

Eduarda Nova Cruz

Estudo comparativo das teorias quânticas de Copenhague, Bohm e Everett

Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil

03 de novembro de 2022

Eduarda Nova Cruz

**Estudo comparativo das teorias quânticas de Copenhague,
Bohm e Everett**

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Instituto de Física

Orientador: Prof. Dr. David Möckli

Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil

03 de novembro de 2022

“Essa era a questão, ‘a coisa que está ali’. Não se poderia senão: ultrapassá-la. E para ultrapassá-la, ter que considerá-la uma suposição. Mas volta e meia, não era mais hipótese: era a coisa que está ali.”

Clarice Lispector

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo contrastar três teorias da mecânica quântica - a de Copenhague, a de Bohm e a de Everett - em relação às suas dinâmicas e ontologias sugeridas.

Como forma de introduzir conceitos básicos da mecânica quântica, iremos descrever o experimento mental das caixas de Einstein e, a partir dele, apresentar as três teorias quânticas que serão discutidas ao longo do trabalho. Esta apresentação será essencialmente qualitativa, guiada pelas principais perguntas que são colocadas a partir do experimento, como “O que é uma medida?”, “Existe alguma diferença intrínseca entre sistema medido e sistema medidor?” ou “Como interpretar o resultado de uma medida?”. Além disso, será discutido o conceito de localidade. É dessa maneira que motivamos o surgimento de teorias quânticas alternativas à interpretação ortodoxa estatística mais comumente utilizada para fazer previsões compatíveis com os resultados experimentais.

Em seguida, passaremos a analisar o sistema de dois qubits, tratando de alguns conceitos básicos de computação quântica. Justificaremos a escolha do referido sistema e faremos a descrição básica de um processo de medida comum a todas as interpretações nas representações de Schrödinger e de Heisenberg nesta ordem, apontando suas principais semelhanças e diferenças. Então, iremos discutir as particularidades de cada teoria quântica, com foco especial nos resultados da medida.

Concluiremos o trabalho com a comparação detalhada das três interpretações abordadas quanto às ontologias, às dinâmicas, ao caráter probabilístico e à localidade. A partir disso, discutiremos como se dá o processo de transmissão de informação quântica. Também apontaremos caminhos de pesquisa possíveis a partir dos nossos resultados, tendo em vista a continuação do estudo de fundamentos de mecânica quântica.

Palavras-chave: Mecânica Quântica. Fundamentos de Mecânica Quântica. Interpretações da Mecânica Quântica. Mecânica Bohmiana. Teoria Everettiana. Informação Quântica.

Abstract

The objective of this work is to compare the dynamics and the ontologies of three quantum-mechanical theories - Copenhagen interpretation, Bohmian mechanics and Everettian theory.

To introduce the basic concepts of quantum mechanics, we describe Einstein's boxes thought experiment and present all the three quantum theories which will be explored throughout the paper. This is done in a primarily qualitative way, guided by the main questions that arise from the experiment: "In what exactly consists a measurement?", "Is there any intrinsic difference between the measurer and the measured system?" or "How can we interpret the result of a measurement?". Furthermore, we discuss the concept of locality. In this way, we motivate the emergence of alternative quantum theories, in contrast to the statistical orthodox interpretation more often used to make predictions about experimental results.

Next, we analyze a two-qubit system introducing some basic concepts of quantum computation. We motivate the choice of this system and then describe a measuring process that is common to all interpretations in the Schrödinger and then in the Heisenberg picture, pointing out the main similarities and differences between them. Finally, we discuss the peculiarities of each quantum theory focusing on the measurement results.

We conclude with a comparison of the three interpretations addressed in this work regarding their ontologies, dynamics, probabilistic character and locality. From there, we discuss how the quantum information transmission process takes place. We also indicate possible ramifications of the research project based on our results in the hope of contributing to further studies in the foundations of quantum mechanics.

Keywords: Quantum Mechanics. Foundations of Quantum Mechanics. Interpretations of Quantum Mechanics. Bohmian Mechanics. Everettian Theory. Quantum Information.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Esquema do experimento das Caixas de Einstein	12
Figura 2 – Caixa B no instante $t = 0$, de acordo com a interpretação de Copenhague	25
Figura 3 – Caixa B no instante $t = 1$, de acordo com a interpretação de Copenhague	25
Figura 4 – Caixas B_1 e B_2 no instante $t = 2$, de acordo com a interpretação de Copenhague	26
Figura 5 – Caixas B_1 e B_2 no instante $t = 3$, de acordo com a interpretação de Copenhague	26
Figura 6 – Caixa B no instante $t = 0$, de acordo com a mecânica Bohmiana	36
Figura 7 – Caixa B no instante $t = 1$, de acordo com a mecânica Bohmiana	37
Figura 8 – Caixas B_1 e B_2 nos instantes $t = 2$ e $t = 3$, de acordo com a mecânica Bohmiana	37
Figura 9 – Caixa B no instante $t = 0$, de acordo com a teoria Everettiana	44
Figura 10 – Caixa B no instante $t = 1$, de acordo com a teoria Everettiana	45
Figura 11 – Caixas B_1 e B_2 no instante $t = 2$, de acordo com a teoria Everettiana	45
Figura 12 – Caixas B_1 e B_2 no instante $t = 3$, de acordo com a teoria Everettiana	46
Figura 13 – Foliações geológicas em uma rocha	71

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Caixas de Einstein	11
2	TEORIAS QUÂNTICAS	19
2.1	Interpretação de Copenhague	19
2.2	Mecânica Bohmiana	27
2.3	Teoria Everettiana	38
3	O SISTEMA DE DOIS QUBITS	47
3.1	Representação de Schrödinger	48
3.2	Representação de Heisenberg	51
3.3	Descritores	52
3.4	Princípios de computação quântica - portas lógicas	55
3.4.1	Porta lógica NOT	55
3.4.2	Porta lógica Hadamard	56
3.4.3	Porta lógica CNOT	57
3.5	O processo de medida	59
3.5.1	Pré-medida	59
3.5.2	Medida	60
3.6	Estados e descritores relativos	61
4	DISCUSSÃO	65
4.1	Interpretação de Copenhague	65
4.2	Mecânica Bohmiana	67
4.3	Teoria Everettiana	69
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO	73
	REFERÊNCIAS	79
	APÊNDICES	83
	APÊNDICE A – EQUAÇÃO DE MOVIMENTO DE HEISENBERG	85
	APÊNDICE B – REPRESENTAÇÃO FUNCIONAL DA PORTA CNOT	87
	APÊNDICE C – EQUAÇÕES-GUIA DOS QUBITS S E M	91

1 Introdução

1.1 Caixas de Einstein

Em outubro de 1927, na Quinta Conferência de Solvay, Albert Einstein apresentou pela primeira vez um experimento que colocava em questão a completude da mecânica quântica¹. As conferências de Solvay são eventos internacionais que promovem o encontro de cientistas e o debate acerca de tópicos de física e de química. A primeira conferência foi idealizada pelo cientista belga Ernest Solvay em 1911 e seu tema era “A teoria da radiação e dos *quanta*”. Desde então até as edições mais recentes, as conferências foram responsáveis por grandes avanços da teoria quântica e contaram com a presença dos principais teóricos da área. A Quinta Conferência foi presidida por Henrik Lorentz e seu tema era “Elétrons e fótons”. A este encontro, compareceram Werner Heisenberg, Wolfgang Pauli, Paul Dirac, Niels Bohr, Louis de Broglie e Erwin Schrödinger, dentre outros cientistas.

As conferências dividem-se entre apresentações de palestrantes convidados escolhidos pelo presidente da edição e sessões de debate de que todos podem participar. Einstein não fez uma apresentação na conferência de 1927; na verdade, manteve-se em silêncio ao longo de quase todo o evento ([INSTITUT INTERNATIONAL DE PHYSIQUE SOLVAY, 1928](#)). Foi apenas após a palestra de Niels Bohr, “O postulado dos *quanta* e o novo desenvolvimento da atomística”, que ele se manifestou, questionando o princípio da complementaridade de Bohr na forma de um experimento mental. Cabe observar que o referido princípio faz parte da interpretação de Copenhague da mecânica quântica que na época, assim como hoje, era aquela que possuía mais adeptos, incluindo vários dos cientistas presentes na conferência.

O experimento proposto por Einstein assumiu sua versão mais famosa, a das “Caixas de Einstein”, em uma reformulação feita por de Broglie em seu livro “A interpretação atual da mecânica ondulatória” de 1964 ([DE BROGLIE, 1964](#)):

Uma partícula é confinada em uma caixa B de paredes totalmente impermeáveis (1.a). Em seguida, a caixa é dividida em duas partes B_1 e B_2 - por meio da introdução de uma parede impermeável adicional, por exemplo (1.b). As duas caixas B_1 e B_2 são então afastadas até que uma grande distância as separe (1.c). Por fim, é feita uma medida para verificar a posição da partícula, ou seja, uma das caixas é aberta e seu interior é inspecionado.

¹ Este experimento foi publicado no anal da Conferência em 1928 ([INSTITUT INTERNATIONAL DE PHYSIQUE SOLVAY, 1928](#)), anos antes da publicação do famoso experimento EPR no artigo “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?” ([EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935](#)).

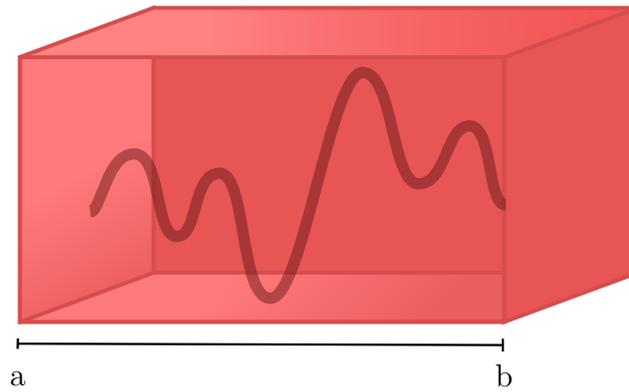
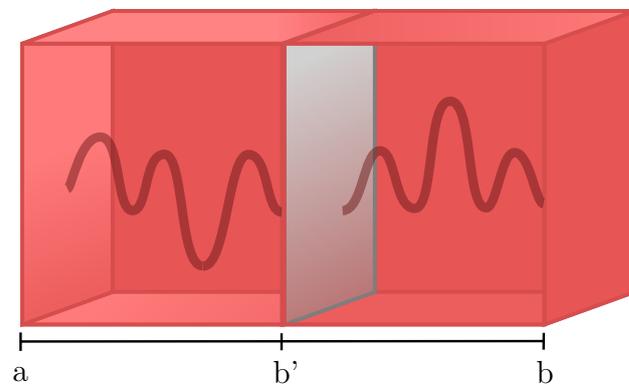
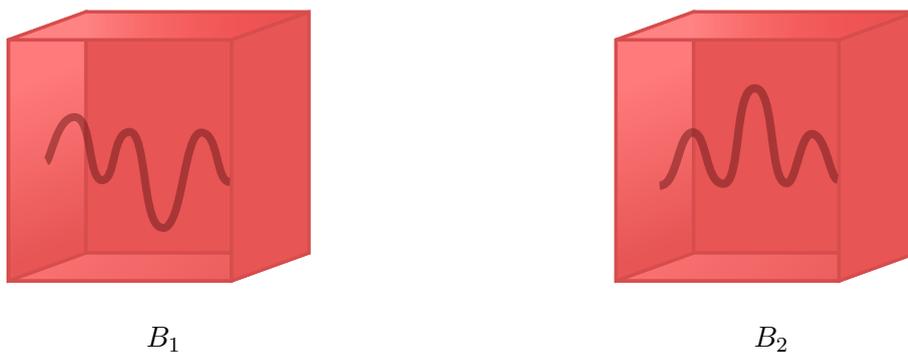
(1.a) Caixa B no instante $t = 0$ (1.b) Caixa B no instante $t = 1$ (1.c) Caixas B_1 e B_2 no instante $t = 2$

Figura 1 – Esquema do experimento das Caixas de Einstein

Para que a função de onda seja dividida conforme a figura, a inserção da barreira deve acontecer de uma maneira específica. A introdução de uma parede na caixa é, em geral, um processo termodinamicamente violento que faz com que a função de onda seja confinada em apenas um dos lados da caixa. O experimento mental pressupõe a divisão simétrica da função de onda (ela é não-nula em ambos os lados da caixa); este resultado

poderia ser obtido experimentalmente através de um processo adiabático, a exemplo do que acontece com condensados de Bose-Einstein (GEA-BANACLOCHE, 2002).

De acordo com o formalismo matemático da mecânica quântica, associamos uma função de onda complexa $\Psi(\mathbf{r}, t)$ à partícula. Esta função de onda, por sua vez, é uma combinação linear das autofunções do sistema, que estão relacionadas às possíveis posições que a partícula ocupa. Além disso, temos um postulado estatístico que relaciona o coeficiente de uma autofunção com a probabilidade de a partícula ser encontrada no seu autoestado correspondente em uma medida.

Partimos da suposição de que a partícula está dentro da caixa B , ou seja, sua função de onda é nula em qualquer ponto fora da caixa. Isto porque os coeficientes que multiplicam os estados da partícula fora da caixa são nulos, o que implica probabilidade nula de medir a partícula fora da caixa. Também sabemos que a soma de todas as probabilidades calculadas a partir da função de onda deve ser 1, uma vez que a partícula *com certeza* está dentro da caixa. Em outras palavras, feita a medida, a probabilidade de encontrar a partícula em alguma posição dentro da caixa é de 100%. Este postulado probabilístico é conhecido como *Regra de Born*:

$$\int_a^b |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r} = P_{ab}(t), \quad (1.1)$$

em que $P_{ab}(t)$ é a probabilidade de a partícula ser medida entre os pontos a e b no instante t .

Isto implica, no caso do experimento,

$$\int_a^b |\Psi(x, t)|^2 dx = 1, \quad (1.2)$$

onde consideramos a e b as posições das paredes externas da caixa B unidimensional, conforme indicado na figura 1.a.

A equação 1.2 é chamada *critério de normalização*. De maneira mais geral, ela é sempre válida para descrever uma partícula em uma região qualquer do espaço se os limites de integração tenderem ao infinito, pois a partícula está certamente em *algum* lugar. Definimos, então, a quantidade

$$\rho(\mathbf{r}, t) \equiv |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (1.3)$$

que denominamos *densidade de probabilidade*. Ela representa uma distribuição de probabilidades que, quando integrada entre os limites a e b retorna a probabilidade P_{ab} .

Consideramos agora a função de onda após a partição da caixa. Existem dois estados parciais possíveis de serem medidos:

- i. Partícula na caixa B_1 ;
- ii. Partícula na caixa B_2 .

Denotamos então a função de onda global Ψ por uma combinação linear de duas autofunções Ψ_1 e Ψ_2 , onde Ψ_1 corresponde ao autoestado **i** e Ψ_2 corresponde ao autoestado **ii**:

$$\Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2, \quad (1.4)$$

onde c_1 e c_2 são constantes complexas.

As autofunções são elas mesmas funções de onda e, portanto, também obedecem à relação 1.1. A partir da figura 1.b, notamos como os limites da caixa B_1 são a , a posição da primeira parede externa e b' , a posição da barreira. Analogamente, os limites de B_2 são b' e b , a posição da segunda parede externa. Assim, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b |\Psi(x, t)|^2 dx &= \int_a^b |c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2|^2 dx \\ &= \int_a^b (|c_1|^2|\Psi_1|^2 + |c_2|^2|\Psi_2|^2) dx \\ &= |c_1|^2 \int_a^{b'} |\Psi_1|^2 dx + |c_2|^2 \int_{b'}^b |\Psi_2|^2 dx = 1 \\ &\Rightarrow |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1, \end{aligned} \quad (1.5)$$

em que, no passo da primeira para a segunda linha, utilizamos o fato de que as bases das autofunções Ψ_1 e Ψ_2 são ortogonais - o que nos permite considerar a separação das caixas.

A partir desta equação, concluímos que, desde que as constantes c_1 e c_2 obedecem à equação 1.5, $|c_1|^2$ e $|c_2|^2$ representam as probabilidades de a partícula estar na caixa B_1 e na caixa B_2 respectivamente.

A função de onda evolui temporalmente de acordo com a equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(x, t) + V(x, t) \Psi(x, t). \quad (1.6)$$

Escrevemos aqui o caso unidimensional, onde \hbar é a constante de Planck reduzida e $V(x, t)$ é um potencial relacionado à inserção da barreira. O símbolo Δ representa o operador Laplaciano unidimensional $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

As três interpretações consideradas neste trabalho - a de Copenhagen, a de Bohm e a de Everett - assumem a evolução temporal pela equação de Schrödinger, embora para algumas esta não seja a única possibilidade. A interpretação ortodoxa compreende duas maneiras distintas de evolução de um sistema quântico descrito por uma função de onda: a evolução contínua dada pela equação de Schrödinger e a evolução descontínua através

do *colapso*. O colapso da função de onda é um postulado da interpretação de Copenhague e pode ser enunciado da seguinte forma:

Mediante uma medida, a função de onda evolui de maneira descontínua do estado inicial $|\Psi\rangle$ para um autoestado $|\Psi\rangle_i$ com probabilidade $|c_i|^2$.

Apesar de ser um conceito central do postulado, o significado do termo “medida” não é especificado. As outras interpretações consideradas neste trabalho não postulam o colapso da função de onda; ainda assim, são capazes de descrever formalmente o processo de medida. Retomaremos esta questão em capítulos subsequentes.

Retornando ao experimento de Einstein, estamos agora em posição de entender o que ele pretende questionar. Mesmo sem descrever explicitamente no que consiste uma medida, sabemos qual sua implicação no contexto da interpretação ortodoxa - a saber, o colapso da função de onda. Então, após a separação espacial das caixas, a medida que é feita para verificar a posição da partícula implica o colapso da função de onda. Isto significa que, ao fazer a medida, temos dois resultados possíveis:

Resultado 1: Partícula localizada na caixa B_1 e caixa B_2 vazia;

Resultado 2: Caixa B_1 vazia e partícula localizada na caixa B_2 .

É importante destacar a interdependência dos resultados parciais: o resultado da medida da caixa B_1 implica um único resultado possível para o resultado da medida da caixa B_2 e vice-versa. Por exemplo, se a partícula for detectada na caixa B_1 , mesmo que não tenhamos acesso à caixa B_2 , inferimos com probabilidade de 100% que o resultado de uma medida da caixa B_2 revelaria que ela está vazia. Isso porque as duas caixas são partes da caixa B original e a função de onda da partícula está definida para todo o espaço da caixa B . Ademais, o colapso provocado pela medida da partícula afeta a sua função de onda global (e todas as partes que a compõe).

Mais que isso: todas as partes da função de onda global são afetadas *ao mesmo tempo e instantaneamente*. Matematicamente, tal consequência fica clara pelo postulado do colapso. Porém, fisicamente, isso implicaria transmissão instantânea de informação, uma vez que o resultado da medida de uma caixa colapsa a função de onda global que também descreve a outra caixa, podendo as caixas estarem separadas por uma distância arbitrária.

A teoria da relatividade de Einstein, motivada pelo postulado de que as leis da física devem ser as mesmas para todos os referenciais inerciais, assume o tempo como uma variável em vez de apenas como um parâmetro. Assim, as coordenadas são dadas em quatro dimensões - uma temporal e três espaciais - e definimos, com isso, um intervalo infinitesimal:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1.7)$$

O postulado referido acima implica a invariância deste intervalo frente às transformações de coordenadas entre sistemas de referência distintos. Podemos ter uma *relação causal* entre dois eventos somente se a distância percorrida pela luz durante o intervalo de tempo que separa os eventos for maior ou igual do que a distância entre os eventos, ou seja, se $c^2 dt^2 \geq dx^2 + dy^2 + dz^2$.

A causalidade, a homogeneidade do espaço-tempo, a isotropia do espaço e a equivalência dos referenciais inerciais implicam a existência de uma velocidade limite para um referencial qualquer, e como consequência da teoria, esta velocidade é exatamente a velocidade da luz c . Assim, a informação que é transmitida de um evento que é causa de outro para este só pode viajar com, no máximo, a velocidade da luz.

No caso do experimento, temos dois eventos: a determinação do estado da caixa B_1 e a determinação do estado da caixa B_2 . Estes eventos são simultâneos, isto é, o intervalo de tempo que os separa é nulo. Portanto, a menos que os dois eventos ocorram exatamente no mesmo ponto do espaço, não é possível que exista uma relação causal entre eles. De forma mais geral, *dois eventos simultâneos e espacialmente separados não podem ter relação causal entre si*, que chamaremos *princípio da localidade*².

Temos, assim, que de acordo com a teoria da relatividade, a determinação do estado de uma caixa não pode causar a determinação do estado da outra caixa. A informação simplesmente não pode ser transmitida instantaneamente. Por isso, Einstein argumenta que deve existir alguma variável oculta na descrição convencional da mecânica quântica, ou seja, que a interpretação estatística é *incompleta*:

Whatever the meaning assigned to the term *complete*, the following requirement for a complete theory seems to be a necessary one: *every element of the physical reality must have a counterpart in the physical theory*. We shall call this the condition of completeness. (EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935, p. 777).

Justifica-se o uso do termo *incompleto* para a interpretação ortodoxa do experimento das caixas de Einstein se considerarmos que o estado final das caixas deve ser determinado a partir de suas condições iniciais. Conforme mostramos, a equação de Schrödinger apenas indica os estados finais possíveis e suas respectivas probabilidades; o colapso aparenta ser aleatório. Neste caso, existiria algum elemento da realidade física que não é contemplado pela teoria, o que faz com que ela seja incompleta. Uma teoria física completa deveria postular a existência deste conjunto de condições iniciais, se ele de fato existir. Ao longo deste trabalho, iremos apresentar alternativas a esta descrição do experimento.

² Tal como formulado em (NORSEN, 2005).

O capítulo 2 é dividido em três seções, nas quais apresentaremos as interpretações quânticas de Copenhagen, Bohm e Everett, respectivamente, utilizando como motivação o experimento mental das caixas de Einstein. Conforme veremos, cada uma oferece uma descrição diferente do experimento e atribui significados distintos aos resultados.

No capítulo 3, vamos descrever outro experimento que envolve um processo de medida. Introduziremos o formalismo matemático das representações de Schrödinger e Heisenberg nas seções 3.1 e 3.2. Ainda na representação de Heisenberg, será definido o conceito de descritor na seção 3.3. Depois, vamos definir os elementos básicos do sistema considerado e suas interações na seção 3.4. Finalmente, vamos modelar o processo de medida na seção 3.5 e expressar o resultado em função dos estados e descritores relativos na seção 3.6.

A discussão do resultado será feita no capítulo 4, a partir das três teorias quânticas abordadas no trabalho, quanto às suas ontologias e dinâmicas.

Por fim, no capítulo 5, trataremos do princípio da localidade e suas consequências para entender o processo de transmissão da informação quântica e concluiremos destacando a relevância do estudo dos fundamentos de mecânica quântica no atual contexto científico, além de elencar inovações que foram por ele possibilitadas.

2 Teorias Quânticas

2.1 Interpretação de Copenhague

“If I were forced to sum up in one sentence what the Copenhagen interpretation says to me, it would be ‘Shut up and calculate!’”

David Mermin

Assim como Mermin, outros físicos e filósofos da ciência mostraram-se insatisfeitos com a interpretação oferecida pela escola de Copenhague, taxando-a como instrumentalista. Mesmo assim, tal interpretação corresponde àquela ainda hoje ensinada convencionalmente em cursos de mecânica quântica. A exemplo do que acontecia na época, grande parte da comunidade científica adota a interpretação ortodoxa porque aparentemente ela não faz conjecturas controversas. Em outras palavras, atém-se ao que a teoria matemática é capaz de descrever e mantém uma postura agnóstica em relação àquilo que não é contemplado por ela, como se a ciência não devesse teorizar sobre aquilo que não está sujeito à observação humana.

Ao meu ver, a postura agnóstica da interpretação de Copenhague vai de encontro à postura de um cientista. Isso porque a investigação científica é válida mesmo que não produza um conhecimento absoluto, na medida em que é guiada por questionamentos mais do que por respostas.

Being able to predict things or to describe them, however accurately, is not at all the same thing as understanding them. [...] Facts cannot be understood just by being summarized in a formula, any more than by being listed on paper or committed to memory. They can be understood only by being explained. (DEUTSCH, 1998, p. 2).

