **círculo menor**. Por dois pontos sobre uma esfera é sempre possível passar um círculo máximo. A figura seguinte apresenta círculo máximo e círculo menor.

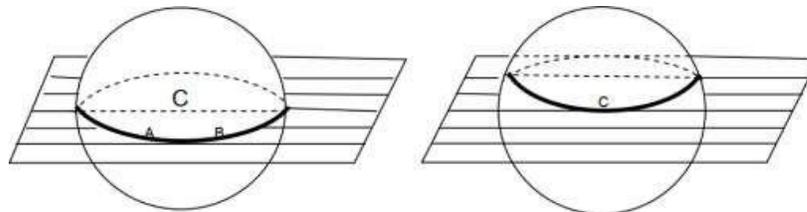


Figura 1.9: Círculo Máximo e círculo menor

Distância esférica: é o menor arco de circunferência máxima que liga dois pontos na superfície esférica.

Meridiano é uma circunferência máxima que contém os pólos de uma superfície esférica.

A Geodésia tem como objetivos principais o posicionamento de pontos e a representação do campo de gravidade da Terra, incluindo as suas variações temporais. A complexidade da geometria e da distribuição da massa terrestre conduz a utilização de dois modelos: o elipsoidal e o geoidal. A determinação das coordenadas dos pontos na superfície terrestre e a descrição do campo de gravidade envolvem três superfícies: a superfície física da Terra, a superfície geoidal e a superfície elipsoidal. Para melhor compreensão de vários conceitos geodésicos, a definição dessas superfícies é de fundamental importância. Estes conceitos facilitam a compreensão e visualização

das coordenadas envolvidas e do chamado desvio da vertical.

1.3.1. Superfícies de Referência

Segundo Torge, 1991, nos levantamentos geodésicos é introduzida uma superfície de referência para que se faça distinção entre coordenadas curvilíneas e altitudes. No posicionamento planimétrico e altimétrico de pontos na superfície terrestre, faz-se necessário uma superfície de referência para expressar as posições destes pontos. As medidas são efetuadas na superfície do terreno. Os cálculos são efetuados adotando o modelo elipsoidal (elipsoide de revolução) para a Terra, que é a figura geométrica que mais se aproxima do geóide. As 3 superfícies mais importantes usadas na Geodésia, visualizadas na figura 1.10 são:

a) Superfície Física da Terra (SF): é a superfície limitante do relevo topográfico (continental ou oceânico), sobre a qual são feitas medições geodésicas de distâncias, de ângulos, etc. Também chamada superfície topográfica ou real, é uma superfície entre as massas sólidas ou fluidas e a atmosfera (TORGE, 1991). É irregular, não sendo possível representá-la por uma simples relação matemática.

b) Superfície Geoidal (SG): é a equipotencial que coincide com o nível médio dos mares não perturbados (FISHER, 1975). É uma superfície equipotencial do campo da gravidade que melhor se aproxima do nível médio dos oceanos em toda a Terra (VANICEK & KRAKIWSKY, 1982). O geóide é uma superfície que teoricamente passa pelos pontos de altitude nula, determinados pelos marégrafos. É muito irregular, sendo impossível obter-se um modelo matemático exato que o represente. Na sua qualidade de geóide, o geóide é uma superfície horizontal, por ser em qualquer ponto perpendicular à respectiva vertical (GEMAEL,1987). Um dos mais importantes problemas geodésicos é a determinação das ondulações do geóide (N), que é a separação entre essa superfície equipotencial e o elipsoide.

c) Superfície Elipsoidal (SE): é a equipotencial limitante do elipsoide adotado, sendo que as observações geodésicas, efetuadas na superfície física da Terra, são reduzidas à superfície elipsoidal para todos os cálculos geodésicos. É a superfície do modelo geométrico no qual são efetuados os cálculos geodésicos e desenvolvidas as fórmulas. É a superfície de referência com tratamento matemático que mais se aproxima do geóide.

A Geodésia trabalha com outras superfícies (teluroide, quase-geóide, co-geóide) que são empregadas em conceitos da Geodésia Física.

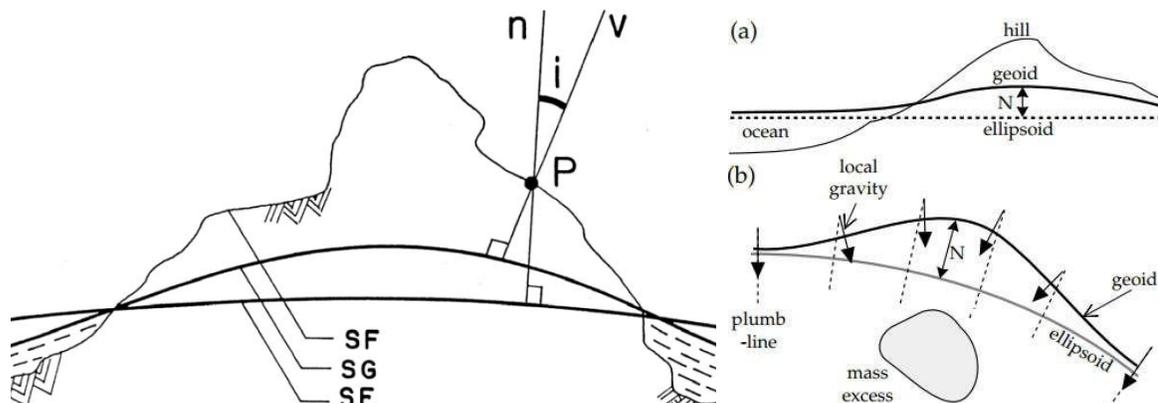


Figura 1.10 - Superfícies de Referência - Fonte: Sá,2000 e Lowrie, 2007 (a massa exterior ao elipsoide (a) ou o excesso de massa abaixo do elipsoide (b) eleva o geóide sobre o elipsoide).

1.3.2. Coordenadas Astronômicas e Geodésicas

Todos os corpos terrestres estão sujeitos à força da gravidade resultante da força de atração exercida pelas massas terrestres e da força centrífuga que é decorrente do movimento de rotação do planeta. Os conceitos teóricos aqui envolvidos podem ser estudados com mais detalhe à luz da Teoria do Potencial, surgindo o termo superfícies equipotenciais. As superfícies equipotenciais com $W = \text{constante}$ do campo da gravidade (sendo W o potencial do campo da gravidade) são chamadas geopes, superfícies suavemente irregulares devido a não homogênea distribuição de massas terrestres. São perpendiculares em todos os seus pontos, às linhas de força do campo (Teoria do Potencial). Estas considerações permitem definir vertical e normal de um ponto:

- Vertical de um ponto P (v): é a linha de força do campo de gravidade da Terra real que passa pelo ponto. Na prática, a vertical é a tangente à linha de força no ponto considerado. Representa a direção do vetor gravidade \mathbf{g} . Está ao nosso alcance através do fio de prumo verticalizado, ou do eixo principal de um teodolito nivelado. É a perpendicular ao geope, passante pelo ponto. Temos então vertical ao geóide. Note a vertical ao geóide (SG) na figura anterior.

- Normal de um ponto P (n): é a linha de força do campo de gravidade da Terra normal ou teórica que passa pelo ponto em questão. Na prática, a normal é a linha tangente à linha de força no ponto considerado. Temos então normal ao elipsoide.

a) Coordenadas astronômicas: estão relacionadas com a vertical do ponto.

O sistema de coordenadas astronômicas, também conhecido como “sistema de coordenadas naturais”, foi usado no posicionamento e orientação dos referenciais geodésicos horizontais antes do advento do posicionamento por satélites, quando ainda não era possível obter coordenadas geocêntricas. Foram fundamentais na definição dos referenciais geodésicos clássicos, sendo de difícil obtenção, podendo envolver programas de observação longos e de execução trabalhosa.

-Latitude Astronômica (ϕ_A): é o ângulo formado pela vertical ao ponto e sua projeção sobre o Equador. É positiva no hemisfério Norte e negativa no hemisfério Sul. Na latitude astronômica, o equador não é o lugar geométrico de pontos com latitude nula, devido à irregular distribuição das massas terrestres que faz com que a vertical em cada ponto equatorial não pertença necessariamente ao plano equatorial. Emprega-se o índice “A” para identificar como astronômica.

-Longitude astronômica (λ_A): ângulo diédrico formado pelo meridiano astronômico do observador situado no ponto e o meridiano de Greenwich (médio). O meridiano astronômico tem seu plano definido pela vertical do lugar e uma paralela ao eixo de rotação médio (vertical e eixo não necessariamente coplanares). O meridiano origem é o meridiano médio de Greenwich.

Devido ao movimento do polo, que altera a posição do eixo de rotação terrestre e, como consequência, a posição do Equador, as coordenadas astronômicas variam com o tempo.

-Azimute Astronômico (A_A): ângulo horizontal formado pelos planos do meridiano do lugar e do plano vertical do astro. Na Astronomia, o azimute é geralmente contado do Sul por oeste; na Geodésia, do norte por leste.

b) Coordenadas Geodésicas (ou elipsóidicas): relacionadas com a normal do ponto.

O modelo matemático utilizado é o elipsoide de revolução. É estabelecido o paralelismo entre o eixo de rotação terrestre e o eixo de rotação do elipsoide, uma vez que não é possível fazer a coincidência do centro geométrico do elipsoide com o centro de gravidade da Terra, por

desconhecemos este último.

As seções produzidas por planos perpendiculares ao eixo de rotação são circulares (paralelos e equador); já as seções produzidas por planos que contém aquele eixo são elípticas (meridianos), sendo todas com o mesmo eixo.

A figura 1.11 apresenta as coordenadas geodésicas de um ponto P na superfície física da Terra. No ponto P' situado sobre a superfície do elipsoide, imaginemos uma tangente ao elipsoide passante por P', que forme 90° com a normal n . As coordenadas geodésicas de um ponto são:

- Latitude Geodésica (φ): ângulo formado pela normal (n) ao ponto considerado, com sua projeção equatorial. Também conhecida como latitude elipsóidica de P', projeção normal (ou projeção de Helmert) do ponto P sobre o elipsoide. A latitude geodésica tem origem no equador do modelo, e é nula em todos os pontos do mesmo. Varia de 0 a 90°, negativa no hemisfério Sul.

- Longitude Geodésica (λ): Sabe-se que a normal e o eixo de rotação, diferentemente do que ocorre com a vertical, são coplanares. A normal e o eixo de rotação do elipsoide definem um plano meridiano geodésico. A interseção deste plano com a superfície do elipsoide define o meridiano geodésico do ponto P. O diedro formado pelo meridiano geodésico paralelo ao de Greenwich (considerado como origem), e pelo meridiano do ponto P, define a longitude geodésica de P, variando de 0 a 180°, por leste e por oeste, considerada positiva a leste.

1.3.3. Altitudes

Além da latitude e longitude geodésicas, para se definir sem ambiguidade a posição de um ponto P da superfície terrestre, necessitamos da altitude geométrica h (segmento PP' na figura 1.11), uma vez que a latitude geodésica e a longitude geodésica apenas definem a reta normal do ponto P; a coordenada geodésica h indica a exata posição do ponto sobre a normal.

- Altitude Geométrica (h): é a distância do ponto P até sua projeção P' no elipsoide, contada ao longo da respectiva normal. Os receptores GNSS fornecem altitude geométrica. Alguns autores a chamam de altura geométrica. Esta coordenada é nula na superfície do elipsoide.

Pode-se falar também do azimute geodésico (A), que é o ângulo compreendido entre o meridiano geodésico do observador e a direção considerada.

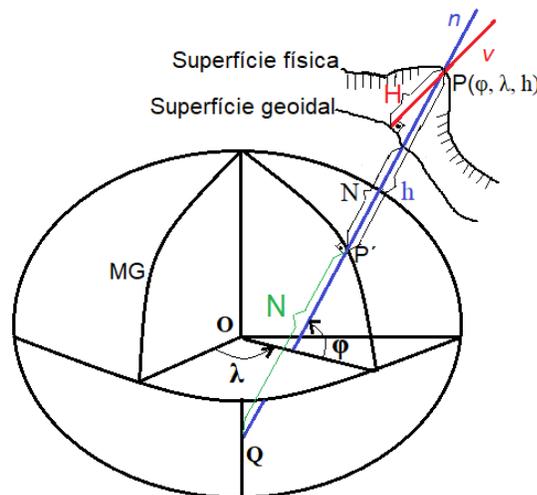


Figura 1.11 - Coordenadas geodésicas de um ponto P na superfície física da Terra

Na figura 1.11, MG é o Meridiano de Greenwich, N é a Grande Normal (cor verde).

- Altitude Ortométrica (H): distância compreendida entre o ponto considerado e o geóide, contada sobre a vertical. Pode ser obtida por nivelamento geométrico associado à gravimetria, ou por rastreamento de satélites artificiais em pontos nos quais o geóide é conhecido (MAPGEO2015).

- Ondulação Geoidal (N): N é a medida da separação ou do desnível entre a superfície do geóide e o elipsoide no ponto considerado. Seu valor é geralmente inferior a 50 metros. Há várias maneiras de se efetuar sua determinação: método astro-geodésico, integral de Stokes, métodos combinados, harmônicos esféricos. O MAPGEO2015 do IBGE permite obter N.

Obs: Há bibliografias mais antigas em que há uma troca de notação entre h e H.

Na figura 1.12 podem-se visualizar as altitudes já tratadas anteriormente, a ondulação geoidal N, a normal ao elipsoide e a vertical ao geóide, perpendiculares às respectivas superfícies, mas não coincidentes entre si ou mesmo paralelas. Assim, essas duas linhas formam entre si um ângulo i , chamado desvio da vertical. A relação entre essas altitudes é dada através de:

$$h = N + H \cdot \cos i \quad \rightarrow \quad \boxed{h \approx H + N} \quad (1.1)$$

Na expressão acima, o valor de i é menor que $0^{\circ}01'$, causando um erro muito pequeno, próximo de zero (0,4 mm). Desta forma, como $\cos(i) \approx 1$, pode-se fazer a seguinte aproximação: a normal e a vertical estão numa mesma reta, chamada projeção de Helmert. Assim, a fórmula (1.1) que fornece o valor de h é uma aproximação pelo fato de N e H não serem colineares.

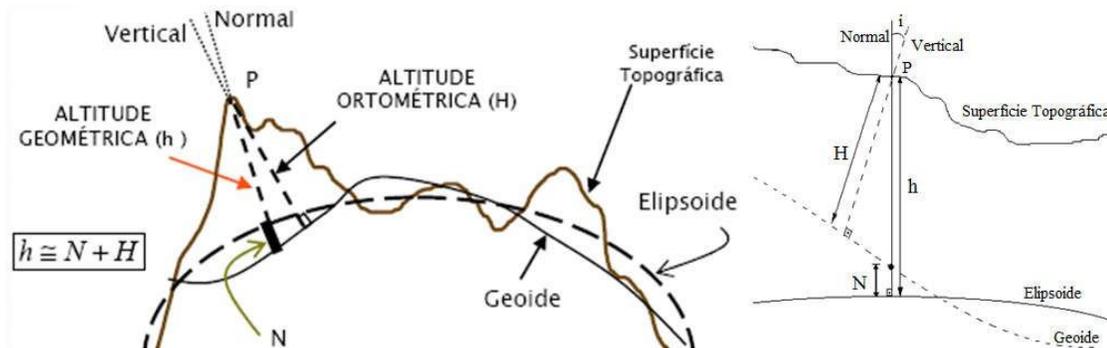


Figura 1.12 - Altitudes geométrica e ortométrica e Ondulação geoidal

A separação entre geóide e elipsoide não ultrapassa 100 m nos casos extremos. Devido a este fato e como a inclinação entre as superfícies envolvidas é pequena, as coordenadas astronômicas e geodésicas apresentam pequena diferença.

- Altitude Normal (H^N): até 30/07/2018, disponibilizava-se ao usuário altitudes ortométricas H do tipo normal das RRNN (referências de nível) do SGB (Sistema geodésico Brasileiro). No SGB, as altitudes físicas eram classificadas como normais-ortométricas, mas tradicionalmente conhecidas como ortométricas (IBGE, 2019). A partir do reajustamento altimétrico feito em 2018 pelo IBGE, o Banco de Dados Geodésicos BDG disponibiliza altitudes normais, seguindo as recomendações do SIRGAS - Sistema de Referência Geodésico para as Américas. Para o cálculo da altitude normal, é necessário obter o valor médio, ao longo da vertical, da gravidade normal (γ_{vert}), isto é, a gravidade teórica dada pelo chamado modelo Terra normal (no elipsoide). A altitude normal é medida ao longo da linha vertical normal, isto é, a ortogonal às superfícies equipotenciais do campo normal. Por não considerar o campo real, a altitude normal não se refere

rigorosamente ao geóide, mas sim a uma superfície próxima a ele, denominada **quase-geóide**. Em resumo, a diferença conceitual entre as altitudes ortométrica, normal e normal-ortométrica reside no tipo de gravidade (real ou teórica) utilizado nas etapas de cálculo (IBGE, 2019).

As novas altitudes normais se mantêm relacionadas aos referenciais altimétricos atualmente vigentes no Brasil, Imbituba-SC e Santana-AP. O modelo de conversão hgeoHNOR2020 divulgado pelo IBGE em 05/08/2021 permite a obtenção de uma altitude física, convertida a partir de uma altitude geométrica. O modelo fornece a separação entre o elipsoide de referência das altitudes geométricas em SIRGAS2000 e as superfícies de referência da realização REALT 2018 da componente vertical do Sistema Geodésico Brasileiro - SGB (data verticais de Imbituba e Santana) (IBGE, 2021). Assim, o fator para conversão (η , da figura 1.13) que é extraído do modelo hgeoHNOR2020 permite obter altitudes normais modeladas (H_{mod}^N), indicada na expressão (1.2), compatíveis com o REALT 2018, a partir de altitudes geométricas (h), as quais são resultantes de medições GNSS em regiões que não dispõe de cobertura adequada da Rede Altimétrica de Alta Precisão (RAAP), ou seja, onde não há estações altimétricas do SGB:

$$H_{mod}^N = h - \eta \quad (1.2)$$

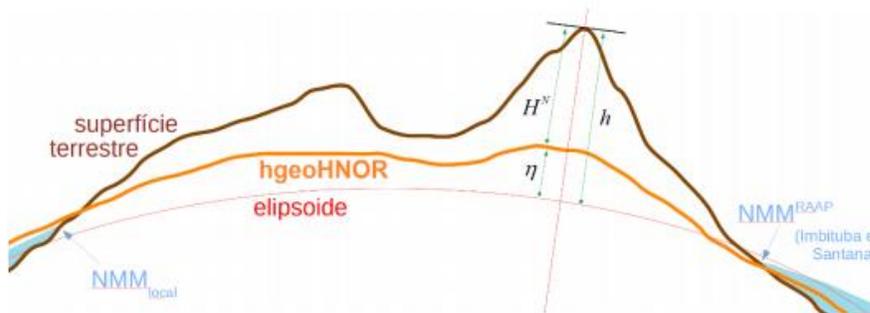


Figura 1.13: relação entre altitude geométrica (elipsoidal) h , altitude do SGB e modelo hgeoHNOR

1.3.4. Desvio da Vertical

Na figura seguinte pode-se visualizar o chamado **desvio da vertical**: que é o ângulo i formado pela vertical ao geóide e pela normal ao elipsoide.

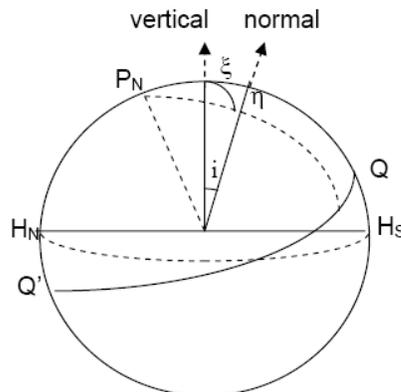


Figura 1.14 - Desvio da Vertical

O desvio da vertical (i) pode ser decomposto em:

ξ - componente meridiana; η - componente primeiro vertical.

A expressão que permite o cálculo do desvio da vertical i é dada por:

$$i^2 = \eta^2 + \xi^2 \quad (1.3)$$

As componentes do desvio da vertical podem ser determinadas pelas expressões:

$$\xi = \varphi_A - \varphi \quad (1.4a)$$

$$\eta = (\lambda_A - \lambda) \cos \varphi \quad (1.4b)$$

$$\eta = (A_A - A) \cotg \varphi \quad (1.5)$$

Das equações (1.3) e (1.4), obtém-se: $(\lambda_A - \lambda) \cos \varphi = (A_A - A) \cotg \varphi$

ou também:
$$A = A_A - (\lambda_A - \lambda) \operatorname{sen} \varphi \quad (1.6)$$

Estas equações permitem transformar coordenadas astronômicas em geodésicas e vice-versa, uma vez conhecidas as componentes do desvio da vertical. A equação (1.6) é conhecida como Equação de Laplace (simplificada), e permite a transformação do azimute astronômico em geodésico, sem o conhecimento do desvio da vertical. É a chamada Equação de Laplace para azimutes, utilizada no ajustamento de triangulações. Assim, os vértices de triangulação nos quais são feitas determinações astronômicas de azimute e de longitude, são chamados pontos de Laplace. OBS: O índice A indica astronômico; a ausência de índice subentende que seja geodésico.

Algumas considerações adicionais:

- o desvio da vertical é normalmente da ordem de poucos segundos de arco;
- o desvio da vertical é nulo quando o geope e o elipsoide na área considerada são paralelos (coincidência da vertical e da normal);
- as componentes do desvio da vertical podem ser obtidas a partir da anomalia da gravidade, que também permite o cálculo da ondulação do geoide;
- o método astro-geodésico (ou nivelamento astronômico), faz uso das componentes do desvio astrogeodésico da vertical visando a determinação da ondulação geoidal N;
- pode-se afirmar que o desvio astrogeodésico da vertical mede em cada ponto, a inclinação do geope passante pelo ponto em relação ao elipsoide (GEMAEL,1987). Se o ponto estiver sobre o geoide, o desvio indicará a inclinação do próprio geoide;
- a fórmula rigorosa de Laplace é dada por:

$$A = A_A - \eta \operatorname{tg} \varphi - (\xi \operatorname{sen} A - \eta \operatorname{cos} A) \cotg z \quad (1.7)$$

sendo que z é a distância zenital “elipsoidal”, dada por

$$z = z_A + \xi \operatorname{cos} A + \eta \operatorname{sen} A \quad (1.8)$$

Segundo Featherstone e Rieger (2000, apud Zanetti et al 2008), o desvio da vertical possui seis aplicações principais em levantamentos de campo:

- transformação entre coordenadas astronômicas e geodésicas;
- transformação de azimutes astronômicos ou azimutes determinados com giroteodolito e em azimutes geodésicos;
- redução de direções horizontais e ângulos medidos ao elipsoide;
- redução de ângulos zenitais medidos ao elipsoide;
- redução de distâncias inclinadas medidas eletronicamente ao elipsoide, através de

ângulos zenitais;

f) determinação de diferenças de altura a partir de ângulos zenitais e distâncias inclinadas.

O desvio da vertical pode ser classificado em absoluto quando se refere a um elipsoide geocêntrico e relativo quando se refere a um elipsoide com orientação local. Dependendo da orientação, forma e tamanho do elipsoide utilizado, o desvio da vertical pode chegar a 20'' em planícies e 70'' em regiões acidentadas (FEATHERSTONE e RÜEGGER, 2000).

Exercícios:

1) Dadas as coordenadas geodésicas $\phi_G=19^\circ45'41,65''$, $\lambda_G=48^\circ06'04,05''$, e astronômicas $\phi_A=19^\circ45'41,16''$, $\lambda_A=48^\circ06'01,56''$ de um ponto P, o azimute astronômico $A_A=47^\circ25'27,9''$, calcule o azimute geodésico (A_G) empregando a fórmula reduzida de Laplace. Calcule também o valor do desvio da vertical i .

1.3.5. Sistema Geodésico de Referência

Um Sistema Geodésico de Referência (SGR) é um sistema de coordenadas associado a algumas características terrestres, proporcionando a possibilidade de localização de qualquer elemento do nosso planeta ou nas suas proximidades. Há sistemas de referência terrestres e celestes, (capítulo 3). As etapas necessárias para o estabelecimento de um sistema de referência (OLIVEIRA, 1998), são divididas em: conceito, definição, materialização e densificação. Muitos autores lidam com o assunto, abordando apenas duas etapas: definição e materialização.

Do ponto de vista conceitual, um referencial ideal seria aquele cuja origem segue a lei da inércia (manter-se em repouso ou em movimento retilíneo uniforme). Para que seja possível se efetuar comparações, é preciso a definição do referencial, estabelecendo-se princípios que fixam a origem, orientação e escala do sistema de coordenadas. Compreende a adoção de um elipsoide de revolução sobre a superfície do qual são aplicadas injunções de posição e orientação espacial. Por meio de observações específicas e de pontos previamente materializados na superfície terrestre, é estabelecido um conjunto de coordenadas de referência para os mesmos. Este conjunto materializa a rede de referência (normalmente de caráter global). Aplicações práticas fazem com que haja necessidade de pontos de densificação, os quais compõem redes de referência continentais, nacionais ou regionais, como é o caso do SIRGAS (Sistema de Referência Geodésico para as Américas).

Um sistema ou referencial geodésico moderno é caracterizado pela adoção de um elipsoide de revolução, cuja origem coincide com o centro de massa da Terra, e com eixo de revolução coincidente com eixo de rotação da Terra. A etapa de materialização é implementada com o estabelecimento de uma rede de estações geodésicas com coordenadas tridimensionais, obtidas através de técnicas de posicionamento espacial de alta precisão, tais como VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*), GPS (*Global Positioning System*), etc. O *International Terrestrial Reference System* (ITRS) é um exemplo de referencial moderno, sendo que suas realizações tem a denominação ITRF_{yy} (*International Terrestrial Reference Frame*), sendo yy a identificação temporal das coordenadas. O SIRGAS2000 é um exemplo de sistema geodésico moderno.

O Projeto Mudança do Referencial Geodésico (PMRG) visou promover a adoção no país de um novo sistema de referência, mais moderno, de concepção geocêntrica, e compatível com as modernas tecnologias de posicionamento (www.ibge.gov.br/seminario_referencial_geocentrico,2006). Assim, o Sistema Geodésico Brasileiro adotado atualmente é o SIRGAS2000.

1.3.6. NOÇÕES DE TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

A Trigonometria nasceu entre gregos em 300 aC visando resolver problemas de Astronomia Pura. As primeiras aplicações práticas ocorrem com Ptolemeios 150 dC, em estudos astronômicos e determinação da latitude e longitude de cidades e de outros pontos geográficos de interesse em seus mapas. As aplicações da Trigonometria Esférica até 1.600 dC foram fundamentalmente na Astronomia, Cartografia e Navegação Oceânica. Ainda hoje, a Trigonometria Esférica é imprescindível no estudo de Astronomia de Posição, Cartografia e da Geodésia Elementar (ARANA, 2006).

Trigonometria é a parte da Matemática que estuda funções trigonométricas e a resolução dos triângulos. A Trigonometria Plana (estuda os triângulos situados em uma superfície plana) e a Trigonometria Esférica (estuda a resolução dos triângulos situados em uma superfície esférica).

1.3.6.1. Conceitos Básicos

Alguns conceitos básicos são importantes e aplicáveis na Trigonometria Esférica: entre eles as unidades de medida e conversões, propriedades dos ângulos, etc.

1.3.6.1.1 Unidades de medidas de arcos e ângulos e conversões

- **Grau (°)**: arco que mede 1/360 da circunferência. Suas subunidades são o minuto de arco (1/60 do grau) e segundo de arco (1/60 do minuto). Segundos são subdivididos em decimais.

- **Grado (gr)**: arco que mede 1/400 da circunferência. Seus submúltiplos são decimais.

- **Radiano (rad)**: arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência (rad). O radiano subdivide-se em submúltiplos decimais.

Nas conversões de unidades, valem as relações: $180^\circ = 200 \text{ gr} = 24 \text{ h} = \pi \text{ rad}$.

Sendo $\pi = 3,14159265358979 \text{ rad}$, tem-se que $1''$ é igual a $0,0000048481 \text{ rad}$, e também que $\text{sen } 1'' = 0,0000048481$. Os valores citados são usados na transformação angular de segundo de arco para radiano (basta multiplicar por $\text{sen } 1''$, ou, efetuando o arredondamento, dividir por 206.000. Para transformar pequenas quantidades (valores absolutos) de radiano para segundo de arco, multiplica-se por 206.000.

1.3.6.1.2 Propriedades dos arcos e ângulos

Sendo “a” um valor angular, são válidas as seguintes relações entre funções circulares:

$$\begin{aligned} \text{sen}^2 a + \text{cos}^2 a &= 1 & \text{tg } a &= \text{sen } a / \text{cos } a & \text{sec } a &= 1 / \text{cos } a \\ \text{cotg } a &= \text{tg}^{-1} a = \text{cos } a / \text{sen } a & \text{cossec } a &= 1 / \text{sen } a & & (1.9) \end{aligned}$$

Dois arcos de mesma origem têm extremidades associadas quando são simétricas em relação ao centro ou a um dos eixos. Tem-se:

$$\begin{aligned} - \text{complemento } b &= 90^\circ - a & - \text{suplemento } b &= 180^\circ - a \\ - \text{explemento } b &= 180^\circ + a & - \text{replemento } b &= 360^\circ - a & (1.10) \end{aligned}$$

Para arcos respectivos, tem-se as igualdades trigonométricas dadas por (1.11), no quadro abaixo (extraído de ARANA,2006). Lembrar também que: $\boxed{\text{sen}(90^\circ + a) = \text{cos } a}$ e $\boxed{\text{cos}(90^\circ + a) = -\text{sen } a}$.

complemento	suplemento	explemento	replemento
$\text{sen}(90^\circ - a) = \text{cos } a$	$\text{sen}(180^\circ - a) = \text{sen } a$	$\text{sen}(180^\circ + a) = -\text{sen } a$	$\text{sen}(360^\circ - a) = -\text{sen } a$
$\text{cos}(90^\circ - a) = \text{sen } a$	$\text{cos}(180^\circ - a) = -\text{cos } a$	$\text{cos}(180^\circ + a) = -\text{cos } a$	$\text{cos}(360^\circ - a) = \text{cos } a$
$\text{tg}(90^\circ - a) = \text{cotg } a$	$\text{tg}(180^\circ - a) = -\text{tg } a$	$\text{tg}(180^\circ + a) = -\text{tg } a$	$\text{tg}(360^\circ - a) = -\text{tg } a$
$\text{cotg}(90^\circ - a) = \text{tg } a$	$\text{cotg}(180^\circ - a) = -\text{cotg } a$	$\text{cotg}(180^\circ + a) = \text{cotg } a$	$\text{cotg}(360^\circ - a) = -\text{cotg } a$
$\text{sec}(90^\circ - a) = \text{cossec } a$	$\text{sec}(180^\circ - a) = -\text{sec } a$	$\text{sec}(180^\circ + a) = -\text{sec } a$	$\text{sec}(360^\circ - a) = \text{sen } a$
$\text{cossec}(90^\circ - a) = \text{sec } a$	$\text{cossec}(180^\circ - a) = \text{cossec } a$	$\text{cossec}(180^\circ + a) = -\text{cossec } a$	$\text{cossec}(360^\circ - a) = -\text{cossec } a$

1.3.6.2. Triângulo Esférico. Excesso Esférico

Chama-se **polígono esférico** a porção da superfície esférica limitada exclusivamente por arcos de circunferência máxima. **Ângulo esférico** é a figura formada por dois arcos de círculos máximos traçado por um mesmo ponto da esfera denominado vértice do ângulo. A medida de um ângulo esférico é dada pelo ângulo plano formado pelas tangentes dos lados dos ângulos e traçadas pelo vértice do ângulo.

1.3.6.2.1 Triângulo Esférico

Um **triângulo esférico** (euleriano) é a porção da superfície esférica limitada por três arcos de circunferência máxima, menores que 180° . Ou seja, é a figura formada por meio de três arcos de círculos máximos que ligam dois a dois, três pontos de uma esfera. Os três lados que unem os 3 vértices são normalmente designados pelas letras minúsculas a, b c. Os 3 ângulos formados no vértice do triângulo são representados por letras maiúsculas A, B, C. A resolução de um triângulo esférico implica em determinar três de seus elementos sendo conhecidos os demais.

Um triângulo esférico pode ter 1, 2 ou 3 ângulos retos, sendo então retângulo, birretângulo ou trirretângulo.

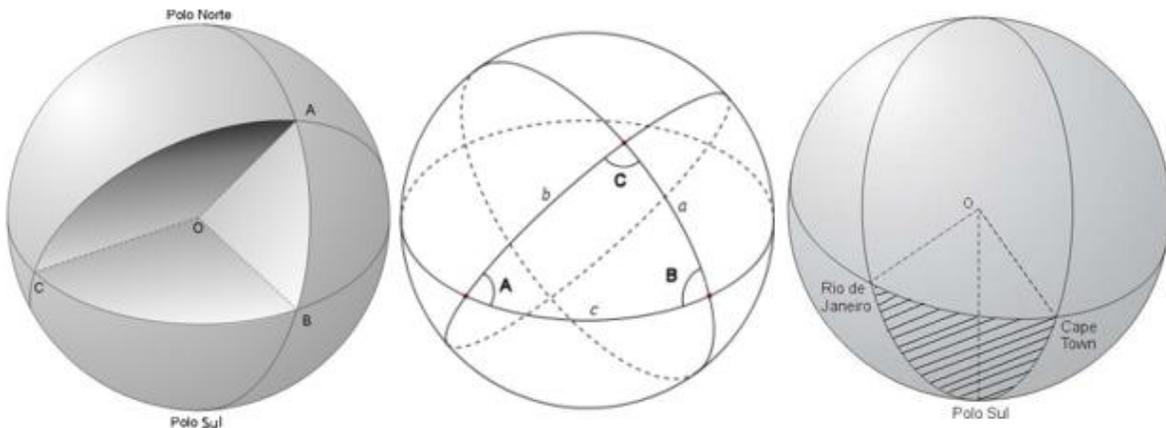


Figura 1.15 - Esfera e Triângulo esférico - Fonte: SANTIAGO, 2020

Não é qualquer figura de três vértices desenhada sobre uma esfera que define um triângulo esférico, ou seja, seus lados devem ser arcos de **grande círculo**. Nos triângulos esféricos, tanto seus ângulos quanto os seus lados são medidos em unidades angulares.

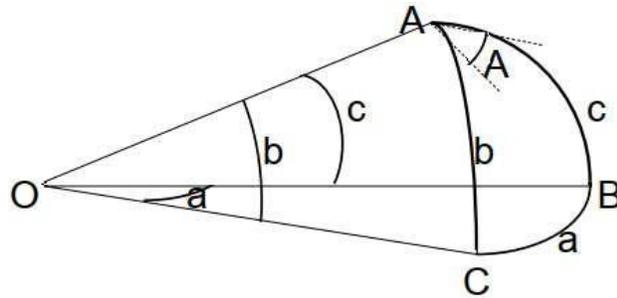


Figura 1.16 - Triângulo esférico

Os lados do triângulo esférico são medidos pelos ângulos planos das faces do diedro, assim, o ângulo $A\hat{O}C$ mede o lado b . Já o ângulo $C\hat{A}B$ mede o vértice A (figura anterior).

Os triângulos esféricos possuem algumas **propriedades**:

a. A soma dos **ângulos** de um triângulo esférico está compreendida entre 180° e 540° , ou seja, $180^\circ < A + B + C < 540^\circ$.

b. A soma dos lados do triângulo esférico é sempre menor que $360^\circ \rightarrow (a + b + c < 360^\circ)$.

c. Um lado sempre é menor que a soma dos outros dois lados e maior que a diferença dos mesmos. Assim: $a < b + c$ e $a > b - c$.

d. Ao lado maior de um triângulo esférico se opõe ao ângulo maior.

e. Para lados iguais se opõe ângulos iguais.

f. A soma de 180° a um ângulo do triângulo esférico é maior que a soma dos outros dois ângulos $A + 180^\circ > B + C$.

g. Todo triângulo esférico triretângulo é triretilátero e vice-versa. $A = B = C = 90^\circ$, implica afirmar que $a = b = c = 90^\circ$.

h. Um triângulo esférico é determinado quando são conhecidos dois lados e o ângulo compreendido, ou dois ângulos e o lado adjacente, ou os três ângulos ou os três lados.

i. Dois triângulos esféricos são **polares** quando os vértices do primeiro são os pólos dos lados homônimos do outro, e reciprocamente. Daí decorre a seguinte relação entre os triângulos polares: “os lados de um triângulo esférico polar são suplementos dos ângulos do triângulo dado, e seus ângulos são os suplementos dos lados do triângulo dado”.

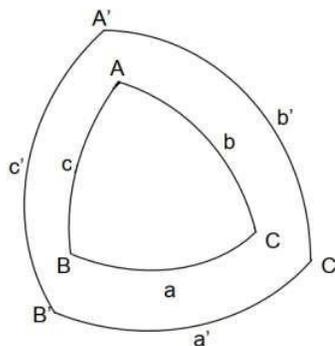


Figura 1.17 - Triângulos polares

Polar – é o lugar geométrico dos pontos da superfície esférica que distam 90° dos polos.

Como decorrência da relação anterior tem-se:

$$A + a' = 180^\circ ; B + b' = 180^\circ ; C + c' = 180^\circ$$

$$a + A' = 180^\circ ; b + B' = 180^\circ ; c + C' = 180^\circ$$

1.3.6.2 Excesso Esférico e Área do Triângulo Esférico

A soma dos ângulos de um triângulo esférico ultrapassa 180° . O que excede de 180° é chamado de **excesso esférico** \mathcal{E} , que pode ser calculado pela expressão (1.12).

$$\mathcal{E} = A + B + C - 180^\circ \quad (1.12)$$

O excesso esférico, pode ser calculado em função dos lados (**Fórmula de L'Huilier**):

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\mathcal{E}}{4} = \operatorname{tg} \frac{s}{2} \operatorname{tg} \frac{s-a}{2} \operatorname{tg} \frac{s-b}{2} \operatorname{tg} \frac{s-c}{2} \quad , \text{ onde } s = \frac{a+b+c}{2} \quad (1.13)$$

A **área S** do triângulo esférico, determinada a partir de seu excesso esférico (R é o raio da esfera):

$$S = R^2 \mathcal{E}_{rad} \quad \text{ou} \quad S = \frac{\pi R^2 \mathcal{E}^\circ}{180^\circ} \quad \text{ou} \quad S = R^2 \operatorname{sen} 1'' \mathcal{E}'' \quad (1.14)$$

A expressão anterior define o **Teorema de Girard**, (ou $S = (A+B+C-\pi).R^2$, com ângulos em radianos), que denota que a área de um triângulo esférico é proporcional ao seu excesso esférico.

