A Matemática na Escola
NOVOS CONTEÚDOS, NOVAS ABORDAGENS

Elisabete Zardo Búrigo
Maria Alice Gravina
Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Vera Clotilde Vanzetto Garcia
Organizadores

EAD
SÉRIE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

UFRGS
SEAD
Educação a Distância

UFRGS
EDITORA

A Matemática na Escola

CAPES
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
UFRGS SEAD Educação a Distância
INSTITUTO DE MATEMÁTICA UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA UFRGS
UFRGS EDITORA

A Matemática na Escola
NOVOS CONTEÚDOS, NOVAS ABORDAGENS

Elisabete Zardo Búrigo
Maria Alice Gravina
Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Vera Clotilde Vanzetto Garcia
Organizadores

EAD
SÉRIE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

UFRGS
EDITORA

UFRGS
SEAD
Educação a Distância

1ª edição: 2012
Direitos reservados desta edição:
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Capa e projeto gráfico: Carla M. Luzzatto
Revisão: Zuleica Oprach de Souza
Editoração eletrônica: Rafael Marczal de Lima

Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS
Coordenador: Luis Alberto Segovia Gonzalez

Apoio em Publicações da Secretaria de Educação a Distância
Apoio operacional: Deise Mazzarella Goulart
Laura Wunsch
Marleni Nascimento Matte
Michelle Donizeth Euzébio

Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática
Diretor do Instituto de Matemática: Rudnei Dias da Cunha
Coordenadora do Curso: Maria Alice Gravina
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática: Marcus Vinicius de Azevedo Basso

---

M425 A Matemática na escola: novos conteúdos, novas abordagens / organizadoras Elisabete Zardo Búrigo ... [et al.]. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012.
304 p. : il. ; 17,5x25cm

(Série Educação A Distância)

Inclui figuras e quadros.

Inclui referências.

1.Matemática. 2. Matemática – Ensino fundamental – Novas abordagens. 3. Matemática – Ensino Médio – Novas abordagens. 3. Matemática – Ensino Médio – Novos conteúdos. 4. Matemática – Formação de professores – Mudanças curriculares - Escola. I. Búrigo, Elisabete Zardo. II. Universidade Aberta do Brasil. III. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Secretaria de Educação a Distância. Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural. IV. Série

CDU 51

CIP-Brasil. Dados Internacionais de Catalogação na Publicação.
(Jaqueline Trombin – Bibliotecária responsável CRB10/979)

ISBN 978-85-386-0158-6

INTRODUÇÃO AO PENSAMENTO ALGÉBRICO POR MEIO DE RELAÇÕES FUNCIONAIS

Newton Bohrer Kern
Maria Alice Gravina

1. INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta uma proposta didática para o ensino introdutório de álgebra na sexta série (sétimo ano) do Ensino Fundamental, por meio do estudo de relações funcionais, usando diferentes situações-problema e, dentre elas, situação de modelagem matemática. Na viabilização da proposta, foi de grande importância a utilização do objeto de aprendizagem "Máquinas Algébricas"[8], pelas suas possibilidades de concretização de relações funcionais em interface adequada para alunos de sexta série. As atividades desenvolvidas com esse objeto propiciaram a evolução dos alunos no uso da linguagem algébrica: de início apenas raciocínios de natureza aritmética estavam explícitos, mas, aos poucos, raciocínios algébricos foram se fazendo cada vez mais presentes. Ao final da experimentação com a turma de sexta série, os alunos mostraram entendimento sobre as relações funcionais estudadas – envolvendo essencialmente o conceito de proporcionalidade – sabendo expressá-las via "leis", tabelas e gráficos. Como produto resultante deste trabalho, temos uma sequência de atividades, organizada em grau crescente de complexidade, sempre contemplando os importantes momentos de exploração no objeto de aprendizagem "Máquinas Algébricas". A sequência é apresentada integralmente como anexo no texto completo da dissertação de Mestrado *Uma introdução ao pensamento algébrico na sexta série através de relações funcionais* (KERN, 2008)[9]; neste capítulo são apresentados alguns elementos da sequência e de sua experimentação em sala de aula.

A motivação para a realização deste trabalho está diretamente ligada à nossa prática profissional. Pela nossa experiência pessoal[10], entendemos que os conteúdos de Matemática trabalhados nas quinta e sexta séries (sexto e sétimo anos) são mais

8 Este objeto foi desenvolvido no Instituto Freudenthal (disponível em: <http://www.fi.uu.nl/wisweb/applets/mainframe_en.html>. Acesso em: 02 jul. 2011) e uma versão em português está disponível no *site* EDUMATEC, em <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br>, no *link* Atividades/Atividades Diversas de Funções e Gráficos/Máquinas Algébricas para o Ensino Fundamental.
9 O texto completo da dissertação está disponível na Biblioteca Virtual da UFRGS, em: <http://www.lume.ufrgs.br>. Acesso em: 02 jul. 2011.
10 O primeiro autor do trabalho é professor em séries finais do Ensino Fundamental desde 1996.

bem aceitos por parte dos alunos em geral, até porque grande parte deles têm aplicação direta no cotidiano. Os alunos não costumam questionar a necessidade de aprender a trabalhar com números negativos, unidades de medidas, números decimais, porcentagens ou proporções, por exemplo. Porém quando se inicia o estudo de conteúdos algébricos (equações, polinômios, produtos notáveis, fatoração), há um questionamento sobre a necessidade da formalização algébrica, sobre a utilidade do conteúdo trabalhado. A mudança de um trabalho voltado para a Matemática concreta, diretamente ligada a situações do dia a dia, para um trabalho voltado para aspectos mais abstratos, mais afastados do cotidiano, é um dos motivos para as dificuldades no ensino e na aprendizagem da Matemática. Em particular, o aprendizado da álgebra tem se constituído como um dos maiores desafios no ensino de Matemática do Ensino Fundamental.

2. SOBRE O ENSINO DA ÁLGEBRA

Como deveria ser feita a introdução à linguagem algébrica? Existem diferentes ideias e diferentes enfoques. Charbonneau (1996, p. 34) diz que a álgebra seria "[...] um caminho para manipular relações". Usiskin (1997) chama a atenção para as diferentes interpretações e concepções associadas à álgebra: aritmética generalizada; estudos de procedimentos para resolução de problemas; estudo de relações entre quantidades; e o estudo de estruturas e propriedades.

Para o ensino da álgebra, temos como recomendações gerais nos Parâmetros Curriculares Nacionais[11] (PCNs):

> O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas (BRASIL, 1998, p. 115).

