A Matemática na Escola

NOVOS CONTEÚDOS, NOVAS ABORDAGENS

Elisabete Zardo Búrigo
Maria Alice Gravina
Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Vera Clotilde Vanzetto Garcia
Organizadores

EAD
SÉRIE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

UFRGS SEAD Educação a Distância

UFRGS EDITORA

A Matemática na Escola

CAPES
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
UFRGS SEAD Educação a Distância
INSTITUTO DE MATEMÁTICA UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA UFRGS ppgemat
UFRGS EDITORA

A Matemática na Escola
NOVOS CONTEÚDOS, NOVAS ABORDAGENS

Elisabete Zardo Búrigo
Maria Alice Gravina
Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Vera Clotilde Vanzetto Garcia
Organizadores

EAD
SÉRIE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

UFRGS
EDITORA

UFRGS
SEAD
Educação a Distância

1ª edição: 2012
Direitos reservados desta edição:
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Capa e projeto gráfico: Carla M. Luzzatto
Revisão: Zuleica Oprach de Souza
Editoração eletrônica: Rafael Marczal de Lima

Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS
Coordenador: Luis Alberto Segovia Gonzalez

Apoio em Publicações da Secretaria de Educação a Distância
Apoio operacional: Deise Mazzarella Goulart
Laura Wunsch
Marleni Nascimento Matte
Michelle Donizeth Euzébio

Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática
Diretor do Instituto de Matemática: Rudnei Dias da Cunha
Coordenadora do Curso: Maria Alice Gravina
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática: Marcus Vinicius de Azevedo Basso

---

M425 A Matemática na escola: novos conteúdos, novas abordagens / organizadoras Elisabete Zardo Búrigo ... [et al.]. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012.
304 p. : il. ; 17,5x25cm

(Série Educação A Distância)

Inclui figuras e quadros.

Inclui referências.

1.Matemática. 2. Matemática – Ensino fundamental – Novas abordagens. 3. Matemática – Ensino Médio – Novas abordagens. 3. Matemática – Ensino Médio – Novos conteúdos. 4. Matemática – Formação de professores – Mudanças curriculares - Escola. I. Búrigo, Elisabete Zardo. II. Universidade Aberta do Brasil. III. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Secretaria de Educação a Distância. Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural. IV. Série

CDU 51

CIP-Brasil. Dados Internacionais de Catalogação na Publicação.
(Jaqueline Trombin – Bibliotecária responsável CRB10/979)

ISBN 978-85-386-0158-6

GEOMETRIA VETORIAL NO ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Pedro Sica Carneiro
Maria Alice Gravina

1 INTRODUÇÃO

Na escola, as aproximações entre álgebra e geometria acontecem, especialmente, quando trabalhamos com geometria analítica, já que as retas e círculos da geometria euclidiana passam a serem vistos como conjuntos de pontos P = (x, y) no plano cartesiano satisfazendo, respectivamente, as equações $ax + by = c$ e $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Em outros tópicos do programa escolar essas aproximações também poderiam estar mais presentes e, dentre eles, destacamos aquele que trata da resolução de sistemas lineares com duas ou três variáveis.

A resolução dos sistemas de equações com duas variáveis (equações do tipo $ax + by = c$) pode ser discutida nos contextos geométrico e algébrico, estabelecendo-se relações entre a existência de solução do sistema e a posição relativa de retas. Por exemplo, o caso em que o sistema tem uma única solução corresponde a duas retas que se interseccionam em um único ponto. Já o estudo dos sistemas de três equações com três variáveis (equações do tipo $ax + by + cz = d$), em geral, na escola, fica restrito a manipulações algébricas com equações, matrizes e determinantes, nisso fazendo-se uso de regras desprovidas de explicações.

Na "regra de Cramer", os alunos fazem cálculos com determinantes, mas não entendem porque os cálculos levam à solução do sistema. Já no método do escalonamento, que tem como propósito transformar o sistema em outro equivalente mais simples, as manipulações algébricas são mais compreensíveis. Mas, mesmo nesse método, os possíveis tipos de conjuntos-solução do sistema ainda se apresentam de difícil compreensão para os alunos. A solução desse tipo de sistemas poderia ser mais clara se os conjuntos fossem interpretados geometricamente.

Essa interpretação pode ser introduzida na Matemática escolar por meio dos conceitos de vetores e operações, como veremos na proposta que foi concebida, implementada e avaliada e que se constituiu em dissertação de Mestrado apresentada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da UFRGS[100]. No que segue vamos tratar de responder à pergunta.

---

100 A dissertação, com título *Geometria vetorial na escola: uma leitura geométrica para sistemas de equações* , é de autoria de Pedro Sicca Carneiro, realizada sob a orientação de Maria Alice Gravina, e foi defendida em 2008. O texto, na íntegra, está disponível na Biblioteca Virtual da UFRGS, em: <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/13337> . Acesso em: 12 jul. 2011

2 APROXIMAÇÕES ENTRE ÁLGEBRA E GEOMETRIA

Na escola, em diversos momentos, podemos observar a ênfase que é dada aos raciocínios de natureza algébrica, com pouca associação a idéias geométricas. Por exemplo: no estudo de funções, o gráfico da função quadrática é simplesmente chamado de "parábola", sem maiores explicações quanto à razão e à propriedade que justifica o uso desse nome[101]. Outra situação: números complexos e operações, em geral, são apresentados na forma de exercícios de manipulações algébricas, sendo pequena a ênfase nas interpretações geométricas que podem ser associadas às operações. E mesmo no ensino da geometria analítica, nem sempre são apresentadas as deduções da equação da reta e do círculo por meio do raciocínio geométrico. Enfim, na escola, poucas são as aproximações entre álgebra e geometria.

É interessante observar que, segundo Charbonneau (1996), a álgebra muitas vezes é vista como um produto da evolução da aritmética, porém na história da Matemática vemos que a geometria teve um importante papel na evolução da álgebra. No livro II dos "Elementos de Euclides"[102], muitas das proposições trazem provas geométricas de identidades algébricas, sendo que a ideia central é sempre olhar para a área de uma mesma figura de duas formas distintas: por um lado, olhamos para a área da figura como um todo e, por outro lado, a sua área é vista como a soma de áreas de figuras que fazem a sua composição. A título de exemplo trazemos, desse livro, a Proposição IV, acompanhada de desenho a seguir (Figura 117):

> PROP. IV. TEOR.
> Se uma reta for cortada em duas partes quaisquer, será o quadrado da toda igual aos quadrados das partes, juntamente com o retângulo das mesmas partes, tomado duas vezes (COMMANDINO, 1944, p. 32).