1.3.6.3. Fórmulas fundamentais

A seguir serão apresentadas as fórmulas fundamentais de suporte à Trigonometria Esférica. Seja a figura abaixo:

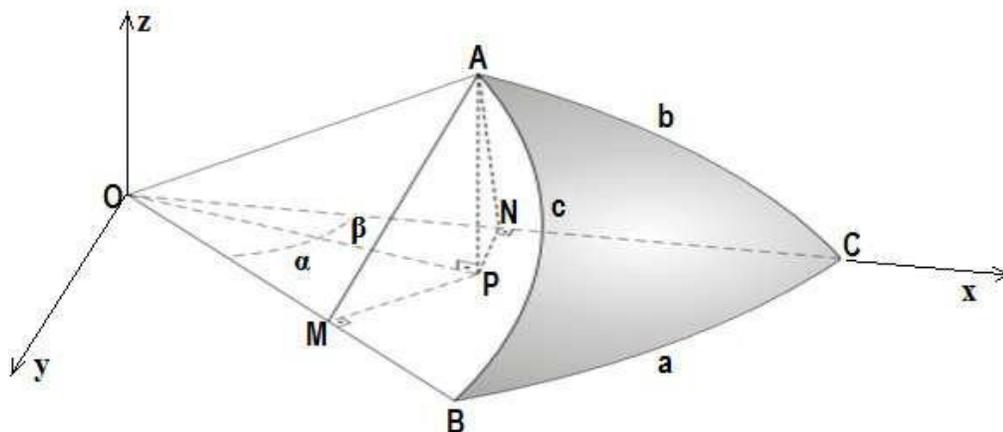


Figura 1.18 - Figura básica para dedução de fórmulas - Fonte: Adaptado de Santiago, 2020

Na figura anterior tem-se o triângulo esférico de vértices ABC, e lados a, b, c. O lado b é um arco de círculo máximo que mede o ângulo entre os segmentos de reta OA e OC e assim sucessivamente, sendo O centro da esfera. O lado b é oposto ao ângulo B, o qual mede a

separação entre os planos OBA e OBC.

A reta perpendicular ao plano OBC e que passa pelo vértice A do triângulo da figura 1.18 é representada pelo segmento AP. A partir do ponto P, traça-se a reta PM perpendicular ao segmento OB, e a reta PN perpendicular a segmento OC. Ou seja, o ponto P é a projeção do vértice A sobre o plano xOy e M e N são as projeções de P sobre os segmentos de reta OB e OC respectivamente. Desta forma ficam definidos vários triângulos planos retângulos: APM, APN, OMP, ONP, OMA, ONA e OPA. Para cada um destes triângulos, o ângulo reto está situado no vértice no meio do nome do triângulo (por ex: o triângulo APM é reto no vértice em P). Isto permite a dedução das fórmulas seguintes.

1.3.6.3.1 Analogia dos senos.

Considerando os triângulos retângulos APM e OMA, com o lado comum AM, escreve-se:

$$AM = OA \operatorname{sen} c = AP / \operatorname{sen} B \quad (\text{o ângulo } A^{\wedge}MP \text{ é o mesmo do vértice B})$$

Considerando os triângulos ONA e APN que tem como lado comum AN, escreve-se:

$$AN = OA \operatorname{sen} b = AP / \operatorname{sen} C \quad (\text{o ângulo } A^{\wedge}NP \text{ é o mesmo do vértice C})$$

Assim:

$$AP / OA = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} C, \text{ donde resulta que:}$$

$$\operatorname{sen} b / \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} c / \operatorname{sen} C$$

Analogamente, esta igualdade vale para a razão $\operatorname{sen} a / \operatorname{sen} A$. Tem-se a analogia dos senos, que relaciona dois lados e dois ângulos opostos. Seu enunciado é “em todo triângulo esférico os senos dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos”. A Lei dos Senos também é conhecida como *lei de al-Biruni*.

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C} \quad (1.15)$$

1.3.6.3.2 Fórmula dos 4 elementos

Chamada de Lei dos cossenos da Trigonometria Esférica, este grupo de fórmulas relaciona três lados e um ângulo do triângulo esférico (fórmula dos lados). A fórmula dos 4 elementos para triângulos esféricos é a mais importante para resolução destes triângulos, e por meio dela pode-se determinar os seis elementos de um triângulo: 3 lados e os 3 ângulos internos.

Para o triângulo ONA, o ângulo com vértice em O deste triângulo mede a separação entre o cateto ON e a hipotenusa OA, que nada mais é que o lado b do triângulo esférico. Assim:

$$\cos b = ON / OA \quad ; \quad \operatorname{sen} b = AN / OA$$

Para o triângulo OMA, também de hipotenusa OA, tem-se:

$$\cos c = OM / OA \quad ; \quad \operatorname{sen} c = AM / OA$$

Considerando os triângulos OMP e ONP com hipotenusa dada por OP e os ângulos α e β no vértice O, tem-se:

$$\cos \alpha = OM / OP ; \quad \cos \beta = ON / OP$$

Decorre que $OM = OP \cos \alpha$. Substitui-se esta igualdade na expressão $\cos c = OM / OA$ e sabendo que $\alpha + \beta = a$, tem-se:

$$OM = OA \cos c = OP \cos (a-\beta) = OP (\cos a \cos \beta + \sin a \sin \beta)$$

Substituindo as expressões que envolvem ângulos α e β , tem-se:

$$OA \cos c = OP (\cos a \cdot ON/OP + \sin a \cdot NP/OP) = ON \cos a + NP \sin a. \text{ Mas } ON =$$

$$OA \cos b \quad OA \cos c = OA \cos b \cos a + NP \sin a \quad (*)$$

A partir do triângulo APN, tem-se (lembrando que $AN = OA \sin b$ e considerando o fato de que o ângulo do triângulo APN com vértice em N é o mesmo ângulo C do triângulo esférico):

$$NP = AN \cos N = AN \cos C = OA \sin b \cos C$$

Substituindo a expressão obtida para NP na expressão (*) tem-se:

$$OA \cos c = OA \cos b \cos a + NP \sin a = OA \cos b \cos a + OA \sin b \cos C \sin a$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

Observe que o lado envolvido no 1º. membro da expressão anterior associa-se ao ângulo no final da fórmula (c e C). Analogamente são escritas as demais expressões:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \quad (1.16)$$

As expressões da Lei dos Cossenos da Trigonometria Esférica tem como enunciado: “*O cosseno de um lado é igual ao produto do cosseno dos outros dois lados mais o produto dos senos dos mesmos lados pelo cosseno do ângulo por eles formado*” (conhecida *lei de al-Battani*).

A fórmula dos 4 elementos também pode ser aplicada a ângulos e resulta:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b$$

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \quad (1.17)$$

1.3.6.4. Fórmula das Cotangentes. Fórmula dos 5 elementos

A fórmula das cotangentes relaciona 2 lados e 2 ângulos do triângulo esférico.

$$\cotg A \sin B = \cotg a \sin c - \cos c \cos B$$

$$\cotg B \sin C = \cotg b \sin a - \cos a \cos C$$

$$\cotg C \sin A = \cotg c \sin b - \cos b \cos A$$

$$\begin{aligned} \cotg A \operatorname{sen} C &= \cotg a \operatorname{sen} b - \cos b \cos C \\ \cotg B \operatorname{sen} A &= \cotg b \operatorname{sen} c - \cos c \cos A \\ \cotg C \operatorname{sen} B &= \cotg c \operatorname{sen} a - \cos a \cos B \end{aligned} \quad (1.18)$$

A **fórmula dos 5 elementos** relaciona 3 lados e 2 ângulos do triângulo esférico.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} b \cos A &= \cos a \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} a \cos c \cos B \\ \operatorname{sen} c \cos B &= \cos b \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b \cos a \cos C \\ \operatorname{sen} a \cos C &= \cos c \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} c \cos b \cos A \\ \operatorname{sen} b \cos C &= \cos c \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} c \cos a \cos B \\ \operatorname{sen} c \cos A &= \cos a \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a \cos b \cos C \\ \operatorname{sen} a \cos B &= \cos b \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} b \cos c \cos A \end{aligned} \quad (1.19)$$

1.3.6.5. Fórmulas de Borda

Este grupo de fórmulas envolve as expressões com seno e cosseno. As expressões envolvendo a tangente são conhecidas como Fórmulas do Marinheiro. (**Fórmulas 1.20**)

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} &= \frac{\operatorname{sen}(s-c) \operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} & \cos^2 \frac{A}{2} &= \frac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \\ \operatorname{sen}^2 \frac{B}{2} &= \frac{\operatorname{sen}(s-a) \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c} & \cos^2 \frac{B}{2} &= \frac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c} \\ \operatorname{sen}^2 \frac{C}{2} &= \frac{\operatorname{sen}(s-a) \operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} & \cos^2 \frac{C}{2} &= \frac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} \\ \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} &= \frac{\operatorname{sen}(s-b) \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-a)} & \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} &= -\frac{\cos S \cos(S-A)}{\cos(S-B) \cos(S-C)} \\ \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} &= \frac{\operatorname{sen}(s-a) \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-b)} & \operatorname{tg}^2 \frac{b}{2} &= -\frac{\cos S \cos(S-B)}{\cos(S-A) \cos(S-C)} \\ \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} &= \frac{\operatorname{sen}(s-a) \operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(s-c)} & \operatorname{tg}^2 \frac{c}{2} &= -\frac{\cos S \cos(S-C)}{\cos(S-A) \cos(S-B)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{com } 2s &= a + b + c & 2S &= A + B + C \end{aligned}$$

1.3.6.6 Analogias de Delambre e de Nepper

As Analogias de Delambre, também conhecidas como Equações de Gauss, são muito usadas como *fórmulas de verificação*. Envolvem os 6 elementos do triângulo e conduzem a uma identidade quando os elementos obtidos pelo cálculo são corretos (ARANA, 2006).

Quadro 1 – Analogias de Delambre e de Neper (Fórmulas 1.21).

Analogia de DELAMBRE (verificação)	Analogia de NEPER dois lados e três ângulos	Analogia de NEPER Três lados e dois ângulos
$\text{sen} \frac{(A+B)}{2} \cos \frac{c}{2} = \cos \frac{C}{2} \cos \frac{(a-b)}{2}$	$\text{tg} \frac{(A+B)}{2} = \cot g \frac{C}{2} \frac{\cos \frac{(a-b)}{2}}{\cos \frac{(a+b)}{2}}$	$\text{tg} \frac{(a+b)}{2} = \text{tg} \frac{c}{2} \frac{\cos \frac{(A-B)}{2}}{\cos \frac{(A+B)}{2}}$
$\text{sen} \frac{(A-B)}{2} \text{sen} \frac{c}{2} = \cos \frac{C}{2} \text{sen} \frac{(a-b)}{2}$	$\text{tg} \frac{(A-B)}{2} = \cot g \frac{C}{2} \frac{\text{sen} \frac{(a-b)}{2}}{\text{sen} \frac{(a+b)}{2}}$	$\text{tg} \frac{(a-b)}{2} = \text{tg} \frac{c}{2} \frac{\text{sen} \frac{(A-B)}{2}}{\text{sen} \frac{(A+B)}{2}}$
$\cos \frac{(A+B)}{2} \cos \frac{c}{2} = \text{sen} \frac{C}{2} \cos \frac{(a+b)}{2}$	$\text{tg} \frac{(A+C)}{2} = \cot g \frac{B}{2} \frac{\cos \frac{(a-c)}{2}}{\cos \frac{(a+c)}{2}}$	$\text{tg} \frac{(a+c)}{2} = \text{tg} \frac{b}{2} \frac{\cos \frac{(A-C)}{2}}{\cos \frac{(A+C)}{2}}$
$\cos \frac{(A-B)}{2} \text{sen} \frac{c}{2} = \text{sen} \frac{C}{2} \text{sen} \frac{(a+b)}{2}$	$\text{tg} \frac{(A-C)}{2} = \cot g \frac{B}{2} \frac{\text{sen} \frac{(a-c)}{2}}{\text{sen} \frac{(a+c)}{2}}$	$\text{tg} \frac{(a-c)}{2} = \text{tg} \frac{b}{2} \frac{\text{sen} \frac{(A-C)}{2}}{\text{sen} \frac{(A+C)}{2}}$
$\text{sen} \frac{(A+C)}{2} \cos \frac{b}{2} = \cos \frac{B}{2} \cos \frac{(a-c)}{2}$	$\text{tg} \frac{(B+C)}{2} = \cot g \frac{A}{2} \frac{\cos \frac{(b-c)}{2}}{\cos \frac{(b+c)}{2}}$	$\text{tg} \frac{(b+c)}{2} = \text{tg} \frac{a}{2} \frac{\cos \frac{(B-C)}{2}}{\cos \frac{(B+C)}{2}}$
$\text{sen} \frac{(A-C)}{2} \text{sen} \frac{b}{2} = \cos \frac{B}{2} \text{sen} \frac{(a-c)}{2}$	$\text{tg} \frac{(B-C)}{2} = \cot g \frac{A}{2} \frac{\text{sen} \frac{(b-c)}{2}}{\text{sen} \frac{(b+c)}{2}}$	$\text{tg} \frac{(b-c)}{2} = \text{tg} \frac{a}{2} \frac{\text{sen} \frac{(B-C)}{2}}{\text{sen} \frac{(B+C)}{2}}$
$\cos \frac{(A+C)}{2} \cos \frac{b}{2} = \text{sen} \frac{B}{2} \cos \frac{(a+c)}{2}$		
$\cos \frac{(A-C)}{2} \text{sen} \frac{b}{2} = \text{sen} \frac{B}{2} \text{sen} \frac{(a+c)}{2}$		
$\text{sen} \frac{(B+C)}{2} \cos \frac{a}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{(b-c)}{2}$		
$\text{sen} \frac{(B-C)}{2} \text{sen} \frac{a}{2} = \cos \frac{A}{2} \text{sen} \frac{(b-c)}{2}$		
$\cos \frac{(B+C)}{2} \cos \frac{a}{2} = \text{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{(b+c)}{2}$		
$\cos \frac{(B-C)}{2} \text{sen} \frac{a}{2} = \text{sen} \frac{A}{2} \text{sen} \frac{(b+c)}{2}$		

1.3.6.7 Triângulo esférico retângulo. Regra de Mauduit

Um triângulo esférico é retângulo caso possua pelo menos um ângulo reto. É retilátero se apresentar pelo menos um lado de 90°.

Considerando A=90°, algumas das fórmulas de Bessel vistas anteriormente resultam:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \text{sen } b \cdot \text{sen } c \cdot \cos A \quad \rightarrow \quad \cos a = \cos b \cdot \cos c$$

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } B} \quad \rightarrow \quad \text{sen } b = \text{sen } a \cdot \text{sen } B$$

$$\cot a \cdot \text{sen } b = \cos b \cdot \cos C + \text{sen } C \cdot \cot A$$

$$\cot a \cdot \text{sen } b = \cos b \cdot \cos C \rightarrow \cot a = \frac{\cos b \cdot \cos C}{\text{sen } b} \rightarrow \cot a = \cot g b \cdot \cos C \rightarrow \cos C = \cot a \cdot \text{tg } b$$

Para resolver estes triângulos, há uma regra mnemônica denominada **Regra de Maudit**. Nesta regra tem-se que o cosseno do elemento médio é igual ao produto das COtangentes dos elementos CONjuntos (adjacentes) ou produto dos SENos dos elementos SEparados (opostos).

$$\text{Cos} = \text{cotg cotg} = \text{sen sen} \quad \text{ou} \quad \text{Cos} = \text{co co} = \text{se se}$$

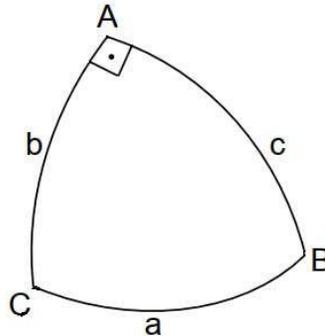


Figura 1.19 - Triângulo retângulo

O elemento médio é escolhido aleatoriamente (exceto o ângulo reto) e que é base para definição dos conjuntos e separados.

Para aplicação da regra de Maudit, existem as seguintes considerações (ARANA, 2006):

a) admitindo-se **a** como elemento médio (pode-se escolher qualquer outro elemento do triângulo, exceto o ângulo reto), seus elementos conjuntos serão os ângulos **B** e **C**, e seus elementos separados serão **b** e **c**;

b) para o elemento reto no triângulo, não se aplica a regra. Se admitirmos **b** como elemento médio, seus conjuntos serão **C** e **c**;

c) não se adota o valor angular dos catetos, mas seus complementos: Se **A** for o ângulo reto, usaremos $(90^\circ - c)$ e não **c**; $(90^\circ - b)$ e não **b**. A hipotenusa é tomada em verdadeira grandeza.

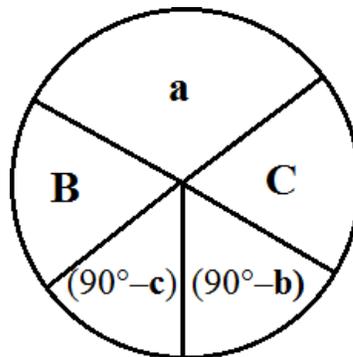


Figura 1.20 - Regra de Maudit - Ângulo reto

Tem-se por exemplo: $\text{Cos } a = \text{cot } B \cdot \text{cot } C$

$$\text{Cos } (90^\circ - c) = \text{cot } B \cdot \text{cot } (90^\circ - b) \rightarrow \text{sen } c = \text{cot } B \cdot \text{tg } b \rightarrow \text{tg } b = \text{sen } c \cdot \text{tg } B$$

$$\text{Cos } a = \text{sen } (90^\circ - b) \cdot \text{sen } (90^\circ - c) \rightarrow \text{cos } a = \text{cos } b \cdot \text{cos } c$$

$$\text{Cos } (90^\circ - b) = \text{sen } a \cdot \text{sen } B \rightarrow \text{sen } b = \text{sen } a \cdot \text{sen } B$$

$$\text{Cos } C = \text{sen } (90^\circ - c) \cdot \text{sen } B \rightarrow \text{cos } C = \text{cos } c \cdot \text{sen } B$$

$$\text{Cos } (90^\circ - b) = \text{cotg } C \cdot \text{cotg } (90^\circ - c) \rightarrow \text{sen } b = \text{cotg } C \cdot \text{tg } c$$

Para o caso de um triângulo esférico retilátero (possui pelo menos um lado igual a 90°):

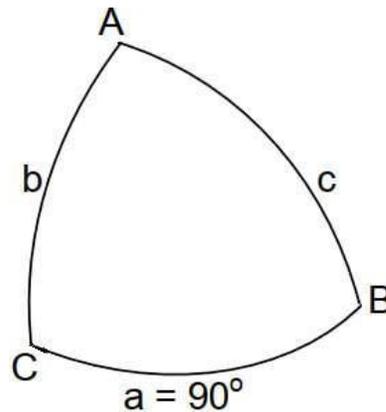


Figura 1.21 - Triângulo Retilátero

Fórmulas fundamentais são obtidas com as devidas substituições considerando o lado reto.

Para a resolução do triângulo esférico retilátero utilizando da Regra de Mauduit, faz-se da seguinte maneira:

- Nas propriedades de triângulos polares, nota-se que um triângulo polar ao triângulo retilátero será um triângulo retângulo.
- Usando propriedades de triângulos polares, define-se o triângulo polar ao triângulo dado.
- Por Mauduit, resolve-se o triângulo polar (definido pelas propriedades polares);
- Resolvido o triângulo polar (pela regra de Mauduit), novamente com as propriedades dos triângulos polares, calcula-se o triângulo dado.

Sendo $a=90^\circ$, considera-se o ângulo oposto como $(180^\circ - A)$, os lados com b e c ; e no lugar dos ângulos B e C adota-se seus complementos $(90^\circ - B)$ e $(90^\circ - C)$ (vide figura seguinte).

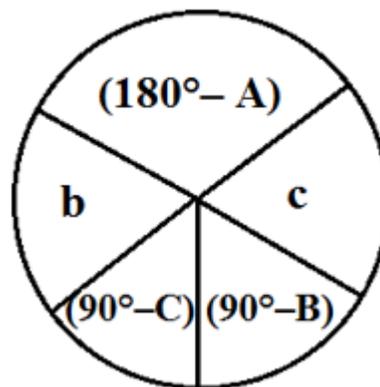


Figura 1.22 - Regra de Mauduit - Lado reto

Algumas expressões: $\cos c = \sin b \cdot \sin (90^\circ - C) \rightarrow \cos c = \sin b \cdot \cos C$

$\cos (180^\circ - A) = \cot b \cdot \cot c \rightarrow -\cos A = \cot b \cdot \cot c \rightarrow \cos A = -\cot b \cdot \cot c$

$\cos b = \sin c \cdot \sin (90^\circ - B) \rightarrow \cos b = \sin c \cdot \cos B$

$$\cos b = \cot (180^\circ - A) \cdot \cot (90^\circ - C) \rightarrow \cos b = -\cot A \cdot \operatorname{tg} C \rightarrow \operatorname{tg} C = -\operatorname{tg} A \cdot \cos b$$

$$\cos (90^\circ - C) = \operatorname{sen} (180^\circ - A) \cdot \operatorname{sen} c \rightarrow \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} A$$

Exercício de aplicação

As coordenadas geográficas de Havana são: latitude $23^\circ 07' \text{N}$ e longitude $82^\circ 22' \text{W}$ e de Glasgow na Escócia são latitude $55^\circ 51' \text{N}$ e longitude $4^\circ 15' \text{W}$. Determine a distância entre elas.

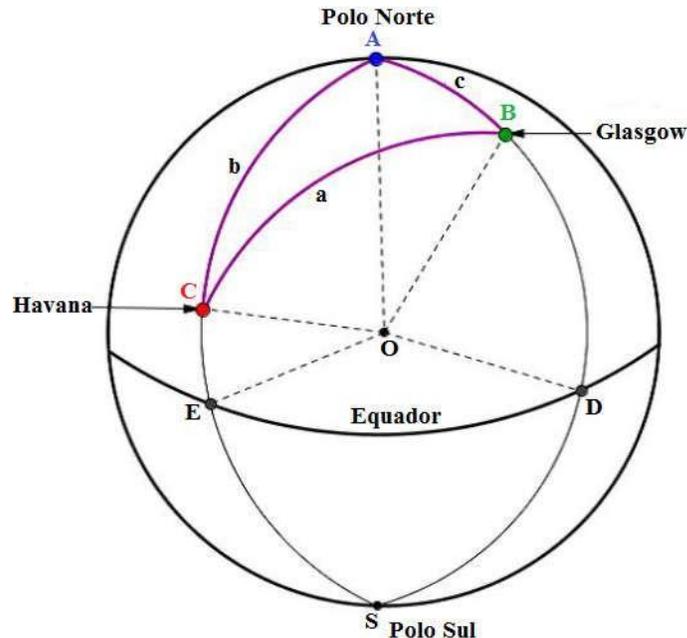


Figura 1.23 - Distância entre cidades por coordenadas geográficas - Adaptado de NADAL,1998

Considerando o vértice A do triângulo esférico que coincide com o pólo Norte, e dispostos das latitudes e longitudes dos pontos B (Glasgow) e C (Havana), pode-se determinar os valores dos lados b e c e do ângulo A do triângulo esférico ABC. O arco AD mede 90° e o arco BD tem latitude $55^\circ 51' \text{N}$. Assim, o lado c mede $c = 90^\circ - 55^\circ 51' = 34^\circ 09'$. Por raciocínio semelhante tem-se $b = 90^\circ - 23^\circ 07' = 66^\circ 53'$. O arco DE define o ângulo A, que para ser calculado, basta fazer a diferença entre as longitudes, ou seja, $A = -4^\circ 15' - (-82^\circ 22') = 78^\circ 07'$. Aplicando na fórmula dos 4 elementos:

$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$ e substituindo tem-se:

$$\cos a = \cos (66^\circ 53') \cdot \cos (34^\circ 09') + \operatorname{sen} (66^\circ 53') \cdot \operatorname{sen} (34^\circ 09') \cdot \cos (78^\circ 07')$$

$$\cos a = (0,392604665 \cdot 0,827570769) + (0,919707332 \cdot 0,561361400 \cdot 0,20591954)$$

$$\cos a = 0,324908144 + 0,106313828 = 0,431221972$$

$$a = \arccos (0,431221972) \rightarrow a = 64,454865^\circ$$

Sendo o Raio da Terra como $R=6.371 \text{ km}$, aplica-se a regra de 3 simples:

$$360^\circ - 2 \cdot \pi \cdot R$$

$$64,454865^\circ - x \quad \text{que resulta a distância de aproximadamente de } 7.167,054 \text{ km.}$$

1.3.6.8 Exercícios

1. Calcular a área de um triângulo esférico trirretilátero que foi desenhado sobre uma esfera de raio de 20 m. *Resp: $S=628,32m^2$*

2. Calcular a distância esférica entre Curitiba e Calcutá na Índia e também o azimute esférico inicial entre ambas. As coordenadas geográficas são: Curitiba: $\phi=25^{\circ}26'52''S$ e $\lambda=49^{\circ}13'50''W$; Calcutá: $\phi=22^{\circ}33'25''N$ e $\lambda=88^{\circ}20'12''E$. *Resp: $d=15711\text{ km}$ e $A=85^{\circ}05'32''$*

3. Sendo dados de um triângulo esférico $A = 60^{\circ}$, $b = 30^{\circ}$ e $c = 60^{\circ}$, achar o lado e ângulos restantes. *Resp: $a = 49^{\circ} 29' 41''$, $C = 99^{\circ} 27' 44''$, $B = 34^{\circ} 42' 54''$.*

4. Resolver o triângulo esférico retângulo em A, sendo $a=75^{\circ}28'52''$ e $b = 67^{\circ}56'28''$.

5. Resolver o triângulo esférico retilátero: $c = 90^{\circ}00'00''$; $a = 55^{\circ}55'55''$, $B = 77^{\circ}56'00''$.

6. Resolver o triângulo esférico de lados $a=52^{\circ}05'50''$; $b = 66^{\circ}06'10''$; $c = 68^{\circ}13'00''$.

7. Resolver o triângulo esférico, dados: $A = 110^{\circ}30'20''$; $B = 130^{\circ}40'10''$; $C = 100^{\circ}20'50''$.

Respostas: 4) $c=48^{\circ}07'22''$, $C=50^{\circ}16'36''$, $B=73^{\circ}12'38''$; 5) $b=80^{\circ}01'40''$, $A=55^{\circ}20'07''$, $C=96^{\circ}49' 43''$; 6) $A=56^{\circ}52'16''$, $B =76^{\circ}00'39''$, $C=80^{\circ}14'41''$; 7) $a =108^{\circ}12'58''$, $b=129^{\circ}43'02''$, $c=86^{\circ}04'17''$.

1.4. Aplicações da Geodésia

A Geodésia permite medir, analisar e representar o espaço geográfico de forma precisa. Por ser uma ciência de medição e análise de fenômenos físicos, torna-se fundamental na análise de alterações climáticas.

Dentre as aplicações práticas da Geodésia, tem-se o levantamento de pontos de apoio à fotogrametria por meio de poligonais geodésicas. Com o avanço das tecnologias de mapeamento, algumas aplicações têm sido substituídas ou adequadas à atualidade.

Dentre inúmeras aplicações geodésicas, pode-se enumerar algumas:

- atividades de mapeamento, no estabelecimento de pontos de controle horizontal e vertical;
- gerenciamento urbano, em atividades de documentação;
- projetos de engenharia, como no caso da construção de barragens, pontes, etc, com o monitoramento dos movimentos horizontais e verticais em grandes estruturas;
- demarcação de limites municipais, estaduais e internacionais, os quais necessitam de uma rede de pontos geodésicos com coordenadas conhecidas;
- ecologia, por exemplo na detecção e monitoramento de movimentos ocorridos pela extração de água, óleo e minerais do subsolo, ação do homem no meio ambiente, etc;
- gerenciamento ambiental, sendo que os sistemas de informação para transportes, uso do solo, comunicações, serviços sociais, etc, baseiam-se em lotes ou unidades de terreno, cujas localizações devem estar referenciadas a uma rede geodésica;
- hidrografia, no que se refere à técnicas de posicionamento, determinação da profundidade da água (batimetria);
- oceanografia, com uso de marégrafos, além de envolver a dinâmica da superfície do mare desvios sofridos entre a superfície média do mar e a equipotencial do campo de

gravidade da Terra e informações necessárias na definição do datum vertical. Estuda o movimento da linha costeira e posicionamento de objetos marinhos (navios, blocos de gelo, etc), e fornece aos oceanógrafos a altitude relativa nos marégrafos e respectivos movimentos verticais.

- i) tectônica de placas e geodinâmica;
- j) geofísica: ciência com grande afinidade com a Geodésia. Informações geométricas de pontos devido à variação temporal da Terra (geodinâmica), monitoração de movimentação tectônica. Variações temporais do campo de gravidade fornecem dados sobre os movimentos verticais da crosta, atualmente estudados no contexto da Geodinâmica. A Geofísica, por sua vez, explica a reação física da Terra sob a ação de forças, as variações de densidade no seu interior e os efeitos da estrutura interna nos seus movimentos. Essas informações são necessárias na escolha de modelos matemáticos de interesse geodésico;
- k) geologia, nas atividades de mapeamento geológico incluindo a morfologia e estabilidade de diferentes formações geológicas;
- l) astronomia, sendo entre outras o monitoramento constante do movimento do eixo de rotação terrestre. A Geodésia interage com a Astronomia desde o seu nascimento;
- m) ciências espaciais: foco no posicionamento de estações rastreadoras permanentes e posicionamento através de satélites artificiais;
- n) hidrogeodésia: aplicação de técnicas geodésicas no estudo e monitoramento hídrico da superfície terrestre continental (ver MOREIRA, 2016, sobre o monitoramento hidrológico da bacia amazônica).
- o) outras: agricultura de precisão, estudos atmosféricos, etc.

A Geodésia contemporânea recorre ao que há de mais moderno em astrometria, modelagem matemática, ciência da computação, pesquisa física e análise estatística para auxiliar na compreensão do comportamento das correntes oceânicas, aumento do nível do mar, mudanças climáticas globais, ciclos hidrológicos mundiais, deformações crustais que desencadeiam riscos naturais. Nestas aplicações científicas da Terra, sistemas de referência de coordenadas precisas, modelos de gravidade global de alta resolução e manutenção precisa do tempo permanecem fundamentais, assim como sistemas de referência necessários no estabelecimento de controle posicional tridimensional de redes regionais e globais de pontos terrestres. Técnicas geodésicas também são empregadas em estudos da lua e outros planetas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABREU, S.M., OTTONI, J.E. Geometria Esférica e Trigonometria Esférica aplicadas a Astronomia de Posição. Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ / Campus Alto Paraopeba - CAP Sociedade Brasileira de Matemática - SBM. 2015. Disponível em: <https://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/profmat/TCC%20Shyrlene%20Martins%20de%20Abreu%20Versao%20Final.pdf>

ARANA, J. M., **Trigonometria Esférica: Notas de Aula**. FCT - Faculdade de Ciências e Tecnologia - UNESP - Presidente Prudente. 40p. 2006.

BLITZKOW, D., DE MATOS, A.C.O.C., GUIMARÃES, G.N., COSTA, S.M.A., O conceito atual dos referenciais usados em Geodésia. Revista Brasileira de Cartografia, v.63/5, 2011.

BOMFORD, G., *Geodesy*, Oxford, Clarendon Press, 1980.

COMMITTEE ON GEODESY, 1978. *Geodesy: Trends and Prospects*, Washington D.C.

DALAZOANA, R. *Fundamentos de Geodésia*, 2016. Disponível em:
www.cartografica.ufrpr.br/portal

FEATHERSTONE, W.E.; RÜEGER, J. M. The Importance of Using Deviations of the Vertical for the Reduction of Survey Data to a Geocentric Datum. *The Australian Surveyor*, vol. 45, n.2, p. 46-61. dec 2000.

FORTES L. P. (2017) Seminário do GEGE de 24/03/2017

GEMAEL, C. *Introdução à Geodésia Geométrica 1ª. Parte*, UFPR, 1987.

GEMAEL, C. *Introdução à Geodésia Geométrica 2ª. Parte*, UFPR, 1988.

IBGE, 2007. IBGE registra efeitos do aquecimento global na costa brasileira. Agência de Notícias. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/13318-asi-ibge-registra-efeitos-do-aquecimento-global-na-costa-brasileira>.

IBGE, 2019. Reajustamento da Rede Altimétrica com Números Geopotenciais. 2ª. ed, 2019. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101666.pdf>

IBGE, 2021. Modelo hgeoHNOR2020 para conversão de altitudes geométricas em altitudes normais. Série Relatórios Metodológicos v.47, Rio de Janeiro, 2021. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101841.pdf>

LARSON, K.M. *Geodesy*. In: PARKINSON, B.W.; SPILKER JUNIOR, J.J. (Ed.) *Global Positioning System: Theory and Applications*. American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc, 1996. v.163, p.539-557.

MOREIRA, D.M., *Geodésia aplicada ao monitoramento hidrológico da bacia amazônica*. Dissertação de Doutorado, COPPE-UFRJ, 2016.

NADAL, C. A., *Introdução à Trigonometria Esférica – Aplicações na Astronomia e na Cartografia*. UFPR/Setor de Tecnologia – Departamento de Geociências. Curitiba. 1998.

OLIVEIRA, C., “DICCIONARIO DE CARTOGRAFIA” IBGE, 1987.

OSU, 2017. Ohio State University, www.osu.edu

PLAG, H.P. & PEARLMAN, M. (Eds), *Global Geodetic Observing System*, Springer, Berlin, 2009.

SÁ, N. C., *Elementos de Geodésia*, USP. 2000.

SANTIAGO, B., UFRGS, 2020. Disponível em:
<https://www.if.ufrgs.br/oei/santiago/fis2005/textos/esferast.htm>

SEEBER, G., *Satellite Geodesy: foundations, methods, and applications*, 1993.

TORGE, W., *Geodesy*, Berlin, 1991.

VANICEK, P., KRAKIWSKY, E., *Geodesy: The Concepts*, Amsterdam, 1986.

VANICEK, P., 1986. https://www2.unb.ca/gge/Personnel/Vanicek/Geodesy_chapter.pdf (Cap. 2).

ZANETTI, M.A.Z., FREITAS, S.R.C., VEIGA, L.A.K., Determinação do desvio da vertical, *Revista Brasileira de Cartografia* No. 60/04, dezembro 2008.

2. GEOMETRIA DO ELIPSOIDE

Sabe-se que o objetivo da Geodésia consiste na determinação da forma e dimensões da Terra, seu campo gravitacional e as variações temporais associadas. Numa primeira aproximação, desprezam-se as irregularidades terrestres, restando a determinação das dimensões de um modelo geométrico adequado. Sendo assim, excetuando-se algumas técnicas espaciais, a maioria dos cálculos geodésicos é conduzida sobre a superfície do elipsoide de revolução, adotado como superfície de referência. Pesquisar os parâmetros do chamado "melhor elipsoide" ou do elipsoide terrestre concentrou os esforços da Geodésia durante quase todo o século XIX.

Portanto, é de suma importância conhecer e estudar o elipsoide de revolução, seus parâmetros e conceitos a ele vinculados. Para isto, utiliza-se de alguns princípios matemáticos e da Geometria para apresentação dos elementos definidores do modelo geométrico.

2.1.Considerações Iniciais

Define-se como superfície, o conjunto de pontos no espaço, cujas coordenadas satisfazem uma única equação da forma

$$F(x,y,z) = 0, \text{ chamada de } \underline{\text{equação da superfície.}}$$

Considerando a geometria clássica, uma superfície em geral é definida como o lugar geométrico de um ponto ou linha. Desta forma, uma superfície esférica é o lugar geométrico de um ponto situado a certa distância de um ponto fixo, que é o centro. Uma superfície cônica é o lugar geométrico de uma linha que passa por um ponto fixo e cruza uma curva. Uma superfície de revolução é a superfície gerada pela rotação ou revolução de uma curva plana ou cônica em torno de um de seus eixos, ou seja, uma curva girando em torno de uma linha.

No espaço tridimensional E^3 , as equações do 2.º grau constituem-se em superfícies quádricas, e as do 1.º, 3.º, 4.º... graus em superfícies não quádricas. A equação geral do segundo grau a três variáveis (x,y,z) , onde pelo menos um dos coeficientes D, E, F, G, H ou I é diferente de zero, representa uma superfície quádrlica, ou apenas quádrlica.

$$Ax + By + Cz + Dx^2 + Ey^2 + Fz^2 + 2Gxy + 2Hxz + 2Iyz + L = 0 \quad (2.1)$$

Quádrlica é o lugar geométrico dos pontos do espaço, cujas coordenadas cartesianas (terno ortogonal), satisfazem a equação do 2º grau, a três variáveis. Se o termo independente L da equação acima for nulo, a quádrlica passa pela origem, pois o ponto $O=(0, 0, 0)$ satisfaz tal equação. Esferas, paraboloides, elipsoides, hiperboloides, cilindros (do 2.º grau), constituem as superfícies quádrlicas mais conhecidas.

Procedendo-se mudança de coordenadas, através de rotações ou translações, a equação (2.1) citada acima transforma-se numa das seguintes formas:

$$Dx^2 + Ey^2 + Fz^2 + L = 0 \quad (2.2a)$$

$$Dx^2 + Ey^2 + Fz^2 + Ax = 0 \quad (2.2b)$$

$$Dx^2 + Ey^2 + Fz^2 + By = 0 \quad (2.2c)$$

$$Dx^2 + Ey^2 + Fz^2 + Cz = 0 \quad (2.2d)$$

A equação (2.1) pode transformar-se em dois tipos: em **quádricas cêntricas ou centradas** e **quádricas não centradas**. Caso nenhum dos coeficientes da equação (2.2b) seja nulo, tem-se a

expressão da quádrlica centrada, que é dada pela equação (2.3). As quádrlicas centradas (superfícies que tem centro de simetria e origem) são escritas:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.3a)$$

sendo: $(1/a^2) = -D/L$ $(1/b^2) = -E/L$ $(1/c^2) = -F/L$

Por questões de conveniência, a expressão anterior (2.3a) é reescrita como:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{c^2} \pm \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.3b)$$

A equação (2.3b) é chamada forma canônica ou padrão de uma superfície quádrlica centrada.