De forma mais específica, os PCNs destacam as diferentes dimensões a serem contempladas no estudo da álgebra escolar, sinalizando as diferentes características do uso das letras, bem como os diferentes conceitos e procedimento que se apresentam em cada uma destas dimensões. Há, nos Parâmetros (BRASIL, 1998, p. 116), um interessante diagrama que sistematiza essa recomendação, o qual transcrevemos na Figura 4.

---

11 Este documento está disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 02 de Julho de 2011

Figura 4 – Álgebra no Ensino Fundamental
Fonte: Kern, 2008

E, neste documento, alerta-se para o fato de que os professores não desenvolvem todas essas dimensões, já que privilegiam fundamentalmente o estudo do cálculo algébrico e das equações. Dessa forma, os professores perdem a oportunidade de realizar um ensino que articula o desenvolvimento das diferentes competências que concorrem para o amadurecimento de raciocínios de natureza algébrica.

Na dissertação em que este capítulo está baseado (KERN, 2008), fizemos uma análise do ensino de álgebra em livros didáticos aprovados pelo MEC. A maioria dos livros traz uma abordagem na forma de resolução de problemas. No entanto, a justificativa da necessidade do uso da linguagem algébrica para expressar equações que resolvem problemas acaba perdendo a força porque, em muitos casos, o aluno resolve os problemas propostos com simples raciocínio aritmético, ou seja, os problemas motivadores não são os mais apropriados.

Dentre as quatro dimensões apontadas anteriormente, escolhemos a “Funcional” para desenvolver a proposta didática de introdução ao pensamento algébrico, e nela também vamos contemplar a modelagem matemática. É disso que vamos tratar nas próximas seções.

3. A CONSTRUÇÃO DE UMA PROPOSTA

Objetivando a construção de uma proposta didática que propiciasse uma melhoria no aprendizado da álgebra, concentramo-nos nas diferentes diretrizes que frisam a importância da álgebra no desenvolvimento do aluno. Essas diretrizes apontam que é na observação das relações entre os números, na observação das diferentes formas de representar situações matemáticas – gráficos, tabela, expressão – que o aluno desenvolve o pensamento algébrico, e não por meio do ensino centrado na resolução mecânica de exercícios.

O processo de construção da proposta, e do resultante produto didático, foi desenvolvido dentro dos moldes da Engenharia Didática. Essa é uma metodologia de pesquisa não apenas teórica, mas voltada para as experiências em sala de aula. Adotamos a organização de pesquisa delineada pela Engenharia Didática e de acordo com essa organização desenvolvemos o processo de criação, experimentação e análise de nossa proposta didática.

Entendendo que na dimensão das relações funcionais podemos também contemplar, em parte, outras das dimensões que são recomendadas para o ensino da álgebra escolar (destacadas na seção anterior), fizemos a nossa primeira escolha didática: tomar a perspectiva das relações funcionais, aqui incluindo a modelagem, como um caminho para a introdução à álgebra na sexta séria do Ensino Fundamental.

A abordagem via modelagem, sendo uma atividade prática e de experimentação com coleta de dados, pode proporcionar momentos muito ricos para discussão em sala de aula. Para a execução de uma atividade de modelagem é necessário se fazer uma preparação, escolher alguma situação em que os alunos possam efetuar medições, organizando-as em uma tabela. Depois de trabalhar com a tabela, os alunos podem estabelecer relações entre os valores encontrados, descobrindo uma regra de comportamento, a ser expressa de forma algébrica.

Nossa segunda escolha didática apoia-se em princípios tomados da “Educação Matemática Realista (EMR)”, desenvolvida pelo Instituto Freudenthal da Universidade de Utretch – Holanda[12], nos meados da década de 1970, como uma reação aos efeitos da matemática moderna, em particular quanto à ênfase que começou a ser dada às estruturas e aos formalismos no ensino da matemática escolar. Um dos princípios da EMR é que a matemática não deve ser transmitida, mas descoberta e reinventada pelos alunos, devendo ser vivida como uma atividade humana, para que se torne então um conhecimento pleno de significado.

Com o propósito de contemplar um processo de aprendizagem em contexto “realista”, o Instituto Freudhental vem fazendo uso de tecnologia informática, especialmente na forma de “objetos de aprendizagem”, que são pequenos *softwares* (*applets*), de natureza interativa, voltados para aprendizagem de conteúdos bastante específicos. O *site* do Instituto abriga uma extensa coletânea desses objetos em

12 O Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education tem como objetivo traçar diretrizes e produzir material visando à melhoria do ensino de matemática e de ciências. Disponível em: < http://www.fi.uu.nl/en/algemeen.html />. Acesso em: 02 jul. 2011.

tópicos de aritmética, álgebra, geometria, funções, matemática discreta, entre outros assuntos[13].

No que segue, apresentaremos o objeto de aprendizagem "Máquinas Algébricas"[14], escolhido para ser usado em nossa proposta didática porque dispõe de uma estrutura que provoca de forma natural, e, portanto, em contexto "realista", a construção do conceito de função, fazendo uso da linguagem algébrica.

O objeto apresenta uma área de trabalho, na região cinza da Figura 5, em que são disponibilizadas "caixas brancas" para entrada e saída de dados e "caixas laranjas" que disponibilizam diferentes operações (soma, diferença, multiplicação, divisão, operações com potências). Para realizar as operações, o aluno pode utilizar livremente as "caixas brancas e as laranjas", ligando-as com setas conforme a ordem das operações a serem efetuadas.

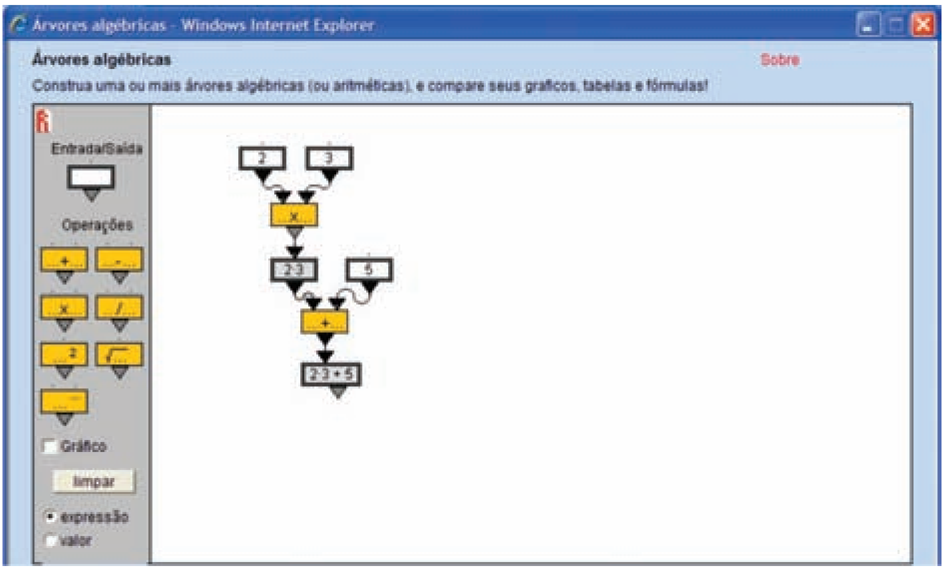


Figura 5 – Interface do objeto "Árvores algébricas"
Fonte: Kern, 2008

Na Figura 5 ilustramos o procedimento que implementa a operação $2 \,.\, 3 + 5$, usando três "caixas brancas" em que são colocados os números 2, 3 e 5, e duas "caixas laranjas" que indicam as operações de multiplicação e de soma. Quando