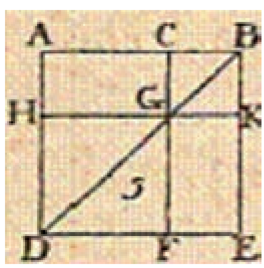


Figura 117 – Proposição IV
Fonte: Commandino (1944, p. 32)

---

101 A parábola, sob o ponto de vista geométrico, é o conjunto de pontos do plano que se mantém equidistantes de uma dada reta e um dado ponto, fixos.

102 Para as transcrições dos "Elementos de Euclides", feitas nesta seção, estamos usando como referência a obra *Euclides – Elementos de Geometria*, versão latina de Frederico Commandino, publicada por Edições Cultura, em 1944, disponível em formato digital em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/be00001a.pdf>. Acesso em: 12 jul. 2011

Essa proposição, em linguagem matemática atual, teria a seguinte redação: se um segmento é dividido em duas partes quaisquer, a área do quadrado sobre o segmento todo será igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre cada uma das partes e das áreas dos dois retângulos construídos sobre as duas partes. Isso corresponde à propriedade algébrica conhecida, na escola, como “produto notável”, ou seja, $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Ainda, segundo Charbonneau (1996), até a metade do Século XIX, os “Elementos de Euclides” foram considerados como um modelo teórico da Matemática que pode ser uma das razões pela qual a geometria foi usada muitas vezes para resolver problemas de natureza algébrica. É o caso da resolução da equação $x^2 + 10x = 39$, apresentada pelo astrônomo e matemático Al-Khowarizmi[103] (780-850 a.C.) e na qual ele faz uso de igualdade de áreas: o primeiro membro da igualdade representa a soma da área de um quadrado de lado x com a área de retângulo valendo área $10x$; o segundo membro, o número 39, é tomado como a área de um retângulo.

Segundo Boyer (1974), na obra *Ars Magna* de Cardano, que viveu no período 1501-1576), também são apresentadas resoluções das equações cúbicas e quárticas, com esse mesmo espírito geométrico. Nessas resoluções é muito tênue a presença das manipulações algébricas, e isso nos mostra o quanto as equações, na história da Matemática, começaram a ser resolvidas com uma forte interpretação geométrica. E Boyer também registra que é Viète (1540-1603) o primeiro matemático que começa a distinguir claramente a álgebra da geometria e da aritmética. Sobre a sua obra *Introdução à Arte Analítica,* comenta Boyer (1974, p. 271):

> É sem dúvida a primeira vez na história da Matemática que vemos em ação um tratamento algébrico puramente literal de um problema matemático. Isto é, dispomos de fórmulas que podem se aplicar a qualquer problema numérico. É assim que Viète propõe ao final de cada um de seus problemas uma aplicação numérica. Talvez para mostrar aos céticos que seu método é bom.

No entanto, Descartes (1596-1650) , ainda segundo Boyer (1975), é o nome associado à introdução da álgebra na geometria, com o trabalho apresentado em *A Geometria*, um dos três apêndices de sua obra *Discurso do Método*. O objetivo de Descartes era duplo: por meio de processos algébricos ele queria libertar a geometria de figuras, que segundo ele fatigavam a imaginação desnecessariamente; e também queria ele dar significado às operações da álgebra por meio de interpretação geométrica, ao considerá-la uma arte confusa e obscura que embaraçava a mente.

103 Detalhes da resolução podem ser consultados em Charbonneau (1996, p. 26).

Quanto ao conceito de vetor – nosso objeto de discussão, no que segue – é interessante saber que sua origem está no século XVII e, que, nessa época, surpreendeu por integrar os aspectos: algébrico e geométrico. Segundo Crowe (1967), a adição de vetores, cujos primeiros indícios apareciam na Grécia antiga, já era utilizada para a soma de velocidades e forças na Física nos séculos XVI e XVII. Entretanto, até o final do século XIX não havia nenhuma teoria ou conjunto de regras bem definidas que pudéssemos chamar de álgebra linear.

Importantes idéias conduziram à construção da análise vetorial, dentre elas, destacamos a apresentada por Leibniz (1646-1716), em uma carta a Huygens (1629-1695)[104], conforme registrado em Crowe (1967):

> Eu descobri certos elementos com uma nova característica inteiramente diferente da álgebra e que terá grandes vantagens em representação para a mente, exatamente e de uma maneira acreditável por sua natureza, mesmo sem figuras tudo dependerá de um senso de percepção. Álgebra é a característica para números indeterminados ou magnitudes somente, mas, não expressa posição, ângulos ou direção de movimento. Portanto é difícil analisar as propriedades de uma figura pelo cálculo, e é ainda mais difícil conseguir construções e demonstrações geométricas convenientes, mesmo quando o cálculo algébrico está completo. Mas, esta nova característica, que segue figuras visuais, não pode falhar em dar a solução, a construção geométrica e a demonstração, tudo ao mesmo tempo, e de um modo natural em uma análise.

Embora os detalhes de sua idéia nunca tenham sido totalmente trabalhados, Leibniz se tornou o precursor da primeira análise vetorial – uma nova maneira de representar entidades geométricas por meio da álgebra.

Nesta seção, procuramos ilustrar como o nascimento do pensamento algébrico está fortemente vinculado à geometria. Com a evolução da Matemática, a álgebra passou a ser uma área de conhecimento independente da geometria. Estruturas teóricas (grupos, anéis, corpos entre outras) foram desenvolvidas e nelas têm-se, nos dias de hoje, interrogações de pesquisa de natureza puramente algébrica.

No entanto, na Matemática escolar, sempre que possível, deveriam ser colocados em estreita relação conteúdos de álgebra e geometria, pois isso contribui para a construção de conhecimento mais pleno de significado por parte do aluno. Segundo Douady e Parsysz (1998), a geometria permite que os alunos adentrem no problema com algumas ideias, vindas de percepções visuais ou da familiaridade com o ambiente

104 Na transcrição dos trechos da carta de Leibniz, estamos tomando como referência CROWE, M. *A history of Vector Analysis.* London: University of Notre Dame Press, 1967.

em que vivem; já a álgebra fornece ferramentas que ajudam a avançar nos aspectos que são mais complicados de tratar no contexto puramente geométrico[105].