A quádrlica centrada tem três planos de simetria (planos principais), três eixos de simetria (eixos principais) e um centro de simetria (origem), que é o centro da superfície.

Para **quádrlicas cêntricas**, se todos os coeficientes da equação (2.3a ou 2.3b) forem negativos, não há lugar geométrico definido; se todos os coeficientes forem positivos, o lugar geométrico da superfície define um elipsoide (a quádrlica de centro será um elipsoide); se alternarem-se positivos e negativos (ou vice-versa), tem-se um hiperboloide de uma ou duas seções. As **quádrlicas não cêntricas** darão origem ao parabolóide elíptico ou ao parabolóide hiperbólico (ver figura 2.1).

As curvas (elipse, hipérbole, parábola), em conjunto com círculos e combinações apropriadas de duas retas, são chamadas de **cônicas**. Assim, uma seção plana de uma quádrlica é uma **cônica**, e consiste no lugar geométrico dos pontos do plano, cujas coordenadas cartesianas satisfazem à equação do 2º grau a duas variáveis, dada pela equação a seguir (GEMAEL, 1987):

$$A'x + B'y + C'xy + D'x^2 + E'y^2 + L' = 0 \quad (2.4)$$

A interseção de uma superfície quádrlica com um dos planos coordenados é uma seção cônica. Circunferências, elipses, parábolas e hipérbolas constituem as cônicas mais conhecidas.

Constata-se que as cônicas são casos especiais de curvas e as quádrlicas, casos especiais de superfícies. Na figura abaixo, alguns exemplos de superfícies quádrlicas.

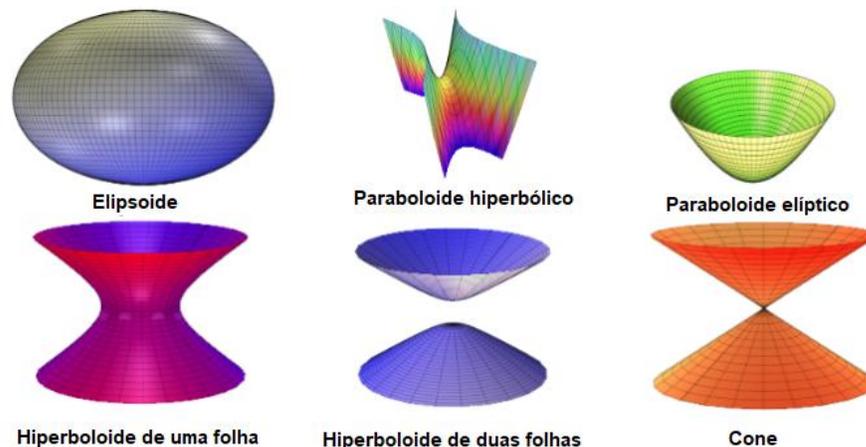


Figura 2.1 - Exemplo de superfícies quádrlicas. Fonte: fatosmatematicos.blogspot.com.br

A elipse é definida pela interseção de um plano que atravessa a superfície de um cone (o plano é oblíquo ao eixo e não paralelo a uma geratriz). A parábola é definida na interseção de um plano que penetra a superfície de um cone (o plano é paralelo a uma geratriz do cone). Já a hipérbole é definida na interseção de um plano que penetra um cone em paralelo ao seu eixo.

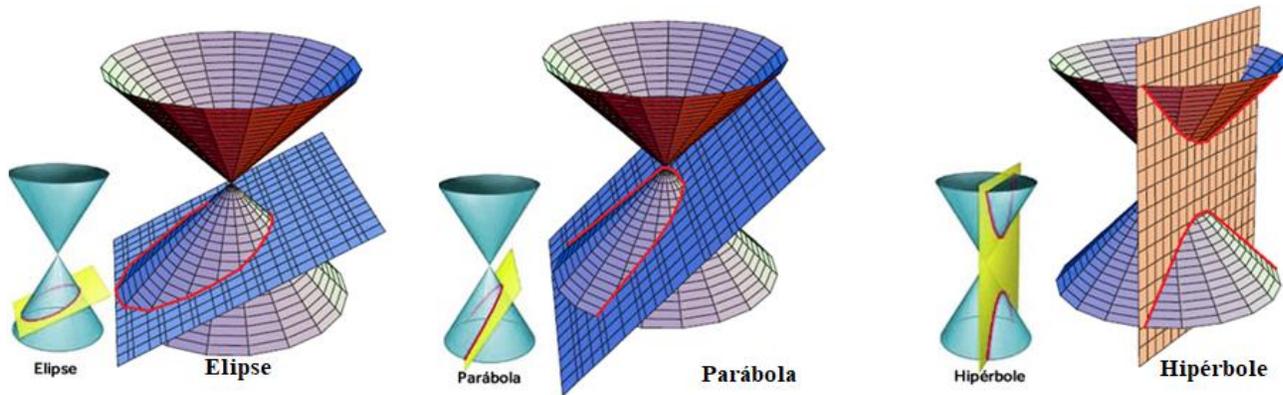


Figura 2.2 - Superfícies - Fonte: <http://www.mat.uc.pt/~adsg/AM4conicas.pdf> e <http://www.somatematica.com.br>

2.2 Elipsoides

A equação geral das quádricas na forma matricial é dada por:

$$B^T X + X^T A X + L = 0 \quad (2.5)$$

Sendo que A é uma matriz quadrada simétrica, B e X são vetores, $X^T A X$ é uma forma quadrática, e L é o escalar que representa o termo independente das superfícies de 2ª. ordem.

$$B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} dgh \\ gei \\ hif \end{bmatrix}$$

Se o terno cartesiano $[X \ Y \ Z]^T$ tem origem no centro da quádrica (não há termos independentes), e se a quádrica for de centro (com centro de simetria como o elipsoide), tem-se:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = Q \quad (2.6)$$

que é a chamada equação reduzida, sendo λ_i os auto-valores da matriz A.

Passando-se um sistema de coordenadas pelo centro do elipsoide escaleno (três eixos desiguais) cujo plano XY coincide com o plano equatorial tem-se:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.7)$$

A expressão (2.7) refere-se a um elipsoide triaxial (três eixos distintos), que representa a superfície que mais se aproxima do geóide. Porém o elipsoide triaxial apresenta grande dificuldade nos cálculos. No caso de $a=c$, tem-se o elipsoide biaxial ou de revolução, utilizado em Geodésia.

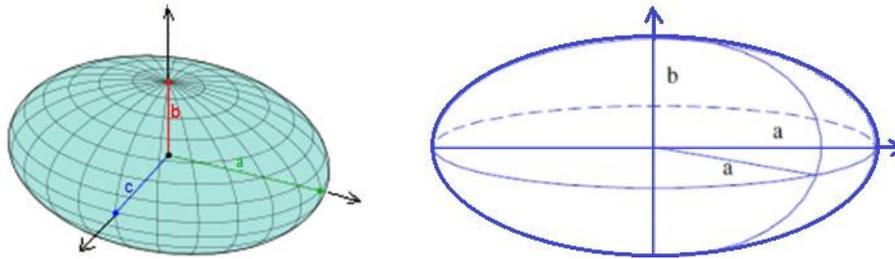


Figura 2.3 - Elipsoides

2.3 Elipsoide de Revolução: definição e equação

Elipsoide de revolução: forma geométrica gerada pela rotação de uma semi-elipse (geratriz) em torno de um de seus eixos, chamado eixo de revolução. Se for o eixo menor é um elipsoide “achatado”; caso contrário, o elipsoide é “alongado”. Para a Geodésia interessa o elipsoide achatado.

A expressão para o elipsoide biaxial é obtida fazendo-se $a=c$ na eq. (7):

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.8)$$

Outra forma de se chegar a esta equação, é considerando o eixo OZ como o eixo de rotação, ao passo que a equação da superfície de revolução pode ser obtida, substituindo na equação da geratriz, a variável não vinculada ao eixo de rotação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.9)$$

Considerando-se que $x \approx (x^2+y^2)^{1/2}$, obtém-se a expressão (2.9).

Seções produzidas por planos perpendiculares ao eixo de revolução são **circulares** (paralelos e Equador). Seções produzidas por planos que contém o eixo de revolução são **elípticas** (meridianos).

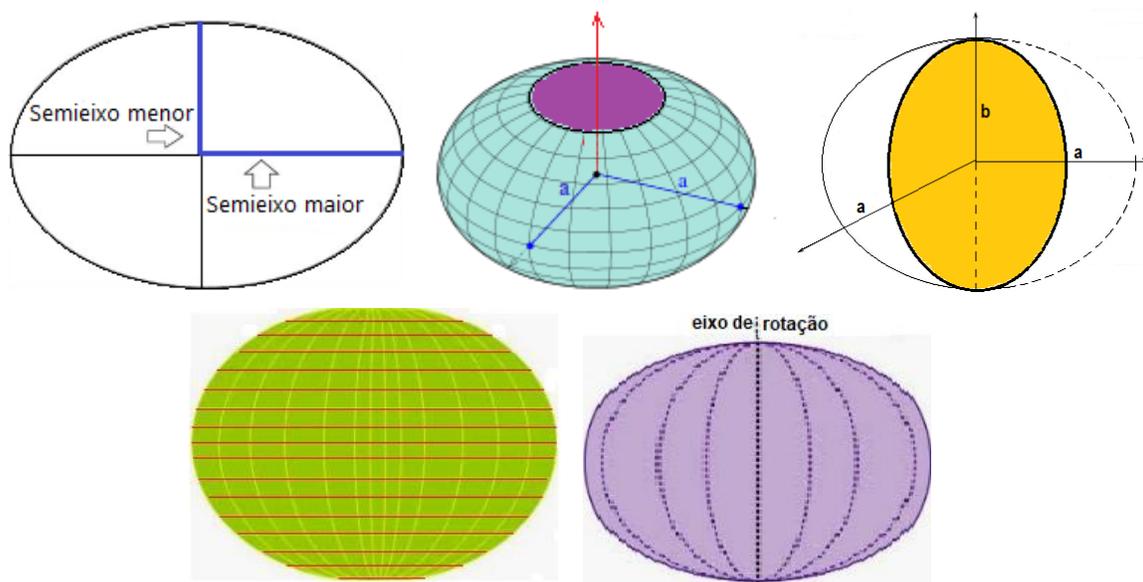


Figura 2.4 - Seções circulares e seções elípticas

A importância do estudo da geometria do elipsoide reside no fato de que:

- figura geométrica com tratamento matemático mais semelhante à forma real da Terra;
- figura obrigatoriamente usada no georreferenciamento de pontos na superfície terrestre;
- figura usada como modelo ou superfície de referência no SGB – Sistema Geodésico de Referência;

Referência;

- os cálculos (transporte de coordenadas) consideram as medidas realizadas na superfície terrestre, reduzidas ao elipsoide.

2.4 Parâmetros

Um elipsoide de revolução fica perfeitamente definido por meio de dois parâmetros; o semieixo maior **a** e o semieixo menor **b**. Em Geodésia, entretanto, é tradicional considerar como parâmetros o semieixo maior **a** e o achatamento $\alpha = (1/f)$, que serão definidos a seguir.

A figura 2.5a representa uma elipse com seus dois focos F1 e F2, sendo que a distância compreendida entre eles é a distância focal (2c). Quanto mais próximos os focos entre si, mais a elipse se assemelha à circunferência (figura 2.5b).

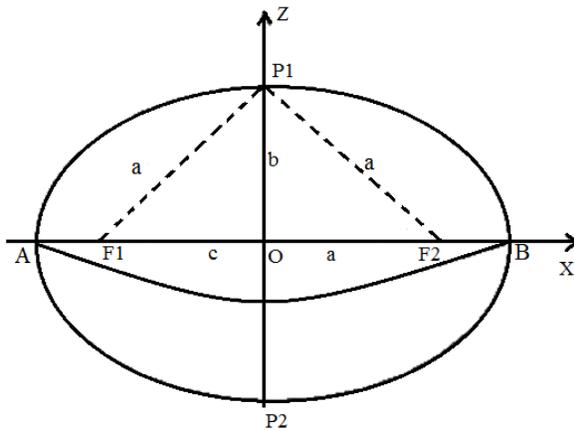


Figura 2.5a - Parâmetros Elipsoidais

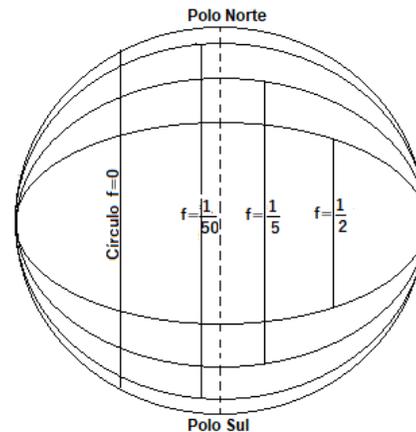


Figura 2.5b – Comparação entre achatamentos

O centro O da elipse é o ponto médio do segmento F1F2. O eixo focal (x) que contém os focos intercepta a elipse em dois pontos A e B. O segmento AB define o eixo maior da elipse (2a). O eixo normal (z) que passa pelo centro da elipse, perpendicularmente ao eixo focal, define na elipse os pontos P1 e P2. O segmento P1P2 chama-se eixo menor da elipse (2b). Os segmentos que unem os pontos F1P1 e F2P1 são iguais e correspondem ao semieixo maior **a**. Assim, tem-se que:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (2.10)$$

2.4.1 Achatamento

O achatamento de um elipsoide é a relação:

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a} \quad (2.11)$$

OBS: na bibliografia pode aparecer no lugar de α a letra **f** na expressão 2.11.

2.4.2 Excentricidade

A excentricidade do elipsoide é definida como a proporção entre a diferença de comprimento dos semieixos de uma elipse e o semieixo maior. Ou, em outras palavras, é a relação entre a semidistância focal (**c**) e o semieixo maior (**a**). A **excentricidade** é um parâmetro associado a qualquer cônica, que mede o seu desvio em relação a uma circunferência, ou o afastamento em relação ao centro. Para o elipsoide tem-se $0 < e < 1$.

$$e = \frac{c}{a} \quad (2.12)$$

Elevando-se ambos os membros ao quadrado

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} \quad (2.13)$$

Da Geométrica Analítica (cônicas), tem-se que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \therefore c^2 = a^2 - b^2 \quad (2.14)$$

Substituindo c^2 em (13) tem-se:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad (2.15)$$

A expressão (2.15) é a da chamada primeira excentricidade. Dela decorre que:

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \quad (2.16)$$

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \quad (2.17)$$

A chamada segunda excentricidade e' é obtida por:

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \quad (2.18)$$

As duas excentricidades se relacionam através da expressão:

$$(1 - e^2).(1 + e'^2) = 1 \quad (2.19)$$

Aplicando-se substituições das várias fórmulas apresentadas até o momento, demonstra-se que a excentricidade ao quadrado é aproximadamente igual ao dobro do achatamento, ou seja:

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2 \quad (2.20)$$

OBS: O valor de e^2 para qualquer elipsoide adotado sempre será da ordem de $e^2=0,006\dots$, o que torna recomendável que se utilize ao menos 7 casas decimais para diferenciar os elipsoides.

2.5 Definição da Grande Normal (N) e da Pequena Normal (N')

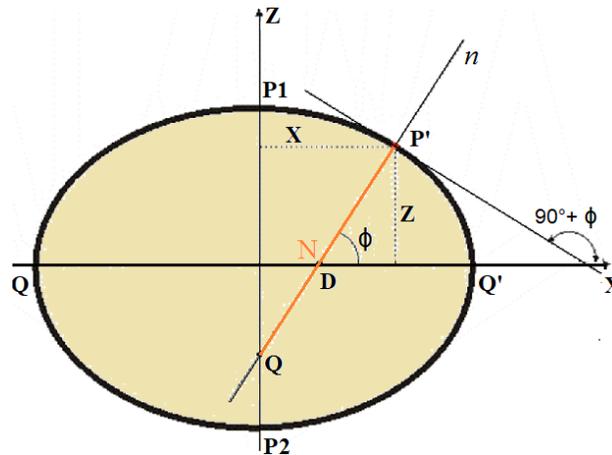


Figura 2.6 – Grande normal P'Q

A figura 2.6 representa a seção meridiana do ponto P' (X, Z), de latitude geodésica ϕ . O segmento QQ' corresponde ao diâmetro equatorial (2a), sendo que P1P2 é igual a (2b). Denomina-se de **grande normal N** ou (ν), ao segmento de reta que une o ponto P' ao ponto Q, sobre a reta n. Para obter-se a expressão de cálculo da grande normal, faz-se uso da equação (2.8). Sabe-se que o elipsoide de revolução utilizado em Geodésia é um sólido geométrico gerado pela rotação de uma elipse em torno do seu eixo menor. Como $a = c$, tem-se na equação (2.8) que:

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1$$

Na figura 2.7 tem-se um sistema de coordenadas cartesianas tridimensionais dextrógiro, com origem coincidente com o centro do elipsoide de revolução:

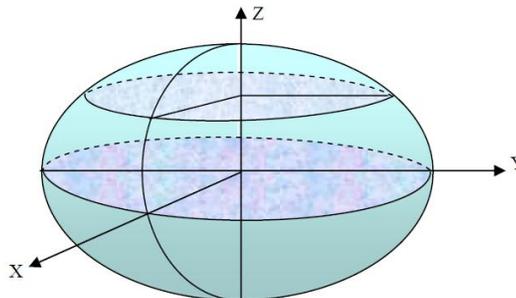


Figura 2.7 – Sistema de coordenadas cartesianas tridimensionais associado ao elipsoide de revolução
 Fonte: ZANETTI, 2007

Fazendo $Y=0$ obtém-se no plano XZ uma elipse de semieixo maior **a** e semieixo menor **b**

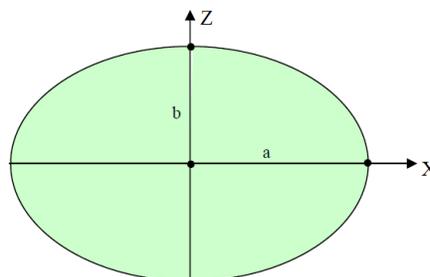


Figura 2.8 – Elipse no plano XZ

Considerando a elipse contida no plano XOZ tem-se

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1 \quad (2.21)$$

Da equação da elipse (2.21), derivando em dZ e dX, tem-se:

$$\frac{2X}{a^2} + \frac{2Z}{b^2} \frac{dZ}{dX} = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{2Z}{b^2} \frac{dZ}{dX} = \frac{-2X}{a^2} \rightarrow \frac{dZ}{dX} = \frac{-2X}{a^2} \frac{b^2}{2Z} \quad (2.23)$$

$$\frac{dZ}{dX} = -\frac{X}{a^2} \frac{b^2}{Z} \rightarrow \frac{dZ}{dX} = \text{coeficiente angular da reta (tangente ao ponto P')}$$

Tem-se que

$$\frac{dZ}{dX} = \text{tg}(90 + \phi) \text{ ou } \frac{dZ}{dX} = -\text{cotg}\phi \quad (2.24)$$

$$\frac{Xb^2}{Za^2} = \text{cotg}\phi \quad (2.25)$$

$$Xb^2 = Za^2 \text{cotg}\phi \quad (2.26)$$

Isolando-se a coordenada Z, tem-se:

$$Z = \frac{Xb^2 \text{tg}\phi}{a^2} \quad (2.27)$$

Substituindo (2.27) na expressão (2.21)

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{Xb^2 \text{tg}\phi}{a^2}\right)^2}{b^2} = 1 \quad (2.28)$$

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{X^2 b^2 \text{tg}^2 \phi}{a^4} = 1 \quad (2.29)$$

$$\frac{a^2 X^2 + X^2 b^2 \text{tg}^2 \phi}{a^4} = 1 \rightarrow a^2 X^2 + X^2 b^2 \text{tg}^2 \phi = a^4 \quad (2.30)$$

Da expressão (2.16), tem-se que $b^2 = a^2(1 - e^2)$. Então:

$$X^2(a^2 + a^2(1 - e^2) \operatorname{tg}^2 \phi) = a^4 \quad (2.31)$$

$$X^2 = \frac{a^2}{1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 \phi} \quad (2.32)$$

Multiplicando os termos do quociente anterior por $\cos^2 \phi$

$$X^2 = \frac{a^2 \cos^2 \phi}{(1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 \phi) \cos^2 \phi} \rightarrow X^2 = \frac{a^2 \cos^2 \phi}{\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi} \quad (2.33)$$

$$X^2 = \frac{a^2 \cos^2 \phi}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi} \rightarrow X = \frac{a \cos \phi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi}} \quad (2.34)$$

Substituindo-se X na expressão (2.27), obtém-se Z

$$Z = \frac{a(1 - e^2) \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi}} \quad (2.35)$$

Portanto, as expressões (2.34) e (2.35) fornecem as coordenadas cartesianas (X , Z) de um ponto sobre o elipsoide (P'), em função da sua latitude geodésica ϕ .

Conhecendo-se as coordenadas X , Z , da figura 2.6 obtém-se a grande normal N ou (ν),

$$\boxed{X = N \cos \phi} \quad (2.36)$$

Mediante substituições, obtém-se para a Grande Normal N :

$$\boxed{N = \nu = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi}}} \quad (2.37)$$

Pode-se exprimir analiticamente a partir da figura 2.6, a pequena normal (N'), que compreende a distância de P' até D .

$$\boxed{Z = N' \operatorname{sen} \phi} \quad (2.38)$$

Obtém-se que:

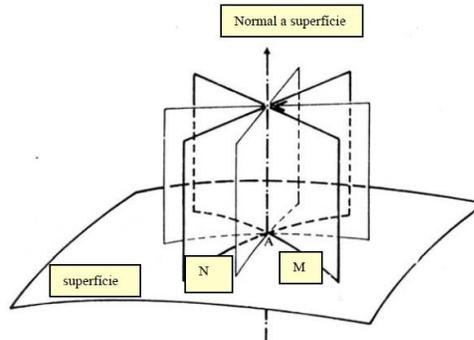
$$\boxed{N' = \nu' = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi}}} \quad (2.39)$$

Comparando-se as expressões (2.37) e (2.39), tem-se:

$$N' = N(1 - e^2) \quad (2.40)$$

2.6 Curvatura das Seções Normais do Elipsoide de Revolução

Por um ponto qualquer da superfície do elipsoide, podem-se traçar infinitos planos que contenham a normal nesse ponto; esses planos são chamados de planos normais (figura 2.9)



Fonte: adaptado de ASÍN(1990, p.168)

Figura 2.9 - Planos que passam pela Normal ao Ponto A

Fonte: Apostila UFPR - ZANETTI, 2007

Se um ponto sobre a superfície do elipsoide de referência e a respectiva normal deste ponto, o plano que contém esta normal seccionará a superfície do elipsoide, gerando uma curva chamada seção normal, a qual é uma cônica da quádrica. O interesse reside no raio de curvatura, na origem dessa cônica. O raio de curvatura é uma distância ao longo da normal principal à curva, no ponto em questão, que matematicamente é dado pelo inverso da expressão que define a curva.

Os raios de curvatura de uma seção normal dependem do azimute da linha. Dentre as infinitas seções normais passantes por um ponto do elipsoide, são seções principais a seção meridiana M e a seção primeiro vertical N. A seção meridiana tem raio de curvatura mínimo, e a seção primeiro vertical tem raio de curvatura máximo. Estas seções normais são perpendiculares entre si. De todos os arcos que se pode considerar entre dois pontos de uma superfície, tem comprimento mínimo, o que possuir raio de curvatura máximo. Sendo assim, a seção meridiana tem curvatura máxima e a seção primeiro vertical tem curvatura mínima.

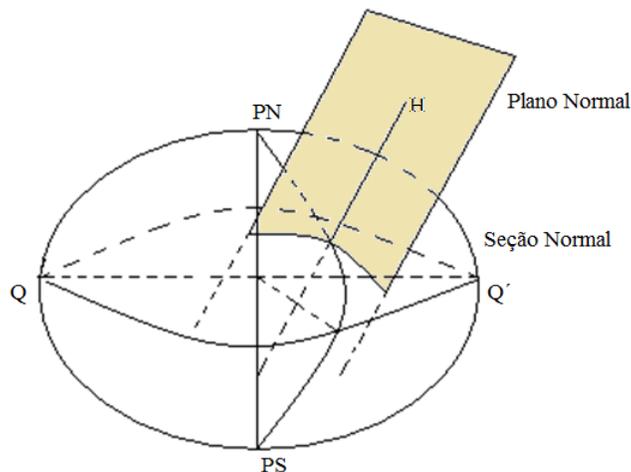


Figura 2.10 – Seção Normal

2.6 1. Raio de Curvatura da Seção Meridiana (M)

Denomina-se de M o raio de curvatura da seção meridiana (plano contendo o ponto e os pólos, ou seja, coincide com o meridiano do ponto e contém a linha Norte-Sul), que é dado por:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \quad (2.41)$$

O valor de M aumenta lentamente do Equador em direção aos polos ($M < a$ no Equador e $M > a$ nos pólos). O comprimento do segmento M não intercepta o eixo polar, exceto para $\phi=90^\circ$. O ponto da extremidade inferior do raio de curvatura situa-se (“cai”) sobre uma curva, conforme indica a figura abaixo (JEKELI, 2006).

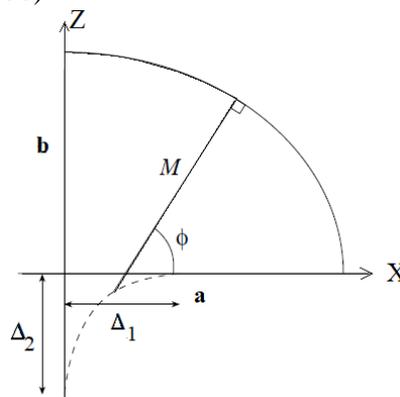


Figura 2.11 – Raio de curvatura da seção meridiana - Fonte: Jekeli, C., 2006

Na figura anterior, os valores de Δ_1 e Δ_2 são calculados por:

$$\Delta_1 = a - M_{(\text{Equador})} = a e^2 \quad \Delta_2 = M_{(\text{Polo})} - b = b e^{-2}$$

Para o elipsoide do GRS80, tem-se que $\Delta_1 = 42.697,67\text{m}$ e $\Delta_2 = 42.841,31\text{m}$ (RAAP, 1984). Comparando-se o valor de M no Equador e no pólo, é válido que $M_{\text{Equador}} = M_{\text{Polo}} \cdot (1 - \alpha)^3$.

2.6.2. Raio de Curvatura da Seção 1º. Vertical (N)

A seção 1º. Vertical é perpendicular à seção meridiana, e numericamente, o raio de curvatura da seção 1º. vertical coincide com o valor da Grande Normal N. No Equador, o raio de curvatura da seção primeiro vertical é igual ao semi-eixo maior do elipsoide **a**.

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \phi}} \quad (2.42)$$

Verifica-se a proporção entre N e M, onde $N \geq M$. O raio de curvatura da seção meridiana M aumenta à medida em que o ponto se move do Equador em direção ao pólo. O mesmo acontece com o raio de curvatura da seção 1º. vertical.

Adotado um elipsoide de referência, e fixados os parâmetros que o definem, os raios principais de curvatura só dependem da latitude ϕ do ponto.

2.6.3 Raio de Curvatura de uma Seção Normal Qualquer

O Raio de Curvatura de uma seção normal qualquer, de azimute α , através do teorema de Euler, é dado por:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{M} + \frac{\sin^2 \alpha}{N} \quad (2.43)$$

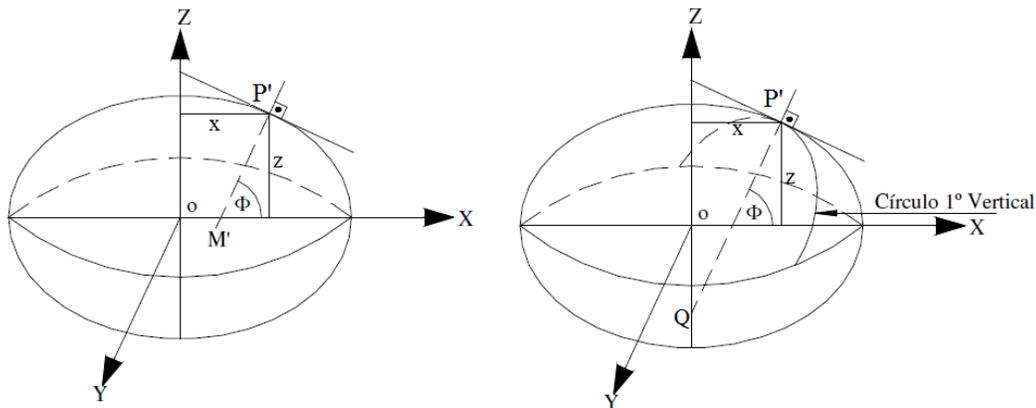


Figura 2.12 – Raio de curvatura M e raio de curvatura N
 Fonte: Adaptado de CARVALHO FILHO, 2009

Na figura anterior tem-se indicados os raios de curvatura da seção meridiana M (segmento P'M') e o raio de curvatura da seção 1º. Vertical (segmento P'Q). Se $\alpha = 0^\circ$, tem-se $R=M$; se $\alpha = 90^\circ$, tem-se $R=N$.

2.7 Raio Médio de Curvatura

O Raio Médio de Curvatura é dado pela média geométrica dos raios principais (M,N).

$$R_0 = \sqrt{M \cdot N} = b / (1 - e^2 \sin^2 \phi) \quad (2.44)$$

Segundo Zakatov (1981), o raio médio de curvatura é usado na representação de partes da superfície do elipsoide sobre o globo e nos cálculos dos excessos esféricos dos triângulos nas triangulações. Nota-se que nos polos, os três raios de curvatura (seção meridiana, seção 1º. vertical e médio) se confundem e valem (a^2/b) . Fica a cargo do leitor a demonstração!!

2.8 Raio de Curvatura de um Paralelo

É definido pela expressão (2.36), originado por um plano que passa por P', normal ao eixo polar, e que forma com o raio de curvatura do 1º vertical um ângulo igual à latitude geodésica. Os paralelos são circunferências no elipsoide biaxial, cujos raios decrescem com o aumento da latitude ϕ . O raio do paralelo r que contém um ponto dado é fornecido pelo Teorema de Meusnier:

$$X = v \cos \phi \quad \text{ou} \quad r = v \cos \phi \quad \text{ou} \quad r_p = N \cos \phi$$

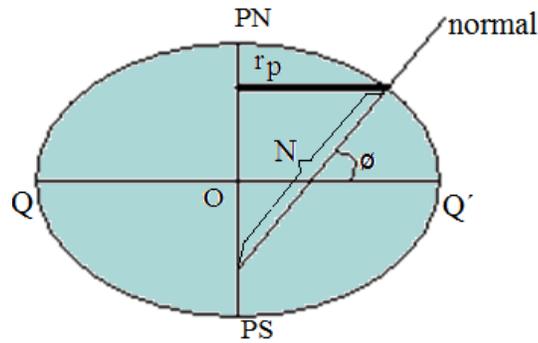


Figura 2.13 – Raio de um Paralelo

2.9 Comprimento de um arco de Meridiano e de um arco de Paralelo

A figura seguinte ilustra a questão:

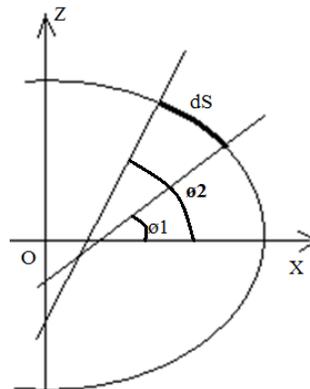


Figura 2.14 – Comprimento de um Arco de Meridiano

O comprimento do arco de elipse meridiana pode ser obtido considerando-se o arco elementar de uma curva $X = f(X)$, que após substituições, pode ser expresso por:

$$ds = M.d\phi = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \text{sen}^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi \quad (2.45)$$

que é obtido da expressão

$$ds = \left[1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx \quad (2.46)$$

Integrando-se a expressão dada em (2.45), tendo como limites de integração as latitudes dos pontos ϕ_1 e ϕ_2 que definem o comprimento s, tem-se:

$$s = a(1-e^2) \int_{\phi_1}^{\phi_2} (1-e^2 \text{sen}^2 \phi)^{-\frac{3}{2}} d\phi \quad (2.47)$$

Desenvolvendo o integrando anterior com a fórmula do binômio, mantendo-se os termos de grandeza significativa, resulta:

$$S = a(1 - e^2) \left\{ \begin{aligned} & A(\phi_2 - \phi_1) - \frac{1}{2} B(\text{sen}2\phi_2 - \text{sen}2\phi_1) + \frac{1}{4} C(\text{sen}4\phi_2 - \text{sen}4\phi_1) - \frac{1}{6} D(\text{sen}6\phi_2 - \text{sen}6\phi_1) + \\ & + \frac{1}{8} E(\text{sen}8\phi_2 - \text{sen}8\phi_1) - \frac{1}{10} F(\text{sen}10\phi_2 - \text{sen}10\phi_1) \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

onde (as letras “KK” expressam ... reticências, ou seja, termos de ordem superior):

$$A = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10} + \text{K K} \quad (2.49)$$

$$B = \frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \frac{72765}{65536}e^{10} + \text{K K} \quad (2.50)$$

$$C = \frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \frac{10395}{16384}e^{10} + \text{K K} \quad (2.51)$$

$$D = \frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{2048}e^8 + \frac{31185}{131072}e^{10} + \text{K K} \quad (2.52)$$

$$E = \frac{315}{16384}e^8 + \frac{3465}{65536}e^{10} + \text{K K} \quad (2.53)$$

$$F = \frac{693}{131072}e^{10} + \text{K K} \quad (2.54)$$

Na expressão (2.48), a diferença ($\phi_2 - \phi_1$) deve ser em **radianos**. Os coeficientes precisam ser calculados apenas uma vez para cada elipsoide, podendo ser armazenados. Um quadrante meridiano é calculado, escolhendo os limites de 0° e 90° . Nesse caso, equação 2.48 fica reduzida, pois os senos trigonométricos dos ângulos múltiplos são nulos. Assim, o comprimento do arco de quadrante para qualquer elipsoide da terra-modelo deve ser aproximadamente 10.000.000 metros.

As seções do elipsoide de revolução perpendiculares ao eixo de rotação são circulares. Desta forma o perímetro do paralelo é igual ao dobro do raio de curvatura do paralelo.

$$P = 2 \pi r = 2\pi N \cos \phi \quad (2.55)$$

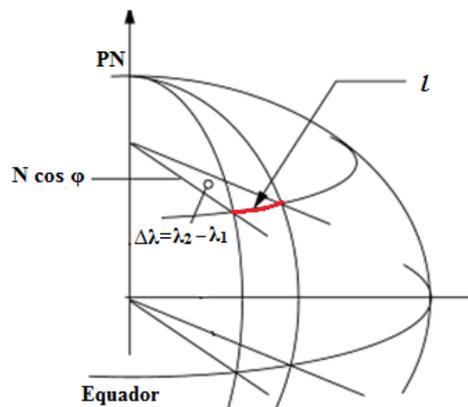


Figura 2.15 – Comprimento de um Arco de Paralelo

Para dois pontos que estejam situados sobre um mesmo paralelo, com diferença de longitude ($\Delta\lambda$ em radianos), o comprimento do arco de paralelo l , conforme, figura 2.15, é dado por:

$$l = N \cos\phi(\Delta\lambda) \quad (2.56)$$

2.10 Área de uma Zona Elipsóidica

Na figura 2.16 temos a representação de uma zona elipsóidica.

Pelo Teorema de Guldin tem-se que a área elementar dA da zona elipsoidal gerada pela revolução do arco ds em torno do eixo OZ, é dada por:

$$dA = 2\pi r ds \quad (2.57)$$

Sabe-se que $r = N \cdot \cos\phi$ e $ds = M \cdot d\phi$, que substituindo, resulta:

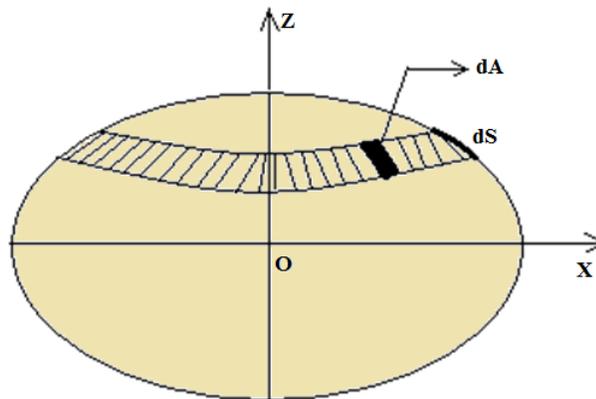


Figura 2.16 – Zona elipsóidica

$$dA = 2\pi M N \cos\phi d\phi \quad (2.58)$$

Após integrações que são substituídas por binômios, com as devidas considerações dos termos de ordem relevante, tem-se:

$$A = 4\pi b^2 [A' \text{sen}\Delta\phi \cos\phi_m - B' \text{sen}3\Delta\phi \cos3\phi_m + C' \text{sen}5\Delta\phi \cos5\phi_m - \dots] \quad (2.59)$$

na qual $\Delta\phi = (\phi_2 - \phi_1)/2$ e $\phi_m = (\phi_2 + \phi_1)/2$

Os termos A' , B' , C' etc representam desenvolvimentos de potências em função da excentricidade e .