Mais do que a elaboração de uma teoria que seja capaz de fazer previsões consistentes com os resultados experimentais, o primeiro objetivo da ciência é oferecer explicações para os fenômenos da natureza. É claro que estes dois propósitos não são excludentes; em geral, a explicação adequada de um dado fenômeno permite que sejam feitas especulações acerca de fenômenos futuros do mesmo tipo - e estas conjecturas podem ser testadas experimentalmente. O problema, porém, está em considerar as previsões como o objetivo final da ciência, já que “Passing experimental tests is only one of many things a theory has to do to achieve the real purpose of science, which is to explain the world.” (DEUTSCH, 1998, p. 7).

Embora todas as teorias científicas tenham em comum o objetivo de explicar o mundo, este objetivo não é suficiente para caracterizar uma teoria científica. A ciência não pretende ser uma via de acesso direto ao conhecimento, é um dos caminhos possíveis para tentar entender o mundo - “A ciência é apenas um dos muitos instrumentos inventados pelo homem para fazer face à circunstância.” (FEYERABEND, 1977, p. 337). Para que o “instrumento” utilizado seja classificado como científico, devem-se deixar claros seus pressupostos ontológicos (aquilo que existe) e suas implicações dinâmicas (como aquilo que existe se comporta). “A physical theory should clearly and forthrightly address two fundamental questions: what there is, and what it does. The answer to the first question is provided by the *ontology* of the theory, and the answer to the second by its *dynamics*.” (MAUDLIN, 2019, p. xi).

A interpretação que pretendemos explorar nesta seção - a interpretação de Copenhague - não é fundamentada em princípios claros. Embora ela seja pressuposta na maioria dos artigos de mecânica quântica da época do seu desenvolvimento, não houveram publicações cujo enfoque fosse a interpretação em si. Atualmente, ela é conhecida por ser uma interpretação de cunho estatístico e foi revisitada com maior escrutínio por parte de alguns cientistas. Ainda assim, não há um consenso quanto a esta teoria, de forma que optamos por expor uma versão que parece razoavelmente compatível com aquilo que propunham os primeiros físicos da mecânica quântica e com o que é ensinado em cursos básicos de graduação.

Conhecida como uma das mais antigas interpretações da mecânica quântica, a interpretação ortodoxa de Copenhague teve como principais defensores Niels Bohr e Werner Heisenberg. Filho do renomado professor de fisiologia Christian Bohr da Universidade de Copenhague, Niels cursou a graduação e obteve seu doutorado em física pela mesma universidade. Após passar um breve período em Manchester trabalhando no grupo de pesquisa de Rutherford, Bohr retornou a Copenhague e foi contratado como professor da universidade. Apenas um ano depois, em 1913, Bohr publicou o artigo (BOHR, 1913) em que expõe seu modelo atômico, o qual une o conceito da quantização da energia e o modelo planetário de Rutherford.

Entre os anos de 1920 e 1930, ele fundou o Departamento de Física Teórica da Universidade de Copenhague, mais tarde chamado Instituto Niels Bohr, dedicado a pesquisas atômicas. Tanto o Instituto quanto o próprio Bohr tiveram um papel fundamental no desenvolvimento científico dessa época, quando a Europa vivia todas as consequências da Primeira Guerra Mundial no período entreguerras e a rivalidade entre os cientistas alemães e os de outros países era crescente. A Dinamarca manteve-se neutra ao longo do combate e não teve conflitos em seu território, de forma que Bohr pôde atuar de maneira conciliadora ao oferecer oportunidades para jovens cientistas em seu Instituto - dentre eles, Heisenberg.

Em 1926, Erwin Schrödinger publicou uma série de seis artigos sobre mecânica quântica. Em janeiro, publicou o artigo (SCHRÖDINGER, 1926) em que apresenta sua equação de onda (1.6) pela primeira vez. Conforme já apresentamos, um objeto quântico passou a ser descrito por uma função de onda associada que sobrepõe em uma combinação linear todos os possíveis estados em que o objeto pode ser observado.

A partir deste modelo, podemos nos perguntar, em um primeiro momento: o que significa poder descrever *partículas* por funções de *onda*? Ou, ainda, a que tipo de onda se refere a equação? E quanto ao processo de medida, como explicar a transição de uma superposição de autoestados para apenas um estado bem definido conforme a Regra de Born?

As respostas oferecidas pela interpretação de Copenhague são de cunho anti-realista e instrumentalista. Primeiro, não podemos saber se algo existe antes que uma medida seja feita. Após a medida, porém, há uma partícula em um dos estados previstos pela função de onda. Nesse sentido, a função de onda é apenas um artifício matemático que permite fazer previsões acerca das partículas - estas, por sua vez, são as entidades que possuem caráter ontológico na teoria. Portanto, não existe algo como uma *dualidade onda-partícula*; existem partículas - cuja existência depende de uma interação - e elas são descritas por funções de onda apenas porque dessa forma é possível fazer previsões que são compatíveis com os resultados experimentais. A onda é puramente teórica e não tem caráter ôntico, o que responde à segunda pergunta. Por fim, o processo de medida altera a função através do colapso e é por ele definido - a superposição de estados evolui de maneira descontínua para apenas um dos autoestados.

Usamos o termo “anti-realista” para nos referirmos a esta teoria porque ela considera que os objetos quânticos são criados a partir da interação. O processo de medida - que pode ser entendido como interação ou, ao menos, como um tipo de interação - cria as partículas que somos capazes de perceber. Não faz sentido falar de objetos quânticos independentes devido a “*the impossibility of any sharp separation between the behaviour of atomic objects and the interaction with the measuring instruments which serve to define the conditions under which the phenomena appear.*” (BOHR, 1958, p. 39-40). Não podemos assumir a existência de um sistema quântico isolado porque é impossível provar tal hipótese, uma vez que a verificação experimental faria com que o sistema deixasse de ser isolado.

Um ano depois da publicação da equação de Schrödinger, Heisenberg enunciou o *princípio da incerteza*, retomando a não-comutabilidade entre os operadores de posição e momentum, que já havia sido formulada em 1925:

$$\hat{p}\hat{q} - \hat{q}\hat{p} = -i\hbar. \quad (2.1)$$

De acordo com esta relação, não é possível determinar ao mesmo tempo e de

maneira definitiva a posição e o momentum de um mesmo objeto quântico. Aumentar a precisão da medida da posição, por exemplo, implica o aumento da incerteza em relação à medida de momentum e vice-versa.

Inicialmente, Bohr e Heisenberg relacionavam este princípio a medidas físicas dos observáveis, mas ele é válido mesmo em teorias realistas que prescindem do experimento para a existência da realidade. Na verdade, ele está na base das explicações da aparente dualidade onda-partícula, do limite clássico-quântico e, também, do princípio da complementaridade.

O *princípio da complementaridade* foi formalmente enunciado por Bohr alguns meses depois da publicação de Heisenberg, em uma palestra na Conferência Volta em Como, na Itália. A motivação de Bohr era justificar o tratamento clássico dado a aparelhos medidores de sistemas quânticos: “[...] *however far the phenomena transcend the scope of classical physical explanation, the account of all evidence must be expressed in classical terms.*” (BOHR, 1958, p. 39).

A descrição de um sistema quântico é sempre feita de maneira clássica, porque é feita por um observador clássico, ou seja, que só pode processar informações clássicas. As questões mais enigmáticas da mecânica quântica, como o comportamento ondulatório-corpúscular da luz, emergem da observação clássica (a única de que somos capazes, segundo Bohr).

Podemos observar diferentes fenômenos a partir de diferentes arranjos experimentais em relação a uma mesma entidade física, e eles podem ser opostos, como no caso da luz. Mas os fenômenos jamais são contraditórios, porque o princípio da incerteza garante que não podem ser observados ao mesmo tempo. É como se pudéssemos ver partes diferentes de uma mesma entidade a partir de diferentes arranjos experimentais que revelam fenômenos *complementares*.

Consequently, evidence obtained under different experimental conditions cannot be comprehended within a single picture, but must be regarded as *complementary* in the sense that only the totality of the phenomena exhausts the possible information about the objects.” (BOHR, 1958, p. 40).

É importante destacar como o princípio da complementaridade pressupõe um limite entre o mundo clássico e o mundo quântico. Este limite é conhecido como *corte de Heisenberg*. O observador sempre está situado acima do limite, no mundo clássico, enquanto o sistema observado pode estar em qualquer um dos domínios. Para os físicos da escola de Copenhague, os sistemas abaixo do limite somente poderiam existir mediante uma interação com um observador clássico e toda informação acerca destes sistemas seria obtida através de processos de medida cujos resultados estariam relacionados pelo princípio da complementaridade. Apesar de argumentarem que não seria possível dizer exatamente

qual é o limite clássico-quântico de Heisenberg, ele era considerado objetivo e imóvel. Atualmente, existem interpretações chamadas de neo-Copenhague que consideram o limite subjetivo, particular de cada observador (NURGALIEVA; RENNER, 2020).

Assim, fica evidente o aspecto instrumentalista desta teoria quântica. Para a interpretação de Copenhague, a teoria é uma descrição matemática que permite que previsões compatíveis com os experimentos sejam feitas.

As stressed in the lecture, *an adequate tool* for a complementary way of description is offered precisely by the quantum-mechanical formalism which represents *a purely symbolic scheme permitting only predictions*, on lines of the correspondence principle, as to results obtainable under conditions specified by means of classical concepts. (BOHR, 1958, p. 40, grifo nosso).

Além disso, não é fácil identificar *aquilo que existe*, a ontologia proposta pela interpretação de Copenhague. A dinâmica é especificada pela equação de Schrödinger e pelo postulado do colapso, cuja ambiguidade pretende ser desfeita pelo princípio da complementaridade. O processo de medida, embora não seja totalmente definido, está relacionado a um observador clássico e a existência dos objetos quânticos depende desta interação.

There is little agreement about just what this approach to quantum theory [the Copenhagen Interpretation] postulates to actually exist or how the dynamics can be unambiguously formulated. Nowadays, the term is often used as shorthand for a general instrumentalism that treats the mathematical apparatus of the theory as merely a predictive device, uncommitted to any ontology or dynamics at all. (MAUDLIN, 2019, p. xi).

Podemos considerar, então, que aquilo que existe é o mundo clássico como o conhecemos. O mundo quântico emerge da sua interação com o mundo clássico e, por isso, possui existência condicional. É claro que tais afirmações idealmente seriam acompanhadas de uma resposta à pergunta “Qual é o limite entre o mundo clássico e o mundo quântico?”. Outrossim, a interpretação aponta para a importância da interação pressuposta em uma medida, mas descreve apenas as consequências deste processo, sem oferecer uma definição. O que significa uma interação entre dois sistemas (como isso acontece?) e quais as condições necessárias para que ela ocorra?

Pelo princípio da complementaridade, temos apenas vislumbres fenomenológicos do objeto quântico sob observação e eles são complementares entre si. Porém, o que justifica

estabelecer esta relação entre as observações? Se os objetos quânticos são criados a partir da observação, então como podemos afirmar que diferentes observações criam o mesmo objeto quântico?

Ademais, a postura instrumentalista sempre implica uma teoria incompleta. A explicação é parte essencial e imprescindível de qualquer teoria, especialmente da científica. É necessário situar a teoria em um contexto de formalismo lógico para que termos como “verdadeiro” tenham algum sentido. Podemos tomar como exemplo a teoria da denotação de Bertrand Russell, associada à sua postura epistemológica realista, aplicada à frase “O atual rei da França é calvo” (RUSSELL, 1905). Qual deveria ser o valor de verdade associado a tal proposição? De acordo com a teoria, esta frase pode ser decomposta de maneira simplificada em “Existe x tal que x é o atual rei da França” e “ x é calvo”. Para que a proposição original seja considerada verdadeira, ambas as partes devem ser verdadeiras. Por isso, a frase “O atual rei da França é calvo” é falsa simplesmente porque não existe um atual rei da França do ponto de vista realista.

Da mesma forma, e em particular no âmbito da ciência, é de extrema relevância construir uma estrutura que compreenda tanto o formalismo matemático quanto as explicações que permitem interpretá-lo. Estas explicações são responsáveis inclusive pelo desenvolvimento de experimentos que permitem que o fenômeno seja “visto por ele mesmo”.

An ontological idealist and an ontological realist could not consistently ascribe the same truth-value to the statements of the relevant quantum theories. The epistemological idealist and realist will be unable to agree upon which statements of the relevant quantum theories are susceptible to observational substantiation or refutation. (MEHLBERG, 1980, p.10).

Agora, então, podemos discutir o experimento das caixas de Einstein pelo prisma da interpretação de Copenhague.

Inicialmente, temos uma função de onda que descreve uma partícula dentro da caixa (figura 2). A função de onda é apenas um instrumento matemático que nos permite prever a posição na qual a partícula será medida com uma probabilidade associada. A partícula, por sua vez, só passará a existir mediante a interação com um sistema clássico. No caso, este sistema é o observador que abre uma das caixas ao final do experimento. Ou seja, inicialmente, não há um objeto que exista de fato. Dizer que a partícula está nas duas caixas ao mesmo tempo não faz sentido.

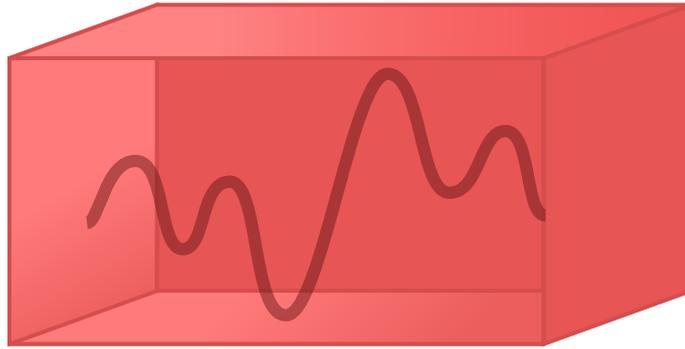


Figura 2 – Caixa B no instante $t = 0$, de acordo com a interpretação de Copenhague

A função de onda evolui de acordo com a equação de Schrödinger. Quando uma barreira é introduzida na caixa, cada parte possui uma função de onda associada que é definida dentro dos seus respectivos limites (figura 3). Estas funções são precisamente as autofunções que compunham a função de onda global definida para toda a caixa inicialmente. Neste ponto, ainda temos apenas funções de onda que relacionam probabilidades, mas nenhum ente com existência real.

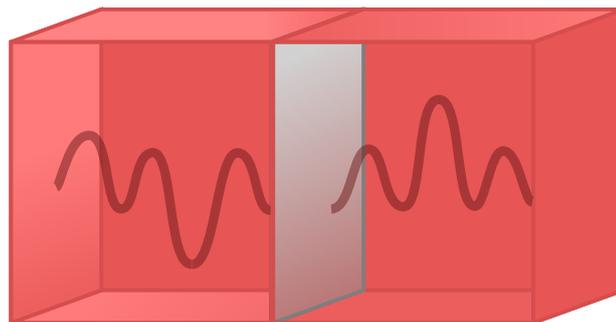


Figura 3 – Caixa B no instante $t = 1$, de acordo com a interpretação de Copenhague

Mesmo após a separação das partes da caixa (figura 4), a função de onda global ainda é a combinação linear das duas autofunções, com coeficientes que estão relacionados à probabilidade de detectar a partícula na caixa B_1 e à probabilidade de detectar a partícula na caixa B_2 .



Figura 4 – Caixas B_1 e B_2 no instante $t = 2$, de acordo com a interpretação de Copenhague

Finalmente, ocorre o processo de medida. Na interpretação de Copenhague, isto significa que um observador clássico interagiu com o sistema quântico. Neste momento, a evolução da função de onda se dá através do colapso. Não é prático seguir descrevendo o objeto por uma função de onda porque ela agora é apenas uma autofunção com coeficiente 1, e esta autofunção representa o estado em que o sistema quântico foi medido. A partir desta interação entre o observador e o sistema, é criado um ente com existência real: a partícula (figura 5). A partícula passa a existir, mas sua existência só foi possível mediante o processo de medida.



Figura 5 – Caixas B_1 e B_2 no instante $t = 3$, de acordo com a interpretação de Copenhague¹

Conforme discutimos na apresentação do experimento, isso implica na transmissão instantânea da informação, já que o colapso da função de onda se refere à função de onda global, que está definida para as caixas B_1 e B_2 . Qualquer alteração na função de onda global afeta simultaneamente as duas caixas, por definição. Então, mesmo que o processo de medida ocorra em apenas uma das caixas, a informação sobre o colapso da função de onda é transmitida instantaneamente para a outra caixa.

¹ Como o colapso é aleatório, a partícula poderia ser encontrada em uma ou outra caixa. A escolha da caixa B_2 na representação foi arbitrária.

Também de acordo com o que foi discutido na primeira seção, outra consequência é a violação da teoria da relatividade. O processo de medida e o colapso da função de onda são causalmente relacionados na interpretação de Copenhague. Mas eles também são espacialmente separados: o processo de medida refere-se a uma das caixas, enquanto o colapso refere-se às duas (e as caixas são espacialmente separadas antes da medida).

A alternativa apontada por Einstein para validar a interpretação ortodoxa é tomá-la como uma descrição puramente estatística. Isto faz com que a teoria seja consistente, mas também impede que qualquer afirmação seja feita sobre entes individuais. Em vez disso, é preciso que um grande conjunto de dados seja analisado para que se chegue a qualquer conclusão.

2.2 Mecânica Bohmiana

“I think that conventional formulations of quantum theory, and of quantum field theory in particular, are unprofessionally vague and ambiguous. Professional theoretical physicists ought to be able to do better. Bohm has shown us a way.”

John Bell

Na mesma Conferência em que Einstein propôs o experimento das caixas, em 1927, Louis de Broglie apresentou os primeiros conceitos da interpretação da onda-piloto que mais tarde seriam desenvolvidos por David Bohm. Já em 1924, de Broglie havia defendido em sua tese de doutorado que toda matéria apresenta um comportamento ondulatório quantizado, conforme a equação

$$p \lambda = h, \quad (2.2)$$

onde p é o momentum da partícula, λ é o comprimento da onda associada e h é a constante de Planck.

Essa relação foi obtida baseada nos estudos de Planck e Einstein, que haviam introduzido o conceito de *quantum* e a subsequente discretização da energia através dos fótons. Ao mostrar que à toda matéria pode ser associada uma onda que transporta energia quantizada, de Broglie recuperou a visão realista do mundo físico, que é característica da mecânica clássica. Além disso, na palestra de 1927, ele defendeu que as partículas descrevem trajetórias que são determinadas pela onda associada da equação 2.2.

A recepção da teoria de de Broglie na comunidade científica não foi positiva. Os defensores da interpretação de Copenhague, em especial Pauli, manifestaram-se após a sua palestra na conferência e mantiveram uma postura cética. As críticas tratavam

principalmente da compatibilidade da teoria de de Broglie com a teoria eletromagnética, mas nenhum ataque direto foi feito que desacreditasse o francês. Podemos perceber pelo comentário de Pauli “De toutes façons je ne crois pas que cette représentation puisse être développée d’une manière satisfaisante; je me propose d’y revenir lors de la discussion générale.”² (INSTITUT INTERNATIONAL DE PHYSIQUE SOLVAY, 1928) como não havia interesse em debater pontos específicos e como a resistência à teoria estava pautada mais em questões pessoais do que científicas.

Em 1927, a Europa era palco da Primeira Guerra Mundial. Embora diversos acontecimentos possam ser apontados como relevantes para a análise deste período, a guerra não pode ser pensada somente em termos bélicos e de confrontos diretos:

assim a atividade de milhões de pessoas que migram, incendiam casas, abandonam a lavoura, aniquilam-se umas às outras nunca se expressa na descrição da atividade de uma dezena de pessoas que não incendiaram casas, não trabalharam na lavoura, não assassinaram seus semelhantes. (TOLSTÓI, 2017).

O movimento de um povo é coletivo, embora não seja deliberado e homogêneo e, por isso, as particularidades de cada pessoa envolvida são também relevantes para a sua compreensão. Destacamos aqui o papel do pensamento filosófico.

A fenomenologia, embora seja baseada nos pensamentos de Immanuel Kant, teve sua origem propriamente dita com o filósofo alemão Edmund Husserl em 1913. Na filosofia Kantiana, são propostos dois termos: *noumena* e *phenonema*, sendo que este último era considerado por Kant aquilo que tomamos como *realidade* e refere-se às impressões subjetivas que temos das coisas (*noumena*).³ A obra de Husserl busca investigar tais percepções individuais e como elas são formadas e transmitidas. Podemos definir a fenomenologia, de maneira reducionista, como “the study of structures of consciousness as experienced from the first-person point of view.” (SMITH, 2018).

Nesse ínterim, é fácil perceber como a interpretação de Copenhague é fruto dessa corrente filosófica que dominou o início do século XX. A realidade externa é prescindível na fenomenologia, e é negada como tema de estudo da física pelos primeiros cientistas da mecânica quântica. No começo do século, e posteriormente nas ideias de filósofos como Heidegger, Sartre e Merleau-Ponty, era predominante a investigação do sujeito e de suas percepções, mesmo que tenha havido certa flexibilização em relação às ideias de Husserl - Heidegger, por exemplo, estuda o ser enquanto ser, mas aborda esta questão através do *dasein* (“percepção”, na tradução de Márcia Sá Cavalcante).

² “De toda forma, não creio que esta representação possa ser desenvolvida de uma maneira satisfatória; proponho-me a voltar então à discussão geral.”, tradução nossa.

³ Esta terminologia inspirou a denominação utilizada por Paul Raymond-Robichaud na formalização matemática de seu artigo “A local-realistic model for quantum theory” (RAYMOND-ROBICHAUD, 2021).

Quando de Broglie apresentou sua palestra na conferência de 1927, eram esses os pilares do pensamento da época. Talvez isso justifique a recepção negativa de seus colegas, já que ele propunha uma teoria realista que recuperava as partículas de que tratava a mecânica clássica. Embora não tenha elaborado formalmente, a teoria de de Broglie previa a existência de uma realidade externa representada pelas partículas. A interpretação de Copenhague, por outro lado, era o formato convencional da mecânica quântica e estava plenamente de acordo com o pensamento vigente da sociedade europeia.

Outro fator que pode ter contribuído para que a teoria da onda-piloto fosse abandonada por alguns anos é o idioma. De Broglie publicou todos os seus livros e artigos em francês ao longo dos anos em que o inglês foi sendo consagrado como idioma oficial das publicações acadêmicas em física. O próprio Bohr já havia sofrido com isso no início da sua carreira, quando tentou juntar-se ao grupo de pesquisa de J. J. Thomson e foi recusado, possivelmente porque sua tese havia sido redigida em dinamarquês (ABDALLA, 2002). Embora tenha sido laureado com o Prêmio Nobel de Física em 1929, apenas 7 anos depois de Niels Bohr, de Broglie manteve-se como uma figura relativamente apagada dentro da academia, à sombra de outros cientistas da época.

Foi apenas em 1952, com David Bohm, que a teoria da onda-piloto foi retomada. Bohm nasceu e cresceu em uma cidade no interior dos Estados Unidos durante o período entreguerras. Este período foi marcado pela Grande Depressão, em que o país vivia uma recessão econômica devido à crise do sistema de produção em massa que exportava produtos para a Europa, devastada pela Primeira Guerra. Tal ambiente fez com que Bohm, assim como muitos, atribuísse a crise ao individualismo do modelo liberal.

Por isso, durante o seu doutorado, Bohm filiou-se ao partido comunista, junto a vários de seus colegas. Na época, Bohm pesquisava em tópicos da física ligados àqueles do Projeto Manhattan, que representavam um grande interesse para o país que se preparava para a guerra, mas ele mesmo era contra a ascensão dos regimes totalitários e tinha ambições mais teóricas do que experimentais.

O partido comunista tinha como base os ideais propostos por Karl Marx e Friedrich Engels na primeira metade do século XIX, no contexto da Primeira Revolução Industrial. Dentre os conceitos desenvolvidos pelos pensadores, está o de materialismo histórico, que pretende analisar a história em termos concretos e realistas, em vez de fazê-lo por meio de conjecturas teóricas e idealistas.

In direct contrast to German philosophy which descends from heaven to earth, here we ascend from earth to heaven. [...] Morality, religion, metaphysics, all the rest of ideology and their corresponding forms of consciousness, thus no longer retain the semblance of independence. They have no history, no development; but men, developing their material production and their material intercourse, alter, along with this their real existence, their thinking and the products of their thinking. Life

is not determined by consciousness, but consciousness by life. (MARX; ENGELS, 1995)

O trecho acima ilustra a insatisfação em relação ao idealismo alemão já naquela época, por ignorar as condições físicas e materiais em que a existência é possível. A motivação era principalmente social, já que a exploração dos trabalhadores durante este período parecia contraditória ao desenvolvimento intelectual que ocorria em paralelo.