3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES SOB INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

É com a introdução da geometria vetorial na escola que podemos interpretar geometricamente a resolução de sistemas de equações com três variáveis.

Inicialmente, vamos fazer essa interpretação para sistemas de equações com duas variáveis. Para isso, precisamos apresentar uma nova interpretação geométrica para a equação $a.x + b.y = c$, que já sabemos ser a de uma reta r no plano.

Se $\vec{n}$ é vetor com coordenadas (a, b) e P_o é ponto com coordenadas (x_o, y_o), então temos que o ponto $P = (x, y)$ pertence à reta que é perpendicular à direção dada pelo vetor $\vec{n}$, passando pelo ponto P_o, se e somente se o vetor determinado pela seta é ortogonal ao vetor $\vec{n}$, conforme indica a Figura 118.

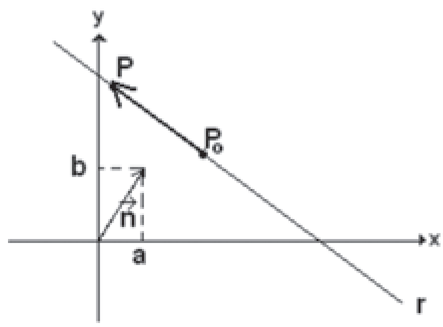


Figura 118 – Reta
Fonte: Carneiro(2008)

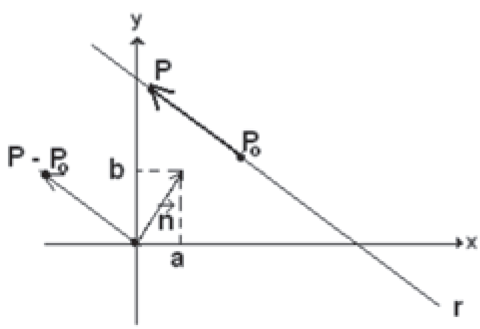


Figura 119 – Vetores na equação da reta
Fonte: Carneiro(2008)

105 Um exemplo que ilustra muito bem a ideia mencionada é o problema de encontrar uma reta tangente ao gráfico de $y = x^3$ na origem. Geometricamente, os alunos acreditam que a reta não existe, pois imaginam que ela não possa interceptar a curva. No entanto, eles conseguem avançar quando lançam mão de ferramentas algébricas calculando a inclinação da reta por meio da derivada.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo determinado pelos vetores $\vec{n}$ e $\overrightarrow{P_oP}$, conforme a Figura 119, usando $(a,\ b)$ e $(x - x_o\ ,\ y - y_o)$ como as correspondentes coordenadas, obtemos[106]: $a\,.(x - x_o) + b\,.(y - y_o) = 0$ e, portanto, $a.x + b.y = a.x_o + b.y_o$.

Esta última equação é idêntica à equação $a\ .\ x + b\ .\ y = c$, conhecida como equação geral de uma reta r, bastando para isso tomar $c = a\ .\ x_o + b\ .\ y_o$. De acordo com a explicação dada anteriormente, temos agora uma nova interpretação para os coeficientes dos termos x e y da equação geral: eles são as coordenadas do vetor $\vec{n}$ que é ortogonal a esta reta r. Esse vetor $\vec{n} = (a\ ,\ b)$ é dito vetor normal à reta r.

Com esse conceito de vetor normal à reta, podemos determinar, sem cálculos, se um sistema de duas equações tem ou não solução. A título de exemplo, trazemos dois sistemas:

$$\begin{aligned} 2\ .\ x + 3\ .\ y &= 5 \\ x - 2\ .\ y &= 1 \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} 2\ .\ x + 4\ .\ y &= 5 \\ -x - 2.\ y &= 3 \end{aligned} \qquad (2)$$

No sistema (1), os vetores normais às duas retas têm, respectivamente, coordenadas (2, 3) e (1, -2). Na representação dada na Figura 120, temos feixes de retas perpendiculares ao vetor (2, 3) e feixe de retas perpendiculares ao vetor (1, -2), e vemos então que as duas retas em questão (com destaque em negrito) se interseccionam em um único ponto, o que significa que o sistema tem uma única solução.

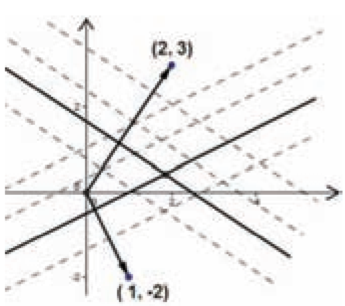


Figura 120 – Intersecção de retas
Fonte: Os autores

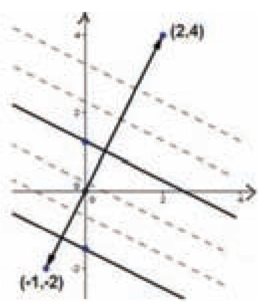


Figura 121 – Retas paralelas
Fonte: Os autores

106 A equação apresentada a seguir é resultado de manipulação algébrica aplicada à condição dada pelo teorema de Pitágoras, a saber: $|\overrightarrow{P_oP}|^2 + |\vec{n}|^2 = |\overrightarrow{P_oP} - \vec{n}|^2$.

Já no sistema (2), os vetores normais às retas têm a mesma direção (neste caso dizemos que um vetor é múltiplo do outro), e suas coordenadas são (2, 4) e (-1, -2), conforme ilustra a Figura 121. E como os termos correspondentes ao parâmetro *c*, nas duas retas, são distintos, concluímos que as retas são paralelas (com destaque em negrito) , o que significa que o sistema não tem solução.

Vemos assim que relações entre os vetores normais às retas informam sobre as soluções do sistema e, em resumo, as possibilidades são : se os vetores não são múltiplos um do outro, as retas se interseccionam em um único ponto, o qual corresponde à solução única do sistema; se os vetores são múltiplos um do outro, ou as retas são paralelas ou são coincidentes, o que corresponde às situações em que o sistema não tem solução ou tem infinitas soluções.