13 Disponível em: < http://www.fi.uu.nl/wisweb/applets/mainframe_en.html >. Acesso em: 02 jul. 2011.

14 Este objeto foi desenvolvido no Instituto Freudenthal e, por meio de uma parceria, disponibilizamos uma versão em português. A versão em português pode ser acessada no *site* EDUMATEC, em: <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br>. Acesso em: 02 jul. 2011 por meio dos *links* Atividades/Atividades Diversas de Funções e Gráficos/Máquinas Algébricas para o Ensino Fundamental.

trabalhamos somente com dados numéricos, temos a opção de resposta na forma "valor" ou na forma "expressão".

Usando as "caixas brancas e as laranjas" podemos também obter expressões algébricas, as quais podem ser associadas a tabelas e gráficos. A Figura 3 ilustra a "máquina" que corresponde à expressão $2 \,.\, a + 5$, acompanhada de tabela de valores e de representação gráfica.

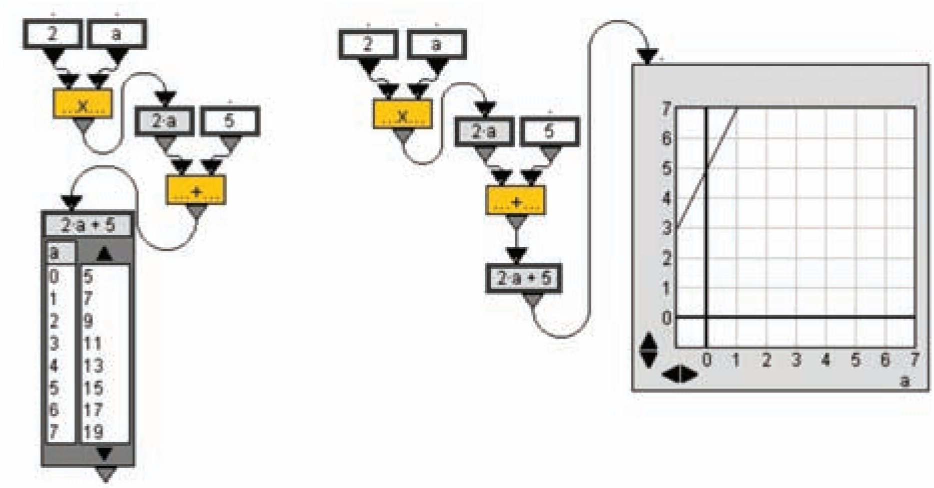


Figura 6 – Opções de tabela e de gráfico
Fonte: Kern, 2008

O objeto "Máquinas Algébricas" muito pode contribuir para o aprendizado do significado das "letras" quando utilizadas na álgebra. O aluno, diante de um determinado problema, esquematiza o processo de resolução do problema, usando a "caixa branca" como espaço a ser ocupado por números que correspondem a situações particulares do problema a ser resolvido, e tem-se nesse procedimento o uso da ideia de variável, ainda sem maiores formalismos. O aluno não precisa se preocupar em efetuar cálculos, sendo apenas necessário que identifique as etapas de resolução do problema. A habilidade do aluno para representar as etapas do problema, através de uma "máquina", pode ser o início de pensamento algébrico mais explícito.

A sequência de atividades preparada para o uso do objeto "Máquinas Algébricas" foi projetada da seguinte forma: inicialmente o aluno entenderia o funcionamento do objeto, e depois seria provocado no entendimento de que uma "máquina", muito particular, por ele construída para resolver um certo problema, poderia ser usada para resolver generalizações deste mesmo problema. O reconhecimento, por parte do aluno, de que a substituição de um certo valor numérico, colocado em "caixa-branca" da "máquina", por outro valor numérico não provoca alteração na estrutura do problema, é um passo crucial na construção da ideia de variável e de expressão algébrica.

Vamos ver na apresentação da experiência que foi a partir das diferentes "máquinas" construídas para resolver instâncias particulares de um mesmo problema que os alunos avançaram na direção da "máquina generalizadora". Foi a partir deste momento que os alunos passaram a trabalhar com o conceito de variável na forma de "caixa branca" vazia, na "espera de números" a serem processados pela "máquina", conforme as operações algébricas por eles estruturadas.

Uma atividade de modelagem matemática fez parte da proposta didática: os alunos realizaram uma experiência prática, fazendo medições, coletando informações, construindo tabelas e gráficos, representando a modelagem do problema de diferentes formas, formulando hipóteses e respondendo a determinados questionamentos. Essa atividade de modelagem também tratou de relações entre variáveis.

A sequência de atividades concebida visou um processo de aprendizagem com crescente exigência quanto ao uso da linguagem algébrica. De início criou-se a necessidade da generalização, ainda que de forma intuitiva; depois veio a exigência de expressar as relações funcionais através da linguagem algébrica, usando-se diferentes representações – expressão algébrica, tabelas e gráficos.

4. A EXPERIÊNCIA E OS RESULTADOS

A experiência de ensino foi realizada com uma turma de sexta série, do turno da tarde do Centro de Ensino Médio Pastor Dohms, escola privada de Porto Alegre. A turma era constituída por 30 alunos, com idades variando entre 11 e 13 anos.

A dinâmica de trabalho com os alunos, em um total de seis encontros (três encontros de 55 minutos e três encontros de 110 minutos), foi a seguinte:

a) Cinco dos encontros aconteceram no laboratório de informática da escola, que dispunha de 20 computadores e um projetor multimídia, com os alunos trabalhando em duplas, na sua grande maioria, e alguns poucos trabalhando individualmente.
b) Um encontro foi reservado para a atividade de modelagem matemática e, dada a sua natureza, aconteceu em sala de aula, com os alunos dispostos em grupos de pelo menos quatro, em torno da mesa onde foram feitas a experiência de medição, a coleta de dados, a construção de tabela e a construção do modelo matemático.

c) Em todas as atividades os alunos receberam uma “folha guia da atividade”, com a situação-problema a ser explorada e com espaços em branco para escreverem suas respostas, muitas delas transcrições das “máquinas” por eles construídas[15].

d) Ao final de cada encontro, o professor conduziu momentos de discussão coletiva, de forma a sistematizar o conhecimento produzido pelos alunos nos momentos de trabalho em grupo.