2.11 Área do Quadrilátero Elipsóidico

O quadrilátero elipsóidico (figura 2.17) refere-se à porção de superfície do elipsoide compreendida entre dois paralelos (de latitudes ϕ_1 e ϕ_2) e dois meridianos, cuja diferença de longitude é $\Delta\lambda$. Sendo T a área do quadrilátero, tem-se:

$$\frac{T}{A} = \frac{\Delta\lambda}{2\pi} \quad (2.60)$$

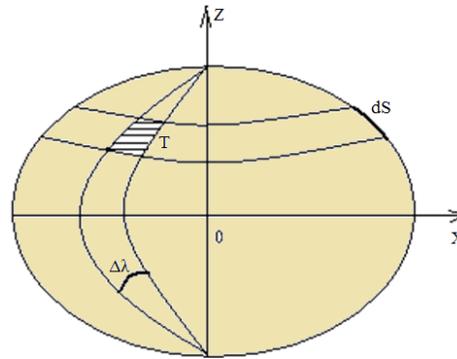


Figura 2.17 – Área do Quadrilátero Elipsóidico

Após desenvolvimentos matemáticos, chega-se à seguinte expressão:

$$T = 2b^2 \Delta\lambda (A' \text{sen} \Delta\phi \cos \phi_m - B' \text{sen} 3\Delta\phi \cos 3\phi_m + C' \text{sen} 5\Delta\phi \cos 5\phi_m - \dots) \quad (2.61)$$

Os coeficientes A' , B' , C' , presentes nas expressões (2.59) e (2.61) são dados por, (as letras “K” ou “KK” expressam ... reticências, ou seja, termos de ordem superior):

$$A' = 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \frac{35}{128}e^8 + \frac{63}{256}e^{10} + K K \quad (2.62)$$

$$B' = \frac{1}{6}e^2 + \frac{3}{16}e^4 + \frac{3}{16}e^6 + \frac{35}{192}e^8 + \frac{45}{256}e^{10} + K \quad (2.63)$$

$$C' = \frac{3}{80}e^4 + \frac{1}{16}e^6 + \frac{5}{64}e^8 + \frac{45}{512}e^{10} + K \quad (2.64)$$

Note que os coeficientes são dados em função de potências pares da excentricidade.

2.12 Latitudes Geocêntrica ψ e Reduzida μ

As latitudes geocêntrica e reduzida são muito importantes sob o ponto de vista teórico. A figura 2.18 auxilia na compreensão da latitude geocêntrica (ψ), que é o ângulo que o raio vetor de certo ponto em questão forma com sua projeção sobre o plano do Equador. O **raio vetor** R_v ou D (distância de um ponto ao centro do elipsoide), considerando o caso bidimensional, é fornecida pela expressão $D = R_v = (x^2 + z^2)^{1/2}$.

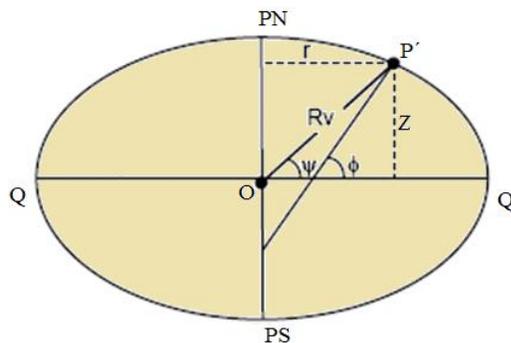


Figura 2.18 – Latitude Geocêntrica

Na figura 2.18 sabe-se que $r = x$. Obtém-se que:

$$\text{sen}\phi = \frac{z}{N'} \rightarrow z = N' \text{sen}\phi \quad (2.65)$$

$$\text{tg}\Psi = \frac{z}{x} \rightarrow z = x \text{tg}\Psi \quad (2.66)$$

Igualando-se as expressões (2.65) e (2.66), e lembrando que $N' = N(1 - e^2)$, tem-se a expressão que relaciona a latitude geodésica ϕ com a geocêntrica Ψ , que é dada por:

$$\boxed{\text{tg}\Psi = (1 - e^2) \text{tg}\phi} \quad (2.67)$$

Para se obter a expressão da latitude reduzida μ , recorre-se à figura 2.19 (o ponto M equivale ao ponto P' da figura anterior).

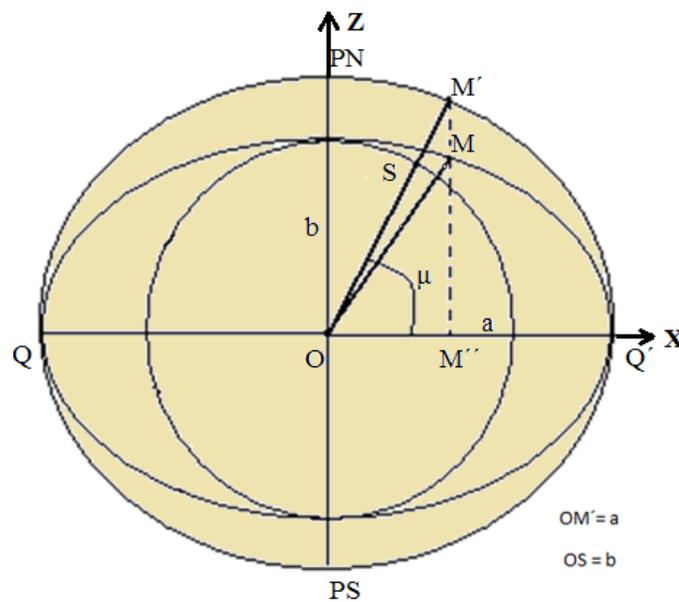


Figura 2.19 – Latitude reduzida

As coordenadas cartesianas (X, Z) **do ponto M** podem ser obtidas do triângulo OM'M'' em função de μ (considerar que $x_M = x_{M'} = x_{M''}$ e que $z_M = z_S$) por:

$$x = a \cos \mu \quad \text{e} \quad z = b \text{sen} \mu \quad (2.68)$$

Sendo $\text{tg}\Psi = (z/x)$, substituindo-se, tem-se $\text{tg}\Psi = (b/a) \text{tg}\mu$ e que resulta:

$$\boxed{\text{tg}\Psi = (1 - e^2)^{1/2} \text{tg}\mu} \quad (2.69)$$

Igualando-se as expressões (2.67) e (2.69), vem que:

$$\boxed{\text{tg}\mu = (1 - e^2)^{1/2} \text{tg}\phi} \quad \text{ou também} \quad \boxed{\text{tg}\mu = (1 - \alpha) \text{tg}\phi} \quad (2.70)$$

Para um mesmo ponto, constata-se (em módulo) que: $\phi > \mu > \Psi$

2.13 Exemplos de alguns elipsoides e seus parâmetros

De acordo com Gemael (1987), existem mais de 70 elipsoides diferentes usados por vários países como referência para seus trabalhos geodésicos. Nos últimos tempos, estes elipsoides foram sendo substituídos pelo GRS-80 (*Geodetic Reference System 1980*), com orientação global definida pelo IERS (*International Earth Rotation Service*). A seguir alguns exemplos:

Elipsoide	Ano	Semieixo maior a	Achatamento 1/f	Uso
WGS 84 (G873)		6378137,0m	298,257223563	Mundial (GPS)
Clarke	1866	6378206,4m	294,979	América Norte
Hayford	1909	6378388,0m	297,0	mundial
Krassowsky	1948	6378245,0m	298,3	Rússia, leste europeu
GRS67	1967	6378160,0m	298,24716743	América do Sul
GRS80	1980	6378137,0m	298,257222101	América Norte e Sul
Bessel	1841	6377397,15m	299,153	Europa central, Chile
Helmert	1906	6378200,0m	298,3	Partes da África
Everest	1956	6377276,345m	300,8017	Índia
Fisher	1960	6378155,0m	298,3	
Airy (Modificado)		6377340,189m	299,3249646	
Everest	1830	6377276,345m	300,8017	Índia, Sri Lanka
Rapp	1963	6378194,0m	299,9	
Kaula	1961	6378163,0m	298,24	
WGS66	1966	6378145,0m	298,25	
Plessis		6376523,0m	308,64	
Uótila		6378270,0m	297,10	

2.14 Distância do centro do elipsoide ao cruzamento da normal com eixo 2b

A distância do centro do elipsoide (O) até o cruzamento da normal com o eixo 2b é expressa por (considere N_A como o ponto Q da figura 2.6, situado sobre a reta n):

$$ON_A = \frac{a.e^2 \cdot \text{sen}\phi}{\sqrt{1 - e^2 \text{sen}^2\phi}} \quad \text{ou} \quad ON_A = e^2 \cdot N \cdot \text{sen}\phi \quad (2.71)$$

Exercícios: 1) Para o elipsoide de parâmetros $e^2 = 0,006694605$, calcule as latitudes geocêntrica e reduzida para um ponto de latitude $\phi = 35^\circ 30'$.

2) Para o elipsoide GRS80 de parâmetros $a = 6.378.137,0$ m e $\alpha = 1/f = 1/298,257222101$, e para um ponto de latitude $\phi = 22^\circ 30' S$, calcular:

- | | |
|---|---|
| a) o semieixo menor b | b) a excentricidade |
| c) o valor de e^2 | d) a grande normal |
| e) a pequena normal | f) o raio de curvatura da seção meridiana |
| g) o raio de curvatura do 1º. Vertical | h) o raio médio de curvatura |
| i) o raio do paralelo | j) a latitude geocêntrica |
| k) as coordenadas cartesianas bidimensionais (X, Z) | |

3) Calcule a diferença entre as distâncias ON_A e ON_B entre 2 pontos de latitudes $\phi_A = 10^\circ S$ e $\phi_B = 30^\circ S$, com $a = 6378160,0m$ e $e^2 = 0,006694605$, ou seja, a distância $N_A N_B$.

4) Qual o comprimento de um arco de paralelo situado na latitude de $42^\circ 30' 40'' N$, entre os meridianos de longitude $30^\circ E$ e $60^\circ E$? Considere o elipsoide GRS80 da questão 2.

A demonstração de fórmulas matemáticas pode ser feita a partir da geometria do elipsoide, empregando figuras envolvendo as grandezas elipsoidais e as relações matemáticas entre elas.

5) Deduzir a expressão usada no exercício anterior 3.

6) Deduzir as expressões para latitude geocêntrica (2.69) e latitude reduzida (2.70).

7) Demonstre que para um ponto situado nos polos, os três raios N , M e R_0 valem a^2/b .

8) É correto afirmar que $\frac{a^2}{b^2} = \frac{e'^2}{e^2}$?

9) Para um ponto situado no polo, o valor de ON_A (expressão 2.71) é igual ao valor de Δ_2 do item 2.6.1 deste capítulo?

10) Demonstre a expressão (2.20), ou seja: $e^2 = 2\alpha - \alpha^2$.

11) Demonstre que $e'^2 = e^2 / (1 - e^2)$

12) A partir das expressões envolvendo as excentricidades e achatamento, demonstre que é válida a expressão: $e'^2 = (2\alpha - \alpha^2)/(1 - \alpha^2)$

13) Demonstre matematicamente que $ON_A = ze^2 / (1 - e^2)$.

Respostas: 1) $\psi = 35^\circ 19' 05,71''$, $\mu = 35^\circ 24' 32,67''$.

2) a) $b = 6.356.752,31m$; b) $e = 0,081819191$; c) $e^2 = 0,00669438$; d) $N = 6.381.265,764m$; e) $N' = 6.338.547,146m$;

f) $M = 6.344.767,362m$; g) $N = 6.381.265,764m$; h) $R_0 = 6.362.990,396m$; i) $r = 5.895.520,832m$; j) $\psi = 22^\circ 21' 51,33'' S$;

k) $x = 5.895.520,832m$, $z = -2.425.656,98m$.

3) $ON_A = 7.415,3975m$, $ON_B = 21.367,5193m$, $\Delta ON_{AB} = 13.952,1218m$

4) $N = 6.387.907,61m$, $l = 2.465.533,704m$

2.15. Linha Geodésica

Definição: de acordo com Gemael (1987), geodésica é uma linha, jacente (que está estendida) numa superfície, tal que em todos os seus pontos, o plano osculador é normal à superfície. O plano osculador é o plano normal que contém a tangente à curva. O plano osculador de um dado ponto da curva é o plano que melhor se aproxima da curva nesse ponto. O plano osculador da geodésica é ortogonal em qualquer ponto ao plano tangente à superfície. As geodésicas de uma superfície são as linhas "mais retas" possíveis, ou seja, com menor curvatura, fixado um ponto e uma direção dada sobre a dita superfície.

Em outras palavras: é a curva na qual a normal principal de cada um de seus pontos coincide com a normal à superfície (ZAKATOV, 1981). **Geodésicas** são curvas que minimizam, localmente, distâncias sobre superfícies.

A linha geodésica, ou simplesmente geodésica, representa o menor caminho entre dois pontos sobre a superfície considerada (elipsoide de revolução). No plano, o menor caminho

corresponde a um segmento de reta, e na esfera a um arco de circunferência máxima. No elipsoide de revolução, a geodésica é uma curva reversa, com exceção no caso de dois pontos sobre o mesmo meridiano ou sobre o equador, quando então a geodésica é plana (arco elíptico e circular respectivamente). O que é uma curva reversa? Se todos os pontos de uma curva no espaço se encontram em um plano, ela é chamada de curva plana; caso contrário é uma curva reversa (não contida num plano). Esta linha prolonga-se entre duas seções normais recíprocas.

Admita-se um triângulo diferencial limitado por um arco de meridiano, um arco de paralelo e um segmento de geodésica (dS), conforme a figura abaixo:

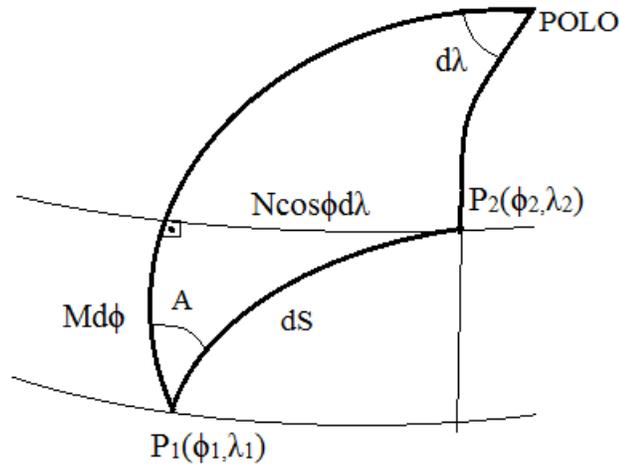


Figura 2.20 – Segmento de geodésica

Da figura, temos que:

$$dS \cdot \cos A = Md\phi \quad \text{e} \quad dS \cdot \sin A = N \cos \phi d\lambda \quad (2.72)$$

$$\text{Pode-se obter então: } \operatorname{tg} A = \frac{N \cos \phi d\lambda}{Md\phi} \quad (2.73)$$

$$\text{E finalmente} \quad dS^2 = (Md\phi)^2 + (N \cos \phi d\lambda)^2 \quad (2.74)$$

Considerando $r = N \cos \phi$, que é o raio do paralelo, tem-se:

$$dS = \left(M^2 d\phi^2 + r^2 d\lambda^2 \right)^{1/2} \quad (\div d\lambda) \quad (2.75)$$

$$dS = \left(M^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \right)^{1/2} \cdot d\lambda \quad (2.76)$$

Integrando-se, considerando-se dois pontos A e B que definem S, tem-se:

$$S = \int_A^B \left(M^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \right)^{1/2} \cdot d\lambda \quad (2.77)$$

A curva definida pela expressão anterior é uma geodésica, quando o valor da integral for um mínimo (menor distância entre dois pontos).

A representação gráfica da geodésica não é tarefa fácil. Para melhor compreensão, recorre-se ao conceito de seções normais recíprocas, com o auxílio da figura 2.22. Como a abordagem envolverá as normais passantes por dois pontos distintos, segue uma análise da convergência e coplanaridade entre estas normais.

As normais relativas a dois pontos de uma superfície esférica convergem no centro da esfera, sendo, portanto, coplanares (se interceptam). Para o elipsoide, a coplanaridade só ocorre para pontos situados num mesmo paralelo ou meridiano (vide figura 2.21). Isto é importante sob o ponto de vista teórico e prático, no caso de grandes triângulos (trilateração Shiran, triangulação celeste, etc).

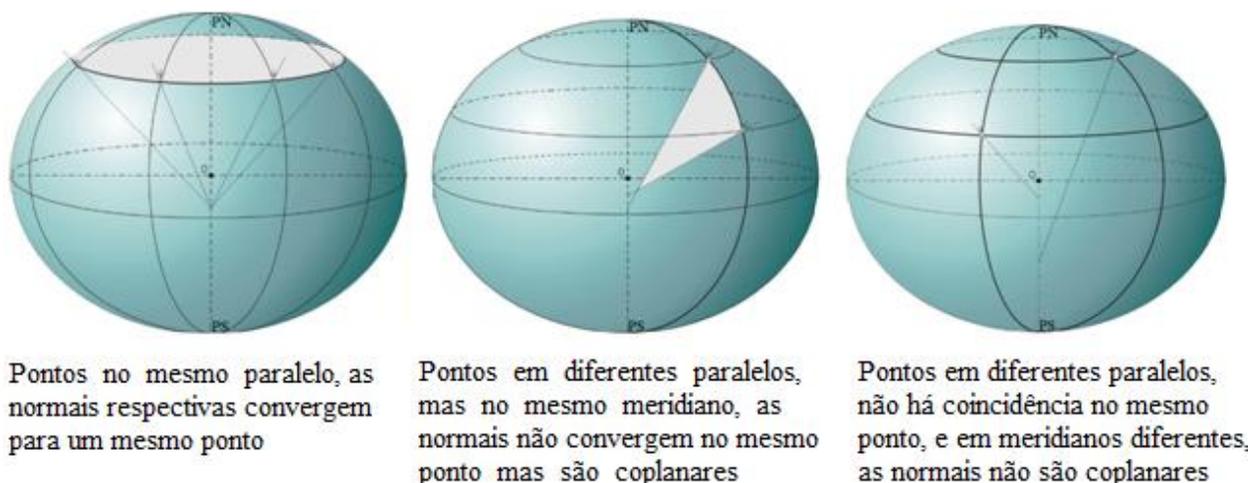


Figura 2.21 –Convergência e Coplanaridade das Normais
 Fonte: FREIBERGER JR, J. , 2011, UFSM.

Considere-se sobre a superfície do elipsoide de revolução, dois pontos A e B, com latitudes ϕ_A e ϕ_B , sendo $\phi_B > \phi_A$, conforme figura 2.22.

Traçam-se as normais na superfície do elipsoide nos pontos A e B. Estas duas normais se encontram nos planos das elipses meridianas que passam através do ponto A e do ponto B respectivamente, e interceptam o eixo menor P1P2 nos pontos nA e nB, ou seja, em pontos diferentes. Quanto maior a latitude, mais próximo do pólo se dá este cruzamento.

Em seguida, é traçado um plano através dos pontos A, nA e B (sobre o qual passa a normal AnA, e que é um plano normal em A, e que passa por B). Na interseção com a superfície do elipsoide, o plano engendrará a curva AaB, chamada seção normal direta do ponto A ao ponto B e seção normal inversa para o ponto B (ou também recíproca em relação a B).

Traçando-se outro plano, através dos pontos B, nB e A, obtém-se um plano da seção normal do ponto B ao ponto A, sendo que este plano é cortado com o plano da seção normal do ponto A ao ponto B (seção anterior), pela corda AB, mas que na superfície do elipsoide produz a curva BbA chamada seção normal direta do ponto B para A, NÃO COINCIDENTE com a curva AaB. Assim, a seção normal AaB (do ponto A ao ponto B) não coincide com a seção normal BbA (do ponto B ao ponto A). Estas duas curvas denominam-se seções normais reciprocamente inversas. **O menor caminho entre dois pontos ao longo da superfície do elipsoide não é**

representado nem pela seção normal direta AaB , nem pela recíproca BbA , mas sim por uma curva situada entre as duas curvas e denominada de geodésica (vide figura 2.22).

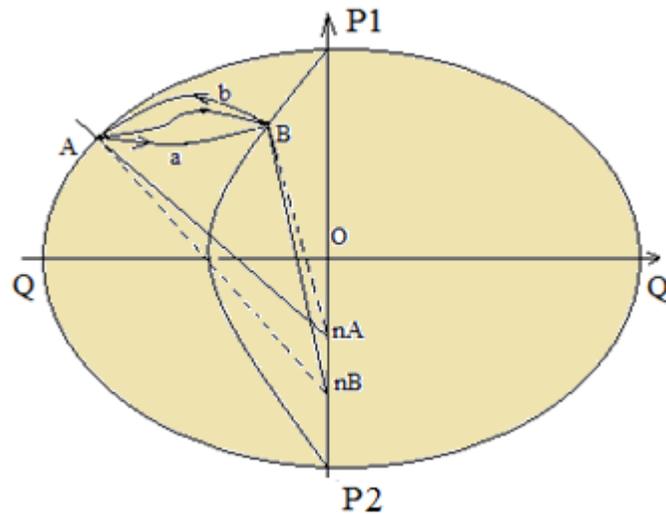


Figura 2.22 – Linha Geodésica

Outros enfoques dados à geodésica:

- A chamada *equação da geodésica* nada mais é do que a equação de movimento de um corpo em um referencial genérico. Se em um referencial localmente inercial um corpo executa movimento retilíneo uniforme, em um referencial genérico o mesmo corpo percorrerá ao longo do espaço-tempo uma curva chamada geodésica que não é necessariamente uma linha reta nesse referencial.

- Albert Einstein questiona a Lei da Gravitação Universal de Isaac Newton ao propor a Teoria da Relatividade Geral. O físico alemão afirma que corpos celestes de grande massa provocam a curvatura do espaço, sendo responsável pela atração entre os corpos. Segundo essa teoria, um raio de luz não mais descreveria a mesma velha reta, estabelecida pelo grego Euclides, mas uma nova reta "torta", chamada geodésica. (http://revistaescola.abril.com.br/edicoes/0181/aberto/mt_64054.shtml).

- No elipsoide, a geodésica é uma linha reversa, que se prolonga entre duas seções normais recíprocas, localizando-se entre ambas.

- A geodésica deve satisfazer o **Teorema de Clairaut**, que estabelece que o produto do raio de paralelo (r) pelo seno do azimute da geodésica (α), em qualquer ponto da geodésica, é constante, ou seja:

$$r \sin \alpha = \text{constante} \quad (2.78)$$

No equador, onde $r = a$ (máximo), o azimute α será mínimo para atender a condição acima.

O estudo do comportamento da linha geodésica sobre o elipsoide de revolução, baseado no Teorema de Clairaut é muito importante na solução dos problemas direto e inverso da Geodésia.

- Ao percorrer-se uma geodésica sobre o elipsoide de revolução, partindo-se do equador em direção ao paralelo limite norte, retornando ao equador e ingressando no hemisfério Sul até o

paralelo limite simétrico ao anterior. Retorna-se ao equador e dirige-se novamente ao ponto que seria o vértice norte da geodésica. Não haverá, entretanto, a coincidência com o mesmo, ou seja, a geodésica não é uma curva que se fecha sobre si mesma, definindo no caso uma espiral situada dentro da zona elipsóidica na qual está contida. Meridianos e equador são geodésicas que se fecham sobre si mesmas. Os paralelos limites da geodésica são ditos vértices da curva, nos quais a latitude da geodésica passa por um máximo ou por um mínimo.

- De todos os arcos que se pode considerar entre dois pontos de uma superfície, tem comprimento mínimo, o que possuir raio de curvatura máximo.

- Ângulo formado entre a linha geodésica e a seção normal direta: a geodésica divide o ângulo formado entre duas seções normais recíprocas, na relação 1:2 (1 prá 2), que é da ordem de frações de segundos (figura 2.23).



Figura 2.23 – Ângulo entre geodésica e seção normal

A expressão que permite o cálculo do ângulo θ (em segundos de arco) é dada por:

$$\theta''/3 = \frac{e^2 S^2}{12N^2 \text{sen}^3} \left[\cos^2 \phi \text{sen} 2A - \frac{S \text{sen} 2\phi \text{sen} A}{2N} \right] \quad (2.79)$$

A expressão anterior (em segundos) é usada para correção do ângulo azimutal.

Outra maneira de efetuar-se o cálculo é pela expressão seguinte:

$$\theta''/3 = \frac{e^2}{4b^2} \left[\text{sen} 2A \cos^2 \phi - \frac{S \text{sen} A \text{sen} 2\phi}{4b} \right] \quad (2.80)$$

Sendo: e^2 - segunda excentricidade do elipsoide de revolução,
 ϕ - latitude geodésica,

S - comprimento da geodésica; b - semieixo menor do elipsoide de revolução;
 A - azimute da seção normal direta; N - raio de curvatura da seção 1º. vertical.

O ângulo formado por 2 seções normais recíprocas pode atingir a ordem de centésimos de segundos (0,01”) em triangulações e poligonações clássicas envolvendo lados em torno de 40km.

- Caso se esteja interessado no **raio de curvatura da geodésica (ρ_A)**, pode-se obtê-lo pelo **Teorema de Guderman** (em função do azimute da geodésica A_Q), no qual: “O raio de curvatura de uma linha geodésica jacente na superfície de um elipsoide de revolução é, em todos os pontos, proporcional ao raio de curvatura da seção meridiana M ”. A fórmula de cálculo é dada por:

$$\rho_A = \frac{M}{1 - e^2 \text{sen}^2 A_Q} \quad (2.81)$$

OBS: ESFERA DE ADAPTAÇÃO DE GAUSS: Também pode-se usar o modelo esférico para representar a superfície terrestre. A “esfera de adaptação de Gauss”, é uma esfera cujo raio é igual ao raio médio de curvatura (R_0) obtido pela equação (2.44) vista anteriormente.

Quando se migra da superfície elipsoidal para esférica, as linhas geodésicas passam a serem círculos máximos. Dentro de uma aproximação admissível para determinadas aplicações, é possível transformar um elemento da superfície do elipsoide em um elemento da esfera. A esfera de adaptação de Gauss é adotada como superfície de referência para efeito de cálculos, pela NBR14166 – Rede de Referência Cadastral Municipal – Procedimento – item 3.39.1.

2.16. Coordenadas Elipsoidais (Geodésicas) Cartesianas

As coordenadas geodésicas (ou elipsoidais) de um ponto P na superfície física da Terra, definidas a partir do elipsoide de revolução adotado como modelo matemático da Terra são: a *latitude geodésica* ϕ , a *longitude geodésica* λ , e a *altitude geométrica* h (figura 2.24).

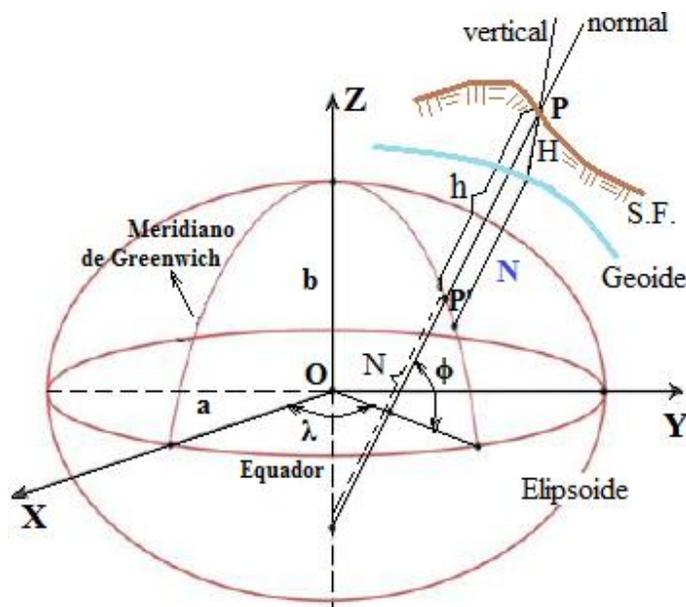


Figura 2.24 – Coordenadas Elipsoidais (Geodésicas) Cartesianas

Para descrever completamente a forma da Terra, são necessários ainda os parâmetros que caracterizam as ondulações geoidais e a topografia terrestre, que são:

- *altitude ortométrica H*: é a distância contada sobre a vertical, entre o ponto considerado (P) e o geoid. Por convenção, é positiva acima da superfície geoidal e negativa abaixo dela;
- *altura geoidal N*: é a distância, contada sobre a normal, entre as superfícies geoidal e elipsoidal. Por convenção, é positiva acima da superfície elipsoidal e negativa abaixo dela. É também conhecida como ondulação geoidal.

Na figura anterior, os eixos (X, Y, Z) do sistema tem origem no ponto O , coincidente com o centro do elipsoide. O eixo OZ é orientado para o IERS *Reference Pole* e representado pela sigla IRP ou CTP (*Conventional Terrestrial Pole*). O eixo OX está contido no plano do equador terrestre médio e orientado segundo a direção média do meridiano de Greenwich. O eixo OY está contido no plano do equador terrestre médio e completa um sistema dextrógiro. A relação entre as coordenadas cartesianas (X, Y, Z) e as coordenadas geodésicas (ϕ, λ, h) tem a forma:

$$x = (N + h) \cos \phi \cos \lambda \quad (2.82)$$

$$y = (N + h) \cos \phi \sin \lambda \quad (2.83)$$

$$z = [N(1 - e^2) + h] \sin \phi \quad (2.84)$$

Sendo N a grande Normal do ponto e e^2 a excentricidade quadrada do elipsoide empregado.

As expressões (2.82), (2.83), (2.84) permitem calcular as coordenadas cartesianas (X, Y, Z) a partir das coordenadas geodésicas (ϕ, λ, h), **sobre a superfície terrestre**. As fórmulas 2.34 e 2.35 ou 2.36 e 2.38 fornecem as coordenadas (X,Z) do ponto **sobre o elipsoide** (sem consideração de h). Pode-se ter interesse em transformar (ϕ, λ, h) em (X, Y, Z), quando se trabalha com sistemas de referência diferentes (SAD-69, SIRGAS2000, etc), sendo necessária a conversão das coordenadas. Para isso usam-se os parâmetros oficiais de transformação disponíveis pelos órgãos competentes (IBGE, R.PR- 1/2005), que nada mais são do que incrementos de translação $\Delta X, \Delta Y$ e ΔZ .

A vantagem do emprego de coordenadas geodésicas ao invés de cartesianas está na fácil visualização das mesmas, que tem um sentido mais natural (acessível), e são as mesmas para o ponto na superfície física ou sua projeção no elipsoide.

Exercícios:

1) Calcular as coordenadas cartesianas (X, Y, Z) no elipsoide GRS-80, (que tem semieixo maior $a = 6378137,298\text{m}$ e $1/f = 1/298,257222101$), para um ponto que tem coordenadas $\phi=40^\circ 26' 21,34''$ N, $\lambda=91^\circ 17' 04,78''$ W e $h=231,446\text{m}$. Recorrendo à figura 2.24, tente visualizar o ponto, a partir de suas coordenadas (ϕ, λ, h) e as respectivas (X, Y, Z).

2) Determine as coordenadas geodésicas cartesianas (X, Y, Z) do vértice IST ($\phi=38^\circ 44' 09,1''$, $\lambda=-9^\circ 08' 24,1''$), situado em Portugal, associadas ao **datum** geodésico Hayford-Melriça (use o elipsoide de Hayford). Calcule a distância do vértice ao centro do elipsoide.

Resp: 1) $e^2=0,006694380023$, $N=6387138,539\text{m}$, $x=-108990,824\text{m}$, $y=-4860167,137\text{m}$, $z=4115379,199\text{m}$;
2) $N=6386799,171\text{m}$, $X=4918696,444\text{m}$, $Y=-791372,362\text{m}$, $Z=3969551,637\text{m}$, $R_v=6370022,38\text{m}$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARVALHO FILHO, B., **Elementos da Geodésia Geométrica**, UFMT-FAET-Cuiabá, 87p., 2009.

FREIBERGER Jr., J., Geometria do elipsoide de revolução: elipse geradora, seções normais e linha geodésica, Notas de aula. UFSM - Universidade Federal de Santa Maria, 2011.

GEMAEL, C. **Introdução à Geodésia Geométrica**. 1ª. Parte, UFPR, 1987.

NBR14166 – Rede de Referência Cadastral Municipal – Procedimento – item 3.39.1

JEKELI, C., **Geometric Reference Systems in Geodesy**, Ohio State University, 2006, 202p.

RAAP, R.H., Geometric Geodesy, Part I, The Ohio State University, 1984. Disponível em: <https://kb.osu.edu/handle/1811/24333>

ZANETTI, M.A.Z., **Geodésia**, Apostila, UFPR, 2007, 92p.

ZAKATOV, P.S., Curso de Geodésia Superior, Tradução do russo (1976), Rússia, Editora Mir, 1981, 635p.

3. SISTEMAS DE REFERÊNCIA EM GEODÉSIA

A partir de uma referência usada na definição de um sistema de coordenadas pode-se obter a posição de um observador, astro, veículo, marco geodésico, etc. Medidas comparativas permitem monitorar a evolução de um fenômeno. Assim, compreender a posição/movimento de um objeto não é um conceito absoluto, sendo preciso descrevê-lo em relação a uma referência.

A Terra, o ambiente que a envolve e os corpos celestes em geral tem comportamento dinâmico (deslocamento, deformação, etc.). Os avanços ocorridos na Era Espacial propiciaram e continuam permitindo o estudo dos movimentos de placas litosféricas (interplaca e intraplaca), as marés terrestres e oceânicas, movimentos do eixo de rotação da Terra, as variações da velocidade de rotação da mesma, o movimento dos satélites artificiais e planetas, efeitos de carga sobre a crosta (e.g., soerguimento pós-glacial), monitoramento de estruturas de engenharia, etc. A qualificação/quantificação destes fenômenos exigem estabelecimento de referenciais adequados. Após muitos estudos, concluiu-se que dois referenciais seriam suficientes para quantificar todos os fenômenos relacionados com os interesses da Geodésia, da Geofísica, da engenharia e da geodinâmica: o referencial terrestre e o referencial celeste (BLITZKOW et al, 2011).

A Geodésia tem um envolvimento muito grande com várias atividades das Geociências e da Engenharia, e o emprego de sistemas de referência adequados é a chave para o dimensionamento dos desafios e problemas as serem enfrentados. São exemplos de fenômenos:

- a atmosfera é a fonte principal de excitação da rotação da Terra em escala sazonal e interanual, havendo correlação entre o momento angular da Terra (duração do dia) com o momento angular atmosférico (MAA) axial, sendo que incertezas do vapor de água na atmosfera e os seus efeitos na propagação de sinais interferem no uso do VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*), do GNSS (*Global Navigation Satellite System*) e do SLR (*Satellite Laser Range*). Estes fenômenos integram a Meteorologia com a Geodésia, sendo estudados e analisados por meio de redes GNSS de monitoramento contínuo.

- o monitoramento de movimentos litosféricos é feito principalmente com GNSS, como é o caso do Japão, onde redes GNSS ajudam na previsão e sismos, integrando Geofísica e Geodésia.

- missões gravimétricas: CHAMP (*Challenging Minisatellite Payload*), GRACE (*Gravity Recovery and Climate Experiment*) e GOCE (*Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer*) permitem estudar a variação no tempo do campo gravitacional, indicando avanços significativos na compreensão da estrutura e da dinâmica núcleo/manto, da circulação oceânica e da tectônica de placas (BLITZKOW et al, 2011).

- com o progressivo desequilíbrio do efeito estufa em decorrência do aumento de gases na atmosfera, ocorre o aumento da temperatura da Terra e a conseqüente elevação do nível médio do mar, a qual associada ao derretimento das geleiras nas altas montanhas e nas calotas polares conduz a uma redistribuição de massa. Isto acarreta, com o tempo, a variação do campo gravitacional e, em conseqüência, da superfície geoidal (CAZENAVE et al., 2009).

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Pelo fato da Geodésia Geométrica ocupar-se da descrição de locais do ponto de vista geométrico, os sistemas de coordenadas são um dos seus principais produtos.

3.1.1 Sistema de referência

Segundo o IBGE (2015), um sistema geodésico de referência é um sistema coordenado, utilizado para representar características terrestres, sejam elas geométricas ou físicas. Na prática, serve para a obtenção de coordenadas que permitem a representação e localização em mapa de qualquer elemento da superfície do planeta. Sabe-se que em qualquer atividade de posicionamento geodésico, é fundamental a definição e realização de sistemas de referência adequados ao trabalho ou estudo em desenvolvimento, que sejam precisos e consistentes.

Um referencial ideal tem sua origem em repouso ou em movimento retilíneo uniforme (referencial inercial). Segundo Monico (2007), na atualidade, um sistema inercial é definido através de objetos extragalácticos, cujos movimentos próprios são desprezíveis quando se compara a acurácia de medições realizadas sobre os mesmos.

3.1.2 Etapas do estabelecimento de um sistema de referência

Para o estabelecimento e manutenção de um sistema de referência, têm-se as etapas de conceito, definição, materialização e densificação (OLIVEIRA, 1998).

a) Conceito: um referencial ideal é aquele cuja origem segue a lei newtoniana da inércia (manter-se em repouso ou em movimento retilíneo uniforme). Se um referencial tem origem no centro de massa da Terra, não pode ser definido como inercial devido ao movimento de translação, que implica numa aceleração da origem (seria um referencial quaseinercial). Caso a origem seja transladada para o baricentro do sistema solar (teoria da relatividade geral), o sistema passa a ser inercial. A respeito dos eixos coordenados, estes devem ser fixos no espaço tanto em relação à origem quanto à orientação. A definição torna-se complexa, pois deformações da Terra em âmbito global, regional e local, o movimento do eixo de rotação da Terra, também devem ser considerados. O referencial celeste veio equacionar a questão (BLITZKOW et al, 2011).

b) Definição: para que seja possível efetuar comparações é preciso adotar "convencionalmente" uma definição do referencial. Isto consiste em estabelecer princípios que fixam a origem, a orientação dos eixos e a escala de sistemas de coordenadas. Na atualidade, um sistema geodésico de referência (SGR) é definido pelo conjunto de constantes, convenções, modelos e parâmetros necessários a representação matemática de grandezas geométricas e físicas associadas ao posicionamento espacial de feições e eventos (IHDE et al., 2017).

c) Materialização: após a definição e adoção de convenções para certo referencial, coleta-se observações de pontos materializados na superfície terrestre. O arcabouço destes pontos posicionados na superfície física da Terra constitui as redes geodésicas, que materializam os referenciais geodésicos terrestres. Após, faz-se o processamento, análise e divulgação das coordenadas (e acurácia) de referência de pontos referidas a uma época específica, acompanhadas ou não de suas velocidades. O conjunto de dados materializa o sistema de referência, e constitui uma rede de referência global. O IGS (*International GNSS Service*) é exemplo de rede de referência (usa o GNSS para materialização do referencial pela obtenção da posição dos pontos da rede) (Figura 3.1). Por observações espaciais a corpos celestes ou a satélites artificiais, referenciais são materializados. O estabelecimento/manutenção dos referenciais da era moderna é função do IERS (*International Earth Rotation Service*, conhecido por *International Earth Rotation and Reference Systems Service*, mantendo sigla original). Um SGR deve ser materializado por uma estrutura de referência que estabeleça a materialização física do sistema e sua representação matemática (IBGE, 2017). Assim, a materialização de um SGR envolve a implantação de pontos de referência e determinação de suas coordenadas geodésicas.

d) Densificação: pontos integrantes de redes com características globais estão separados por centenas ou até milhares de quilômetros. O emprego de técnicas de obtenção de coordenadas vinculadas a uma referência global, e necessidades práticas, determinam que as redes tenham um espaçamento de poucas dezenas de quilômetros entre os pontos materializados. Assim, é preciso implementar pontos de densificação, que compõem as redes de referência continentais (caso da rede SIRGAS-Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas, nacionais ou regionais. Hoje, sistemas geodésicos de referência são constituídos por redes de referência, idealizadas por pontos materializados no terreno, com coordenadas obtidas por técnicas espaciais. Estas redes podem ser: globais (IGS), continentais (SIRGAS), nacionais (RBMC), regionais (redes GPS estaduais).