Para sistemas com três variáveis, é de forma análoga ao que foi feito no caso de sistema com duas variáveis, interpretamos geometricamente a equação $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$, conhecida como equação geral do plano.

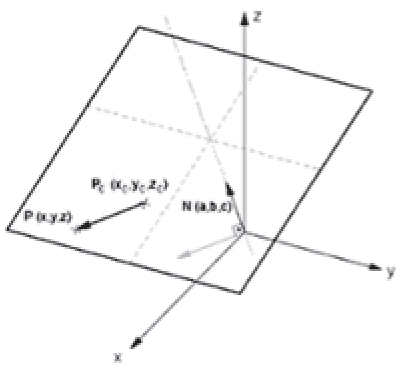


Figura 122 – Determinação do plano
Fonte: Carneiro (2008)

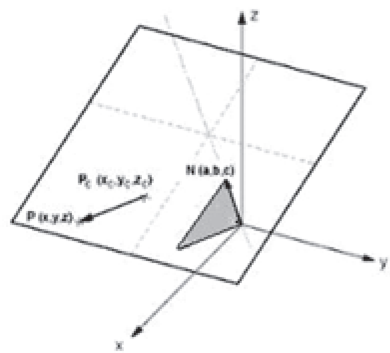


Figura 123 – Vetores na equação do plano
Fonte: Carneiro (2008)

Na Figura 122, temos o plano π que passa pelo ponto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ e que é ortogonal à direção dada pelo vetor $\vec{n} = (a, b, c)$. Como antes, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano π se e somente se o vetor $\overrightarrow{P_oP}$ é ortogonal ao vetor $\vec{n}$, e assim podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo cinza determinado pelos vetores $\vec{n}$ e $\overrightarrow{P_oP}$, destacado na Figura 123. Sendo (a, b, c) e $(x - x_o, y - y_o, z - z_o)$ as correspondentes coordenadas dos vetores, obtemos[107]:

$$a \cdot (x - x_o) + b \cdot (y - y_o) + c \cdot (z - z_o) = 0$$

e, portanto, $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$, com $d = a \cdot x_o + b \cdot y_o + c \cdot z_o$.

Com essa interpretação geométrica, podemos tornar claras as expressões *sistema determinado, sistema indeterminado, sistema impossível,* as quais sempre são motivo de muita confusão para os alunos quando estão aprendendo a resolver sistemas de três equações e três incógnitas. São as diferentes possibilidades de posições relativas dos três planos que informam as diferentes possibilidades de soluções do sistema 3 x 3 . Por exemplo, se os três planos se interceptam em um único ponto, temos o caso de sistema *determinado* e a solução do sistema é este único ponto de intersecção; se três planos se interceptam segundo uma reta, temos o caso de sistema *indeterminado* que tem como soluções as infinitas triplas (x, y, z) que correspondem a coordenadas de pontos que estão na reta de intersecção dos planos. O sistema é *impossível* quando a intersecção dos planos é um conjunto vazio, ou seja, não existe ponto $P = (x, y, z)$ que satisfaça, simultaneamente, as equações do sistema (por exemplo, a situação em que duas das equações correspondem a planos paralelos).

O entendimento geométrico da equação, $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$, além de esclarecer as diferentes possibilidades de solução para sistemas com três incógnitas, também permite decidir, rapidamente, quanto à existência ou não de solução, bastando para isso observar as coordenadas do vetor normal a cada um dos planos. A título de exemplo, trazemos um sistema de duas equações:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x + 3 \cdot y + 5 \cdot z &= 6 \qquad (3) \\ 2 \cdot x - 2 \cdot y + 3 \cdot z &= 4 \end{aligned}$$

Os vetores normais a cada um dos planos têm, respectivamente, as coordenadas (2, 3, 5) e (2, -2, 3) e, portanto, um não é vetor múltiplo do outro. Assim sendo, os planos perpendiculares às direções dadas pelos dois vetores não podem ser paralelos ou idênticos, ou seja, são planos que se interceptam e a intersecção somente pode ser uma reta ou seja, o sistema dado em (3) tem solução, e mais, as soluções são infinitas e correspondem aos pontos que estão na reta de intersecção.

Nos diferentes argumentos matemáticos desenvolvidos anteriormente temos, sempre, um ponto delicado que diz respeito à compreensão do conceito de vetor. É preciso desenvoltura com esse conceito, especialmente quanto: a) ao entendimento de que diferentes "setas" podem representar um mesmo vetor; e b) à notação (x, y) ou (x, y, z), que ora indica as coordenadas de um ponto no plano ou espaço, ora as coordenadas de um vetor. Essas ideias, a serem colocadas sob domínio dos alunos,

107 Como no caso da reta, a equação apresentada a seguir é resultado de manipulação algébrica aplicada à condição dada pelo Teorema de Pitágoras, a saber: $|\overrightarrow{P_oP}|^2 + |\vec{n}|^2 = |\overrightarrow{P_oP} - \vec{n}|^2$.

são ilustradas na Figura 124, em que temos duas setas representantes de um mesmo vetor, pois ambas guardam a mesma informação de direção, sentido e comprimento[108].

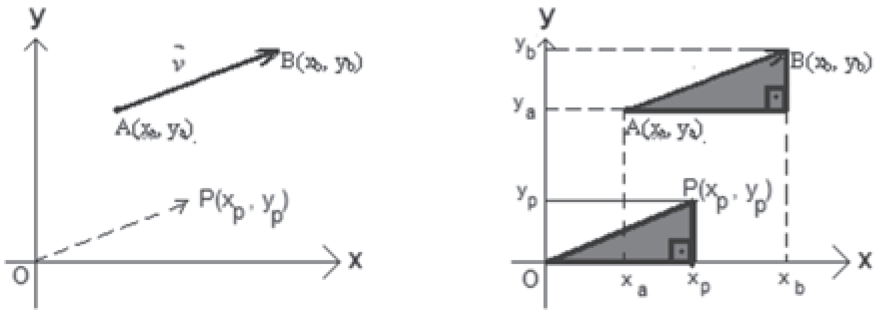


Figura 124 – Coordenadas de um vetor
Fonte: Carneiro(2008)

Qualquer uma das setas pode informar as coordenadas do vetor, pois na seta em destaque, basta fazer a diferença entre as coordenadas dos pontos A e B (as extremidades da seta). Essas mesmas coordenadas também podem ser obtidas por meio da seta representante que está na origem do sistema e, neste caso, as coordenadas são dadas, simplesmente, pelas coordenadas do ponto extremidade da seta.