A concepção inicial da sequência de atividades foi readaptada ao longo da experimentação, com a reestruturação de algumas atividades, isso porque sentimos a necessidade de fazer intervenções que não estavam previstas, para esclarecer as dúvidas e os questionamentos que se apresentavam nos grupos.

No que segue, a partir da apresentação do enunciado de algumas atividades desenvolvidas, vamos ilustrar o processo de aprendizagem vivenciado pelos alunos.

4.1 O primeiro Problema Proposto: o “Parque Arco-Íris”

O primeiro problema a ser resolvido pelos alunos foi:

> Um parque de diversões cobra R$ 5,00 pelo ingresso e R$ 3,00 por brinquedo.
> Quanto gastará Carla se andar em sete brinquedos? E se andar em 12?
> Se Vitor gastou R$ 56,00, em quantos brinquedos ele andou? E se Daniela tinha R$ 40,00, em quantos brinquedos ela poderia andar?

Para resolver o item (1) da atividade, os alunos construíram inicialmente a “máquina” que calcula o gasto no caso de sete brinquedos e depois construíram uma nova “máquina” para responder à pergunta relativa aos 12 brinquedos (Figura 7), neste momento sem maior atenção à similaridade da estrutura que resolve as duas perguntas.

15 Esta exigência de transcrição para a folha de papel da “máquina” construída se justifica pela necessidade de coleta de material de pesquisa.

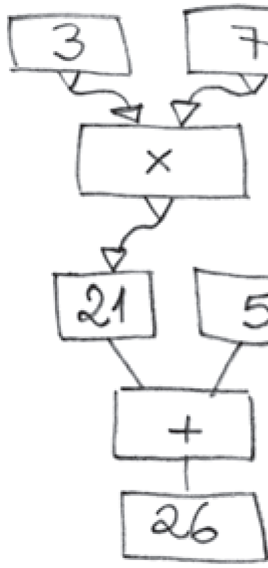


Figura 7 – "Máquina" da atividade "Parque de diversões"
Fonte: Kern, 2008

Para o item (2), alguns alunos construíram "máquinas" que utilizam as operações inversas, conforme ilustra a Figura 8. Outros utilizaram a "máquina" construída para o item (1) e, por meio de tentativas com diferentes valores numéricos, obtiveram a resposta "17 brinquedos", conforme mostra a Figura 9.

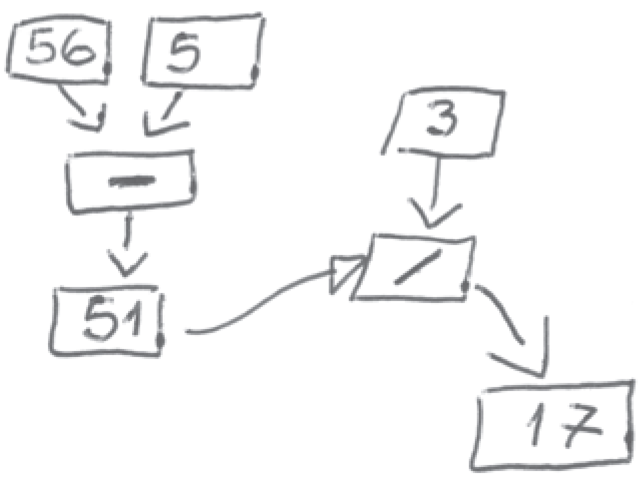


Figura 8 – Problema 3 resolvido por máquina inversa
Fonte: Kern, 2008

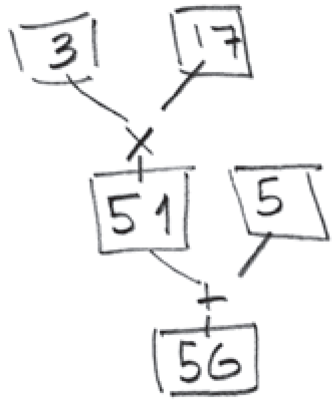


Figura 9 – Problema 3 resolvido por tentativas
Fonte: Kern, 2008

Ao final do primeiro encontro, a grande maioria dos alunos tratou cada pergunta da situação proposta como um novo problema e, dessa forma, refizeram a construção de "máquinas", mesmo tendo elas a mesma estrutura. Foram raras as situações nas quais os alunos tiveram que trabalharam com a mesma "máquina" para responder a perguntas similares.

4.2 A Atividade com as "Impressoras"

No segundo encontro, os alunos trabalharam com a atividade "Impressoras". Essa atividade manteve o propósito de provocar nos alunos a ideia de que uma mesma estrutura de resolução pode ser usada em vários casos de um mesmo problema. O enunciado da atividade era o seguinte:

> O laboratório de informática da escola tem duas impressoras: uma tipo "jato de tinta" e outra tipo "laser". A "jato de tinta" imprime 12 páginas por minuto e a "laser" imprime 18 páginas por minuto.
>
> (1) Quantas páginas a "jato de tinta" imprime em 2 minutos? E em 5 minutos? E em 13 minutos?
>
> (2) E quantas páginas a "laser" imprime em 3 minutos? E em 7 minutos? E em 12 minutos?
>
> (3) As duas impressoras juntas imprimirão quantas páginas em 6 minutos? E em 9 minutos?

Neste segundo dia de aula, observamos que os alunos passaram a utilizar uma mesma "máquina" para resolver problemas similares, apenas trocando o valor que havia sido colocado na "caixa branca". Nas Figuras 10 e 11, temos diferentes soluções apresentadas para o item (3): alguns alunos calcularam a quantidade de "folhas impressas" em cada impressora, e depois somaram os resultados; outros alunos somaram as "velocidades de impressão" das duas impressoras, concluindo que, juntas, imprimiam 30 páginas por minuto, e então multiplicaram a "velocidade" obtida pelo tempo.