Figura 3.1 – Rede de referência do IGS [Fonte: www.igs.org/network].(2019)

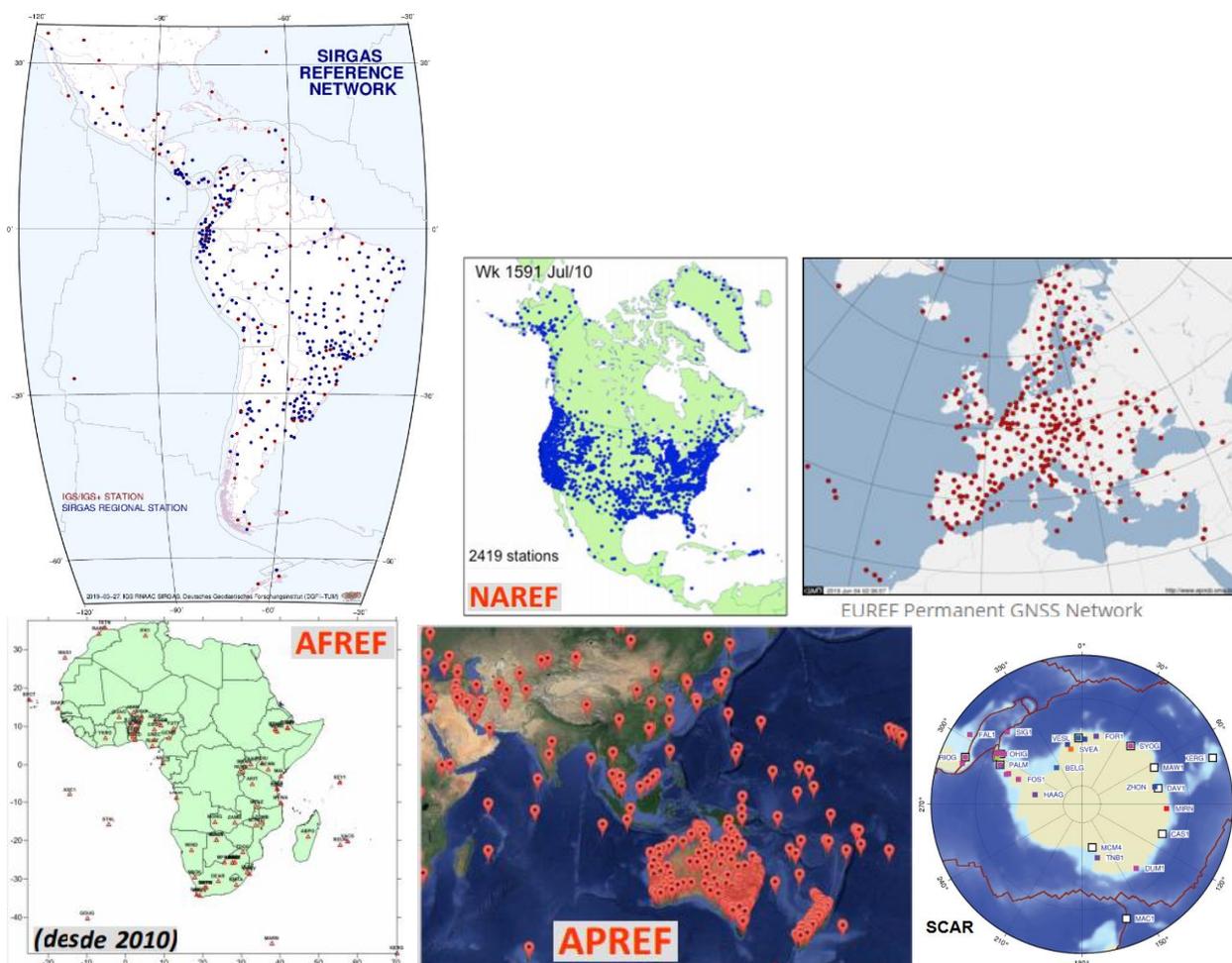


Figura 3.2 – Rede de referência SIRGAS [Fonte: <http://www.sirgas.org/en/sirgas-con-network/>].(2019), NAREF- North America Reference Frame, EUREF- European Reference Frame, AFREF- African Reference Frame, APREF- Asia-Pacific Reference Frame, SCAR- Scientific Committee on Antarctic Research (Fonte: https://www.fig.net/resources/proceedings/fig_proceedings/fig2014/ppt/ts06a/TS06A_torres_7247_ppt.pdf).

Exemplos de sistemas de referência continentais: SIRGAS2000, AFREF-African Reference Frame (desde 2010), APREF-Asia-Pacific Reference Frame (desde 2010), NAREF-North America Reference Frame (desde 2001), EUREF- European Reference Frame (desde 1989).

As associações IAG (International Association of Geodesy), IAU (International Astronomical Union) e IUGG (International Union of Geodesy and Geophysics) tem se esforçado

no processo de conceituação, definição e materialização de referenciais. Já as organizações nacionais e locais tem se responsabilizado pela densificação.

As “Especificações e Normas para levantamentos geodésicos associados ao Sistema Geodésico Brasileiro”, publicadas pelo IBGE têm por objetivo estabelecer requisitos mínimos de precisão, através de orientações e procedimentos a serem adotados em levantamentos geodésicos visando o estabelecimento, manutenção e densificação das Redes Geodésicas de Referência que materializam o Sistema Geodésico Brasileiro (SGB) nas vertentes planialtimétrica, altimétrica e gravimétrica (IBGE, 2017).

3.1.3 Classificação dos sistemas de referência

Na abordagem deste assunto, podem-se encontrar classificações dos sistemas de referência a partir dos tipos de coordenadas, ou da abordagem terrestre x celeste, ou das técnicas envolvidas na sua materialização (clássico x moderno), ou quanto à origem (geocêntrico x topocêntrico), etc.

Os avanços tecnológicos ocorridos na área espacial (Geodésia Celeste) possibilitaram mais precisão. O desenvolvimento das técnicas de posicionamento *Very Long Baseline Interferometry* (VLBI), *Satellite Laser Ranging* (SLR), *Lunar Laser Ranging* (LLR), *Global Positioning System* (GPS), *Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite* (DORIS), permitiram o aperfeiçoamento dos sistemas de referência atuais.

Considerando-se o posicionamento de pontos na superfície terrestre, podemos ter dois tipos de coordenadas: cartesianas e elipsoidais, sendo que as primeiras são bastante incrementadas devido ao posicionamento por satélites, embora muitos prefiram as elipsoidais. Para facilidade de estudo, são apresentados os referenciais cartesianos e geodésicos (elipsoidais).

3.1.4 Referenciais cartesianos

O desenvolvimento da Geodésia tridimensional foi impulsionado pelo posicionamento por satélite, e tornou possível expressar a posição tridimensional de um ponto, referidas a um terno cartesiano geocêntrico (X, Y, Z). Estas coordenadas podem ser convertidas para curvilíneas (ϕ , λ) e altitude geométrica “h” com a adoção de um elipsoide de referência.

Os referenciais cartesianos estão relacionados com o posicionamento por satélite. Como o movimento dos satélites ocorre ao redor do centro de massa da Terra, estes referenciais são geocêntricos. Os referenciais cartesianos utilizados são:

- *Conventional Terrestrial System* (CTS): no qual se determinam as coordenadas do ponto;
- *Celestial Reference System* (CRS), no qual se posicionam os satélites no espaço;
- *Orbital Reference System* (ORS), para descrever o movimento dos satélites no plano orbital. Este último será abordado sucintamente.

Desta forma, dois referenciais seriam suficientes: o **Referencial Celeste (RC)** também referido na literatura como CRS e o **Referencial Terrestre (RT)** ou CTS.

- RC: tem sua origem no baricentro do sistema solar (uma abordagem mais moderna), com seus eixos orientados fixamente no espaço;

- RT: sua origem situa-se no centro de massa da Terra ou no geocentro. Acompanha a Terra em seu movimento de rotação em torno do eixo e de translação ao redor do Sol. Os parâmetros que relacionam estes dois sistemas são as coordenadas do polo e os parâmetros de orientação da Terra, os quais são calculados diariamente pelos serviços internacionais de Geodesia e Astronomia (IERS, IGS) (BLITZKOW et al, 2011).

Considerando a abordagem anterior, o IERS (*International Earth Rotation and Reference Systems Service*) tem as seguintes funções (IERS, 1995):

- a definição, materialização e manutenção de um sistema de referência terrestre que se baseia em técnicas de observações de alta precisão da Geodésia espacial;
- a definição, materialização e manutenção de um sistema de referência celeste baseado em fontes de rádio extragalácticas e a relação do mesmo com outros sistemas celestes de referência;
- a determinação dos parâmetros de orientação da Terra (EOP – *Earth Orientation Parameters*), necessários na conexão de dois sistemas, em conjugação com um modelo da precessão/nutação;
- a organização das atividades operacionais de observação e análise de dados, coleta e arquivamento dos dados e sua disseminação aos usuários.

3.2 Referenciais Celeste (RC) e Terrestre (RT)

Devido à importância do assunto, contemplada com uma abordagem mais detalhada, os dois referenciais são apresentados separadamente na sequência.

3.2.1 Referencial Celeste (RC)

Um referencial celeste sugere sua vinculação com a Astronomia. A Astronomia trata da observação dos astros, sendo que um dos seus ramos, a Astrometria, busca obter a posição do astro, aplicação fundamental para a Geodésia. A origem e os eixos do RC não podem ser materializados de forma direta. Após sua definição, convencionou-se uma estrutura física como base para a sua materialização. Observações conduzidas por meio de um equipamento ótico (telescópio) ou eletrônico (a antena de VLBI) permitem a definição e a materialização do sistema celeste de referência através dos quasars, os quais são fontes emissoras de ondas de rádio (são objetos astronômicos distantes e poderosamente energéticos) (BLITZKOW et al, 2011).

Até o início da década de 80, foi usado o conjunto de 1.535 estrelas do catálogo FK4 (coordenadas uranográficas: ascensão reta e declinação). Com avanços seguintes, passou-se ao FK-5 (*Fundamental Katalog-5*), sendo que as coordenadas das estrelas dos catálogos estão referidas, por convenção, à época J2000, que corresponde à época juliana em 1 de janeiro de 2000, 12hs TDB (Tempo Dinâmico Baricêntrico). A partir da década de 90, por recomendação da IAU (*International Astronomical Union*), as estrelas foram substituídas por objetos extragalácticos distantes. Assim, o ICRS (*International Celestial Reference System*) substituiu o sistema FK-5 em 01/01/1998 (MONICO, 1997). O ICRS é realizado pelo ICRF (*International Celestial Reference Frame*) através de um catálogo de coordenadas equatoriais de objetos extragalácticos (*quasars-Quasi-Stellar Radio Source*), cujo emprego tem a vantagem fundamental que suas distâncias são tão grandes (~ 10 bilhões de anos/ luz) que seus movimentos próprios são indetectáveis, o que não ocorre com as estrelas, garantindo uma estabilidade rotacional ao referencial (BLITZKOW et al, 2011). Neste processo foi empregada uma técnica altamente precisa de observação: VLBI, que mede precisamente direções no espaço e a distância entre as antenas na superfície, que podem estar separadas por até milhares de quilômetros. A diferença no tempo de chegada de sinais de alta frequência emitidos por fontes estelares até as duas estações é medida com precisão de poucos pico-segundos (a luz percorre 1 mm em 3 pico-segundos). Considerando os fatos apresentados anteriormente, constata-se que a escolha da estrutura física é um tanto arbitrária, fazendo com que os referenciais sejam qualificados como "**convencionais**", (BLITZKOW et al, 2011), terminologia por vezes usada na bibliografia.

A teoria da relatividade foi adotada como base para definição e realização de referenciais pela IAU a partir de 1991. Considerando o referencial celeste, essa resolução introduziu o BCRS (*Barycentric celestial reference system*) e o GCRS (*Geocentric celestial reference system*), cujas origens são respectivamente o baricentro do sistema solar e o geocentro, e com direções dos eixos coordenados fixas em relação a objetos extragalácticos, não apresentando rotação global em relação aos mesmos (MONICO, 2007).

O Sistema de Referência Celeste Baricêntrico (BCRS) é usado na astrometria para especificar a localização e movimentos de objetos astronômicos que se situam fora da vizinhança gravitacional da terra: luas, planetas, estrelas e objetos extragalácticos. É usado como sistema de referência no catálogo de estrelas Hipparcos. Já o Sistema de Referência Celeste Geocêntrico (GCRS) é usado para especificar a localização e movimentos de objetos próximos da terra, como é o caso dos satélites, inclusive do GPS, ou seja, as efemérides precisas dos satélites GPS (*Global Positioning System*) são calculadas no referencial celeste.

Assim, fica definido por convenção, o Sistema de Referência Celeste do IERS, o ICRS (*International Celestial Reference System*), tendo as seguintes características:

- origem: baricentro do sistema solar no caso do BCRS, e geocentro no caso do GCRS;
- eixo X_{CRS} : orientado segundo o equinócio vernal do equador médio J2000;
- eixo Z_{CRS} : orientado para o polo de referência convencional das efemérides na época J2000, o CEP (*Celestial Ephemeris Pole*);
- eixo Y_{CRS} : completa um sistema dextrógiro.

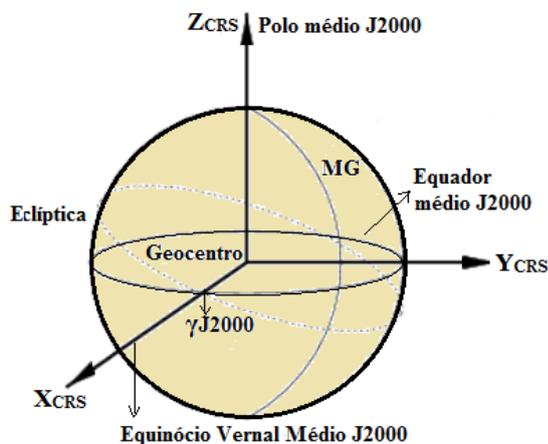


Figura 3.3 – GCRS (*Geocentric celestial reference system*)

O ponto $\gamma J2000$ corresponde à interseção entre o plano equatorial médio J2000 e o plano da eclíptica. É importante frisar que no ICRS, tanto para o BCRS como para o GCRS, as direções fundamentais permanecerão fixas no espaço (MONICO, 2007).

Considerando a origem do ICRS como o baricentro do sistema solar, dentro do conceito da relatividade geral, esta característica permite assegurar que, para todos os efeitos, o ICRS é um sistema inercial (BLITZKOW et al, 2011).

A realização do ICRS é definida por um catálogo de coordenadas equatoriais (ascensão reta e declinação), de fontes de radio extragalácticas *quasars* (*Quasi Stellar Radio Source*) na época de referência J2000, calculada de modo a não apresentar movimento próprio (MONICO, 2007).

Detalhes sobre o ICRS podem ser acessados em <https://www.iers.org>. O **Sistema Internacional de Referência Celestial (ICRS)** é o atual sistema de referência celeste padrão adotado pela União Astronômica Internacional (IAU). Sua origem está no baricentro do Sistema Solar, com eixos fixos em relação às estrelas. Já o ***International Celestial Reference Frame (ICRF)*** é a realização do Sistema Internacional de Referência Celestial utilizando fontes celestes de referência observadas em comprimentos de onda de rádio. Considerando comprimentos de onda ópticos, o ICRS é atualmente realizado pelo *Hipparcos Celestial Reference Frame (HCRF)*, um subconjunto de cerca de 100.000 estrelas no Catálogo Hipparcos.

VERSÕES do ICRF: o ICRF apresenta versões conforme novas atualizações. Assim, o ICRF1 (antes chamado apenas ICRF), foi adotado pela União Astronômica Internacional (IAU) em 1 de Janeiro de 1998, e concorda com a orientação do Catálogo Fundamental (FK5). O

ICRF1 contém 212 fontes definidoras e posições de 396 fontes adicionais não definidoras para referência. Em 2009 surge uma nova atualização: ICRF2, uma parceria entre a *International Astronomical Union*, o *International Earth Rotation and Reference Systems Service*, e o *International VLBI Service for Geodesy and Astrometry*, definido pela posição de 295 fontes de rádio compactas (97 das quais também definem ICRF1), oriundas de 30 anos (1979- 2009), de observações VLBI que permitem a correção de efeitos ionosféricos (IERS, 2021). Em agosto de 2018, a IAU adota o ICRF3, a 3ª. versão do ICRF efetivado em janeiro de 2019. A modelagem incorpora o efeito da aceleração galactocêntrica do sistema solar, uma nova característica além do ICRF2. O ICRF3 contém posições de 4536 fontes extragalácticas, sendo 303 identificadas como fontes definidoras (<https://hpiers.obspm.fr/icrs-pc/newwww/icrf/index.php>; www.iers.org). Mais detalhes sobre as versões em HEINKELMANN, 2019 e CHARLOT et al, 2020.

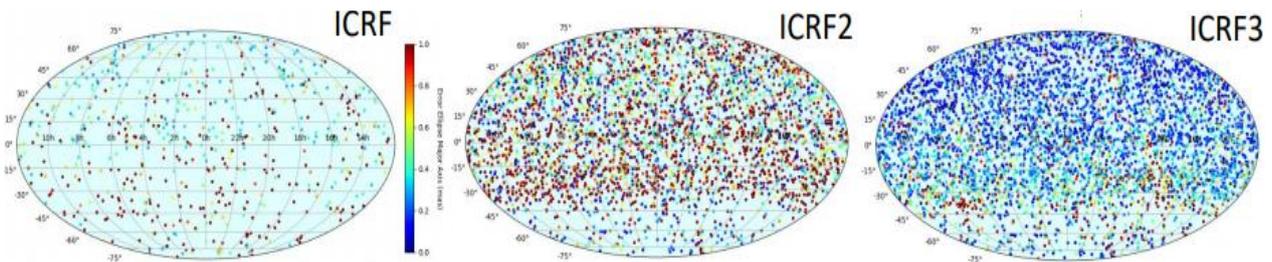


Figura 3.4 – Versões ICRF (Fonte: Heinkelmann, 2019)

3.2.2 Referencial Terrestre (RT)

A vinculação do ICRF (*IERS Celestial Reference Frame*) com um referencial prático de ser utilizado no posicionamento por satélite é concretizado através do ITRF (*IERS Terrestrial Reference Frame* – realização do referencial terrestre do IERS) (MONICO, 2007).

O referencial terrestre do IERS, o ITRS (*International Terrestrial Reference System*), é definido como sendo fixo na Terra, pois é um sistema de referência espacial que rotaciona com a Terra em seu movimento no espaço. Conforme Mônico (2007) tem origem no centro de massa da Terra e orientação equatorial (eixo Z aponta na direção do pólo de referência convencional).

Conforme recomendação da IUGG, esse sistema deve atender as seguintes definições:

- é geocêntrico, e o centro de massa é definido usando a Terra toda, incluindo oceanos e atmosfera. A referida origem foi melhor caracterizada através das técnicas SLR (*Satellite Laser Range*) e LLR (*Lunar Laser Range*) (BLITZKOW et al, 2011);
- a escala é consistente com o TCG (Tempo Coordenado Geocêntrico) para um referencial geocêntrico;
- a orientação inicial foi dada pelo BIH (*Bureau International de L`Heure*), época 1984,0;
- sua evolução temporal em orientação é assegurada pelo uso da condição de uma rede que não rotaciona com respeito ao movimento tectônico horizontal sobre toda a Terra.

A respeito dos eixos, a orientação dos mesmos foi definida convencionalmente em 1984 pelo BIH sendo mantida pelo IERS:

- eixo OZ - anteriormente orientado conforme a posição média do polo no período 1900-1905 (CIO - *Conventional International Origin*). A partir de 1984, com a introdução de um conjunto aprimorado de nutações, tem nova orientação, passando a ser denominado *IERS Reference Pole* e representado pela sigla IRP (BLITZKOW et al, 2011), ou CTP (*Conventional Terrestrial Pole*);
- eixo OX - contido no plano do equador terrestre médio e orientado segundo o *IERS Reference Meridian* (IRM), ou seja, segundo a direção média do meridiano de Greenwich;
- eixo OY - contido no plano do equador terrestre médio, completa um sistema dextrógiro.

O ITRS foi adotado pela IUGG em 2007, denominando-se GTRS (*Geocentric Terrestrial Reference System*). O referencial terrestre pode ser visualizado na figura 3.5.

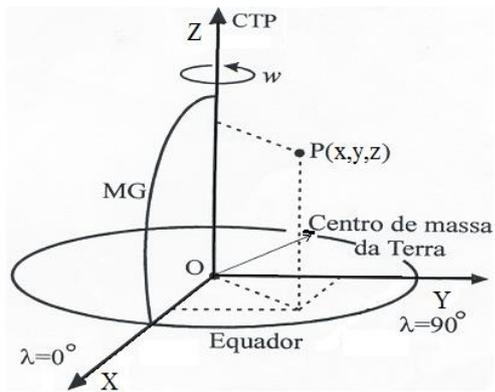


Figura 3.5 - ITRS ou GTRS-*Geocentric Terrestrial Reference System*

Uma das aplicações do sistema é na análise de conjuntos individuais de uma das técnicas disponíveis atualmente (VLBI, SLR, LLR, GPS, DORIS (*Doppler Orbitography and Radio Positioning Integrated by Satellite*), PRARE (*Precise Range And Range-Rate Experiment*)) ou uma combinação de observações entre as mesmas visando à obtenção de um conjunto único de informações (coordenadas de estações, parâmetros de orientação, UT1, velocidade dos pontos) (BLITZKOW et al, 2011).

As realizações do ITRS são estabelecidas pelo IERS ITRS-PC (*ITRS Product Center* – Centro de produção do ITRS), sendo que cada realização é composta por um catálogo de coordenadas cartesianas, e velocidades de um grupo de estações IERS. Geralmente, essas estações têm sido levantadas com tecnologia VLBI, GPS e DORIS (*Doppler Orbitography and Radio Positioning Integrated by Satellite*). As coordenadas e suas respectivas derivadas em relação ao tempo (velocidades) são preferencialmente divulgadas na forma cartesiana (X1, X2, X3). Se forem necessárias coordenadas geodésicas, recomenda-se usar o elipsoide GRS-80 (MONICO, 2007).

Cada uma das realizações é designada por ITRFyy (*International Terrestrial Reference Frame*), sendo que os números yy especificam o ano em que os dados foram usados na determinação do sistema. No caso dos anos 2000, 2005, e 2008, a designação foi ITRF-2000, ITRF-2005 e ITRF2008. Basicamente, a diferença entre as versões consiste na quantidade de estações e a metodologia de ajustamento empregada, uma vez que a origem, orientação, escala e evolução temporal permanece igual. O ITRF2014 é a mais recente realização do ITRS.

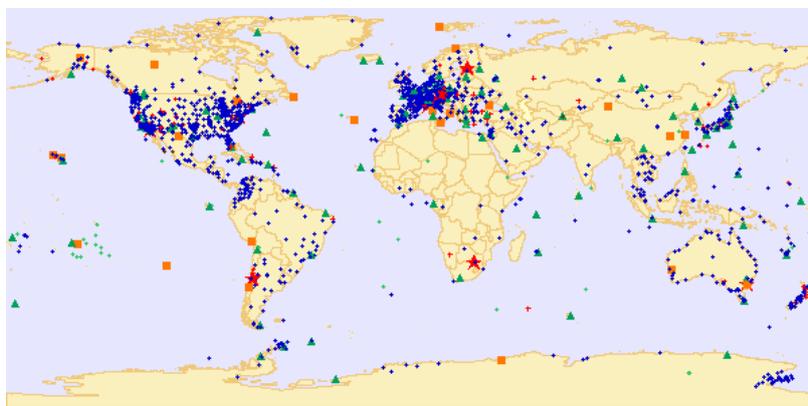


Figura 3.6 – ITRF – *International Terrestrial Reference Frame* – Fonte: <http://itrf.ensg.ign.fr/>

Para realizar a transformação do GCRS para o ITRS emprega-se uma sequência de rotações. A transformação de acordo com a simbologia adotada pelo IERS é dada por:

$$\vec{X}^T = W(t)R(t)Q(t)\vec{X}^c$$

onde: $W(t)$, $R(t)$ e $Q(t)$ representam, respectivamente, as matrizes de rotação resultante do movimento do pólo, ângulo de rotação da Terra e do movimento do pólo celeste no sistema celeste (precessão e nutação) (IERS,2016).

No caso da transformação do BCRS para GCRS que sejam consideradas a aberração, paralaxe anual, curvatura da luz e mudança de sistema de tempo (MONICO, 2007).

3.2.3 Orbital Reference System (ORS)

Para completar os referenciais cartesianos desta abordagem, há o referencial orbital, usado na descrição do movimento de satélites artificiais, em função de elementos orbitais (keplerianos).

A definição do ORS, dada em Gemael, 1981:

- geocêntrico (origem no centro de massa da Terra, coincidente com um dos focos da elipse kepleriana);
- o eixo Z_0 perpendicular ao plano orbital;
- o eixo X_0 contido no plano orbital, coincidindo com a linha dos ápsides (eixo maior), orientado positivamente para o perigeu;
- o eixo Y_0 contido no plano orbital, formando um terno ortogonal dextrógiro (Figura 3.7).

A realização do ORS é feito pela combinação de 2 referenciais: o orbital (ORS) e o terrestre convencional (CTS), através dos parâmetros keplerianos (semieixo maior (a) e excentricidade da órbita (e); ascensão reta do nodo ascendente (Ω), inclinação da órbita (i), argumento do perigeu (ω) e época da passagem pelo perigeu) e pelas anomalias da órbita kepleriana (anomalias verdadeira, excêntrica e média) (SOUZA, 2004 e MONICO, 2007).

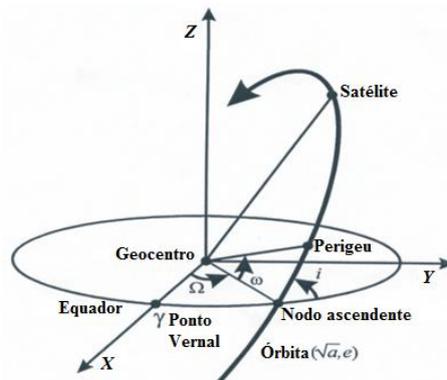


Figura 3.7 - *Orbital Reference System*. Extraído de SOUZA, 2004.

3.3 REFERENCIAIS ELIPSOIDAIIS

No referencial elipsoidal, a Terra é representada por um elipsoide de revolução, sobre o qual são realizados todos os cálculos envolvidos no posicionamento geodésico. O elipsoide de revolução é definido por um conjunto de constantes fundamentais que são:

- semieixo maior (a),
- velocidade angular (ω),
- constante gravitacional geocêntrica (GM),
- constante dinâmica de forma (J_2).

A realização do referencial é feita a partir de observações realizadas sobre a superfície da Terra, por inúmeras técnicas de posicionamento já citadas anteriormente.

Além das constantes fundamentais, o elipsoide de revolução é definido através de constantes classificadas em: *constantes geométricas e físicas derivadas*. O conjunto de parâmetros físicos e geométricos, necessários para definir o modelo terrestre e o campo de gravidade teórico, é chamado de **Sistema Geodésico de Referência**. Exemplos destes sistemas são *Geodetic Reference System 1967 (GRS67)*, *Geodetic Reference System 1980 (GRS80)* e o *World Geodetic System 1984 (WGS84)*.

Um aspecto importante a ser citado é que historicamente, tem havido no Brasil mudanças de referenciais geodésicos, com épocas de concepção distintas. Surge a terminologia “geração geodésica” dos Sistemas Geodésicos de Referência (SGR), em função dos seus aspectos distintos sob o ponto de vista tecnológico e científico (FREITAS et al, 2004). SGR distintos só podem ser integrados através da realização de pontos comuns entre os mesmos, em número suficiente, distribuídos de forma a permitir a modelagem de transformações e distorções.

3.3.1 Geodetic Reference System 1967 (GRS67)

A *International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG)* adotou oficialmente o *Geodetic Reference System 1967 (GRS67)*, em substituição ao GRS30, que se tornou inadequado com as inovações da era espacial. Os parâmetros do elipsoide GRS67 coincidem com o *South América Datum 1969 (SAD69)*, adotado pelo Sistema Geodésico Brasileiro (SGB) até início de 2015. A seguir, tem-se a definição de suas constantes.

Constantes Fundamentais	Símbolo	Valor
Semieixo maior	a	6378160 m
Velocidade angular	ω	$7,292115 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$
Constante gravitacional geocêntrica	GM	$398603 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
Constante dinâmica de forma	J_2	10827×10^{-7}
Constantes Geométricas Derivadas		
Semieixo menor	b	6356774,52 m
Excentricidade linear	E	521864,67 m
Raio médio polar	c	6399617,43 m
Primeira excentricidade	e^2	0,006694605
Segunda excentricidade	e'^2	0,006739725
Achatamento polar	α	1:298,247167
Comprimento de um quadrante	Q	10002001,23 m
Raio terrestre médio	R_1	6371031,51 m
Raio da esfera de mesma superfície	R_2	6371029,91 m
Raio da esfera de mesmo volume	R_3	6371023,52 m
Constantes Físicas Derivadas		
Esferopotencial	U_0	$6263703,05 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$
Coeficientes do esferopotencial de grau 4	J_4	-0,000002370912
Idem para o grau 6	J_6	0,000000006083
Idem para o grau 8	J_8	-0,000000000014
$m = (\omega^2 a^2) / GM$	m	0,003449801434
Gravidade teórica equatorial	γ_e	$9,78031845 \text{ ms}^{-2}$
Gravidade teórica polar	γ_p	$9,83217717 \text{ ms}^{-2}$

3.3.2 Geodetic Reference System 1980 (GRS80)

Na Assembléia Geral, realizada na cidade de *Camberra* em 1979, a *International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG)* adotou oficialmente o *Geodetic Reference System 1980*

(GRS80). No GRS80 foi removida a deformação de maré da constante dinâmica de forma, e fixados os erros padrões das constantes fundamentais. Adota-se o GRS-80 nos trabalhos que envolvem elementos do campo de gravidade. Dados gravimétricos oriundos de levantamentos oceanográficos, altimetria por satélite e dados obtidos dos modelos geopotenciais estão referidos a este sistema. O conhecimento de suas constantes é importante para eventuais transformações, e são dadas a seguir (IAG, 2000).

Constantes Fundamentais	Símbolo	Valor
Semieixo maior	a	6378137 m
Velocidade angular	ω	$7,292115 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$
Constante gravitacional geocêntrica	GM	$3986005 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
Constante dinâmica de forma	J_2	108263×10^{-8}
Constantes Geométricas Derivadas		
Semieixo menor	b	6356752,314 m
Excentricidade linear	E	521854,010 m
Raio médio polar	c	6399593,626 m
Primeira excentricidade	e^2	0,006694380023
Segunda excentricidade	e'^2	0,006739496755
Achatamento polar	α	1:298,257222101
Comprimento de um quadrante	Q	10001965,729 m
Raio terrestre médio	R_1	6371008,771 m
Raio da esfera de mesma superfície	R_2	6371007,181 m
Raio da esfera de mesmo volume	R_3	6371000,790 m
Constantes Físicas Derivadas		
Esferopotencial	U_0	$6263686,085 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$
Coefficiente do esferopotencial de grau 4	J_4	0,000002370912
Idem para o grau 6	J_6	0,000000006083
Idem para o grau 8	J_8	-0,000000000014
$m = (\omega^2 a^2) / GM$	m	0,003449786003
Gravidade teórica equatorial	γ_e	$9,780326776 \text{ ms}^{-2}$
Gravidade teórica polar	γ_p	$9,832186368 \text{ ms}^{-2}$

3.3.3 World Geodetic System 1984 (WGS84)

O uso crescente do GPS nos levantamentos geodésicos tornou necessária a adoção de um sistema de referência geocêntrico. O sistema de referência dos satélites GPS, quando se utilizam efemérides transmitidas, é o WGS84 (NIMA, 2000). O primeiro Sistema Geodésico Mundial surgiu em 1960: **WGS60 “World Geodetic System” 1960**. Após, surgiram outros sistemas modificados em 1966, 1972 e 1984, com os respectivos nomes de WGS 66, WGS 72 e WGS 84.

O WGS84 é definido como um sistema geodésico geocêntrico, estabelecido pelo U. S. *Department of Defense* (DoD), desde 1960, com o objetivo de fornecer o posicionamento e a navegação em qualquer parte do mundo, através de informações espaciais. É um exemplo de CTRS (*Conventional Terrestrial Reference System*), seguindo os critérios do IERS que são: é um sistema geocêntrico, com centro de massa definido pela Terra toda incluindo atmosfera e oceanos, e com sua orientação dada pelo BIH (*Bureau International de l’Heure*), de 1984.

Desde a sua criação, o WGS84 passou por 6 atualizações: a primeira foi obtida através de uma nova materialização do sistema, desta vez com 32 estações (10 estações DoD correspondente à rede de referência WGS84 original (GPS) e mais 22 estações pertencentes à rede IGS). Essa solução recebeu a denominação de WGS84 (G730), foi adotada a época de referência 1994,0, utilizada nas órbitas operacionais dos satélites GPS de 29 de junho de 1994 a 29 de janeiro de

1997. A letra ‘G’ significa que neste refinamento foi utilizada a técnica GPS e ‘730’ se refere à semana GPS dessa solução. A segunda foi um trabalho que envolveu a *National Imagery and Mapping Agency* (NIMA), a NASA através do *Goddard Space Flight Center* (GSFC) e a *Ohio State University* (OSU). O resultado foi um novo modelo global do campo de gravidade da Terra, o *Earth Geopotential Model 1996* (EGM96). A nova realização do WGS84 recebeu a denominação de WGS84 (G873), referida a semana GPS 873, na época de referência 1997,0. A realização do WGS84 envolve um número considerável de estações, entre essas estações, estão as que monitoram o sistema GPS, isto é, Colorado Springs, Hawaii, Ascencion, Diego Garcia, Kwajalein. A terceira realização G1150 de 20/01/2002 busca a compatibilização com o SIRGAS.

As atualizações do WGS84 buscam aproximá-lo ao ITRF (*International Terrestrial Reference Frame*), que é a materialização mais precisa do ITRS (*International Earth Rotation and Reference Systems Service*). Em 08/02/2012 houve nova atualização com a denominação WGS84 (G1674) (IBGE, 2017). As recentes atualizações do WGS84 não alteram seus parâmetros, embora a localização do seu centro se altere levemente devido a medições mais precisas do centro de massa da Terra. Outra atualização do WGS84 foi a G1762 implementada em 2013, que é coincidente com o ITRF2008 ao nível de 1 cm (MALYS, 2017).

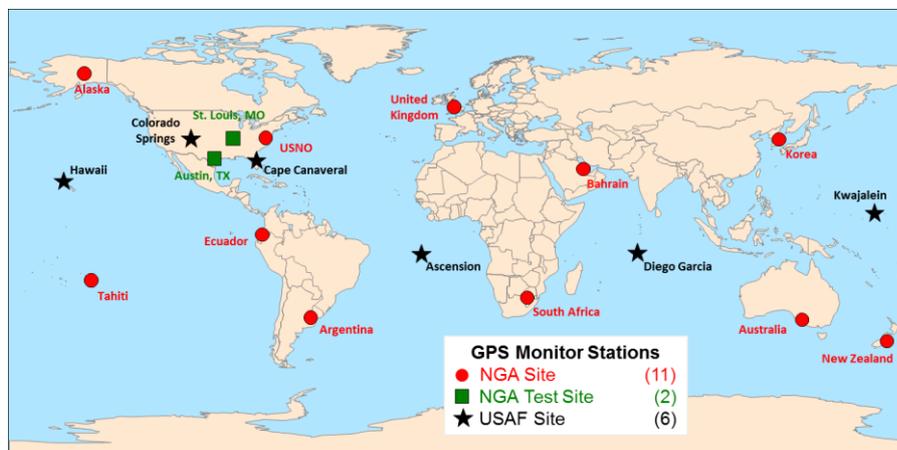


Figura 3.8 - WGS 84 (G1762) Reference Frame Stations

Fonte: http://earth-info.nga.mil/GandG/publications/NGA_STND_0036_1_0_0_WGS84/NGA.STND.0036_1.0.0_WGS84.pdf

A seguir um quadro resumo das versões WGS-84 (NGA2014 e Din et al, 2021).

Nome	Data de implementação		Época	Acurácia
	Transmissão de órbitas GPS	Efemérides precisas NGA		
WGS 84	1987	1 Jan 1987		1-2 meters
WGS 84 (G730)	29 Jun 1994	2 Jan 1994	1994.0	10 cm/component rms
WGS 84 (G873)	29 Jan 1997	29 Sep 1996	1997.0	5 cm/component rms
WGS 84 (G1150)	20 Jan 2002	20 Jan 2002	2001.0	1cm/component rms
WGS 84 (G1674)	8 Feb 2012	7 May 2012	2005.0	<1cm/component rms
WGS 84 (G1762)	16 Oct 2013	16 Oct 2013	2005.0	<1cm/component rms
WGS 84 (G2139)	3 Jan 2021	28 Mar 2021	2005.0	

A versão mais recente é o WGS84 (G2139) implementada em 3 de janeiro de 2021, alinhada à realização do *International GNSS Service* (IGS) do *International Terrestrial Reference Frame 2014*, ou seja, coincide com o ITRF14(IGb14) para fins de posicionamento e navegação (<http://www.ga.gov.au/>). Na nova versão foram removidos pequenos erros sistemáticos com

respeito ao ITRF. O WGS84 *Reference Frame* é realizado globalmente através das coordenadas de 17 estações de monitoramento DoD distribuídas em todo o mundo (ver figura 3.8).