É interessante também pensar nas coordenadas do vetor como informação de movimento: na coordenada x temos a informação de deslocamento horizontal (esquerda/direita, dependendo do sinal da coordenada x), e na coordenada y temos a informação de deslocamento vertical (para cima/para baixo, dependendo do sinal da coordenada y). Essa ideia de movimento realça o quanto as coordenadas de um vetor independem da seta representante que está sendo considerada.

Ainda sobre as dificuldades que se apresentam na aprendizagem do conceito de vetor, em Poynter e Tall (2005) temos exemplos que nos ajudam a entender os cuidados didáticos a serem tomados na introdução desse assunto**.** Na Figura 125, em (a), temos um dos exemplos: os alunos devem obter uma seta representante para o vetor resultante da uma soma de dois vetores, representados pelas duas setas. Como resposta, eles deveriam desenhar, uma seta equivalente a uma daquelas que já está na figura do problema e então marcar a seta representante da soma, indicada em negrito na Figura 125 (b). No entanto, uma resposta que os alunos apresentam é registrada na Figura 125 (c): desenham uma terceira seta, de modo a obter setas consecutivas, e então colocam em destaque aquela que correspondente ao vetor que é a soma de três vetores e não mais dos dois vetores indicados inicialmente. Isto mostra dificuldades dos alunos para trabalharem com setas que são representantes de um mesmo vetor.

108 Uma definição cuidadosa de vetor depende do conceito de relação de equivalência, definido no conjunto de todos os segmentos orientados AB. A relação identifica dois segmentos orientados AB e CD, se o ponto médio de AD também é ponto médio de BC. Define-se um vetor como sendo uma classe de equivalência dessa relação e um elemento da classe é dito "seta representante do vetor".

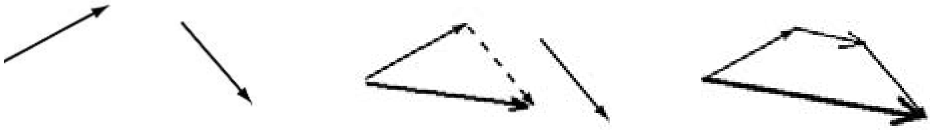


Figura 125 – Dificuldades dos alunos
Fonte: Carneiro (2008)

Segundo Poynter e Tall (2005), para que os alunos compreendam o conceito de vetor como conjunto de setas equivalentes, a transformação translação pode ser bastante adequada. Porém, é importante que o foco não esteja na definição formal da translação, mas sim no efeito físico do movimento. No momento em que tal efeito é entendido, a translação pode ser representada por uma seta que informa a direção, o sentido e a quantidade de deslocamento, escolhida dentre um conjunto infinito de possibilidades de setas. Os autores afirmam que:

> Uma possível solução seria tentar construir o essencial significado matemático de "vetor-livre"[109] e então aplicá-lo à adição de vetores em diferentes contextos, de forma que as leis do paralelogramo e do triângulo e a adição de componentes de vetores sejam todas vistas como diferentes aspectos do mesmo conceito. (POYNTER; TALL, 2005, p. 132).

Quanto à nossa proposta de ensino[110]: tendo em vista as dificuldades de aprendizagem registradas sobre o domínio do conceito de vetor e o nosso propósito de aproximar os aspectos geométricos e algébricos, desenvolvemos uma sequência de atividades com uma parte inicial tratando do conceito geométrico de vetor, da operação de soma de vetores e da operação de multiplicação de vetor por escalar. Ao longo das atividades, os alunos foram provocados tanto no entendimento de que "um vetor é uma coleção de setas com mesma direção, sentido e comprimento", quanto na desenvoltura para operar geometricamente com as setas, de forma a obter representantes de cada vetor resultante de soma de vetores ou de multiplicação de vetor por escalar. Pressupondo o domínio desses conteúdos, prosseguimos com a segunda parte da sequência de atividades, então, visando à introdução das

109 "Vetor-livre" tem o mesmo sentido de "seta representante de um vetor".

110 Em Carneiro (2008) há, no Capítulo 3, o desenvolvimento dos conteúdos relativo a vetores, operações, equações da reta e do plano. No Capítulo 5 é apresentada uma proposta de sequência didática que inicia com o conceito de vetor e finaliza com a dedução da equação do plano.

coordenadas de um vetor e das operações com vetores, agora sob um ponto de vista algébrico. Assim foram constituídos os pré-requisitos para o entendimento da equação do plano.

É importante destacar uma preocupação que sempre acompanhou a concepção da sequência de atividades: a questão da demonstração. Mesmo sem serem utilizadas as palavras "teorema" e "demonstração", houve sempre muita atenção às argumentações dedutivas. Assim, nos preocupamos, por exemplo, em deduzir a equação do plano, e não simplesmente dizer que "$ax + by + cz = d$ é a equação do plano com vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$".

O processo de concepção, implementação e avaliação de nossa proposta foi uma pesquisa que teve como metodologia a Engenharia Didática[111]. Essa metodologia permite tratar das relações entre a pesquisa e a ação no sistema de ensino e, assim, procura evidenciar a importância das realizações didáticas na fundamentação e validação de pesquisas que pretendem contribuir para mudanças de práticas de ensino.

4 A EXPERIÊNCIA E OS RESULTADOS

A experiência foi realizada em escola da rede privada, e dela participaram 29 alunos, na faixa etária de 16 a 17 anos. As aulas ocorreram em períodos de 100 minutos e totalizaram sete encontros, detalhados no Quadro 12.

Quadro 12 – Cronograma da experiência

Aula 1	Conceito geométrico de vetor
Aula 2	Operações de soma de vetores e multiplicação por escalar
Aula 3	Coordenadas de vetor e operações sob o ponto de vista algébrico
Aula 4	Ortogonalidade entre vetores e a equação da reta
Aula 5	A equação da reta e resolução de sistemas de equações com duas incógnitas
Aula 6	Vetores no espaço e operações e a equação do plano
Aula 7	A equação do plano e resolução de sistemas de equações com três incógnitas

Fonte: Carneiro(2008, p. 83)

Quanto à dinâmica de trabalho em sala de aula, assim procedemos: no primeiro momento, por meio de uma discussão em grande grupo coordenada pelo professor, foram introduzidos os novos conceitos; no segundo momento, em pequenos grupos, os alunos discutiram e fizeram atividades com foco nas ideias matemáticas e não nos cálculos exaustivos; no terceiro momento, novamente de discussão coletiva, aconteceu a sistematização dos resultados produzidos pela turma.