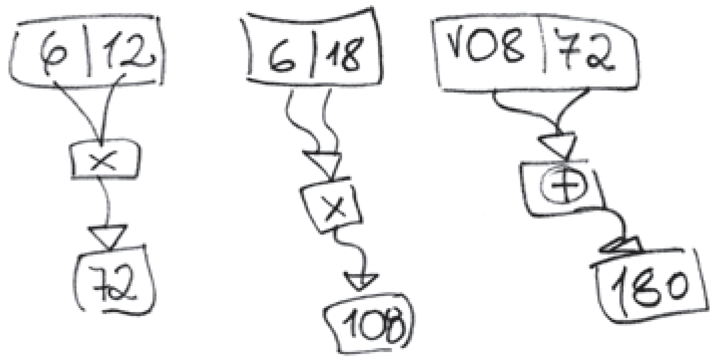


Figura 10 – Cálculo para cada impressora
Fonte: Kern, 2008

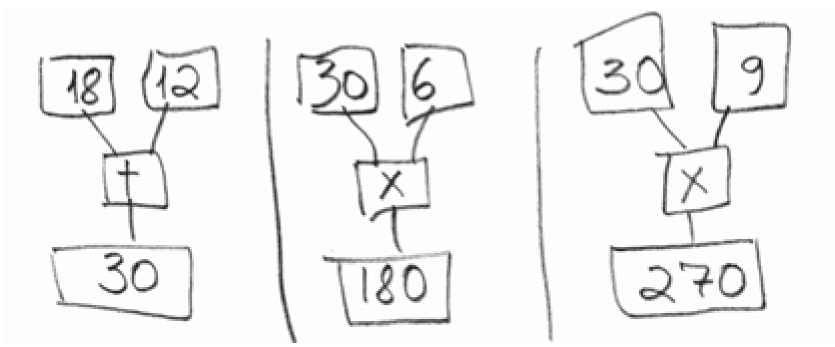


Figura 11 – Cálculo a partir da soma das "velocidades de impressão"
Fonte: Kern, 2008

A atividade foi planejada de modo a avançar com as relações inversas, sendo nossa expectativa a de que houvesse o uso da "máquina generalizadora":

> (4) Quanto tempo a "jato de tinta" leva para imprimir 900 páginas? Quanto tempo a "laser" leva para imprimir 900 páginas?
> (5) Quanto tempo as duas juntas levam para imprimir 900 páginas? E, quantas páginas imprime cada uma das impressoras?

Para resolver o item (4), os alunos produziram a "máquina" que divide a quantidade de páginas (900) pela velocidade da correspondente impressora, e, neste procedimento, a "caixa branca" que recebe o número correspondente à velocidade funciona como uma variável, mas os alunos também resolveram o item utilizando as "máquinas" construídas para resolver os itens (1) e (2) da atividade e, por meio de tentativas de "tempo", determinaram o total de "900 cópias". Nesses dois procedimentos observamos diferentes habilidades, o que procuramos ilustrar na Figura 12: no primeiro procedimento, os alunos estão trabalhando com o conceito de função; já no segundo procedimento, nos parece que eles estão fazendo uso da ideia de incógnita de uma equação.

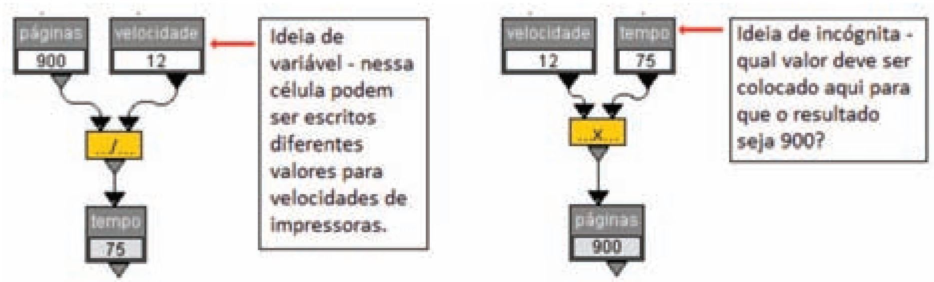


Figura 12 – Velocidade de Impressão
Fonte: Kern, 2008

Podemos perceber que a "máquina" que responde ao item (5) tem estrutura semelhante ao clássico problema das "duas torneiras"[16]. É um item cuja resolução exige maiores habilidades. Observamos que, para resolver o item (3), basta somar a quantidade de páginas produzida, por minuto, pelas duas impressoras e então multiplicar pelo tempo de funcionamento; já no item (5) é preciso trabalhar com a imagem inversa da função que associa ao *tempo o número de cópias* e aqui temos uma situação em que a linguagem da álgebra pode ajudar na estruturação do raciocínio.

Julgamos que o item (5) da atividade é bastante complexo para alunos de sexta série e é interessante observar que, no contexto das "máquinas", muitos alunos apresentaram soluções corretas e similares: somaram as "velocidades de produção" das duas impressoras e concluíram que "juntas imprimem 30 páginas por minuto", e então dividiram as 900 páginas por 30 para determinar o tempo de 30 minutos (Figura 13).

16 Dada a vazão de água de duas torneiras, pede-se o tempo necessário para encher um determinado tanque, tendo-se as duas torneiras abertas.

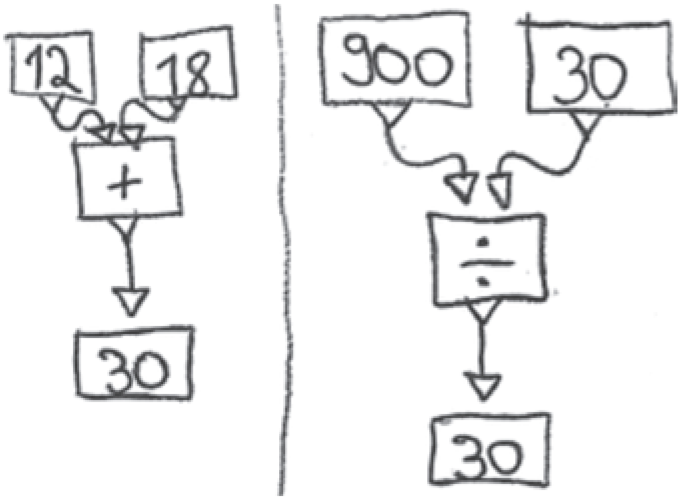


Figura 13 – Somando as velocidades
Fonte: Kern, 2008

Neste segundo encontro, a grande maioria dos alunos mostrou bastante desenvoltura na construção de "máquinas generalizadoras", tanto para expressar o "número de cópias produzidas por uma impressora em função do tempo", quanto para expressar a relação inversa em que "o tempo é função do número de cópias".

4.3 Atividade de Modelagem Matemática: "bolinhas na água"[17]

Esta atividade, proposta para o terceiro encontro da experiência, foi realizada em sala de aula, com os alunos organizados em grupos de pelo menos quatro, em torno de mesas retangulares. O material para a atividade, distribuído para os grupos, consistia em:

a) garrafa plástica[18] com marcações horizontais espaçadas por 1 cm, com água até a primeira marcação e 100 bolinhas de vidro (Figura 14);
b) folha "guia de atividade" e folha com sistema de coordenadas.