As diferenças encontradas nos parâmetros geométricos do elipsoide WGS84 em relação aos do GRS80, são causadas pela utilização do coeficiente do harmônico zonal de segundo grau no WGS84 para a determinação do achatamento e que, no caso do GRS80, foi utilizada a constante dinâmica de forma. A seguir, os valores numéricos das constantes do WGS-84 (NIMA, 2000).

Constantes Fundamentais	Símbolo	Valor
Semieixo maior	a	6378137 m
Velocidade angular	ω	$7,292115 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$
Constante gravitacional geocêntrica	GM	$3986004,418 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
Constante dinâmica de forma	$\bar{C}_{2,0}$	$-0,484166774985 \times 10^{-3}$
Constantes Geométricas Derivadas		
Semieixo menor	b	6356752,3142 m
Excentricidade linear	E	521854,00842339 m
Raio médio polar	c	6399593,6258 m
Primeira excentricidade	e^2	0,00669437999014
Segunda excentricidade	e'^2	0,00673949674228
Achatamento polar	α	1:298,257223563
Comprimento de um quadrante	Q	10001965,729 m
Raio terrestre médio	R_1	6371008,7714 m
Raio da esfera de mesma superfície	R_2	6371007,1809 m
Raio da esfera de mesmo volume	R_3	6371000,7900 m
Constantes Físicas Derivadas		
Esferopotencial	U_0	$62636851,7146 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$
$m = (\omega^2 a^2) / GM$	m	0,00344978650684
Gravidade teórica equatorial	γ_e	$9,7803253359 \text{ ms}^{-2}$
Gravidade teórica polar	γ_p	$9,8321849378 \text{ ms}^{-2}$

A *National Geospatial-Intelligence Agency (NGA)* é responsável por manter a precisão e estabilidade do sistema WGS84 para que seja prático e acessível. Suas várias realizações não afetam a definição fundamental do sistema, mas são necessárias para aplicações de alta precisão.

A definição dos sistemas WGS-84 (GPS) e PZ-90 (GLONASS) são similares, havendo pequenas diferenças na realização prática. GLONASS usa um datum chamado "PZ-90" (*Earth Parameters 1990 – Parametry Zemli 1990*), no qual a locação precisa do Polo Norte é dada pela média de sua posição de 1990-1995. O WGS-84 usa a posição do Polo Norte em 1984. A seguir tem-se uma tabela comparativa de alguns parâmetros entre WGS-84 e PZ-90.

Parâmetros \ Elipsoide	WGS 84	PZ90 e PZ-90.11
Semieixo maior a	6.378.137,0 m	6.378.136,0 m
Achatamento f	1/298,257223563	1/298,257839303
Velocidade angular da Terra ω_E	$7292115,0 \times 10^{-11} \text{ rad/s}$	$7292115,0 \times 10^{-11} \text{ rad/s}$
Constante gravitacional u	$3986004,418 \times 10^8 \text{ m}^3/\text{s}^2$	$3986004,4 \times 10^8 \text{ m}^3/\text{s}^2$
Velocidade da luz no vácuo c	$2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$	$2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$
Coeficiente 2o. harmônico zonal J_2^0		$1082625,75 \times 10^{-9}$

Fonte: http://users.auth.gr/kvek/750-613_BOUCHER-itrs-pz-wgs84.pdf
https://gssc.esa.int/navipedia/index.php/Reference_Frames_in_GNSS

3.4. DATUM GEODÉSICO

Nos trabalhos cartográficos em geral, trabalha-se com as superfícies elipsoidal, geoidal e física. A definição de um datum é necessária para amarrar estas superfícies e altitudes vinculadas. O termo Datum é usado para designar um conjunto de parâmetros e dados, que constitui a base para obtenção de outros dados. Historicamente, o mapeamento e os trabalhos geodésicos foram iniciados a partir de aproximações entre a superfície elipsoidal e o geoide, fazendo surgir os Data locais, exigindo a necessidade de fixar um ponto como origem e um azimute para a orientação de direções. Este Datum local geralmente emprega um elipsoide não geocêntrico para representar a figura da Terra na região de abrangência do mapeamento. A relação entre tais sistemas, local e geocêntrico, chama-se Datum Geodésico. O sistema de coordenadas consistia em definir teórica e arbitrariamente os parâmetros definidores de sistemas geodésicos. Um datum caracteriza-se por uma superfície de referência posicionada em relação a Terra.

Para definição de um Datum local necessita-se de oito parâmetros: - dois parâmetros para especificar as dimensões do elipsoide adotado: semieixo maior (a) e achatamento (α); - três parâmetros para definir a orientação do elipsoide: a componente meridiana e primeiro vertical do desvio da vertical (ξ, η), e a ondulação geoidal (N); - três coordenadas que definem a posição do ponto origem: latitude geodésica (φ), longitude geodésica (λ) e altitude geométrica (h).

No início dos levantamentos geodésicos foi arbitrada, nos Data locais, a coincidência das superfícies elipsoide e geoide ($N=0$). Isto implicava numa translação do elipsoide até tangenciar o geoide (Figura 3.9) no Datum, o que leva a coincidir no Datum, a normal e a vertical, havendo conseqüentemente, a igualdade das coordenadas geodésicas e astronômicas (GEMAEL, 1981).

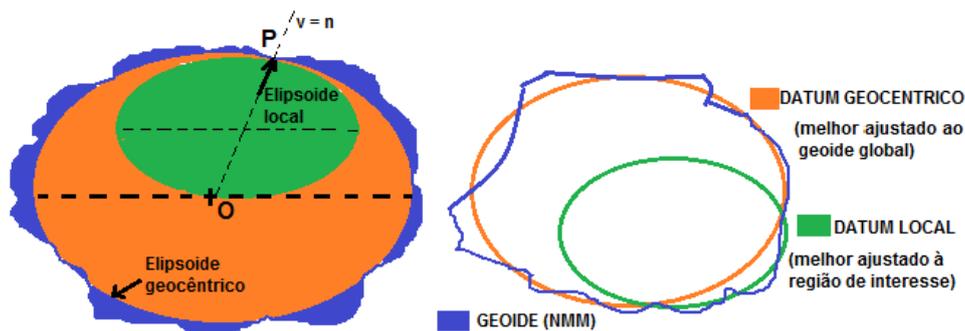


Figura 3.9 – Representação do Datum Local. Adaptado de SOUZA, 2004

3.4.1 Sistema de Referência clássico x moderno

Abordagem Clássica: antes de surgirem as técnicas espaciais de posicionamento, os referenciais geodésicos identificados por “datum astro-geodésico horizontal” – DGH, eram obtidos através de 3 etapas:

- seleção de um sólido geométrico (elipsoide de revolução, com seus 2 parâmetros definidores) para representação da Terra, sobre o qual são feitos os cálculos matemáticos;
- definição da posição e orientação do referencial por meio de 6 parâmetros topocêntricos: as coordenadas do ponto origem (2), a orientação (azimute inicial), a separação geoide-elipsoide (ondulação geoidal N) e as componentes do desvio da vertical (meridiana ξ e primeiro vertical η), para assegurar boa adaptação entre a superfície do elipsoide ao geoide na região de interesse;
- materialização (ou realização) do referencial através do cálculo de coordenadas dos pontos usando observações geodésicas de distâncias, ângulos e azimutes. O conjunto de estações

terrestres formam as chamadas **redes geodésicas**, que representam a superfície física da Terra na forma pontual (C).

O posicionamento tridimensional de um ponto que recorre a métodos da Geodésia Clássica (triangulação, poligonação e trilateração) é incompleto, pois as redes verticais e horizontais caminham em separado. A abordagem clássica na definição da situação espacial de um elipsoide de referência corresponde a um posicionamento astronômico, onde se arbitra a coincidência da normal ao elipsoide e a vertical no ponto origem, bem como do geoide e o elipsoide, havendo a coincidência das coordenadas geodésicas e astronômicas (o mesmo vale para os azimutes geodésico e astronômico). Assim, o emprego dos métodos clássicos em Geodésia implicou na adoção de dois SGRs (um horizontal e outro vertical). O SGR vertical fornece a referência para a determinação precisa da componente altimétrica do SGB (Sistema Geodésico Brasileiro); já o SGR horizontal fornece a referência para a determinação precisa das componentes planimétricas (latitude e longitude). Os sistemas Córrego Alegre, Astro Datum Chuá e o SAD-69 são exemplos de SGR de concepção clássica, sendo o termo “datum” bastante empregado nestes casos.

Abordagem Moderna: os referenciais modernos foram concebidos na era da Geodésia Espacial e também envolvem definição e materialização. As etapas necessárias na obtenção destes sistemas terrestres são:

a) adoção de um Sistema Geodésico de Referência (SGR) para representar a forma e dimensões da Terra em caráter global, que está fundamentado em um CTS (espaço abstrato), sendo, portanto, geocêntrico. Nesta abordagem, os SGRs são derivados de observações por satélite do campo gravitacional terrestre, e definidos por modelos, parâmetros e constantes (ex: um sistema de coordenadas cartesianas geocêntrico - CTS e constantes do GRS80). Além de envolver as constantes geométricas na sua definição, os SGR modernos passam a ser definidos também por constantes físicas (vide tópico 3.3). Considerando a Terra um corpo com rotação e massa, a melhor aproximação física é definida através de quatro parâmetros:

- semieixo maior do elipsoide de referência **a**;
- constante gravitacional geocêntrica GM (com ou sem atmosfera);
- harmônico zonal de segunda ordem do potencial gravitacional da Terra (**J₂**), ou o achatamento terrestre (**f**). O coeficiente J_2 é objeto de rigorosas determinações;
- a velocidade de rotação da Terra ω .

b) semelhante ao DGH, a materialização de um sistema de referência terrestre geocêntrico é feita através das redes geodésicas, com coordenadas tridimensionais estabelecidas através de técnicas de posicionamento espacial de alta precisão: VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*), SLR (*Satellite Laser Range*) e o GPS. Estas técnicas têm duas vantagens perante as terrestres: posicionamento completo 3D de uma estação geodésica, e alta precisão das coordenadas, surgindo como consequência uma quarta componente, associada à época de obtenção destas coordenadas (CASTAÑEDA, 1986). Desta forma, as coordenadas das estações que compõem a materialização de um sistema de referência terrestre geocêntrico têm 4 componentes: 3 de definição espacial, 1 de definição temporal (velocidades descrevem as variações dos valores das coordenadas com o tempo). Exemplo prático de um sistema de referência terrestre geocêntrico estabelecido pelo IERS (*International Earth Rotation Service*) é o *International Terrestrial Reference System* (ITRS), realizado anualmente através do *International Terrestrial Reference Frame* (ITRF), uma rede de estações fiduciais implantadas por todo mundo, nas quais estão instalados sistemas de medidas SLR, LLR, VLBI e GPS (IBGE, 2016). O Sistema Internacional de Referência Terrestre (ITRS) é materializado por uma rede global de estações geodésicas com posições e velocidades (mudança das posições através do tempo) altamente precisas. Esta rede é conhecida como Marco Internacional de Referência Terrestre (ITRF: *International Terrestrial Reference Frame*).

3.4.2 Breve histórico de data usados no Brasil

Os primeiros sistemas geodésicos de referência terrestres adotados oficialmente no Brasil foram o Córrego Alegre (CA) e o SAD 69, conhecidos por “datum astro-geodésico horizontal” estabelecidos antes da era da Geodésia Espacial e materializados com uso de métodos clássicos de observação, emprego de instrumentos óticos mecânicos e recursos computacionais escassos. Os aspectos definidores destes sistemas estão associados somente com as constantes geométricas referidas a um ponto na superfície terrestre (IBGE, 2017).

3.4.2.1 Córrego Alegre

Face às necessidades da época, a Rede Planimétrica do SGB foi submetida a vários ajustes feitos em calculadoras ou tábuas de logaritmos. Um destes ajustes definiu o sistema geodésico de referência Córrego Alegre (1949). Foi escolhido o vértice Córrego Alegre para ponto datum, que na realidade é o ponto fundamental da rede (vértice Córrego Alegre, em Minas Gerais, da cadeia de triangulação 20°S), e o elipsoide internacional de Hayford como superfície matemática de referência. O posicionamento e orientação no ponto datum (vértice Córrego Alegre) foram feitos por Astronomia. Na época toda a rede brasileira foi referida a este datum, situado perto da cidade de Frutal-MG, oficialmente adotado entre as décadas de 50 a 70. Atualmente está destruído.

Os parâmetros definidores do sistema foram:

- Superfície de referência: Elipsoide Internacional de Hayford 1924, com semieixo maior: 6.378.388,0 m e achatamento: 1/297.
- Ponto Datum: Vértice Córrego Alegre, de coordenadas (revisadas):
 $\varphi = -19^{\circ} 50' 14,91''$, $\lambda = -48^{\circ} 57' 41,98''$ e $h = 683,81$ metros.
- A orientação elipsoide-geoide no ponto datum: $\xi = \eta = 0$ (componentes do desvio da vertical) e $N = 0$ m (ondulação geoidal).

3.4.2.2 PSAD-56 (*Provisional South American Datum of 1956*)

Posteriormente buscou-se uma adaptação para toda a América do Sul, e com isso adotou-se o PSAD-56 (*Provisional South American Datum of 1956*) com origem no vértice La Canoa, na Venezuela, (coordenadas $\varphi = 8^{\circ} 34' 17,170''$ N, $\lambda = 63^{\circ} 51' 34,880''$ W), perto da divisa com a Colômbia e parâmetros ainda do elipsoide de Hayford (conhecido também como *International 1924*). Como esta adequação não ficou satisfatória usou-se um novo vértice: Astro-Chuá.



Figura 3.10 – Proximidades do marco La Canoa - Venezuela

3.4.2.3 Astro datum Chuá

Correspondente ao vértice Chuá, na mesma cadeia do vértice Córrego Alegre, com coordenadas obtidas por Astronomia ($\varphi = -19^{\circ} 45' 41,6527''$, $\lambda = -48^{\circ} 06' 04,0639''$ e $h = 763,28$ m).

Por ser um sistema provisório (um ensaio para o SAD-69), ignoraram-se as componentes do desvio da vertical, ou seja, assumiu-se a coincidência entre geoide e elipsoide (adotou-se $N=i=0$), e manteve-se o elipsoide de Hayford. Posteriormente foi feito um estudo gravimétrico na região do vértice Chuá, obtendo-se novas coordenadas para o ponto, referidas ao elipsoide da Associação Geodésica Internacional. Este novo ajuste acabou válido para toda a América do Sul, que em 1969 havia adotado este elipsoide, que recebeu o nome de SAD-69 (*South American Datum* 1969). Com o ajustamento concluído em 1978, o SAD-69 passou a ser adotado oficialmente como novo datum no Brasil, com vértice em Chuá.



Figura 3.11 – Vértice Chuá e Chapa Indicativa do vértice, na lateral da estrutura de concreto
Fonte: SAMPAIO & SAMPAIO, 2013.

3.4.2.4 SAD-69

É um sistema geodésico regional de concepção clássica, cujo uso foi recomendado para os países sul-americanos em 1969. Foi adotado oficialmente no Brasil em 1979 como sistema de referência para trabalhos geodésicos e cartográficos. Buscava-se um sistema geodésico cujo elipsoide adotado apresentasse “boa adaptação” regional ao geoide. A triangulação foi a metodologia principal usada no estabelecimento das novas redes, e uma rede de trilateração HIRAN fez a ligação entre as redes geodésicas da Venezuela e Brasil.

O posicionamento envolveu os parâmetros topocêntricos no ponto origem Chuá, que são: as componentes do desvio da vertical (ξ, η) e a ondulação geoidal (N). Estes valores foram obtidos para otimizar a adaptação elipsoide-geoide no continente (IBGE, 2016).

O SAD-69 é materializado por um conjunto de pontos geodésicos implantados na superfície do país e foi, até 2005, o único referencial para obtenção de coordenadas no território brasileiro.

Os parâmetros adotados na definição deste Datum (conforme PR n° 22, de 21-07-83) são:

a) Figura geométrica:

- Superfície de referência: Elipsoide de Referência Internacional de 1967 (GRS67), cujos parâmetros são: Semieixo maior: 6.378.160,0 m e Achatamento: 1/298,25.

b) Orientação: - Geocêntrica (eixo de rotação paralelo ao eixo de rotação da Terra; plano do meridiano origem paralelo ao plano do meridiano de Greenwich);

- Topocêntrica, no vértice da cadeia de triangulação do paralelo 20°S;

- Origem: Vértice Chuá, com coordenadas geodésicas:

- Latitude 19°45'41,6527”S

- Longitude 48°06'04,0639”W

- Azimute (Chuá-Uberaba) 271°30'04,05”

- Altitude Ortométrica: 763,28 m

- Orientação elipsoide-geoide na origem: $\xi=0,31$ ”; $\eta=-3,52$ ”; $N=0$ m.

Na densificação do SAD-69, ocorreram problemas devido à extensão da rede, limitações computacionais, acúmulo de distorções geométricas (escala e orientação) na rede planimétrica, uso de mapas geoidais pouco precisos, e uso de instrumentos e métodos variados para estabelecer a rede, dificultando a análise da precisão das coordenadas das estações.

A Figura 3.12 mostra a materialização do Datum SAD69, Vértice Chuá-Minas Gerais. A estação é materializada por uma chapa metálica do Conselho Nacional de Geodésia (CNG), sobre uma base de concreto. É circundada por uma mureta de proteção, e por uma base adicional de concreto. Sobre a base, há uma viga de concreto armado, sobre duas pilastras de apoio, a qual possui um orifício de centragem forçada, coincidente com a vertical do centro da estação, para a instalação de antenas utilizadas no rastreamento de sinais de satélite GPS. Caso o usuário não disponha do pino de centragem forçada, o posicionamento tem que ser feito com o auxílio do tripé, cuja montagem sobre a viga de concreto é tarefa trabalhosa, pois a viga dificulta a movimentação das pernas do tripé. Além disso, há certa dificuldade para medir a altura da antena, devido à altura da viga, que obriga o usuário a instalar o tripé numa altura maior (SOUZA, 2004).



Figura 3.12 – Materialização do Datum horizontal (Vértice Chuá) - Cortesia SOUZA, 2004

SAD69 – Realização 1996

Os avanços tecnológicos permitiram efetuar um reajustamento da rede, de forma global, abrangendo todas as observações disponíveis, no qual foram mantidos os mesmos parâmetros definidores e injunções iniciais do primeiro ajustamento, e também a mesma denominação para o sistema de referência SAD69 na sua nova materialização após o reajustamento. Surge em 1984 o Projeto de Reajustamento da Rede Geodésica Planimétrica Brasileira – REPLAN, concluído em 1996. O uso de posicionamento com satélites GPS, permitiu estabelecer ao mesmo tempo as três componentes definidoras de um ponto no espaço, mudando os procedimentos de campo e respectivo processamento com ajustamento da rede em 3 dimensões, com uso do sistema computacional GHOST (Canadá- Projeto *North American Datum of 1983 (NAD-83)*).

O reajustamento combinou duas estruturas estabelecidas independentemente por diferentes técnicas. A ligação entre as mesmas foi feita através de 49 estações da rede clássica observadas por GPS. Como a rede GPS tem uma estrutura de precisão superior, a mesma teve por função controlar a rede clássica (COSTA & FORTES, 2000).

Foram usadas observações GPS e as referentes à rede clássica no reajustamento, num total de 4759 estações, contra 1285 ajustadas na definição original do SAD69. No reajustamento foi disponibilizado o erro absoluto ou o desvio padrão das coordenadas, informação acessível aos usuários que buscam dados no BDG (Banco de Dados Geodésicos) do IBGE. A tabela abaixo apresenta os valores médios dos erros das coordenadas obtidos após o reajustamento.

Precisão	Estações GPS	Estações rede clássica
Planimétrica	10 cm	40 a 70 cm
Altimétrica	10 a 30 cm	-

Ocorrem diferenças provenientes das duas materializações distintas (distorções), as quais não têm comportamento sistemático e homogêneo, o que dificulta sua estimativa. Num mapa, estas distorções aparecem como um deslocamento, que será significativo conforme a escala e sua localização geográfica. Os deslocamentos correspondentes às distorções máximas (15m) são negligenciáveis até a escala de 1:50.000 (nesta escala há deslocamento de 0,3mm) (IBGE,2016). Não foi adotada a redefinição oficial de um novo datum SAD-69, versão 1996.

3.4.2.5 Datum Geocêntrico – SIRGAS2000

Desde 2015, conforme a legislação brasileira, o Brasil adota o SIRGAS2000. Um Datum geocêntrico pressupõe a adoção de um elipsoide de revolução cuja origem coincide com o centro de massa da Terra. Sua materialização ocorre com o estabelecimento de uma rede geodésica com coordenadas tridimensionais conhecida (não há a definição de um ponto Datum, mas um conjunto de estações). O Sistema de Referência Geodésico para as Américas (SIRGAS) é um exemplo de Datum geocêntrico, e foi criado na Conferência Internacional para definição de um Referencial Geocêntrico para América do Sul, realizada em 1993 em Assunção–Paraguai (IBGE, 1997). Inicialmente se chamava Sistema de Referência Geocêntrico para a América do Sul. Em 2001, passou a denominar-se Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas. Em nov/ 2020, pelo fato dos objetivos do SIRGAS serem estendidos para a determinação de um sistema de referência físico unificado para gravimetria, alturas físicas e geóide, e atendendo às recomendações do *Workshop* Internacional para a Implementação do **Global Geodetic Reference Frame na América Latina**, (Argentina, setembro de 2019), o acrônimo SIRGAS é alterado para **Sistema de Referência Geodésico para as Américas** (www.sirgas.org.pt/web-site-history/). O site do SIRGAS é hospedado pelo IPGH – Instituto Pan-Americano de Geografia e História e é acessado como <https://sirgas.ipgh.org/> (SIRGAS, 2021).

Os resultados do SIRGAS se traduzem em uma das redes de referência continentais mais precisas do mundo. A opção pela adoção do SIRGAS está vinculada ao fato de que sua existência/manutenção não depende apenas de uma única técnica de posicionamento (caso do WGS84, que depende somente do GPS). Há que se considerar também o fato de que o novo referencial atende às precisões da Geodésia, e não só da Cartografia. Na figura 3.13 são esboçadas as diferenças entre referenciais locais e geocêntricos.



Figura 3.13 – Diferenças na definição de referenciais: local (SAD-69), e geocêntricos (WGS-84, ITRFyy e SIRGAS). Extraído de (PEREIRA, K.D., LOBIANCO, M.C.B, COSTA,S.M.A.,2004)

Outra vantagem do SIRGAS é a adoção do ITRS (*International Terrestrial Reference System*) como sistema de referência, que além de garantir a homogeneização de resultados internamente ao continente e permitir uma integração consistente com as redes dos demais continentes, contribui cada vez mais para o desenvolvimento de uma Geodésia "global". Antes do emprego do ITRS/ITRF havia vários sistemas de referência horizontais locais. Com a adoção do ITRS/ITRF há um sistema de referência geocêntrico global unificado (Figura 3.14).

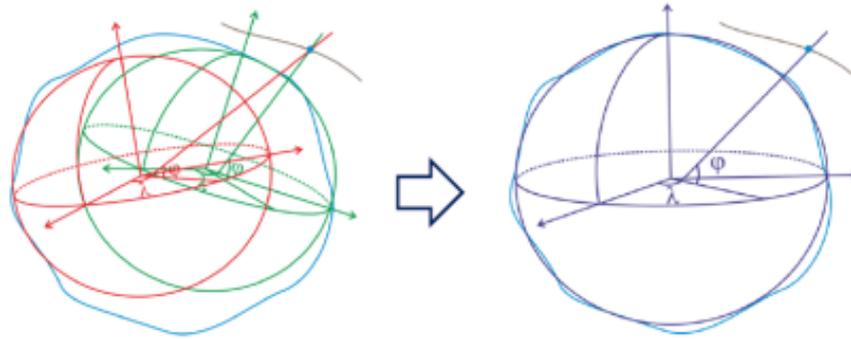


Figura 3.14 – Vários referenciais locais substituídos pelo ITRS/ITRF

Fonte: SANCHEZ,L., Simposio SIRGAS2018, Disponível em:

http://www.sirgas.org/fileadmin/docs/Boletines/Bol23/29_Sanchez_2018_IHRS_SIRGAS2018.pdf

A seguir um breve histórico do SIRGAS2000:

a) Década de 80: instalação de redes de controle geodinâmico usando GPS (Peru, Chile, Equador, etc).

b) 1993: interesse em unificar os sistemas de referência - criação do projeto SIRGAS.

c) 1995: primeira campanha GPS e processamento dos dados (até 1997), envolvendo 58 estações cujas coordenadas estão referidas ao ITRF94 (época 1995,4), havendo assim a definição e realização do SIRGAS95.

d) 2000: segunda campanha (SIRGAS2000, com 184 estações), que está referida ao ITRF2000, época 2000,4. A precisão destas duas realizações está entre $\pm 3 \dots \pm 6$ mm. (<http://www.sirgas.org/pt/sirgas-realizations/>). O processamento dos dados foi efetuado no IBGE e no DGFI (*Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut*).

e) 2001: recomendado na Conferência Cartográfica das Nações Unidas – SIRGAS2000.

f) A terceira e atual realização do SIRGAS é dada por uma rede de estações GNSS (*Global Navigation Satellite System*) de funcionamento contínuo com coordenadas de alta precisão denominada Rede SIRGAS de Operação Contínua (SIRGAS-CON), associadas a uma época de referência específica e mudanças através do tempo (velocidades das estações). Os dados de 400 estações da rede SIRGAS-CON são processados semanalmente por Centros de Processamento e Combinação do SIRGAS para estimar a posição semanal instantânea alinhada com o ITRF e soluções multianuais (acumulativa) do SIRGAS. A posição semanal instantânea é útil quando ocorrem deslocamentos co-sísmicos nas estações SIRGAS provocados por fortes terremotos, o que inviabiliza o uso das coordenadas determinadas previamente. As soluções multianuais fornecem posição e velocidade mais acuradas e atualizadas das estações SIRGAS e são usadas na realização e manutenção do sistema de referência SIRGAS no intervalo entre 2 edições do ITRF.

Conforme o seu estatuto, tem-se que o objetivo geral do SIRGAS é definir, materializar e manter o Sistema de Referência Geodésico para as Américas. Este objetivo abarca:

a) Definição de um sistema de referência geocêntrico tridimensional;

b) Estabelecimento e manutenção de um marco de referência geocêntrico (conjunto de estações com coordenadas geocêntricas [X, Y, Z] de alta precisão e sua variação com o tempo [Vx, Vy, Vz]);

c) Definição e estabelecimento de um datum geocêntrico;

d) Definição e materialização de sistema de referência vertical único com altitudes físicas e geométricas consistentes e determinação de mudanças do marco de referência com o tempo. (ftp://geoftp.ibge.gov.br/informacoes_sobre_posicionamento_geodesico/sirgas/estatuto.pdf).

A caracterização do SIRGAS2000 segundo a RPR01/2005 do IBGE, de 25/02/2005 é:

• Sistema Geodésico de Referência: Sistema de Referência Terrestre Internacional - ITRS (*International Terrestrial Reference System*).

- Figura geométrica para a Terra: Elipsoide do Sistema Geodésico de Referência 1980 (*Geodetic Reference System 1980–GRS80*). Semieixo maior $a=6.378.137\text{m}$; Achatamento $f=1/298,257222101$.
- Origem: Centro de massa da Terra.
- Orientação: Pólos e meridiano de referência consistentes em $\pm 0,005''$ com as direções definidas pelo BIH (*Bureau International de l'Heure*), em 1984,0.
- Estações de Referência: 21 estações da rede continental SIRGAS2000 estabelecidas no Brasil; é a estrutura de referência a partir da qual o sistema SIRGAS2000 é materializado. Inclui-se nestas tabelas a estação SMAR, pertencente à Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo do Sistema GPS (RBMC). Suas coordenadas foram obtidas pelo IBGE após a campanha GPS SIRGAS2000.
- Época de Referência das coordenadas: 2000,4.
- Materialização: estabelecida por intermédio de todas as estações que compõem a Rede Geodésica Brasileira, implantadas a partir das estações de referência.
- Velocidade das estações: para aplicações científicas, onde altas precisões são requeridas, deve-se usar o campo de velocidades disponibilizado para a América do Sul (site <http://www.ibge.gov.br/sirgas>), que permite atualizar as coordenadas de uma estação da época de referência 2000,4 para qualquer outra, e vice-versa, devido às variações provocadas pelos deslocamentos da placa tectônica da América do Sul. Os modelos de velocidades para o SIRGAS são os modelos VEMOS, sendo o modelo VEMOS2017, a versão mais recente.

Como sistema de referência, a **definição** do SIRGAS é idêntica à do Sistema Internacional de Referência Terrestre ITRS (*International Terrestrial Reference System*), e sua **realização** é a densificação regional do ITRF (*International Terrestrial Reference Frame*) nas Américas e no Caribe. As coordenadas SIRGAS estão referidas a certa época de referência, considerando sua variação ao longo do tempo pelas velocidades individuais das estações, ou de um modelo de velocidade contínuo que compreende movimentos de placas litosféricas e deformações na crosta. Realizações e densificações do SIRGAS para épocas distintas e referidas a diferentes soluções do ITRF, materializam o mesmo sistema de referência. Após redução à mesma época de referência e mesma realização (ITRF), as coordenadas são compatíveis ao nível milimétrico. A realização do SIRGAS se dá por densificações nacionais da rede continental, e servem como referenciais locais (SIRGAS, 2021). Com o SIRGAS-CON o número de estações no Brasil e em todo o continente americano aumenta continuamente e passa de 400 (SIRGAS, 2018). Na figura 3.15 têm-se as 21 estações brasileiras que participaram da realização da rede continental SIRGAS2000, época 2000,4 (figura da esquerda) e na figura 3.16, a rede SIRGAS2000 (março 2020).

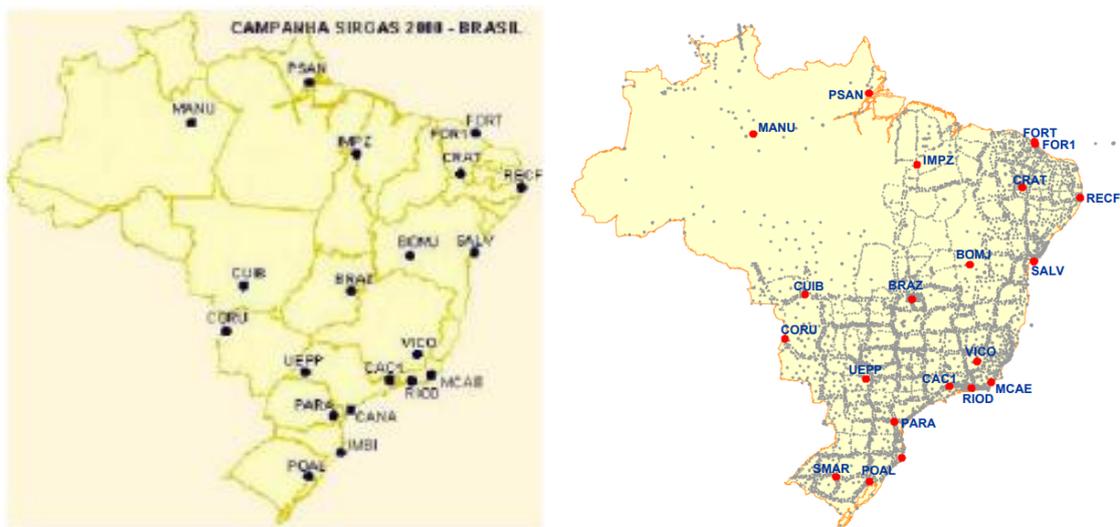


Figura 3.15 – Estações brasileiras SIRGAS2000 (à esquerda, sem estação SMAR e com estação CANA; à direita inclui SMAR e sem CANA que foi destruída). Fonte: Revista Mundogeo, 2005 e <https://geoftp.ibge.gov.br>

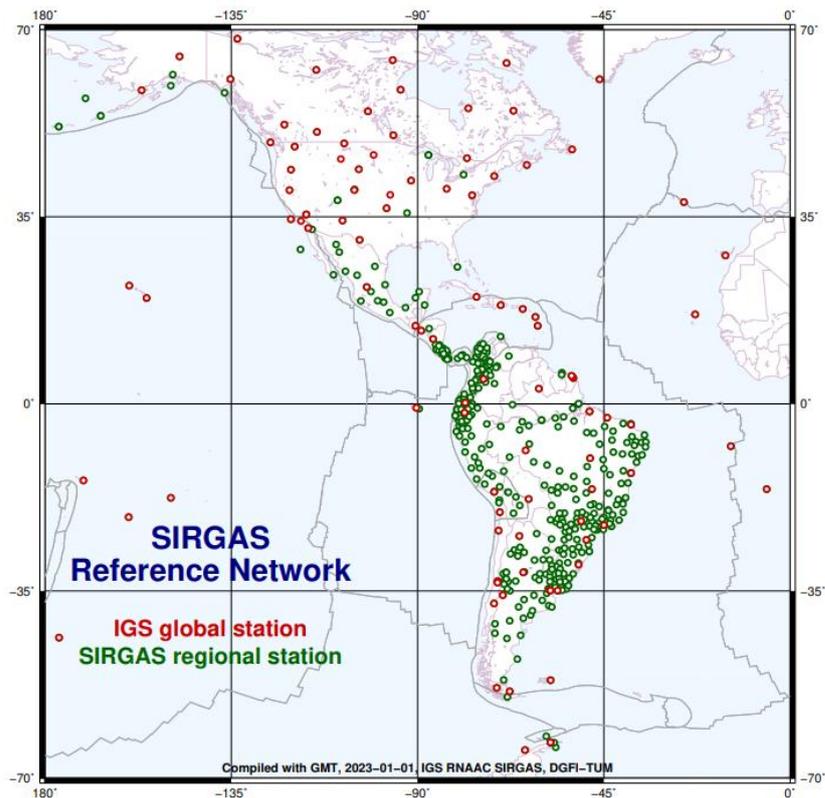


Figura 3.16 – Rede de Referência SIRGAS – de 01/01/2023

Fonte: <http://www.sirgas.ipgh.org/docs/Mapas/SirgasCONC1.pdf> Acesso em 28/02/2023.

A adoção de um sistema geocêntrico baseado no ITRF garante que o SIRGAS continuará atualizado, conforme requisitos de georreferenciamento atuais. Na tabela seguinte constam as Estações de Referência SIRGAS2000 situadas no Brasil e respectivas coordenadas cartesianas e geodésicas na época 2000,4 (elipsoide GRS80), incluindo a estação SMAR.

Estação	X (m)	Y (m)	Z (m)	Latitude (° ' ")	Longitude (° ' ")	Altitude elipsoidal (m)
BRAZ	4115014,085	-4550641,549	-1741444,019	13 15 20,0103 S	43 25 18,2468 W	419,401
BOMJ	4510195,835	-4268322,325	-1453035,300	15 56 50,9112 S	47 52 40,3283 W	1106,020
CAC1	4164559,941	-4162495,407	-2445051,218	22 41 14,5337 S	44 59 08,8606 W	615,983
CANA	3875253,589	-4292587,088	-2681107,718	25 01 12,8597 S	47 55 29,8847 W	3,688
CORU	3229969,943	-5095437,766	-2063429,898	19 00 01,0131 S	57 37 46,6130 W	156,591
CRAT	4888826,036	-4017957,454	-798309,017	07 14 16,8673 S	39 24 56,1798 W	436,051
CUIB	3430711,406	-5099641,565	-1699432,931	15 33 18,9468 S	56 04 11,5196 W	237,444
FOR1	4982893,151	-3959968,539	-411742,293	03 43 34,3800 S	38 28 28,6040 W	48,419
FORT	4985386,605	-3954998,594	-428426,440	03 52 38,8046 S	38 25 32,2051 W	19,451
IMBI	3714672,427	-4221791,488	-2999637,883	28 14 11,8080 S	48 39 21,8825 W	11,850
IMPZ	4289656,441	-4680884,944	-606347,331	05 29 30,3584 S	47 29 50,0445 W	105,008
MANA	3179009,359	-5518662,100	-344401,823	03 06 58,1415 S	60 03 21,7105 W	40,160
MCAE	4400142,600	-3932040,418	-2412305,322	22 22 10,3989 S	41 47 04,2080 W	0,056
PARA	3763751,652	-4365113,803	-2724404,694	25 26 54,1269 S	49 13 51,4373 W	925,765
POAL	3467519,402	-4300378,535	-3177517,730	30 04 26,5528 S	51 07 11,1532 W	76,745
PSAN	3998232,011	-4969359,526	-6340,615	00 03 26,4338 S	51 10 50,3285 W	-15,506
RECF	5176588,653	-3618162,163	-887363,920	08 03 03,4697 S	34 57 05,4591 W	20,180
RIOD	4280294,879	-4034431,225	-2458141,380	22 49 04,2399 S	43 18 22,5958 W	8,630
SALV	4863495,731	-3870312,351	-1426347,813	13 00 31,2116 S	38 30 44,4928 W	35,756
UEPP	3687624,315	-4620818,606	-2386880,343	22 07 11,6571 S	51 24 30,7223 W	430,950
VICO	4373283,313	-4059639,049	-2246959,728	20 45 41,4020 S	42 52 11,9622 W	665,955
SMAR	3280748,410	-4468909,741	-3143408,684	29 43 08,1260 S	53 42 59,7353 W	113,107

As atividades desenvolvidas no SIRGAS são coordenadas por três grupos de trabalho:

a) SIRGAS-GTI (Sistema de referência): se encarrega do estabelecimento e manutenção da rede geocêntrica continental, sendo esta uma densificação do ITRF. Atualmente, o SIRGAS está materializado (realizado) por uma rede com cerca de 400 estações GNSS de monitoramento contínuo (SIRGAS-CON) (SIRGAS, 2018).

b) SIRGAS-GTII (SIRGAS em nível nacional): é responsável por coordenar a densificação do sistema de referência geocêntrico das Américas em cada um dos países membros e fornecer a assessoria necessária para o desenvolvimento das atividades do SIRGAS em nível nacional.

c) SIRGAS-GTIII (Datum Vertical): se dedica à definição e realização do sistema de referência vertical unificado, estabelecido no contexto de um sistema global.

3.4.3 Datum Altimétrico

O Datum altimétrico é constituído pelo geoide materializado através de marégrafos e do conjunto de pontos nos quais se conhece a altitude referida a essa superfície, que consiste na equipotencial do campo de gravidade, que coincide com o nível médio dos mares. A altitude obtida através do nivelamento, referida a esta superfície, é chamada **ortométrica**. A altitude **geométrica** obtida através do posicionamento tridimensional está referida ao elipsoide.