111 Quanto à metodologia, ver os trabalhos de Michele Artigue, disponíveis nas referências.

Tendo como intenção a participação ativa dos alunos no processo de construção do conhecimento, organizamos, para cada encontro, material escrito[112] consistindo de: a) uma parte teórica relativa aos novos conteúdos, com espaços a serem completados pelos alunos durante o momento de discussão coletiva; b) uma sequência de atividades a serem trabalhadas em pequenos grupos. Assim, livres da preocupação de ficar "copiando a aula", os alunos dedicaram a maior parte do tempo para a discussão dos conteúdos e para a resolução das atividades. A título de ilustração, na Figura 126, temos parte dos conteúdos apresentados no primeiro encontro, o qual teve como objetivo principal o entendimento do conceito de vetor e das operações de soma e multiplicação por escalar, no contexto geométrico.

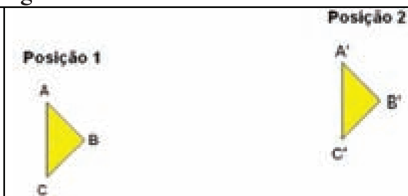
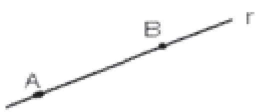
Encontro 1 – O vetor geométrico	
O triângulo abaixo se deslocou da posição 1 para a posição 2. Quais são as informações necessárias para que possamos entender esse deslocamento?	
Considere a reta *r* 	Definida uma direção, podemos imaginar uma pessoa se deslocando em dois sentidos:_________________________.
Chamamos de vetor uma coleção de setas que tenham: $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Portanto, setas que não diferem em nenhuma das três características acima **representam o mesmo vetor**.	
Assim, quando escrevermos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, significa que $\vec{v}$ é representado pela seta $\overrightarrow{AB}$. Porém, qualquer outra seta com o mesmo módulo, direção e sentido, representa também o mesmo vetor $\vec{v}$.	

Figura 126 – Exemplo do material didático
Fonte: Carneiro (2008, p.164)

112 A sequência de atividades proposta aos alunos está na íntegra como anexo da Dissertação *Geometria vetorial na escola: uma leitura geométrica para sistemas de equações* (CARNEIRO, 2008).

Quanto à produção dos alunos, ao longo da sequência de atividades programada para os sete encontros, documentamos dificuldades e progressos.

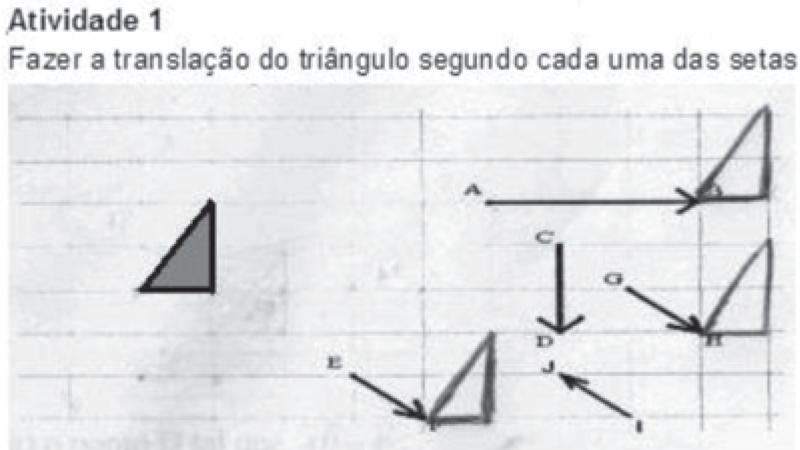


Figura 127 – Conceito de vetor e resolução dos alunos
Fonte: Carneiro (2008, p. 98)

Quanto à atividade inicial que tratava do significado de "seta representante de vetor", um erro recorrente, e similar àqueles que foram apontados na seção anterior, está documentado na resolução de um aluno, apresentada na Figura 127. Nessa resolução, o aluno, como muitos outros, simplesmente desenha um novo triângulo na extremidade de cada uma das setas, o que indica que está atribuindo certo significado à seta, mas dissociado daquele a ser considerado quando se trata do conceito de vetor e indicando dificuldade para escolher uma seta representante adequada para efetuar a translação do triângulo.

A sequência de atividades prosseguiu exigindo um domínio cada vez maior do conceito de vetor e operações, e algumas atividades ilustrativas estão na Figura 128. Na Atividade 3, observamos diferentes encaminhamentos feitos pelos grupos de alunos. Um grupo observou que os lados dos hexágonos eram todos de mesmo comprimento e, assim, enumerou as três distintas direções dadas pelos lados dos hexágonos e multiplicou esse número por dois, já que para uma dada direção existem dois sentidos. Um segundo grupo desenhou todas as setas possíveis, associadas aos lados do hexágono – seis setas no sentido horário e seis setas no sentido anti-horário. E, nesse conjunto de setas, o aluno identificou os pares que correspondiam ao mesmo vetor, obtendo assim o total de seis vetores.