17 Esta atividade de modelagem foi inspirada no livro *Algebra Experiment I – Exploring Linear Functions*, de Mary Jean Winter e Ronald J. Carlson. – Addison-Wesley Publishing Company.
18 Utilizamos garrafas de plástico de 2 litros.

Figura 14 – Material para a atividade de modelagem
Fonte: Kern, 2008

Os alunos seguiram a orientação da folha "guia da atividade", que dizia:

Quadro 4 – Guia da atividade

Na garrafa, adicione bolinhas de vidro, uma a uma, até que o nível da água suba exatamente 1 cm. Marque essas informações na tabela.

Bolinhas	cm

(2) Quantas bolinhas precisamos para que o nível da água suba: 1 cm? 3 cm? 7 cm?

Fonte: Kern, 2008

Um dos objetivos da atividade foi levar os alunos à situação concreta de observar a influência de um fator sobre outro fator – no caso, a quantidade de bolinhas influenciando na altura do nível da água – e, dessa forma, provocá-los na compreensão dos conceitos de variáveis independente e dependente.

Os alunos foram desafiados na formulação de hipóteses e na elaboração de raciocínios generalizadores. Inicialmente todos os grupos, colocando bolinha após bolinha, contaram quantas eram necessárias para fazer o nível da água subir 1 cm. Já para fazer subir o nível da água até 2 cm, as atitudes foram diversificadas: alguns dos grupos continuaram colocando as bolinhas de vidro na garrafa e fazendo a contagem, enquanto em outros grupos houve a manifestação de que *"se já sei quantas bolinhas deslocam a água em 1 cm, para saber as outras basta multiplicar"*.

Para determinar a quantidade de bolinhas necessárias para que o nível de água subisse 7 cm, uma questão com intenção de provocar raciocínio generalizador, os grupos apresentaram diferentes e interessantes comportamentos:

a) Um dos grupos coletou as bolinhas que estavam sobrando nos demais grupos para que pudesse realizar, concretamente, a experiência de "ver o nível de água subir 7", e, dessa forma, o grupo se colocou na exaustiva atitude de contar bolinhas enquanto observava e media os diferentes níveis de água.

b) Outro grupo, para alcançar os 7 cm, somou a quantidade de bolinhas necessárias na soma de deslocamentos tais como 2 cm + 2 cm + 3 cm, obtendo o total de 37 + 37 + 56 = 130 bolinhas.

c) Também observamos um grupo que fez uso de raciocínio com média aritmética: observaram que para o deslocamento de 1 cm foram usadas 17 bolinhas e que para 2 cm foram usadas 38 bolinhas. Com a diferença de 21 bolinhas da segunda medição para a primeira, foi calculada então a média (17 + 21) ÷ 2 = 19, que informa o número de bolinhas para a variação de 1 cm no nível d'água. E, finalmente, o grupo determinou o número de 133 bolinhas correspondente à variação de 7 cm, fazendo a multiplicação 19 x 7 = 133 bolinhas.

Com o propósito de discutir aspectos relativos à coleta de dados em situação de modelagem, o professor sugeriu que todos os grupos realizassem as medições solicitadas, mesmo que já tivessem respondido às perguntas por meio de raciocínios de proporcionalidade. A Figura 15 registra parte dessa coleta de dados.

Bolinhas	centímetros
17	1
0	0
37	2
56	3
75	4

Bolinhas	centímetros
15	1
34	2
51	3
70	4
89	5

Bolinhas	centímetros
17	1 cm
0	0
38	2 cm
77	4 cm
95	5 cm

Bolinhas	centímetros
18	1
92	0
34	2
56	3
76	4

Bolinhas	centímetros
14	1
35	2
54	3
75	4
96	5
0	0

Bolinhas	centímetros
15	1
35	2
54	3
74	4
93	5
0	0

Figura 15 – Dados coletados pelos alunos na atividade das bolinhas na garrafa
Fonte: Kern, 2008

A diversidade de valores obtidos (por exemplo, os valores 70, 74, 75, 75, 76, e 77, correspondentes aos 4 cm) produziu uma interessante discussão, com a formulação de várias hipóteses: as bolinhas de vidro poderiam ter tamanhos diferentes; as marcações nas garrafas não eram muito precisas; e essa diversidade poderia ser decorrente da dificuldade para medir o nível de água com a régua disponível.

A segunda parte da atividade foi planejada com o objetivo de trabalhar outras maneiras de representar matematicamente a mesma situação problema – via gráfico e via relação funcional – e, depois disso, voltamos à construção das "máquinas":

Quadro 5 – Guia da atividade - continuação

(4) Marque todos os pontos da tabela na folha quadriculada.
(5) Os pontos que você marcou estão alinhados?
(6) Há um ponto que podemos marcar no gráfico que não depende de medição. Qual é este ponto?
(7) Trace uma reta que passe o mais próximo possível de todos os pontos.
(8) Observe o gráfico e responda: quantas bolinhas são necessárias para que o nível da água suba: 1 cm? 4 cm? 0,5 cm?
(9) Como seria uma "máquina" algébrica que resolve os três itens acima?

Fonte: Kern, 2008

No trabalho com o gráfico da situação-problema, os alunos marcaram os pontos encontrados na tabela, sem maiores dificuldades. Os grupos perceberam que os pontos estavam próximos de um alinhamento. Para o traçado da reta, o professor chamou atenção para o ponto que não depende de medição, e os alunos logo concluíram que se tratava do ponto (0,0). Levando em consideração o ponto (0,0), eles traçaram a reta solicitada (Figura 16). Apenas um grupo teve dificuldades, traçando uma reta que não passava, de forma satisfatória, perto dos pontos.

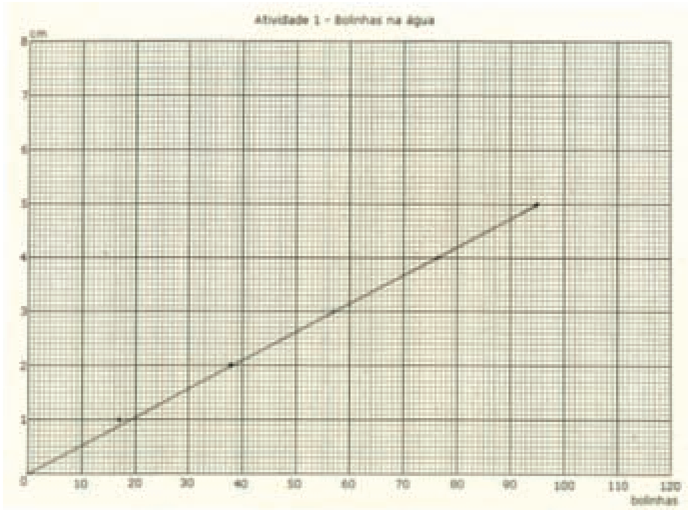


Figura 16 – Gráfico do deslocamento da água em função da quantidade de bolinhas
Fonte: Kern, 2008

A partir da observação do gráfico, era esperado que os alunos respondessem o item 8 da atividade – "Quantas bolinhas são necessárias para que o nível da água suba: a) 1 cm? b) 4 cm? c) 0,5 cm?". Mas muitos fizeram uso dos dados que estavam na tabela.