O fato de Bohm ser um adepto do comunismo mostra a sua inclinação para uma interpretação materialista da realidade que, embora tenha sido fundada em questões políticas e sociais, estendeu-se inclusive para a mecânica quântica, já que “essa teoria [a teoria quântica] não é uma emanção divina, mas obra do homem” (FEYERABEND, 1977, p. 378).

A interpretação de Copenhague era - e ainda é - a interpretação padrão ensinada nos cursos de graduação. Como professor da Universidade de Berkeley, Bohm lecionava a disciplina de mecânica quântica e isso o motivou a escrever um livro didático sobre o assunto em 1951. Porém, apenas um ano depois, em 1952, ele publicou o primeiro artigo em que propunha uma nova interpretação para a teoria quântica baseada em variáveis ocultas. Embora a área de fundamentos de mecânica quântica não seja bem vista dentro da comunidade científica e seja por vezes taxada como especulação filosófica, Bohm teve seu artigo publicado em um prestigioso periódico, o *Physical Review*. Isso, porém, provavelmente deve-se a sua reputação em outras áreas da física - como estado sólido e física de plasmas -, já que as publicações que se seguiram não tiveram o mesmo alcance.

Também conhecida como *interpretação da onda-piloto de de Broglie-Bohm*, a mecânica Bohmiana é uma teoria realista e determinista. Isso, por sua vez, faz com que ela seja conceitualmente mais próxima da teoria clássica da mecânica Newtoniana. Assim como na mecânica clássica, a indeterminação não é intrínseca à teoria, ela advém do desconhecimento experimental que temos em relação às condições iniciais dos sistemas.

Na mecânica Bohmiana, o que existem são as partículas e um campo quântico Ψ que varia de acordo com a equação de Schrödinger. As partículas a que nos referimos são tipicamente elementares (como um elétron, por exemplo) e compõem corpos macroscópicos. Não há um limite clássico-quântico nesta teoria - todos os objetos que existem são quânticos, ou por serem elementares ou por serem compostos por corpos deste tipo.

A existência do campo quântico possui o mesmo caráter daquela do campo elétrico, por exemplo; ou seja, é postulada matematicamente, mas seus efeitos só são sentidos por meio de outro objeto (no caso do campo quântico, uma partícula e, no caso do campo elétrico, uma carga de prova). Por isso, parece que a existência do campo difere da existência da partícula, já que a primeira parece depender da segunda que, por sua vez, parece ser independente. Neste trabalho, não iremos aprofundar esta discussão, mas

segundo o próprio Bohm

Em outras palavras, não supomos mais que a função de onda de Schrödinger seja só um símbolo matemático conveniente para o cálculo de certas probabilidades. Em vez disso, ele passa a representar um campo objetivamente real (BOHM, 1957, p. 216).

Usamos o termo “teoria de variáveis ocultas” para nos referirmos à mecânica Bohmiana. Isto se justifica porque esta teoria prevê uma equação adicional além da equação de Schrödinger em sua dinâmica e é através dela que as trajetórias das partículas são determinadas. Conforme mencionado, a equação de Schrödinger descreve a evolução do campo quântico, ou seja, diz respeito ao comportamento da onda. O comportamento da partícula será descrito por uma nova equação, a *equação guia*, que é deduzida a partir da equação de Schrödinger, evidenciando a dependência que o movimento da partícula tem da onda-piloto.

Vamos deduzir a equação guia para N partículas, já que iremos utilizar este resultado em seções posteriores para um sistema de duas partículas. Partimos da equação de Schrödinger tridimensional

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = - \sum_{k=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_k} \Delta_k \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) + V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t). \quad (2.3)$$

A equação para cada partícula k é dada pela equação 1.6.

Como a densidade de probabilidade é uma quantidade conservada (GRIFFITHS, 2004), podemos escrever uma equação da continuidade utilizando a definição de densidade de probabilidade em 1.3:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)|^2 + \sum_{k=1}^N \nabla_k \cdot \mathbf{J}_k(\mathbf{r}_k, t) = 0, \quad (2.4)$$

em que $\mathbf{J}_k(\mathbf{r}_k, t)$ é a corrente de probabilidade. Em outras palavras, a equação acima mostra que o fluxo da probabilidade em um certo volume é igual à variação temporal da densidade de probabilidade.

Agora, partimos para algumas operações algébricas com a equação de Schrödinger. Primeiro, vamos multiplicar a equação 2.3 pelo complexo conjugado da função de onda (Ψ^*). Também vamos multiplicar o complexo conjugado da equação de Schrödinger pelo negativo da função de onda ($-\Psi$). Nestas e nas próximas equações vamos omitir a dependência que as grandezas têm dos vetores de posição e do tempo de forma a simplificar a notação.

$$\begin{cases} i\hbar \Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi = - \sum_{k=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_k} \Psi^* \Delta_k \Psi + V |\Psi|^2; \\ i\hbar \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* = \sum_{k=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_k} \Psi \Delta_k \Psi^* + V |\Psi|^2. \end{cases} \quad (2.5)$$

E, então, somamos as duas equações

$$\begin{aligned}
i\hbar \left(\Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi + \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* \right) &= \sum_{k=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_k} (\Psi \Delta_k \Psi^* - \Psi^* \Delta_k \Psi); \\
\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 &= \sum_{k=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_k} (\Psi \Delta_k \Psi^* - \Psi^* \Delta_k \Psi); \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 + \sum_{k=1}^N \frac{\hbar}{2m_k i} (\Psi^* \Delta_k \Psi - \Psi \Delta_k \Psi^*) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Esta última equação, por sua vez, tem o mesmo formato da equação da continuidade para

$$\sum_{k=1}^N \nabla_k \cdot \mathbf{J}_k = \sum_{k=1}^N \frac{\hbar}{2m_k i} (\Psi^* \Delta_k \Psi - \Psi \Delta_k \Psi^*). \tag{2.7}$$

Tanto $\Psi^* \Delta_k \Psi$ quanto $\Psi \Delta_k \Psi^*$ são números complexos, e um é o complexo conjugado do outro, de forma que podemos definir

$$z - z^* \equiv \Psi^* \Delta_k \Psi - \Psi \Delta_k \Psi^*, \tag{2.8}$$

sendo z um número complexo genérico tal que $z = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z)$, $\text{Re}(z)$ a parte real de z e $\text{Im}(z)$ sua parte imaginária. Então, temos $z - z^* = 2i\text{Im}(z) = 2i\text{Im}(\Psi^* \Delta_k \Psi)$.

Substituindo este resultado em 2.7, obtemos

$$\sum_{k=1}^N \nabla_k \cdot \mathbf{J}_k = \sum_{k=1}^N \frac{\hbar}{m_k} \text{Im}(\Psi^* \Delta_k \Psi). \tag{2.9}$$

Agora, podemos integrar espacialmente os dois lados da equação e obter

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{J}_k = \sum_{k=1}^N \frac{\hbar}{m_k} \text{Im}(\Psi^* \nabla_k \Psi). \tag{2.10}$$

Ou seja, para cada partícula k , a corrente de probabilidade associada é

$$\mathbf{J}_k = \frac{\hbar}{m_k} \text{Im}(\Psi^* \nabla_k \Psi). \tag{2.11}$$

A densidade de probabilidade ρ , por definição da mecânica Bohmiana, obedece à relação

$$\mathbf{J}_k = \rho \mathbf{v}_k, \tag{2.12}$$

onde \mathbf{v} é a velocidade associada à probabilidade, ou seja, a velocidade da partícula k .

A partir da introdução da velocidade da partícula e da relação com a densidade e com a corrente de probabilidade na equação 2.12, da equação 2.11 e da definição da densidade 1.3, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_k &= \frac{\hbar}{m_k} \operatorname{Im} \left(\frac{\Psi^* \nabla_k \Psi}{|\Psi|^2} \right); \\ \Rightarrow \mathbf{v}_k &= \frac{\hbar}{m_k} \operatorname{Im} \left(\frac{\nabla_k \Psi}{\Psi} \right).\end{aligned}\tag{2.13}$$

A última equação acima é a *equação guia* e a partir dela é possível determinar a trajetória da partícula. Podemos escrever a mesma equação de outra maneira, que será útil em outros capítulos

$$\mathbf{v}_k = \frac{\hbar}{m_k} \operatorname{Im} (\nabla_k \ln \Psi).\tag{2.14}$$

Esta é a equação que, junto à equação de Schrödinger, descreve a dinâmica da mecânica Bohmiana. Conforme podemos perceber, é uma equação diferencial da posição da partícula e, por isso, a posição só é completamente determinada se soubermos as condições de contorno do sistema. Mas, uma vez que tenhamos estas informações, a trajetória da partícula pode ser prevista com probabilidade de 100% através da dinâmica.

A probabilidade de que tratamos até agora, a de uma partícula estar em certa posição, é determinada através da Regra de Born, já enunciada em 1.1. Diferentemente do que acontece na interpretação de Copenhague, a Regra de Born não é postulada na mecânica Bohmiana. A partir do formalismo que já apresentamos até agora, é possível deduzir a relação dos coeficientes da função de onda com as probabilidades dos resultados de um experimento, recuperando a Regra⁴.

Quanto ao princípio da incerteza de Heisenberg 2.1, cabe destacar aqui que ele tem origem estatística na mecânica Bohmiana, não é uma relação intrínseca das partículas.

Em tal observação, o princípio de Heisenberg seria aplicável com altíssimo grau de aproximação, permanecendo como uma limitação válida sobre quão bem se poderia determinar o estado de um sistema físico individual. Mas essa limitação deixaria de ser aplicável se observássemos o sistema com o auxílio de processos físicos sensíveis aos estados precisos das variáveis ocultas. (BOHM, 1957, p. 209)

Segundo Bohm, o desenvolvimento da sua teoria tinha como principal objetivo mostrar que interpretações alternativas consistentes da mecânica quântica eram possíveis.

⁴ Uma dedução a partir da condição de equilíbrio das partículas é feita em (DÜRR; LAZAROVICI, 2020).

Por isso, ele reconhece que o princípio da incerteza de Heisenberg poderia ser uma propriedade intrínseca da matéria, mas sua teoria, em particular, aponta para a possibilidade contrária.

Em 1984, o físico nascido na Irlanda do Norte, John Bell, publicou um artigo cuja primeira frase é “Bohm’s 1952 papers on quantum mechanics were for me a revelation.” (BELL, 2004, p. 173). Além de ter contribuído diretamente para o desenvolvimento da teoria da onda-piloto, Bell ficou conhecido principalmente por um artigo que publicou em 1964, em resposta ao artigo de Einstein, Podolsky e Rosen (EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935), onde apresentou pela primeira vez a relação chamada *desigualdade de Bell*.

A expressão matemática da desigualdade não será apresentada, pois seria preciso definir o arranjo experimental em questão, o que não julgamos necessário para a compreensão básica de suas consequências para as teorias quânticas. Bell teve como motivação o experimento EPR e o princípio da localidade para investigar a questão da possibilidade de teorias quânticas de variáveis ocultas que fossem compatíveis com a teoria da relatividade. Isso porque, desde o início, Bell estava ciente de que a mecânica Bohmiana era uma teoria de variáveis ocultas não-local e, portanto, incompatível com a relatividade.

A desigualdade de Bell é uma relação entre as probabilidades associadas aos resultados de uma medida de determinados observáveis. Se o sistema for local - ou seja, compatível com a teoria da relatividade -, então ele deve satisfazer a desigualdade. Porém, no início da década de 1980, o físico francês Alain Aspect realizou o experimento EPR, até então um experimento mental, em um laboratório e verificou a violação da desigualdade de Bell. Outros cientistas, dentre eles o próprio Bell, já haviam previsto que a mecânica quântica violaria a desigualdade, pois aparentemente é não-local.

O *teorema de Bell*, portanto, afirma que não é possível descrever a mecânica quântica através de uma teoria de variáveis ocultas que seja local⁵. Por isso, embora a mecânica Bohmiana seja de fato uma teoria de variáveis ocultas, ela não viola o teorema de Bell, uma vez que é não-local. É claro que resta o problema da compatibilidade entre a mecânica quântica e a teoria da relatividade. Se o teorema de Bell estiver correto - o que parece ser o caso até o momento -, então talvez o caminho seja buscar uma teoria local que não seja de variáveis ocultas.

A escolha de desenvolver uma teoria deste tipo está alinhada com as ideias dominantes da época e principalmente com o posicionamento do próprio Bohm. A mecânica Bohmiana não só é uma teoria *determinista* como uma teoria *determinada*, já que deixa claro os pressupostos ontológicos e a dinâmica à qual as entidades estão submetidas. Na teoria da onda-piloto, o que existe de fato são as partículas, que possuem existência real independente de qualquer observação. As partículas são sempre quânticas e não faz sentido

⁵ A menos que a teoria seja *superdeterminista*, como a teoria Ψ -ensemble de Sabine Hossenfelder.

traçar um limite clássico-quântico, porque mesmo os objetos macroscópicos geralmente tomados como clássicos são compostos por partículas quânticas, sendo eles próprios quânticos. A mecânica Newtoniana é utilizada para descrever certos sistemas apenas como forma de aproximação, já que não há objetos clássicos. Quanto ao campo Ψ , sua existência também é postulada na mecânica Bohmiana, mas conforme já mencionamos, acreditamos tratar-se de outra classificação ontológica.

A dinâmica da mecânica Bohmiana é definida a partir de duas equações, a equação de Schrödinger e a equação-guia. A equação de Schrödinger determina a evolução das ondas-piloto, oscilações do campo Ψ em que as partículas estão imersas. Esta onda tem seu formato ditado pelas condições iniciais da partícula a qual está associada, como sua posição inicial, por exemplo. Destacamos aqui, mais uma vez, como a partícula sempre *está* em uma posição de fato, em oposição a apenas *ser encontrada* em alguma posição. A partícula é uma entidade real que ocupa lugar no espaço e, embora nem sempre disponhamos das informações necessárias para dizer qual é esta posição, a mecânica Bohmiana afirma que ela com certeza existe em algum lugar. A onda, por sua vez, assim como o campo Ψ , existe em um espaço matemático abstrato.

A equação-guia torna explícita a trajetória da partícula. Em consonância com a dedução que fizemos neste capítulo, a equação-guia depende da função de onda e por isso também a trajetória da partícula depende da onda-piloto. A mecânica Bohmiana não prevê o colapso da função de onda, cuja evolução é totalmente descrita pela equação de Schrödinger e pelas condições iniciais do sistema. A medida afeta a descrição quântica do sistema a partir da interação entre as ondas-guia, o que faz com que elas se tornem altamente localizadas. Por isso, o colapso efetivo é causa do fenômeno de *decoerência*. A posição da partícula, por outro lado, não é afetada pelo conhecimento que temos dela, pois representa apenas o registro de um fato já concretizado.

Os fenômenos estudados como tipicamente quânticos, como o comportamento ondulatório da luz, emergem de uma análise estatística na mecânica Bohmiana. Como não conhecemos as condições de contorno de todas as partículas que compõe um sistema, fazemos aproximações com base em um tratamento estatístico e é por isso que resultados como aqueles do experimento da fenda dupla são previstos também pela teoria da onda-piloto. Por outro lado, diferentemente de outras teorias não-deterministas, a mecânica Bohmiana afirma que poderíamos usar as duas equações da dinâmica para determinar tais resultados.

Outro ponto relevante que já foi superficialmente mencionado é a incompatibilidade da mecânica Bohmiana com a teoria da relatividade. A não-localidade da formulação é evidente (e será exemplificada de maneira decisiva com o sistema de dois qubits), mas destacaremos outro aspecto que sugere a incompatibilidade. Na teoria da relatividade geral, as massas determinam a configuração da malha do espaço-tempo; o espaço é tipicamente

curvo e é deformado pela presença de massas. E existe uma simetria nesta perturbação: a alteração do espaço-tempo propaga-se através das chamadas *ondas gravitacionais*, que afetam também as mesmas massas que as criaram em primeiro lugar. Tal interação, é claro, é limitada pela velocidade da transmissão da informação, ou seja, pela velocidade da luz. Mesmo assim, esta perturbação mútua é prevista pela teoria e está explícita nas equações de Einstein.

Na mecânica Bohmiana, porém, existe uma assimetria entre ondas e partículas. A posição das ondas é determinada pela configuração das partículas, mas uma vez que as partículas estão em movimento, sua trajetória é completamente determinada pelas mesmas ondas que elas originaram no momento inicial. Isso quer dizer que o formato da onda não é alterado por qualquer partícula em movimento, ele depende exclusivamente das condições iniciais do sistema e, possivelmente, da interferência com outras ondas-piloto associadas a outras partículas. As equações da dinâmica da mecânica Bohmiana não preveem subsequentes interações da onda com a partícula e talvez este seja outro aspecto em que esta teoria difira da teoria da relatividade.

Tendo em vista a apresentação que fizemos da mecânica Bohmiana, podemos finalmente analisar o experimento das caixas de Einstein pelo viés da onda-piloto. O experimento começa com o confinamento de uma partícula em uma caixa (figura 6). Desde o primeiro momento, então, a partícula existe e ocupa uma posição definida dentro da caixa, embora não se tenha conhecimento acerca dessa posição. A partícula possui uma função de onda associada que permite que a sua trajetória seja calculada, dadas as condições iniciais.

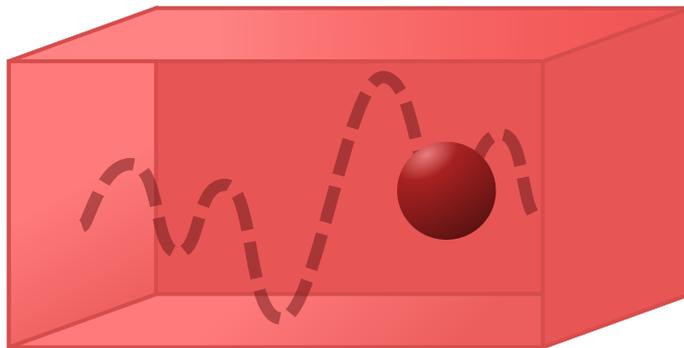


Figura 6 – Caixa B no instante $t = 0$, de acordo com a mecânica Bohmiana

A segunda etapa consiste na introdução da barreira que separa a caixa em duas partes (figura 7). Aqui, como forma de simplificar a análise, não iremos considerar a interação da partícula com as paredes da caixa ou com a barreira. Esta simplificação fará com que a descrição Bohmiana pareça local para este experimento. No entanto, se a onda-piloto interagisse com a barreira, seus estados estariam emaranhados e permaneceriam

assim mesmo após a separação. A equação guia da partícula seria escrita em termos da função de onda da barreira, embora elas estivessem espacialmente separadas (já que a barreira é comum às duas partes da caixa). Por isso, destacamos mais uma vez que a mecânica Bohmiana é uma teoria não-local - e que isso seria evidente no experimento das caixas caso não fizéssemos a aproximação mencionada. O caso em que o emaranhamento é levado em conta será tratado no capítulo seguinte com o sistema de dois qubits.

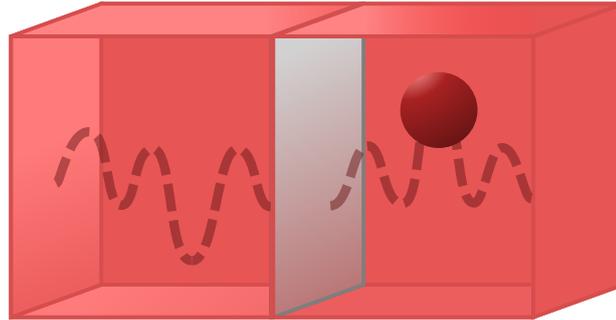


Figura 7 – Caixa B no instante $t = 1$, de acordo com a mecânica Bohmiana

Prosseguindo com o experimento, temos a partícula localizada em uma das partes da caixa. As partes são então afastadas e uma delas é aberta (figura 8). Este último processo constitui a medida, que na mecânica Bohmiana é uma constatação da posição da partícula. O observador que desconhecia a posição, passa a conhecê-la através da medida. A partícula, no entanto, não é afetada por isso, pois sua posição foi definida pelas condições iniciais do sistema e pela evolução da sua onda-piloto associada.



Figura 8 – Caixas B_1 e B_2 nos instantes $t = 2$ e $t = 3$, de acordo com a mecânica Bohmiana

Portanto, a mecânica Bohmiana oferece uma descrição completa da trajetória da partícula ao longo de todo o experimento, além de afirmar com clareza que existe uma realidade externa não restrita à interação. Contudo, trata-se de uma teoria não-local, já que a equação-guia tem como parâmetro a função de onda global.

2.3 Teoria Everettiana

“The multiuniverse theory is undoubtedly one of the most daring and most ambitious theories ever constructed in the history of science.”

Max Jammer

Em 1957, Hugh Everett III publicou um artigo intitulado “‘Relative state’ formulation of quantum mechanics” (EVERETT, 1957) como requisito para obter seu doutorado em física pela Universidade de Princeton. Este trabalho propõe uma nova teoria da medida, relativizando os papéis de sistema medido e sistema medidor e evitando o problema de definir uma fronteira entre os mundos clássico e quântico; assim como na mecânica Bohmiana, todos os objetos podem ser tratados de acordo com o mesmo formalismo da mecânica quântica.

A teoria Everettiana é universal e unitária. Ser universal significa que todos os entes do universo, a princípio, são contemplados por ela; por outro lado, ser unitária implica um único tipo de evolução temporal possível na dinâmica. Nesta teoria, a função de onda é o único ente que existe e ela evolui de maneira contínua conforme a equação de Schrödinger. Não há postulados ou hipóteses adicionais, “the ‘Everett interpretation’ is just quantum mechanics itself, read literally, straightforwardly - naively, if you will - as a direct description of the physical world, just like any other microphysical theory.” (WALLACE, 2014, p. 2).

Esta visão é radicalmente diferente daquelas que discutimos nos capítulos anteriores. Assim como acontece na teoria da relatividade geral, o sujeito perde a sua primazia. Não há um referencial preferencial, as leis da física são válidas qualquer que seja o sistema considerado. Da mesma forma, veremos como não há uma foliação especial em uma superposição, todas possuem o mesmo caráter ontológico. Tampouco esta visão segue o caminho tomado por Bohm ao introduzir mais variáveis à descrição matemática: há apenas uma equação na dinâmica da teoria Everettiana, a de Schrödinger.

Hugh Everett III nasceu nos Estados Unidos no período entreguerras e completou toda sua formação acadêmica no país, até seu doutorado na Universidade de Princeton em 1957. Conforme já mencionamos, este foi um período moldado pela Primeira Guerra Mundial e pela iminência de um segundo conflito que aconteceria dali a alguns anos. Este contexto histórico deslocou o eixo cultural do indivíduo para a sociedade, especialmente com a ascensão de regimes totalitários nacionalistas e com o surgimento dos movimentos populares de oposição. Assim como discutimos na seção 2.2, o pensamento filosófico também foi impactado, com o realismo tomando o lugar antes ocupado pelo idealismo.

Everett formou-se engenheiro químico na graduação, mas seu mestrado e seu doutorado foram em matemática e física matemática respectivamente. No mestrado, Everett trabalhou em teoria de jogos, vinculado ao departamento de matemática, embora

houvesse uma clara intersecção com computação. Seu interesse pela ciência da computação perdurou ao longo de toda a sua vida. Já no doutorado, Everett estudou mecânica quântica a partir de livros didáticos de base, incluindo aquele escrito por Bohm em 1951.

A segunda metade do século XX foi marcada por importantes nomes da filosofia da ciência, como Kuhn, Feyerabend, Maturana e Bunge. Embora cada um desses filósofos tenha desenvolvido sua própria teoria epistemológica, o fato de todos serem contemporâneos aponta para uma característica em comum: a contestação do método científico vigente. Na verdade, vários pensadores negam a existência de um único método científico, defendendo a ampliação do termo para abarcar outros meios de buscar conhecimento. Tal contestação abriu espaço para que atitudes semelhantes fossem tomadas dentro das próprias áreas da ciência, que passaram a voltar sua atenção também para a estrutura dos modelos que estavam sendo desenvolvidos.

