A Matemática na Escola
NOVOS CONTEÚDOS, NOVAS ABORDAGENS

Elisabete Zardo Búrigo
Maria Alice Gravina
Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Vera Clotilde Vanzetto Garcia
Organizadores

EAD
SÉRIE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

UFRGS
SEAD
Educação a Distância

UFRGS
EDITORA

A Matemática na Escola

A Matemática na Escola
NOVOS CONTEÚDOS, NOVAS ABORDAGENS

Elisabete Zardo Búrigo
Maria Alice Gravina
Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Vera Clotilde Vanzetto Garcia
Organizadores

EAD
SÉRIE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

UFRGS
EDITORA

UFRGS
SEAD
Educação a Distância

1ª edição: 2012
Direitos reservados desta edição:
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Capa e projeto gráfico: Carla M. Luzzatto
Revisão: Zuleica Oprach de Souza
Editoração eletrônica: Rafael Marczal de Lima

Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS
Coordenador: Luis Alberto Segovia Gonzalez

Apoio em Publicações da Secretaria de Educação a Distância
Apoio operacional: Deise Mazzarella Goulart
Laura Wunsch
Marleni Nascimento Matte
Michelle Donizeth Euzébio

Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática
Diretor do Instituto de Matemática: Rudnei Dias da Cunha
Coordenadora do Curso: Maria Alice Gravina
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática: Marcus Vinicius de Azevedo Basso

M425 A Matemática na escola: novos conteúdos, novas abordagens / organizadoras Elisabete Zardo Búrigo ... [et al.]. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012.
304 p. : il. ; 17,5x25cm

(Série Educação A Distância)

Inclui figuras e quadros.

Inclui referências.

1.Matemática. 2. Matemática – Ensino fundamental – Novas abordagens. 3. Matemática – Ensino Médio – Novas abordagens. 3. Matemática – Ensino Médio – Novos conteúdos. 4. Matemática – Formação de professores – Mudanças curriculares - Escola. I. Búrigo, Elisabete Zardo. II. Universidade Aberta do Brasil. III. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Secretaria de Educação a Distância. Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural. IV. Série

CDU 51

CIP-Brasil. Dados Internacionais de Catalogação na Publicação.
(Jaqueline Trombin – Bibliotecária responsável CRB10/979)

ISBN 978-85-386-0158-6

GRAFOS NO ENSINO MÉDIO: UMA INSERÇÃO POSSÍVEL

Gláucia Helena Sarmento Malta
Vilmar Trevisan

1 INTRODUÇÃO

Apresentamos uma proposta de inserção de Teoria de Grafos no Ensino Médio através da Resolução de Problemas. Acreditamos que os alunos de Ensino Médio podem e devem ter contato com os problemas históricos que desencadearam a Teoria de Grafos que hoje se conhece. A proposta completa pode ser encontrada na dissertação de mestrado *Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível*, de Malta (2008). Aspectos metodológicos e conceitos de Teoria de Grafos são encontrados na dissertação, bem como uma bibliografia completa do assunto.

A proposta foi elaborada à luz da concepção que temos a respeito do ensino, dos documentos oficiais analisados, bem como das tendências atuais em Educação Matemática. Alguns fundamentos de Teoria de Grafos são apresentados nas atividades propostas. Procura-se fazer tal fundamentação resgatando os problemas históricos que desencadearam o desenvolvimento de Teoria de Grafos, e apresentar essa fundamentação de uma forma simples, com o objetivo de apoiar o estudo de professores no assunto. Pensa-se que, possivelmente, nem todas as Licenciaturas em Matemática tratem do assunto Grafos. Desta forma, oferecemos um primeiro contato com o assunto e indicamos uma bibliografia para que os estudos possam ser aprofundados.

Além da inserção de Teoria de Grafos no Ensino Médio, propomos a perspectiva metodológica que acreditamos ser a mais adequada para fazê-la.Fizemos uma pesquisa das tendências metodológicas atuais defendidas em Educação Matemática e em documentos oficiais do Ministério de Educação brasileiro e encontramos em Resolução de Problemas a alternativa que vai ao encontro do que pretendemos. Apoiamos nossa escolha em alguns pesquisadores no tema Resolução de Problemas, como Pozo (1998), Smole e Diniz (2001), Vila e Callejo (2006). Procuramos apresentar, na dissertação, diferentes perspectivas a respeito do assunto e mostrar certa evolução da concepção e das discussões sobre o assunto ao longo do século passado. Buscamos apontar grupos de pesquisa brasileiros sobre o tema. Nossa contribuição para a melhoria do ensino de Matemática está na provocação de uma reflexão dos professores a respeito do que ensinam e da forma como têm conduzido esse ensino.

2 JUSTIFICATIVA

Pensar em educação com certeza leva-nos a refletir sobre muitos aspectos. A educação no Brasil passou por transformações relativamente recentes. Hoje, o desafio não está apenas em levar todos a aprender e sim em dar sentido e significado ao que se aprende, uma vez que fora dela há uma quantidade crescente de informações, ao mesmo tempo cada vez mais atraentes ao educando, desviando a sua atenção. A escola atualmente passa pelo desafio de proporcionar reflexão e entendimento da realidade que cerca o aprendiz. Também é nessa posição de aprendiz que se encontra o professor contemporâneo. As mudanças são rápidas e percebe-se um apelo muito grande pelo novo.

De certa forma, a escola precisa manter o seu objetivo de trabalhar com o conhecimento que a humanidade foi construindo, mas ela também precisa estar atenta ao conhecimento recente e incorporar nas suas práticas a abordagem desses novos conhecimentos.

Em Matemática muito se produz, mas pouco de fato se leva para o currículo em termos de Educação Básica. A escola resiste ao novo e não é raro se ouvir que a escola é uma das instituições mais resistentes às mudanças. A forma como tradicionalmente a Matemática vem sendo trabalhada leva o educando a concebê-la como algo acabado, pronto. Pensamos que um dos grandes desafios da proposta aqui apresentada seja justamente este: levar para o currículo da escola uma Matemática recente e que seja foco de pesquisas no mundo contemporâneo.