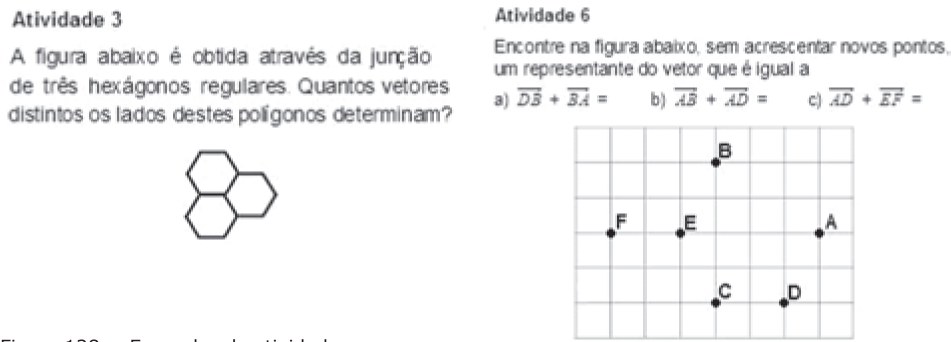


Figura 128 – Exemplos de atividades
Fonte: Carneiro (2008, p. 191 e p. 193)

Foi com um bom domínio do conceito de vetor, sob o ponto de vista geométrico, que os alunos iniciaram o estudo de vetores sob o ponto de vista algébrico. Para a introdução das coordenadas de um vetor, inicialmente foi tomada a seta representante na origem do sistema de coordenadas e, dessa forma, foi determinado o par de números que guarda a informação de direção, sentido e comprimento que determina o vetor; em um segundo momento foram determinadas as coordenadas do vetor por meio de seta representante que não está na origem do sistema. Já nas primeiras atividades do terceiro encontro, os alunos mostraram entendimento quanto ao cálculo das coordenadas, conforme solução registrada na Figura 129.

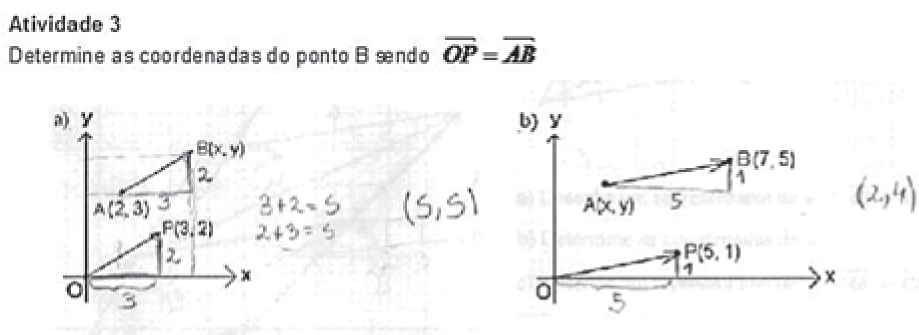


Figura 129 – Coordenadas de um vetor e resoluções de alunos
Fonte: Carneiro(2008, p.116)

No quarto encontro, foi feita a dedução da condição que garante a ortogonalidade de dois vetores usando o teorema de Pitágoras e o cálculo de distância entre dois pontos.

Complete:

As retas de equações 3x + 2y = 1 e 2x – 4y = 3 não têm **(têm/ não têm) a mesma direção, pois os vetores ortogonais a elas, n_1 = (**3, 2**) e n_2 = (**2, -4**),** não são **(são/ não são) múltiplos. Como as retas são** distintas **(distintas/ idênticas) o sistema de equações** $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases}$ tem uma única solução

(tem uma única solução/ tem infinitas soluções/ não tem solução).

Figura 130 – Sistema de equações e resolução de aluno
Fonte: Carneiro (2008, p.131)

Logo após, foi apresentada nova interpretação para a equação da reta, de acordo com a discussão feita na seção anterior. Foi assim que os alunos entenderam que, na equação geral $a\ .\ x + b\ .\ y = c$, os coeficiente *a* e *b* correspondem às coordenadas do vetor normal à reta, e eles, junto com o coeficiente *c*, determinam pontos que pertencem à reta (por exemplo, o ponto (0, *c/b*), se *b* não é zero; ou o ponto (*c/a*, 0), se *a* não é zero). Com essa interpretação da equação da reta, os alunos analisaram, sob um ponto de vista qualitativo, as soluções de sistemas com duas equações e duas incógnitas, tendo-se na Figura 130 uma amostra do trabalho realizado.

Uma vez entendido o conceito de vetor e operações em dimensão dois, a transposição desses mesmos conceitos para o espaço deu-se de forma bastante imediata, já que a maior exigência cognitiva foi quanto à visualização de vetores e de planos no espaço. Nesse sentido, figuras com cuidadosa ideia de profundidade, de modo a bem identificar as coordenadas de pontos no espaço, foram um motivo de atenção na apresentação do material didático. Assim, foi sem maiores dificuldades que, por exemplo, os alunos determinaram as coordenadas de vetores com setas representantes em diferentes posições, conforme ilustra a Figura 131.

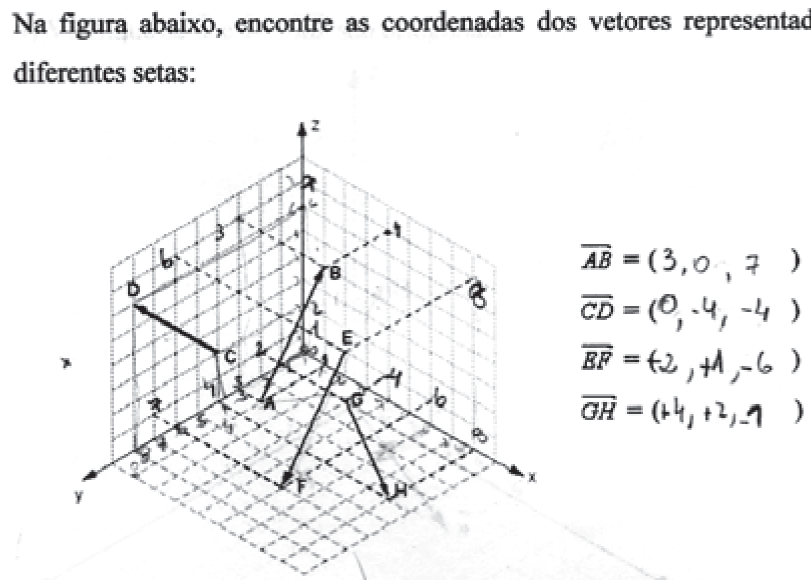
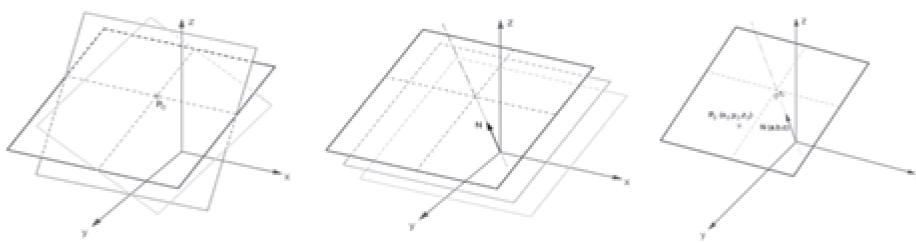


Figura 131 – Coordenadas de vetores no espaço e resolução de aluno
Fonte: Carneiro (2008, p. 136)

Também foi por meio do estudo de uma coleção cuidadosamente elaborada de figuras que os alunos entenderam que um plano fica completamente determinado por um ponto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ e um vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ e, dessa forma, acompanharam a argumentação dedutiva que explica porque o conjunto de pontos $P = (x, y, z)$, com coordenadas satisfazendo a equação $a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0$, constituem o plano que passa pelo ponto P_o e que é ortogonal à direção dada pelo vetor $\vec{n}$, conforme ilustra a Figura 132.