Talvez este movimento epistemológico tenha influenciado cientistas como Bohm e Everett a pesquisar na área de fundamentos de mecânica quântica. O fato é que a teoria Everettiana torna evidente um aspecto dialético da teoria quântica que não foi permitido por outros modelos. Em sua dissertação de 1957, Everett argumenta que sua formulação proposta para a mecânica quântica é apenas isso, uma formulação, e que não pretende alterar os resultados previstos por ela ou o seu conteúdo matemático:

The aim is not to deny or contradict the conventional formulation of quantum theory, which has demonstrated its usefulness in an overwhelming variety of problems, but rather to supply a new, more general and complete formulation, from which the conventional interpretation can be *deduced*. (EVERETT, 1957)

Everett assume a existência de apenas um ente: a função de onda. Todos os entes podem ser descritos por funções de onda, então a única categoria ontológica é a das ondas.

Essa postura está em consonância com o conhecido princípio filosófico geralmente adotado pela ciência: “Don’t multiply postulations beyond necessity.” (BAKER, 2022). A navalha de Occam ou *princípio da simplicidade* afirma que é preferível uma teoria com menos hipóteses do que outra que explique os mesmos fenômenos através de mais pressupostos. Há uma distinção entre simplicidade ontológica e simplicidade metodológica; no caso da teoria Everettiana a simplicidade do primeiro tipo é traduzida no postulado da existência de apenas um tipo de ente, a onda. O segundo tipo poderia ser atribuído à evolução da função de onda, que neste caso é unitária.

O principal motivo para a elaboração de uma nova teoria quântica foi a incompatibilidade dos modelos vigentes com a teoria da relatividade geral (o problema da localidade). Mas, além disso, Everett buscou resolver a questão do observador, uma peça central da interpretação de Copenhague.

Na seção 2.1, mencionamos como a interação do ente quântico com um objeto clássico é essencial, pois ela provoca o colapso da função de onda fazendo com que tenhamos um resultado definido em uma medida. Porém, sempre podemos definir um sistema composto que contenha os dois objetos - medidor e sistema medido. No caso deste sistema global, não há interação com um observador externo justamente porque não existe um observador externo, já que o sistema pode ser tão grande quanto se queira e compreender todos os demais. Mas, conforme a interpretação de Copenhague, não pode haver colapso sem interação, que é condição necessária para isso. Qual, então, deve ser o resultado de uma medida feita entre dois subsistemas que pertencem a um sistema global isolado?

A resposta de Everett é clara: o mesmo resultado previsto pela mecânica quântica convencional. A questão é que, mesmo que não haja o colapso da função de onda, é possível obter resultados bem definidos em processos de medida. O artigo de 1957 demonstra como a evolução contínua da função de onda de acordo com a equação de Schrödinger é suficiente para reproduzir as previsões da interpretação ortodoxa, dispensando o postulado do colapso.

A busca pela elegância e pela clareza de uma teoria científica, embora nem sempre explicitamente formulada, parece acompanhar os cientistas ao longo da história. Newton escreve no começo do terceiro livro dos Principia Mathematica: “Nature is pleased with simplicity, and affects not the pomp of superfluous causes.” (NEWTON, 1964 apud BAKER, 2022).

No entanto, o surgimento de novas epistemologias da ciência questionou o princípio da simplicidade enquanto meio para atingir a verdade. De acordo com o falsificacionismo de Karl Popper, uma teoria que tenha maior chance de ser refutada é melhor. Isso porque a ciência, para Popper, avança segundo o esquema de tentativa e erro, já que logicamente só podemos aplicar o raciocínio dedutivo na falsificação de uma hipótese, e não na sua confirmação (que se daria pelo raciocínio probabilístico da indução).

Assim, podemos entender a importância do papel assumido por um princípio aparentemente contrário ao da simplicidade, o *princípio da plenitude*. Segundo ele, se existe a possibilidade de que uma coisa exista, então esta coisa *deve* existir. Todas as possibilidades são realizadas, basta que não existam impedimentos teóricos para isso.

A teoria Everettiana também segue este princípio, de certa forma. Já mencionamos o único postulado da teoria, a existência das ondas. Vamos discutir agora as consequências deste postulado e como elas se relacionam com o princípio da plenitude.

A função de onda é uma solução de uma equação diferencial linear de segunda ordem cuja linearidade garante que uma combinação linear de duas ondas também seja uma onda. Por isso, podemos decompor espectralmente a função em autofunções, cada

uma relacionada a um autovalor. No caso da mecânica quântica, a equação diferencial é a equação de Schrödinger que adota parâmetros físicos em seus termos.

As funções de onda são definidas em espaços de Hilbert, sendo que a função de onda global de um sistema composto está definida em um espaço-produto que é o produto tensorial dos subespaços em que estão definidas as autofunções, se ela for separável. Ou seja, se não há emaranhamento entre as autofunções - se não há interação entre os subsistemas -, elas evoluem de forma independente, mesmo que estejam relacionadas através da função de onda global.

Esta percepção motivou Everett a descrever a mecânica quântica em termos de estados relativos. Um estado relativo pertence a um determinado subespaço, e dizemos que é relativo a outro estado que pertence a outro subespaço quando o produto tensorial dos dois é um termo da combinação linear do estado global. Esta nomenclatura também é utilizada para designar o estado-produto; neste caso, o estado relativo é um estado do espaço-produto. Apresentaremos tal descrição com mais detalhes em capítulos subsequentes.

A formulação proposta sugere uma teoria local. Isso porque a evolução da função de onda global depende da evolução individual de cada termo da superposição, termos estes que são independentes entre si se não houver emaranhamento. A dinâmica dos estados relativos permite que cada subsistema seja analisado por ele mesmo, ou seja, de maneira local. Então, o conjunto de evoluções locais dos subsistemas constitui a evolução do sistema global. Mesmo que haja emaranhamento, ele só se dá mediante a interação (local) entre sistemas.

A grande questão, porém, é o processo de medida. Isso posto que, antes que uma medida seja realizada, a teoria Everettiana é compatível com a interpretação de Copenhague, pois segue a dinâmica proposta pela mecânica ondulatória. Embora os pressupostos sejam diferentes, o tratamento dado às ondas antes da medida é o mesmo. Assim como em Copenhague, a medida em Everett pressupõe a interação entre dois sistemas. E, assim como em Copenhague, o resultado que o observador obtém pode ser único e bem definido.

Como não há algo como o colapso da função de onda para Everett, a função de onda evolui continuamente mesmo na interação com o observador. Isso significa que, após a medida, o sistema medido ainda é descrito por uma combinação linear de autofunções. O argumento de Everett é o seguinte: um observador em determinado estado só é capaz de interagir com um único termo da superposição de cada vez. Este termo é justamente o estado relativo do sistema medido associado ao estado do observador; o autovalor correspondente é o resultado da medida.

E os outros termos da superposição? Cada termo é um estado composto formado pelo estado do observador e pelo estado do sistema medido e corresponde a um autovalor.

Em outras palavras, se cada estado relativo do observador interage com apenas um estado relativo do sistema medido, e se tanto o observador quanto o sistema são descritos por funções de onda que, em geral, são combinações lineares de estados, cada estado do observador obtém um resultado diferente em uma medida.

O fato de existirem resultados diferentes associados a estados relativos distintos não faz com que o processo de medida não seja bem definido. Os estados relativos (os termos de uma superposição) determinam o que chamamos *foliações* do espaço-tempo. A teoria Everettiana é também conhecida como *Interpretação de Muitos Mundos*; os mundos aos quais a denominação se refere são justamente as foliações.

The other worlds, and their inhabitants, are not abstracta, or fictions, or mere unrealized possibilities: if Everettian quantum mechanics is true, they are as real as I, you, and our mutual surroundings. (WALLACE, 2014, p. 3)

Os possíveis estados relativos, as diferentes foliações, os termos da superposição - estes são os chamados “outros mundos”.

Em cada foliação, existe um observador e um sistema medido, cada um em um determinado estado. Por isso, o resultado de uma medida é único e bem definido: em cada foliação, há apenas um autovalor associado. Se não houver emaranhamento, as foliações não interagem entre si, logo não há contradição entre os diferentes resultados da medida. A superposição permanece se considerarmos o multiverso da função de onda global; porém, localmente, em cada foliação, o processo de medida provoca um *colapso aparente* da função de onda.

Portanto, o princípio da plenitude é incorporado à teoria Everettiana na medida em que esta atribui um status real à existência de todos os estados relativos possíveis. De fato, todas as possibilidades são realizadas, com a ressalva de que cada uma se dá em uma foliação diferente e, em geral (quando não há interferência quântica), não há comunicação entre elas.

O que apresentamos até aqui foram apenas consequências do postulado único da teoria Everettiana, o de que apenas a função de onda existe. Os muitos mundos não são postulados, eles são previstos pela onda nos termos da superposição. Os objetos macroscópicos são explicados pelo fenômeno de *decoerência*, em que uma onda se torna altamente localizada (pequena dispersão) devido à interação com o ambiente.

A teoria Everettiana pode ser assim chamada porque define claramente tanto sua ontologia quanto sua dinâmica, fundamentais em qualquer teoria. O ente que define a ontologia é a onda e a dinâmica é dada pela mecânica ondulatória sintetizada na equação de Schrödinger.

Um aspecto importante desta teoria é o fato de ela ser local. Sua principal motivação é a compatibilidade com a relatividade geral e, neste ponto, ela aparentemente é bem-sucedida. A existência de uma função de onda global não implica não-localidade justamente porque os estados relativos são independentes entre si quando não há emaranhamento. E, mesmo quando os estados estão emaranhados, este fenômeno é local, pois as interações físicas são locais. Por isso, a teoria também admite uma formulação na representação de Heisenberg - que é local -, o que será explorado nos próximos capítulos.

A recepção da interpretação de Everett da mecânica quântica não foi positiva. Isso se deve, principalmente, à oposição direta à interpretação de Copenhague de Bohr. Embora as duas apresentem alguns pontos em comum - como a evolução das ondas de acordo com a equação de Schrödinger -, muitos dos cientistas adeptos à interpretação de Bohr nem mesmo consideraram Everett e seus muitos mundos como uma teoria consistente e muito menos viável. O orientador de Everett nos Estados Unidos era o físico John Wheeler, que havia sido orientando de Bohr. O próprio Wheeler admitia que a posição de Bohr era algo que influenciava sua opinião acerca da teoria de Everett.

Mesmo assim, Wheeler organizou uma viagem a Copenhague para que Everett pudesse expor suas ideias a Bohr pessoalmente e discutir os fundamentos da mecânica quântica. Nas palavras de Everett, “that was a hell of a — doomed from the beginning.” (EVERETT, 1977 apud BYRNE, 2012, p. 168). Bohr rejeitou a interpretação de muitos mundos completamente, e vários de seus colegas escreveram cartas indecorosas se posicionando:

He was undescribably [sic] stupid and could not understand the simplest things in quantum mechanics.... I would suggest that Occam’s Razor could be most profitably used to rid us of Everett or at least his writings. (ROSENFELD, 1972 apud BYRNE, 2012, p. 318).

No ano seguinte à publicação da sua tese, Everett abandonou a carreira acadêmica e começou a trabalhar no Weapons Systems Evaluation Group (WSEG), que mais tarde foi vinculado ao Institute for Defense Analysis do governo dos Estados Unidos. Isto aconteceu durante a corrida armamentista da Guerra Fria, então mesmo o instituto de defesa assumia uma posição tipicamente ofensiva. Diferentemente de Bohm, Everett não parecia ter fortes convicções políticas ou sociais, de forma que atuou neste emprego até o final de sua vida, trabalhando principalmente com análises computacionais.

Embora ainda constituam uma parcela pequena da comunidade científica, alguns físicos se mostram favoráveis - ou, pelo menos, receptivos - à teoria Everettiana. Richard Feynman, responsável por grandes avanços na área de eletrodinâmica quântica e laureado com o Prêmio Nobel de 1965, também foi orientando de John Wheeler. Feynman conhecia Everett e leu seu artigo na época em que foi publicado, sobre o qual escreveu “It’s possible, but I’m not very happy with it.” (FEYNMAN, 1982).

O físico estadunidense Bryce DeWitt foi um dos principais adeptos à teoria Everettiana, pois achava que ela oferecia a base necessária para a compreensão do fenômeno de decoerência, que era sua área de estudo. Ele traduz o sentimento de inquietude provocado pela interpretação de muitos mundos:

First, I was tickled to death that someone had at long last, after so many years and so many tiresome articles, something new and refreshing to say about the interpretation of quantum mechanics. Second, I was deeply shocked. (DEWITT, 1988 apud BYRNE, 2012, p. 304).

Mesmo que Everett tenha abandonado a carreira acadêmica logo após a publicação de 1957, DeWitt manteve suas ideias presentes em debates e artigos sempre que possível.

Atualmente, a teoria Everettiana vem sendo estudada com renovado interesse⁶ devido às suas aplicações na área de computação quântica. Conforme iremos discutir mais adiante, ela apresenta vantagens em relação às outras interpretações ao tratar do fluxo e da transmissão da informação quântica, especialmente por ser uma teoria local. Ela também possibilitou que teorias como a mecânica relacional do italiano Carlo Rovelli, por exemplo, fossem desenvolvidas.

Vamos discutir agora o experimento das caixas de Einstein de acordo com esta teoria. Na primeira etapa, temos uma função de onda não-localizada que representa uma partícula em uma posição qualquer dentro da caixa (figura 9). Não existe, de fato, uma partícula neste primeiro momento pois o que chamamos de partícula na teoria Everettiana é simplesmente uma função de onda altamente localizada. Esta função de onda possui duas autofunções - dois termos sobrepostos - que representam diferentes posições que podem ser ocupadas pela partícula.

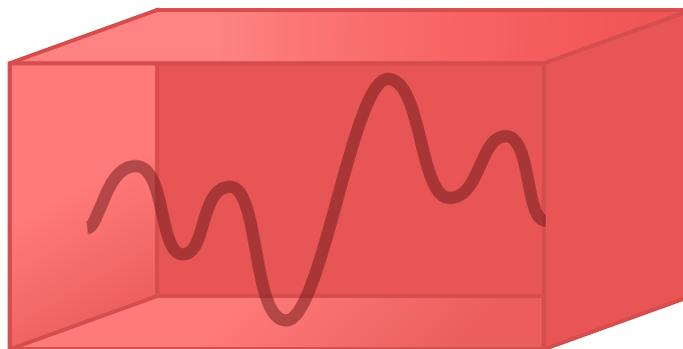


Figura 9 – Caixa B no instante $t = 0$, de acordo com a teoria Everettiana

⁶ Os físicos e filósofos mais conhecidos da área em geral estão associados ao grupo da Universidade de Oxford, do qual fazem parte David Deutsch, Chiara Marletto, David Wallace e Simon Saunders, por exemplo.

A introdução da barreira permite que o sistema global seja dividido em dois subsistemas, cada um para uma parte da caixa. Ainda assim, continuamos a ter uma função de onda global não localizada nesta fase, a partícula não possui posição bem-definida (figura 10). Do mesmo modo como fizemos para a mecânica Bohmiana, vamos desprezar a interação da função de onda da partícula com a barreira, de forma que não há emaranhamento entre a partícula e a caixa.

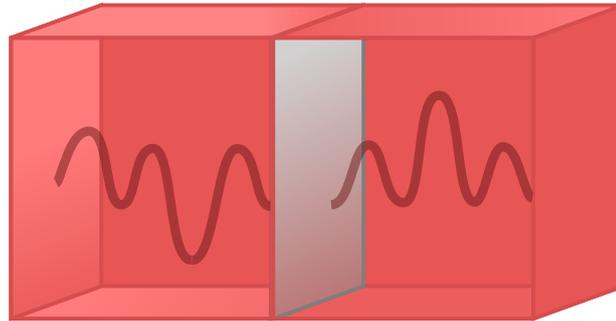


Figura 10 – Caixa B no instante $t = 1$, de acordo com a teoria Everettiana

O afastamento das caixas não altera a descrição, pois mesmo que a função de onda seja tipicamente não-local, as autofunções evoluem de maneira independente, já que não estavam emaranhadas (figura 11).



Figura 11 – Caixas B_1 e B_2 no instante $t = 2$, de acordo com a teoria Everettiana

Na última etapa do experimento, uma das caixas é aberta e a posição da partícula é verificada. Tal processo envolve a presença de um observador, que no caso da teoria Everettiana trata-se apenas de um outro ente qualquer, descrito por outra função de onda, e que interage com o sistema. Esta interação faz com que o estado do observador fique emaranhado com o estado da partícula na caixa, de forma que a função de onda passa a ser localizada.



Figura 12 – Caixas B_1 e B_2 no instante $t = 3$, de acordo com a teoria Everettiana

As funções de onda do sistema observado e do observador emaranham-se de maneira que o sistema global (observador e observado) pode ser descrito em termos de estados relativos. Cada possível estado do observador passa a estar associado a um possível estado da partícula na caixa. Por isso, no momento da medida, ocorre uma ramificação local do espaço-tempo em duas foliações diferentes, sendo que em uma delas a partícula é encontrada dentro da caixa B_1 e, em outra, na caixa B_2 (figura 12). Portanto, resultados diferentes são obtidos por diferentes autoestados do observador em foliações diferentes, de forma a cobrir todas as possibilidades.

Concluimos, então, que o experimento das caixas de Einstein, quando descrito por meio da interpretação de muitos mundos, não implica qualquer tipo de ação à distância. As duas caixas, depois de terem sido espacialmente separadas, evoluem de maneira independente. O resultado da medida está associado ao estado do observador que, por sua vez, interage localmente com o sistema medido, evidenciando o caráter local da teoria e a sua compatibilidade com a teoria da relatividade sob este aspecto.

3 O sistema de dois *qubits*

Neste capítulo, vamos descrever um sistema composto por dois qubits¹ que modelarão um processo de medida. A medida será feita por um dos qubits em relação ao outro e iremos discutir o processo tanto na representação de Schrödinger como na representação de Heisenberg. As particularidades do sistema em relação às teorias quânticas serão discutidas em seguida a partir dos resultados obtidos.

A palavra qubit é uma abreviação de *quantum bit*, o equivalente quântico do bit clássico. Assim como o bit clássico, o qubit é considerado uma entidade física real e é usualmente tratado como um objeto matemático abstrato para que seja possível generalizar os resultados previstos pela teoria. Ambos bit e qubit possuem dois estados possíveis, representados pelos vetores de estado $|1\rangle$ e $|-1\rangle$ ²; porém, um qubit também admite uma superposição destes dois estados em uma combinação linear. Um estado genérico de um qubit é escrito da seguinte forma:

$$|\psi\rangle = \alpha |1\rangle + \beta |-1\rangle, \quad (3.1)$$

onde os coeficientes α e β da superposição relacionam-se à regra de Born, ou seja, à probabilidade de um resultado em uma medida.

Esse é o principal aspecto que diferencia um qubit de um bit clássico. Ainda assim, o qubit continua sendo a menor unidade de informação, já que só os autovalores correspondentes aos autoestados da base podem ser medidos. Experimentalmente, não é possível medir de forma direta um estado de superposição de um qubit, apenas suas consequências podem ser verificadas e a superposição inferida a partir de uma análise estatística. A informação contida em um qubit que está em um estado de superposição e que não pode ser acessada é denominada *informação oculta*. Ademais, conforme o formalismo genérico da mecânica quântica, se o qubit não sofrer qualquer tipo de interação com um sistema externo, seu estado permanece inalterado.

Denominamos os objetos do sistema de dois qubits como qubit S (referente ao sistema medido) e qubit M (referente ao *medidor*). Conforme iremos discutir nas seções subsequentes, tal denominação não implica uma diferença intrínseca entre os qubits, trata-se de uma escolha arbitrária. Os vetores de estado do sistema global estão definidos em

¹ Embora tratemos apenas de um sistema de dois qubits neste trabalho, a relevância do estudo de redes formadas por N qubits é notável, uma vez que “such networks are universal in their capacity to simulate with arbitrary accuracy any other physical system” (KUYPERS; DEUTSCH, 2021).

² Neste trabalho, optamos por representar os estados do qubit por $|1\rangle$ e $|-1\rangle$, conforme feito por Kuypers e Deutsch em (KUYPERS; DEUTSCH, 2021). Eles correspondem aos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ ou $|+\rangle$ e $|-\rangle$ respectivamente na formulação tradicional.

um espaço de Hilbert denotado por \mathcal{H} . Este espaço, por sua vez, é um espaço-produto de dois subespaços \mathcal{H}_S e \mathcal{H}_M , onde estão definidos os vetores de estado do qubit S e do qubit M , respectivamente, de forma que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_M$. Então, se os dois qubits estiverem no estado $|1\rangle$, o estado global do sistema é

$$|\psi\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = |1\rangle |1\rangle = |11\rangle. \quad (3.2)$$

3.1 Representação de Schrödinger

A descrição usual da mecânica quântica é feita em termos de vetores de estado e operadores. Estes objetos matemáticos correspondem aos estados das entidades físicas e aos observáveis, respectivamente. Por isso, para que esta associação entre a teoria e o mundo físico seja possível, os operadores devem ser hermitianos³, já que isto garante que seus autovalores sejam números reais que correspondam a grandezas físicas.

Na representação de Schrödinger, os vetores de estado evoluem temporalmente de acordo com o operador

$$\hat{U} = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}, \quad (3.3)$$

onde \hat{H} é um Hamiltoniano que não depende do tempo. O operador é obtido a partir da equação de Schrödinger 1.6, assumindo uma função de onda cujas partes espacial e temporal são separáveis.

A equação de onda não prevê o colapso da função após uma medida, apenas a evolução unitária de acordo com o operador \hat{U} . Assim, podemos denotar a evolução de um vetor de estado na representação de Schrödinger da seguinte forma:

$$|\psi(t)\rangle_S = \hat{U}(t) |\psi(0)\rangle. \quad (3.4)$$

É importante destacar que, aqui, o subíndice S indica que o estado está sendo descrito na representação de Schrödinger, e não que se refere ao qubit S ; a equação é válida para qualquer objeto quântico.

Vamos definir agora os estados relativos de um sistema na representação de Schrödinger. Dado um vetor de estado qualquer $|\psi\rangle$ definido em um espaço-produto $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_M$ e sendo $\{|a_n^S\rangle\}$ e $\{|b_i^M\rangle\}$ bases dos subespaços \mathcal{H}_S e \mathcal{H}_M respectivamente, podemos escrevê-lo como

³ A matriz H que representa um operador hermitiano satisfaz a relação $H = H^\dagger$.

$$|\psi\rangle = \sum_{n,i} \alpha_{ni} |a_n^S\rangle \otimes |b_i^M\rangle, \quad (3.5)$$

em que α_{ni} são coeficientes complexos.

Este vetor genérico pode representar um *estado emaranhado*, caracterizado por ser uma superposição de vetores-produto. Como o emaranhamento representa um fenômeno físico de correlação entre estados, ele é invariante em relação à mudança de bases. Por isso, se o estado for emaranhado, não existe operação capaz de transformá-lo em um estado-produto.

A equação 3.5 indica que cada vetor de estado de \mathcal{H} pode ser escrito como o produto tensorial de um vetor em \mathcal{H}_S por um vetor em \mathcal{H}_M ou por uma combinação linear de vetores desse tipo. Então, para cada vetor em \mathcal{H}_S que compõe um vetor global em \mathcal{H} , podemos associar um vetor de *estado relativo* em \mathcal{H}_M , o qual vamos denominar $|\omega_n^M\rangle$. Este vetor é tal que

$$|\tilde{\omega}_n^M\rangle = \sum_i \alpha_{ni} |b_i^M\rangle \Rightarrow |\psi\rangle = \sum_n |a_n^S\rangle \otimes |\tilde{\omega}_n^M\rangle. \quad (3.6)$$

O vetor de estado relativo deve ser normalizado e, por isso, definimos

$$|\omega_n^M\rangle = \frac{|\tilde{\omega}_n^M\rangle}{\sqrt{\langle \tilde{\omega}_n^M | \tilde{\omega}_n^M \rangle}}. \quad (3.7)$$

Assim como fizemos para \mathcal{H}_M , podemos definir vetores de estados relativos em \mathcal{H}_S através do mesmo procedimento. A denominação também é usada para se referir ao produto tensorial do estado em \mathcal{H}_S pelo estado relativo em \mathcal{H}_M , o que corresponde a um estado relativo do sistema composto. Além disso, é possível estender o conceito para um espaço de Hilbert composto por N subespaços.

A formulação de estados relativos é importante para descrever processos de medida na mecânica quântica e será recorrente ao longo do trabalho.