Vale aqui observar que no "fenômeno" modelado, o procedimento de colocar bolinhas na garrafa, uma a uma, corresponde ao processo de modelagem discreta. Ao utilizar o sistema de coordenadas para marcar os pontos correspondentes as medidas feitas, os alunos identificaram um conjunto de pontos aproximadamente alinhados. A partir desses dados, foi solicitado a eles que traçassem uma reta que "ficasse muito próxima dos pontos marcados". Nesse momento, estava sendo iniciada a transição do modelo discreto para o modelo contínuo. Fazendo uso da reta, os alunos observaram, por exemplo, que a quantidade de bolinhas necessárias para deslocar 1 cm não precisa ser necessariamente um número inteiro. Após a construção do gráfico, um dos grupos avançou no ajuste das informações obtidas na tabela: havendo indicado, no momento de medição, que 19 bolinhas correspondiam ao deslocamento de 1 cm, ao analisar o gráfico, eles observaram que a reta passava um pouco acima do ponto (1, 19), aproximadamente no ponto (1, 19.5). E, com o valor de 19.5, eles explicaram as 78 bolinhas correspondentes aos 4 cm que haviam encontrado no momento da medição, fazendo a multiplicação $4 \times 19.5 = 78$.

Por fim, os grupos trabalharam na "máquina" que relaciona "número de bolinhas" e "nível d'água". Foram criadas "máquinas" com o cuidado de manter uma "caixa branca" vazia para receber números correspondentes à variável "nível de água em cm", conforme mostra a Figura 17. Mas ainda observamos casos em que três "máquinas" foram construídas para responder sobre o "número de bolinhas" quando o nível sobe 1 cm, 2 cm ou 4 cm, como mostra a Figura 18.

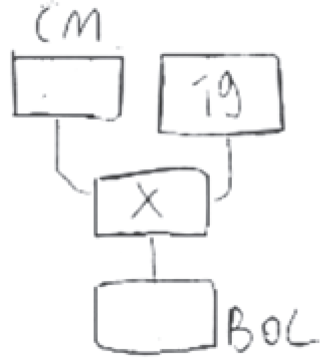


Figura 17 – "Caixa-branca" vazia
Fonte: Kern, 2008

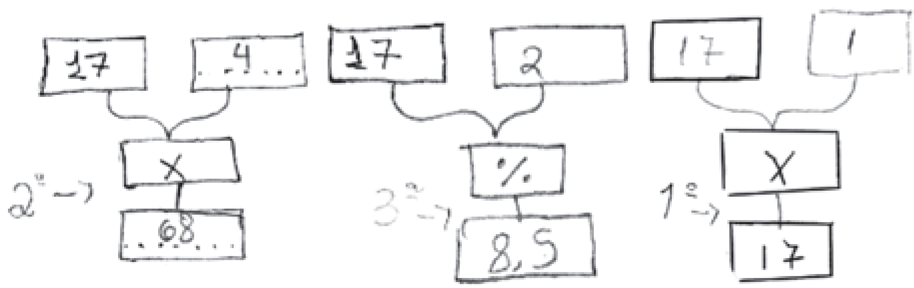


Figura 18 – Diferentes máquinas para um mesmo problema
Fonte: Kern, 2008

Com perguntas correspondentes às situações em que a medição é impossível de ser realizada, por exemplo, "se colocamos apenas uma bolinha é possível observar o quanto sobe o nível de água?", provocamos os alunos a usarem a "máquina" construída.

Encerramos a atividade discutindo as diferentes formas de representação do "fenômeno" modelado – tabela, gráfico e "máquina". Dessa forma, analisamos, juntos, a estrutura das "máquinas generalizadoras" correspondentes ao "número de bolinhas em função de cm" e sua inversa "cm em função do número de bolinhas" e então introduzimos a letra "*x*" para representar a "caixa branca" vazia em cada "máquina" e assim escrevemos, por exemplo, a relação funcional: "número de bolinhas $= 19 . x$, onde x é a variação do nível da água em cm".

4.4 Retomando a Atividade "bolinhas na água"

No quarto encontro voltamos à experiência das "bolinhas na água", mas avançando com situações nas quais os alunos deveriam observar a variação do nível da água em diferentes tipos de garrafas e estabelecer as correspondentes relações funcionais, utilizando diferentes tipos de representação (tabela, gráfico, "máquina"):

A experiência da medição do nível de água na garrafa, com bolinhas, foi realizada com os recipientes abaixo. Os dados foram registrados em três tabelas diferentes, uma para cada recipiente.

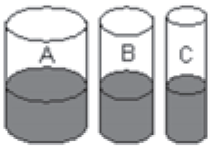


Tabela 1	
bolinhas	cm
30	3
60	6
90	9

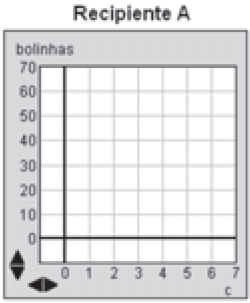
Tabela 2	
bolinhas	cm
30	2
60	4
90	6

Tabela 3	
bolinhas	cm
12	1
36	3
60	5

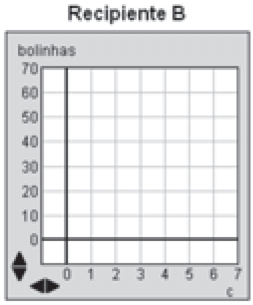
Qual é a tabela correspondente a cada recipiente?

Faça o gráfico correspondente a cada recipiente.

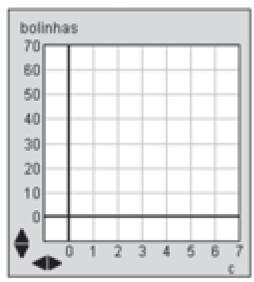
Recipiente A



Recipiente B



Recipiente C



Desenhe a máquina que, informando o quanto sobe em cm o nível de água, calcula o número de bolinhas.