No Brasil, até 1946, não existia uma superfície de referência para o cálculo das altitudes, ou seja, não havia um Datum altimétrico brasileiro. Com o início pelo IBGE, da implantação da rede de nivelamento de precisão, foi adotado o nível médio do mar referido ao marégrafo de Torres (RS), o primeiro Datum altimétrico brasileiro, materializado pela altitude da RN 3L em relação ao NMM obtido de observações maregráficas entre fevereiro de 1919 e fevereiro de 1920. Em 1958 foi substituído pelo marégrafo de Imbituba (SC), sendo que o referencial altimétrico coincide com a superfície equipotencial que contém o nível médio do mar, definido pelas observações maregráficas tomadas no Porto de Imbituba, no litoral do Estado de Santa Catarina, no período de 1949 a 1957, referida a RN 4X (ALENCAR, J.C.M., IBGE, 2016).

Em 1980 o IBGE adotou o NMM no Porto de Santana (entre 1957 e 1958), para estabelecer o Datum de Santana empregado na implantação da rede altimétrica no estado do Amapá. Este procedimento foi necessário devido à impossibilidade de travessia do baixo curso do Rio Amazonas com nivelamento de alta precisão (IBGE, 2019). Desta forma, existem atualmente no Brasil dois referenciais altimétricos, Imbituba e Santana, ambos definidos e materializados pelo modo clássico, ou seja, a partir de um valor de NMM calculado com dados coletados em uma estação maregráfica e propagado por toda a região de interesse por meio do nivelamento geométrico de alta precisão, considerando as correções cabíveis. Um referencial altimétrico definido a partir do NMM é específico para o período considerado no cálculo do NMM e para o local do marégrafo (IBGE, 2017).

Para o posicionamento vertical a referência é dada pelas estações da Rede Altimétrica de Alta Precisão (RAAP) do sistema, que são denominadas Referências de Nível (RRNN), as quais são materializadas através de marcos de concretos e chapas, cravadas sempre que possível em superfícies estáveis (afloramentos rochosos, pontes, bases de monumentos, calçadas com espessura adequada, etc). As altitudes desses marcos e chapas foram obtidas a partir de um marco inicial, implantado perto do marégrafo, e a medição foi feita através do nivelamento geométrico. As diferenças de altitude medidas variam conforme o campo de gravidade na região, e com irregularidades da topografia. Gemael (1981) chamava a atenção para o nivelamento de precisão empregado na época no Brasil, que na sua concepção, apresentava um aspecto puramente geométrico, sempre desacompanhado de medições gravimétricas. Para tornar unívoca a rede altimétrica, era usada a chamada correção ortométrica (correção do não paralelismo das superfícies equipotenciais), aplicada à altitude que decorre do nivelamento.

Na figura 3.17 é apresentado o emprego do marégrafo e a origem da altitude ortométrica.

Tem-se que HRN é a altitude ortométrica da RN, HRN-M é o desnível entre a RN e o marégrafo, HNI é o desnível entre a superfície instantânea do mar e o zero convencional (marégrafo), HTO é a altitude da topografia oceânica, HNML é o desnível entre a superfície média local do mar e o zero convencional (marégrafo), obtido por análise harmônica a partir de HNI.

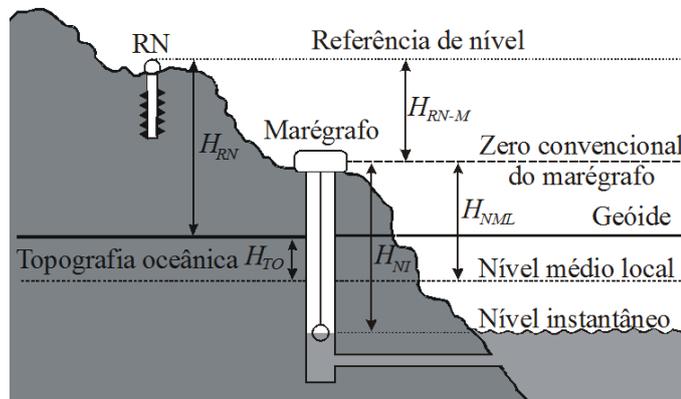


Figura 3.17 – Marégrafo e origem da altitude ortométrica (adaptada de Vanicek & Krakiwsky, 1986, SOUZA, 2004)

O IBGE tem se preocupado em definir diretrizes para o gerenciamento da RAAP do país, com o objetivo de satisfazer as necessidades operacionais da comunidade técnica nacional (LUZ & GUIMARÃES, 2001). Destacam-se: a recomposição de uma estrutura homogênea da rede; a integração com os levantamentos gravimétricos e com o posicionamento por satélite; e o estabelecimento de estações maregráficas “geodésicas”, em que a preocupação é não somente a observação do nível do mar, mas também o monitoramento de todos os fenômenos associados.

Por ora é importante registrar que foi feito o Reajustamento da Rede Altimétrica com Números Geopotenciais (REALT, 2019), sendo que até 30/07/2018, no caso das referências de nível, eram disponibilizadas aos usuários as altitudes ortométricas do tipo normal. A partir do reajustamento citado, o Banco de Dados Geodésicos (BDG) brasileiro disponibiliza as altitudes normais, seguindo recomendações do SIRGAS.

Os data verticais usados atualmente na América Latina referem-se a diferentes marégrafos e, portanto, diferentes níveis do mar e diferentes épocas. Além disso, não levam em conta as variações das altitudes e do nível de referência com o tempo e não incluem as reduções dos efeitos de gravidade. Em consequência, as altitudes associadas aos diferentes marégrafos, apresentam discrepâncias consideráveis entre os países vizinhos, e não permitem o intercâmbio da informação vertical em escala continental e global, além de não possuírem capacidade de suportar a determinação prática de altitudes a partir do posicionamento por GNSS. Em contraste, o novo Sistema Vertical de Referência para o SIRGAS deve (SIRGAS, 2018b):

- a) referir-se a um nível de referência global unificado;
- b) ser realizado (materializado) por altitudes físicas propriamente ditas (derivadas de nivelamento geométrico combinado com reduções gravimétricas);
- c) estar conectado ao sistema de referência geocêntrico SIRGAS;
- d) estar associado a uma época específica de referência, ou seja, considerar as mudanças temporais das coordenadas e do referencial.

A definição do novo sistema de referência vertical do SIRGAS é idêntica à definição do Sistema de Referência de Altitude Internacional (IHRF - *International Height Reference System*) dado pela Resolução n° 1 de 2015 da Associação Internacional de Geodésia (IAG). A realização do novo sistema de referência vertical do SIRGAS deve ser uma densificação regional da realização do Sistema de Referência de Altitude Internacional (IHRF - *International Height Reference Frame*). O SIRGAS-GTIII (Datum vertical) foi estabelecido durante a Assembleia

Geral da IAG (Rio de Janeiro, 1997). Seus principais objetivos são definir um sistema de referência vertical unificado para o SIRGAS, estabelecer um sistema correspondente e transformar os sistemas de altitudes clássicos existentes em um sistema moderno (SIRGAS, 2018c), ou seja, o SIRGAS-GTIII concentra esforços no estabelecimento de uma rede vertical continental que se constitua na densificação do IHRF na região SIRGAS.



Figura 3.18 – Estações IHRF (proposta em 2017) Fonte: Boletim Informativo n. 22 do Simpósio SIRGAS 2017. Disponível em: *Advances in the implementation of the International Height Reference System (IHRF)* L. Sánchez. http://www.sirgas.org/fileadmin/docs/Boletines/Bol22/Boletin_SIRGAS_22_2017.pdf

3.5 SISTEMA GEODÉSICO BRASILEIRO

Segundo o IBGE, o desenvolvimento do Sistema Geodésico Brasileiro - SGB, composto pelas redes planimétrica, altimétrica e gravimétrica pode ser dividido em 2 fases: antes e após o advento da tecnologia de observação de satélites artificiais com fins de posicionamento.

Em 2017, o IBGE publicou “**Especificações e Normas para Levantamentos Geodésicos associados ao Sistema Geodésico Brasileiro**”, fruto da evolução tecnológica e metodológica ocorrida nos levantamentos e no tratamento de informações coletadas para estabelecimento das redes geodésicas que materializam o SGB. O objetivo da norma é estabelecer requisitos mínimos de precisão, com orientações a serem adotadas nos levantamentos geodésicos visando o estabelecimento, manutenção e densificação das redes geodésicas de referência que materializam o SGB nas vertentes planialtimétrica, altimétrica e gravimétrica (IBGE, 2017). Como decorrência da variedade de dados obtidos nos levantamentos geodésicos, as redes geodésicas que caracterizam a materialização do SGB são classificadas em: **redes GNSS/GPS e clássicas horizontais, redes de referência vertical e redes de densificação gravimétrica** do IBGE.

3.5.1 Rede Planimétrica

Em outubro de 1939 foram realizados os primeiros levantamentos geodésicos no Brasil. Em 1944 com a medição da primeira base geodésica nas proximidades de Goiânia, iniciava-se o estabelecimento sistemático do Sistema Geodésico Brasileiro (SGB) em sua componente planimétrica, por meio das medições de latitudes e longitudes, materializado por um conjunto de pontos (pilares, marcos ou chapas) situados sobre a superfície terrestre pelo método da triangulação e densificado pelo método de poligonação (IBGE, 2018). Em 1991 o IBGE iniciou o uso da tecnologia GPS na densificação de marcos planimétricos do Sistema Geodésico Brasileiro, sendo a partir de então, a única técnica usada no estabelecimento da rede planimétrica, que pela tridimensionalidade do posicionamento por satélites, denominou-se rede planialtimétrica do SGB. Em 1996 surge a RBMC (Rede Brasileira de Monitoramento

Contínuo do Sistema GPS), sendo que os dados coletados nas estações da RBMC são transferidos diária e automaticamente e disponibilizados aos usuários (acesso no link <http://www.bdg.ibge.gov.br/appbdg/>).

As redes geodésicas GNSS/GPS e clássicas horizontais que caracterizam a materialização do SGB constituem-se de: a) estações GNSS que compõem a RBMC; b) estações SAT-Dopplere SAT-GPS que compõem a Rede SAT, incluindo Redes Estaduais GPS e estações homologadas; c) vértices de triangulação (VT) e Estações de Poligonal (EP) da Rede Horizontal Clássica (IBGE, 2017).

3.5.2 Rede Altimétrica

No complexo das Furnas (Torres-RS), num local chamado “Furninha”, foi instalado em 1919, o Marégrafo de Torres, primeiro Datum Altimétrico do Brasil, que teve medições até 1921. Em 1958, o Datum de Torres-RS foi substituído pelo Datum de Imbituba, definido pela estação maregráfica do porto da cidade de Imbituba, em Santa Catarina, o que melhorou a definição do sistema de altitudes, já que a estação de Imbituba contava na época com 9 anos de observações. Pela impossibilidade de estabelecer Referências de Nível no entorno do baixoRio Amazonas, a porção da Rede Altimétrica existente no estado do Amapá não pôde ser conectada a Imbituba, levando à utilização do nível médio do mar no Porto de Santana entre 1957 e 1958, originando o Datum Santana, no Amapá (LUZ & GUIMARÃES, 2001).

As redes de referência vertical são constituídas por estações altimétricas passivas (RRNN que compõem a Rede Altimétria de Alta Precisão-RAAP) e estações da Rede Maregráfica Permanente para a Geodésia (RPMG) (IBGE, 2017). A Rede Altimétrica de Alta Precisão (RAAP) do SGB passou por processos de ajustamento. Em 2005 iniciou-se o processo que levou ao ajustamento simultâneo (software GHOST) que permite ajustar grandes redes geodésicas.

Face aos progressos tecnológicos e metodológicos advindos das missões espaciais gravimétricas (GRACE, GOCE), altimétricas e topográficas, é prevista uma gradual substituição dos sistemas locais por outros de âmbito global (Grupo SIRGAS-GTIII).

Os primeiros estudos para definição e materialização global do IHRs (*International Height Reference System*) estão em desenvolvimento, com seleção de 163 estações de rastreamento contínuo GNSS vinculadas às respectivas redes verticais fundamentais, com densificação gravimétrica adequada num raio de até 210 km (SANCHEZ et al, 2017).

3.5.3 Rede Gravimétrica, modelo MAPGEO2015 e modelo hgeoHNOR2020

Em 1956, o IBGE iniciou o estabelecimento do datum (sistema geodésico de referência) horizontal para o Brasil, que envolveu a determinação de mais de 2.000 estações gravimétricas em torno do ponto origem VT Chuá. Só em 1990 a gravimetria adquiriu um caráter sistemático, pois o IBGE estabeleceu estações gravimétricas visando recobrir os grandes vazios de informação da gravidade, especialmente nas regiões norte, centro-oeste e nordeste do Brasil.

Com o uso do GNSS, a determinação do geóide é importante no posicionamento vertical. As altitudes fornecidas pelo GPS estão em um sistema altimétrico diferente daquele em que estão as obtidas pelos métodos clássicos de nivelamento (geométrico, trigonométrico e barométrico), impossibilitando que as altitudes GPS possam ser diretamente comparadas com as altitudes e mapas fornecidos pelo IBGE, DSG (Diretoria do Serviço Geográfico), etc, seja no emprego da altitude ortométrica ou da altitude normal. O mapa geoidal é um modelo digital

obtido por levantamentos geodésicos, que descreve a variação entre a superfície elipsoidal e a superfície do geóide. Permite a conversão entre os dois sistemas de altitude: geométrica e ortométrica. A precisão da transformação é função da precisão na determinação do geóide.

Assim, o IBGE disponibilizou versões cada vez mais precisas e atualizadas do mapa geoidal. A última é o MAPGEO2015, sucessor do MAPGEO2010, calculado com resolução de 5' de arco. É disponibilizado um sistema de interpolação juntamente com o modelo geoidal, para que usuários possam obter a ondulação geoidal para um ponto ou conjunto de pontos do território nacional através de suas coordenadas planimétricas. A nova versão foi calculada com cerca de 950.000 estações gravimétricas terrestres na América do Sul (450.000 nacionais). Entre estas, 18.485 são novas estações medidas no Brasil. A informação altimétrica usada na redução da gravidade foi obtida do modelo digital do terreno (MDT) SAM3s_v2, baseado no SRTM- *Shuttle Radar Topography Mission* e empregou o modelo do geopotencial EIGEN-6C4 (*European Improved Gravity model of the Earth by New techniques*), até grau e ordem 200, elaborado pelo GFZ/Potsdam e GRGS/Toulouse. Abaixo o modelo MAPGEO-2015 (IBGE, 2016c).

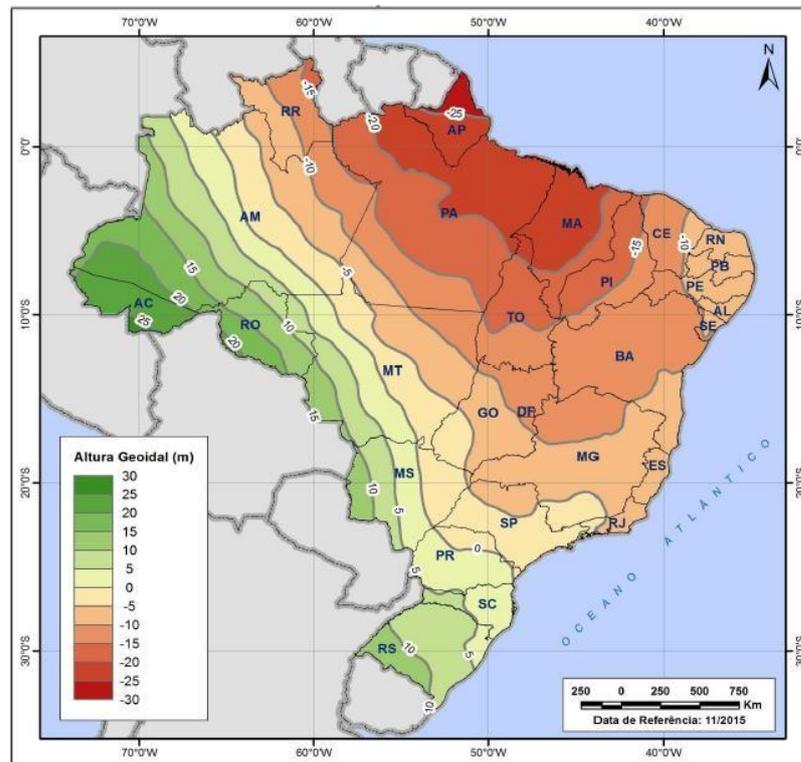


Figura 3.19 – MAPGEO 2015 (Fonte: IBGE, 2016c)

É possível notar a ondulação geoidal N valendo 0 metros, passando pelo norte do estado do Paraná, cruzando os estados de Mato Grosso do Sul, Mato Grosso e Amazonas.

A rede de densificação gravimétrica do IBGE é constituída por estações gravimétricas básicas para complementação das redes fundamentais e estações gravimétricas de densificação para contínua melhoria do modelo geoidal (IBGE, 2017).

Em agosto de 2021 foi disponibilizado pelo IBGE o modelo **hgeoHNOR2020**, que permite a conversão de altitudes geométricas para altitude normais. No Brasil, as altitudes normais vem substituindo as altitudes ortométricas desde 2018. É possível notar a isolinha de valor $\eta = 0$ m, destacada em vermelho, em posição próxima ao valor N = 0m do modelo geoidal MAPGEO2015. A seguir o modelo hgeoHNOR2020.

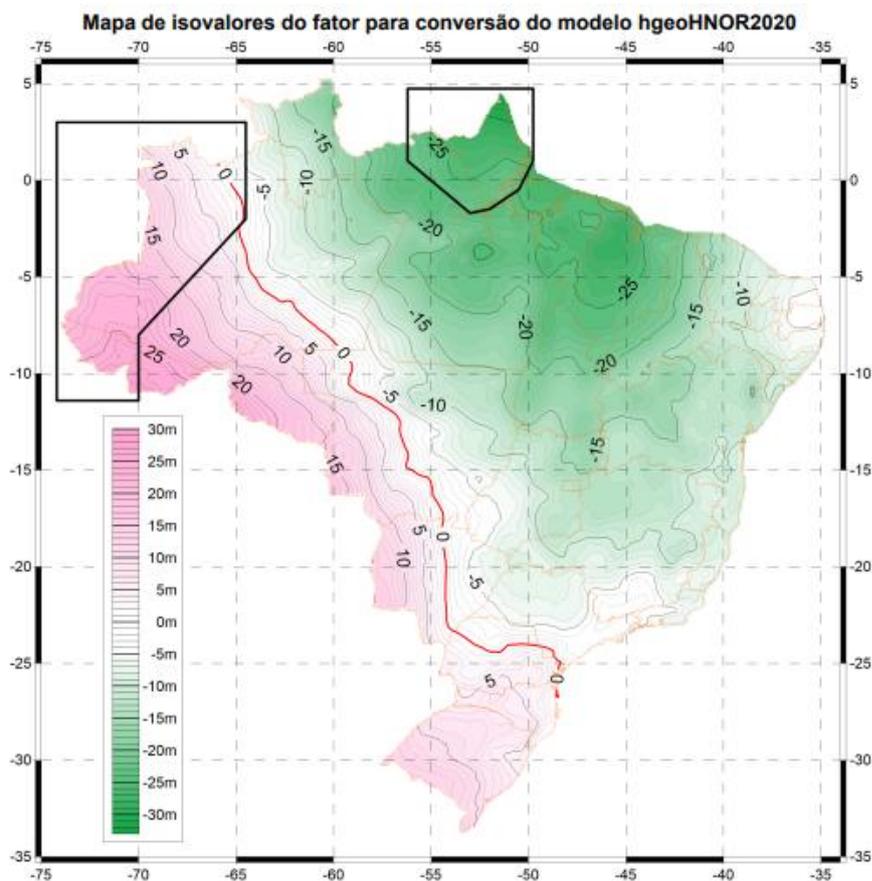


Figura 3.20 – Modelo hgeoHNOR2020 (Fonte: IBGE, 2021, Diretoria de Geociências)

3.6 TRANSFORMAÇÃO DE SISTEMAS GEODÉSICOS

Devido à evolução do Sistema Geodésico Brasileiro, é preciso relacionar diferentes referenciais existentes através de um método de transformação, ou seja, efetuar a conversão e integração entre redes geodésicas de referência distintas. Considerando as dimensões territoriais do Brasil, é um grande desafio compatibilizar todo o mapeamento feito antes da era GNSS (*Global Navigation Satellite System*), uma vez que as décadas de 1980 e 1990 foram as de maior produção cartográfica brasileira. A partir daí houve maior restrição de recursos na produção e atualização cartográfica, fazendo com que a maior parte deste acervo está nos referenciais antigos (SAD-69, Córrego Alegre).

Adotar um novo sistema geodésico de referência resulta em obter novos valores de coordenadas para os pontos e feições mapeadas, e que estão referenciadas num sistema antigo. Em outras palavras, como se faz uma mudança de datum?

Uma das abordagens do problema é dada pela seguinte situação:

$$\varphi_1, \lambda_1, h_1 \text{ (Datum 1)} \rightarrow \varphi_2, \lambda_2, h_2 \text{ (Datum 2)}$$

$$(\Delta\varphi, \Delta\lambda, \Delta h)$$

Para o Brasil, a transformação entre diferentes sistemas de referência é feita através de parâmetros de transformação, disponibilizados oficialmente pelo IBGE. Conforme a resolução nº23 (de 21 de fevereiro de 1989), as **equações diferenciais simplificadas de Molodensky** é o modelo matemático usado na transformação de coordenadas entre os sistemas geodésicos de referência. A transformação de *Molodensky* é apresentada em duas versões: a versão “standard”

e a versão simplificada. Nas equações simplificadas de *Molodensky* ignora-se os parâmetros de rotação dos eixos, pois há a consideração de paralelismo entre os sistemas geodésicos, sendo considerados apenas 3 parâmetros de translação. Interessante notar que os acréscimos em latitude e longitude ($\Delta\phi, \Delta\lambda$) são independentes da altitude elipsoidal (geométrica), que pode até ser desconhecida, sem comprometer o emprego da transformação.

Assim, a transformação de *Data* envolve coordenadas geodésicas de um Datum para outro, e pode ser realizada utilizando-se das equações diferenciais simplificadas (ou reduzidas) de *Molodensky*, apresentadas a seguir:

$$\phi_2 = \phi_1 + \Delta\phi^o \quad (3.1)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda^o \quad (3.2)$$

$$h_2 = h_1 + \Delta h^m \quad (3.3)$$

onde $\Delta\phi^o$, $\Delta\lambda^o$ e Δh^m são determinados pelas equações simplificadas de *Molodensky*

$$\Delta\phi^o = (1/M_1) \{ (a_1 \Delta f + f_1 \Delta a) \sin^2 \phi_1 - \Delta x \sin \phi_1 \cos \lambda_1 - \Delta y \sin \phi_1 \sin \lambda_1 + \Delta z \cos \phi_1 \} 180/\pi \quad (3.4)$$

$$\Delta\lambda^o = (1/N_1 \cos \phi) [- \Delta x \sin \lambda_1 + \Delta y \cos \lambda_1] 180/\pi \quad (3.5)$$

$$\Delta h^m = (a_1 \Delta f + f_1 \Delta a) \sin^2 \phi_1 - \Delta a + \Delta x \cos \phi_1 \cos \lambda_1 + \Delta y \cos \phi_1 \sin \lambda_1 + \Delta z \sin \phi_1 \quad (3.6)$$

Em algumas bibliografias, para a expressão (3.6) emprega-se ΔN ao invés de Δh^m .

Onde:

ϕ_1, λ_1, h_1 são as coordenadas geodésicas no *Datum 1*

ϕ_2, λ_2, h_2 são as coordenadas geodésicas no *Datum 2*

f, a achatamento e semieixo maior respectivamente do elipsoide

$\Delta f, \Delta a$ são as diferenças entre o semieixo maior e o achatamento dos *Data 1* e *2*.

$$N_1 = a / (1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2} \quad (3.7)$$

$$M_1 = a (1 - e^2) / (1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2} \quad (3.8)$$

M_1 é o raio de curvatura da seção meridiana e N_1 é o raio de curvatura da seção primeiro vertical no *Datum 1*.

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ são os parâmetros de transformação (componentes do vetor diferença entre os centros dos dois elipsoides).

Há circunstâncias em que se convive com diferentes sistemas de referência e suas realizações, o que torna cada vez mais importante o conhecimento das expressões e dos parâmetros de transformação envolvidos (foi o que ocorreu no período de transição 2005-2015, com a migração do SAD-69 para o SIRGAS2000). Na área de Geociências do site do IBGE está disponível o ProGrid, um software que permite, por exemplo, transformar coordenadas no referencial SAD-69 para SIRGAS2000 e vice-versa, entre outras opções. Em nov/2022, o IBGE lançou a versão do ProGrid Online para transformação de coordenadas entre sistemas oficiais de referência, com tempo médio de resposta de cerca de 1 minuto para arquivos com até 100 mil pontos. O ProGrid online substitui a versão *desktop* sem atualização nas novas versões do ambiente *Windows*. A aplicação *online* aceita formatos distintos de coordenadas, estando acessível apenas no portal do IBGE, permitindo melhor desempenho quando comparada com a versão *desktop*, além de interagir com outras plataformas e sistemas operacionais (IBGE, 2023).

Outra transformação empregada é a transformação generalizada de Helmert, utilizada para transformação de coordenadas de um ponto P entre duas redes arbitrárias de referência, para épocas distintas. Ou seja, está relacionada à compatibilização de diferentes referenciais, levando em conta a evolução temporal das coordenadas, aplicando translações, rotações, fator de escala com as respectivas taxas de variação em relação ao tempo, e a velocidade da estação.

3.7 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

No posicionamento com GPS, as coordenadas cartesianas são as primeiras a serem obtidas, mas em aplicações cotidianas o usuário pode precisar dispor de coordenadas geodésicas (elipsoidais). Por isso há a necessidade de transformar as coordenadas de um sistema para outro.

As expressões básicas envolvidas nas transformações usuais são dadas a seguir.

a) Transformação entre coordenadas cartesianas

Se as coordenadas cartesianas são conhecidas num sistema antigo e se tem interesse em convertê-las para um sistema novo, utiliza-se da seguinte expressão (Monico, 2007).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{novo}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{antigo}} + \begin{bmatrix} \mu & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & \mu & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{antigo}} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Onde:

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ são parâmetros de translação.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ são ângulos de rotação e μ é um fator de escala geralmente desprezíveis por serem de pequena magnitude.

Para exemplificar a utilização da expressão (3.9), sejam dadas as coordenadas no SAD-69 e deseja-se transformar para o SIRGAS, utilizando os parâmetros oficiais que constam da resolução presidencial RPR01/2005, de 25/02/2005 e também a RPR01/2015 de 24/02/2015, que alteram a caracterização do Sistema Geodésico Brasileiro.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{SIRGAS}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{SAD-69}} + \begin{bmatrix} -67,35 \\ 3,88 \\ -38,22 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Para se obter as coordenadas cartesianas em SAD-69, a partir das coordenadas SIRGAS:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{SAD-69}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{SIRGAS}} + \begin{bmatrix} 67,35 \\ -3,88 \\ 38,22 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Os parâmetros oficiais usados para transformar de **Córrego Alegre para SAD-69**:

$$T_x = -138,70\text{m} \quad T_y = 164,40\text{m} \quad T_z = 34,40\text{m}$$

Os parâmetros usados para transformar de **SAD-69 para SIRGAS2000**:

$$T_x = -67,35\text{m} \quad T_y = 3,88\text{m} \quad T_z = -38,22\text{m}$$

Os parâmetros usados para transformar de **WGS-84 para SAD-69**:

$$T_x = 66,87\text{m} \quad T_y = -4,37\text{m} \quad T_z = 38,52\text{m}$$

(Res. 23 de 21/02/89, que altera o Apêndice II da R.PR-22/83). A versão WGS-84 envolvida na resolução anterior não é a mais recente! Isto faz com que tenha diferença nos parâmetros de transformação de SAD-69 para WGS-84 ou SIRGAS2000.

Os parâmetros usados para transformar de **WGS-84 para SIRGAS2000**:

$$T_x = 0m \quad T_y = 0m \quad T_z = 0.$$

Devido à evolução tecnológica, o WGS84 já passou por várias atualizações desde a disponibilização do GPS para a comunidade civil em 1987: WGS84(G730), WGS84(G873), WGS84(G1150), WGS84(G1674). A atualização do WGS84 feita em 2013 é a G1762, a qual coincide com o ITRF2008 ao nível de 1 cm (MALYS, 2017). Mais detalhes em <https://confluence.qps.nl/pages/viewpage.action?pageId=29855173>.

Desta forma, os parâmetros publicados na Res.PR 23/89, mencionados no item anterior, devem ser usados para transformar resultados de levantamentos GPS realizados até janeiro de 1994. De 1994 até os dias atuais, deve-se utilizar os parâmetros publicados na R.PR 01/05, entre SAD69/SIRGAS2000. Consta-se que a diferença entre os parâmetros de transformação antigos (R.PR 23/89) e novos (R.PR 01/05) é de 0,48 m, 0,49 m e 0,30 m, para T_x , T_y e T_z (ou Δx , Δy , Δz) respectivamente, em decorrência da evolução do WGS84. Assim, para realizar uma transformação de coordenadas envolvendo versões recentes do WGS84 deve-se utilizar os parâmetros de transformação constantes na R.PR 01/05.

Para se obter coordenadas (X,Y,Z) a partir das coordenadas horizontais (ϕ, λ) e de H (altitude ortométrica), é necessário conhecer o valor da ondulação geoidal N, inexistente para Córrego Alegre. Também não existem parâmetros para a transformação direta de CA (Córrego Alegre) para WGS-84, devendo fazer-se uma transformação intermediária para SAD-69.

Exercício de aplicação:

Dadas as coordenadas da estação UEPP em SIRGAS;

X= 3687624,310m; Y=-4620818,571m; Z=-2386880,407m, calcule as coordenadas do mesmo ponto em SAD-69, WGS-84(G1150) e também em CA.

b) Transformação de coordenadas cartesianas em geodésicas e vice-versa

Para transformar das coordenadas cartesianas em coordenadas geodésicas necessitam-se dos parâmetros do elipsoide, as constantes de transformação e as coordenadas conhecidas dos pontos. A figura 3.19 ilustra as coordenadas cartesianas geocêntricas do ponto P(X,Y,Z), o elipsoide de revolução com a mesma origem do sistema cartesiano; e a posição desse ponto em coordenadas geodésicas P(ϕ, λ, h). Nota-se também como se obtém a (3.12), (3.13) e (3.14).

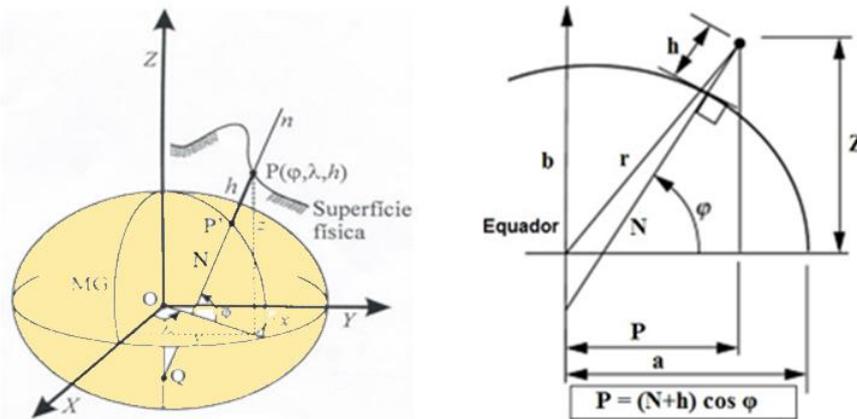


Figura 3.21 - Transformação de coordenadas cartesianas em geodésicas e vice-versa

A relação entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas geodésicas tem a forma:

$$x = (N + h) \cos \phi \cos \lambda \quad (3.12)$$

$$y = (N + h) \cos \phi \sin \lambda \quad (3.13)$$

$$z = (N (1 - e^2) + h) \sin \phi \quad (3.14)$$

com o raio de curvatura da seção 1º vertical (ou grande Normal) dado por:

$$N = a / (1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2} \quad (3.15)$$

$$E a 1^a. \text{ excentricidade dada por } e^2 = (a^2 - b^2) / a^2 \quad (3.16)$$

A transformação inversa (expressar coordenadas geodésicas a partir de cartesianas), geralmente é feita pelo método iterativo. O raio do paralelo que passa por P , tem a expressão.

$$p = \sqrt{x^2 + y^2} = (N + h) \cos \phi \quad (3.17)$$

Logo, a altitude geométrica pode ser escrita na forma:

$$h = (p / \cos \phi) - N \quad (3.18)$$

Da 3.14, tem-se:

$$z = (N + h - e^2 N) \sin \phi = (N + h) (1 - e^2) (N / (N + h)) \sin \phi \quad (3.19)$$

Dividindo a (3.19) por (3.17), resulta a latitude aproximada

$$tg \phi = \frac{z}{p(1 - e^2 \frac{N}{N+h})} \quad (3.20)$$

Dividindo a (3.13) por (3.12) tem-se a longitude λ :

$$tg \lambda = y / x \quad (3.21)$$

Se as expressões da altitude (3.18) e da latitude (3.20) fossem independentes, a transformação estaria concluída. Mas, como a (3.18) depende da latitude e a (3.20) depende da altitude, é necessário recorrer a **solução iterativa**, adotando os seguintes passos:

1) Calcular $p = \sqrt{(x^2 + y^2)}$

2) Determinar a latitude aproximada ϕ_0 pela expressão

$$tg \phi_0 = \frac{z}{p(1 - e^2)}$$

3) Obter o raio de curvatura primeiro vertical aproximado N_0

$$N_0 = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi_0}$$

4) Calcular a altitude aproximada h_0

$$h_0 = (p / \cos \phi_0) - N_0$$

5) Aprimorar a latitude

$$tg\phi = \frac{z}{p \left(1 - e^2 \frac{N_0}{N_0+h}\right)}$$

6) Testar o resultado

se $\phi - \phi_0 < \xi$, sendo $\xi = 0,0001$, iteração concluída

se $\phi \neq \phi_0$, fazer $\phi_0 = \phi$, e continuar a partir do passo (3)

Outra maneira de se efetuar a transformação é através da solução direta, como segue:

$$\phi = \arctg \left(\frac{Z + e'^2 b \operatorname{sen}^3(\theta)}{p - e^2 a \operatorname{cos}^3(\theta)} \right) \quad (3.22)$$

$$\lambda = \arctg(y/x) \quad h = (p / \operatorname{cos}\phi) - N$$

$$\theta = \arctg(za / pb) \quad e'^2 = (a^2 - b^2) / b^2 \quad (3.23)$$

A variável θ é uma quantidade auxiliar e e'^2 é a excentricidade segunda. Note que o cálculo da longitude λ e da altitude h são iguais ao procedimento anterior. Para a longitude, lembrar que no território brasileiro seu valor é negativo e menor que 90° .

A resolução n.23 (fevereiro/1989) do IBGE, que altera o Apêndice II da R.PR-22/83, (IBGE, 2015) apresenta o cálculo das coordenadas geodésicas (ϕ, λ, h) a partir das cartesianas (X, Y, Z), com o seguinte modelo matemático, onde μ a latitude reduzida e e'^2 a excentricidade segunda:

$$\phi = \arctg \left(\frac{Z + e'^2 b \operatorname{sen}^3(\mu)}{\sqrt{x^2 + y^2} - e^2 a \operatorname{cos}^3(\mu)} \right)$$

$$\lambda = \arctg(y/x) \quad (3.24)$$

$$h = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\operatorname{cos}\phi} - N \quad \text{onde:}$$

$$\operatorname{sen}\mu = \frac{\tan\mu}{\sqrt{1 + \tan^2(\mu)}} ; \operatorname{cos}\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\mu)}} ; \tan\mu = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{a}{b} \quad (3.25)$$

Como pode ser notado, as possibilidades apresentam distinções no cálculo de h e ϕ . Já no caso da longitude λ , a maneira de obtenção é a mesma, obtida por uma equação simples ($\operatorname{tg}\lambda = y/x$) que, porém, **exige o cuidado da análise de quadrante**.

Exercício de aplicação: Calcular por um dos métodos vistos anteriormente, as coordenadas geodésicas (ϕ, λ, h) de um ponto, cujas coordenadas cartesianas (X, Y, Z) são:

$$X = -108.990,82382\text{m}, \quad Y = -4.860.167,1368\text{m}, \quad Z = 4.115.379,1994\text{m}.$$

Considere o elipsoide GRS-80, em que $e^2 = 0,006694380023$ e $a = 6.378.137,298\text{m}$

$$\text{Resp: } \phi = 40^\circ 26' 21,34\text{N} \quad \lambda = 91^\circ 17' 04,78\text{W}, \quad h = 231,446\text{m}$$

OBS: É recomendável criar um esboço da posição do ponto a partir de suas coordenadas (X, Y, Z), que permite vislumbrar o valor aproximado e “sinal” das coordenadas a serem calculadas.

3.8 Fórmula dos Sete Parâmetros

Para efetuar a correlação entre 2 referenciais geodésicos são usados basicamente dois modelos de transformação: Bursa-Wolf e Molodensky (Fórmulas Reduzidas de Molodensky). A determinação dos parâmetros de transformação entre dois data é útil pois permite, de forma simples e rápida, o conhecimento das coordenadas de pontos num determinado datum local a partir do conhecimento das coordenadas desses pontos num datum global. Esta operação é aplicada no estabelecimento de redes geodésicas ou na construção de infraestruturas.

As transformações conformes 3D (preservam a forma, e ângulos entre vetores no espaço ficam inalterados), também conhecidas como transformações de similaridade são comumente usadas em Topografia (em seções de estradas elevadas no encaixe com construções pré-existentes e operações em túneis no controle da direção e orientação das máquinas), Fotogrametria (orientação (interior e exterior) de imagens digitais de estruturas e fotografias aéreas) e Geodésia (para converter coordenadas relacionadas de um datum geodésico para outro) (DEAKIN, 2006). Em tais aplicações, as rotações entre os dois eixos de coordenadas 3D são pequenas (normalmente menos de 1 segundo de arco) e certas aproximações são usadas para simplificar as matrizes de rotação envolvidas na transformação.