Em oposição aos estados, os observáveis, por sua vez, são descritos por operadores e estes, na representação de Schrödinger, são constantes no tempo. Os operadores agem sobre os vetores de estado de forma a alterá-los, mas eles próprios se mantêm invariantes. Podemos escrever um operador \hat{O} como uma decomposição espectral em termos de projetores \hat{P}_i e autovalores associados λ_i :

$$\hat{O} = \sum_i \lambda_i \hat{P}_i. \quad (3.8)$$

Projetores constituem um tipo de operador e quando agem sobre uma superposição, o resultado é proporcional a apenas um dos termos desta superposição. No caso de uma

superposição de vetores de estado em que cada termo é um autovetor, um projetor é uma operação $\hat{P} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_i$ onde $\mathcal{H} = \otimes_i \mathcal{H}_i$ é o espaço-produto em que está definido o vetor de estado e \mathcal{H}_i é o subespaço em que está definido o autovetor correspondente ao autovalor λ_i . Por isso, uma operação de projeção tem como resultado um termo com dimensão menor do que aquela da superposição.

É evidente que, em uma superposição de N termos, há N projetores correspondentes. Uma medida espectral⁴ é o processo no qual qualquer um dos N projetores definidos para uma superposição age sobre ela e cuja soma dos N projetores é o operador unitário $\mathbb{1}$. A soma dos projetores \hat{P}_i nos quais um operador quântico é decomposto espectralmente conforme a equação 3.8 deve ser o operador unitário $\mathbb{1}$, pois isto garante que a probabilidade é conservada, ou seja, que não há perda de informação.

A partir disso, podemos estabelecer a relação que existe entre projetores e estados relativos. Ambos dizem respeito a apenas um termo de uma superposição e, por isso

$$|\omega_i^M\rangle \langle \omega_i^S| = \frac{\hat{P}_i |\psi\rangle}{|\hat{P}_i |\psi\rangle|}. \quad (3.9)$$

Um estado relativo do sistema composto associado a um autovalor λ_i é igual ao projetor normalizado correspondente a este mesmo autovalor.

O valor esperado - valor médio - de um operador \hat{O} que age sobre um vetor de estado $|\psi\rangle$ é dado pelo produto interno do vetor de estado pelo vetor de estado modificado pelo operador, ou seja

$$\langle \hat{O} \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle. \quad (3.10)$$

Substituindo 3.8 em 3.10, temos

$$\langle \hat{O} \rangle_\psi = \langle \psi | \sum_i \lambda_i \hat{P}_i | \psi \rangle = \sum_i \langle \psi | \hat{P}_i | \psi \rangle \lambda_i = \sum_i p_i \lambda_i, \quad (3.11)$$

onde p_i é o valor esperado do projetor \hat{P}_i e está associado à probabilidade de obter-se o autovalor λ_i como resultado de uma medida de acordo com a regra de Born.

A partir da definição do produto interno no formalismo de Dirac e considerando a função de onda $\psi(\mathbf{r})$ associada ao estado $|\psi\rangle$ e definida em três dimensões de um espaço contínuo, a equação 3.10 acima implica

$$\langle \hat{O} \rangle_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(\mathbf{r}) \hat{O} \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (3.12)$$

que é equivalente à equação 3.11.

⁴ Em inglês, projection-valued measure (PVM).

3.2 Representação de Heisenberg

A representação de Heisenberg diferencia-se conceitualmente da representação de Schrödinger por considerar que as entidades que evoluem no tempo são os operadores em vez dos vetores de estado. Heisenberg teve como motivação a própria mecânica clássica, onde as coordenadas generalizadas e os momenta evoluem no tempo e o estado do sistema é descrito a partir de um estado inicial fixo e da evolução das suas coordenadas e do seu momentum. No caso quântico, substituem-se as coordenadas generalizadas q e o momentum p na formulação Hamiltoniana da mecânica pelos operadores de posição e momentum. Grande parte dos fenômenos quânticos emerge da regra de comutação canônica dos operadores posição e momentum:

$$[q_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}. \quad (3.13)$$

Por este motivo, em geral, as relações de conservação de energia e as regras de simetria presentes na mecânica clássica são mais facilmente identificadas na representação de Heisenberg do que na representação de Schrödinger. Além disso, como a base desta representação é a formulação Hamiltoniana, ela é mais apropriada para lidar com sistemas com muitos graus de liberdade, como no caso da teoria quântica de campos.

O operador de evolução temporal é o mesmo operador unitário definido em 3.3. Podemos comparar as duas representações analisando os vetores de estado $|\psi\rangle$ e o operador \hat{O} nos dois casos:

$$\begin{aligned} \hat{O}^{(H)}(t) &= \hat{U}^\dagger(t) \hat{O}^{(S)} \hat{U}(t); \\ \hat{O}^{(H)}(0) &= \hat{O}^{(S)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_H &= |\psi(0)\rangle; \\ |\psi(t)\rangle_S &= \hat{U}(t) |\psi(0)\rangle. \end{aligned} \quad (3.15)$$

$\hat{O}^{(H)}$ indica o operador na representação de Heisenberg e $\hat{O}^{(S)}$ indica o mesmo operador na representação de Schrödinger. Os subscritos dos vetores de estado também fazem referência às respectivas representações.

Conforme podemos observar em 3.14, o operador se mantém constante em Schrödinger, mas evolui de acordo com o operador temporal em Heisenberg. A evolução do operador em Heisenberg considera o operador em Schrödinger como condição inicial.

A equações em 3.15, por outro lado, mostram como o vetor de estado evolui de acordo com o tempo na representação de Schrödinger, mas se mantém constante para Heisenberg. O estado inicial de Schrödinger é chamado de *estado de referência* na representação de Heisenberg e é fixo.

A dinâmica da representação de Heisenberg é definida por uma equação de movimento, assim como a dinâmica em Schrödinger é definida a partir da equação de onda:

$$\frac{d\hat{O}^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{O}^{(H)}, \hat{H}]. \quad (3.16)$$

Esta é a chamada *equação de movimento de Heisenberg*, cuja dedução encontra-se no apêndice A.

O valor esperado de um operador na representação de Heisenberg é dado por

$$\langle \hat{O} \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{U}^\dagger \hat{O} \hat{U} | \psi \rangle. \quad (3.17)$$

Novamente, destacamos a diferença conceitual entre as duas representações. Na representação de Schrödinger, consideramos $(\langle \psi | \hat{U}^\dagger) \hat{O} (\hat{U} | \psi \rangle)$. Em Heisenberg, por outro lado, interpretamos $\langle \psi | (\hat{U}^\dagger \hat{O} \hat{U}) | \psi \rangle$.

Assim como o operador pode ser decomposto espectralmente em seus projetores (3.8), podemos escrevê-lo em termos de uma base genérica do espaço \mathcal{H} em que ele está definido. Qualquer operador do espaço \mathcal{H} pode ser escrito nesta mesma base, de forma que reduzimos o problema de analisar a evolução dos observáveis à análise da evolução temporal dos elementos da base de um espaço de Hilbert \mathcal{H} . A escolha da base é arbitrária, mas convencionalmente usamos as matrizes de Pauli para operadores representados por matrizes 2×2 , como é o caso daqueles que operam sobre um único qubit

$$\hat{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

A evolução temporal de $\hat{\sigma}_0$ é trivial, já que $\hat{U}^\dagger \hat{\sigma}_0 \hat{U} = \hat{U}^\dagger \mathbb{1} \hat{U} = \mathbb{1}$. Em outras palavras, este elemento da base permanece inalterado. Por isso, definimos um operador $\hat{\sigma}$, chamado *operador de Pauli*, cujas componentes são $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ que descreve a evolução temporal de qualquer observável em \mathcal{H} .

3.3 Descritores

Um descritor é um objeto matemático que codifica a informação quântica na representação de Heisenberg e corresponde a um observável. Ele contém em si toda a informação necessária para descrever a evolução de qualquer operador de um sistema quântico, justamente porque é definido em função da base do espaço de Hilbert que é comum a todos os observáveis. O descritor de um único qubit isolado é definido como

$$\hat{\mathbf{q}}(t) = \hat{U}^\dagger \hat{\boldsymbol{\sigma}} \hat{U}, \quad (3.19)$$

o que implica, naturalmente, que o descritor no tempo inicial é o próprio operador de Pauli, ou seja, $\hat{\mathbf{q}}(0) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}$.

Para escrever o descritor de uma rede composta por N qubits, primeiro precisamos definir uma base para operadores representados por matrizes 2^N . Esta base envolve operações com os operadores de Pauli para cada qubit, de forma que

$$\mathcal{B} \equiv \{\hat{\sigma}_{\mu_1} \otimes \hat{\sigma}_{\mu_2} \otimes \dots \otimes \hat{\sigma}_{\mu_N} : \mu_i \in \{0, x, y, z\}\}. \quad (3.20)$$

Então, de maneira geral, temos

$$\hat{\mathbf{q}}(t) = \hat{U}^\dagger (\hat{\sigma}_{\mu_1} \otimes \hat{\sigma}_{\mu_2} \otimes \dots \otimes \hat{\sigma}_{\mu_N}) \hat{U}, \quad (3.21)$$

onde, agora, $\hat{\mathbf{q}}(0) = (\hat{\sigma}_{\mu_1} \otimes \hat{\sigma}_{\mu_2} \otimes \dots \otimes \hat{\sigma}_{\mu_N})$.

É conveniente, no entanto, escrever esta equação em função de suas componentes, ou seja, o descritor $\hat{\mathbf{q}}_i$ de cada qubit i em uma rede de N qubits. Conforme dito anteriormente, o descritor está definido no espaço de Hilbert \mathcal{H} ao qual pertence a rede global. Cada qubit i desta rede pertence a um subespaço \mathcal{H}_i , de forma que o descritor de um dos qubits da rede deve conter informações sobre a base dos operadores neste subespaço, bem como manter a dimensionalidade adequada da rede como um todo. Por isso,

$$\hat{\mathbf{q}}_i(0) = \mathbf{1}^{\otimes(i-1)} \otimes \hat{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbf{1}^{\otimes(N-i)}, \quad (3.22)$$

que assegura a interação com apenas um dos qubits sem que isso implique necessariamente uma interação com a rede global.

Com isso, podemos facilmente escrever o descritor em função do tempo

$$\hat{\mathbf{q}}_i(t) = \hat{U}^\dagger \hat{\mathbf{q}}_i(0) \hat{U}. \quad (3.23)$$

Neste trabalho, trataremos de uma rede formada por apenas dois qubits, o qubit M e o qubit S , e definida no espaço $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_M$. Os descritores iniciais associados são, portanto,

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_S(0) = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbf{1} = (\hat{q}_{Sx}, \hat{q}_{Sy}, \hat{q}_{Sz}); \\ \hat{\mathbf{q}}_M(0) = \mathbf{1} \otimes \hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{q}_{Mx}, \hat{q}_{My}, \hat{q}_{Mz}). \end{cases} \quad (3.24)$$

Vamos definir também os projetores associados aos estados da base, ou seja, os operadores que levam um vetor de estado qualquer definido no espaço global para o espaço de Hilbert de cada estado:

$$\begin{cases} \hat{P}_1(\hat{q}_z) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \hat{q}_z); \\ \hat{P}_{-1}(\hat{q}_z) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \hat{q}_z). \end{cases} \quad (3.25)$$

Embora a introdução dos descritores pareça abstrata - e mesmo desnecessária, se pensarmos que a descrição do sistema pela representação de Schrödinger, mais familiar, é equivalente -, sua importância irá se revelar ao longo do trabalho, principalmente na conclusão. Porém, já podemos apontar uma vantagem de tê-los introduzido agora: a álgebra.

A representação de Heisenberg geralmente é tratada como uma formulação matricial da mecânica quântica, já que lida majoritariamente com operadores e estes podem ser representados por matrizes. A princípio, não há problema nisto, já que é uma teoria internamente consistente e cujos resultados previstos estão de acordo com aqueles medidos experimentalmente. Porém, do ponto de vista computacional, os cálculos envolvendo matrizes de altas dimensões é dispendioso, e é justamente o tipo de cálculo que problemas típicos da teoria quântica de campos exigem.

As operações envolvendo descritores são mais simples do que aquelas que envolvem matrizes porque são sintetizadas em poucas relações algébricas. A álgebra de uma rede de descritores é do tipo $SU(2)^{\otimes N}$, ou seja, cada qubit obedece às relações algébricas $SU(2)$ (Special Unitary in 2 dimensions). O grupo $SU(2)$ é formado pelo conjunto das matrizes 2×2 que são unitárias ($A^\dagger A = \mathbb{1}$) e unimodulares ($\det A = 1$). Este tipo de matriz é utilizado para descrever rotações em partículas cujo spin vale $1/2$ e, por isso, sua álgebra é bem conhecida e estudada.

Os descritores de dois qubits quaisquer a e b devem satisfazer as seguintes relações:

$$\begin{cases} \hat{q}_{(a)i}(t)\hat{q}_{(a)j}(t) = \delta_{ij}\mathbb{1} + i\varepsilon_{ijk}\hat{q}_{(a)k}(t), \quad i, j, k \in \{x, y, z\}; \\ [\hat{\mathbf{q}}_{(a)}(t), \hat{\mathbf{q}}_{(b)}(t)] = 0, \quad \text{para } a \neq b, \end{cases} \quad (3.26)$$

onde os índices $\{a, b\}$ referem-se aos respectivos qubits e $\{i, j, k\}$ referem-se às componentes de cada descritor. ε_{ijk} é o símbolo de permutação de Levi-Civita, definido por

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j, j = k, k = i; \\ +1, & \text{se } (i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}; \\ -1, & \text{se } (i, j, k) \in \{(1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3)\}. \end{cases}$$

Estas relações são análogas às aquelas definidas para o momentum angular, já que esta é uma grandeza característica das rotações da álgebra $SU(2)$.

3.4 Princípios de computação quântica - portas lógicas

Portas lógicas são modelos matemáticos discretos de interações físicas usualmente consideradas contínuas. Assim como aquelas da computação clássica manipulam a informação, as portas lógicas quânticas manipulam a informação quântica (os qubits). Portas lógicas são definidas a partir de tabelas verdades que mostram como os estados fundamentais são alterados por elas. No caso de uma porta lógica quântica, a tabela verdade também deve conter informações sobre como os estados de superposição são alterados. Matematicamente, as portas correspondem a operadores e são representadas por matrizes unitárias que atuam sobre os vetores de estado na representação de Schrödinger ou sobre os descritores na representação de Heisenberg. Por serem operações discretas e unitárias, as portas lógicas evitam que equações diferenciais precisem ser resolvidas na modelagem de um sistema físico.

3.4.1 Porta lógica NOT

As portas lógicas podem estar definidas para um ou mais qubits. Como um qubit possui dois estados de base, $|1\rangle$ e $|-1\rangle$, e admite superposições, seu vetor de estado possui duas componentes

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

onde α e β são os coeficientes dos estados $|1\rangle$ e $|-1\rangle$ respectivamente, conforme a equação 3.1.

Uma porta lógica de um único qubit, portanto, é representada por uma matriz unitária 2×2 . Assim como no caso do operador de evolução temporal, o fato de a matriz ser unitária garante que as probabilidades sejam conservadas, já que os estados inicial e final devem ser normalizados.

A porta lógica NOT é também chamada *inversora* e caracteriza-se pela troca de um estado pelo outro, $|1\rangle \longleftrightarrow |-1\rangle$.

Como sua ação sobre uma sobreposição é linear, basta conhecer a tabela verdade para os estados de base. Matricialmente, esta porta é representada por

$$X \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

A porta lógica NOT também é conhecida como porta lógica Pauli-X. Isso porque, como podemos notar, a matriz associada é igual à componente $\hat{\sigma}_x$ do operador de Pauli $\hat{\sigma}$. Além disso, podemos escrever a representação funcional de uma porta lógica, ou seja, escrevê-la como função dos descritores do sistema. No caso da porta lógica NOT,

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \hat{\sigma}_x = \hat{\mathbf{q}}_x(0). \quad (3.29)$$

A equação acima revela que a porta lógica NOT é uma função apenas da componente x do descritor. Na representação funcional, então,

$$\hat{U}_X(\hat{\mathbf{q}}(0)) = \hat{q}_x(0) \Rightarrow \hat{U}_X(\hat{\mathbf{q}}(t)) = \hat{q}_x(t). \quad (3.30)$$

A partir da álgebra dos descritores, podemos escrever o efeito que a aplicação de uma porta lógica tem sobre cada uma de suas coordenadas, já que

$$\hat{\mathbf{q}}(t+1) = \hat{U}_G^\dagger \hat{\mathbf{q}}(t) \hat{U}_G, \quad (3.31)$$

para \hat{U}_G a representação funcional de uma porta lógica qualquer que pode depender de quaisquer descritores da rede. Portanto, para a porta NOT,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}(t+1) &= \hat{U}_X^\dagger \hat{\mathbf{q}}(t) \hat{U}_X = \hat{q}_x(t) \hat{\mathbf{q}}(t) \hat{q}_x(t) \\ &= \hat{q}_x(t) (\hat{q}_x(t), \hat{q}_y(t), \hat{q}_z(t)) \hat{q}_x(t) = \hat{q}_x(t) (\mathbb{1}, -i\hat{q}_z(t), i\hat{q}_y(t)); \\ &\Rightarrow \hat{\mathbf{q}}(t+1) = (\hat{q}_x(t), -\hat{q}_y(t), -\hat{q}_z(t)). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Como as portas lógicas são operadores, elas também devem evoluir com o tempo na representação de Heisenberg. A representação funcional revela esta dependência temporal em oposição à matriz fixa X .

3.4.2 Porta lógica Hadamard

A porta lógica Hadamard também é uma porta que age sobre um único qubit. Ela caracteriza-se por agir sobre estados determinados criando uma superposição, conforme a tabela verdade:

$$|1\rangle \rightarrow \frac{|1\rangle + |-1\rangle}{\sqrt{2}}; \quad |-1\rangle \rightarrow \frac{|1\rangle - |-1\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (3.33)$$

Sua ação sobre sobreposições também é linear - assim como a de qualquer evolução quântica -, de forma que ela é completamente descrita por estas duas relações. Matricialmente, temos

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

A representação funcional é obtida da seguinte forma:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = \frac{\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z}{\sqrt{2}}; \quad (3.35)$$

$$\hat{U}_H(\hat{\mathbf{q}}(0)) = \frac{\hat{q}_x(0) + \hat{q}_z(0)}{\sqrt{2}} \Rightarrow \hat{U}_H(\hat{\mathbf{q}}(t)) = \frac{\hat{q}_x(t) + \hat{q}_z(t)}{\sqrt{2}}. \quad (3.36)$$

As componentes do descritor modificam-se de acordo com

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}(t+1) &= \hat{U}_H^\dagger \hat{\mathbf{q}}(t) \hat{U}_H = \left(\frac{\hat{q}_x(t) + \hat{q}_z(t)}{\sqrt{2}} \right) \hat{\mathbf{q}}(t) \left(\frac{\hat{q}_x(t) + \hat{q}_z(t)}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \left(\frac{\hat{q}_x(t) + \hat{q}_z(t)}{\sqrt{2}} \right) (\hat{q}_x(t), \hat{q}_y(t), \hat{q}_z(t)) \left(\frac{\hat{q}_x(t) + \hat{q}_z(t)}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} [(\hat{q}_x(t) + \hat{q}_z(t)) (\mathbb{1} - i\hat{q}_y(t), -i\hat{q}_z(t) + i\hat{q}_x(t), i\hat{q}_y(t) + \mathbb{1})] \\ &= \frac{1}{2} (2\hat{q}_z(t), -2\hat{q}_y(t), 2\hat{q}_x(t)); \\ &\Rightarrow \hat{\mathbf{q}}(t+1) = (\hat{q}_z(t), -\hat{q}_y(t), \hat{q}_x(t)). \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.4.3 Porta lógica CNOT

A última porta lógica que vamos introduzir chama-se porta lógica CNOT (controlled-NOT) e é uma porta de dois qubits. Definimos um dos qubits como *controle* C e o outro como *alvo* T de forma que o estado do qubit controle determine o estado do qubit alvo. A tabela verdade é a seguinte:

$$\begin{aligned} |1\rangle |1\rangle &\rightarrow |1\rangle |1\rangle; & |1\rangle |-1\rangle &\rightarrow |1\rangle |-1\rangle; \\ |-1\rangle |1\rangle &\rightarrow |-1\rangle |-1\rangle; & |-1\rangle |-1\rangle &\rightarrow |-1\rangle |1\rangle, \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde o primeiro estado de cada sistema refere-se ao qubit controle e o segundo, ao qubit alvo. Ou seja, se o qubit controle estiver no estado $|1\rangle$, o sistema permanece inalterado. Porém, se o qubit controle estiver no estado $|-1\rangle$, a operação sobre o qubit alvo é a mesma da porta lógica NOT, seu estado é invertido. Em ambas as situações, o estado do qubit controle se mantém o mesmo.

Como estamos tratando de uma porta que tem como entrada dois qubits, a matriz correspondente deve ser do tipo 4×4 e tem a seguinte forma:

$$C_{NOT} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

É fácil perceber como a parte superior esquerda da matriz faz com que o qubit controle não se altere enquanto a parte inferior direita indica que o estado do qubit alvo é invertido.

Assim como fizemos para as outras portas, vamos representar a porta CNOT como função dos descritores:

$$\begin{aligned} C_{NOT} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \left[\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] + \left[\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right]; \\ &\Rightarrow C_{NOT} = |1\rangle \langle 1| \otimes \mathbb{1} + |-1\rangle \langle -1| \otimes X. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Podemos identificar nesta última expressão os projetores associados a cada estado, pois, na notação de Dirac, $|1\rangle \langle 1| = \hat{P}_1$ e $|-1\rangle \langle -1| = \hat{P}_{-1}$. Nesta parte, porém, precisamos destacar sobre qual qubit age cada operador para escrever os descritores apropriados.

A representação funcional da porta CNOT é uma soma de dois produtos tensoriais de dois termos cada. Conforme a notação convencional, o primeiro termo de cada produto tensorial refere-se ao primeiro qubit do sistema, ou seja, ao qubit controle. O segundo termo de cada produto refere-se ao qubit alvo. Portanto, ambos os projetores são funções da componente \hat{q}_z do qubit controle, enquanto o operador unitário $\mathbb{1}$ e a porta NOT - em sua representação funcional - são funções do descritor do qubit alvo.

$$\begin{aligned} \hat{U}_{CN} &= \hat{P}_1(\hat{q}_{Tz}) \otimes \mathbb{1} + \hat{P}_{-1}(\hat{q}_{Tz}) \otimes \hat{U}_X(\hat{\mathbf{q}}_C); \\ &\Rightarrow \hat{U}_{CN} = \hat{P}_1(\hat{q}_{Tz}) + \hat{U}_X(\hat{\mathbf{q}}_C) \hat{P}_{-1}(\hat{q}_{Tz}). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Finalmente, cada componente dos descritores se transforma de acordo com

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_T(t+1) = (\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t), \hat{q}_{Cy}(t)\hat{q}_{Ty}(t), \hat{q}_{Tz}(t)); \\ \hat{\mathbf{q}}_C(t+1) = (\hat{q}_{Cx}(t), \hat{q}_{Cy}(t)\hat{q}_{Tz}(t), \hat{q}_{Cz}(t)\hat{q}_{Tz}(t)). \end{cases} \quad (3.42)$$

Este é o resultado da aplicação da representação funcional da porta CNOT e das relações algébricas dos descritores. O cálculo completo encontra-se no apêndice B.

O processo de medida que descreveremos na próxima seção envolve a aplicação de todas as portas lógicas introduzidas e utilizaremos tanto suas formas matriciais quanto suas representações funcionais.

3.5 O processo de medida

3.5.1 Pré-medida

Consideramos uma rede \mathfrak{N} formada pelos dois qubits S e M que já introduzimos, cujos descritores associados são denotados por \hat{q}_S e \hat{q}_M respectivamente. Vamos descrever o processo de medida de um observável z do qubit S pelo qubit M , primeiro na representação de Schrödinger e depois na representação de Heisenberg. Inicialmente, os dois qubits estão no estado $|1\rangle$: $|\psi(0)\rangle = |1\rangle |1\rangle$, conforme a notação em 3.1.