Outro aspecto que merece destaque na proposta que apresentamos é o fato de que muito pode ser explorado em Matemática Discreta. Esse é um campo da matemática que tem se limitado ao estudo dos problemas de contagem. O estudo de grafos abre possibilidades para o rompimento por parte dos alunos de algumas crenças a respeito da matemática. Geralmente, os alunos associam a matemática aos conceitos mais algébricos.

Analisando os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), encontramos alguns indicativos da pertinência de se trabalhar com Grafos no Ensino Médio. No primeiro documento publicado em 1998, o MEC aponta como objetivos do Ensino Médio:

> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de

> aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico (BRASIL, 1998, p. 6).

Há claramente a indicação de que se incluam no Ensino Médio temas que respondam às necessidades da vida contemporânea. A Escola Básica deve dar conta de temas pertinentes que contribuam para o pleno desenvolvimento do cidadão que se deseja formar. Percebemos nos últimos anos a inclusão de temas como Probabilidades e Estatística tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. A Matemática Discreta é, com certeza, um desses temas com que a Matemática da Escola Básica deve se ocupar. A complexidade da vida contemporânea deve ser entendida pelo cidadão. Uma das competências apontadas pelo mesmo documento é a contribuição da escola na formação de um cidadão crítico e reflexivo. Acreditamos que a complexidade da vida na sociedade de hoje merece ser entendida pelo cidadão nessas condições. Há um indicativo claro quanto ao tipo de aprendizagem que se pretende, ou seja, está explícito que a capacidade de aprender continuamente deve ser desenvolvida. E é nesse aspecto que defendemos o uso de uma metodologia que proporcione tal capacidade. No nosso entendimento, a resolução de problemas é uma das alternativas capazes de proporcionar essa capacidade de aprender continuamente.

Além dos indicativos explícitos do MEC, nossa atividade docente aponta a resolução de problemas como uma alternativa metodológica eficaz. Os alunos que vivenciam essa prática são alunos diferenciados. A liberdade de pensamento, a possibilidade da descoberta e o desafio que os problemas trazem deixam marcas significativas na forma de pensar desse aluno. A criatividade, a originalidade e o bom senso são visíveis. A persistência e a busca por uma estratégia adequada também podem ser observadas. As consequências de uma proposta pautada na resolução de problemas são justamente a capacidade de aprender continuamente e a flexibilidade de pensamento. A resolução de problemas não é algo novo no ensino. Polya (1995) já falava no início do século passado na “arte de resolver problemas”. Seu trabalho foi fruto da sua observação como docente e foi a necessidade de instrumentalizar seus alunos que o levou a criar passos que os ajudariam a resolver problemas. Depois dele, os estudos continuaram e outros educadores deram novos significados ao que Polya se propôs a fazer. O tema é tão pertinente que no ano de 1980 o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), organização não governamental com o objetivo de discutir o ensino de matemática nos Estados Unidos e Canadá, dedicou sua publicação anual à Resolução de Problemas, segundo Smole e Diniz (2001).

No documento Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) encontra-se uma referência mais explícita ao tratamento da Matemática Discreta, porém sugerida como tema complementar:

> No ensino médio, o termo "combinatória" está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola - são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Könisberg, tratado por Euler: dado um conjunto de sete ilhas interligadas por pontes, a pergunta que se coloca é: "Partindo-se de uma das ilhas, é possível passar pelas demais ilhas e voltar ao ponto de partida, nisso cruzando cada uma das pontes uma única vez?" Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema, via estrutura de grafo - no exemplo, um diagrama em que cada ilha é representada por um ponto e cada ponte é um segmento conectando dois pontos; explorar o problema identificando situações em que há ou não solução; convergir para a descoberta de condição geral de existência de uma tal solução (ainda no exemplo, o caso em que cada ilha tem um par de pontes). Muitos outros exemplos de problemas combinatórios podem ser tratados de modo semelhante, tais como determinar a rota mais curta em uma rede de transporte ou determinar um eficiente trajeto de coleta de lixo em uma cidade. (BRASIL, 2006, p. 94)

O presente trabalho pretende relatar e refletir sobre uma proposta desenvolvida dentro da base curricular da segunda série do Ensino Médio. O trabalho foi desenvolvido nas aulas de Matemática sem que os grupos envolvidos tivessem prejuízo no seu desenvolvimento, muito pelo contrário, podemos antecipar que houve um envolvimento significativo no desenvolvimento de tal proposta.

3 CONCEPÇÃO DA PRÁTICA

Pensamos que a capacitação do docente transcende a formação acadêmica. A prática em sala de aula leva o docente a uma constante reflexão sobre seu papel na formação do aluno. Muitas vezes, é na atividade que descobrimos muito do que de fato dá resultado nas nossas aulas. Entendemos resultado aqui como a capacidade e habilidade do aluno pensar, entender e criar matematicamente. A prática certamente deve ser combinada com a reflexão e o fazer pedagógico deve estar sempre acompanhado de reflexão e discussão com os pares. O planejamento das aulas e a reflexão sobre os sucessos e fracassos resultantes da prática são componentes essenciais para o docente. A ausência desses fatores leva a inúmeros problemas que constantemente ouvimos e presenciamos nas escolas atuais.

A prática aqui apresentada foi realizada em uma escola particular de Porto Alegre em que a professora atua desde 1990. É uma instituição que possui diversas unidades de ensino e é reconhecida pela formação diferenciada de seus egressos. A escola caracteriza-se por uma proposta de trabalho apoiada no desenvolvimento do educando de uma forma ampla e visa o desenvolvimento de habilidades sociais, motoras e cognitivas através, especialmente, de operações de pensamento baseadas em Raths (1977). Há o incentivo para que o corpo docente pense constantemente em alternativas metodológicas que contribuam para o desenvolvimento do educando segundo o que (a escola) pretende. Também se percebe uma flexibilidade com relação ao currículo. Os professores têm a oportunidade de pensar e escolher os assuntos a serem trabalhados. Projetos são apoiados e há um incentivo para que eles aconteçam. Há o entendimento do currículo como algo dinâmico e em constante movimento. A comunidade de pais apoia as iniciativas da escola. Os alunos estão familiarizados com um trabalho desafiador e aceitam com naturalidade propostas diferenciadas. Pode-se afirmar que essa escola é um meio onde há credibilidade no fazer docente. Essa credibilidade exige do professor um envolvimento e uma responsabilidade grande. A instituição proporciona ao seu corpo docente uma formação continuada.