Figura 19 – Retomando a atividade "Bolinhas na água"
Fonte: Kern, 2008

Considerando que este é um problema com muitas informações e que estávamos trabalhando com alunos de sexta série, foi grande a nossa satisfação quando observamos as resoluções apresentadas por um número significativo de grupos. Em sistema de coordenadas com grade quadriculada (Figura 20), os alunos marcaram os pontos informados nas três tabelas, traçaram a reta correspondente a cada um dos gráficos e, sem maiores dificuldades, estabeleceram as correspondências entre gráficos e garrafas.

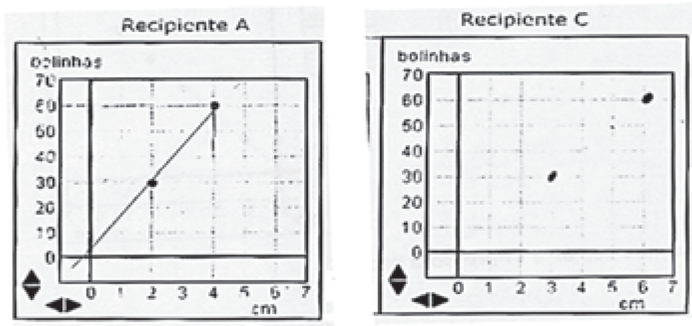


Figura 20 – Pontos e gráficos
Fonte: Kern, 2008

Os alunos também retomaram o objeto "Máquinas Algébricas" e nele construíram as "máquinas" correspondentes a cada uma das três garrafas (Figura 21), e escreveram expressões que informavam o número de bolinhas em função do nível de água.

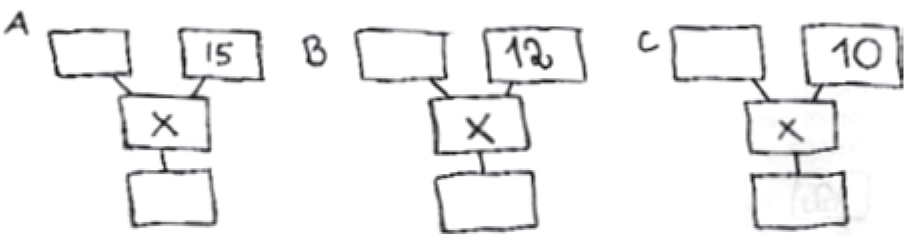


Figura 21 – "Máquinas" correspondentes às três garrafas
Fonte: Kern, 2008

4.5 Comentários sobre o Desenrolar da Sequência de Atividades

Além dos quatro encontros comentados anteriormente, foram realizados mais dois encontros como parte de nossa experiência de ensino. Nesses encontros finais, os alunos trabalharam, essencialmente, com máquinas mais elaboradas quanto ao número de variáveis envolvidas no problema. Por exemplo, uma das máquinas que construíram resolvia o problema de calcular o "gasto do freguês" em uma pizzaria, onde havia o consumo de pizza, refrigerante e sorvete. Alguns grupos produziram "máquinas" mais elaboradas ao incluírem também o dinheiro para pagamento e o correspondente troco a ser dado ao freguês.

Ao longo da realização da experiência, observamos uma evolução no desempenho dos alunos, e, por isso, foi possível identificar um crescimento na compreensão da linguagem algébrica. De início, os alunos construíram para cada caso particular do problema uma "máquina algébrica", ainda indicando um forte raciocínio de natureza aritmética. Depois avançaram com as "máquinas genéricas" que resolviam um mesmo problema em muitas situações particulares, já indicando um raciocínio de natureza algébrica.

Intencionalmente, a sequência de atividades proposta aos alunos se restringiu a situações que trataram de relações de proporcionalidade, pois nosso objetivo maior foi propor uma introdução ao pensamento algébrico por meio do trabalho com relações funcionais, e para tanto julgamos importante que a experiência se desenvolvesse dentro da simplicidade do modelo linear.

5. CONCLUSÃO

Finalizamos este texto colocando a pergunta: será que é possível ensinarmos álgebra de uma maneira diferente? É verdade que ensinar um conteúdo de um modo diferente exige um complexo processo de reestruturação. Não temos a pretensão de obter a resposta a tal pergunta, nem de trazer a solução dos problemas no ensino de álgebra. O que temos, depois de refletir sobre nossa prática diária de professor, com base em leituras feitas na elaboração de nosso trabalho de dissertação e pela experimentação realizada como parte deste trabalho, são algumas contribuições.

Acreditamos que, ao desenvolver nos alunos de sexta série a habilidade de expressar relações entre variáveis, propiciamos uma introdução ao pensamento algébrico de forma tal que o "uso das letras" se tornou significativo trazendo a compreensão da necessidade e da importância da álgebra. A exploração de situações problema, usando o aplicativo "Máquinas Algébricas", possibilitou aos alunos a transição do raciocínio de natureza aritmética àquele de natureza algébrica, sem que houvesse a necessidade de apresentação formal da noção de variável e função. Além da ideia de variabilidade e de dependência entre variáveis, os alunos indicaram ter compreendido as diferentes formas de representação de uma situação que envolve uma relação funcional – tabelas, gráficos e leis da função.

O progresso de nossos alunos nos faz julgar que a sequência de atividades proposta foi ao encontro da necessidade de abordarmos a introdução à álgebra de um modo diferente. Mas é importante lembrar que não existem regras que possam garantir, de antemão, o sucesso de uma experiência de ensino. O que temos na literatura, na pesquisa e, em particular, na nossa dissertação de Mestrado, são orientações e experiências que podem ajudar os professores no interessante e complexo processo de ensinar Matemática. Na dissertação apresentamos uma análise detalhada do desenrolar das atividades realizadas com os alunos, indicando dificuldades e progressos. Este material, para além do texto aqui apresentado, pode ajudar os professores interessados em realizar novas experiências de ensino no contexto da álgebra, e é dentro desse espírito que trazemos a nossa contribuição.

6. REFERÊNCIAS

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. In: BRUN, J. (Org). *Didática das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais* (5ª a 8ª série): Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CHARBONNEAU, Louis. From Euclid to Descartes: Algebra and its Relation to Geometry. In: BEDNARZ, N. *et al*. (Ed.). *Approaches to Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 15-37.

JANVIER, Claude. Modeling And The Initiation Into Algebra. In: BEDNARZ, N. *et al.* (Eds.). *Approaches to Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 225-236.

KERN, Newton. *Uma introdução ao pensamento algébrico na sexta série através de relações funcionais,* 137 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/15584>.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A.; SHULTE, A. (Org.). *As Idéias da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1997. p. 9-22.