Antes que a medida seja efetuada, vamos modelar a interação do qubit S com um terceiro elemento através da porta lógica Hadamard, que será responsável por colocar S em um estado de superposição. Neste caso, tal processo é chamado *pré-medida*, já que precede a verificação de um resultado. Também iremos considerar intervalos de tempo discretos, sendo eles definidos entre os instantes tempo inicial $t = 0$, tempo intermediário $t = 1$ após a interação entre o qubit S e o elemento externo, mas antes da medida e tempo final $t = 2$ em que a medida é realizada. Por isso, no tempo $t = 1$, temos

$$\begin{aligned} |\psi(1)\rangle &= (H \otimes \mathbb{1}) |\psi(0)\rangle = (H \otimes \mathbb{1})(|1\rangle |1\rangle) \\ &= (H |1\rangle) \otimes (\mathbb{1} |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle |1\rangle + |-1\rangle |1\rangle); \\ &\Rightarrow |\psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |-1\rangle) \otimes |1\rangle, \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde H é a matriz que representa a porta Hadamard. Também fica evidente pela notação que a porta Hadamard age apenas sobre o estado do primeiro qubit, o qubit S , enquanto o operador que age sobre o segundo qubit é o operador unitário.

Neste ponto, temos uma rede composta por um qubit em estado de superposição com iguais probabilidades associadas aos estados - o qubit S - e um qubit que permanece inalterado em seu estado inicial $|1\rangle$ - o qubit M . O estado global, portanto, é separável, representado por um vetor-produto.

3.5.2 Medida

Para concluir o processo de medida, aplicamos a porta lógica CNOT sobre o sistema, onde o qubit controle é o qubit M medidor e o qubit alvo é o qubit S do sistema medido. As operações sobre os qubits podem ser esquematizadas no seguinte circuito quântico:

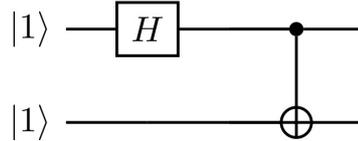


Diagrama do processo de medida descrito

O estado final do sistema após a operação com a porta CNOT é

$$\begin{aligned}
 |\psi(2)\rangle &= C_{NOT} |\psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} C_{NOT} (|1\rangle |1\rangle + |-1\rangle |1\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (C_{NOT} |1\rangle |1\rangle + C_{NOT} |-1\rangle |1\rangle); \\
 \Rightarrow |\psi(2)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle |1\rangle + |-1\rangle |-1\rangle).
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Este é o resultado do processo de medida na representação de Schrödinger e corresponde a um *estado emaranhado*. Um estado emaranhado é tal que o vetor que o representa não é um vetor-produto do espaço de Hilbert composto, mas sim uma superposição de vetores-produto (em qualquer base), conforme mencionamos na seção 3.1. Trata-se de um estado não-separável, o qual não é possível escrever como um produto entre um estado de \mathcal{H}_S e um estado de \mathcal{H}_M . Este é o formalismo matemático que representa a correlação entre os sistemas, característica da medida.

Temos, portanto, que a evolução do estado submetido ao processo de medida é dada por

$$|\psi(0)\rangle = |1\rangle |1\rangle \rightarrow |\psi(2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle |1\rangle + |-1\rangle |-1\rangle). \tag{3.45}$$

Na representação de Heisenberg, partimos da configuração inicial 3.24 e aplicamos a porta Hadamard, em sua representação funcional, ao descritor do qubit S componente a componente

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_S(1) = \hat{U}_H^\dagger \hat{\mathbf{q}}_S(0) \hat{U}_H; \\ \hat{\mathbf{q}}_M(1) = \hat{\mathbf{q}}_M(0); \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_S(1) = (\hat{q}_{Sz}(0), -\hat{q}_{Sy}(0), \hat{q}_{Sx}(0)); \\ \hat{\mathbf{q}}_M(1) = (\hat{q}_{Mx}(0), \hat{q}_{My}(0), \hat{q}_{Mz}(0)); \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_S(1) = (\hat{q}_{Sz}, -\hat{q}_{Sy}, \hat{q}_{Sx}); \\ \hat{\mathbf{q}}_M(1) = (\hat{q}_{Mx}, \hat{q}_{My}, \hat{q}_{Mz}). \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Em seguida, aplicamos a porta CNOT sobre a rede conforme a equação 3.42

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_S(2) = \hat{U}_{CN}^\dagger \hat{\mathbf{q}}_S(1) \hat{U}_{CN}; \\ \hat{\mathbf{q}}_M(2) = \hat{U}_{CN}^\dagger \hat{\mathbf{q}}_M(1) \hat{U}_{CN}; \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_S(2) = (\hat{q}_{Mx}(1)\hat{q}_{Sx}(1), \hat{q}_{Mx}(1)\hat{q}_{Sy}(1), \hat{q}_{Sz}(1)); \\ \hat{\mathbf{q}}_M(2) = (\hat{q}_{Mx}(1), \hat{q}_{My}(1)\hat{q}_{Sz}(1), \hat{q}_{Mz}(1)\hat{q}_{Sx}(1)); \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_S(2) = (\hat{q}_{Mx}\hat{q}_{Sz}, -\hat{q}_{Mx}\hat{q}_{Sy}, \hat{q}_{Sx}); \\ \hat{\mathbf{q}}_M(2) = (\hat{q}_{Mx}, \hat{q}_{My}\hat{q}_{Sx}, \hat{q}_{Mz}\hat{q}_{Sx}). \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Este é o resultado da medida na representação de Heisenberg. A evolução do sistema pode ser sintetizada por

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_S(0) = (\hat{q}_{Sx}, \hat{q}_{Sy}, \hat{q}_{Sz}); \\ \hat{\mathbf{q}}_M(0) = (\hat{q}_{Mx}, \hat{q}_{My}, \hat{q}_{Mz}); \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_S(2) = (\hat{q}_{Mx}\hat{q}_{Sz}, -\hat{q}_{Mx}\hat{q}_{Sy}, \hat{q}_{Sx}); \\ \hat{\mathbf{q}}_M(2) = (\hat{q}_{Mx}, \hat{q}_{My}\hat{q}_{Sx}, \hat{q}_{Mz}\hat{q}_{Sx}). \end{cases} \tag{3.48}$$

Conforme mencionamos, esta corresponde à descrição básica comum a todas as interpretações discutidas no trabalho e, por isso, deixamos a discussão do resultado para capítulos subsequentes.

3.6 Estados e descritores relativos

Os estados relativos na última expressão de 3.44 podem ser facilmente identificados na representação de Schrödinger. Isso porque temos uma combinação linear de dois vetores-produto no estado $|\psi(2)\rangle$, que tem o mesmo formato do vetor $|\psi\rangle$ em 3.5. No caso dos qubits, a base dos dois subespaços \mathcal{H}_S e \mathcal{H}_M é a mesma, aquela composta pelos vetores de estados $\{|1\rangle, |-1\rangle\}$. Os coeficientes α_{ni} são tais que apenas elementos diagonais são não-nulos, ou seja $\alpha_{ni} = \delta_n^i \frac{1}{\sqrt{2}}$. Então, os estados relativos do sistema composto são

;

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle |1\rangle \tag{3.49}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |-1\rangle |-1\rangle. \tag{3.50}$$

A partir disso, podemos facilmente identificar os estados relativos (conforme as equações 3.6 e 3.7) de cada subsistema em relação aos autovalores 1 e -1 :

$$\begin{cases} |\omega_1^M\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle; \\ |\omega_{-1}^M\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |-1\rangle; \end{cases} \quad (3.51) \quad \begin{cases} |\omega_1^S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle; \\ |\omega_{-1}^S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |-1\rangle. \end{cases} \quad (3.52)$$

A definição dos estados relativos é especialmente útil quando tratamos de redes com maior número de qubits, pois permite analisar a evolução individual de cada subsistema, mesmo que eles estejam emaranhados. Os estados relativos definidos em 3.51 pertencem ao espaço de Hilbert \mathcal{H}_M apenas, enquanto os estados de 3.52 pertencem a \mathcal{H}_S .

Na representação de Heisenberg, porém, os estados permanecem constantes e não faz sentido definir estados relativos. Podemos, no entanto, definir *descritores relativos*, que desempenham o mesmo papel dos estados relativos em Schrödinger - ou seja, mostram a evolução individual de componentes do sistema. Esta formulação matemática dos descritores relativos na representação de Heisenberg foi desenvolvida por Kuypers e Deutsch em seu artigo mais recente (KUYPERS; DEUTSCH, 2021). A exemplo do que os autores do artigo fizeram, partimos do descritor do qubit M após a medida (em $t = 2$, quando a porta CNOT é aplicada):

$$\hat{\mathbf{q}}_M(2) = \hat{U}_{CN}(\hat{\mathbf{q}}_S(1), \hat{\mathbf{q}}_M(1)). \quad (3.53)$$

Em vez de aplicar a transformação das componentes, conforme fizemos na seção anterior, vamos utilizar a representação funcional da porta lógica CNOT para obter a expressão:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_M(2) &= \hat{P}_1(\hat{q}_{S_z}(1)) + \hat{U}_X(\hat{\mathbf{q}}_M(1))\hat{P}_{-1}(\hat{q}_{S_z}(1)); \\ \hat{\mathbf{q}}_M(2) &= \hat{P}_1(\hat{q}_{S_z}(1)) + (\hat{U}_X^\dagger \hat{\mathbf{q}}_M(1) \hat{U}_X) \hat{P}_{-1}(\hat{q}_{S_z}(1)). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Ao escrever o descritor neste formato, podemos perceber mais facilmente como ele é uma combinação de dois termos que referem-se a autovalores distintos. O primeiro termo é o projetor associado ao autovalor 1 e o segundo é o projetor associado ao autovalor -1 multiplicado pelo resultado da aplicação da porta NOT ao qubit M no tempo $t = 1$. Essa é a motivação para definirmos

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_{M,1}(2) = \hat{\mathbf{q}}_M(2)\hat{P}_1(\hat{q}_{S_z}(2)); \\ \hat{\mathbf{q}}_{M,-1}(2) = \hat{\mathbf{q}}_M(2)\hat{P}_{-1}(\hat{q}_{S_z}(2)), \end{cases} \quad (3.55)$$

que são os descritores relativos do qubit M .

Podemos fazer o mesmo para o qubit S e obter resultados análogos:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{q}}_S(2) &= \hat{U}_{CN}(\hat{\mathbf{q}}_S(1), \hat{\mathbf{q}}_M(1)) = \hat{P}_1(\hat{q}_{Mz}(1)) + \hat{U}_X(\hat{\mathbf{q}}_S(1))\hat{P}_{-1}(\hat{q}_{Mz}(1)); \\ \hat{\mathbf{q}}_S(2) &= \hat{P}_1(\hat{q}_{Mz}(1)) + (\hat{U}_X^\dagger(\hat{\mathbf{q}}_S(1))\hat{U}_X)\hat{P}_{-1}(\hat{q}_{Mz}(1)).\end{aligned}\quad (3.56)$$

E os descritores relativos são

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}}_{S,1}(2) = \hat{\mathbf{q}}_S(2)\hat{P}_1(\hat{q}_{Mz}(2)); \\ \hat{\mathbf{q}}_{S,-1}(2) = \hat{\mathbf{q}}_S(2)\hat{P}_{-1}(\hat{q}_{Mz}(2)). \end{cases}\quad (3.57)$$

Os descritores relativos do qubit S , então, são operadores que agem sobre o descritor total de S e cujo resultado é proporcional à uma projeção do descritor sobre o termo da superposição que corresponde a um determinado autovalor de uma componente do descritor do qubit M (no caso, da componente \hat{q}_{Mz}). O raciocínio é análogo para os descritores relativos do qubit M .

Esta definição é compatível com aquela da representação de Schrödinger, pois é como se o estado de referência de Heisenberg houvesse evoluído de acordo com

$$|\psi\rangle \rightarrow \frac{\hat{P}_i(\hat{q}_{Sz}(2))|\psi\rangle}{|\hat{P}_i(\hat{q}_{Sz}(2))|\psi\rangle|},\quad (3.58)$$

onde i é o autovalor medido e pode valer 1 ou -1 .

Se o resultado da medida (a mesma que viemos tratando ao longo das últimas seções, aquela em que o qubit M mede a componente \hat{q}_{Sz} do qubit S) for o autovalor 1 então, na representação de Schrödinger, o estado do qubit S evolui para $|1\rangle$. Para determinar como evolui o estado do qubit M , podemos analisar as equações 3.51 e verificar que o estado de M relativo ao estado $|1\rangle$ de S é $\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$, em que o coeficiente $\frac{1}{\sqrt{2}}$ apenas indica que a probabilidade de medir o autovalor 1 (e, conseqüentemente, o estado de M evoluir para $|1\rangle$) é de 50%.

Na representação de Heisenberg, o resultado é o mesmo. Se o autovalor medido for 1, então o estado evolui conforme

$$\begin{aligned}|1\rangle|1\rangle &\rightarrow \frac{\hat{P}_1(\hat{q}_{Sz}(2))|1\rangle|1\rangle}{|\hat{P}_1(\hat{q}_{Sz}(2))|1\rangle|1\rangle|} = \frac{|1\rangle\langle 1||1\rangle|1\rangle}{(|1\rangle\langle 1||1\rangle|1\rangle)^\dagger(|1\rangle\langle 1||1\rangle|1\rangle)} \\ &= \frac{|1\rangle|1\rangle}{\langle 1||1\rangle|1\rangle} = |1\rangle|1\rangle; \\ &\Rightarrow |1\rangle|1\rangle \rightarrow |1\rangle|1\rangle,\end{aligned}\quad (3.59)$$

onde utilizamos a notação $|1\rangle\langle 1|$ para o projetor \hat{P}_1 . Isto significa que, para o autovalor medido 1, é como se os estados de S e M tivessem evoluído da mesma forma que na representação de Schrödinger, ainda que tenhamos empregado o formalismo de descritores.

Os estados e os descritores relativos só podem ser definidos a partir do emaranhamento entre os qubits. Assim, estes formalismos matemáticos são diretamente associados a um fenômeno físico, há uma correspondência com a interação entre os subsistemas que representam.

Tanto os descritores quanto os estados relativos determinam diferentes *foliações* - termos de uma combinação linear que podem evoluir de maneira independente entre si ou sofrer interferência - e cada foliação está associada a diferentes autovalores dos observáveis do sistema. As foliações surgem a partir do emaranhamento entre os sistemas, quando os estados e os descritores relativos passam a ser bem definidos. Por isso, concluímos que as foliações são *locais*, pois emergem a partir de interações também locais.

4 Discussão

4.1 Interpretação de Copenhague

Vamos começar a discussão do experimento pelo viés da interpretação de Copenhague. Faremos isto a partir da representação de Schrödinger, já que ela permite evidenciar a não-localidade da interpretação de Copenhague.

Primeiro, determinamos a configuração inicial da rede formada pelos dois qubits S e M . Por definição, qubits são os equivalentes *quânticos* dos bits clássicos. Assim, podemos considerar que o sistema global composto pelos dois qubits é quântico e, portanto, não possui existência independente. É necessário haver uma interação entre este sistema e um ente clássico para que os qubits passem a ter realidade física.

A configuração inicial do sistema indica que os dois qubits estão em estados independentes. É claro que, como os dois qubits são quânticos, eles não *estão* nestes estados de fato, mas mediante uma medida, há probabilidade de 100% de encontrá-los em tais estados. Isso porque o coeficiente implícito do estado $|1\rangle$ é 1, de forma que a probabilidade de medir o estado $|1\rangle$ é $|1|^2 = 1$.

Vamos escrever a função de onda global para o sistema no tempo inicial $t = 0$. A função de onda pode ser obtida a partir de $\psi(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \psi \rangle$. No caso do sistema de dois qubits, temos

$$\psi(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_M; t = 0) = \langle \mathbf{r}_S, \mathbf{r}_M | \psi(0) \rangle = (\langle \mathbf{r}_S | \langle \mathbf{r}_M |) (|1\rangle_S |1\rangle_M), \quad (4.1)$$

onde os vetores \mathbf{r}_S e \mathbf{r}_M referem-se às posições dos qubits S e M respectivamente. Como forma de simplificar a notação, adotaremos a convenção segundo a qual o primeiro estado à esquerda refere-se ao espaço \mathcal{H}_S e o estado à direita refere-se ao espaço \mathcal{H}_M , suprimindo os índices inferiores.

O espaço \mathcal{H} é separável, ou seja, os subespaços que o compõe, \mathcal{H}_S e \mathcal{H}_M , são ortogonais entre si. Isso implica que podemos realizar as operações “espaço por espaço”:

$$\psi(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_M; t = 0) = \langle \mathbf{r}_S | |1\rangle \langle \mathbf{r}_M | |1\rangle. \quad (4.2)$$

Denotamos a autofunção espacial de S associada ao autovalor 1 por $\varphi_{S,1}$ e a autofunção de M associada ao mesmo autovalor por $\varphi_{M,1}$, de forma que

$$\psi(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_M; t = 0) = \varphi_{S,1}(\mathbf{r}_S) \varphi_{M,1}(\mathbf{r}_M), \quad (4.3)$$

e esta é a função de onda global no tempo $t = 0$ inicial.

O próximo passo é a aplicação da porta lógica Hadamard sobre o qubit S , que faz com que o estado inicial puro do qubit S evolua para uma combinação linear dos dois estados possíveis, $|1\rangle$ e $|-1\rangle$. Isto representa simplesmente uma mudança da base em que os estados estão definidos¹, uma rotação do sistema de coordenadas da base $\{|1\rangle, |-1\rangle\}$. Não houve interação entre os qubits S e M , já que M mantém seu estado e S também mantém seu estado (descrito agora em outra base).

Através do mesmo procedimento que fizemos anteriormente e a partir do estado 3.43, determinamos a função de onda global no tempo $t = 1$:

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_M; t = 1) &= \langle \mathbf{r}_S, \mathbf{r}_M | \psi(1) \rangle = (\langle \mathbf{r}_S | \langle \mathbf{r}_M |) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle |1\rangle + |-1\rangle |1\rangle) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle \mathbf{r}_S | 1\rangle \langle \mathbf{r}_M | 1\rangle + \langle \mathbf{r}_S | -1\rangle \langle \mathbf{r}_M | 1\rangle); \\ \Rightarrow \psi(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_M; t = 1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_{S,1}(\mathbf{r}_S) + \varphi_{S,-1}(\mathbf{r}_S)] \varphi_{M,1}(\mathbf{r}_M),\end{aligned}\tag{4.4}$$

em que $\varphi_{S,-1}$ é a autofunção de S associada ao autovalor -1 .

A medida ocorre no tempo $t = 2$ com a aplicação da porta lógica CNOT. Os qubits interagem entre si, pois a própria porta CNOT modela uma interação física entre o controle (qubit M) e o alvo (qubit S). De acordo com a equação de Schrödinger, o estado geral do sistema composto evolui para a superposição indicada na equação 3.44. A função de onda global fica

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_M; t = 2) &= \langle \mathbf{r}_S, \mathbf{r}_M | \psi(2) \rangle = (\langle \mathbf{r}_S | \langle \mathbf{r}_M |) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle |1\rangle + |-1\rangle |-1\rangle) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle \mathbf{r}_S | 1\rangle \langle \mathbf{r}_M | 1\rangle + \langle \mathbf{r}_S | -1\rangle \langle \mathbf{r}_M | -1\rangle); \\ \Rightarrow \psi(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_M; t = 2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{S,1}(\mathbf{r}_S) \varphi_{M,1}(\mathbf{r}_M) + \varphi_{S,-1}(\mathbf{r}_S) \varphi_{M,-1}(\mathbf{r}_M)).\end{aligned}\tag{4.5}$$

Este não é o resultado final da medida para a interpretação de Copenhague. A superposição indica as probabilidades com que podemos medir cada resultado: 50% de chance de medir o sistema no estado composto $|1\rangle |1\rangle$ e 50% de chance de medir o sistema no estado $|-1\rangle |-1\rangle$. A aplicação da porta CNOT, porém, não é a última etapa do processo de medida, já que é uma porta lógica *quântica* cujo resultado ainda é uma superposição.

¹ Esta mudança, conforme já mencionamos na seção 3.5, ocorre por causa da interação do qubit S com um terceiro elemento que não é considerado neste experimento. Ressaltamos apenas que a operação não é tão abstrata quanto uma simples mudança de bases; ela modela uma interação física entre dois entes.

O colapso da função de onda para um dos estados relativos 3.49 ou 3.50 se dá a partir da introdução de um terceiro objeto no sistema. Este objeto deve ser clássico, externo ao sistema de dois qubits. Assim, temos a mesma configuração do experimento das caixas de Einstein: a interação do objeto clássico com qualquer um dos qubits provoca o colapso da função de onda global do sistema, afetando imediatamente o outro qubit também. Dessa forma, fica evidente o caráter não-local da interpretação de Copenhague e, conseqüentemente, a violação da teoria da relatividade.

4.2 Mecânica Bohmiana

A descrição do experimento de acordo com a mecânica Bohmiana também será feita na representação de Schrödinger, assim como a interpretação de Copenhague.

Diferentemente do que discutimos na seção anterior, aqui o caráter ontológico dos dois qubits é de uma existência física real. Além disso, não há uma diferença intrínseca entre os qubits S medido e o qubit M medidor, já que todos os entes podem ser tratados quanticamente na mecânica Bohmiana.

Segundo a teoria, embora o estado inicial do sistema esteja determinado, não temos acesso a todas as informações necessárias para a descrição dinâmica completa. De qualquer forma, em $t = 0$, os qubits possuem estados definidos e posições bem definidas \mathbf{R}_S e \mathbf{R}_M . Por isso, podemos escrever as equações-guia de cada qubit, cujas soluções são suas possíveis trajetórias.

Vamos partir das funções de onda que já escrevemos para discutir a interpretação de Copenhague e substituir na equação guia 2.14:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_S(\mathbf{r}_S; t = 0) &= \frac{\hbar}{m_S} \operatorname{Im}(\nabla_S \ln \psi(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_M; t = 0)) \Big|_{\mathbf{r}_S = \mathbf{R}_S} \\
&= \frac{\hbar}{m_S} \operatorname{Im}[\nabla_S \ln(\varphi_{S,1}(\mathbf{r}_S) \varphi_{M,1}(\mathbf{r}_M))] \Big|_{\mathbf{r}_S = \mathbf{R}_S} \\
&= \frac{\hbar}{m_S} \operatorname{Im} \nabla_S [\ln(\varphi_{S,1}(\mathbf{r}_S)) + \ln(\varphi_{M,1}(\mathbf{r}_M))] \Big|_{\mathbf{r}_S = \mathbf{R}_S} \quad (4.6) \\
&= \frac{\hbar}{m_S} \operatorname{Im}(\nabla_S \ln(\varphi_{S,1}(\mathbf{r}_S)) + \nabla_S \ln(\varphi_{M,1}(\mathbf{r}_M))) \Big|_{\mathbf{r}_S = \mathbf{R}_S} ; \\
&\Rightarrow \mathbf{v}_S(\mathbf{r}_S; t = 0) = \frac{\hbar}{m_S} \operatorname{Im} \nabla_S \ln(\varphi_{S,1}(\mathbf{r}_S)) \Big|_{\mathbf{r}_S = \mathbf{R}_S} .
\end{aligned}$$

A equação-guia do qubit M é obtida de maneira análoga. Então, em $t = 0$, temos

$$\begin{cases} \mathbf{v}_S(\mathbf{r}_S; t = 0) = \frac{\hbar}{m_S} \operatorname{Im} \nabla_S \ln(\varphi_{S,1}(\mathbf{r}_S)) \Big|_{\mathbf{r}_S = \mathbf{R}_S} ; \\ \mathbf{v}_M(\mathbf{r}_M; t = 0) = \frac{\hbar}{m_M} \operatorname{Im} \nabla_M \ln(\varphi_{M,1}(\mathbf{r}_M)) \Big|_{\mathbf{r}_M = \mathbf{R}_M} . \end{cases} \quad (4.7)$$

Conforme podemos perceber, cada equação é função apenas da posição do qubit a que se refere (a equação-guia do qubit S é função do vetor \mathbf{r}_S e não depende de \mathbf{r}_M , por exemplo). Isso indica que neste momento inicial, os estados dos qubits são separáveis, não estão emaranhados. Contudo que não houvesse interações com os subsistemas e que tivéssemos acesso às condições iniciais, poderíamos traçar as trajetórias completas dos qubits.