A Matemática Discreta presente na escola, de uma forma geral, é ligada à contagem. Com a abordagem de Teoria de Grafos, abre-se a possibilidade de trabalhar com problemas mais pertinentes do ponto de vista da vida contemporânea. Pensamos ser um compromisso da escola de hoje inserir no seu currículo assuntos que estejam vinculados a produções mais recentes dentro da comunidade científica. Percebemos que a escola custa para incorporar em suas práticas assuntos novos. Aprofundando um pouco mais a análise, encontraríamos na história da escola um possível motivo. A escola, inicialmente, tinha como objeto de estudo o conhecimento institucionalizado e, porque não dizer, acabado, no sentido de pronto e reconhecido no meio acadêmico e científico. Hoje, percebemos uma produção muito intensa e rápida de informações e a escola, na maioria das vezes, não a acompanha de forma satisfatória como poderia. Não defende-se aqui que a escola deva dar conta de tudo, mas pensamos que poderia olhar um pouco para fora dos conceitos tradicionalmente ali trabalhados e eleger outros que com certeza contribuiriam para a formação de alunos mais críticos e capazes de entender o mundo que os cerca. A escolha deve ser pautada em assuntos e em abordagens que levem o aluno a **aprender a aprender** (POZO, 1998).

A prática aqui apresentada foi pensada segundo uma abordagem de resolução de problemas. Era fundamental que os alunos se deparassem com os problemas históricos que impulsionaram a construção do conhecimento que hoje tem-se de Teoria de Grafos. A intenção era a de que o trabalho ocorresse da forma mais heurística possível. A descoberta das possíveis soluções dos problemas sem que previamente fosse abordado o conceito de grafos era fundamental, no nosso entendimento. Qualquer preparação poderia interferir na criatividade dos alunos envolvidos em analisar os problemas e chegar a possíveis soluções para eles.

4 PRÁTICAS POSSÍVEIS ENVOLVENDO GRAFOS

Apresenta-se uma sugestão de prática a ser desenvolvida no Ensino Médio com os conceitos de Teoria de Grafos. As atividades foram estruturadas pensando no desenvolvimento histórico da Teoria de Grafos. Pensamos que seria importante apresentar aos alunos envolvidos na proposta os problemas históricos conhecidos em Teoria de Grafos.

4.1 A História

4.1.1 OBJETIVO

O objetivo desta atividade é uma retomada histórica do surgimento da Teoria de Grafos na matemática, bem como da sua importância nos dias atuais.

4.1.2 ATIVIDADE

Fazer uma revisão histórica abordando:

1. Matemática Discreta como um dos campos da Matemática.
2. Desenvolvimento da Matemática Discreta até a Segunda Guerra Mundial com destaque para os três problemas:
   a) Problema das Pontes de Königsberg (1736) resolvido por Leonhard Euler transformando o problema em um grafo.
   b) Caminhos hamiltonianos (1859), Sir Willian Hamilton.
   c) Problema das quatro cores (1852/1878), resolvido em 1976 com publicação em 1977.
3. Desenvolvimento da Matemática Discreta após a Segunda Guerra, início do século XX.
4. Acontecimentos e mudanças na sociedade que geraram a necessidade do desenvolvimento dessa área da Matemática: mundo industrializado, necessidade de otimização e organização de alguns processos, recursos e serviços básicos (distribuição de energia, comunicação, correios, coletas de lixo, entregas em grandes cidades, rotas, entre outros).

Após essa introdução, propor o Problema das Pontes Königsberg (1736):

Os moradores da cidade de Königsberg inquietavam-se com a possibilidade de fazer um passeio pela cidade que, partindo de algum lugar, atravessasse cada ponte exatamente uma vez e então retornasse ao ponto de partida.

O problema foi proposto a Euler e a ideia é a de que os alunos respondam se esse trajeto seria possível ou não. Para qualquer resposta deve ser dado um argumento que sustente a resposta dada.

Pede-se também que seja feita uma representação da cidade com as pontes de uma maneira sintética, mas fiel aos elementos essenciais.

Figura 90 – Pontes de Königsberg
Fonte: Malta (2008)

A ideia é a de que o grupo pense no problema e verifique se é possível solucioná-lo. Caso não seja possível solucioná-lo, o grupo deve argumentar o motivo. Estimular os alunos a criarem uma representação para o problema (modelagem).

A representação esperada é a que segue.

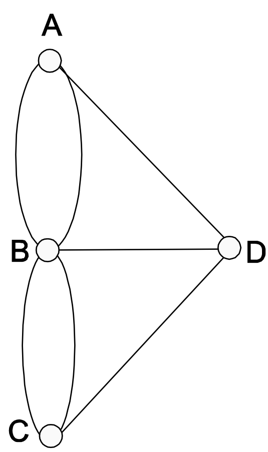

Figura 91 – Grafo representando o Problema das Pontes
Fonte: Malta (2008)

4.1.3 O RESULTADO

Havia a certeza de que os alunos chegariam a uma representação de grafos para modelar o problema das Pontes de Königsberg. Representaram o problema com detalhes e não de uma forma sintética como se esperava. Alguns alunos argumentaram que o problema estava no número total de pontes, isto é, no número de pontes que havia ao todo na cidade. A seguir pode-se observar algumas representações que apareceram.

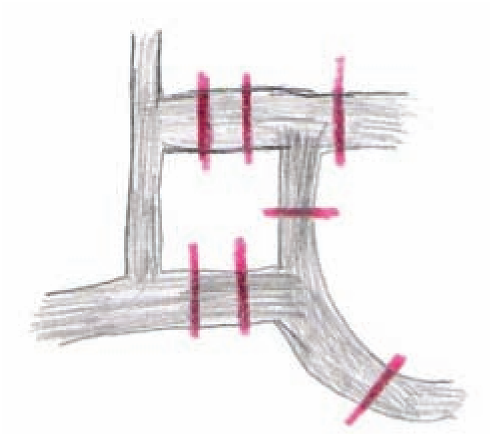

Figura 92 – Representação de aluno para o problema das pontes
Fonte: Malta (2008)

Figura 93 – Representação de aluno para o problema das pontes
Fonte: Malta (2008)

Um aluno em cada turma apresentou uma representação na forma desejada, ou seja, em que as pontes são linhas e as porções de terra são pontos (no caso da figura que segue, os círculos representam as porções de terra).