Planos passando por P_o | Planos ortogonais a $\vec{n}$ | Plano determinado por P_o e $\vec{n}$

Figura 132 – Determinação de um plano
Fonte: Carneiro (2008, p. 73 e p.74)

5 COMENTÁRIOS FINAIS

A experiência de ensino realizada segundo a metodologia de investigação da Engenharia Didática, e aqui relatada, procurou avaliar se, por meio da geometria vetorial, é possível desenvolver na escola o tópico de sistema de equações de forma a agregar nele um maior valor formativo.

Nossa avaliação é positiva, pois a análise da produção dos alunos mostra que ao associarmos a álgebra escolar a uma concretude geométrica, estamos contribuindo para a construção de conhecimento matemático mais pleno de significado. É nesse sentido que chamamos a atenção para os raciocínios de natureza geométrica que poderiam estar mais presentes em situações que, na escola, são tratadas apenas com raciocínios de natureza algébrica. Essa predominância das representações algébricas na Matemática escolar pode ter razão na presença de procedimentos algorítmicos que resolvem, de forma quase mecânica, as equações. Já os problemas de natureza geométrica, de um modo geral, exigem raciocínios e procedimentos de construção para os quais não existem regras pré-definidas. Cada novo problema proposto desafia na criação de uma nova estratégia de resolução.

No produto didático disponibilizado como parte do trabalho de dissertação, vislumbramos que é na interação entre dois domínios – o algébrico e o geométrico – que é possível dar significado às clássicas expressões que aparecem nos livros didáticos – "sistemas determinados", "sistemas indeterminados", "sistemas impossíveis" – quando tratam do tópico sobre sistemas de equações.

Uma preocupação que nos acompanhou ao longo da realização da experiência refere-se à clareza e à precisão da linguagem a ser utilizada pelo professor, dada a sua importante contribuição no entendimento, por parte dos alunos, dos conceitos que são propósito de aprendizagem. Ao introduzirmos, por exemplo, o conceito de vetor, sempre tivemos o cuidado de usar a expressão "seta representante do vetor" ou "a coleção de setas que representam o vetor". Se, ao referir-se a uma dada "seta", o professor usa a palavra "vetor" no início do estudo de vetores, podem acontecer complicações conceituais. Isso porque o aluno encontra-se no momento de buscar entender que "um vetor é uma coleção de setas com certas propriedades em comum".

Consideramos que a introdução da geometria vetorial na escola, que permita tratar a resolução de sistemas de equações também sob o ponto de vista geométrico, é possível. Ao longo da realização da dissertação, grande foi o tempo alocado na elaboração da sequência de atividades que foi proposta aos alunos. Muitas vezes foi preciso reconsiderar os caminhos a serem seguidos; afinamos as escolhas das atividades; pensamos e repensamos sobre a forma mais simples e clara de trabalhar com determinado conteúdo; ponderamos sobre a importância das discussões entre os alunos, mas também sobre a importância da intervenção do professor.

É claro que adaptações, de modo a atenderem as especificidades de cada turma de alunos, sempre se fazem necessárias. Dentre elas, temos aquelas que dizem respeito aos diferentes ritmos de aprendizagem dos alunos, e aqui uma leitura na íntegra da dissertação pode também ajudar, pois nela há uma análise minuciosa da produção dos alunos, em que são apontadas as dificuldades que se apresentaram no processo de aprendizagem.

6 REFERÊNCIAS

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. In: BRUN, J. (Org). *Didática das Matemáticas*. p. 193-217. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

ARTIGUE, Michèle; DOUADY, Régine; MORENO, Luis; GÓMEZ, Pedro. *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995. p. 61-97.

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. Tradução de E. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

BOYÉ, Anne. ¿François Viète, inventor del álgebra? In: SEMINARIO «OROTAVA» DE HISTORIA DE LA CIENCIA, Años XI-XII, Nantes. *Actas...* p. 251 – 276. Canarias: 2007. Disponível em: <http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/usrn/fundoro/web_fcohc/ 005_publicaciones/seminario/ciencia_moderna.htm>. Acesso em: 05 mar. 2007

CARNEIRO, Pedro Sica. *Geometria vetorial na escola: uma leitura geométrica para sistemas de equações.* 213 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2007. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/13337>. Acesso em: 22 abr. 2011.

CHARBONNEAU, Louis. From Euclid to Descartes: Algebra and its Relation to Geometry. *In*: BEDNARZ, N. *et al*. (Ed.). *Approaches to Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 15-37.

COMMANDINO, Frederico. *Euclides – Elementos de Geometria*. Edições Cultura, 1944. Disponível em: <http:*//www.dominiopublico.gov.br*>. Acesso em: 10 jul. 2007.

CROWE, Michael. *A history of Vector Analysis*. London: University of Notre Dame Press, 1967.

DOUADY, Regine; PARSYSZ, Bernard. Geometry in the classroom. In: MAMMANA, Carmelo; VILLANI, Vinicio. (Eds.). *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21 st Century*. p. 159-192. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Campinas: UNICAMP, 1997.

GEOMETRY OF RENÉ DESCARTES. Tradução por E. Smith e M. Latham. New York: Dover Publications, 1954.

POYNTER, Anna; TALL, David. What do mathematics and physics teachers think that students will find difficult? A challenge to accepted practices of teaching. *In*: HEWITT, Dave; NOYES, Andy. (Ed). *Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education*. p. 128-135. University of Warwick, 2005. Disponível em: <www.bsrlm.org.uk>. Acesso em: 08 mai. 2007.