Na segunda etapa do processo, há uma nova interação representada pela operação da porta Hadamard. A operação é feita somente sobre o qubit S , então podemos esperar que a equação-guia de S seja modificada enquanto a de M permaneça inalterada. Para verificar, repetimos o mesmo procedimento que empregamos no tempo $t = 0$, mas agora utilizando a função de onda $\psi(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_M; t = 1)$ ²:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_S(\mathbf{r}_S; t = 1) = \frac{\hbar}{m_S} \text{Im} [\nabla_S \ln (\varphi_{S,1}(\mathbf{r}_S) + \varphi_{S,-1}(\mathbf{r}_S))] \Big|_{\mathbf{r}_S = \mathbf{R}_S} ; \\ \mathbf{v}_M(\mathbf{r}_M; t = 1) = \frac{\hbar}{m_M} \text{Im} \nabla_M \ln (\varphi_{M,1}(\mathbf{r}_M)) \Big|_{\mathbf{r}_M = \mathbf{R}_M} . \end{cases} \quad (4.8)$$

A partir destas equações, podemos perceber claramente como a velocidade do qubit S não depende do vetor posição do qubit M , e vice-versa. Isto significa que a trajetória de um qubit é independente da posição física do outro qubit.

Novamente, não há imprevisibilidade quanto ao resultado de uma medida neste ponto do processo. Dadas as condições iniciais, utilizaríamos este novo conjunto de equações-guia para prever com absoluta certeza a posição de cada qubit. Conforme já mencionamos, a medida trata-se apenas de uma constatação que se faz acerca de um estado bem-definido do sistema.

Finalmente, a última etapa é uma interação entre os qubits S e M modelada pela porta lógica CNOT. Mais uma vez, escrevemos o conjunto de equações-guia obtidas a partir da função de onda correspondente no tempo $t = 2$:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_S(\mathbf{r}_S; t = 2) = \frac{\hbar}{m_S} \text{Im} [\nabla_S \ln (\varphi_{S,1}(\mathbf{r}_S)\varphi_{M,1}(\mathbf{r}_M) + \varphi_{S,-1}(\mathbf{r}_S)\varphi_{M,-1}(\mathbf{r}_M))] \Big|_{\mathbf{r}_S = \mathbf{R}_S} ; \\ \mathbf{v}_M(\mathbf{r}_M; t = 2) = \frac{\hbar}{m_M} \text{Im} [\nabla_M \ln (\varphi_{S,1}(\mathbf{r}_S)\varphi_{M,1}(\mathbf{r}_M) + \varphi_{S,-1}(\mathbf{r}_S)\varphi_{M,-1}(\mathbf{r}_M))] \Big|_{\mathbf{r}_M = \mathbf{R}_M} . \end{cases} \quad (4.9)$$

Este é o momento em que ocorre o emaranhamento entre os estados dos dois qubits. Tanto a equação-guia de S quanto a de M dependem das posições \mathbf{R}_S e \mathbf{R}_M de ambos os qubits. Diferentemente da interpretação de Copenhague, esta é a última etapa do processo de medida na mecânica Bohmiana.

² O cálculo completo encontra-se no apêndice C

Realizar uma medida, em Bohm, significa obter informação acerca do estado real da partícula. No caso do sistema de dois qubits, podemos afirmar que o qubit M realiza uma medida do estado do qubit S após a operação da porta CNOT se M tem informação sobre a posição do qubit S em $t = 2$.

Escrevemos as equações-guia de ambos os qubits em $t = 2$, ou seja, assumindo que não haja outras interações, suas trajetórias podem ser completamente determinadas dadas as condições iniciais. O formato destas equações também revela que a posição do qubit M depende da posição do qubit S e vice-versa. Em especial, a posição \mathbf{R}_M em $t = 2$ depende da posição \mathbf{R}_S em $t = 2$. Por isso, o simples fato de o qubit M ocupar uma posição bem definida neste instante implica que ele tem informação sobre a posição do qubit S . Portanto, podemos afirmar que o qubit M realizou uma medida da posição do qubit S .

Vamos acrescentar um passo adicional ao processo para que seja possível evidenciar a não-localidade da teoria, a exemplo do que ocorre no experimento das caixas de Einstein. Começamos por separar espacialmente os qubits através de uma distância muito grande³. Em seguida, introduzimos uma terceira partícula, que irá desempenhar o papel de observador.

Esta terceira partícula interage localmente com apenas um dos qubits - com o qubit S , por exemplo. A equação-guia de S , então, é alterada de acordo com o tipo de interação, o que faz com que sua trajetória mude. Por outro lado, o qubit M manteve-se isolado, isto é, não interagiu com sistema algum. Sua equação-guia, portanto, deve permanecer a mesma que escrevemos para $t = 2$.

No entanto, a partir daquilo que discutimos acima, sabemos que a posição de M depende da posição de S . A posição de S é alterada devido à interação com a terceira partícula; como consequência, a posição de M também é alterada. Mas a interação que provocou a mudança de \mathbf{R}_M foi entre a partícula e o qubit S em um ponto espacialmente separado de M , embora o efeito seja instantâneo.

Por conseguinte, é fácil perceber como a introdução da equação-guia na descrição matemática da mecânica quântica implica a violação da teoria da relatividade, já que tem como consequência a não-localidade.

4.3 Teoria Everettiana

Concluiremos a discussão do sistema de dois qubits com a interpretação Everettiana. Desta vez, utilizaremos a representação de Heisenberg e os descritores, já que a teoria permite esta formulação local.

³ Uma distância grande é aquela que faz com que as interações físicas locais que conhecemos tenham efeitos diminutos sobre as partículas.

O sistema encontra-se inicialmente em uma configuração que chamamos estado de referência. Este estado permanece constante durante todo o processo de medida. Por isso, iremos discutir a evolução dos descritores, que contêm as informações sobre os qubits, incluindo sua posição. Os descritores em $t = 0$ são independentes entre si, mesmo que sua dimensão seja aquela da rede global. Antes que haja qualquer interação entre os qubits ou com outros entes, eles correspondem a funções de onda altamente localizadas definidas no espaço-tempo (associadas aos estados puros $|1\rangle_S$ e $|1\rangle_M$).

Em $t = 1$, apenas o descritor do qubit S é alterado. Na representação de Heisenberg, é fácil notar como não há emaranhamento nesta etapa, já que as componentes do descritor seguem sendo dadas em função das componentes iniciais de S . A rotação do sistema de coordenadas do descritor faz com que as componentes \hat{q}_{Sx} e \hat{q}_{Sz} sejam trocadas e \hat{q}_{Sy} seja refletida em relação ao plano xz . Isso implica um estado equivalente de superposição do qubit S em relação aos autoestados $|1\rangle$ e $|-1\rangle$.

Conforme já mencionamos, a aplicação das portas lógicas é discreta. Nas discussões anteriores de Copenhague e Bohm, escrevemos as funções de onda correspondentes somente após ter operado com a porta lógica sobre o estado do qubit exatamente por este motivo. A função de onda evolui continuamente no tempo, é definida em uma região do espaço-tempo; por outro lado, o estado corresponde a um ponto em um único instante. Na representação de Heisenberg, porém, não há função de onda e os descritores sintetizam a evolução discreta dos operadores no tempo.

Na última etapa, em $t = 2$, temos uma interação entre as ondas de S e M , de forma que o descritor de S passa a ter informações sobre a componente \hat{q}_{Mx} de M , enquanto M passa a ter informações sobre a componente \hat{q}_{Sz} de S . Por exemplo, se o valor de \hat{q}_{Mz} for 1, isto significa que o descritor de M armazenou uma cópia do autovalor do observável medido \hat{q}_{Sz} (1), o que evidentemente caracteriza uma medida. É interessante notar como, nesta teoria, a medida é uma via dupla: assim como M realiza uma medida de S , S realiza uma medida de M através da componente \hat{q}_{Mx} .

O caráter realista da teoria permite afirmar que, se o qubit M registrar o autovalor 1, então o observável do qubit S estava no estado correspondente a este autovalor, $|1\rangle$. A porta lógica CNOT também é chamada *medida perfeita* justamente porque evolui os descritores de tal forma que não há estados cruzados ao final da operação. Em uma medida, é razoável esperar que, se o aparelho medidor mostrar o resultado 1, então o observável medido de fato estava no estado $|1\rangle$, e não em $|-1\rangle$, por exemplo.

O resultado global da medida é a combinação linear das informações contidas nos dois descritores relativos. Porém, cada descritor relativo corresponde a uma foliação diferente, de forma que o resultado da medida em cada foliação também é diferente. Se o qubit M estiver em um determinado estado, registrará um autovalor relativo ao estado do qubit S ; se o estado do medidor for outro, o autovalor registrado também será outro. A

existência física da onda não muda a concepção intuitiva que temos acerca de uma medida: o resultado é bem definido e corresponde a um observável real do qubit S . Mesmo as probabilidades atribuídas aos resultados são mantidas, pois não sabemos de antemão em qual foliação estamos, ainda que a teoria afirme que todas as possibilidades são realizadas.

Conforme já mencionamos na seção 2.3, as foliações são locais. No caso do sistema de dois qubits, duas foliações são criadas a partir da operação com a porta lógica CNOT: aquela em que o resultado da medida é o autovalor 1 e outra em que o resultado é -1 . Estas foliações surgem a partir da interação e do emaranhamento entre os dois qubits em $t = 2$ e, portanto, são locais. Cada foliação evolui no tempo de acordo com as interações dos entes que ela contém, podendo sofrer mais ramificações ou mesmo interferir com outras foliações.



Figura 13 – Foliações geológicas em uma rocha

Fonte: ([WIKIMEDIA COMMONS, 2011](#))

Acima, podemos ver na imagem um esquema de foliações. Embora as foliações Everettianas sejam de natureza distinta, o comportamento de bifurcação e recombinação é análogo a esta representação.

Destacamos, no entanto, que a medida à qual nos referimos é pontual. O qubit M registra o valor que a componente \hat{q}_{sz} de S tinha no instante de tempo $t = 1$. Isto é diferente de registrar como a componente evolui no tempo, que seria o registro de uma variável que pode assumir diferentes valores. O próprio valor é registrado e ele não carrega informações sobre como será sua evolução. Esta característica é crucial para entender a localidade da teoria.

Da mesma forma como fizemos para discutir as outras teorias, vamos introduzir um terceiro elemento no sistema global. Após a medida em $t = 2$, os qubits S e M - que são

definidos pelos descritores da equação 3.47 - são afastados a uma distância muito grande um do outro. Após esta separação, supomos a interação do ente externo com o qubit S apenas. Assim como as outras interações físicas, esta interação é modelada por uma porta lógica de operação discreta, que altera o descritor associado a S .

A partir disso, devemos nos perguntar: o descritor do qubit M é alterado por causa da interação do qubit S com o elemento externo? A resposta é: não. É fato que os descritores dos qubits S e M em $t = 2$ estão emaranhados; porém, aquilo que está correlacionado são os valores assumidos pelos observáveis no momento imediatamente anterior à medida, ou seja, em $t = 1$. O emaranhamento entre os dois é desfeito no momento em que S interage com outro elemento e, com isso, altera o seu descritor associado.

Portanto, a teoria Everettiana é local. As foliações que resultam do processo de medida têm origem em interações locais e o emaranhamento entre os entes mantém-se até que um deles interaja com outro elemento; neste caso, a interação não é transmitida ao outro ente porque o emaranhamento é desfeito. Em geral, isto ocorre por causa do fenômeno de *decoerência*, em que o objeto interage com os elementos do ambiente em que se encontra.

5 Considerações finais e conclusão

Com base no que foi discutido ao longo do trabalho, vamos destacar e comparar os principais pontos defendidos por cada uma das teorias apresentadas. Começaremos pelo aspecto ontológico.

A interpretação de Copenhague afirma que a realidade física é constituída apenas por entes clássicos, isto é, aqueles cujo comportamento pode ser satisfatoriamente descrito pelas leis da mecânica clássica Newtoniana. Embora estes objetos sejam tipicamente macroscópicos, não são claros quais os critérios para que seja feita uma classificação inequívoca.

Há, ainda, uma outra classe de entes, os quânticos. Estes, porém, não existem da mesma forma que os entes clássicos, pois pertencem a um espaço matemático abstrato. Sua existência real é condicional, dependente de uma interação com um ente clássico. Por isso, na interpretação de Copenhague, o chamado *observador* desempenha um papel decisivo na descrição teórica, pois é através dele que os objetos quânticos passam a existir.

Conforme discutido na seção 2.1, esta interpretação ocupa-se daquilo que pode-se afirmar acerca da realidade física, em vez de tentar caracterizá-la de forma completa. Como a existência dos entes quânticos só pode ser verificada experimentalmente através de uma medida - feita por um observador que é clássico -, a interpretação ortodoxa não extrapola esta existência para além da interação.

Tal postura é totalmente diferente daquela adotada pela mecânica Bohmiana, por exemplo. Bohm postula categoricamente a existência das partículas e elimina a cisão entre mundo clássico e mundo quântico, reforçando o caráter universal de sua teoria. A teoria Bohmiana é realista justamente porque especula que as partículas existem mesmo quando não são observadas por algum outro ente. Trata-se, de fato, de uma especulação, pois os adeptos da teoria ortodoxa têm razão em afirmar que a verificação empírica exige algum tipo de interação. É neste ponto que faz-se valer a prioridade da explicação dos fenômenos naturais em relação a sua mera descrição. O observador não está no cerne da teoria Bohmiana, pois ela trata de uma realidade externa que independe do mesmo.

Assim é também com a teoria Everettiana, que tem como postulado único a existência da função de onda. Neste aspecto, ela é semelhante à mecânica Bohmiana: todos os entes podem ser considerados quânticos e, portanto, descritos pela mecânica quântica. A teoria de Everett também é realista, pois supõe um mundo real independente do observador. Na verdade, na teoria Everettiana, o termo observador é usado de maneira distinta em relação às outras teorias. Conforme discutimos no último capítulo, a medida é um processo duplo, pois como não há diferenciação intrínseca entre os entes - todos

são quânticos - os dois trocam informações mutuamente. A classificação observador e observado depende da intenção daquele que descreve a medida.

Atentamos para o seguinte: embora cada teoria postule a existência de um tipo diferente de ente, todas estas classificações referem-se aos mesmos objetos do mundo físico. Sejam os entes quânticos abstratos e os entes clássicos reais da interpretação de Copenhague, as partículas da mecânica Bohmiana ou as ondas da teoria Everettiana, estamos lidando com as mesmas entidades físicas. As distinções são *ontológicas*, e não *ônticas*.

Outra questão levantada pelas teorias é o resultado de uma medida. A interpretação de Copenhague distingue-se pelo postulado do colapso, uma evolução descontínua da função de onda para um dos autoestados da base. Este colapso é o que caracteriza o processo de medida na interpretação de Copenhague: a interação de um ente quântico com um ente clássico provoca o colapso da função de onda do ente quântico, fazendo com que ele passe a existir no mundo físico real em um dos autoestados previstos pela função de onda.

Ao longo do trabalho, mencionamos alguns filósofos da ciência que passaram a questionar o método científico vigente de sua época e desenvolveram epistemologias próprias. Embora existam aspectos particulares a cada uma, todas parecem concordar com o seguinte: uma teoria científica deve ser clara em sua formulação. Por isso, a resistência em considerar a interpretação de Copenhague como uma teoria, na plena acepção do termo. O postulado do colapso é imposto sem que sejam especificadas as condições para que ele ocorra.

Sabemos que o colapso é uma consequência da interação entre um ente quântico e um ente clássico - que julgamos constituir a medida a que se refere a interpretação. Porém, o problema com essa condição parece residir no fato de que não sabemos classificar os entes em clássicos ou quânticos, conforme já mencionamos anteriormente ao tratar do Heisenberg cut. Além disso, o motivo que justifica o colapso é a precisão¹ do resultado da medida, já que isto é observado empiricamente. Trata-se de uma constatação de um fenômeno, mas explicações não são fornecidas. A interpretação de Copenhague, portanto, levanta a questão da medida sem que ela própria ofereça uma explicação satisfatória do processo.

A situação é diferente na mecânica Bohmiana. Não existe colapso da função de onda, pois as ondas - que só existem no espaço matemático abstrato - não deixam de existir após uma medida. A medida, na teoria de Bohm, é na verdade uma mera verificação experimental de um valor teórico que pode ser previsto com absoluta certeza. As informações que um ente externo ao sistema detém acerca deste não modificam a sua configuração; a realidade existe independente da observação e não é alterada por ela.

¹ Em inglês, sharpness, em oposição a bluntness.

No caso da teoria Everettiana, a observação também não tem papel central, embora possa ser completamente explicada pela teoria. Assim como em Copenhague, uma medida pressupõe uma interação entre os entes. Porém, aqui, estes entes são ambos quânticos (pois é o único tipo de ente que existe) e, também como na mecânica Bohmiana, não há colapso da função de onda. A medida é o processo através do qual duas ondas interagem e armazenam informações uma sobre a outra por meio de cópias que fazem de seus observáveis. Por isso, mesmo que uma das ondas esteja em um estado de superposição, a medida não implica o colapso; nesse caso, a outra onda simplesmente copia e armazena a superposição através do emaranhamento.

Talvez o ponto mais controverso da comparação entre as teorias seja a emergência ou a inerência do caráter probabilístico. A interpretação de Copenhague tem como um de seus postulados fundamentais a Regra de Born, segundo a qual a probabilidade de obter determinado autovalor como resultado de uma medida é a norma quadrada do coeficiente que multiplica o autoestado de energia correspondente na superposição (normalizada).

Da mesma forma como acontece com outros postulados desta interpretação, a motivação é empírica. Feito um grande número de medidas, os resultados de fato parecem se relacionar conforme a Regra de Born. Mas, se pretendemos considerar a interpretação de Copenhague como uma teoria, ela deve ser capaz de fazer previsões acerca de eventos individuais em vez de apenas uma análise estatística de dados. Existem, como já mencionamos, vertentes que mantêm esta postura de tratamento de conjuntos de dados.

Para outros adeptos da interpretação, porém, toda a dinâmica descrita pela formulação convencional da mecânica quântica refere-se a objetos particulares. Neste caso, a indeterminação que precede a medida e que é traduzida na superposição de vários estados possíveis é uma característica intrínseca aos entes quânticos.

A dualidade onda-partícula talvez refira-se, na verdade, à transformação súbita das ondas em partículas. Este processo envolve um fator aleatório, pois não é possível prever de forma alguma qual será o estado da partícula que se origina a partir da onda. Sabemos quais são os estados possíveis - pois eles estão descritos na função de onda -, mas qual dentre eles será o resultado da medida é determinado de forma aleatória.

Sobre isso, a resposta dada pela mecânica Bohmiana parece ser quase oposta. A indeterminação característica dos fenômenos quânticos e que é tipicamente associada a comportamentos ondulatórios é simplesmente uma análise estatística. As partículas possuem trajetórias bem definidas, embora a onda-guia seja uma combinação linear de todas as possíveis trajetórias de uma partícula. Isto porque a partícula parte de certo ponto no espaço-tempo, o que faz com que a equação da onda tenha uma solução única - que é precisamente a trajetória que a partícula percorre de fato.

Dessa maneira, é possível explicar um padrão de interferência a partir das variações

das condições iniciais de cada partícula em um grande conjunto de medidas. As trajetórias possíveis são exatamente aquelas associadas a uma interferência de natureza ondulatória. E, de fato, as trajetórias são determinadas pelas ondas-guia, o que explica esse aspecto dual dos fenômenos quânticos.

Esta análise estatística recupera a Regra de Born como uma consequência do formalismo teórico, de tal forma que não é necessário tomá-la como um postulado. E, novamente, o observador (idealmente) não altera o sistema ao interagir com o mesmo. Uma vez que o medidor registre as condições iniciais de cada partícula, ele poderá prever o padrão de interferência a partir de suas trajetórias calculadas pela equação-guia, mas não há colapso.

As probabilidades na teoria Everettiana têm origem na proposta inicial de Everett de desenvolver uma teoria da medida a partir da formulação de estados relativos. De acordo com Wallace e Deutsch ([SAUNDERS et al., 2012](#), p. 227-263), a motivação para tomar os coeficientes dos termos de uma superposição como probabilidades - ou seja, a motivação para a Regra de Born - é a racionalidade. Deutsch apresentou uma prova da Regra de Born a partir da teoria da decisão no contexto Everettiano em ([DEUTSCH, 1999](#)), a qual foi revisada e ampliada por Wallace na referência acima.

Este tipo de prova garante que não sejam acrescentados outros postulados à teoria além da existência das ondas, pois a racionalidade é um princípio básico de toda teoria física e não deve ser tomada como um postulado particular de cada uma. Há uma semelhança matemática entre o papel que os coeficientes desempenham no contexto da mecânica ondulatória e o papel das probabilidades em estatística. Assim, garantir tal identidade é relativamente simples, em termos instrumentais. Sua explicação, no entanto, pode não ser tão intuitiva quanto sua descrição, mas os autores recorrem a algo tão universal quanto a racionalidade.

De certa forma, em Everett, o caráter intrínseco e genuíno das probabilidades é mais evidente. Isso porque a onda - e todos os termos que ela contém multiplicados por seus respectivos coeficientes - é o ente realista da teoria. A distribuição de probabilidades é tão real quanto a própria onda. Mais que isso, os coeficientes não se alteram com o processo de medida, não há quebra de simetria causada pelo observador.

Nas outras teorias apresentadas, os coeficientes estão relacionados à probabilidade de, em uma medida, o sistema estar em um ou outro estado. Na teoria Everettiana, porém, *todos os estados são realizados* ao mesmo tempo em foliações diferentes. As probabilidades referem-se a estas foliações determinadas pela superposição. A norma quadrada dos coeficientes é a probabilidade de o sistema estar em uma ou outra foliação, o que é equivalente a obter um ou outro resultado, como usualmente é formulada a regra de Born.

O último tópico a ser discutido neste capítulo é a questão da localidade. Conforme

já apresentamos anteriormente, a observação deste princípio é de extrema relevância, pois indica a compatibilidade de uma teoria com a relatividade geral. Análises mais detidas da localidade em cada teoria já foram feitas em capítulos anteriores, de forma que iremos fazer uma breve classificação das interpretações com base neste critério.

A mecânica ondulatória na qual se baseia a interpretação de Copenhague - bem como as duas outras teorias - não implica efeitos não locais por si mesma. A não localidade de Copenhague advém do colapso global da função de onda, já que o colapso é provocado por uma interação, que é sempre local, e seus efeitos são propagados instantaneamente por todos os termos da onda. Isto faz com que o estado de um objeto seja alterado mesmo sem interação, desde que ele esteja relacionado por meio da função de onda a outro objeto submetido a uma medida.

A não-localidade da mecânica Bohmiana tem origem na função de onda global e no seu caráter determinista. A equação-guia evidencia o determinismo pois caracteriza completamente a trajetória da partícula a menos de constantes que podem ser encontradas a partir das condições iniciais. Esta mesma equação, porém, tem como parâmetro a função de onda global. Por isso, se a equação global não for separável - se o sistema estiver emaranhado -, a equação-guia de uma partícula será função das posições de todas as partículas do sistema. Esta relação se mantém a longas distâncias desde que não haja uma interação que desfça o emaranhamento, que é exatamente o caso do processo de medida do sistema de dois qubits que descrevemos anteriormente.

Já no caso da teoria Everettiana, a existência da função de onda global não faz com que ela seja não-local. A formulação de estados relativos mostra como os diferentes termos da superposição, em geral, não interagem entre si, pois determinam foliações diferentes do espaço-tempo. Todas as interações são locais, assim como nas outras teorias; mas, além disso, os efeitos destas interações são transmitidos localmente, e não de forma instantânea.

A localidade tem consequências também para os mecanismos de transmissão da informação quântica. A velocidade limite da informação, segundo a teoria da relatividade, é a velocidade da luz c . A não-localidade da interpretação de Copenhague e da mecânica Bohmiana tem como consequência a transmissão instantânea de informação, independente da distância entre a fonte e o receptor.

A informação propaga-se através da função de onda global, mas esta em geral está definida em uma região do espaço (e não em um ponto). Assim, a informação deve percorrer a extensão desta região em um intervalo de tempo nulo, o que implica uma velocidade de transmissão infinita.

Em Copenhague, não é evidente como se dá exatamente o fluxo da informação. A medida ocorre em um ponto do espaço e isso faz com que só um estado dentre os possíveis autoestados passe a existir. Porém, como a informação flui do ponto em que

ocorreu a medida até os pontos onde estão definidos os autoestados, se eles deixam de existir instantaneamente? A transmissão deveria ocorrer por meio da função de onda, mas o colapso impede que ela conecte os autoestados neste momento.