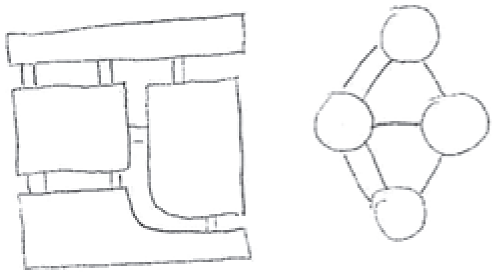

Figura 94 – Representação de aluno para o problema das pontes
Fonte: Malta (2008)

Apareceram representações ricas em detalhes, como as que seguem.

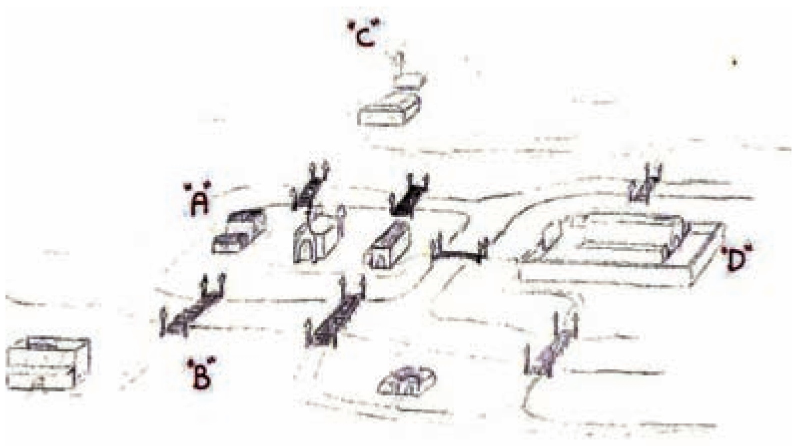

Figura 95 – Representação de aluno para o problema das pontes
Fonte: Malta (2008)

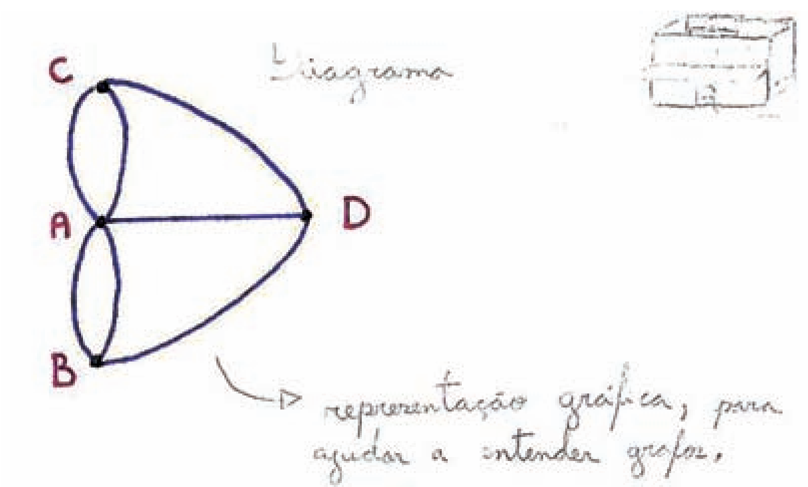

Figura 96 – Representação de aluno para o problema das pontes
Fonte: Malta (2008)

Fica evidente que os alunos não perceberam a necessidade de uma representação mais abstrata. Não perceberam que o essencial do problema era um ponto e uma aresta sinalizando uma ligação. Não entenderam a necessidade de uma representação compacta para generalizar problemas e nem perceberam a riqueza da modelagem ponto-aresta como uma ferramenta aplicável em muitas outras situações.

4.2 Os Caminhos Eulerianos

4.2.1 OBJETIVO

As atividades têm por objetivos explorar atividades de desenhar figuras sem tirar o lápis do papel e de generalizar a situação, estabelecendo uma condição para que figuras possam ser desenhadas dessa forma.

4.2.2 ATIVIDADES

Atividade 1:

Encontre um caminho que percorra todos os pontos da figura sem tirar o lápis do papel, desenhando a figura sem repetir segmentos. Regra: somente pode ir de bolinha para bolinha.

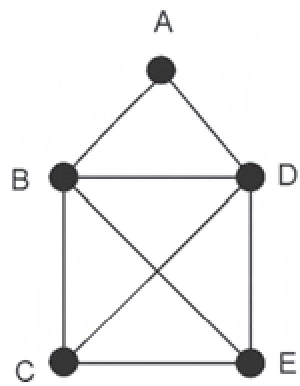

Figura 97 – Encontre o caminho sem tirar o lápis do papel
Fonte: Malta (2008)

1. *Qual o caminho encontrado?*
2. *É possível começar por qualquer ponto da figura?*
3. *Por quê?*
4. *Discuta, no grupo, possíveis argumentos que sustentem a sua resposta. Registre as conclusões do grupo.*

Atividade 2:

Observe as figuras que seguem e conclua se é possível encontrar um caminho passando por todos os pontos sem tirar o lápis do papel.