As transformações de Bursa-Wolf e Molodensky – Badekas são chamadas de similaridade ou transformações de sete-parâmetros e combinam uma mudança de escala, três rotações e mudança na origem (3 translações) em um modelo matemático prático das relações entre pontos em dois diferentes sistemas de coordenadas 3D (DEAKIN, 2006). Estes modelos são usados para efetuar a estimação de parâmetros de transformação e na transformação de coordenadas. A estimativa dos parâmetros de transformação requer uma amostra de vértices com coordenadas referidas a ambos os sistemas aos quais se pretende obter estes parâmetros.

3.8.1 Introdução

A Transformação de 7 Parâmetros é o modelo mais usado atualmente em Geodésia, que expressa a relação entre 2 sistemas de coordenadas por meio de 3 translações, 3 rotações e um fator de escala (Figura 3.22).

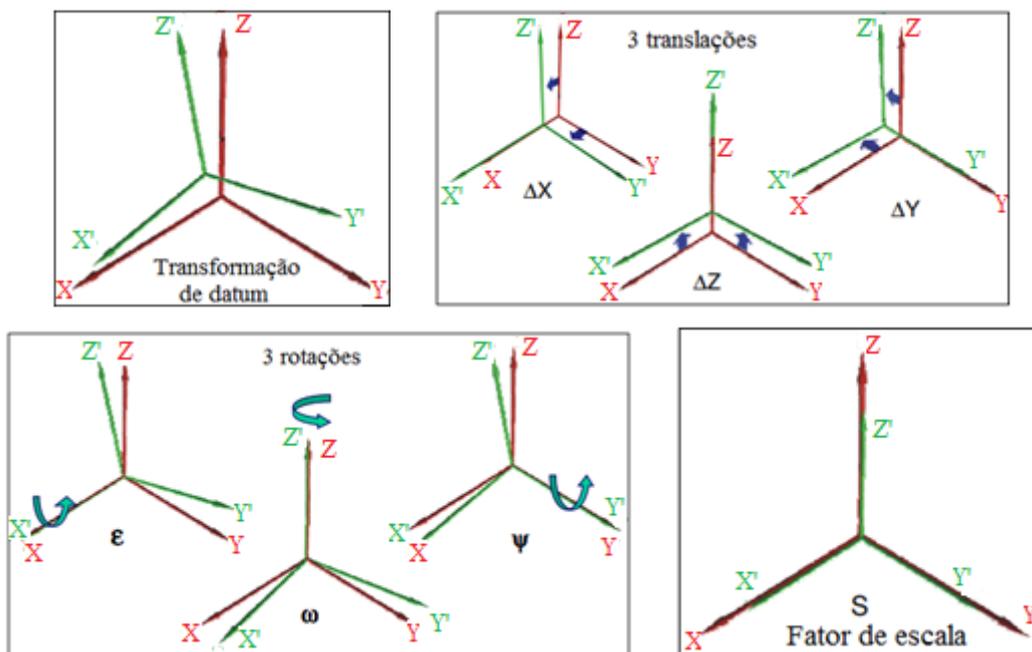


Figura 3.22: Transformação entre dois data e visualização dos 7 parâmetros. Fonte: Adaptado de Zinn,N. (2004)

Justifica-se as 3 translações pela origem distinta entre os sistemas geodésicos; as rotações expressam o fato de não haver paralelismo entre os eixos coordenados definidores dos dois sistemas e o fator de escala é requerido para homogeneizar os sistemas.

Bursa-Wolf é indicada para a transformação entre sistemas definidos a partir de satélites - *Satellite Derived Systems*, enquanto Molodensky-Badekas é mais adaptada à transformação entre um Datum derivado de observações espaciais e um Datum derivado de observações terrestres. As vantagens dos modelos de Bursa-Wolf e Molodensky-Badekas estão no fato de que são mantidas a exatidão das medições originais e podem ser utilizados sobre praticamente qualquer área, enquanto as coordenadas locais são precisas.

Conforme Zepeda (2006), o modelo Bursa-Wolf é uma transformação de Helmert no espaço 3D, linear e conforme, no qual as posições dos pontos e distâncias entre eles variam dependendo da forma da rede (definida pelos pontos) e os ângulos permanecem invariáveis. O modelo Bursa-Wolf (Bursa, 1962; Wolf, 1963) relaciona dois sistemas tridimensionais de coordenadas cartesianas, empregando 7 parâmetros de transformação: 3 translações, três rotações, e um fator de escala.

3.8.2 Os sete parâmetros de transformação

A transformação de coordenadas entre dois data, ambos orientados aleatoriamente, exigeo conhecimento de 7 quantidades:

a) 3 quantidades espaciais expressas por $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ (ou TX, TY, TZ), ou (X_0, Y_0, Z_0) , que correspondem às diferenças entre as respectivas coordenadas cartesianas dos centros dos elipsoides. Assim, são 3 translações oriundas da diferença na origem entre os 2 sistemas;

b) 3 ângulos de rotação $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ respectivamente (ou RX, RY, RZ), em torno do eixo xx, yy e zz, que são advindas da falta de paralelismo entre os eixos. Outras notações: (k, φ, ω) ;

c) um fator de escala relacionado com a forma dos dois elipsoides, designado por σ (ou k, ou L, ou s), normalmente expresso em ppm (partes por milhão) (ou até ppb). Este fator permite homogeneizar as relações métricas dos sistemas, que tem valor próximo da unidade.

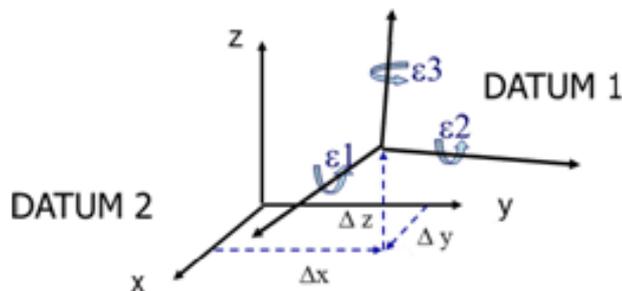


Figura 3.23: Transformação entre dois data: os sete parâmetros

3.8.3 A transformação Bursa-Wolf

Como já dito, o modelo Bursa-Wolf é um modelo de transformação de coordenadas tridimensionais conforme usado para transformações entre data que foram materializados com base em técnicas de posicionamento espacial (caso do SIRGAS2000).

Por uso de matrizes elementares de rotação, demonstra-se que a matriz resultante de uma rotação em torno dos três eixos pode ser escrita como:

$$R = R_3 \{ \varepsilon_3 \} R_2 \{ \varepsilon_2 \} R_1 \{ \varepsilon_1 \} , \text{ ou seja}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_2 \cos \varepsilon_3 & \cos \varepsilon_1 \sin \varepsilon_3 + \sin \varepsilon_1 \sin \varepsilon_2 \cos \varepsilon_3 & \sin \varepsilon_1 \sin \varepsilon_3 - \cos \varepsilon_1 \sin \varepsilon_2 \cos \varepsilon_3 \\ -\cos \varepsilon_2 \sin \varepsilon_3 & \cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_3 - \sin \varepsilon_1 \sin \varepsilon_2 \sin \varepsilon_3 & \sin \varepsilon_1 \cos \varepsilon_3 + \cos \varepsilon_1 \sin \varepsilon_2 \sin \varepsilon_3 \\ \sin \varepsilon_2 & -\sin \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2 & \cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Por outro lado, os ângulos de rotação ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) são da ordem de alguns segundos de arco (ou seja, muito menores que 1°, da ordem de 2" a 3" de arco). Nestas condições a matriz de rotação pode ser simplificada, com aproximações, considerando o $\sin x \sim x$ e $\cos x \sim 1$ (onde x está expresso em radianos), o que corresponde a preservar apenas os termos de primeira ordem (por exemplo $\sin x \times \sin x \sim 0$):

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_3 & -\varepsilon_2 \\ -\varepsilon_3 & 1 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & -\varepsilon_1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 & k & -\varphi \\ -k & 1 & \omega \\ \varphi & -\omega & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou ainda} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Considerando conhecidas as coordenadas cartesianas elipsoidais de um ponto num datum 1 (x, y, z), bem como os parâmetros de transformação entre este e um datum 2 (a saber $T_x, T_y, T_z, \varepsilon, \psi, \omega, d\sigma$), sendo T_x, T_y e T_z as translações, $d\sigma$ o fator de escala, com rotações ($\varepsilon, \psi, \omega$) positivas quando descritas no sentido retrógrado para um observador situado na origem do sistema X, e pretende-se obter as coordenadas desse ponto num datum 2 (u, v, w), demonstra-se:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} + (1 + d\sigma) \times \begin{bmatrix} 1 & \omega & -\psi \\ -\omega & 1 & \varepsilon \\ \psi & -\varepsilon & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Há duas convenções de sinal diferente dos membros não-diagonais da matriz na equação acima. Se estes sinais são usados como na equação acima, é chamado rotação do quadro de coordenadas (*coordinate frame rotation*), ou rotação da estrutura de coordenadas. Assim, os eixos coordenados são girados em torno do vetor de posição fixa (os valores das rotações são positivos no sentido horário, ao olhar para a origem dos sistemas X, Y, Z). Caso todos os sinais dos membros não-diagonais da matriz da expressão (3.40) forem invertidos, esta convenção é chamada rotação do vetor posição (*position vector rotation*), pois o vetor é girado no quadro de coordenadas fixo, ou seja, os parâmetros de rotação descrevem a rotação da posição do ponto em relação a um quadro de coordenadas fixo. Os valores de rotação são positivos na direção do sentido anti-horário (ao olhar para a origem dos sistemas X, Y, Z).

Não há um padrão na adoção das convenções: EUA, Canadá e Austrália usam a primeira opção, ao passo que a Europa usa *position vector rotation*. Deve-se estar atento aos softwares GIS empregados quanto aos países em que os mesmos foram desenvolvidos. Numa primeira opção recomenda-se *coordinate frame rotation*; se os resultados estiverem errados, trocam-se todos os sinais dos parâmetros de rotação. Assim, para usar parâmetros definidos para uma convenção de rotação na outra, basta alterar os sinais dos parâmetros de rotação, cuidando em ter a certeza da convenção para a qual um determinado conjunto de parâmetros é definido. Apenas os parâmetros não revelam qual convenção está sendo usada. A única maneira de determinar como os parâmetros são definidos é verificando um ponto de controle cujas coordenadas são conhecidas nos dois sistemas.

3.8.4 A transformação Molodensky-Badekas

O modelo Molodensky (1962) e Badekas (1969) relaciona sistemas tridimensionais de coordenadas cartesianas, semelhante à Bursa-Wolf, com 7 parâmetros, com a diferença de estimar as coordenadas de um ponto central (ponto fundamental ou centróide).

O Modelo Molodensky-Badekas é adequado para a transformação entre sistemas satélites e terrestres. A adoção de um centroide provoca a diminuição da forte correlação entre os parâmetros estimados, permitindo interpretar de forma mais realista a relação entre as precisão dos parâmetros e os resíduos das observações (ZEPEDA et al, 2015).

A transformação Molodensky-Badekas é uma variação da transformação de Helmert onde os termos rotacionais não são diretamente aplicados às coordenadas do ECEF (*Earth Centered Earth Fixed*), mas em coordenadas cartesianas relativas a um ponto de referência (geralmente perto da superfície da Terra, e à área de uso da transformação). Não deve ser confundida com a transformação de Molodensky convencional, a qual opera diretamente nas coordenadas geodésicas.

Na transformação Molodensky-Badekas, sendo fornecida a origem X, Y, Z do ponto de rotação, é possível calcular uma transformação de estrutura de coordenadas equivalente.

Neste método, a transformação é referida a uma origem local, que pode ser obtida através da coordenada média de todos os pontos comuns da rede. Comparando os modelos matemáticos das transformações Bursa-Wolf e Molodensky-Badekas, nota-se que são parecidos e conduzem a resultados semelhantes na obtenção das coordenadas (ZEPEDA et al, 2015).

$$\begin{bmatrix} X_{\text{novo}} \\ Y_{\text{novo}} \\ Z_{\text{novo}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} 1 & R_Z & -R_Y \\ -R_Z & 1 & R_X \\ R_Y & -R_X & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{\text{velho}} \\ Y_{\text{velho}} \\ Z_{\text{velho}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{\text{novo}} \\ Y_{\text{novo}} \\ Z_{\text{novo}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} 1 & R_Z & -R_Y \\ -R_Z & 1 & R_X \\ R_Y & -R_X & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{\text{velho}} \\ Y_{\text{velho}} \\ Z_{\text{velho}} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Notam-se os mesmos componentes nas equações: vetores de translação ($\Delta x, \Delta y, \Delta z$ para Bursa-Wolf e dX, dY, dZ para Molodensky-Badekas); a matriz 3x3 dos elementos de rotação (R_X, R_Y, R_Z) e o fator de escala. A componente adicional no modelo Molensky Badekas é a componente para a origem da rede (X_m, Y_m, Z_m).

É preciso cuidar para não confundir com as equações simplificadas ou reduzidas de Molodensky, que é o modelo mais utilizado na transformação de coordenadas geodésicas relativas a diferentes data geodésicos, uma vez que as coordenadas geodésicas elipsoidais de um ponto (ϕ, λ, h), relativas a um determinado Datum geodésico, podem ser relacionadas com as coordenadas geodésicas elipsoidais do ponto: ($\phi + \Delta\phi, \lambda + \Delta\lambda, h + \Delta h$), que são relativas a um segundo Datum geodésico.

A transformação Bursa-Wolf geralmente se adequa a redes grandes, uma vez que suas origens são globais. Já Molodensky-Badekas é uma transformação diferente, mais adequada para redes menores, onde suas origens são baseadas localmente.

3.8.5 Determinação dos 7 parâmetros de transformação

Para que os parâmetros de transformação sejam obtidos através dos modelos citados anteriormente, deve-se realizar um ajustamento. O Ajustamento de Observações é baseado em princípios estatísticos, visando à detecção de erros não aleatórios e avaliação de precisão para controle de qualidade. São vários os modelos para ajustamento de observações geodésicas. Será apresentado o método paramétrico, também conhecido como método das observações indiretas. A estimação dos parâmetros é feita com base no ajustamento pelo Método dos Mínimos

Quadrados – MMQ e utilização do método paramétrico $L_a = F(X_a)$, no qual as observações l_i são expressas em função dos parâmetros x . O índice a é para ajustado.

a) Sendo conhecidas as coordenadas cartesianas de um ponto em dois data diferentes, pretende-se determinar os parâmetros de transformação. Pela análise do sistema da equação (3.28), constata-se que o problema é impossível, pois há três equações e sete incógnitas;

b) Como cada ponto corresponde um terno de coordenadas, são necessários 3 pontos e portanto, 9 coordenadas para que o sistema resultante seja resolvido (7 incógnitas). Dispondo 3 pontos com coordenadas geodésicas retangulares relativas a dois data geodésicos conhecidas, a pode-se constituir um sistema de equações lineares (equações de observação):

$$\begin{aligned}
 X1d\sigma + Y1 \omega - Z1\psi + TX &= U1 - X1 \\
 Y1d\sigma - X1 \omega + Z1 \varepsilon + TY &= V1 - Y1 \\
 Z1d\sigma + X1 \psi - Y1 \varepsilon + TZ &= W1 - Z1 \\
 X2d\sigma + Y2 \omega - Z2\psi + TX &= U2 - X2 \\
 Y2d\sigma - X2 \omega + Z2 \varepsilon + TY &= V2 - Y2 \\
 Z2d\sigma + X2 \psi - Y2 \varepsilon + TZ &= W2 - Z2 \\
 X3d\sigma + Y3 \omega - Z3\psi + TX &= U3 - X3 \\
 Y3d\sigma - X3 \omega + Z3 \varepsilon + TY &= V3 - Y3 \\
 Z3d\sigma + X3 \psi - Y3 \varepsilon + TZ &= W3 - Z3
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

c) Demonstra-se que o sistema de nove equações a sete incógnitas pode ser escrito na forma matricial da seguinte maneira (cada coluna de elementos da matriz A é obtido em relação à derivada parcial de cada equação em relação ao parâmetro especificado, por ex: $\partial\sigma$, $\partial\varepsilon$, $\partial\psi$, etc., conforme indicado na matriz A da equação (3.31) para facilitar a compreensão):

$$\begin{matrix}
 \partial\sigma & \partial\varepsilon & \partial\psi & \partial\omega & \partial T_x & \partial T_y & \partial T_z \\
 \begin{bmatrix}
 x1 & 0 & -z1 & y1 & 1 & 0 & 0 \\
 y1 & z1 & 0 & -x1 & 0 & 1 & 0 \\
 z1 & -y1 & x1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 x2 & 0 & -z2 & y2 & 1 & 0 & 0 \\
 y2 & z2 & 0 & -x2 & 0 & 1 & 0 \\
 z2 & -y2 & x2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 x3 & 0 & -z3 & y3 & 1 & 0 & 0 \\
 y3 & z3 & 0 & -x3 & 0 & 1 & 0 \\
 z3 & -y3 & x3 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \end{matrix}
 \times
 \begin{bmatrix}
 d\sigma \\
 \varepsilon \\
 \psi \\
 \omega \\
 T_x \\
 T_y \\
 T_z
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 u1 - x1 \\
 v1 - y1 \\
 w1 - z1 \\
 u2 - x2 \\
 v2 - y2 \\
 w2 - z2 \\
 u3 - x3 \\
 v3 - y3 \\
 w3 - z3
 \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

4. O sistema ainda é indeterminado: 9 equações para 7 incógnitas. A sua resolução pode ser feita recorrendo ao método dos mínimos quadrados.

5. Assumindo que há um sistema de equações escrito na forma matricial como $Ax = b$ (com x e b , vetores coluna, e A matriz dos coeficientes):

A solução x pode ser determinada (pelo método dos mínimos quadrados) como:

$X = (A^T A)^{-1} A^T P b$ $P = I$ (matriz dos pesos igual à matriz Identidade) e A^T é a matriz transposta de A .

Por outro lado o resíduo final, r , pode ser calculado como: $|R| = |b - Ax|$.

Considerações Finais: A literatura tem apontado a transformação Bursa-Wolf como a mais indicada para o processo de migração para um datum geocêntrico. Fernandes & Rösch, (2008), fizeram uma comparação entre os resultados obtidos na transformação de data

empregando o modelo de Bursa-Wolf e Molodensky simplificado (3 parâmetros: $\Delta\phi, \Delta\lambda, \Delta h$). Verificaram que as áreas permaneceram mais próximas da área na carta original em SAD69 quando se usou o modelo de transformação Bursa-Wolf, mesmo que ambos os modelos de transformação sejam conformes. O uso do modelo Bursa-Wolf teve uma alteração em 0,06% nas áreas, contra 0,32% no modelo Molodensky Simplificado. Os autores lembram que no caso de georreferenciamento de imóveis e seu registro conforme suas coordenadas, ou até mesmo na atualização de bancos de dados dos imóveis para cálculo do IPTU, o uso de uma transformação de datum e uma possível correção deste registro poderia acarretar erros em área do imóvel.

Fernandes & Nogueira (2010) também efetuaram testes de aplicação de modelos matemáticos distintos para transformação de referenciais geodésicos e constataram que “apesar da indicação do modelo Molodensky Simplificado na Resolução n.º.23 de fevereiro de 1989, o modelo de Bursa Wolf apresentou os menores resíduos na determinação dos parâmetros, contribuindo para as menores divergências, principalmente no que se refere à alteração da forma das feições analisadas”. Alertam que duas bases cartográficas possam estar referenciadas num mesmo sistema, mas sendo oriundas de transformações com modelos matemáticos diferentes, podendo ter grandes discrepâncias em produtos em escalas grandes. Dessa forma, mesmo com emprego de SIG's e CAD's, as transformações entre referenciais geodésicos devem ser feitas por um especialista, haja vista que usar diferentes procedimentos de transformação ocasiona diferenças nos valores de coordenadas transformadas, cujas consequências são notadas na junção de dados de fontes variadas, ou representação distinta de uma mesma feição.

As vantagens da adoção do SIRGAS2000 em relação aos demais sistemas de referência já usados é que se adotando o referencial geocêntrico, é possível fazer uso direto da tecnologia de GPS (*Global Positioning System*), uma importante ferramenta para a atualização de mapas, controle de frota de empresas transportadoras, navegação aérea, marítima e terrestre em tempo real. O SIRGAS2000 permite maior precisão no mapeamento do território brasileiro e na demarcação de suas fronteiras. Além disso, a adoção desse novo sistema pela América Latina contribui para o fim de uma série de problemas originados na discrepância entre as coordenadas geodésicas apresentadas pelo sistema GPS e aquelas obtidas dos mapas utilizados atualmente no continente. Com a adoção do referencial geocêntrico, as coordenadas da informação geográfica são alteradas, sendo que nos mapas de escalas maiores, como folhas topográficas e mapeamento cadastral, a diferença nas coordenadas será relevante; já para mapas de escala muito pequena (ex. 1:500.000), a mudança não será perceptível. Os programas TCGEO ou ProGrid disponíveis no site do IBGE, auxiliam na conversão para SIRGAS2000 (IBGE, 2014).

Dalazoana & Freitas (2002) desenvolveram estudos que apontaram que os parâmetros oficiais de transformação de Córrego Alegre a SAD 69 (realização inicial) podem ser usados na integração Córrego Alegre–SAD 69, em escalas menores ou iguais a 1:100.000, sem prejuízos nem problemas sensíveis aos usuários. Para escalas maiores, nota-se que a não homogeneidade da rede indica que os parâmetros existentes não conseguem modelar eficazmente a variação de coordenadas em diferentes regiões do país. Outro exemplo concerne à variação de coordenadas entre SAD 69 (realização inicial) e SAD 69 (realização 1996), para a rede clássica, que assume amplitudes sistemáticas em relação ao vértice Chuá. No estado do Paraná de cerca de 10 m, significativas em escalas maiores ou iguais a 1:50.000 (a nível de Brasil pode chegar até 45 m).

3.9 Variação temporal das coordenadas

No estudo da variação temporal das coordenadas considera-se uma época de referência.

De acordo com a teoria da Tectônica de Placas, a litosfera (camada mais superficial da Terra) é composta pela crosta terrestre e por placas rígidas que flutuam sobre o manto

fluido e viscoso situado abaixo da crosta. Como as placas litosféricas estão em constante movimento, o mesmo ocorre sobre os continentes que estão sobre estas placas. Face ao exposto, as coordenadas geodésicas dos pontos que estão situados sobre a superfície terrestre mudam ao longo do tempo, sendo dependentes da época em que foram obtidas. Caso estes movimentos sejam conhecidos, podem-se estimar as variações nas coordenadas em função do tempo. Para isso há vários modelos disponíveis que permitem a estimação dos movimentos das placas litosféricas.

Para o cálculo de coordenadas num mesmo referencial em épocas distintas faz-se:

- transformação das coordenadas das estações de referência da época de definição (t_0) até a época atual (do posicionamento) (t_k);
- processamento com o cálculo das novas coordenadas;
- transformação das coordenadas para a época (t_0).

Há modelos geofísicos que descrevem a cinemática das placas através de observações geofísicas (sismologia, velocidade de expansão do fundo oceânico, azimuth das falhas oceânicas); mas que não são muito confiáveis devido sua má distribuição espacial, estar referido ao limite da placa e à escala de tempo geológico (Ex. Nuvel1). Já os modelos geodésicos são obtidos a partir de posicionamento geodésico GNSS em duas épocas distintas (ou continuamente). São exemplos o campo de velocidade do ITRF2008, o VEMOS2009, VEMOS2015 etc. (CAGIDO & DALAZOANA, 2016).

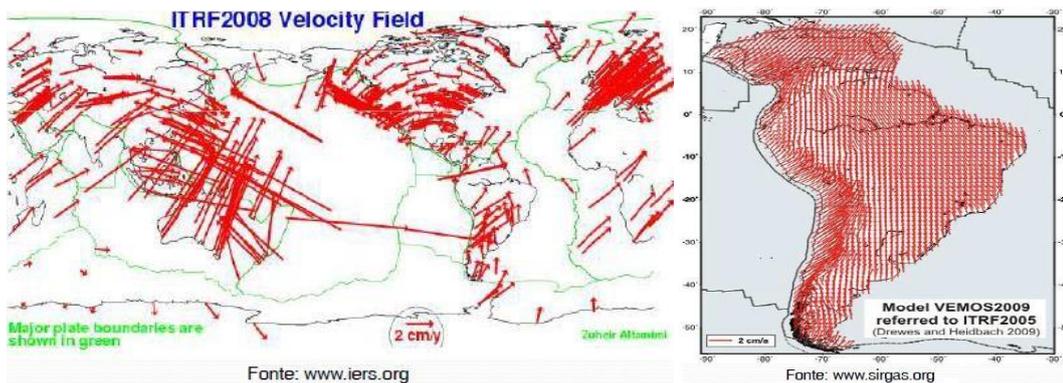


Figura 3.24 – Modelos de velocidades

Na Austrália os movimentos tectônicos da placa indo-australiana promovem um deslocamento de cerca de 7cm a noroeste todos os anos. Isto faz com que seja necessária a atualização dos mapas periodicamente, tendo o governo australiano investido mais de US\$225 milhões neste processo. Os estados de NSW (*New South Wales*) e Victoria (localizados no sudeste do país) atualizaram suas estradas, prédios e propriedades do estado para localizá-las corretamente. A última vez em que isso foi feito foi em 1994, havendo um deslocamento de 1,8 m em 26 anos.

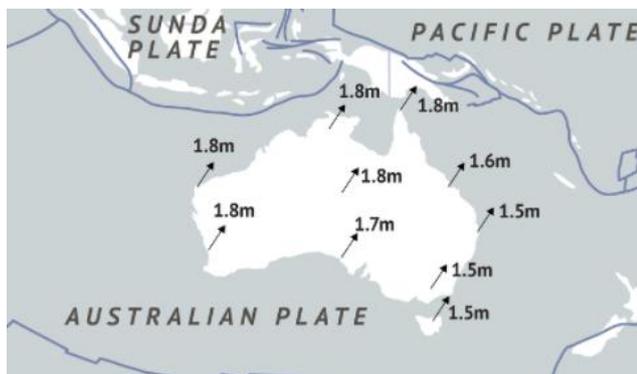


Figura 3.25 – Deslocamentos na Austrália

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

ABBEY, D.A., FEATHERSTONE, E. E., Comparative Review of Molodensky-Badekas and Bursa-Wolf Methods for Coordinate Transformation. *Journal of Surveying Engineering*, vol. 146, issue 3, ago 2020. Disponível em:

<https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/%28ASCE%29SU.1943-54280000319>.

ALENCAR, J.C.M., IBGE, 2016. Datum altimétrico brasileiro. Separata de cadernos de Geociências n.5, RJ., 1990. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/artigos/1990-datum%20altimetrico%20brasileiro.pdf>. Acesso em Nov. 2016.

BLITZKOW, D., Matos, A.C. C., Gabriel do Nascimento Guimarães, G. N., Costa, S.M.A., **O Conceito atual dos Referenciais usados em Geodésia**, *Revista Brasileira de Cartografia*, 2011, n. 63, Edição Especial.

BURKHOLDER, E.F. em *The 3-D Global Spatial Data Model: Foundation of the Spatial Data Infrastructure*. CRC Press. Taylor & Francis Group. Florida. 2008. 364 p.

CAGIDO, A.C.F., DALAZOANA, R., Realização de sistemas geodésicos de referência modernos. UFPR. 2016. Disponível em: <http://www.cartografica.ufpr.br/home/wp-content/uploads/2011/10/Cap4-realizacao-de-referenciais-modernos.pdf>. Acesso em mar. 2017.

CASTANEDA, R.M., 1986. Ensaio para determinação de parâmetros de transformação entre o SAD-69 e NSW-92Z. 180f. Dissertação de mestrado, UFPR Disponível em ftp://geofp.ibge.gov.br/documentos/geodesia/sisref_2.pdf

CAZENAVE, A.; DOMINH, K.; GUINEHUT, S.; BERTHIER, E.; LOVEL, W.; RAMILLIEN, G.; ABLAIN, M.; LARNICOL, G.. **Sea level budget over 2003–2008: A reevaluation from GRACE space gravimetry, satellite altimetry and Argo**, *Global and Planetary Change*, Volume 65, Issues 1-2, pp. 83-88, 2009.

CHARLOT, P. et al., **The third realization of the International Celestial Reference Frame by very long baseline interferometry**. *astro-ph.GA, Astronomy & Astrophysics*. Vol 644. 2020. Disponível em: [The third realization of the International Celestial Reference Frame by very long baseline interferometry | Astronomy & Astrophysics \(A&A\) \(aanda.org\)](https://arxiv.org/abs/2008.00149)

COSTA, S.M.A., FORTES, L.P.S., Nova hierarquia da Rede Planimétrica do Sistema Geodésico Brasileiro, I Seminário sobre Referencial Geocêntrico do Brasil, Rio de Janeiro, 2000, Disponível em: https://geofp.ibge.gov.br/metodos_e_outros_documentos_de_referencia/outros_documentos_tecnicos/apresentacoes_artigos/2000/seminario_2000_hierarquia_d.pdf

DALAZOANA, R. & FREITAS, S.C., **Efeitos na Cartografia devido a Evolução do Sistema Geodésico Brasileiro e Adoção de um Referencial Geocêntrico**. *Revista Brasileira de Cartografia*, n.54,2002. Disponível em: <http://www.lsie.unb.br/rbc/index.php/rbc/article/view/190>.

DEAKIN, R.E. A note on the Bursa-Wolf and Molodensky-Badekas transformations, RMIT University, 2006. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/228757515_A_NOTE_ON_THE_BURSA-WOLF_AND_MOLODENSKY-BADEKAS_TRANSFORMATIONS/link/00b7d51d4a7fa63c22000000/download

DIN, A. H. Md., ZULKIFLI, N.A., HAMDEN, M.H., MAHMUD, M.R., XIAN, L.H., Geodetic Datum in Hydrographic Survey Practices: WGS84 versus ITRF. FIG e-working week, 2021. Disponível em: https://www.fig.net/resources/proceedings/fig_proceedings/fig2021/papers.

FERNANDES, V.O., NOGUEIRA, R. E., **Consequências da Mudança de Datum na Representação Cartográfica Direcionada para Ambiente SIG**. *Portal de Cartografia*. Londrina, v.3, n.1, 2010. <http://www.uel.br/revistas/uel/index.php/portalcartografia>

FERNANDES, V. O., ROSCH, N., Aplicação de Modelos de Transformações BURSA-WOLF e MOLODENSKY Simplificada na Transformação dos Sistemas SAD69 (1996) E SIRGAS2000, II Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação. Recife, 2008. Disponível em: https://www.ufpe.br/cgtg/SIMGEOII_CD/Organizado/geo/036.pdf

FREITAS, S. R. C.; LAZZAROTTO, D. R.; SLUTER, C. R.; LUZ, R. T. Avaliação da Compatibilidade dos Sistemas Geodésicos de Referência no Brasil. Boletim de Ciências Geodésicas. v10, nº.2, 2004.

GEMAEL, C., 1981. Referenciais Cartesianos Utilizados em Geodésia. Curitiba. Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. 1981.

GERALDES, D., Noções gerais de geodesia. Instituto Geográfico do Exército (2000).

HEINKELMANN, R., International Celestial Reference System and Frame (ICRS/ICRF), 2019. Disponível em: www.sirgas.org/fileadmin/docs/GGRF_Wksp/20_Heinkelmann_2019_ICRS-ICRF_overview.pdf. Workshop: Implementation of the Global Geodetic Reference Frame (GGRF) in Latin America, Argentina, Set 2019.

IBGE, 2014. Disponível em: <http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/pmrg/faq.shtm>.

IBGE, 2015. R.PR - 1/2005. Disponível em: https://geofpt.ibge.gov.br/metodos_e_outros_documentos_de_referencia/normas/rpr_01_25fev2005.pdf

IBGE, 2016. ftp://geofpt.ibge.gov.br/documentos/geodesia/sisref_2.pdf.

IBGE, 2016b. http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/rmpg/default_rmpg_int.shtm?c=10

IBGE, 2016c. O Mapa de Ondulação Geoidal do Brasil- v. 2015. Disponível em ftp://geofpt.ibge.gov.br/documentos/geodesia/rel_mapgeo2015.pdf. Acesso em abril/2016.

IBGE, 2017. Especificações e Normas para Levantamentos Geodésicos associados ao Sistema Geodésico Brasi-leiro. Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: http://geofpt.ibge.gov.br/metodos_e_outros_documentos_de_referencia/normas/rpr.pdf

IBGE, 2018. Informações Digitais de Dados Plani-altimétricos. Disponível em http://metadados.geo.ibge.gov.br/geonetwork_ibge/srv/por/metadata.show?id=22899&currTab=simple

IBGE, 2019. Reajustamento da Rede Altimétrica com Números Geopotenciais. 2ª edição. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/index.php/biblioteca-catalogo?id=2101666&view=detalhes>

IBGE, 2021. Modelo hgeoHNOR2020 para conversão de altitudes geométricas em altitudes normais. Série Relatórios Metodológicos v.47, Rio de Janeiro, 2021. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101841.pdf>

IERS-IUGG-IAU. IERS: **Missions and goals for 2000**. Observatoire de Paris. Paris, 27p, 1995.

IERS, 2016. Transformation between the International Terrestrial Reference System and the Geocentric Celestial Reference System . Acesso em março 2016. Disponível em: http://www.iers.org/SharedDocs/Publikationen/EN/IERS/Publications/tn/TechnNote36/tn36_043.pdf?__blob=publicationFile&v=1

IHDE, J.; Sanchez, L.; BARZAGHI, R.; DREWES, H.; FOERSTE, C.; GRUBER, T.; LIEBSCH, G.; MARTI, U.; PAIL, R.; SIDERIS, M., 2017. **Definition and Proposed Realization of the International Height Reference System (IHR)**. Surveys in Geophysics, v. 38, n. 3. Disponível em <<https://link.springer.com/article/10.1007/s10712-017-9409-3>>.

ITRF, 2016. Disponível em <http://itrf.ensg.ign.fr/>

- LUZ, R. T., Guimarães, V. M. (2001) Realidade e Perspectivas da Rede Altimétrica de Alta Precisão do Sistema Geodésico Brasileiro. II Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas, Curitiba.
- MALYS, S., Transformations to classical horizontal mapping datums, Rep.Tcheca, 2014. Disponível em:<http://www.gps.gov/multimedia/presentations/2014/11/ICG/malys.pdf>. Acesso em out/2016.
- MENZORI, M. Georreferenciamento – conceitos, 2017.
- MONICO, J.F.G., **Posicionamento pelo GNSS: descrição, fundamentos e aplicações**, 2007. Editora UNESP.
- MUNDOGEO, 2005. Disponível em: <http://mundogeo.com/blog/2005/06/29/infra-estrutura-geoespacialbrasileira-moderniza-se/>
- NGA, National Geospatial-Intelligence Agency, World Geodetic System – its definition and relationships with local geodetic systems. 2014. Disponível em: http://earth-info.nga.mil/GandG/publications/NGA_STND_0036_1_0_0_WGS84/NGA.STND.0036_1.0.0_WGS84.pdf
- OLIVEIRA, L. C. (1998). **Realizações do Sistema Geodésico Brasileiro associadas ao SAD-69** – Uma proposta metodológica de transformação. Tese de doutorado. Escola Politécnica da USP, Departamento de Engenharia de Transportes. São Paulo.
- PEREIRA, K.D., LOBIANCO, M.C.B, COSTA,S.M.A., 2004, Mudança do Referencial Geodésico no Brasil, Anais - I I Simpósio Regional de Geoprocessamento e Sensoriamento Remoto, Aracaju, SE, disponível em: <http://www.cpatc.embrapa.br/labgeo/srgsr2/pdfs/palestra10.pdf>
- SÁ, N. C., **Elementos de Geodesia**, Apostila, Departamento de Geofísica, Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas, Universidade de São Paulo. Disponível em: http://www.georeferencial.com.br/old/material_didatico/Apostila_Geodesia_Nelsi_Sa_USP.pdf
- SAMPAIO, A.C.F., SAMPAIO, A.A.M., Data Geodésicos Horizontais Brasileiros - Córrego Alegre e Chuá - suas existências e a necessidade de preservação como monumentos da cartografia histórica. 2013.
- SANCHEZ, L., Advances in the implementation of the International Height Reference System (IHRs). Boletim Informativo n. 22 do Simpósio SIRGAS 2017. Disponível em: http://www.sirgas.org/fileadmin/docs/Boletines/Bol22/Boletin_SIRGAS_22_2017.pdf
- SANCHEZ, L.; IHDE, J.; PAIL, R.; GRUBER, T.; BARZAGHI, R.; MARTI, U.; AGREN, J.; SIDERIS, M.;NOVAK, P. (2017). Towards a first realization of the International Height Reference System (IHRs). Apresentação na Assembleia Geral 2017 da União Europeia de Geociências. Disponível em: <https://ihrs.dgfi.tum.de/fileadmin/JWG_2015/Sanchez_et_al_Towards_a_IHRS_Realization_EGU2017.pdf>.
- SANCHEZ, L., Strategy for the establishment of the International Height Reference System (IHRs), Simposio SIRGAS2018, Disponível em: http://www.sirgas.org/fileadmin/docs/Boletines/Bol23/29_Sanchez_2018_IHRS_SIRGAS2018.pdf
- SIRGAS, 2018. http://www.sirgas.org/fileadmin/docs/SIRGAS_Estatuto_2011_pt.pdf
- SIRGAS, 2018b <http://www.sirgas.org/pt/sirgas-definition/> SIRGAS, 2018c http://www.sirgas.org/pt/organizacao/working_groups/sirgas-wgiii-vertical-datum/
- SIRGAS, 2021 <https://sirgas.ipgh.org/>
- SOUZA, S. F. de, Apostila de Geodésia I, UFRGS, 2004.

TAYLOR, C., High-accuracy Datum transformations. 2004. Disponível em:
<http://home.hiwaay.net/~taylorc/bookshelf/math-science/geodesy/datum/transform/high-accuracy/>.

VANICEK, P. and KRAKIWSKY, E., Geodesy the concepts. 2nd Edition, North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1986.

ZEPEDA, R., ORTIZ, D., OCARES, C. **Parámetros de transformación entre sistemas de referencia geodésicos y cartográficos para aplicaciones Del Ministerio de Bienes Nacionales**. In: IX Congreso Internacional de Ciencias de La Tierra. Santiago de Chile: 2006.

ZINN, N., Molodensky-Badekas: reducing the consequences of parametric correlation in the 7-parameter shift. Meeting of Americas Petroleum Survey Group, Texas, EUA, 2004.

WGS84, Fonte: <https://confluence.qps.nl/pages/viewpage.action?pageId=29855173>