Por outro lado, na mecânica Bohmiana, embora a transmissão da informação possa ocorrer com velocidades superiores à da luz, é possível definir o fluxo da informação. Neste caso, como não há colapso, é razoável afirmar que o canal de propagação é a função de onda-guia. É através dela que a informação flui ao longo da trajetória da partícula. O que não é claro nesta teoria é como se dá a transmissão da informação da onda para a partícula efetivamente, já que a onda é um ente matemático abstrato² e a partícula possui existência física.

Também na teoria Everettiana é possível traçar o caminho que a informação percorre. Novamente, ele é determinado pela função de onda, mas aqui esse deslocamento se dá no limite relativístico da velocidade da luz. Através de interações locais, a informação é transmitida através da onda e, quando encontra uma ramificação da onda em foliações distintas, segue por apenas uma delas. Isto garante que as foliações sejam independentes entre si.

O estudo da informação quântica é de grande interesse para diversas áreas da tecnologia, em especial a computação. A criptografia quântica, por exemplo, garante maior segurança na transmissão e no armazenamento de dados e diversas simulações físicas são possíveis graças à velocidade de processamento dos computadores quânticos. Em função disso e das inovações futuras relacionadas à quântica, a área de fundamentos da mecânica quântica - e a teoria Everettiana, em especial - tem ganhado algum destaque recentemente.

Esperamos com este trabalho ter mostrado como o campo de estudo é amplo e interdisciplinar, assim como são em geral aqueles relacionados aos princípios fundamentais de alguma teoria. A pesquisa acadêmica deste tipo é essencial para relacionar e desenvolver conceitos mantendo sua coerência interna ou propondo novas linhas de estudo. Isto, é claro, tem como consequência avanços tecnológicos como aqueles que mencionamos acima.

Contudo, e acreditamos que os cientistas compartilhem esse sentimento, a ciência é essencial por si mesma. A busca pelo conhecimento é comum a todos os seres humanos, manifestando-se das mais diversas formas. Por isso, neste caso, não é necessária uma explicação teórica; basta que sejamos guiados por esta curiosidade em relação ao mundo que nos cerca.

² “É natural hesitar a atribuir o status de objeto real a tal entidade” (BETZ, 2014).

Referências

- ABDALLA, M. C. B. *Bohr - O arquiteto do átomo*. São Paulo: Odysseus, 2002. Citado na página 29.
- BAKER, A. Simplicity. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.
- BELL, J. *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. Citado na página 34.
- BETZ, M. E. M. Elementos de mecânica quântica da partícula na interpretação da onda piloto. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 36, n. 4, p. 01–14, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S1806-11172014000400011>>. Citado na página 78.
- BOHM, D. *Causalidade e acaso na física moderna*. Rio de Janeiro: Contraponto, 1957. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 33.
- BOHR, N. I. on the constitution of atoms and molecules. *Philosophical Magazine Series 6*, v. 26, n. 151, p. 1–25, 1913. Citado na página 20.
- BOHR, N. *Atomic Physics and Human Knowledge*. New York: Wiley, 1958. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 23.
- BYRNE, P. *The many worlds of Hugh Everett III*. London: Oxford University Press, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.
- DE BROGLIE, L. *Current interpretation of wave mechanics*. London: Elsevier Science, 1964. Citado na página 11.
- DEUTSCH, D. *Philosophy of Physics*. London: Penguin, 1998. Citado na página 19.
- DEUTSCH, D. Quantum theory of probability and decisions. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 455, n. 1988, p. 3129–3137, 1999. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/quant-ph/9906015>>. Citado na página 76.
- DÜRR, D.; LAZAROVICI, D. *Understanding quantum mechanics*. Cham: Springer Nature, 2020. Citado na página 33.
- EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, v. 47, p. 777–780, May 1935. Citado 3 vezes nas páginas 11, 16 e 34.
- EVERETT, H. “relative state” formulation of quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, American Physical Society, v. 29, p. 454–462, 1957. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.
- FEYERABEND, P. *Contra o método*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1977. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 30.

- FEYNMAN, R. P. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer Science and Business Media, v. 21, n. 6-7, p. 467–488, 1982. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/bf02650179>>. Citado na página 43.
- GEA-BANACLOCHE, J. Splitting the wave function of a particle in a box. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers (AAPT), v. 70, n. 3, p. 307–312, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1119/1.1446854>>. Citado na página 13.
- GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Quantum Mechanics*. 2. ed. Upper Saddle River: Pearson, 2004. Citado na página 31.
- INSTITUT INTERNATIONAL DE PHYSIQUE SOLVAY. *Electrons et photons: rapports et discussions du cinquième Conseil de physique tenu à Bruxelles du 24 au 29 octobre 1927*. Paris: Gauthier-Villars et cie, 1928. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 28.
- KUYPERS, S.; DEUTSCH, D. Everettian relative states in the Heisenberg picture. *Proceedings of the Royal Society A*, v. 477, n. 2246, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 62.
- MARX, K.; ENGELS, F. *The German Ideology*. New York: International Publishers, 1995. Citado na página 30.
- MAUDLIN, T. *Philosophy of Physics*. Princeton: Princeton University Press, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 23.
- MEHLBERG, H. *Time, Causality, and the Quantum Theory: Studies in the Philosophy of Science*. London: Reidel, 1980. Citado na página 24.
- NEWTON, I. *The Mathematical Principles of Natural Philosophy (Principia Mathematica)*. New York: Citadel Press, 1964. Citado na página 40.
- NORSEN, T. Einstein's boxes. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 73, n. 2, p. 164–176, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1119/1.1811620>>. Citado na página 16.
- NURGALIEVA, N.; RENNER, R. Testing quantum theory with thought experiments. *Contemporary Physics*, v. 61, n. 3, p. 193–216, 2020. Citado na página 23.
- RAYMOND-ROBICHAUD, P. A local-realistic model for quantum theory. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 477, p. 20200897, 06 2021. Citado na página 28.
- RUSSELL, B. On denoting. *Mind*, Oxford University Press, XIV, n. 4, p. 479–493, 1905. Citado na página 24.
- SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern Quantum Mechanics*. Boston: Addison-Wesley, 2011. Citado na página 85.
- SAUNDERS, S. et al. (Ed.). *Many worlds?* London: Oxford University Press, 2012. Citado na página 76.
- SCHRÖDINGER, E. Quantisation as a problem of proper values (part i). *Annalen der Physik*, v. 79, n. 4, p. 361–376, 1926. Citado na página 21.

SMITH, D. W. Phenomenology. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2018. Citado na página 28.

TOLSTÓI, L. *Guerra e Paz*. São Paulo: Companhia das Letras, 2017. Citado na página 28.

WALLACE, D. *The Emergent Multiverse*. London: Oxford University Press, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 42.

WIKIMEDIA COMMONS. *Orthogneiss Geopark*. 2011. Acesso em 18/09/2022. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Orthogneiss_Geopark.jpg>. Citado na página 71.

Apêndices

APÊNDICE A – Equação de movimento de Heisenberg

Vamos deduzir a equação de movimento de Heisenberg conforme a referência (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011). Primeiro, derivamos a primeira equação de 3.14 em relação ao tempo:

$$\frac{d\hat{O}^{(H)}}{dt} = \frac{\partial\hat{U}^\dagger}{\partial t}\hat{O}^{(S)}\hat{U} + \hat{U}^\dagger\hat{O}^{(S)}\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}, \quad (\text{A.1})$$

onde utilizamos a regra da cadeia e assumimos que $\frac{\partial\hat{O}^{(S)}}{\partial t} = 0$.

Vamos computar a derivada do operador temporal a partir da sua definição 3.3:

$$\frac{\partial\hat{U}}{\partial t} = -\frac{i\hat{H}}{\hbar}e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} = -\frac{i\hat{H}}{\hbar}\hat{U} = \frac{\hat{H}}{i\hbar}\hat{U}. \quad (\text{A.2})$$

Substituímos estes resultados na equação A.1:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{O}^{(H)}}{dt} &= -\frac{\hat{H}}{i\hbar}\hat{U}^\dagger\hat{O}^{(S)}\hat{U} + \hat{U}^\dagger\hat{O}^{(S)}\frac{\hat{H}}{i\hbar}\hat{U} \\ \Rightarrow \frac{d\hat{O}^{(H)}}{dt} &= \frac{1}{i\hbar}\left(\hat{U}^\dagger\hat{O}^{(S)}\hat{H}\hat{U} - \hat{H}\hat{U}^\dagger\hat{O}^{(S)}\hat{U}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Para um Hamiltoniano independente do tempo, $[\hat{U}, \hat{H}] = 0$, o que nos permite escrever

$$\frac{d\hat{O}^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left(\hat{U}^\dagger\hat{O}^{(S)}\hat{H}\hat{U} - \hat{U}^\dagger\hat{H}\hat{O}^{(S)}\hat{U}\right). \quad (\text{A.4})$$

Notamos que $\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = \mathbb{1}$, que é o operador unitário. Vamos multiplicar cada termo da soma à direita por este operador, já que $\mathbb{1}\hat{O} = \hat{O}\mathbb{1} = \hat{O}$ para qualquer operador

$$\frac{d\hat{O}^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left(\hat{U}^\dagger\hat{O}^{(S)}\hat{U}\hat{U}^\dagger\hat{H}\hat{U} - \hat{U}^\dagger\hat{H}\hat{U}\hat{U}^\dagger\hat{O}^{(S)}\hat{U}\right). \quad (\text{A.5})$$

E utilizamos mais uma vez a primeira equação de 3.14 para obter

$$\frac{d\hat{O}^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left(\hat{O}^{(H)}\hat{U}^\dagger\hat{H}\hat{U} - \hat{U}^\dagger\hat{H}\hat{U}\hat{O}^{(H)}\right) = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{O}^{(H)}, \hat{U}^\dagger\hat{H}\hat{U}\right]. \quad (\text{A.6})$$

Mas, como \hat{H} e \hat{U} comutam entre si, $\hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} = \hat{U}^\dagger \hat{U} \hat{H} = I \hat{H} = \hat{H}$, de forma que temos finalmente

$$\frac{d\hat{O}^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{O}^{(H)}, \hat{H}], \quad (\text{A.7})$$

que é a *equação de movimento de Heisenberg*.

APÊNDICE B – Representação funcional da porta CNOT

A dedução da transformação das componentes de um descritor a partir de uma interação modelada pela porta lógica CNOT começa com a equação 3.41:

$$\begin{aligned}\hat{U}_{CN}(\hat{\mathbf{q}}_C(t), \hat{\mathbf{q}}_T(t)) &= \hat{P}_1(\hat{q}_{Tz}(t)) + U_X(\hat{\mathbf{q}}_C(t))\hat{P}_{-1}(\hat{q}_{Tz}(t)) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \hat{q}_{Tz}(t)) + \hat{q}_{Cx}(t)\frac{1}{2}(\mathbb{1} - \hat{q}_{Tz}(t))\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

$$\Rightarrow \hat{U}_{CN} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \hat{q}_{Tz}(t) + \hat{q}_{Cx}(t) - \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t)), \quad (\text{B.2})$$

em que suprimimos a dependência do operador U_{CN} em relação aos descritores dos qubits controle e alvo como forma de simplificar a notação.

Como \hat{U}_{CN} é um operador unitário,

$$\hat{U}_{CN} = \hat{U}_{CN}^\dagger. \quad (\text{B.3})$$

O valor do descritor em $t + 1$ é dado por

$$\hat{\mathbf{q}}_T(t + 1) = \hat{U}_{CN}^\dagger \hat{\mathbf{q}}_T(t) \hat{U}_{CN}. \quad (\text{B.4})$$

Primeiro, calculamos o termo

$$\begin{aligned}\hat{U}_{CN}^\dagger \hat{\mathbf{q}}_T(t) &= \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \hat{q}_{Tz}(t) + \hat{q}_{Cx}(t) - \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t))(\hat{q}_{Tx}(t), \hat{q}_{Ty}(t), \hat{q}_{Tz}(t)) \\ &= \frac{1}{2}[\hat{q}_{Tx}(t) + \hat{q}_{Tz}(t)\hat{q}_{Tx}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t) - \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t)\hat{q}_{Tx}(t), \\ &\quad \hat{q}_{Ty}(t) + \hat{q}_{Tz}(t)\hat{q}_{Ty}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t) - \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t)\hat{q}_{Ty}(t), \\ &\quad \hat{q}_{Tz}(t) + \hat{q}_{Tz}(t)\hat{q}_{Tz}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t) - \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t)\hat{q}_{Tz}(t)]\end{aligned}\quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \hat{U}_{CN}^\dagger \hat{\mathbf{q}}_T(t) &= \frac{1}{2}[\hat{q}_{Tx}(t) + i\hat{q}_{Ty}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t) - i\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t), \\ &\quad \hat{q}_{Ty}(t) - i\hat{q}_{Tx}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t) + i\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t), \\ &\quad \hat{q}_{Tz}(t) + \mathbb{1} + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t) - \hat{q}_{Cx}(t)].\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

Então, substituindo B.6 e B.2 em B.4, temos

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \hat{\mathbf{q}}_T(t+1) &= \frac{1}{2} [\hat{q}_{Tx}(t) + i\hat{q}_{Ty}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t) - i\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t), \\
&\quad \hat{q}_{Ty}(t) - i\hat{q}_{Tx}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t) + i\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t), \\
\hat{q}_{Tz}(t) + \mathbf{1} + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t) - \hat{q}_{Cx}(t)] &\frac{1}{2} (\mathbf{1} + \hat{q}_{Tz}(t) + \hat{q}_{Cx}(t) - \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t)) \\
&= (\hat{q}_{Tx}(t+1), \hat{q}_{Ty}(t+1), \hat{q}_{Tz}(t+1)).
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Vamos calcular a transformação de cada componente, começando por \hat{q}_{Tx} :

$$\begin{aligned}
\hat{q}_{Tx}(t+1) &= \frac{1}{2} [\hat{q}_{Tx}(t) + i\hat{q}_{Ty}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t) - i\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t)] \\
&\quad \frac{1}{2} (\mathbf{1} + \hat{q}_{Tz}(t) + \hat{q}_{Cx}(t) - \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t)) \\
&= \frac{1}{4} [\hat{q}_{Tx}(t) + i\hat{q}_{Ty}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t) - i\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t) + \\
&\quad + \hat{q}_{Tx}(t)\hat{q}_{Tz}(t) + i\hat{q}_{Ty}(t)\hat{q}_{Tz}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t)\hat{q}_{Tz}(t) - i\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t)\hat{q}_{Tz}(t) + \\
&\quad + \hat{q}_{Tx}(t)\hat{q}_{Cx}(t) + i\hat{q}_{Ty}(t)\hat{q}_{Cx}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t)\hat{q}_{Cx}(t) - i\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t)\hat{q}_{Cx}(t) - \\
&\quad - \hat{q}_{Tx}(t)\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t) - i\hat{q}_{Ty}(t)\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t) - \\
&\quad - \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t)\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t) + i\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t)\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t)] \\
&= \frac{1}{4} [\hat{q}_{Tx}(t) + i\hat{q}_{Ty}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t) - i\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t) + \\
&\quad - i\hat{q}_{Ty}(t) - \hat{q}_{Tx}(t) - i\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t) + \\
&\quad + \hat{q}_{Tx}(t)\hat{q}_{Cx}(t) + i\hat{q}_{Ty}(t)\hat{q}_{Cx}(t) + \hat{q}_{Tx}(t) - i\hat{q}_{Ty}(t) + \\
&\quad + i\hat{q}_{Ty}(t)\hat{q}_{Cx}(t) + \hat{q}_{Tx}(t)\hat{q}_{Cx}(t) + i\hat{q}_{Ty}(t) - \hat{q}_{Tx}(t)] \\
&= \frac{1}{4} [\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t) + \hat{q}_{Tx}(t)\hat{q}_{Cx}(t) + \hat{q}_{Tx}(t)\hat{q}_{Cx}(t)] \\
&\quad = \frac{1}{4} [4\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t)] \\
&\Rightarrow \hat{q}_{Tx}(t+1) = \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t).
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Em seguida, a componente \hat{q}_{Ty} :

$$\begin{aligned}
\hat{q}_{Ty}(t+1) &= \frac{1}{2} [\hat{q}_{Ty}(t) - i\hat{q}_{Tx}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t) + i\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t)] \\
&\quad \frac{1}{2} (\mathbf{1} + \hat{q}_{Tz}(t) + \hat{q}_{Cx}(t) - \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t)) \\
&= \frac{1}{4} [\hat{q}_{Ty}(t) - i\hat{q}_{Tx}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t) + i\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t) + \\
&+ \hat{q}_{Ty}(t)\hat{q}_{Tz}(t) - i\hat{q}_{Tx}(t)\hat{q}_{Tz}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t)\hat{q}_{Tz}(t) + i\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t)\hat{q}_{Tz}(t) + \\
&\hat{q}_{Ty}(t)\hat{q}_{Cx}(t) - i\hat{q}_{Tx}(t)\hat{q}_{Cx}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t)\hat{q}_{Cx}(t) + i\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t)\hat{q}_{Cx}(t) + \\
&\quad -\hat{q}_{Ty}(t)\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t) + i\hat{q}_{Tx}(t)\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t) - \\
&\quad -\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t)\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t) - i\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t)\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t)] \\
&= \frac{1}{4} [\hat{q}_{Ty}(t) - i\hat{q}_{Tx}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t) + i\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t) + \\
&\quad + i\hat{q}_{Tx}(t) - \hat{q}_{Ty}(t) + i\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t) + \\
&\quad \hat{q}_{Ty}(t)\hat{q}_{Cx}(t) - i\hat{q}_{Tx}(t)\hat{q}_{Cx}(t) + \hat{q}_{Ty}(t) + i\hat{q}_{Tx}(t) + \\
&\quad -i\hat{q}_{Tx}(t)\hat{q}_{Cx}(t) + \hat{q}_{Ty}(t)\hat{q}_{Cx}(t) - i\hat{q}_{Tx}(t) - \hat{q}_{Ty}(t)] \\
&= \frac{1}{4} [\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t) + \hat{q}_{Cx}(t) + \hat{q}_{Ty}(t) + \hat{q}_{Ty}(t)\hat{q}_{Cx}(t)] \\
&\quad = \frac{1}{4} [4\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t)] \\
&\Rightarrow \hat{q}_{Ty}(t+1) = \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t).
\end{aligned} \tag{B.9}$$

E, finalmente, a componente \hat{q}_{Tz} :

$$\begin{aligned}
\hat{q}_{Tz}(t+1) &= \frac{1}{2} [\hat{q}_{Tz}(t) + \mathbb{1} + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t) - \hat{q}_{Cx}(t)] \\
&= \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \hat{q}_{Tz}(t) + \hat{q}_{Cx}(t) - \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t)) \\
&= \frac{1}{4} [\hat{q}_{Tz}(t) + \mathbb{1} + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t) - \hat{q}_{Cx}(t) + \\
&+ \hat{q}_{Tz}(t)\hat{q}_{Tz}(t) + \mathbb{1}\hat{q}_{Tz}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t)\hat{q}_{Tz}(t) - \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t) + \\
&+ \hat{q}_{Tz}(t)\hat{q}_{Cx}(t) + \mathbb{1}\hat{q}_{Cx}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t)\hat{q}_{Cx}(t) - \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Cx}(t) - \\
&\quad - \hat{q}_{Tz}(t)\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t) - \mathbb{1}\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t) - \\
&\quad - \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t)\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t) + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t)] \\
&= \frac{1}{4} [\hat{q}_{Tz}(t) + \mathbb{1} + \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t) - \hat{q}_{Cx}(t) + \\
&\quad + \mathbb{1} + \hat{q}_{Tz}(t) + \hat{q}_{Cx}(t) - \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t) + \\
&\quad + \hat{q}_{Tz}(t)\hat{q}_{Cx}(t) + \hat{q}_{Cx}(t) + \hat{q}_{Tz}(t) - \mathbb{1} - \\
&\quad - \hat{q}_{Cx}(t) - \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tz}(t) - \mathbb{1} + \hat{q}_{Tz}(t)] \\
&= \frac{1}{4} [\hat{q}_{Tz}(t) + \hat{q}_{Tz}(t) + \hat{q}_{Tz}(t) + \hat{q}_{Tz}(t)] \\
&= \frac{1}{4} [4\hat{q}_{Tz}(t)] \\
&\Rightarrow \hat{q}_{Tz}(t+1) = \hat{q}_{Tz}(t).
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Portanto, a transformação do qubit após a operação da porta CNOT é

$$\hat{\mathbf{q}}_T(t+1) = (\hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Tx}(t), \hat{q}_{Cx}(t)\hat{q}_{Ty}(t), \hat{q}_{Tz}(t)). \tag{B.11}$$

Através do mesmo procedimento para o qubit controle, obtemos a transformação

$$\hat{\mathbf{q}}_C(t+1) = (\hat{q}_{Cx}(t), \hat{q}_{Cy}(t)\hat{q}_{Tz}(t), \hat{q}_{Cz}(t)\hat{q}_{Tz}(t)). \tag{B.12}$$

APÊNDICE C – Equações-guia dos qubits S e M

Para determinar a equação-guia do qubit S em $t = 1$, substituímos a função de onda 4.4 na equação-guia 2.14:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_S(\mathbf{r}_S; t = 1) &= \frac{\hbar}{m_S} \text{Im} \left(\nabla_S \ln \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{S,1}(\mathbf{r}_S) + \varphi_{S,-1}(\mathbf{r}_S)) \varphi_{M,1}(\mathbf{r}_M) \right] \right) \\
 &= \frac{\hbar}{m_S} \text{Im} \left(\nabla_S \left[\ln (\varphi_{S,1}(\mathbf{r}_S) + \varphi_{S,-1}(\mathbf{r}_S)) + \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{M,1}(\mathbf{r}_M) \right) \right] \right) \\
 &= \frac{\hbar}{m_S} \text{Im} \left(\nabla_S \ln (\varphi_{S,1}(\mathbf{r}_S) + \varphi_{S,-1}(\mathbf{r}_S)) + \nabla_S \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{M,1}(\mathbf{r}_M) \right) \right) \\
 &\Rightarrow \mathbf{v}_S(\mathbf{r}_S; t = 1) = \frac{\hbar}{m_S} \text{Im} [\nabla_S \ln (\varphi_{S,1}(\mathbf{r}_S) + \varphi_{S,-1}(\mathbf{r}_S))].
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

Após a aplicação da porta CNOT, temos a função de onda 4.5 para substituir em 2.14:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_S(\mathbf{r}_S; t = 2) &= \frac{\hbar}{m_S} \text{Im} \left(\nabla_S \ln \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{S,1}(\mathbf{r}_S) \varphi_{M,1}(\mathbf{r}_M) + \varphi_{S,-1}(\mathbf{r}_S) \varphi_{M,-1}(\mathbf{r}_M)) \right] \right) \\
 &= \frac{\hbar}{m_S} \text{Im} \left(\nabla_S \left[\ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \ln (\varphi_{S,1}(\mathbf{r}_S) \varphi_{M,1}(\mathbf{r}_M) + \varphi_{S,-1}(\mathbf{r}_S) \varphi_{M,-1}(\mathbf{r}_M)) \right] \right) \\
 &= \frac{\hbar}{m_S} \text{Im} \left(\nabla_S \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \nabla_S \ln (\varphi_{S,1}(\mathbf{r}_S) \varphi_{M,1}(\mathbf{r}_M) + \varphi_{S,-1}(\mathbf{r}_S) \varphi_{M,-1}(\mathbf{r}_M)) \right) \\
 &\Rightarrow \mathbf{v}_S(\mathbf{r}_S; t = 2) = \frac{\hbar}{m_S} \text{Im} [\nabla_S \ln (\varphi_{S,1}(\mathbf{r}_S) \varphi_{M,1}(\mathbf{r}_M) + \varphi_{S,-1}(\mathbf{r}_S) \varphi_{M,-1}(\mathbf{r}_M))].
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

O cálculo da equação-guia do qubit M em $t = 2$ é análogo, de forma que

$$\mathbf{v}_M(\mathbf{r}_M; t = 2) = \frac{\hbar}{m_M} \text{Im} [\nabla_M \ln (\varphi_{S,1}(\mathbf{r}_S) \varphi_{M,1}(\mathbf{r}_M) + \varphi_{S,-1}(\mathbf{r}_S) \varphi_{M,-1}(\mathbf{r}_M))]. \tag{C.3}$$