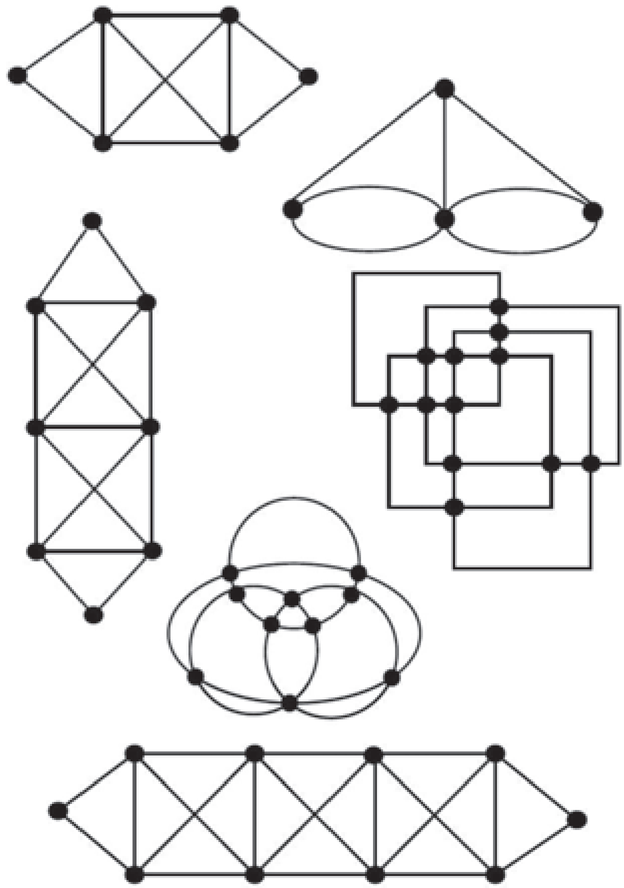

Figura 98 – É possível desenhar sem tirar o lápis do papel?
Fonte: Malta (2008)

4.2.3 O RESULTADO

Nas duas atividades, esperava-se que os alunos chegassem à condição para que as figuras pudessem ser desenhadas sem tirar o lápis do papel, ou seja, que dissessem que isso apenas seria possível se em cada ponto chegasse um número par de linhas ou, que houvesse apenas dois pontos em cada figura nos quais chegassem um número ímpar de linhas (um seria o ponto inicial e o outro seria o ponto final do desenho). Quanto à proposta de desenhar as figuras sem tirar o lápis do papel, as reações dos dois grupos foram bem interessantes. A segunda turma envolveu-se com a situação e preocupou-se em chegar à condição de poder ou não desenhar. Visto que a primeira turma foi bastante concreta e buscou achar um caminho para desenhar **todas** as figuras apresentadas na proposta, foram feitas algumas tentativas que os levassem à generalização, mas não houve jeito. Naquele momento, o interesse do grupo era o passatempo e não a matemática. Houve um sentimento de frustração no final desta atividade, mas algumas hipóteses podem ser levantadas frente a essa reação. As crenças do grupo em relação à própria matemática podem ser uma das causas. Naquele momento estava sendo feita uma matemática diferente daquela com a qual eles estavam acostumados. A ideia de resolver a situação não passou do nível do passatempo.

Os alunos estavam muito mais interessados no caráter lúdico das atividades, o que, admite-se, é um importante fator motivador. É importante ressaltar que essa falta de sensibilidade dos alunos não é uma crítica à ação da professora, mas sim uma constatação de que os alunos ainda não têm um senso de abstração completamente desenvolvido.

4.3 Conceitos Importantes da Teoria de Grafos

4.3.1 OBJETIVO

As atividades têm por objetivo retomar a representação de grafos, destacando os seus elementos (vértices e arestas), definir grau dos vértices e grau de um grafo. Através da determinação do grau dos vértices de vários grafos e do grau dos grafos apresentados, chegar à generalização de que todo grafo tem grau par. Definir o que é um caminho euleriano (aberto ou fechado) e chegar à condição de existência para que um grafo tenha um caminho euleriano. No final, propor um problema e solicitar que os alunos façam um grafo para modelar a situação posta no problema.

4.3.2 ATIVIDADE

Atividade 1:

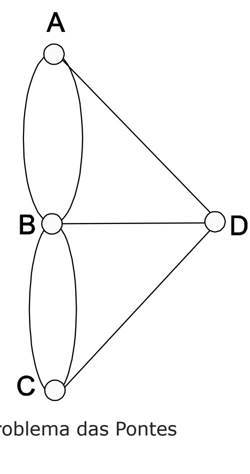

Figura 99 – Grafo representando o Problema das Pontes
Fonte: Malta (2008)

Voltando ao problema inicial das Pontes, essa maneira de representar a situação é chamada de grafo. Ou seja, um grafo é um conjunto de pontos no plano, os pontos são chamados de vértices, ligados por linhas chamadas de arestas.

A partir da retomada, definir grau de um vértice, grau de um grafo e o que são os caminhos eulerianos.

Definição 1. Chama-se de grau de um vértice o número de arestas com uma das extremidades nesse vértice. Anota-se grau de um vértice A como d(A). Caso o grafo apresente laços, o mesmo contará duas unidades.

Definição 2. Chama-se de grau de um grafo a soma dos graus dos vértices deste grafo.

Definição 3. Caminho euleriano é todo caminho que passa por todas as arestas do grafo exatamente uma vez. Um caminho euleriano é fechado quando o ponto de partida é o mesmo de chegada, ou é aberto quando o ponto de partida não coincide com o ponto de chegada.

Atividade 2:

Problema adaptado de Silveira (1987):

Em um grupo de quatro pessoas quer-se representar as possibilidades de diálogo entre elas. Observe os idiomas que cada uma delas domina:

A: inglês, espanhol, italiano e português;

B: inglês, espanhol e português;

C: inglês e espanhol; e

D: inglês.

Construa um grafo que represente as possibilidades de diálogo entre essas pessoas.

Atividade 3:

Para cada grafo representado a seguir, determine o grau de cada vértice e o grau de cada grafo.

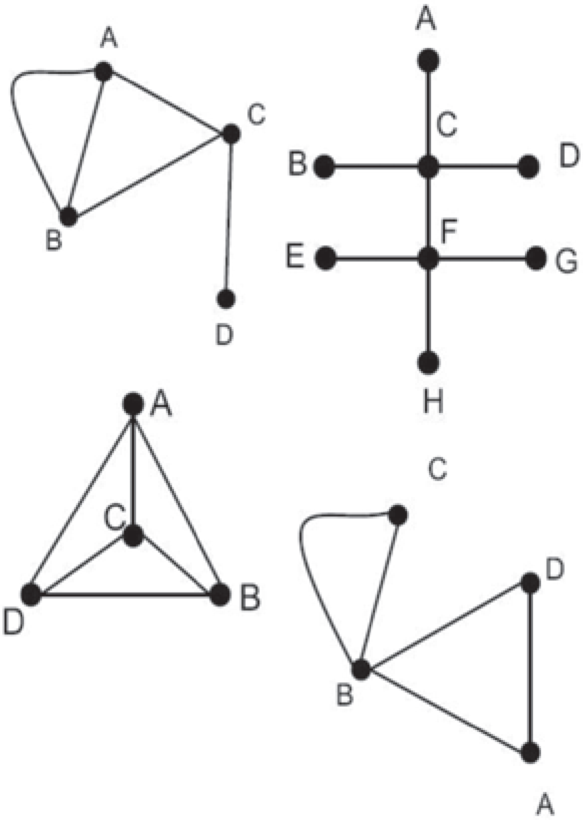

Figura 100 – Determine o grau dos grafos e dos vértices dados.
Fonte: Malta (2008)

Observando os graus de cada grafo apresentado, seria possível para fazer alguma generalização? Discuta com o colega e tente fazê-la.

4.3.3 O RESULTADO

Os dois grupos conseguiram chegar à conclusão de que o grau de um grafo é sempre um número par. Também argumentaram o porquê. Conseguiram ver também que o grau de um grafo é sempre o dobro do número de arestas de tal grafo. Os grupos fizeram a representação do problema proposto no final da aula da forma esperada. As pessoas estavam representadas pelos vértices e as arestas representavam o idioma. Foi interessante observar que muitos alunos somente colocaram uma aresta entre os pontos estabelecendo assim a possibilidade de diálogo. Mas muitos representam cada língua como uma aresta.

Dada a definição de caminhos eulerianos, foi possível voltar à discussão do problema das pontes e do desenho sem tirar o lápis do papel. Concluíram que para que haja caminho euleriano fechado é preciso que todos os vértices do grafo tenham grau par e para que haja caminho euleriano aberto o grafo deve ter apenas dois vértices com grau ímpar (o vértice de partida e o vértice de chegada).

4.4 Grafos e Representação Matricial

4.4.1 OBJETIVO

As atividades que se sugere têm por objetivo o uso de matrizes no estudo de grafos. E de destacar a necessidade de representar um grafo de uma maneira que possa ser tratada ou processada no computador. Apesar de se poder associar uma matriz de incidência ou uma matriz de adjacência a um grafo (além de outras matrizes), sugerimos trabalhar apenas com a matriz de adjacência. As atividades propostas incluem uma linguagem bem específica de uma forma intencional. Os alunos devem se deparar com definições e teoremas e buscar o entendimento das informações ali postas. Julgamos que, neste momento, se faz necessário o aparecimento da linguagem. As atividades buscam a representação nos dois sentidos: dado um grafo, determinar a matriz de adjacência e, dada a matriz, determinar o grafo a ela associado. O ponto alto desta aula é o teorema que relaciona o número de caminhos entre dois vértices com a potência da matriz de adjacência de tal grafo. Espera-se que os alunos compreendam a importância da matriz de adjacência e a sua importante aplicação.

4.4.1 ATIVIDADES

Atividade 1:

Matriz de adjacência

***Definição**: Seja G um grafo com vértices ordenados* $v_1, v_2, v_3, \ldots$ *A matriz de adjacência de G,* $A = (a_{ij})$ *onde* a_{ij} *é o número de arestas de* v_i *até* v_j .

1. Determine a matriz de adjacência de cada grafo representado a seguir:

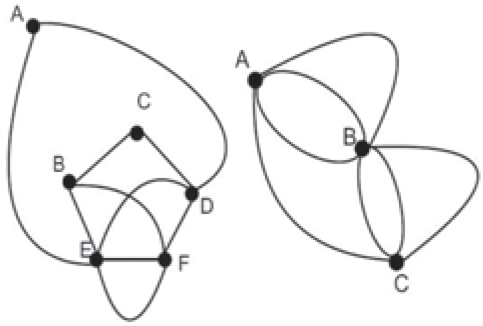

Figura 101 – Qual é a matriz de adjacência de cada grafo?
Fonte: Malta (2008)

2. Para cada matriz de adjacência dada a seguir, determine o seu grafo correspondente: (As matrizes eram simétricas, quadradas, com entradas não negativas como esta):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Um passeio em um grafo é qualquer caminho ligando dois vértices quaisquer, podendo repetir arestas. O comprimento de um passeio é o número de arestas percorridas pelo passeio. Analisando o segundo grafo da atividade 1, determine quantos passeios de comprimento 2 tem-se de A até C.

4. Teorema: Se G é um grafo com vértices $v_1, v_2, \ldots, v_m$ e A é a matriz de adjacência de G, então para cada inteiro positivo n, o elemento a_{ij} da matriz A^n representa o número de passeios de comprimento n de v_i até v_j.

Faça a verificação deste teorema no segundo grafo da atividade 1 e no item (c) da atividade 2 para $n = 2$ e $n = 3$.

4.4.2 O RESULTADO

Essa atividade apresentou um resultado interessante. Os alunos ficaram surpresos com o fato de poderem saber o número de caminhos através da potência da matriz de adjacência. Um aluno não ficou convencido do resultado e contou os caminhos no grafo. Mais uma evidência de que, em certos momentos, eles precisam da comprovação concreta dos teoremas. No fundo, questionam algumas generalizações que lhes são apresentadas. O teorema anterior não foi demonstrado e, na situação dada, havia a possibilidade de contar para verificar.

4.5.1 OBJETIVO

O objetivo desta atividade é trabalhar com o Problema do Caixeiro-Viajante.

4.5.2 ATIVIDADE

Problema do caixeiro-viajante

Um caixeiro-viajante trabalha com quatro cidades conhecidas e quer descobrir o menor caminho que lhe permita visitar cada cidade exatamente uma vez e então voltar à cidade de partida. Sabe-se que as distâncias entre as cidades são dadas pela tabela a seguir, em quilômetros.

Tabela 12 – Distância entre as cidades, em Km

	A	B	C	D
A	0	100	120	150
B	100	0	200	180
C	120	200	0	110
D	150	180	110	0

Fonte: Malta (2008)

(a) Faça uma representação na forma de um grafo para a situação colocada.

(b) Encontre tal caminho sabendo que o caixeiro inicia seu trajeto no ponto A.

4.5.3 O RESULTADO

Os alunos representaram o problema através de um grafo e chegaram ao menor caminho somando as distâncias entre as cidades e decidindo pelo menor caminho. Perceberam a dificuldade desse problema à medida que aumenta o número de cidades envolvidas. Seguem algumas das representações que eles fizeram.

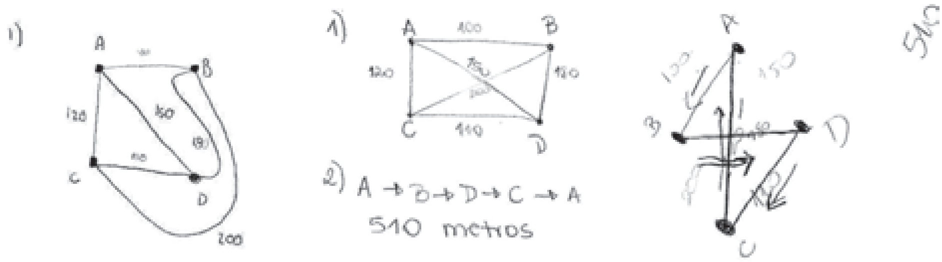

Figura 102 – Representações dos alunos para o problema do caixeiro-viajante
Fonte: Malta (2008)

4.6 Coloração

4.6.1 OBJETIVO

O objetivo destas atividades é o trabalho com Coloração de Mapas e suas aplicações em problemas contemporâneos (horário, por exemplo).

4.6.2 ATIVIDADE

1. Propor inicialmente uma atividade de colorir figuras com o menor número de cores possíveis, respeitando a condição de que regiões com fronteiras comuns não podem ter a mesma cor. Se uma região só tiver em comum com outra um ponto, elas podem ter a mesma cor. A partir dessa atividade, enunciar o Teorema das Quatro Cores e fazer uma pequena retomada histórica do problema como segue:

2. Todo mapa gera um grafo planar e, reciprocamente, todo grafo planar gera um mapa.

"Assim, o teorema das quatro cores pode ser enunciado na teoria de grafos da seguinte maneira: todo grafo planar pode ser colorido com quatro cores."

A relação que coloração de mapas tem com grafos é bastante forte. Usa-se a mesma representação do problema das pontes de Königsberg, atribuindo aos países os vértices de um grafo e as arestas representando fronteiras comuns, é possível transformar qualquer mapa em um grafo planar. Colorir um grafo significa dar cores aos seus vértices de tal forma que vértices adjacentes tenham cores distintas. Também pretende-se que as figuras sejam transformadas em grafos. Nesse momento dar a definição de grafo planar. Sugere-se que seja feita uma retomada histórica do problema de coloração de mapas.

O problema de coloração de mapas é um antigo e importante problema que foi um dos primeiros estímulos para o desenvolvimento da teoria de grafos. Anunciou-se que um mapa pode ser colorido com quatro cores. Por mais de 100 anos, a ideia de que qualquer mapa poderia ser colorido com quatro cores ou menos cores foi uma conjectura. Apesar do trabalho de algumas das

2melhores mentes matemáticas do mundo, essa conjectura das quatro cores não era provada nem refutada, e o problema das quatro cores continuava sem solução. Finalmente, em 1977, a conjectura das quatro cores foi provada. A prova original do teorema das quatro cores envolveu o uso de computadores de alta velocidade para checar com certeza casos difíceis e envolveu cerca de 1.200 horas de tempo de uso dos computadores (ou tempo computacional). Uma das mais importantes intervenções no tratamento do problema de coloração de mapas e k-colorações de mapas foi a transferência do problema da coloração de mapas para um problema equivalente, mas um tanto mais tratável.

3. A proposta é partir dos problemas históricos, mas também trazer à discussão problemas contemporâneos que lançam mão da teoria de grafos no seu tratamento. Sugere-se a proposta de um problema afim à coloração: o problema de planejamento de horários.

É necessário fazer uma programação (planejamento) dos encontros semanais de algumas comissões do governo estadual eleito recentemente. Para fazer tal programação (planejamento), é preciso ter cuidado para não programar encontros em um mesmo dia de comissões que têm membros em comum.

Supõe-se que os encontros devam ocorrer nas terças, quartas e quintas-feiras pela manhã. A tabela a seguir representa um resumo das comissões que têm membros em comum.

Tabela 13 – Comissões

	Finanças	Educação	Meio Ambiente	Saúde	Transporte	Segurança
Finanças	0	0	0	0	0	1
Educação	0	0	1	1	0	1
Meio Ambiente	0	1	0	1	0	0
Saúde	0	1	1	0	1	1
Transporte	0	0	0	1	0	1
Segurança	1	1	0	1	1	0

Fonte: Malta (2008)

Observação: a entrada da tabela é 1 quando as comissões i e j têm membros em comum, e 0 caso não tenham membro em comum. Construa um grafo que represente as informações da tabela. Sugestão: represente as comissões por vértices e as arestas indicando que determinadas comissões têm membros em comum. Encontre uma solução para o problema. Será que ela é única?

4.6.3 O RESULTADO

Nesta aula cabe destacar duas situações interessantes. A primeira refere-se ao problema do estabelecimento dos dias das reuniões. A solução foi dada sem que um grafo tenha sido gerado para colorir, conforme sugerido. A seguir temos a solução dada por um aluno sem o uso de um grafo.

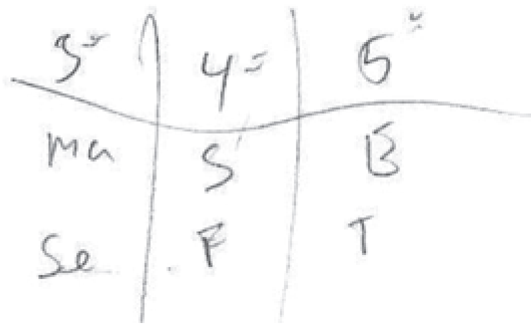

Figura 103 – Solução de aluno para o problema das comissões
Fonte: Malta (2008)

A segunda situação interessante foi relativa à coloração de mapas, já que muitos partiram para a construção de mapas que não pudessem ser coloridos com quatro cores. A cada mapa que produziam, colocavam no quadro e submetiam aos colegas a coloração. Como ficou demonstrado e aceito o Teorema das Quatro Cores, em todos os casos foi possível colorir com, no máximo, quatro cores.

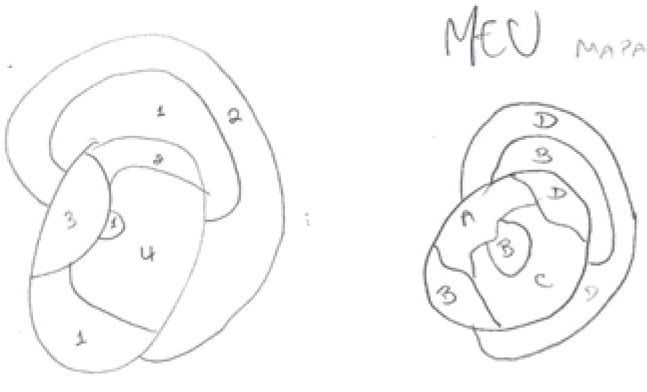

Figura 104 – Mapas construídos pelos alunos
Fonte: Malta (2008)

As atitudes descritas evidenciam o quanto os alunos agem no sentido de buscar a verificação concreta dos resultados matemáticos consistentes e aceitos, no caso até mesmo os demonstrados.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo inicial de tratar o assunto Grafos partindo dos problemas históricos foi possível e de fácil compreensão por parte dos grupos envolvidos. As atividades foram pensadas com muito cuidado e houve uma preocupação em usar a linguagem matemática relativa a tal teoria.

O uso de problemas históricos foi acertado e, em Vila e Callejo (2006), tem-se a questão das crenças. Os autores apontam que a possibilidade de trabalhar com os problemas históricos pode gerar a ruptura de algumas dessas crenças. Tais problemas mostram como o avanço da matemática, às vezes, é lento e que as teorias podem nascer em contextos puramente especulativos e desenvolver ramos que se aplicam a diversos campos. Eles destacam que esses dados ajudam os alunos a mudar certas crenças sobre as origens das teorias matemáticas e seus avanços.

A escolha pela Teoria de Grafos, em uma perspectiva de resolução de problemas, foi coerente com a intenção. A sensibilidade na implementação do projeto foi extremamente importante e as discussões, depois de cada encontro e reflexões a partir das percepções, contribuíram para o sucesso do projeto.

Resolução de problemas é de fato uma escolha acertada para o ensino de Matemática. Acreditamos que ela vai além de um **conjunto de estratégias,** como destaca Polya (1995). Nessa concepção, a resolução de problemas é uma **perspectiva metodológica** como se vê em Smole e Diniz (2001); é um complexo sistema em que ao mesmo tempo é **estratégia, conceito e objetivo**; é uma concepção de trabalho que vai além da Matemática envolvida. Como educadores precisamos buscar possibilidades que contribuam para que a aprendizagem aconteça, não apenas o ensino. Concordamos com Becker (2001), quando destaca a necessidade da pedagogia atual propor uma metodologia que leve o aluno a pensar **como** os matemáticos pensaram. Precisa-se buscar alternativas de trabalho que gerem reflexão e capacidade de aprender continuamente. O professor precisa ocupar uma posição de **provocador**, mas precisa estar atento ao desenvolvimento do seu aluno, pois ele precisa ser olhado, acompanhado no seu desenvolvimento. É nesta dinâmica de **provocar e acolher** que o sujeito constrói o seu conhecimento. Os limites entre o possível conhecido e a novidade desafiadora são muitas vezes tênues. Sabe-se que o que é exercício para uns é problema para outros. Cabe ao professor, em um ambiente coletivo, dar conta de todas essas demandas, mas a **sensibilidade** e o **planejamento** são condições essenciais no fazer docente que colaboram para a superação dos possíveis obstáculos.

Espera-se que a proposta aqui apresentada sensibilize professores de Matemática em diversos sentidos:

1. Que possam enxergar a possibilidade de incluir grafos no Ensino Médio como algo importante e pertinente.
2. Que se sintam desafiados a buscar alternativas no seu fazer pedagógico, tanto do ponto de vista conceitual quanto metodológico.
3. Que vejam a pesquisa de forma que seja uma das suas atribuições como educadores em um mundo contemporâneo.
4. Que revejam suas crenças e sejam capazes de buscar elementos para modificá-las para que venham a melhorar sua prática docente e contribuir para a formação de um sujeito capaz de aprender a aprender.
5. Finalmente, como educadores, em especial da área de Matemática, que passem o encantamento e a beleza que essa ciência tem e que a apresentem na sua gênese, prezando pela fidelidade ao seu processo de criação.

6 REFERÊNCIAS

BECKER, Fernando. *Educação e Construção do Conhecimento*. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Média e Tecnológica (SEMTEC). *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Ensino Médio, v. 3. Brasília: MEC, 1998.

________ . Secretaria de Educação Básica (SEB). *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, v. 2.Brasília: MEC, 2006.

LIMA, Elvira Souza. A função antropológica do ensinar. *Revista Nova Escola*, São Paulo, Editora Abril, n. 138, 2000.

MALTA, Gláucia Helena Sarmento. *Grafos no Ensino Médio – Uma Inserção Possível.* Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/14829>. Acesso em: 04 jul. 2011.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino e aprendizagem através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (Org). *Pesquisa em educação matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas:* um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciências, 1995.

POZO, Juan Ignácio. *A solução de problemas*: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

RATHS, Louis. *Ensinar a Pensar*: Teoria e Aplicação. São Paulo: Editora Pedagógica Universitária, 1977.

SILVEIRA, José. Uma introdução à Matemática Discreta. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA COMPUTACIONAL, X, Gramado, 1987. *Anais...* 1987.

SMOLE, Katia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. *Ler, escrever e resolver problemas:* habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

VILA, Antoni; CALLEJO, Maria Luz. *Matemática para aprender a pensar*. Porto Alegre: Artmed, 2006.